

Diffusion acoustique par des obstacles

**Partie I : obstacles de forme simple
exemples du cylindre et de la sphère rigides**

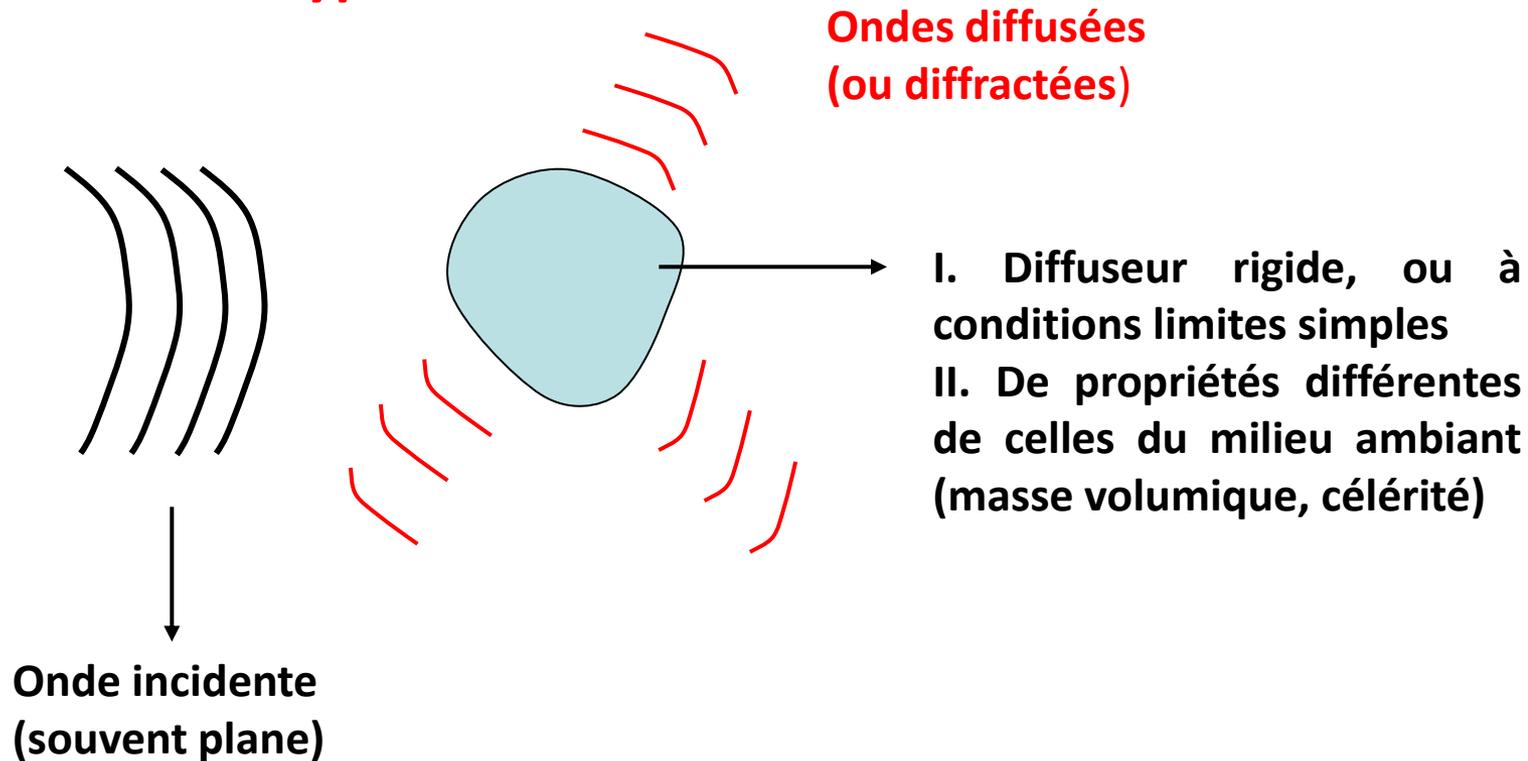
Daniel Juvé

Centre Acoustique

Département MFAE

<http://acoustique.ec-lyon.fr>

Problème type



Objectif : Calculer la répartition de la pression sonore (ou plutôt de l'intensité) dont une fraction est diffusée (« scattered ») dans toutes les directions

Rem : on emploie un peu indifféremment diffusion ou diffraction; diffusion correspond intuitivement à une situation où il n'existe pas de direction très privilégiée, ce qui est le cas en « basses fréquences », lorsque la longueur d'onde λ est comparable à la dimension caractéristique a de l'obstacle.

Dans cette partie on considère que des conditions aux limites simples (Neumann ou Dirichlet ou plus généralement impédance) peuvent être imposées sur l'obstacle. On a donc uniquement à résoudre une équation de propagation (Helmholtz) à l'extérieur de l'obstacle. On considérera dans la suite uniquement des obstacles rigides.

Mise en équations

$$\left(\Delta + k_0^2\right) p = 0; k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{À l'extérieur de l'obstacle}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{Sur la frontière } \Sigma \text{ de l'obstacle}$$

Il faut aussi ajouter une condition de comportement à l'infini.

Il est naturel de scinder le champ de pression totale en la somme d'une onde incidente (le champ qui existerait en l'absence de l'obstacle) et une partie diffusée représentant l'effet de l'obstacle

$$p = p_i + p_d$$

Comme p_i satisfait déjà l'équation de Helmholtz, on a pour p_d :

$$\left(\Delta + k_0^2\right) p_d = 0; k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial p_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$$

Rem : la pression incidente est connue, et sa dérivée normale est proportionnelle à la vitesse particulaire; on voit donc qu'il y a une analogie formelle entre un problème de diffusion et un problème de rayonnement d'une structure vibrante.

Pour la pression diffusée il est facile d'ajouter la condition à l'infini, ou condition de Sommerfeld

$$\text{à 3D: } \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} + ik_0 p \right) = 0$$

$$\text{à 2D: } \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + ik_0 p \right) = 0$$

r désigne la distance depuis le « centre » du diffuseur; on rappelle que la dépendance temporelle des ondes est prise en $\exp(+i\omega t)$

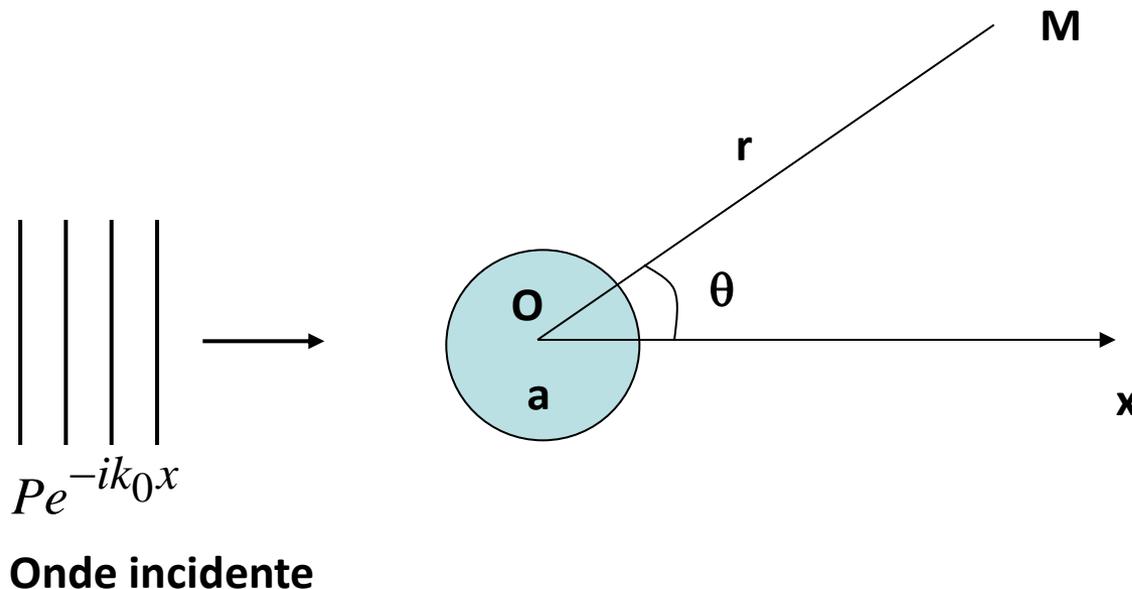
En pratique, cette condition peut être remplacée par les conditions de comportement suivantes, qui traduisent l'idée que, loin de l'obstacle, le comportement radial de l'onde diffusée doit être celui d'une onde sphérique (3D) ou cylindrique (2D) divergente.

$$p_d \sim \frac{e^{-ik_0 r}}{r}; r \rightarrow \infty \text{ (3D)}$$

$$p_d \sim \frac{e^{-ik_0 r}}{\sqrt{r}}; r \rightarrow \infty \text{ (2D)}$$

La solution de ce problème peut se faire numériquement, par exemple en utilisant une formulation par intégrale de frontières ou par éléments finis (même si ça paraît moins pertinent). Dans ce cas la séparation en partie incidente et diffusée n'est pas nécessaire. En général ces approches sont limitées à des fréquences assez faibles (nombre d'onde réduit $k_0 a$ pas trop grand). Il est donc souhaitable de disposer de solutions analytiques de référence pour tester ces approches et étudier les comportements asymptotiques ($k_0 a$ tendant respectivement vers 0 et l'infini).

Seuls des obstacles de forme simple peuvent être considérés, dont la frontière est une ligne coordonnée d'un système dans lequel l'équation de Helmholtz est séparable. En pratique le cas du cylindre et celui de la sphère sont facilement accessibles. Nous développerons les calculs pour la diffusion par un cylindre circulaire rigide (rayon a) attaqué par une onde plane.



On utilise naturellement les coordonnées polaires (ou cylindriques) pour séparer l'équation de Helmholtz en une équation radiale et une équation azimutale (angulaire).

