Exercice n°5

Quelques propriétés du modèle de turbulence $k_t - \epsilon$

On s'intéresse dans cet exercice à quelques propriétés du modèle de turbulence $k_t - \epsilon$, un des plus utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées. On rappelle, en préambule, les équations de ce modèle pour un écoulement turbulent incompressible. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement du champ moyen s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{U}_i\,\overline{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{P} + \frac{2}{3}\rho k_t\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2(\mu+\mu_t)\overline{S}_{ij}\right] \tag{2}$$

où l'on rappelle que $\overline{S}_{ij} = (\partial\overline{U}_i/\partial x_j + \partial\overline{U}_j/\partial x_i)/2$. Pour fermer l'équation de Navier-Stokes moyennée, on a modélisé le tenseur de Reynolds en introduisant une viscosité turbulent μ_t telle que :

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = 2\mu_t\overline{S}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k_t\delta_{ij} \tag{3}$$

qui est elle-même exprimée à partir de l'énergie cinétique turbulente k_t et de la dissipation ϵ par :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k_t^2}{\epsilon} \tag{4}$$

Pour un écoulement à grand nombre de Reynolds, les deux équations de transport nécessaires pour évaluer k_t et $\epsilon \simeq \epsilon^h$ sont données par :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k_t)}{\partial t} + \overline{U}_i\frac{\partial(\rho k_t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k_t}{\partial x_j}\right] + \mathcal{P} - \rho\epsilon \\ \frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \overline{U}_i\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\epsilon}{k_t}\left(C_{\epsilon 1}\mathcal{P} - C_{\epsilon 2}\rho\epsilon\right) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où $\mathcal{P}$ représente le terme de production de l'énergie cinétique turbulente k_t par les gradients de l'écoulement moyen :

$$\mathcal{P} = -\rho\overline{u_i'u_j'}\,\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j} \tag{6}$$

Ce modèle possède 5 constantes, que l'on souhaite les plus universelles possible. Dans sa formulation standard, on utilise :

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \tag{7}$$

1. Terme de production

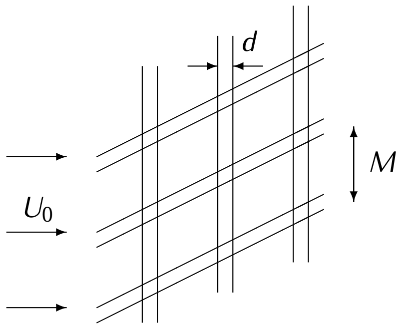
1. Montrer que le terme de production peut également s'écrire comme $\mathcal{P} = 2\mu_t \bar{S}_{ij}^2$

2. En étudiant la fonction $f(\lambda) = \overline{(u'_i + \lambda u'_j)^2}$, montrer que le tenseur de Reynolds doit satisfaire l'inégalité de Schwarz, à savoir :
$$\overline{u'_i u'_j}^2 \;\leq\; \overline{u'^2_i}\;\overline{u'^2_j}$$

3. En considérant le cas d'un écoulement moyen 2-D purement cisaillé, $\overline{U}_1 = \overline{U}_1(x_2)$ et $\overline{U}_2 = \overline{U}_3 = 0$, montrer que le modèle $k_t - \epsilon$ impose d'avoir,
$$9C_\mu^2\; \bar{S}_{12}^2 \;\leq\; \frac{\epsilon^2}{k_t^2} \sim \omega_t^2$$
Quel sens peut-on donner à ω_t ?

2. Détermination de la constante C_{ϵ_2}

Pour un écoulement sans gradient de vitesse moyenne, une turbulence homogène ne peut que décroître puisque le terme de production est nul, $\mathcal{P} \equiv 0$. On peut obtenir cet écoulement expérimentalement en faisant passer un écoulement uniforme de vitesse $\overline{U}_1 = U_0$ au travers d'une grille constituée de barreaux, configuration qui sera discutée par la suite en cours. Les deux équations du système (5) se réduisent alors à :



$$\begin{cases} U_0 \dfrac{\partial k_t}{\partial x_1} \simeq -\epsilon \\[2mm] U_0 \dfrac{\partial \epsilon}{\partial x_1} \simeq -C_{\epsilon 2}\dfrac{\epsilon^2}{k_t} \end{cases}$$

4. Montrer que la solution à ce système peut s'écrire comme :
$$k_t = k_{t0}\left[1 + (C_{\epsilon_2} - 1)\frac{\epsilon_0}{k_0}\frac{x_1}{U_0}\right]^{-\frac{1}{C_{\epsilon_2}-1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left(\frac{k_t}{k_{t0}}\right)^{C_{\epsilon_2}}$$
où $k_t = k_{t0}$ et $\epsilon = \epsilon_0$ en $x_1 = 0$.

5. Expérimentalement, voir par exemple les expériences Comte-Bellot & Corrsin (1966), on mesure des lois de décroissance de l'énergie cinétique telles ques $(k/k_0) \sim (t/t_0)^{-n}$ avec $n \simeq 1.3$, dans un repère se déplaçant à la vitesse U_0, avec par conséquent $t = x_1/U_0$. En déduire alors une estimation de $C_{\epsilon 2}$.

6. Comment évolue l'échelle de longueur $L = k_t^{3/2}/\epsilon$? Donner un sens à cette échelle.

3. Calibration des constantes C_μ et C_{ϵ_1}

On observe expérimentalement dans les écoulements cisaillés, et en particulier dans la région logarithmique d'une couche limite turbulente où $P \sim \rho\epsilon$, voir par exemple Bradshaw et al. (1967), que :
$$-\frac{\overline{u'_1 u'_2}}{k_t} \simeq 0.30$$

Pour déterminer la constante C_μ, on considère le cas d'un écoulement établi dans un canal plan, avec par conséquent $\overline{U}_1 = \overline{U}_1(x_2), \overline{U}_2 = \overline{U}_3 = 0$, et on se place dans la région où le profil de la vitesse moyenne est logarithmique.

6. En considérant l'équilibre $\mathcal{P} \simeq \rho\epsilon$, montrer que :

$$-\frac{\overline{u_1'u_2'}}{k_t} = C_\mu^{1/2}$$

et en déduire une estimation de C_μ.

7. En se plaçant dans la région où le profil de vitesse moyenne suit la loi logarithmique, donner l'expression de $d\overline{U}_1/dx_2$ et de ϵ, montrer aussi que $\nu_t \simeq \kappa u_f x_2$ et que $k_t \simeq u_f^2/\sqrt{C_\mu}$.

8. En notant que les deux équations du système (5) se résument dans le cas considéré à,

$$0 = \mathcal{P} - \rho\epsilon \qquad \text{et} \qquad 0 = \frac{d}{dx_2}\left[\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{d\epsilon}{dx_2}\right] + \frac{\epsilon}{k_t}\left(C_{\epsilon 1}P - C_{\epsilon 2}\rho\epsilon\right)$$

(on notera en particulier que $\mu \ll \mu_t$ dans la loi logarithmique) montrer que l'on doit vérifier la relation :

$$\sigma_\epsilon C_\mu^{1/2}\left(C_{\epsilon_2} - C_{\epsilon_1}\right) = \kappa^2$$

où κ est la constante de von Kármán. Commenter ce résultat.