Examen de Turbulence - jeudi 8 janvier 2015 - 2h30
Support de cours et notes personnelles autorisées.

Les notations utilisées sont celles du cours. L'argumentation ainsi que les commentaires associés aux résultats établis devront être présentés avec soin.

Relation de Fukagata, Iwamoto & Kasagi (2002) **(10 pts)**

Fukagata, Iwamoto & Kasagi[1] cherchent à établir quantitativement le lien qui existe entre la distribution transversale du terme croisé $\overline{u_1'u_2'}$ du tenseur de Reynolds, et le coefficient local de frottement $c_f(x_1)$ pour un écoulement incompressible de paroi. On se propose d'analyser cette relation pour le cas d'un écoulement turbulent se développant sur une paroi plane.

Toutes les variables seront adimensionnalisées en prenant la vitesse externe $U_{e1}^\star$ comme échelle de vitesse de référence, et l'épaisseur de la couche limite $\delta^\star$ comme échelle de longueur, la masse volumique $\rho^\star$ étant supposée constante ici. Les variables *dimensionnelles* seront marquées d'un astérix $--^\star$. On a par conséquent $\overline{U}_1 = \overline{U}_1^\star / U_{e1}^\star$, $x_2 = x_2^\star/\delta^\star$ et $\overline{P} = \overline{P}^\star/(\rho^\star {U_{e1}^\star}^2)$ à titre d'exemple. Le nombre de Reynolds est ici construit avec la définition classique suivante $\mathrm{Re}_\delta = U_{e1}^\star\,\delta^\star/\nu^\star$.

1. Rappeler sans démonstration l'équation de Navier-Stokes moyennée exacte gouvernant la composante $\overline{U}_1$ (sans dimension donc) de la vitesse.

2. Montrer que l'on peut mettre cette équation sous la forme suivante :

$$-\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overline{u_1'u_2'} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}\right) + \bar{I}_1 \tag{1}$$

3. Que représente la contribution $\bar{I}_1$ pour un écoulement de couche limite ? Que vaudrait $\bar{I}_1$ pour le cas du canal plan ?

4. Donner l'expression simplifiée de $\bar{I}_1$ pour la couche limite.

5. Donner l'expression du coefficient de frottement local $c_f(x_1)$ et de la contrainte totale moyenne vue par le fluide $\bar{\tau}_t$. Montrer que $\bar{\tau}_t(x_2 = 0) = c_f/2$.

La relation de Fukagata, Iwamoto & Kasagi s'obtient en intégrant trois fois par parties l'équation (1) dans la direction transverse. On admettra cette relation[1,2] (la démonstration est donnée en annexe pour les curieux),

$$c_f = \underbrace{\frac{4(1-\delta_1)}{\mathrm{Re}_\delta}}_{\text{(a)}} \underbrace{+4\int_0^1 (1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})dx_2}_{\text{(b)}} \underbrace{-2\int_0^1 (1-x_2)^2 \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial x_2} dx_2}_{\text{(c)}} \tag{2}$$

où δ_1 est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite.

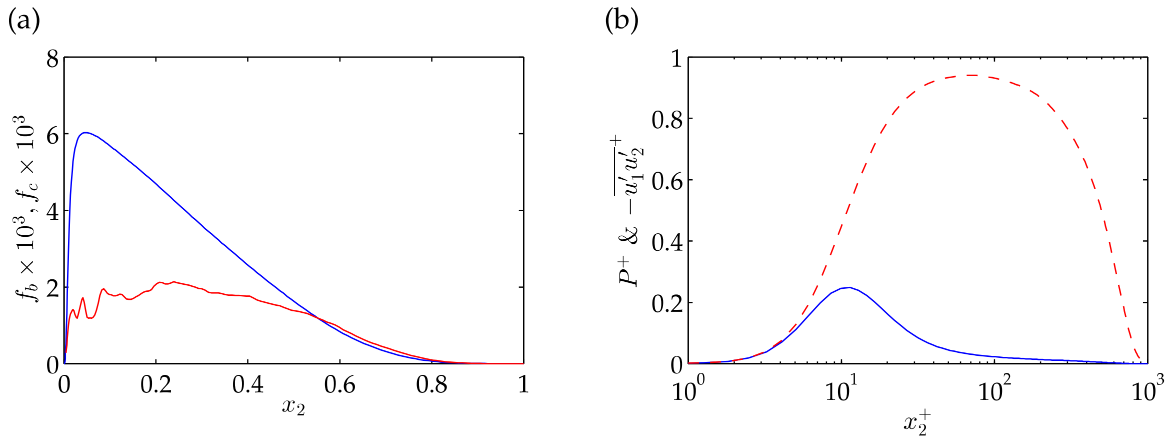

FIGURE 1 – (a) Évolution des termes —— $f_b = 4(1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})$ et —— $f_c = -2(1-x_2)^2\partial\overline{\tau}_t/\partial x_2$. (b) Évolution du terme de production $\mathcal{P}^+$ —— et du tenseur de Reynolds $-\overline{u_1'u_2'}^+$ - - - . Couche limite à $\text{Re}_\delta = 1.9 \times 10^4$ ou $\text{Re}^+ = 802$ à partir des simulations numériques de Schlatter *et al.*[3]

