

# Étude du rayonnement acoustique de tourbillons elliptiques par simulation numérique directe

Sébastien Barré, Christophe Bogey & Christophe Bailly

École Centrale de Lyon & UMR CNRS 5509  
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique  
36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully, France  
sebastien.barre@ec-lyon.fr

## Résumé :

*Ce travail a pour objectif d'étudier le comportement aérodynamique et le rayonnement acoustique de tourbillons elliptiques pour différents rapports grand axe / petit axe  $\sigma$ , par résolution directe des équations de Navier-Stokes compressibles. Pour  $\sigma$  proche de 1, le tourbillon tourne sans changement de forme notable et rayonne comme un quadripôle. Pour  $\sigma$  plus grand, si  $\sigma < 6$  le tourbillon éjecte des filaments de vortacité ce qui réduit son excentricité et stoppe la croissance des instabilités. Le bruit rayonné est alors essentiellement affecté par l'évolution de l'excentricité. Le niveau de pression diminue tandis que la fréquence augmente. Si  $\sigma > 6$  la croissance des instabilités est suffisamment rapide pour casser le tourbillon. En particulier, pour  $\sigma = 6$ , plusieurs oscillations entre un état elliptique et une configuration à deux tourbillons corotatifs sont observées.*

## Abstract :

*The aerodynamic evolution and the acoustic radiation of elliptic vortices with various aspect ratios  $\sigma$  are investigated by solving numerically the full compressible Navier-Stokes equations. Vortices with  $\sigma$  close to unit rotate without change of shape and radiate like a quadrupole. For higher  $\sigma$ , with  $\sigma < 6$ , filaments of vorticity are shedded and the aspect ratio decreases. This process stabilizes the vortex and reduces the level of the noise. Finally, for  $\sigma > 6$  the growth of instabilities breaks the vortex. In particular, several successive switches between an unstable elliptic state and an unstable two co-rotating vortices configuration are observed.*

## Mots-clefs :

**Simulation numérique directe compressible ; tourbillon elliptique ; rayonnement acoustique ; axisymétrisation ; instabilités**

## 1 Introduction

Le comportement de simples tourbillons 2-D fournit beaucoup de renseignements sur l'évolution des structures turbulentes cohérentes. L'étude de tourbillons elliptiques se révèle par exemple très utile lorsqu'on s'intéresse aux écoulements géophysiques, ou pour modéliser les effets anisotropiques de la turbulence.

Le tourbillon de Kirchhoff a été le premier tourbillon elliptique étudié. Il est défini par une répartition de vortacité constante  $\omega$ , de grand axe  $2a$  et de petit axe  $2b$ . Love [1] a montré analytiquement qu'il est linéairement stable quand  $\sigma = a/b < 3$ . Ce résultat a ensuite été étendu numériquement à la stabilité non linéaire par Dritschel [2]. Deux phénomènes peuvent affecter son comportement. D'après Melander [3] les effets visqueux provoquent une diffusion du tourbillon en réduisant les gradients de vortacité. Melander observe alors numériquement l'émission de filaments de vortacité, éjectés par le tourbillon lorsque celui-ci est suffisamment étalé. Il en découle dans ce cas une réduction du rapport  $\sigma$  et donc l'axisymétrisation du tourbillon. Un second phénomène se produit lorsque  $\sigma > 3$ . Le tourbillon est alors instable, ce qui provoque

la croissance d'instabilités et peut conduire à une cassure du tourbillon en plusieurs tourbillons corotatifs. Ce phénomène s'oppose à la filamentation, qui tend à stabiliser le tourbillon en ramenant  $\sigma$  sous le seuil de stabilité. La compétition entre ces deux phénomènes est difficile à étudier numériquement. La plupart des approches précédentes s'appliquent pour des écoulements incompressibles. Le champ acoustique ne peut donc pas être calculé directement. Les travaux traitant du bruit émis par un tourbillon elliptique se restreignent alors à des études analytiques [4] pour des rapports  $a/b$  proches de 1.

