Exercice n°8

On cherche à établir quelques propriétés du tenseur spectral pour une turbulence homogène, ainsi que quelques expressions utiles de la dissipation pour une turbulence homogène ou isotrope.

1 Propriétés du tenseur spectral ϕ_{ij} pour une turbulence homogène

1. Rappeler la définition du tenseur spectral ϕ_{ij}

2. Montrer que ce tenseur possède la symétrie hermitienne, à savoir :

$$\phi_{ij}(-\boldsymbol{k}) = \phi_{ij}^{\star}(\boldsymbol{k}) \qquad \phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \phi_{ji}^{\star}(\boldsymbol{k})$$

   en invoquant respectivement que la fonction de corrélation associée est réelle et que la turbulence est homogène.

3. Montrer que pour un champ de vitesse incompressible :

$$k_i\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = k_j\phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0$$

   soit encore dans l'espace physique :

$$\frac{\partial R_{ij}(\boldsymbol{r})}{\partial r_i} = \frac{\partial R_{ij}(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} = 0$$

4. Donner, compte tenu des propriétés précédentes, la forme générale du tenseur ϕ_{ij}. Montrer que ce tenseur peut s'exprimer à partir de seulement 4 fonctions scalaires réelles.

2 Expressions de la dissipation pour une turbulence homogène isotrope

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est défini par la relation :

$$\rho\epsilon = \overline{\tau'_{ij}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

On cherche à déterminer d'autres expressions de la dissipation, permettant de calculer expérimentalement ou numériquement ϵ, ou bien encore de donner un sens physique particulier à ϵ. On prendra soin de bien préciser les hypothèses utilisées au cours des calculs.

1. Montrer que la dissipation s'écrit :

$$\rho\epsilon = \overline{\tau'_{ij}s'_{ij}} = \frac{1}{2}\overline{\tau'_{ij}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}$$

2. Montrer que pour une turbulence incompressible, la dissipation peut s'écrire :

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2} = \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \nu\frac{\partial^2\overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i \partial x_j}$$

En déduire que pour une turbulence homogène, la dissipation se réduit exactement à ϵ^h

$$\epsilon = \epsilon^h \equiv \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

3. Montrer que pour une turbulence homogène et incompressible, la dissipation est directement reliée aux composantes de la vorticité par :

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2} = \nu\overline{\omega_i'^2}$$

4. Montrer que pour une turbulence isotrope, la condition d'incompressible et la relation de Kàrmàn & Howarth permettent d'écrire $g = f + (r/2)f'$. En déduire alors que $\lambda_f = \sqrt{2}\lambda_g$.

   Montrer alors que pour une turbulence isotrope,

$$\epsilon = 3\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2} + 6\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2}\right)^2}$$

   et en déduire finalement que :

$$\epsilon = \frac{15}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2}\right)^2} = 15\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \epsilon = 15\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda_g^2} = 30\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda_f^2}$$

5. Montrer que la dissipation peut s'exprimer pour une turbulence isotrope à partir du spectre unidimensionnel par :

$$\epsilon = 30\nu\int_0^\infty k_1^2 E_{11}^{(1)}(k_1)\,dk_1$$