EXERCICE N°4

Turbulence soumise à une rotation uniforme

1. Écrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible dans un repère $\mathcal{R}$ en rotation uniforme $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{x}_3$ autour de l'axe $\boldsymbol{x}_3$. On rappelle l'expression générale de l'accélération dans un repère non Galiléen à la fin de l'énoncé, voir l'expression (1).

2. Montrer que le terme d'accélération centrifuge peut se regrouper avec le terme de pression,
$$p^{\star} = p - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2}$$
où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est la distance entre l'axe de rotation et le point courant $\boldsymbol{x}$.

3. Écrire alors les équations de Navier-Stokes moyennées, ainsi que l'équation de transport sur le tenseur de Reynolds $\rho \overline{u_i' u_j'}$ (cf. chap. 2 du cours).

4. En supposant que l'écoulement moyen soit nul dans le repère tournant, que dire de l'évolution d'une turbulence initialement isotrope ?

On considère dans toute la suite un champ moyen uniformément cisaillé, $\overline{U}_1 = S x_2$ et $\overline{U}_2 = \overline{U}_3 \equiv 0$, soumis à partir de $t = 0$ à une rotation uniforme $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{x}_3$. A l'instant initial $t = 0$, le champ turbulent est supposé homogène avec
$$\overline{u_1'^2} = u_0^2, \quad \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = u_0^2/2 \quad \text{et} \quad \overline{u_1' u_2'} = \overline{u_2' u_3'} = \overline{u_1' u_3'} = 0$$
où u_0 est une constante.

Dans la suite, on effectue une étude simplifiée de ce problème en négligeant les effets visqueux, ainsi que les corrélations pression-vitesse et les corrélations triples du champ de vitesse : on se place ainsi dans le cadre d'une approximation linéaire (théorie de la distorsion rapide).

5. Simplifier l'équation bilan sur $\overline{u_i' u_j'}$ dans le repère tournant pour obtenir finalement :
$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} = -\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j' \left(2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}'\right)_i} - \overline{u_i' \left(2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}'\right)_j}$$

6. En déduire les équations de transport sur $\overline{u_1'^2}$, $\overline{u_2'^2}$, $\overline{u_3'^2}$ et $\overline{u_1' u_2'}$.

7. Montrer que l'équation sur l'énergie cinétique turbulente k_t ne fait pas apparaître l'accélération de Coriolis. Que peut-on dire du travail des forces de Coriolis ?

8. Intégrer l'équation sur $\overline{u_1' u_2'}$, en distinguant les cas suivants : $\Omega = 0$, $0 < \Omega < S/2$, $\Omega = S/2$ et $\Omega > S/2$.

9. Donner une interprétation physique à ces résultats, en considérant la rotation d'une particule fluide induit respectivement par le cisaillement moyen S et la rotation Ω.

L'accélération absolue $\boldsymbol{\gamma}$ dans un repère Galiléen $\mathcal{R}_0$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_r + \boldsymbol{\gamma}_e + \boldsymbol{\gamma}_c \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_r = \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} \\ \boldsymbol{\gamma}_e = \boldsymbol{\gamma}_0 + \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\gamma}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\gamma}_r$ est l'accélération relative dans le repère non Galiléen $\mathcal{R}$, $\boldsymbol{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$, et $\boldsymbol{\gamma}_c$ est l'accélération de Coriolis. L'accélération du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est notée $\boldsymbol{\gamma}_0$, et $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$. On note $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}$ la vitesse et le déplacement dans le repère non Galiléen $\mathcal{R}$.