On pose

$$p(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

$$\frac{1}{F} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2} + k_0^2 = 0$$

Et on sépare les variables selon

$$\begin{cases} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = -\mu G \\ \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left(k_0^2 - \frac{\mu}{r^2} \right) F = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation μ doit être choisi entier, soit m , pour assurer la périodicité angulaire de la solution; la symétrie par rapport à Ox impose de plus une solution paire, donc en $\cos(m\theta)$.

$$G_m(\theta) \propto \cos m\theta$$

L'équation radiale est une **équation de Bessel**, qui admet 2 familles de solutions, les fonctions de Bessel de 1^{ère} et de 2^{ème} espèce, $J_m(k_0r)$ et $N_m(k_0r)$, dont les comportements asymptotiques sont les suivants

$$k_0r \rightarrow \infty$$

$$J_m(k_0r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_0r}} \cos\left(k_0r - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_m(k_0r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_0r}} \sin\left(k_0r - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$k_0r \rightarrow 0$$

$$J_m(k_0r) \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{k_0r}{2}\right)^m$$

$$N_m(k_0r) \rightarrow -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{k_0r}{2}\right)^{-m}; m > 0$$

$$J_0 \rightarrow 1 \text{ et } N_0 \rightarrow \frac{2}{\pi} (\ln k_0r - 0.11593)$$

On notera que la (nécessaire) singularité en $r=0$ est portée par les fonctions de Bessel de 2^{ème} espèce (ou fonctions de Neumann)

Le comportement à l'infini montre que pour satisfaire la condition de rayonnement, seule la combinaison suivante est acceptable:

$$J_m(k_0 r) - iN_m(k_0 r) = H_m^{(2)}(k_0 r)$$

Cette fonction est appelée fonction de Hankel de 2^{ème} espèce (la combinaison avec le signe + est la fonction de Hankel de 1^{ère} espèce)

$$r \rightarrow \infty, \quad H_m^{(2)}(k_0 r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-ik_0 r} e^{+i(2m+1)\frac{\pi}{4}}$$

La pression diffusée s'écrit donc comme la somme d'une série de « modes » dont l'amplitude est déterminée par la condition de rigidité en $r=a$:

$$p_d(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta H_m^{(2)}(k_0 r)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial r}(r = a) = -\frac{\partial p_i}{\partial r}(r = a)$$

Cette dernière étape nécessite un calcul un peu technique, nécessitant la décomposition de l'onde plane incidente en une série de fonctions de Bessel et l'utilisation des règles de dérivation de ces fonctions

Décomposition de l'onde incidente en fonctions « cylindriques »

$$p_i = P e^{-ik_0 x} = P e^{-ik_0 r \cos \theta} = P \left[J_0(k_0 r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \cos m\theta J_m(k_0 r) \right]$$

Formules de dérivation des fonctions de Bessel

$$\frac{d}{dz} \begin{cases} J_m(z) = 1/2(J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)) \\ H_m(z) = 1/2(H_{m-1}(z) - H_{m+1}(z)) \end{cases}$$

Il vient alors

$$\frac{\partial p_i}{\partial r} = -k_0 P \left[J_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \cos m\theta (J_{m+1} - J_{m-1}) \right]$$

Rem: $J_{-1} = -J_1$ et $H_{-1} = -H_1$

$$\frac{\partial p_d}{\partial r} = -k_0 \left[A_0 H_1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta (H_{m+1} - H_{m-1}) \right]$$

Il suffit ensuite d'égaliser les coefficients des différents modes azimutaux dans l'expression de la condition aux limites en $r=a$.

Il vient :

$$\begin{cases} A_0 = -P \frac{J_1(k_0 a)}{H_1(k_0 a)} \\ A_m = -2P(-i)^m \frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{H_{m+1} - H_{m-1}}(k_0 a); m > 0 \end{cases}$$

Et la pression diffusée s'exprime comme :

$$p_d(r, \theta) = -P \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m \frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{H_{m+1} - H_{m-1}}(k_0 a) \cos m\theta H_m^{(2)}(k_0 r)$$

$$\varepsilon_0 = 1; \varepsilon_m = 2, m > 0$$

↓
coe(k₀a)

On est souvent intéressé par le comportement à grande distance de l'onde diffusée (champ lointain $k_0 r \gg 1$), ce qui permet d'utiliser la forme asymptotique des fonctions de Hankel et de faire apparaître le diagramme de directivité de la diffusion (séparation des dépendances angulaire et radiale du champ diffusé).

$$p_d(r, \theta) \sim -P \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-ik_0 r + i\pi/4} \sum_0^{\infty} \varepsilon_m \text{coe}(k_0 a) \cos m\theta$$

Dépendance radiale « universelle »
de type onde cylindrique

Directivité : Dépendance angulaire,
fonction du nombre d'onde réduit $k_0 a$.

Diagrammes de diffusion

Il s'agit du facteur de directivité avec quelques normalisations, qui ne dépend donc que de $k_0 a$
On définit la section (différentielle) de diffusion par

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{r I_d}{I_i}; I = \frac{1}{2} \frac{pp^*}{\rho_0 c_0}$$

(le facteur r compensant la décroissance radiale du champ diffusé; la relation entre pression et intensité étant satisfaite pour l'onde plane incidente et le champ diffusé lointain)

On a l'habitude de considérer une version adimensionnelle, qui sera tracée sur les figures suivantes

$$\left[\frac{1}{a} \frac{d\sigma}{d\theta} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 a} \left| \sum_0^{\infty} \varepsilon_m \text{coe}(k_0 a) \cos m\theta \right|}$$

Si on intègre la section différentielle sur tous les angles, on obtient la section efficace de diffusion σ . La puissance diffusée est

$$W_d = r \int_0^\infty I_d(\theta) d\theta$$

La puissance incidente sur le cylindre est $W_i = 2aI_i$

D'où

$$\frac{\sigma}{a} = 2 \frac{W_d}{W_i} \quad \text{Dont l'évolution en fonction du nombre d'onde réduit caractérise donc la fraction d'énergie incidente diffusée par l'obstacle.}$$

Sections de diffusion pour différentes valeurs du nombre d'onde réduit

Les figures suivantes illustrent l'évolution de la directivité de l'onde diffusée, depuis les très faibles valeurs de k_0a jusqu'à des valeurs très élevées (plusieurs dizaines), de façon à mettre en évidence les comportements asymptotiques.

Pour les faibles k_0a , le diagramme présente une forme relativement simple, avec une quasi annulation pour $\theta=\pi/3$; on remarque que l'énergie est majoritairement *rétrodiffusée*, avec un maximum pour $\theta=\pi$.

Quand k_0a augmente, la diffusion se concentre vers l'avant, dans un pinceau de plus en plus fin autour de $\theta=0$. Le nombre de lobes présents augmente régulièrement avec k_0a .

