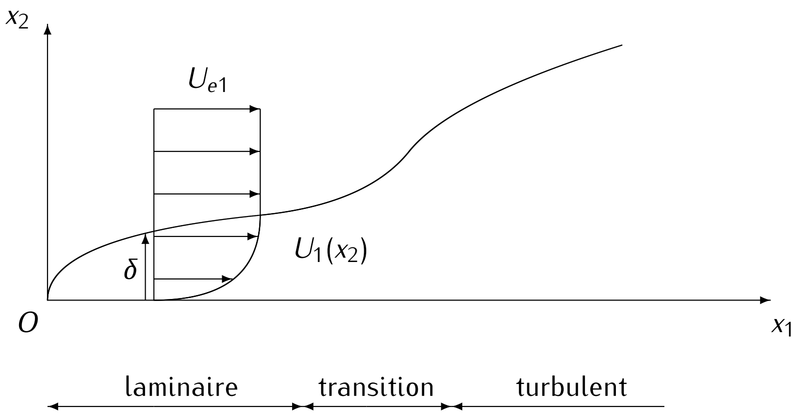
Exercice n°3

Profil de vitesse d'une couche limite laminaire

On se propose de déterminer le profil de vitesse d'une couche limite laminaire bidimensionnelle se développant sur une plaque plane placée dans un écoulement extérieur à la vitesse U_{e1}. On se place dans le cas d'un écoulement de couche limite stationnaire, incompressible et sans gradient de pression longitudinal.



Développement d'une couche limite sur une plaque plane sans gradient extérieur de pression. La transition se produit pour $\mathrm{Re}_{x_1} = x_1 U_{e1}/\nu \simeq 3.2 \times 10^5$, soit encore pour $\mathrm{Re}_\delta = \delta U_{e1}/\nu \simeq 2800$.

1. Rappeler les équations de la couche limite *laminaire*, et les hypothèses associées.

2. En introduisant la fonction de courant ψ définie par $U_1 = \partial\psi/\partial x_2$ et $U_2 = -\partial\psi/\partial x_1$, montrer que le problème se réduit à résoudre l'équation :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial x_2^3}$$

associée aux conditions aux limites suivantes :

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|_{x_2\to\infty} = U_{e1}$$

3. Rappeler brièvement le raisonnement permettant d'aboutir à $\delta \sim \sqrt{\nu x_1 / U_{e1}}$. On pose alors comme variables de similitude :

$$\eta = x_2 \sqrt{\frac{U_{e1}}{\nu x_1}} \qquad \text{et} \qquad \psi\left(x_1, x_2\right) = \sqrt{U_{e1} \nu x_1}\, f\left(\eta\right)$$

Montrer que l'équation vérifiée par f, appelée équation de Blasius (1908), s'écrit :

$$2f''' + ff'' = 0$$

et préciser les conditions aux limites.

4. Résoudre numériquement cette équation. On pourra pour cela prendre comme intervalle de résolution $0 \leq \eta \leq 10$ et intégrer le système du premier ordre (sous Matlab avec ode45.m par exemple) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = g \\ g' = h \\ h' = -\frac{1}{2} f h \end{array} \right. \tag{1}$$

avec comme conditions initiales en $\eta = 0$: $f\left(0\right) = 0, g\left(0\right) = 0$ et $h\left(0\right) = \alpha$. On cherche alors à déterminer la valeur de α pour satisfaire la condition aux limites en $\eta = 10$, à savoir $N(\alpha) \equiv g - 1 = 0$. Une des méthodes les plus simples consiste pour cela à utiliser un algorithme de Newton :

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - N\left(\alpha^n\right) / \left. \frac{\partial N}{\partial \alpha} \right|_{\alpha^n}$$

Un moyen astucieux pour évaluer la dérivée $\partial N / \partial \alpha$ est de résoudre en parallèle du système (??), le système variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F' = G \\ G' = H \\ H' = -\frac{1}{2}\left(Fh + fH\right) \end{array} \right. \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{l} F = \partial f / \partial \alpha \\ G = \partial g / \partial \alpha \\ H = \partial h / \partial \alpha \end{array} \right.$$

auquel on associe les conditions aux limites : $F(0) = 0, G(0) = 0$ et $H(0) = 1$.

5. A partir du calcul de la fonction f, en déduire alors que pour une couche laminaire se développant sur une plaque plane sans gradient de pression, on a :

$$\delta \simeq 4.92 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_{e1}}} \qquad \delta^\star \simeq 1.72 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_{e1}}} \qquad \delta_\theta \simeq 0.664 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_{e1}}} \qquad c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_{e1}^2} = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_{x_1}^{1/2}}$$

On rappelle la définition de l'épaisseur de déplacement $\delta^\star$ et de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ de la couche limite :

$$\delta^\star = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\overline{U}_1}{U_{e1}}\right) dx_2 \qquad \delta_\theta = \int_0^\infty \frac{\overline{U}_1}{U_{e1}} \left(1 - \frac{\overline{U}_1}{U_{e1}}\right) dx_2$$

6. Reconstruire l'expression de la composante transversale U_2 de la vitesse. Que dire de sa limite lorsque $\eta \to \infty$?

7. Tracer les deux profils suivants permettent d'approcher la solution de Blasius, et commenter.

$$\frac{U}{U_{e1}}\left(\tilde{\eta}\right) = 2\tilde{\eta} - \tilde{\eta}^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{U}{U_{e1}}\left(\tilde{\eta}\right) = 2\tilde{\eta} - 2\tilde{\eta}^3 + \tilde{\eta}^4 \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \tilde{\eta} = \frac{x_2}{\delta} \leq 1$$

8. On s'intéresse à l'écoulement se développant par exemple sur une plaque plane embarquée par un TGV, et plus particulièrement à l'état de la couche limite à une distance de 1 mètre à partir du point d'arrêt. Estimer la vitesse maximale à partir de laquelle la couche limite devient turbulente et son épaisseur ? Estimer ensuite le point de transition lorsque le TGV atteint sa vitesse de croisière et estimer de nouveau l'épaisseur de la couche limite en ce point.

9. Reprendre l'application avec un avion de transport, par exemple un moyen courrier de type Airbus A320, dont les caractéristiques du vol de croisière économique sont :

$$\mathrm{M} = 0.76 \qquad \text{altitude de } 10000 \text{ m} \qquad T = -50^{\circ}\ \mathrm{C} \qquad P = 26500 \ \ \mathrm{Pa}$$

L'évolution de la viscosité dynamique μ est uniquement une fonction de la température :

$$\frac{\mu(T)}{\mu(T_0)} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \qquad\qquad \text{loi de Sutherland}$$

avec $\mu(T_0) = 1.716 \ \mathrm{kg.m^{-1}s^{-1}}$, $T_0 = 273.15$ K et $S = 111$ K.

10. On a utilisé l'approximation suivante dans l'étude de la couche limite turbulente :

$$\int_0^{x_2} \left(\overline{U}_1 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} + \overline{U}_2 \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right) dx_2 \simeq -\frac{x_2}{\delta} u_\tau^2$$

Vérifier cette estimation avec la solution laminaire de Blasius.