Exercice n°11

1 Spectre de Von Kármán et modification de Pao

Pour entreprendre une simulation numérique directe d'un écoulement turbulent, il est souvent nécessaire d'initialiser le champ de vitesse avec une turbulence synthétique suffisament réaliste. Pour cela, on a besoin d'un spectre d'énergie cinétique turbulente analytique, comme celui proposé par exemple par von Kármán (1948) et modifié par la suite par Pao (1967).

1. La spectre proposé par von Kármán pour une turbulence isotrope est le suivant :

$$E\,(k) = A\frac{u'^2}{k_e}\frac{(k/k_e)^4}{\left[1+(k/k_e)^2\right]^{17/6}}$$

où A et k_e sont deux constantes, et $u'^2 = 2/3\bar{k}$, $\bar{k}$ désignant l'énergie cinétique turbulente. Préciser la dimension de la constante A. Que dire de la forme asymptotique du spectre lorsque $k \to \infty$?

2. En utilisant la définition de E à partir de l'énergie cinétique k, calculer la constante A.

3. Déterminer le nombre d'ondes k pour avoir E_{max}. Quel sens physique peut-on donner à k_e ? Tracer l'allure du spectre.

4. Que dire de l'expression de la dissipation ϵ de l'énergie cinétique turbulente associée au spectre de von Kármán ?

5. Pao proposa de modifier le spectre de von Kármán comme suit :

$$E\,(k) = A\frac{u'^2}{k_e}\frac{(k/k_e)^4}{\left[1+(k/k_2)^2\right]^{17/6}}\exp\left[-\frac{3}{2}C_K\left(\frac{k}{k_\eta}\right)^{4/3}\right]$$

où k_η désigne l'échelle de Kolmogorov et C_K la constante de Kolmgorov, $C_K \simeq 3/2$. Que dire de la nouvelle expression du spectre et de la dissipation ?

6. Numériquement (avec Matlab par exemple), tracer les expressions des deux spectres et des deux dissipations respectives. Calculer le spectre unidimensionnel $E_{11}^{(1)}$ et l'échelle intégrale de corrélation longitudinale L_1 pour les deux spectres. Que conclure ?

Fonction BETA

On rappelle ici la définition de la fonction BETA intervenant dans les calculs précédants :

$$B\,(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = 2\int_0^\infty \frac{t^{2x-1}}{\left(1+t^2\right)^{x+y}}dt \qquad x>0, y>0$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2 Fermeture de Pao

On se propose de fermer l'équation de Lin (1947) sur le spectre $E(k)$ du spectre de l'énergie cinétique turbulente, en suivant le raisonnement proposé par Pao (1965). On rappelle l'équation obtenue par transformée de Fourier de l'équation des corrélations d'ordre 2 pour une turbulence isotrope :

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \tag{1}$$

1. Rappeler brièvement la signification physique des trois termes de cette équation, en reprenant les derniers transparents du cours n°6.

2. On considère dans la suite une turbulence stationnaire, et pour fermer cette équation, Pao a proposé un mécanisme de transfert de la forme suivante :

$$S(k) = -\int_0^k T(k')\, dk' = \frac{1}{C_K}\epsilon^{\alpha} k^{\beta} E(k) \tag{2}$$

   où C_K désigne la constante de Kolmogorov. Calculer les exposants α et β pour avoir une expression dimensionnellement acceptable. Donner et commenter l'expression de $S(k)$ lorsque k se trouve dans la zone inertielle.

3. En prenant l'expression (2) pour la fonction T, intégrer l'équation de Lin (1) afin d'obtenir l'expression du spectre E. On pourra, par exemple, introduire la fonction intermédiaire $X(k) = k^{5/3}E(k)$.

4. Déterminer la constante d'intégration en utilisant l'expression de la dissipation ϵ en fonction du spectre E. Montrer que l'on obtient finalement pour le spectre de l'énergie cinétique :

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp\left[-\frac{3C_K}{2}\left(\frac{k}{k_\eta}\right)^{4/3}\right]$$

   où $k_\eta = \epsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ est le nombre d'onde de Kolmogorov.

5. Commenter l'intérêt du résultat obtenu. Donner une illustration graphique rapide.