

Développement d'une méthode de filtrage adaptatif et conservatif pour la capture de choc

N. DE CACQUERAY^a, C. BOGEY^b ET C. BAILLY^c

a. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully Cedex, France. Email : nicolas.cacqueray@ec-lyon.fr

b. Même adresse. Email : christophe.bogey@ec-lyon.fr

c. Même adresse et Institut Universitaire de France. Email : christophe.bailly@ec-lyon.fr

Résumé :

Une méthode de capture de choc est développée pour résoudre les problèmes non-linéaires avec des méthodes numériques d'ordre élevé. Elle consiste à appliquer un filtre adaptatif et conservatif d'ordre 2 au voisinage des discontinuités. L'intensité du filtrage de la procédure de capture de choc est évaluée de manière dynamique à l'aide d'un détecteur basé sur la dilatation. Des résultats obtenus pour la propagation d'un choc faible et pour l'interaction choc-tourbillon sont montrés pour illustrer la précision de la méthodologie.

Abstract :

A shock-capturing method is developed for high-order non-linear computations. It consists in applying an adaptive second-order conservative filtering to handle discontinuities. The magnitude of the shock-capturing filtering is determined dynamically from the flow solutions using a procedure based on a Jameson-like shock detector. Results obtained for a shock-propagation problem and shock-vortex interaction are shown to assess the validity of the method.

Mots clés : choc, aéroacoustique, supersonique, simulation des grandes échelles

1 Introduction

L'utilisation de méthodes numériques d'ordre élevé nécessite l'emploi d'un filtre sélectif afin de supprimer les oscillations maille-à-maille [1], [2], [3]. Ces filtres peuvent être directement utilisés pour la résolution de problèmes fortement non-linéaires comme le bruit de screech [4]. Néanmoins, ces filtres sont mal adaptés aux problèmes contenant de fortes discontinuités. Au voisinage des chocs, les méthodes numériques d'ordre élevé produisent des oscillations de Gibbs à cause de la troncature spectrale dans l'espace des nombres d'onde. Pour assurer la stabilité des simulations des écoulements choqués, l'approche usuelle est d'employer un schéma de capture de choc. Cependant, ce type de schéma est souvent trop dissipatif pour les calculs instationnaires. Leur propriété spectrale doit donc être analysée avec soin [5] et leur précision testée sur des cas test linéaires et non-linéaires [6].

Une approche alternative est d'utiliser une procédure de capture de choc adaptative comme celle développée par Tam & Shen [7] et Kim & Lee [8]. La dissipation de la procédure s'adapte localement à l'écoulement afin de ne pas dégrader la résolution instationnaire.

Dans cet article, une méthode de capture de choc adaptative est développée pour l'aéroacoustique instationnaire. Cette méthode s'emploie avec des schémas de discrétisation d'ordre élevé et s'implémente après le filtrage sélectif. Pour dissiper les oscillations de Gibbs, un filtre d'ordre 2 mis sous sa forme conservative est utilisé. L'intensité du filtrage est évaluée de manière dynamique avec un détecteur basé sur les fluctuations de la dilatation qui permet de distinguer les chocs des autres structures de l'écoulement. L'intensité du filtrage ainsi calculée est non nulle uniquement au voisinage des discontinuités.

La méthode de capture de choc est d'abord présentée, puis illustrée pour le problème de la propagation d'un choc faible et pour l'interaction entre un choc et un tourbillon. Des détails supplémentaires sur la procédure de capture de choc ainsi que les résultats obtenus pour différents cas test dont la propagation linéaire d'une onde acoustique et d'un tourbillon, l'interaction choc-acoustique dans une tuyère transonique et l'interaction entre un choc et un tourbillon sont disponibles dans la référence [9].

2 Méthodologie

La procédure de capture de choc développée est composée de deux parties : la détection des oscillations de Gibbs et le filtrage conservatif. La détection fixe le niveau de filtrage et l'emploi d'un filtre conservatif d'ordre 2

dissipe les oscillations de Gibbs. L'application locale et adaptative du filtrage permet de ne pas dégrader la résolution de l'acoustique et de la turbulence.