diagramme de diffusion d` une onde plane par un cylindre, ka= 0.2

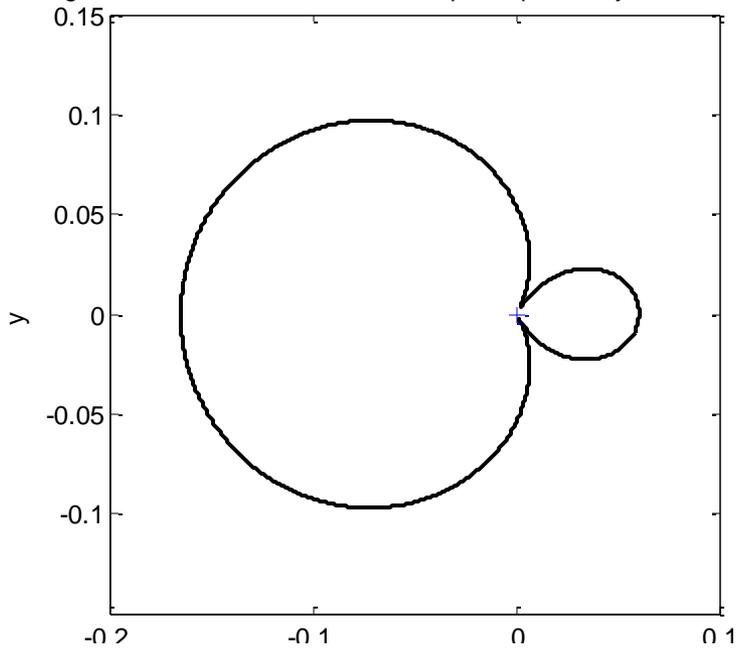


diagramme de diffusion d` une onde plane par un cylindre, ka= 1

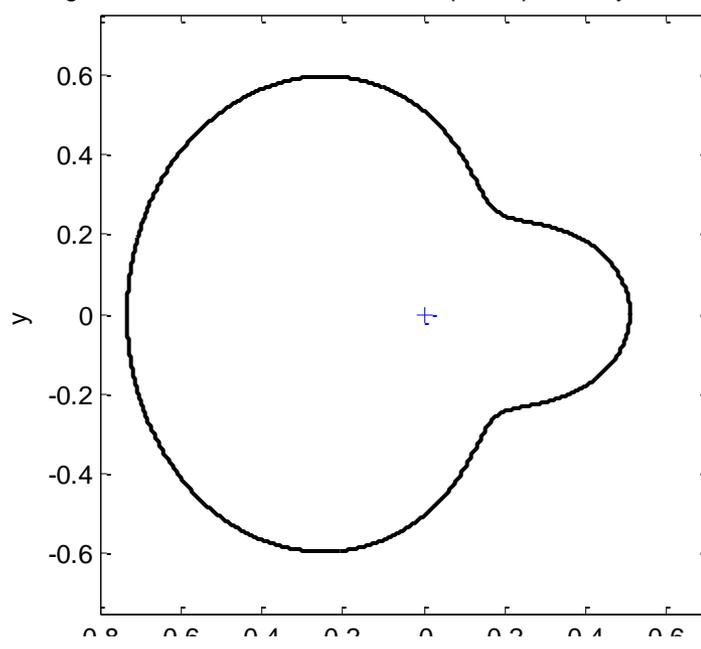


diagramme de diffusion d` une onde plane par un cylindre, ka= 5

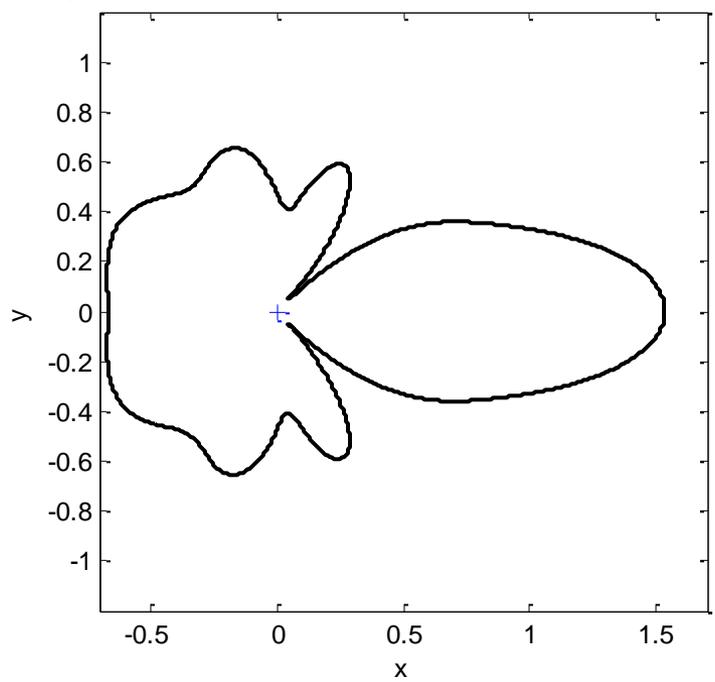
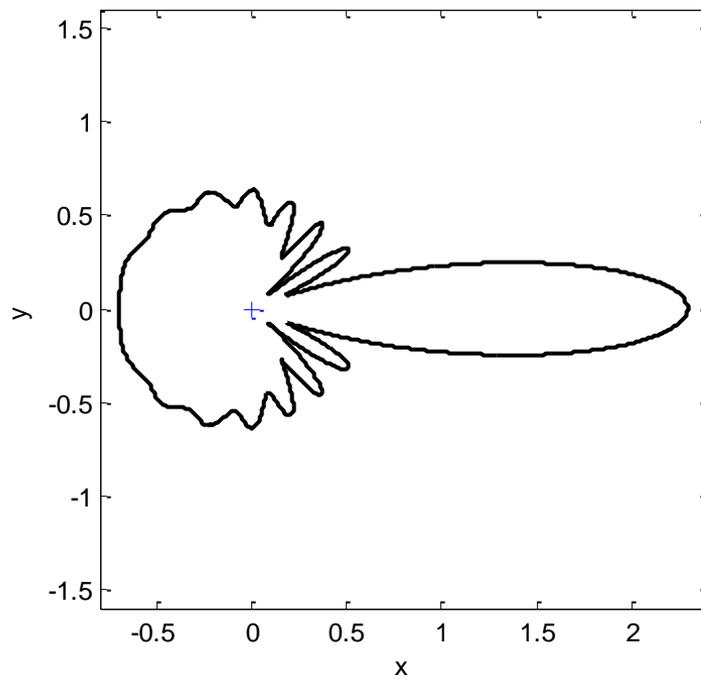
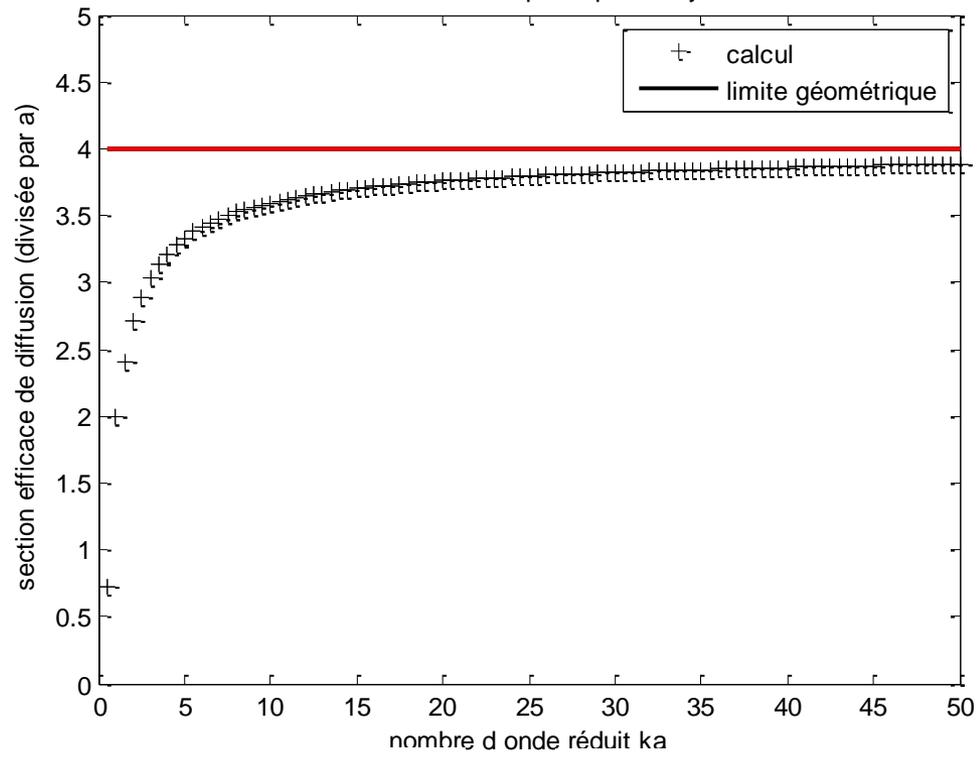


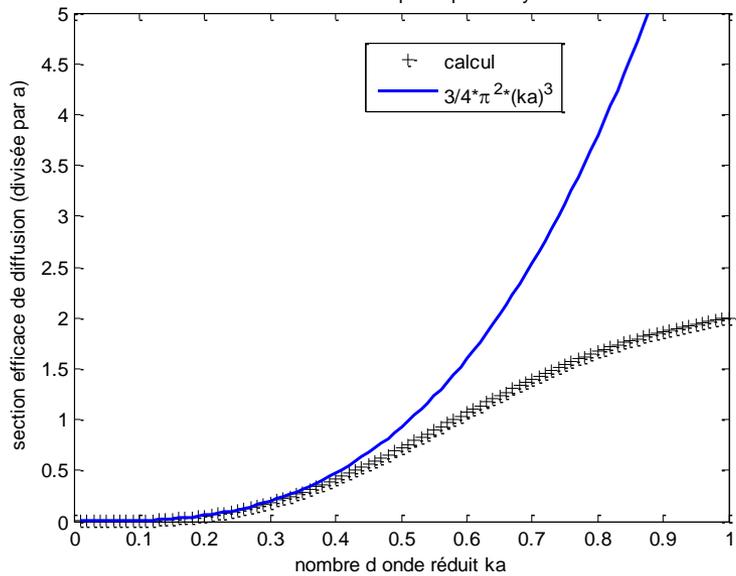
diagramme de diffusion d` une onde plane par un cylindre, ka= 10



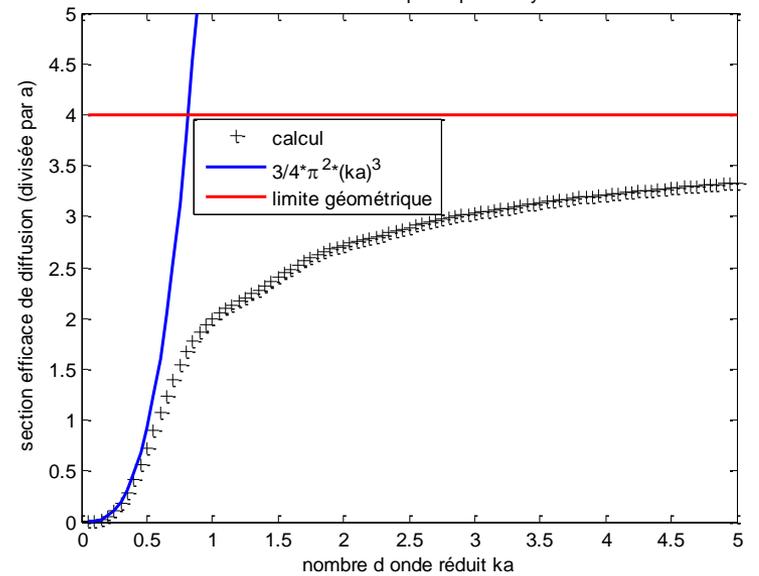
diffusion d'une onde plane par un cylindre



diffusion d'une onde plane par un cylindre



diffusion d'une onde plane par un cylindre



Le tracé de la section efficace de diffusion montre que la fraction d'énergie diffusée est très faible pour $k_0 a < 1$, et quelle augmente rapidement ensuite pour tendre vers une asymptote quand $k_0 a$ tend vers l'infini.

Nous allons établir maintenant la forme analytique de ces cas limites.