Ce travail a pour objectif d'étudier le bruit émis par des tourbillons elliptiques pour une grande gamme de  $\sigma$ , en résolvant directement les équations de Navier-Stokes compressibles. Il s'agit de déterminer comment l'axisymétrisation et la croissance des instabilités modifient le champ acoustique et comment le comportement du tourbillon est affecté par la compétition entre ces deux phénomènes. Le cas d'un rapport initial  $\sigma = 1.2$  est d'abord traité. On s'intéresse ensuite au cas instable  $\sigma = 5$ , puis au cas  $\sigma = 6$ . Ces configurations permettront d'estimer dans quelles gammes de  $\sigma$  chaque phénomène domine l'autre.

## 2 Méthode numérique

Les équations de Navier-Stokes 2-D compressibles sont résolues sous forme conservative. Des schémas numériques faiblement dispersifs et peu dissipatifs développés par Bogey & Bailly [5] ont été utilisés. Les dérivées spatiales sont calculées avec un schéma aux différences finies sur 11 points optimisé, assurant une bonne précision jusqu'à 4 points par longueur d'onde. L'intégration temporelle est effectuée au moyen d'un algorithme de Runge-Kutta en six étapes également optimisé. Afin d'assurer la stabilité des calculs, les oscillations maille à maille sont dissipées par un filtre sélectif sur 11 points. Les conditions aux limites non réfléchissantes de Tam & Webb [6] ont été également implémentées pour minimiser les réflexions aux frontières du domaine de calcul.

Les simulations ont été effectuées sur un maillage cartésien de  $381 \times 381$  points. Le cas  $\sigma = 1.2$  a aussi été réalisé avec une grille deux fois plus fine et a montré que les résultats ne sont alors pas modifiés. À  $t = 0$  le champ de vitesse est celui du tourbillon de Kirchhoff [7]. La pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$  sont initialisées avec les valeurs ambiantes  $p_\infty$  et  $\rho_\infty$ . On définit le paramètre  $\epsilon$  par  $\sigma = (1 + \epsilon)/(1 - \epsilon)$ . Dans ce qui suit  $\Omega$  est la vitesse de rotation du tourbillon,  $T$  est la période de rotation et l'indice 0 indique que la grandeur est prise à  $t = 0$ .

## 3 Tourbillon avec un rapport $\sigma$ proche de 1 ( $\sigma_0 = 1.2$ )

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'un tourbillon de faible rapport initial  $\sigma_0 = 1.2$ . Le tourbillon tourne autour de son centre à vitesse constante  $\Omega = \Omega_0$ , sans changement de forme. La période de rotation est en très bon accord avec la valeur théorique [7] donnée par Lamb  $\Omega_{th} = \omega(1 - \epsilon^2)/4$ . Après 30 révolutions la filamentation n'est pas encore amorcée, ce qui est en bon accord avec les travaux de Dritschel [8], qui montrent que l'axisymétrisation ne se produit pas véritablement lorsque les gradients de vorticité sont suffisamment élevés.

Le champ acoustique rayonné correspond à celui d'un quadripôle [9], comme l'illustre la figure 1(a). Le champ proche, qui domine la pression au voisinage du tourbillon, s'att ne rapidement lorsqu'on s'éloigne pour finalement être négligeable à la périphérie du domaine de calcul où seul le champ acoustique lointain est observé. Le tourbillon émet un bruit harmonique de pulsation  $2\Omega_0$ . Howe [4] a fourni une expression analytique des fluctuations de pression acoustique en champ lointain, dans le cas d'un tourbillon de paramètre  $\epsilon \ll 1$ . Elle s'applique

