EXERCICE N°9

Modélisation de la fonction de corrélation $f(r)$

On considère une turbulence cinématique tridimensionnelle, incompressible, homogène et isotrope. Le fluide est de l'air, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}. La fonction de corrélation $f(r)$ mesurée est approchée par l'expression suivante :

$$f(r) = e^{-r^2/L^2} \quad \text{avec} \quad L = 0.20 \text{ m} \quad \text{et} \quad u' = 0.10 \text{ m.s}^{-1}$$

1. Calculer l'échelle de corrélation intégrale longitudinale L_f (et contrôler dimensionnellement votre expression).
2. Déterminer le spectre unidimensionnel $E_{11}^{(1)}(k_1)$, et vérifier que $L_f = \pi E_{11}^{(1)}/u'^2\Big|_{k_1=0}$.
3. Déterminer le spectre tridimensionnel $E(k)$ et donner une illustration graphique des deux spectres calculés.
4. Calculer de deux façons le taux moyen d'énergie dissipée par unité de masse ϵ,
   (i) à partir du spectre $E_{11}^{(1)}(k_1)$ ou bien $E(k)$,
   (ii) à partir de la relation $\epsilon = u'^3/L_f$
5. Expliquer la différence obtenue entre les deux estimations (on pourra par exemple calculer le nombre de Reynolds des grosses structures Re_{L_f} pour argumenter la discussion). Laquelle choisiriez-vous au final ?
6. Calculer alors l'échelle de Kolmogorov l_η.

Formulaire.

- On donne l'expression reliant le spectre $E(k)$ au spectre unidimensionnel $E_{11}^{(1)}(k_1)$ pour une turbulence isotrope :

$$E(k) = k^3 \left[\frac{d}{dk_1} \left(\frac{1}{k_1} \frac{d}{dk_1} E_{11}^{(1)}(k_1) \right) \right]_{k_1=k}$$

- On pourra être amené à utiliser les relations suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos(ax)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a^2/2}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$