Diffusion de Rayleigh ($k_0 a \ll 1$)

Lorsque le cylindre est « compact » ($a < \lambda$), seuls les 2 premiers termes de la série modale sont à considérer. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{A_0}{P} = \frac{J_1}{J_1 - N_1} \sim \frac{k_0 a / 2}{k_0 a / 2 + 2i / \pi k_0 a} \sim -i \frac{\pi}{4} (k_0 a)^2 \\ -\frac{A_1}{P} = \frac{J_2 - J_0}{(J_2 - J_0) - i(N_2 - N_0)} \sim \frac{-J_0}{-iN_2} \sim i \frac{\pi}{4} (k_0 a)^2 \end{array} \right.$$

Et le terme suivant est négligeable car

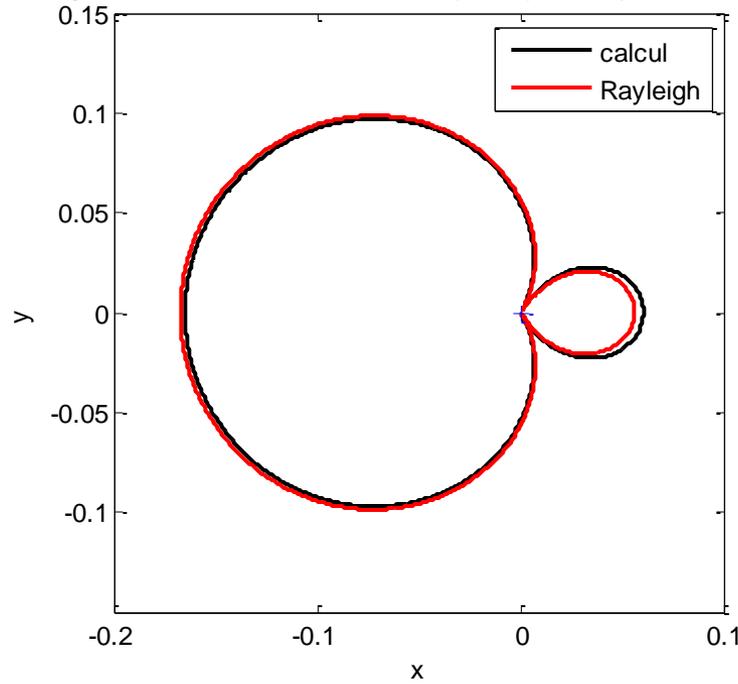
$$\frac{J_1}{N_3} \sim \frac{k_0 a}{\left(\frac{1}{k_0 a}\right)^3} \sim (k_0 a)^4$$

La section différentielle prend donc la forme limite

$$\left(\frac{1}{a} \frac{d\sigma}{d\theta}\right)^{1/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 a}} |1 - 2 \cos \theta| \frac{\pi}{4} (k_0 a)^2 \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} (k_0 a)^3 |1 - 2 \cos \theta|$$

qui met en évidence l'existence d'un zéro en $\theta = \pi/3$; l'accord avec l'estimation numérique est encore très bon pour $k_0 a = .2$ par exemple

diagramme de diffusion d'une onde plane par un cylindre, $ka = 0.2$



Pour la section efficace on obtient

$$\frac{\sigma}{a} \sim \frac{3}{4} \pi^2 (k_0 a)^3$$

et l'accord avec le calcul exact est excellent jusqu'à $k_0 a = 0.4$ environ

Limite géométrique en hautes fréquences

Le calcul est ici beaucoup plus délicat et nous admettrons les résultats qui peuvent être trouvés dans l'ouvrage classique de Morse & Feshbach. Typiquement il faut utiliser une formulation intégrale et estimer la contribution principale par une approximation de type phase stationnaire (cas de la sphère, p. 1551 et suivantes).

On obtient pour σ/a une valeur limite égale à 4. C'est-à-dire que la puissance diffusée est égale à 2 fois la puissance incidente (section droite du cylindre, $2a$, multipliée par l'intensité incidente)!

Ce paradoxe apparent est une conséquence de la séparation arbitraire du champ total de pression en pression incidente et pression réfléchie. Cette séparation est pertinente pour les faibles valeurs de $k_0 a$, pour lesquelles la pression diffusée n'est qu'une faible perturbation de l'onde incidente. Pour les fortes valeurs de $k_0 a$ ce n'est plus le cas car les 2 contributions sont du même ordre et les champs interfèrent.

A haute fréquence une zone d'ombre « géométrique » se forme derrière l'obstacle, dans laquelle la pression totale est proche de 0 (donc p_d est approximativement $-p_i$). Pour réaliser cette annulation il faut que la puissance diffusée dans cette région soit égale à la puissance incidente.

L'autre fraction de la puissance diffusée correspond à la partie réfléchie de l'onde, qui est aussi égale à la puissance incidente.

Ceci explique physiquement l'existence du facteur paradoxal 2!

Rem : manifestement ce raisonnement peut être reproduit pour d'autres formes d'obstacles, ce qui laisse penser que certains résultats asymptotiques sont de portée générale.

Pour ce qui est de la forme du diagramme de diffusion, on note l'existence d'un pinceau de plus en plus étroit et intense autour de $\theta=0$, qui correspond à la formation progressive de la zone d'ombre. En dehors de ce pinceau on relève des variations angulaires très rapides qui, lors d'une expérience, seront lissées par l'intégration spatiale due à la taille finie des microphones.

Morse & Feshbach fournissent l'expression suivante

$$\frac{1}{a} \frac{d\sigma}{d\theta} \sim \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2\pi k_0 a} \cot^2 \frac{\theta}{2} \sin^2(k_0 a \theta)$$



Terme purement géométrique ($k_0 a$ infini) qui traduit la réflexion spéculaire des « rayons » sur le cylindre, comme on peut s'en assurer par un raisonnement direct



Terme « correctif » permettant de retrouver la forme du lobe principal avec une bonne approximation.

Pour $\theta=0$ on obtient la valeur suivante pour l'intensité diffusée:

$$\frac{1}{a} \frac{d\sigma}{d\theta} \rightarrow \frac{2}{\pi} k_0 a$$

diagramme de diffusion d'une onde plane par un cylindre, $ka=30$

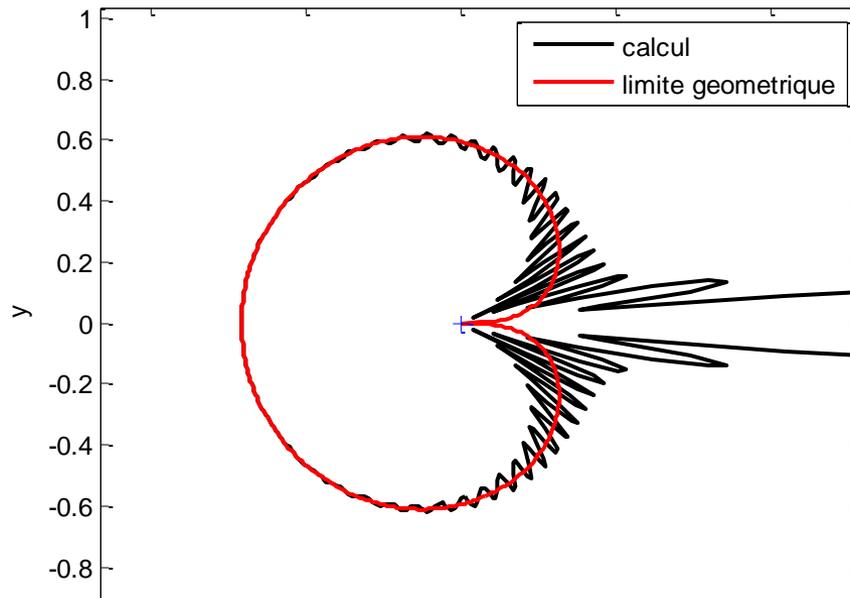


diagramme de diffusion d'une onde plane par un cylindre, $ka=50$

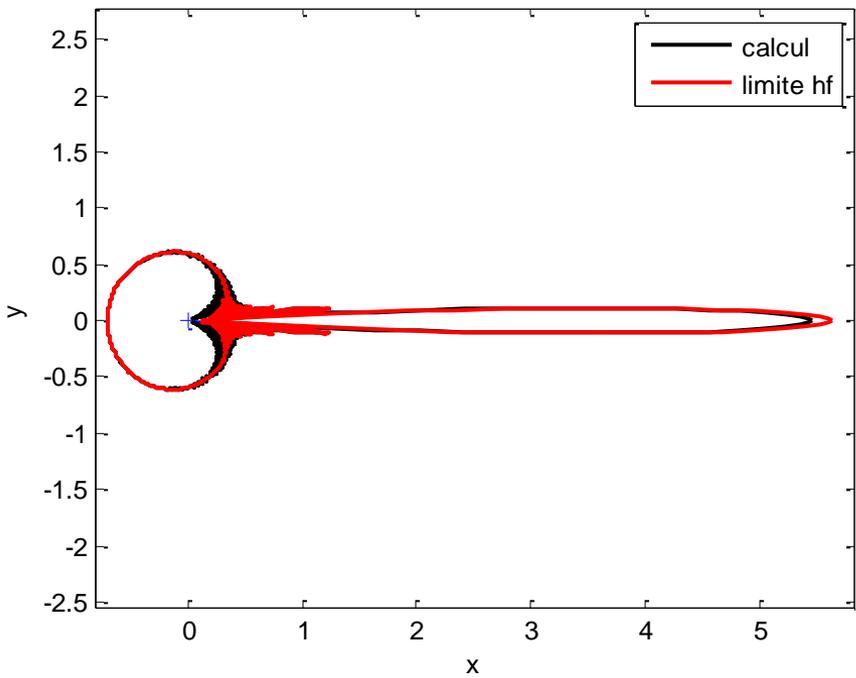
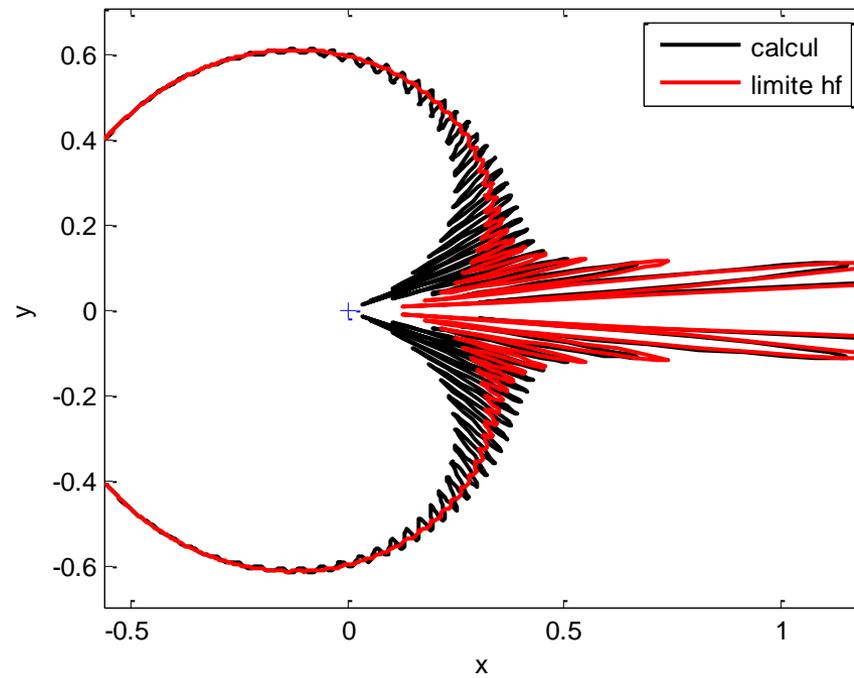


diagramme de diffusion d'une onde plane par un cylindre, $ka=50$



Quelle est la généralité des résultats précédents?