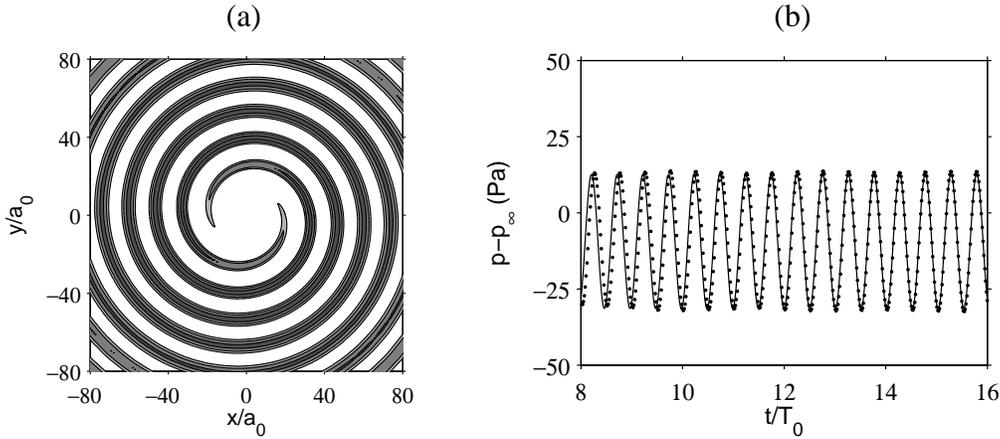


FIG. 1 – Cas  $\sigma_0 = 1.2$ . (a) champ de pression à  $t = 15.9T_0$  (contours en  $p_\infty - 10$  Pa,  $p_\infty$  et  $p_\infty + 10$  Pa). (b) signal de pression au point  $x/a_0 = y/a_0 = 56$  : — solution analytique ; • calcul.

ici car  $\epsilon_0 = 0.09$ . La figure 1(b) compare le signal temporel de pression obtenu en un point du domaine de calcul avec le signal prédit par cette formulation. On observe un très bon accord entre les deux résultats, aussi bien en fréquence qu'en niveau.

#### 4 Tourbillon avec un rapport $\sigma_0 = 5$

Le cas d'un tourbillon de rapport initial  $\sigma_0 = 5$  a ensuite été étudié. Le paramètre  $\epsilon_0$  vaut maintenant 0.67 et n'est donc plus négligeable devant 1. Comme  $\sigma_0 > 3$ , le tourbillon est initialement instable. Lors de sa première révolution, il commence à se déformer très légèrement suite à la croissance d'instabilités. Cependant, durant la seconde révolution, des filaments de vorticité commence à être éjectés, amorçant ainsi l'axisymétrisation du tourbillon (figure 2). La filamentation provoque alors une diminution du rapport  $\sigma$ , qui passe sous le seuil de stabilité avant la fin de la troisième révolution. Le tourbillon devient donc stable, avant que sa forme ne soit notablement affectée par la croissance des instabilités. Seule l'axisymétrisation se poursuit en diminuant  $\epsilon$ . La vitesse de rotation du tourbillon, tracée sur la figure 3(a), augmente progressivement en très bon accord avec l'expression théorique  $\Omega_{th} = \omega(1 - \epsilon^2)/4$ . Ainsi, la filamentation influe sur la rotation du tourbillon essentiellement par la modification de sa forme géométrique, via  $\epsilon$  dans la vitesse de rotation théorique.

Le champ acoustique est également affecté par l'axisymétrisation. L'accélération de la rotation provoque une augmentation de la fréquence du bruit. Cette tendance n'est pas prédite par la formule de Howe [4] car celle-ci ne prend en compte que le premier ordre en  $\epsilon$  et pas l'ordre 2 qui est responsable de l'augmentation de  $\Omega_{th}$ . Dans la suite, la vitesse de rotation approchée utilisée par Howe est remplacée par  $\Omega_{th}$ , pour pouvoir tenir compte de l'évolution de  $\Omega$  dans la formulation. Le niveau de bruit décroît avec le temps, comme le montre le signal de pression tracé sur la figure 3(b). Ceci est cohérent avec les résultats de Howe qui prédisent une amplitude proportionnelle à  $\epsilon$ . La comparaison de la formulation avec les résultats du calcul est présentée sur la même figure. L'expression analytique suppose que le tourbillon a une forme fixée. Les valeurs des paramètres géométriques du tourbillon au temps retardé  $t_r$ , correspondant à l'instant d'émission du bruit reçu à  $t = 11T_0$ , ont alors été utilisées. La comparaison n'est donc

