

## EXERCICE N°6

On cherche à établir quelques propriétés du tenseur spectral pour une turbulence homogène, ainsi que quelques expressions utiles de la dissipation pour une turbulence homogène ou isotrope.

### 1 Propriétés du tenseur spectral $\phi_{ij}$ pour une turbulence homogène

1. Rappeler la définition du tenseur spectral  $\phi_{ij}$
2. Montrer que ce tenseur possède la symétrie hermitienne, à savoir :

$$\phi_{ij}(-\mathbf{k}) = \phi_{ij}^*(\mathbf{k}) \quad \phi_{ij}(\mathbf{k}) = \phi_{ji}^*(\mathbf{k})$$

en invoquant respectivement que la fonction de corrélation associée est réelle et que la turbulence est homogène.

3. Montrer que pour un champ de vitesse incompressible :

$$k_i \phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0$$

soit encore dans l'espace physique :

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} = 0$$

4. Donner, compte tenu des propriétés précédentes, la forme générale du tenseur  $\phi_{ij}$ . Montrer que ce tenseur peut s'exprimer à partir de seulement 4 fonctions scalaires réelles.

### 2 Quelques expressions de la dissipation en turbulence homogène isotrope

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est défini par la relation :

$$\rho \epsilon = \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

On cherche à déterminer d'autres expressions de la dissipation, permettant de calculer expérimentalement ou numériquement  $\epsilon$ , ou bien encore de donner un sens physique particulier à  $\epsilon$ . On prendra soin de bien préciser les hypothèses utilisées au cours des calculs.

1. Montrer que la dissipation s'écrit :

$$\rho\epsilon = \overline{\tau'_{ij} s'_{ij}} = \frac{1}{2} \overline{\tau'_{ij} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$

2. Montrer que pour une turbulence incompressible, la dissipation peut s'écrire :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_i \partial x_j}}$$

En déduire que pour une turbulence homogène, la dissipation se réduit exactement à  $\epsilon^h$

$$\epsilon = \epsilon^h \equiv \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

3. Montrer que pour une turbulence homogène et incompressible, la dissipation est directement reliée aux composantes de la vorticité par :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} = \overline{\nu \omega_i'^2}$$

4. Montrer que pour une turbulence isotrope :

$$\epsilon = \frac{15}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \right)^2} = 15 \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right)^2}$$

En déduire alors immédiatement les deux relations :

$$\epsilon = 15 \nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda_g^2} = 30 \nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda_f^2}$$

5. Montrer que la dissipation peut s'exprimer pour une turbulence isotrope à partir du spectre unidimensionnel par :

$$\epsilon = 30 \nu \int_0^\infty k_1^2 E_{11}^{(1)}(k_1) dk_1$$