Bien sûr certains détails dépendent de la géométrie précise de l'objet diffractant. Par contre le comportement global et les limites asymptotiques bf et hf présentent une large généralité.

L'exemple de la diffraction par une sphère illustre la similitude du comportement global. Techniquement le calcul est très similaire au précédent; les fonctions de Bessel deviennent des fonctions de Bessel sphériques et la répartition angulaire s'exprime en fonctions des harmoniques sphériques, reliées aux polynômes de Legendre.

Les formules asymptotiques suivantes sont obtenues.

Diffusion de Rayleigh :

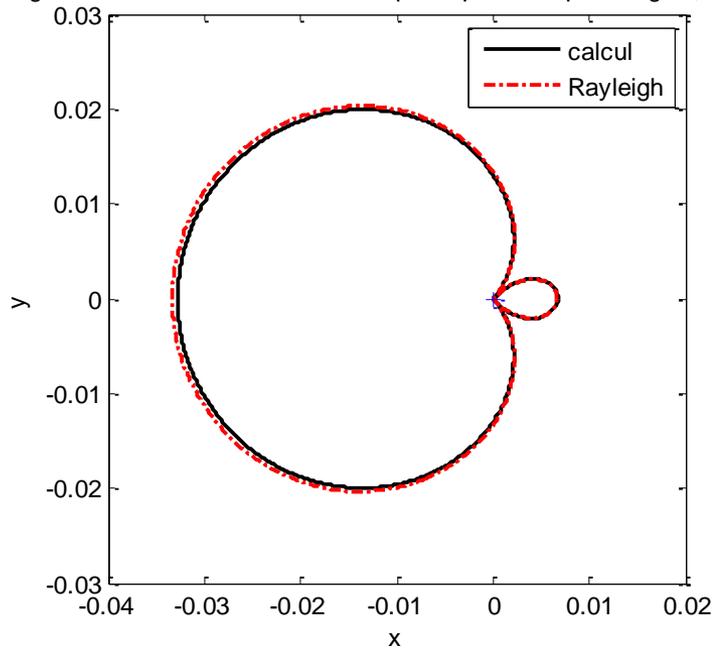
$$\frac{1}{a} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{3} (k_0 a)^2 \left| 1 - \frac{3}{2} \cos \theta \right| \qquad \frac{\sigma}{\pi a} \sim \frac{7}{9} (k_0 a)^4$$

Limite géométrique et comportement haute fréquence

$\frac{\sigma}{a^2} \rightarrow 2\pi$ la section efficace est égale à 2 fois la section droite, comme on s'y attend

$\frac{1}{a^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cot^2 \frac{\theta}{2} J_1^2(k_0 a \sin \theta) \longrightarrow$ Pinceau étroit autour de $\theta=0$; pour $\theta=0$: $\frac{(k_0 a)^2}{4}$

diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka = 0.2$



ramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka = 1$

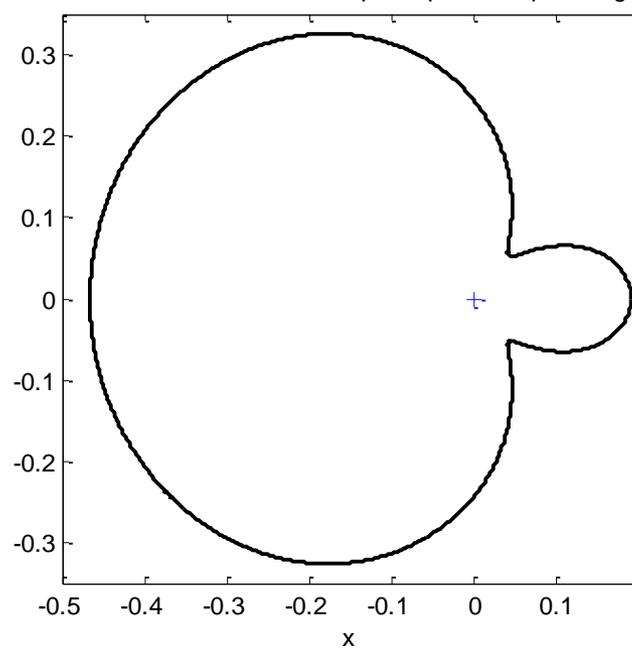


diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka = 5$

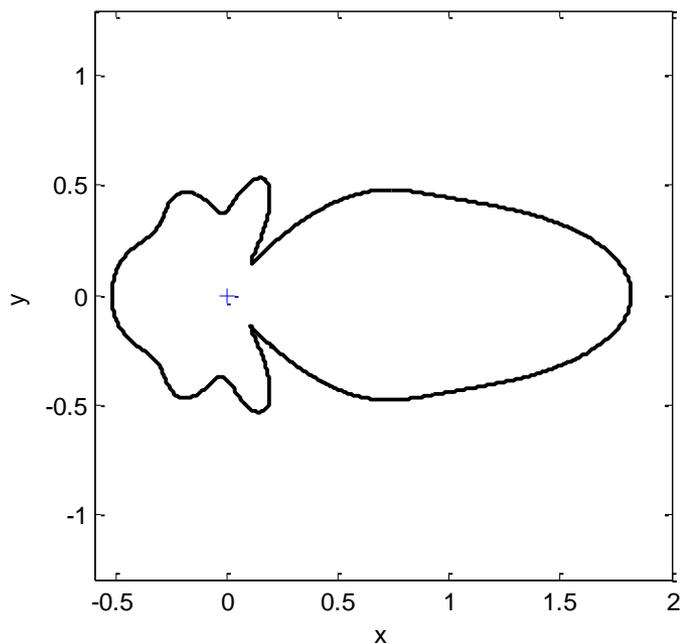
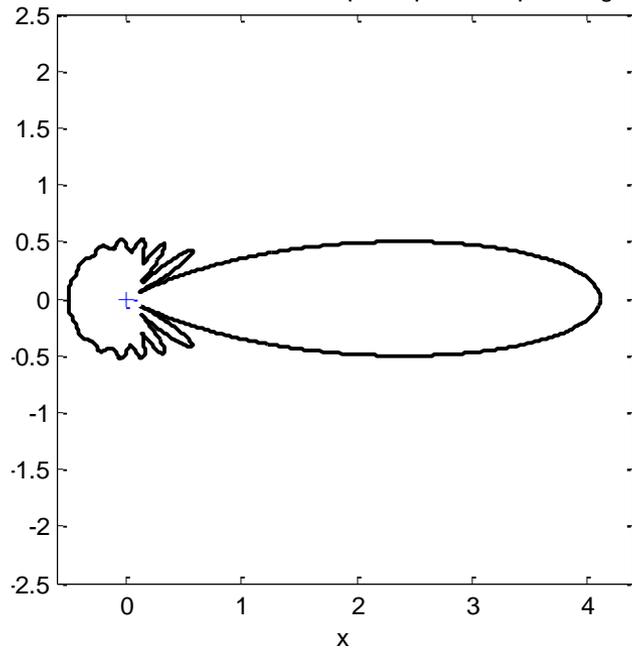


diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka = 10$



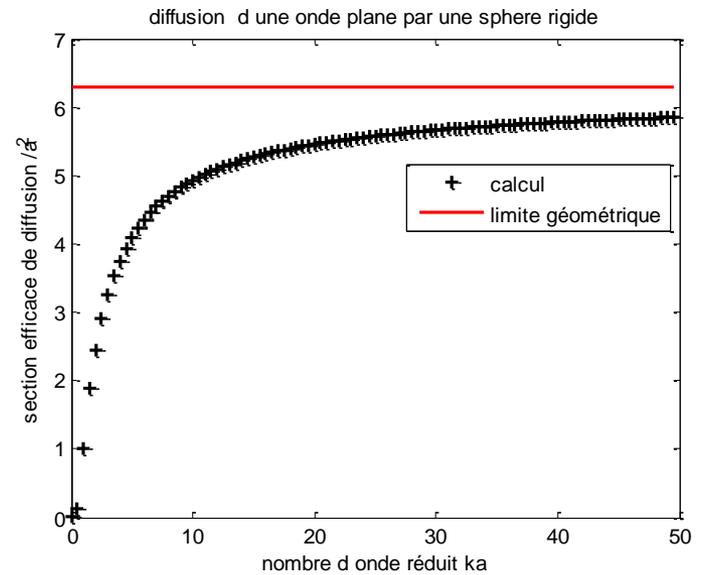
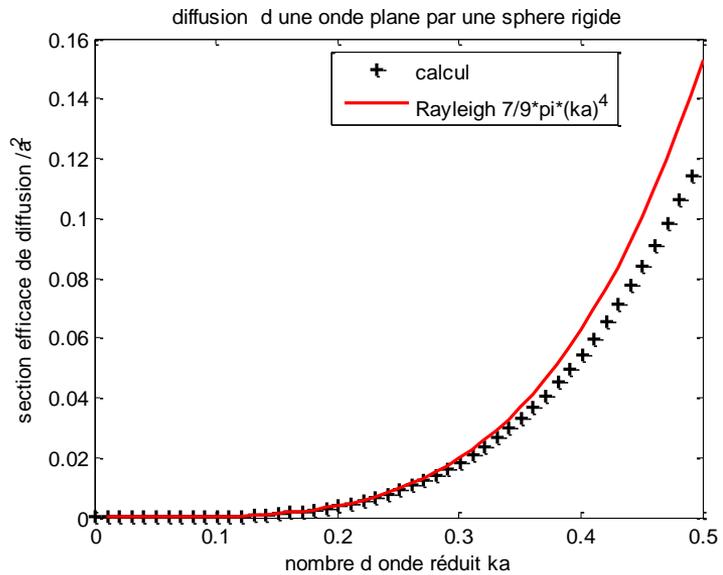
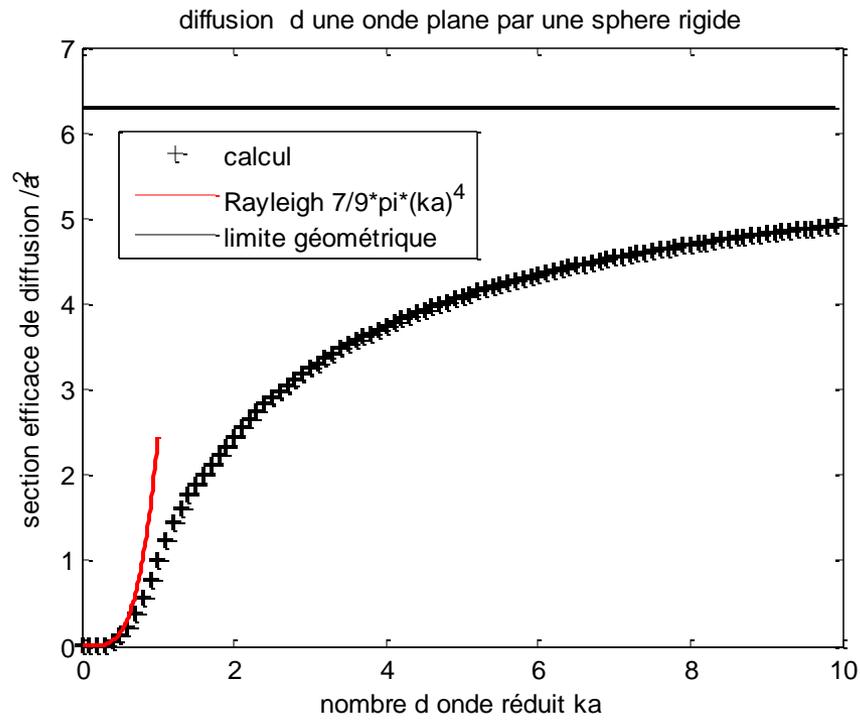


diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka=30$

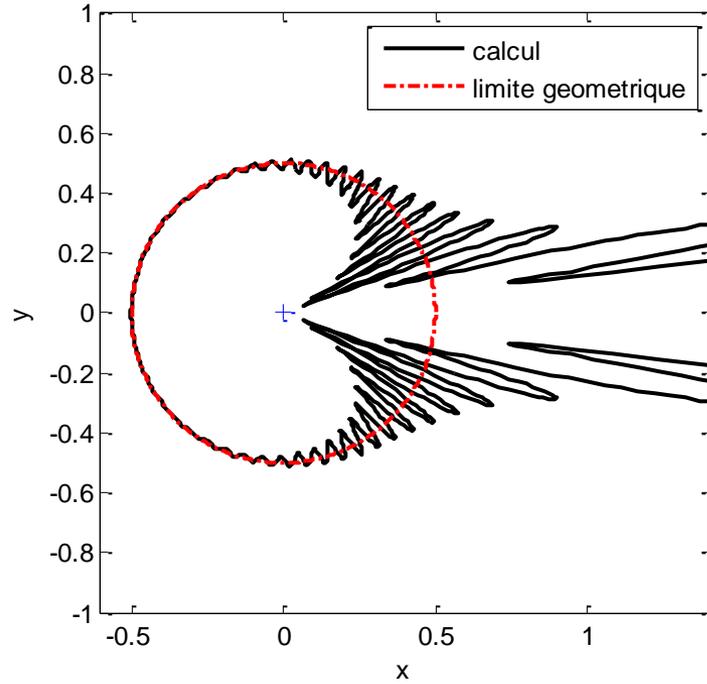


diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka=30$

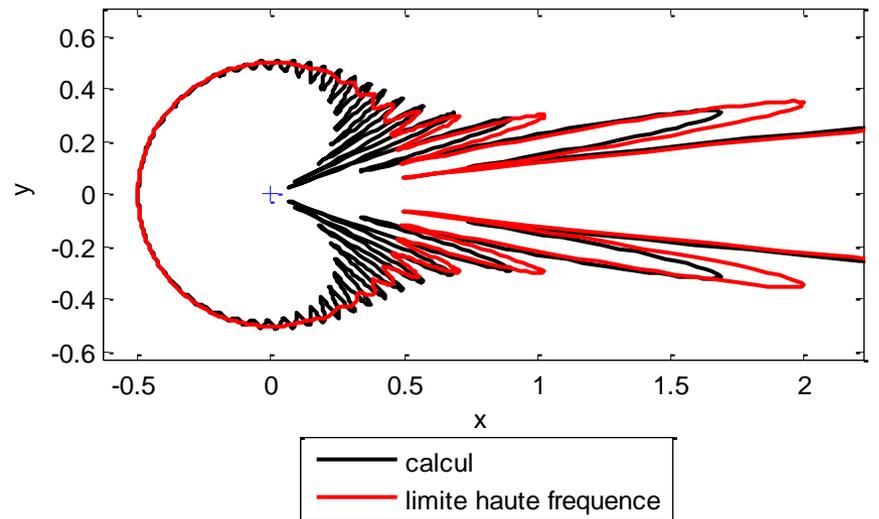
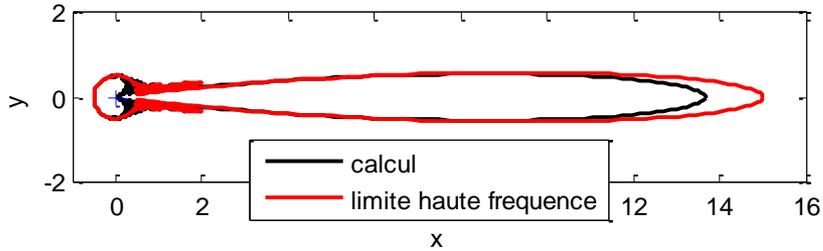


diagramme de diffusion d'une onde plane par une sphere rigide, $ka=30$



Diffusion de Rayleigh pour un obstacle de forme quelconque

Dans la cas du cylindre « compact » nous avons vu que seuls les 2 premiers termes du développement en série étaient à prendre en compte, et qu'ils étaient du même ordre. Ce résultat est en fait tout à fait général.

On rappelle que le problème de diffusion est formellement équivalent à celui du rayonnement d'un corps de vitesse normale imposée.

$$\left(\Delta + k_0^2\right) p_d = 0$$

Plus la condition de Sommerfeld

$$\left.\frac{\partial p_d}{\partial n}\right|_{\Sigma} = -\left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Sigma}$$

$$p_i = P e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \vec{\nabla} p_i = -iP\vec{K} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}$$

Pour $k_0 x \ll 1$, on développe au premier ordre

$$\vec{\nabla} p_i = -iP\vec{K} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}} \approx -iP\vec{K} (1 - i\vec{K}\cdot\vec{x})$$

Reprenons le cas du cylindre :

$$\vec{k}\cdot\vec{e}_r = k_0 \cos \theta$$

$$\frac{1}{P} \frac{\partial p_d}{\partial r}(r = a) \approx \boxed{ik_0 \cos \theta} + k_0^2 a \cos^2 \theta$$

Terme dipolaire

$$\boxed{\frac{1}{2} k_0^2 a} + \frac{1}{2} k_0^2 a \cos 2\theta \quad \text{Terme quadripolaire (négligeable)}$$

Terme monopolaire

Le terme source monopolaire est d'un ordre de grandeur en $k_0 a$ plus petit que le terme dipolaire. Mais ceci est exactement compensé par la plus forte efficacité du rayonnement des sources monopolaires par rapport aux sources dipolaires (rapport $1/k_0 a$).

La contribution du terme monopolaire s'écrit :

$$\frac{\rho_0}{4\pi} \cdot 2\pi a \cdot i\omega v_n(r = a) = -\frac{a}{2} \frac{\partial p_d}{\partial n}(r = a) = \frac{1}{4\pi} k_0^2 (\pi a^2) = \frac{1}{4\pi} k_0^2 \cdot V$$

Où V est le « volume » occupé par le cylindre; ce résultat est général.

Revenons au cas général.

$$\vec{v}_d \cdot \vec{n} = \frac{P}{\rho_0 c_0} \vec{e}_k \cdot \vec{n} + \frac{P}{\rho_0 c_0} (\vec{K} \cdot \vec{x}) \vec{e}_k \cdot \vec{n}$$

Le premier terme correspond à un mouvement (alternatif) de translation dans la direction de l'onde incidente; il produit un rayonnement de type dipolaire.

Le second terme produit un rayonnement de type monopolaire, dont la meilleure efficacité compense son amplitude plus faible.

La contribution du terme monopolaire est :

$$P_{d,mono} = \frac{Pk_0^2 e^{-ik_0 r}}{4\pi r} \iint (\vec{e}_k \cdot \vec{x}) \vec{e}_k \cdot \vec{n} dS = \frac{Pk_0^2}{4\pi r} V e^{-ik_0 r}$$

$$\text{En effet : } \iint (\vec{e}_k \cdot \vec{x}) \vec{e}_k \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} (\vec{e}_k \cdot \vec{x}) \cdot \vec{e}_k dV = \iiint_V dV = V !$$

Pour le terme dipolaire, le calcul est un peu plus compliqué et fait apparaître la matrice des masses ajoutées du corps (voir Pierce pp. 426-427).