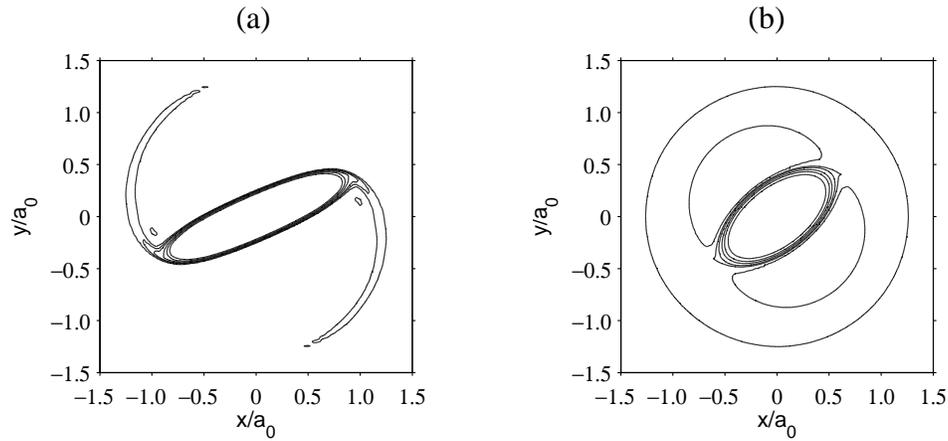


FIG. 2 – Cas  $\sigma_0 = 5$ . Iso-niveaux de vorticité à deux instants : (a)  $t/T_0 = 1.7$  et (b)  $t/T_0 = 11.7$ . Niveaux : 2%, 10%, 20%, 40%, 60% et 80% du maximum de vorticité.

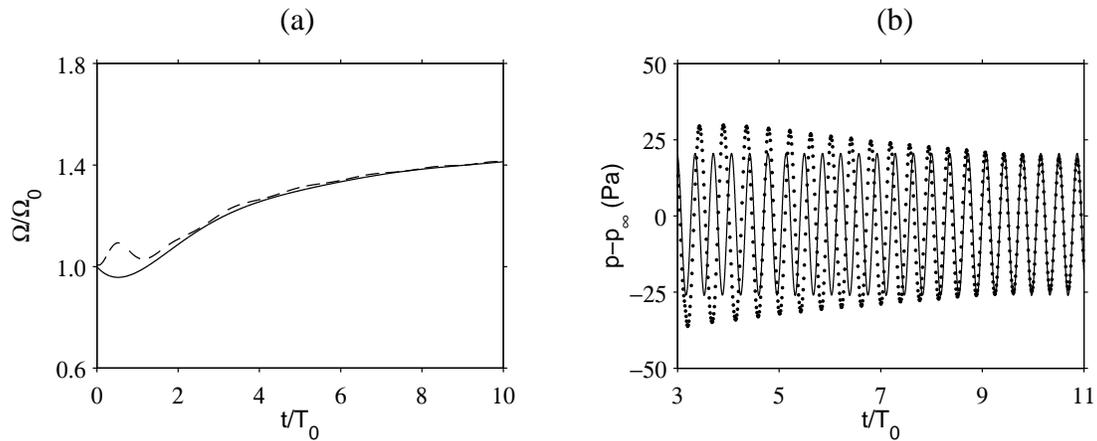


FIG. 3 – Cas  $\sigma_0 = 5$ . (a) évolution temporelle de la vitesse de rotation du tourbillon : — vitesse effective  $\Omega$ ; ---- vitesse théorique du tourbillon de Kirchhoff  $\Omega_{th} = \omega(1 - \epsilon^2)/4$ . (b) signal de pression au point  $x/a_0 = y/a_0 = 3/7$  : — solution analytique ; • calcul.

valable qu'au voisinage de  $t = 11T_0$ . L'accord avec le calcul est très satisfaisant, aussi bien en fréquence qu'en niveau, ce qui montre que la formulation de Howe peut être étendue aux cas où  $\epsilon$  n'est pas petit devant 1.