6. Que devient la relation (2) pour un écoulement laminaire ? En utilisant la solution de Blasius rappelée ci-dessous, calculer le terme (a) ainsi que c_f en fonction de Re_δ.

$$\delta^\star \simeq 4.92\sqrt{\frac{\nu^\star x_1^\star}{U_{e1}^\star}} \qquad \delta_1^\star \simeq 1.72\sqrt{\frac{\nu^\star x_1^\star}{U_{e1}^\star}} \qquad \delta_\theta^\star \simeq 0.664\sqrt{\frac{\nu^\star x_1^\star}{U_{e1}^\star}} \qquad c_f \simeq \frac{0.664}{\text{Re}_{x_1}^{1/2}}$$

7. En déduire alors la contribution du terme (c).

8. Des résultats obtenus pour une couche limite turbulente sont reproduits sur la figure 1. On estime numériquement dans ce cas que le terme (a) représente environ 5.2% de c_f, le terme (b) 64.2% et le terme (c) 31.8 % de c_f. Commenter rapidement ces résultats.

9. Que recommanderiez-vous comme stratégie pour réduire la traînée de frottement d'une couche limite ? Rapeller la relation qui existe entre x_2 et x_2^+. Quelles échelles contribuent significativement à c_f ?

Références

[1] Fukagata, K., Iwamoto, K. & Kasagi, N., 2002, « Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows », *Phys. Fluids*, **14**(11), L73-L76.

[2] Mehdi, F. & White, C. M., 2011, « Integral form of the skin friction coefficient suitable for experimental data », *Exp. Fluids*, **50**, 43-51.

[3] Schlatter, P., Örlü, R., Li, Q., Brethouwer, G., Fransson, J. H. M., Johansson, A. V., Alfredsson, P. H. & Hennigson, D. S., 2009, « Turbulent boundary layers up to $\text{Re}_\theta = 2500$ studied through simulation and experiment », *Phys. Fluids*, **21**, 051702, 1-4.

Fluctuations de vitesse **(4 pts)**

On équipe un avion avec un fil chaud sur le bord d'attaque d'une aile, pour mesurer la fluctuation de la vitesse au cours d'un vol dans une couche limite atmosphérique. La vitesse de l'avion est de 50 m.s^{-1}, les fluctuations de vitesses dans cette couche limite atmosphérique sont de l'ordre de 0.5 m.s^{-1}, et l'échelle de longueur des grandes structures turbulentes est de l'ordre de 100 m. On souhaite que le fil chaud puisse mesurer tout le spectre de la turbulence. Quelle est la fréquence la plus élevée que va rencontrer le fil chaud au cours du vol ? Quelle longueur devrait avoir ce fil chaud ?

Maximum du terme de production en canal plan **(6 pts)**

On considère un écoulement de canal plan établi de hauteur $2h$, et on cherche à déterminer la valeur maximum du terme de production.

1. Montrer (rapidement) en se référant aux transparents du cours, que la contrainte totale $\bar{\tau}_t(x_2)$ peut s'écrire comme
$$\bar{\tau}_t(x_2) = -\rho\overline{u_1'u_2'} + \mu\frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = \bar{\tau}_w\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)$$
2. Donner l'expression de la composante transverse du tenseur de Reynolds $-\overline{u_1'u_2'}^{+}$ en fonction de $S^+ = d\overline{U}_1^+/dx_2^+$ et de $\mathrm{Re}^+ = u_\tau h/\nu$.
3. À quelle condition le terme de production $\mathcal{P}^+$ est maximum. Montrer que pour des grands Reynolds, cela correspond à avoir égalité de la composante transverse du tenseur de Reynolds $-\overline{u_1'u_2'}^{+}$ et de la contrainte visqueuse S^+.
4. Montrer alors que lorsque les contributions du tenseur de Reynolds et du tenseur visqueux sont égales, le terme de production peut s'écrire :
$$\mathcal{P}^+ = {S^+}^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x_2^+}{\mathrm{Re}^+}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$
5. Comparer ce résultat avec la figure 1(b).

