Exercice n°6

Modélisation d'une couche limite turbulente

On s'intéresse à la modélisation du profil de vitesse d'une couche limite turbulente. On rappelle que l'équation gouvernant la vitesse moyenne pour la zone interne de la couche limite peut s'écrire, en utilisant les notations du cours et les variables de paroi, comme :

$$\left(1 + \nu_t^+\right) \frac{d\overline{U}_1^+}{dx_2^+} = 1 \tag{1}$$

1. Résoudre numériquement cette équation dans le cas où l'on utilise un modèle de longueur de mélange $l_m^+ = \kappa x_2^+$ pour estimer la viscosité turbulente ν_t^+. On prendra pour la valeur de la constante de von Kármán $\kappa \simeq 0.39$. Pour intégrer l'équation (1), on exprime analytiquement la dérivée $d\overline{U}_1^+/dx_2^+$ et on intègre alors numériquement cette équation à partir de $x_2^+ = 0$ à l'aide par exemple d'un algorithme de Runge-Kutta sous Matlab, cf. l'annexe au verso.

2. Estimer la constante B de la loi logarithmique en calculant l'expression :

   $$B = \overline{U}_1^+ - \frac{1}{\kappa} \ln x_2^+$$

   à partir de la solution numérique pour $x_2^+ = 200, 300, 400$ et 500. Commenter le résultat obtenu.

3. Comparer la solution numérique obtenue à la solution analytique de (1), donnée par[1]

   $$U_1^+ = \frac{1}{\kappa} \frac{1 - \sqrt{1 + 4\,(\kappa x_2^+)^2}}{2\,\kappa x_2^+} + \frac{1}{\kappa} \ln \left[2\kappa x_2^+ + \sqrt{1 + 4\,(\kappa x_2^+)^2} \right]$$

4. Reprendre l'intégration numérique en utilisant le modèle de fonction de paroi (appelée aussi fonction d'amortissement) proposé par Van Driest[2]

   $$l_m^+ = \kappa x_2^+ \left(1 - e^{-x_2^+/A_0^+}\right) \qquad \text{avec} \qquad A_0^+ = 26$$

5. Tracer les deux profils de vitesse obtenus, ainsi que les deux lois asymptotiques dans la sous-couche visqueuse et dans la région logarithmique. Tracer également sur une autre figure les deux lois de longueur de mélange et commenter.

6. Effectuer un développement limité des grandeurs l_m^+ et $-\overline{u_1' u_2'}^+$ pour les deux modèles afin d'obtenir le comportement de ces variables lorsque $x_2^+ \to 0$.

7. Par ailleurs, en considérant la relation $\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0$, en déduire le comportement théorique de la quantité $-\overline{u_1' u_2'}^+$ lorsque $x_2^+ \to 0$?

8. Reprendre l'intégration de l'équation complète gouvernant le profil de la vitesse moyenne avec le modèle de Van Driest

$$\left(1+\nu_t^+\right)\frac{d\overline{U}_1^+}{dx_2^+} = 1 - \frac{x_2^+}{\mathrm{Re}^+} \qquad 0 \leq x_2^+ \leq \mathrm{Re}^+$$

i.e. en y incluant le terme en x_2/δ pour obtenir la loi logarithmique déficitaire. On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes, tirées de données expérimentales : $U_{e1} = 100$ m.s^{-1}, $\delta = 2$ cm, $u_\tau = 4$ m.s^{-1} et $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}.

Références

[1] Hinze, J. O., 1975, *Turbulence*, McGraw-Hill International Book Company, New York.

[2] Van Driest, E. R., 1956, On turbulent flow near a wall, *Journal of Aeronautical Sciences*, 23(11), 1007-1011.

Annexe

Pour intégrer l'équation différentielle, on peut utiliser la fonction *ode45.m* de Matlab. Autrement, on rappelle rapidement la formulation de l'algorithme de Runge-Kutta permettant d'intégrer l'équation différentielle du premier ordre $\partial U/\partial t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}, t)$. Pour un opérateur $\boldsymbol{F}$ non linéaire, on obtient l'ordre 4 avec l'algorithme suivant :

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + \Delta t\left(b_1\boldsymbol{K}^1 + b_2\boldsymbol{K}^2 + b_3\boldsymbol{K}^3 + b_4\boldsymbol{K}^4\right)$$

où :

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}^1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n, t^n) \\ \boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n + a_{21}\boldsymbol{K}^1, t^n + c_2\Delta t) \\ \boldsymbol{K}^3 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n + a_{32}\boldsymbol{K}^2, t^n + c_3\Delta t) \\ \boldsymbol{K}^4 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n + a_{43}\boldsymbol{K}^3, t^n + c_4\Delta t) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_i \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|cccc} c_1 = 0 & 0 & & & \\ c_2 = 1/2 & 1/2 & & & \\ c_3 = 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ c_4 = 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$