## 5 Tourbillon avec un rapport $\sigma_0 = 6$

Un tourbillon de rapport  $\sigma_0 = 6$  est finalement étudié. La croissance des instabilités se produit maintenant plus rapidement, au regard de la période de rotation du tourbillon, que lors du cas précédent. Les iso-niveaux de vorticité des figures 4(a) et 4(b) montrent que la géométrie du tourbillon est fortement affectée en moins d'un quart de révolution. La croissance des instabilités est trop rapide pour être stoppée par l'axisymétrisation. Vers  $t = 0.48T_0$  le tourbillon se casse et forme deux tourbillons corotatifs. Cette nouvelle configuration est instable, ce qui provoque la fusion des tourbillons et crée un tourbillon elliptique (figure 4(c)). Celui-ci ayant

également un ratio  $\sigma > 3$ , des instabilités se développent à nouveau (figure 4(d)). On observe alors plusieurs passages successifs entre deux états instables : un tourbillon elliptique et deux tourbillons corotatifs. Finalement, à la septième cassure, une configuration stable à deux tourbillons corotatifs est formée.

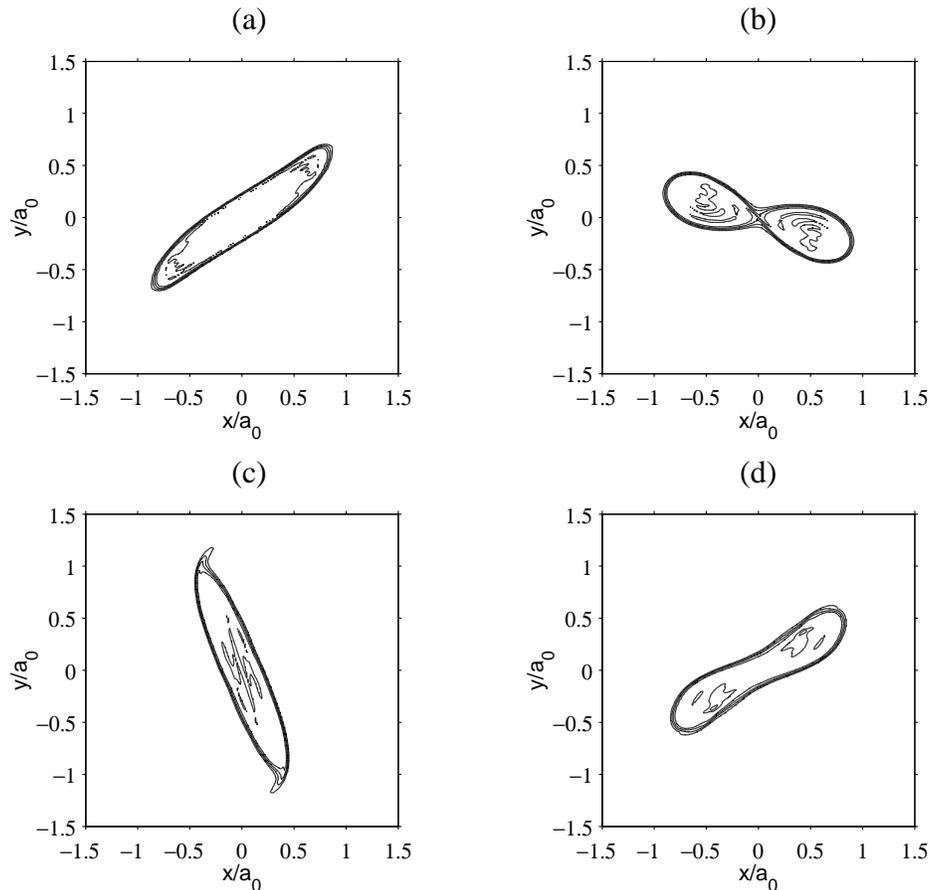


FIG. 4 – Cas  $\sigma_0 = 6$ . Iso-niveaux de vorticité à plusieurs instants successifs : (a)  $t/T_0 = 0.096$  ; (b)  $t/T_0 = 0.48$  ; (c)  $t/T_0 = 0.87$  et (d)  $t/T_0 = 1.2$ . Niveaux : 20%, 40%, 60% et 80% du maximum de vorticité.

Le signal temporel de pression en champ lointain est représenté sur la figure 5. Le bruit mesuré jusqu'à  $t = 9T_0$  est émis lors de la succession des deux états instables. L'autre partie du signal de pression, pour  $t > 9T_0$ , est issue de la configuration stable finale. On remarque d'abord que le champ acoustique est peu affecté par les oscillations entre les deux états instables, malgré les modifications notables de géométrie qui se produisent durant cette phase. En revanche, la formation définitive de deux tourbillons corotatifs induit une diminution du niveau et de la fréquence du bruit rayonné. On n'observe ensuite plus qu'une lente décroissance du niveau et de la fréquence sous l'effet de la viscosité.