On obtient en champ lointain

$$P_{d,dipolaire} = -\frac{Pk_0^2}{4\pi r} e^{-ik_0 r} (\vec{e}_r \cdot M \cdot \vec{e}_k)$$

Les éléments de la matrice M sont proportionnels à a^3 , et les 2 contributions sont bien du même ordre. Ils s'expriment en fonction du volume du corps et de la matrice des masses ajoutées

$M_{ij} = V\delta_{ij} + W_{ij}$; $\rho_0 W_{ij}$ étant le tenseur des masses ajoutées

$\rho_0 W_{ij} \dot{v}_j = F_i$ est la force exercée par le fluide sur le corps soumis à l'accélération dv/dt

A titre d'exemple les matrices M pour une sphère et un disque mince de rayon a et orienté perpendiculairement à l'axe z sont :

$$\frac{3}{2}V \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \frac{8}{3}a^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La section différentielle de diffusion est donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k_0^2}{16\pi^2} |V - \vec{e}_r \cdot M \cdot \vec{e}_k|^2$$

Et la section de diffusion en résulte par intégration sur l'angle solide :

$$\sigma = \frac{k_0^4}{4\pi} \left(V^2 + \frac{1}{3} (M \cdot \vec{e}_k)^2 \right)$$

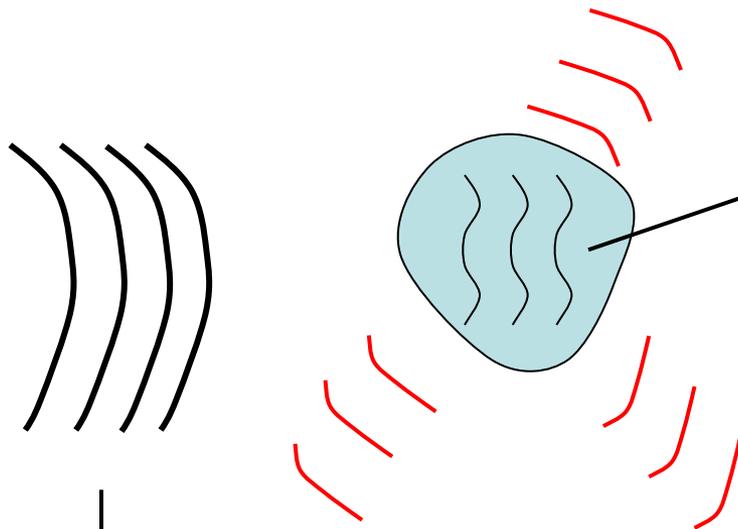
Avec l'évolution caractéristique suivant la puissance 4 du nombre d'onde réduit

Exercice : calculer σ pour la sphère et le disque

Diffusion par des inhomogénéités

Approximation de Born

On considère maintenant des obstacles « pénétrables », par exemple des inhomogénéités de type fluide; il faut alors considérer la propagation des ondes acoustiques dans le volume des inhomogénéités et le problème ne se ramène pas à la prise en compte de conditions aux limites à la frontière d'un corps.



Milieu de propriétés différentes
(masse volumique ρ_e et célérité c_e) :
Éq. de propagation en milieu
inhomogène

$$\Delta p' - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_e} \text{grad } \rho_e \cdot \text{grad } p' = 0$$

Milieu extérieur homogène (ρ, c):
Éq. de Helmholtz usuelle

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

Milieu inhomogène et au repos (gradients de température) (rappels)

Rem : l'absence de vitesse implique que la pression moyenne est constante (en l'absence de forces de masse); les gradients de T induisent des gradients de **masse volumique et d'entropie**.

Les équations de départ sont les suivantes :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}') = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \text{grad } s_0 = 0 \quad (3) \text{ La difficulté vient du } \textbf{caractère non isentropique des fluctuations}$$

Il est facile d'éliminer la vitesse acoustique

$$\frac{\partial(1)}{\partial t} - \text{div}(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

L'élimination de la masse volumique est plus délicate; l'utilisation de l'équation d'état linéarisée « standard » fait apparaître s' , ce qui n'est pas souhaitable. On repart de l'équation d'état dont on prend la dérivée particulaire de façon à profiter de la conservation **globale** de l'entropie

$$p = p(s, \rho) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt}$$

\downarrow
= 0!

$$c^2 \text{ (mais } \neq c_0^2 \text{ !!)}$$

Il faut maintenant linéariser

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \text{grad } p_0 = \underbrace{(c_0^2 + c^{2'})}_{\text{termes du 2ème ordre}} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \text{grad } \rho_0 \right)$$

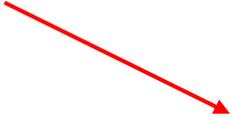
termes du 2^{ème} ordre!

Soit finalement

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \text{grad } \rho_0 \right)$$

D'où on déduit :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \text{grad } \rho_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}$$


$$= \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \rho_0 \cdot \text{grad } p' \quad \text{de l'équation d'Euler}$$

L'équation des ondes « généralisée » est donc la suivante :

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \rho_0 \cdot \text{grad } p' = 0$$



Terme « nouveau » dû aux gradients de masse volumique



Généralisation « triviale » de l'équation classique, $c_0 \rightarrow c_0(x)$

Rem : la structure de l'équation n'est pas profondément modifiée; notamment il s'agit encore d'une équation du 2^{ème} ordre, hyperbolique. On verra que le cas du milieu en mouvement est plus dérangent.

On peut mettre encore mieux en avant la similitude des équations en écrivant

$$\rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

On notera cependant que le passage d'une équation à coefficients constants à une équation à coefficients variables spatialement va induire une complexité forte : absence de fonction de Green « analytique », nécessité d'une résolution numérique volumique ...

Le problème est donc géré par les équations suivantes :

(1) $\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$ En dehors de D (plus une condition de rayonnement)

(2) $\Delta p' - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_e} \text{grad } \rho_e \cdot \text{grad } p' = 0$ À l'intérieur de D

Et des conditions de continuité à l'interface

Cette formulation n'est pas d'utilisation facile. On va utiliser une extension à tout l'espace d'une équation unique, qui permettra la mise en œuvre de la fonction de Green en espace libre.

Une technique semblable est utilisée en aéroacoustique dans la formulation de Ffowcs-Williams & Hawkings pour le calcul du bruit d'obstacles en mouvement.

On pose :

$$\gamma_{\kappa} = \frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa}; \kappa = \frac{1}{\rho c^2}$$

À l'intérieur de D; à l'extérieur ces variables sont nulles

$$\gamma_{\rho} = \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e}$$

On utilise la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\gamma_{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p') = \operatorname{div}\left(\left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}} p'\right) = \Delta p' - \rho \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_e} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p'\right)$$

L'équation (2) s'écrit :

$$\Delta p' - \operatorname{div}(\gamma_{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p') - \frac{\rho}{\rho_e c_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

Comme

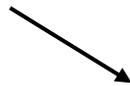
$$\frac{\rho}{\rho_e c_e^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\rho c^2}{\rho_e c_e^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\kappa_e}{\kappa} = \frac{1}{c^2} (\gamma_{\kappa} + 1)$$

On obtient :

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\gamma_{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p') + \frac{1}{c^2} \gamma_{\kappa} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \quad (3)$$



Opérateur classique



« Terme source », nul en dehors de D

Cette équation étant valable dans tout l'espace, sa « solution » peut être obtenue par convolution du terme source avec la fonction de Green en espace libre, i.e. solution en potentiels retardés. (la solution est formelle puisque le terme source est inconnu; il s'agit plus précisément d'une représentation intégrale)

Dans la suite on va plutôt travailler sur la version monochromatique du problème de diffusion, géré par l'équation (4) :

$$\Delta p + k^2 p = \operatorname{div}(\gamma_\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} p) - k^2 \gamma_\kappa p$$

La fonction de Green « en espace libre », satisfaisant la condition de Sommerfeld est

$$G(\vec{x}|\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} \exp(-ik|\vec{x} - \vec{x}_0|)$$

Ce qui conduit à la formulation intégrale suivante

$$p(\vec{x}) = p_i(\vec{x}) - \int_D \left[-k^2 \gamma_\kappa p(\vec{x}_0) + \operatorname{div}(\gamma_\rho \vec{\nabla} p(\vec{x}_0)) \right] G(\vec{x}|\vec{x}_0) d\vec{x}_0$$



Pression incidente

Solution particulière de l'éq. homogène



Pression diffusée par l'inhomogénéité

La présence de γ dans la divergence n'est pas idéale; une petite manipulation algébrique et l'utilisation du théorème de la divergence permet d'obtenir une forme plus appropriée.

$$\operatorname{div}\left(\gamma_{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{x}_0)\right).G(\vec{x}|\vec{x}_0) = \operatorname{div}\left[\left(\gamma_{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{x}_0)\right).G(\vec{x}|\vec{x}_0)\right] - \gamma_{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{x}_0)\vec{\nabla}G(\vec{x}|\vec{x}_0)$$

$$\int_D \operatorname{div}\left[\left(\gamma_{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{x}_0)\right).G(\vec{x}|\vec{x}_0)\right]d\vec{x}_0 = \int_S \left[\left(\gamma_{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{x}_0)\right).G(\vec{x}|\vec{x}_0)\right].\vec{n}dS = 0$$

Si on prend S dans la région homogène. On obtient finalement :

$$p(\vec{x}) = p_i(\vec{x}) + \int_D \left[k^2 \gamma_{\kappa} p(\vec{x}_0) G(\vec{x}|\vec{x}_0) + \gamma_{\rho} \vec{\nabla} p(\vec{x}_0) \vec{\nabla} G(\vec{x}|\vec{x}_0) \right] d\vec{x}_0$$

Approximation de Born

Cette équation intégrale peut être transformée en une formule intégrale si on fait l'hypothèse qu'à l'intérieur de l'inhomogénéité, le champ de pression totale peut être approché par le champ incident (1^{ère} approximation de Born). Cette hypothèse est raisonnable si le contraste entre milieu ambiant et inhomogénéité est faible.

$$\begin{cases} p(\vec{x}) = p_i(\vec{x}) + p_d(\vec{x}) \\ p_d(\vec{x}) = \int_D \left[k^2 \gamma_{\kappa} p_i(\vec{x}_0) G(\vec{x}|\vec{x}_0) + \gamma_{\rho} \vec{\nabla} p_i(\vec{x}_0) \vec{\nabla} G(\vec{x}|\vec{x}_0) \right] d\vec{x}_0 \end{cases}$$

Rem : il est en principe possible d'itérer la procédure, i.e. d'utiliser le champ total issu de la 1^{ère} approximation de Born pour estimer le champ diffusé.

Champ diffusé à grande distance

On se place dans les conditions habituelles : Onde plane incidente, et observation dans le champ lointain, ce qui permet d'utiliser la forme asymptotique de la fonction de Green.