Annexe : démonstration de la relation de Fukagata, Iwamoto & Kasagi

On intégre trois fois par parties l'équation (1) dans la direction transverse,[1]

$$-\frac{d\overline{P}}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overline{u_1'u_2'} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}\right) + \overline{I}_1 = -\frac{\partial \overline{\tau}_t}{\partial x_2} + \overline{I}_1$$

Pour les termes $\overline{I}_1$ et $\frac{d\overline{P}}{dx_1}$, on obtient respectivement :

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &= \int_0^1 \int_0^{x_2} \int_0^{x_2'} \overline{I}_1(x_2'')dx_2''dx_2'dx_2 \\
&= \underbrace{\left[(x_2-1)\int_0^{x_2}\int_0^{x_2'} \overline{I}_1(x_2'')dx_2''dx_2'\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (x_2-1)\int_0^{x_2} \overline{I}_1(x_2'')dx_2''\, dx_2 \\
&= \underbrace{-\frac{(x_2-1)^2}{2}\int_0^{x_2} \overline{I}_1(x_2'')dx_2''}_{=0} + \int_0^1 \frac{(x_2-1)^2}{2}\overline{I}_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$\text{(b)} = \int_0^1 \frac{(x_2-1)^2}{2}\frac{d\overline{P}}{dx_1}dx_2 = \frac{d\overline{P}}{dx_1}\int_0^1 \frac{(x_2-1)^2}{2}dx_2 = \frac{1}{6}\frac{d\overline{P}}{dx_1}$$

Pour le troisième terme, on intégre directement une première fois, avant de reproduire la même stratégie pour les deux autres intégrations,

$$\begin{aligned}
\text{(c)} &= \int_0^1 \int_0^{x_2} \int_0^{x_2'} \frac{\partial \overline{\tau}_t(x_2'')}{\partial x_2}dx_2''dx_2'dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_2} \left(\overline{\tau}_t(x_2') - \frac{c_f}{2}\right)dx_2'dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_2} \left(-\overline{u_1'u_2'} - \frac{c_f}{2}\right)dx_2'dx_2 + \int_0^1 \int_0^{x_2} \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}dx_2'dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c')} &= \underbrace{\left[(x_2-1)\int_0^{x_2}\left(-\overline{u_1'u_2'} - \frac{c_f}{2}\right)dx_2'\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (x_2-1)\left(-\overline{u_1'u_2'} - \frac{c_f}{2}\right)dx_2 \\
&= \int_0^1 (1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})dx_2 - \frac{c_f}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{(c'')} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^1 \overline{U}_1 dx_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1 - \int_0^1 (1-\overline{U}_1)dx_2\right) = \frac{1-\delta_1}{\mathrm{Re}}$$

On obtient au final pour $\overline{I}_1 = -d\overline{P}/dx_1 + \partial\overline{\tau}_t/\partial x_1$,

$$\int_0^1 \frac{(x_2-1)^2}{2}\overline{I}_1 dx_2 = -\frac{1}{6}\frac{d\overline{P}}{dx_1} + \int_0^1 (1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})dx_2 - \frac{c_f}{4} + \frac{1-\delta_1}{\mathrm{Re}}$$

soit encore pour le coefficient de frottement local,

$$c_f = \frac{4(1-\delta_1)}{\mathrm{Re}} + 4\int_0^1 (1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})dx_2 \underbrace{-2\int_0^1 (1-x_2)^2\overline{I}_1 dx_2 - \frac{2}{3}\frac{d\overline{P}}{dx_1}}_{-4[\text{(a)}+\text{(b)}]} \tag{3}$$

qui est l'équation originale de Fukagata *et al.* On peut finalement observer que,

$$-\overline{I}_1 = \frac{d\overline{P}}{dx_1} - \frac{\partial \overline{\tau}_t}{\partial x_2}$$

ce qui permet d'obtenir une variante[2] à l'équation (3) en regroupant les termes (a) et (b), correspondante à l'Eq. (2)

$$c_f = \frac{4(1-\delta_1)}{\mathrm{Re}} + 4\int_0^1 (1-x_2)(-\overline{u_1'u_2'})dx_2 - 2\int_0^1 (1-x_2)^2 \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial x_2} dx_2$$

On peut également reprendre l'intégration du terme (c), en appliquant cette fois ci la même stratégie que pour le calcul des termes (a) et (b).[2] On développe alors comme suit,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{c}) &= \int_0^1 \int_0^{x_2} \int_0^{x_2'} \frac{\partial \bar{\tau}_t(x_2'')}{\partial x_2} dx_2'' dx_2' dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_2} \left(\bar{\tau}_t(x_2') - \frac{c_f}{2} \right) dx_2' dx_2 \\
&= \underbrace{\left[(x_2 - 1) \int_0^{x_2} \left(\bar{\tau}_t(x_2') - \frac{c_f}{2} \right) dx_2' \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (x_2 - 1) \left(\bar{\tau}_t(x_2) - \frac{c_f}{2} \right) dx_2 \\
&= -\int_0^1 (x_2 - 1) \bar{\tau}_t(x_2) dx_2 - \frac{c_f}{4}
\end{aligned}$$

Une troisième expression est ainsi obtenue pour c_f, en utilisant toujours le regroupement des termes (a) et (b) déjà mentionné plus haut,

$$c_f = 4\int_0^1 (1-x_2)\bar{\tau}_t(x_2) dx_2 - 2\int_0^1 (1-x_2)^2 \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial x_2} dx_2 \tag{4}$$