## 6 Conclusions

Le rapport initial  $\sigma_0$  d'un tourbillon elliptique apparaît comme un paramètre clef. Sa valeur fixe l'importance relative des phénomènes d'axisymétrisation et de croissance des instabilités.

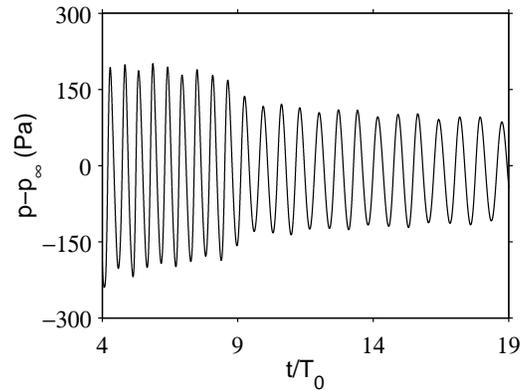


FIG. 5 – Cas  $\sigma_0 = 6$ . Signal de pression au point  $x/a_0 = y/a_0 = 36$ .

Si  $\sigma_0$  est voisin de 1, aucun de ces phénomènes n'a d'impact visible sur le tourbillon. Pour de plus grandes valeurs de  $\sigma_0$ , lorsque  $\sigma_0 < 6$  la filamentation permet de stabiliser le tourbillon et s'avère être le mécanisme prépondérant. Finalement, pour  $\sigma_0 \geq 6$  la croissance des instabilités est trop rapide pour être stoppée par l'axisymétrisation et provoque une cassure du tourbillon. Le champ acoustique rayonné est également affecté par ces deux phénomènes, principalement via la modification de l'excentricité du tourbillon.

## Références

- [1] A. E. H. Love. On the stability of certain vortex motions. *Proc. London Math. Soc.*, 35 :18–42, 1893.
- [2] D. G. Dritschel. The nonlinear evolution of rotating configurations of uniform vorticity. *J. Fluid Mech.*, 172 :157–182, 1986.
- [3] M. V. Melander, J. C. McWilliams, and N. J. Zabusky. Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation. *J. Fluid Mech.*, 178 :137–159, 1987.
- [4] M. S. Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, 71 :625 – 673, 1975,.
- [5] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computation. *J. Comp. Phys.*, 194 :194–214, 2004.
- [6] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comp. Phys.*, 107 :262–281, 1993.
- [7] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover, New York, 1932.
- [8] D. G. Dritschel. On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, 371 :141–155, 1998.
- [9] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Numerical simulation of the sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA J.*, 38(12) :2210–2218, 2000.