

### Signal gaussien et modélisation de l'intermittence

1. On considère un signal  $u = \bar{U} + u'$  avec la fluctuation  $u'$  centrée. Vérifier que pour un signal gaussien  $u'$ , le coefficient de dissymétrie vaut  $S_{u'} = 0$  et le coefficient d'aplatissement vaut  $T_{u'} = 3$ .

On rappelle l'expression de la densité de probabilité  $p(\xi)$  pour une variable aléatoire gaussienne  $\xi$  de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma$

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

ainsi que la formule d'intégration suivante

$$\int_0^\infty \xi^n e^{-a\xi^2} dx = \frac{1}{a^{(n+1)/2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma vérifiant  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  et  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

2. Le comportement d'une variable turbulente en un point est souvent intermittent, c'est-à-dire avec une succession de phases turbulentes entrecoupées de phases laminaires. C'est notamment le cas près des bords libres d'écoulements (couche limite, jet, sillage). On peut modéliser ce comportement de la façon suivante, comme illustré sur la figure 1. On définit une fonction d'intermittence en un point donné  $x$  d'un bord libre par  $I(t) = 1$  si l'écoulement est turbulent, et  $I(t) = 0$  si l'écoulement est non turbulent et irrotationnel (entraînement du fluide sain). Le facteur d'intermittence est alors défini par

$$\gamma = \bar{I} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$$

et correspond au temps en moyenne sur lequel on observe un signal turbulent au point  $x$ .

En supposant que le signal turbulent est gaussien d'écart type  $\sigma_T$  pendant une fraction  $\gamma$  du temps, et que le signal est laminaire sinon pendant une fraction  $1 - \gamma$  du temps, montrer que la variance du signal complet vaut  $\sigma^2 = \gamma\sigma_T^2$  et que le coefficient d'aplatissement vaut  $T = 3/\gamma$ .

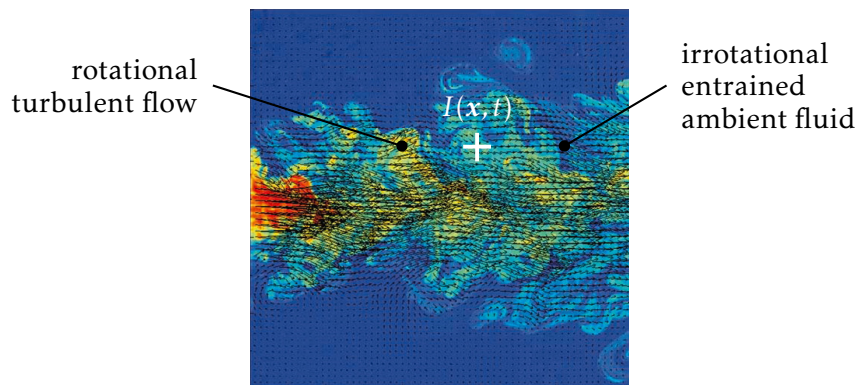


FIGURE 1 – Illustration of intermittent turbulent flows. Jet at  $Re_D = 2000$ , combined LIF/PIV visualization, from Westerweel *et al.*, 2002, *Exp. Fluids*, 33.

3. Exprimer la densité de probabilité en fonction de  $\sigma$  et  $\gamma$ , et la comparer à une distribution gaussienne de même variance.
4. Montrer que dans un cas plus général entre un signal turbulent caractérisé par  $\overline{U}_T$ ,  $\sigma_T$ , et un signal irrotationnel caractérisé par  $\overline{U}_L$  et  $\sigma_L$ , on a pour la variance du signal complet

$$\overline{u'^2} = \gamma \overline{u_T'^2} + (1 - \gamma) \overline{u_L'^2} + \gamma(1 - \gamma)(\overline{U}_T - \overline{U}_L)^2$$

### Jet rond subsonique turbulent

Turbulent velocity signals have been measured using x-hot-wire anemometer in a round subsonic jet. The signals have been recorded in data files, refer to Table 1, and collected in the zip file *hwa.zip* to download.

$u_1 \& u_2$	$u_1 \& u_2$	$u_1 \& u_3$	$u_1 \& u_3$
$x_2 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = D/2, x_3 = 0$	$x_2 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 0, x_3 = D/2$
data1.dat	data2.dat	data3.dat	data4.dat

Matlab script  
to read the data

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{load data1.m} \\ t = \text{data1}(:,1); \\ u_1 = \text{data1}(:,2); \\ u_2 = \text{data1}(:,3); \end{array} \right.$$

TABLE 1 – Turbulent velocity signals for a free round jet of diameter  $D = 50$  mm and exit velocity  $U_j = 30 \text{ m.s}^{-1}$ , corresponding to a Reynolds number value of  $\text{Re}_D \approx 10^5$ . The Cartesian coordinates are denoted by  $(x_1, x_2, x_3)$  where  $x_1$  is associated with the jet axis, and  $(u_1, u_2, u_3)$  are the velocity components. The hot-wire probe is located at  $x_1 = 2D$ .

You can conduct your study fairly freely, but the following points may be considered :

1. For a point located in the jet shear layer ( $x_2 = D/2$  ou  $x_3 = D/2$ ), extract the time signature of  $u_1'(t)$ , calculate  $u_{1\text{rms}}' = (\overline{u_1'^2})^{1/2}$ , the skewness  $S_1$  and the flatness  $T_1$  coefficients defined by

$$S_1 = \frac{\overline{u_1'^3}}{(\overline{u_1'^2})^{3/2}} \quad T_1 = \frac{\overline{u_1'^4}}{(\overline{u_1'^2})^2}$$

2. Compare your results with a Gaussian distribution for the longitudinal velocity  $u_1'$  and comment.
3. What is the following quantity  $(\overline{u_1'^2} - \overline{u_1'}^2)^{1/2}$ ? Compare this definition to the classical expression of the standard deviation.
4. Calculate the previous statistics for the time derivative of the longitudinal velocity component  $\partial u_1' / \partial t$ .
5. Calculate the available Reynolds tensor components  $\overline{u_i' u_j'}$  on the jet axis and in the shear layer. Comment your results, what is expected?
6. Consider now the probability density function of  $\overline{u_i' u_j'}$  in the shear layer. Plot this function and comment your result.
7. By splitting the time signal  $u_1'(t)$  into  $n$  segments, that are considered as  $n$  statistically independent realizations, verify that turbulence is stationary. What is the appropriate time length of each segment?

8. Calculate the time correlation function  $R(\tau)$  of the signal  $u'_1(t)$  in the jet shear layer and the integral time  $\Theta$ , defined as

$$R(\tau) = \frac{\overline{u'_1(t)u'_1(t+\tau)}}{\overline{u'^2_1}} \quad \text{and} \quad \Theta = \int_0^{+\infty} R(\tau) d\tau$$

9. How can you link the integral time  $\Theta$  to the longitudinal integral length scale  $L$ ?
10. Calculate and plot the power spectral density of  $u'_1$  and  $u'_2$  measured at  $x_2 = D/2$  (hint : there is a short introduction to Matlab for signal processing on the website).