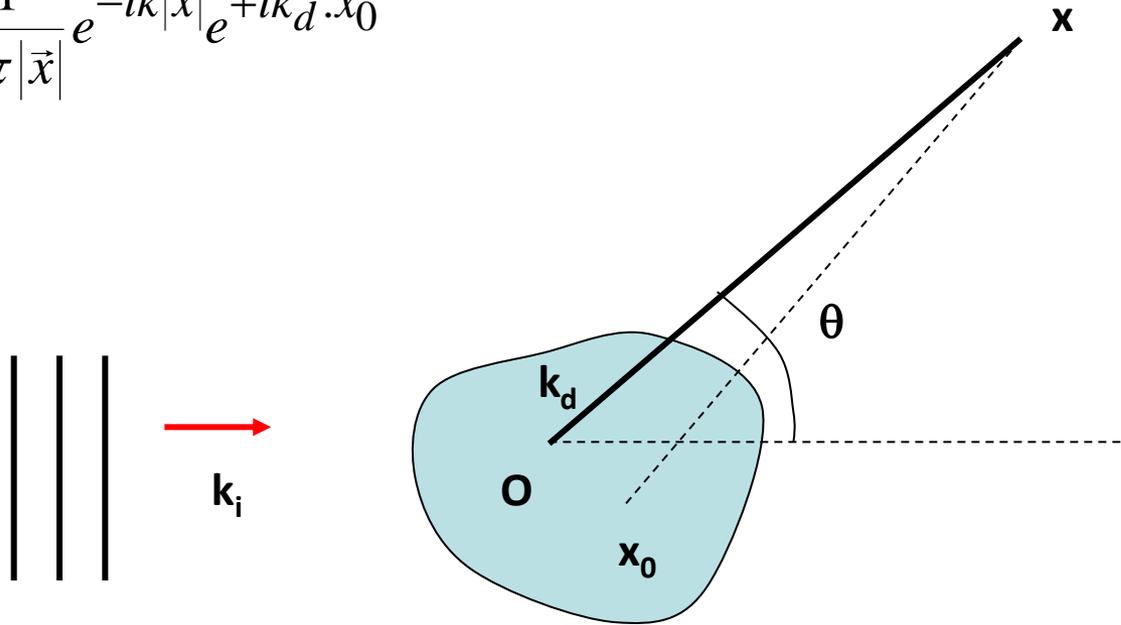
$$p_i(\vec{x}) = P e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{x}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\vec{x}|\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_0|} e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}_0|} \approx \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} e^{-ik|\vec{x}|} e^{+ik \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_0}{|\vec{x}|}} \\ |\vec{x} - \vec{x}_0|^2 = x^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_0}{|\vec{x}|} + \frac{x_0^2}{x^2} \right) \approx x^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_0}{|\vec{x}|} \right); \frac{x_0}{x} \ll 1 \\ |\vec{x} - \vec{x}_0| \approx x \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_0}{|\vec{x}|} \right) \end{array} \right.$$

On pose

$$\vec{k}_d = k \frac{\vec{x}}{x} = k\vec{v}$$

$$G(\vec{x}|\vec{x}_0) \approx \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} e^{-ik|\vec{x}|} e^{+i\vec{k}_d \cdot \vec{x}_0}$$



La pression diffusée s'écrit finalement :

$$p_d(\vec{x}) \approx \frac{P e^{-ikr}}{4\pi r} \int_D (k^2 \gamma_K + \gamma_\rho \vec{k}_i \cdot \vec{k}_d) \exp(-i(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \vec{x}_0) d\vec{x}_0$$

Le champ de pression s'écrit donc de façon condensée comme :

$$p(\vec{x}) \approx P e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{x}} + \frac{P e^{-ikr}}{4\pi r} \Phi_d(\vec{\mu}); \quad \vec{\mu} = \vec{k}_d - \vec{k}_i$$

↓
Onde plane incidente

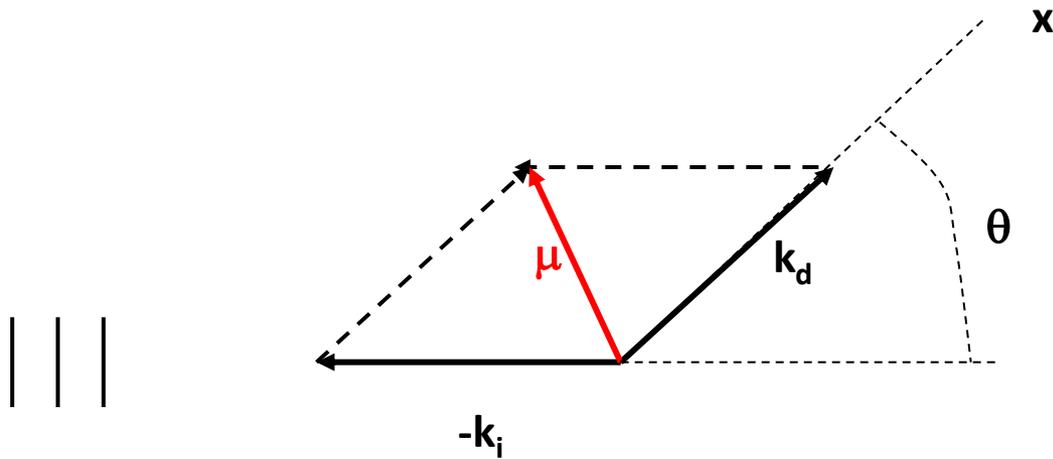
↘
**Onde diffusée sphérique
affectée du facteur de directivité Φ_d**

$$\Phi_d(\vec{\mu}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_D (\gamma_K + \gamma_\rho \cos \theta) \exp(i\vec{\mu} \cdot \vec{x}_0) d\vec{x}_0$$



**Transformée de Fourier des « contrastes »
de masse volumique et de compressibilité
Prise pour une valeur très particulière du vecteur d'onde μ**

$$\vec{\mu} = \vec{k}_d - \vec{k}_i; \quad \mu = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$



Si on pose

$$\Gamma_{\kappa}(\vec{K}) = \frac{1}{8\pi} \int_D \gamma_{\kappa}(\vec{x}_0) \exp(i\vec{K} \cdot \vec{x}_0) d\vec{x}_0$$

alors

$$\Phi_d(\vec{\mu}) = 2\pi k^2 \left[\Gamma_{\kappa}(\vec{\mu}) + \Gamma_{\rho}(\vec{\mu}) \cos \theta \right]$$

On peut faire 2 remarques :

- On trouve encore 2 contributions « du même ordre », monopolaire et dipolaire
- Seuls des éléments très particuliers des inhomogénéités contribuent à la pression diffusée dans une direction donnée.

La mesure de la pression diffusée donne accès à certaines composantes de Fourier du champ, ce qui est mis à profit pour l'analyse de la turbulence par exemple

Exemple de la diffusion par une inclusion sphérique

On considère une inclusion sphérique de rayon a , dont la masse volumique et la célérité ne dépendent que de la variable radiale et diffèrent légèrement des valeurs ambiantes.

Intégration en coordonnées sphériques

$\vec{x}_0 = (r_0, \varphi, \alpha)$; r_0 variant de 0 à a , ϕ de 0 à 2π et α de 0 à π .

$$\Phi_d = \frac{1}{2} k^2 \int_0^a r_0 f(r_0) dr_0 \int_0^\pi \exp(i\mu r_0 \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha$$

$$\downarrow$$
$$-\int_0^\pi \exp(i\mu r_0 \cos \alpha) d(\cos \alpha) = -\left[\frac{\exp(i\mu r_0 \cos \alpha)}{i\mu r_0} \right]_0^\pi = \frac{2}{\mu r_0} \sin(\mu r_0)$$

D'où

$$\begin{cases} \Phi_d = \frac{k^2 a}{\mu} \int_0^a r_0 f(r_0) \sin(\mu r_0) dr_0 \\ f(r_0) = \gamma_K(r_0) + \gamma_\rho(r_0) \cos \theta \end{cases}$$

Pour un obstacle compact $ka \ll 1$, donc $\mu a \ll 1$ et il suffit de prendre une valeur moyenne pour $f(r_0)$, et de développer le sinus au 1^{er} ordre.

$$\Phi_d \approx k^2 \bar{f} \int_0^a r_0^2 dr_0 = \frac{1}{3} k^2 a^3 [\gamma_K + \gamma_\rho \cos \theta]$$

Ce cas simple se prête à la confrontation avec le résultat d'un calcul exact (sphère homogène)

Morse & Ingard donnent le résultat suivant

$$\Phi_d^{exact} \rightarrow \frac{1}{3} k^2 a^3 \left[\gamma_K + \frac{3\rho_e - 3\rho}{2\rho_e + \rho} \cos \theta \right]; ka \rightarrow 0$$

La formule est donc apparemment différente pour ce qui est de l'influence de la masse volumique. Cependant si on tient compte du fait que la méthode de Born suppose que les contrastes sont faibles :

$$\rho_e = \rho + \varepsilon; \frac{\varepsilon}{\rho} \ll 1$$

$$\frac{3(\rho_e - \rho)}{2\rho_e + \rho} \approx \frac{\varepsilon}{\rho} \approx \gamma_\rho \left(= \frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} \right)$$

Les résultats sont donc identiques dans ces conditions (faible contraste, faible valeur du nombre d'onde réduit ka).

Il n'existe pas de critère précis de validité de l'approximation de Born. Un critère souvent utilisé est le suivant

$\varepsilon ka \ll 1$; où ε est une mesure du degré d'inhomogénéité des inclusions et a la dimension caractéristique de celles-ci

$$\varepsilon \propto \frac{\Delta c}{c}, \frac{\Delta \rho}{\rho}, \frac{u}{c}; \quad a \propto V^{\frac{1}{3}}$$

Références du chapitre

P.M. Morse & U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, 1968 (*nouvelle édition en 1986 par Princeton University Press*)

P.M. Morse & H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953

A.D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to its Physical Principles and Applications*, McGraw-Hill, 1981 (*nouvelle édition en 1989 par the Acoustical Society of America*)