Le détecteur est proche de celui employé par Jameson *et al.* [10]. Cependant la pression est remplacée par la dilatation $\Theta = \nabla \mathbf{u}$ pour prendre en compte la compressibilité locale du fluide et permettre ainsi de distinguer les structures turbulentes des chocs [11].

Les fluctuations hautes fréquences de la dilatation sont d'abord extraites à l'aide d'un filtre laplacien. Au nœud i , on obtient :

$$D\Theta_i = \frac{1}{4} (-\Theta_{i+1} + 2\Theta_i - \Theta_{i-1}) \quad (1)$$

La magnitude des fluctuations hautes fréquences est ensuite calculée :

$$D\Theta_i^{magn} = \frac{1}{2} [(D\Theta_i - D\Theta_{i+1})^2 + (D\Theta_i - D\Theta_{i-1})^2] \quad (2)$$

Enfin le détecteur r se calcule comme le rapport de la magnitude des fluctuations hautes fréquences sur une dilatation caractéristique du maillage :

$$r_i = \frac{D\Theta_i^{magn}}{c_i^2 / \Delta x^2} + \epsilon \quad (3)$$

où $c_i^2 = \gamma p_i / \rho_i$ est le carré de la vitesse du son, Δx est la taille des mailles et $\epsilon = 10^{-16}$ est un paramètre numérique introduit pour éviter une divergence numérique à cause d'une division par zéro dans l'équation (4). L'intensité σ^{sc} du filtrage est alors évaluée dynamiquement à partir du détecteur r et d'un paramètre seuil r_{th}

$$\sigma_i^{sc} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_{th}}{r_i} + \left| 1 - \frac{r_{th}}{r_i} \right| \right) \quad (4)$$

D'après les cas test réalisés, le paramètre seuil peut être généralement fixé à 10^{-5} . L'intensité du filtrage σ^{sc} est tracée en fonction du rapport r/r_{th} sur la figure 1. Lorsque le niveau des fluctuations hautes fréquences est inférieur au seuil, i.e. $r < r_{th}$, l'intensité du filtrage est nulle et le filtre de capture de choc ne s'applique donc pas. Dans ce cas, le problème est localement résolu uniquement avec des méthodes d'ordre élevé. Lorsque le niveau des fluctuations devient supérieur à la valeur seuil, i.e. $r > r_{th}$, l'amplitude du filtrage croît jusqu'à une valeur limite de 1. Dans ce cas, le filtre dissipatif de la procédure de capture de choc s'applique.

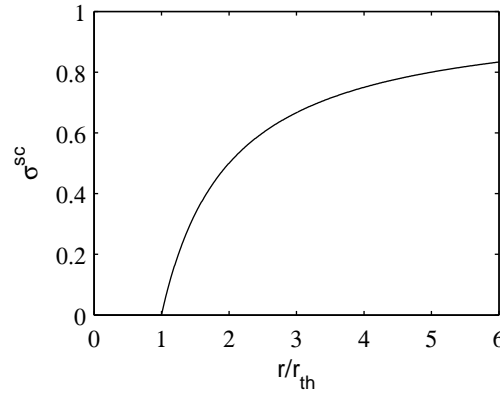


FIG. 1 – Amplitude du filtrage σ^{sc} en fonction du ratio $\frac{r}{r_{th}}$

La seconde composante de la procédure de capture de choc développée est l'application d'un filtre conservatif. Ce filtre est utilisé après le filtre sélectif. La procédure de capture de choc doit être conservative pour avoir une localisation correcte du choc [12]. Le filtre s'applique donc sur les variables conservatives de l'écoulement. De plus, la variation spatiale de l'intensité σ^{sc} du filtre de capture de choc nécessite d'écrire l'opération de filtrage sous la forme d'une différence de flux de dissipation prise aux interfaces des cellules du maillage [8]. Au point i d'une grille uniforme, on obtient alors :

$$U_i^{sc} = U_i - \left(\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{sc} D_{i+\frac{1}{2}}^{sc} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^{sc} D_{i-\frac{1}{2}}^{sc} \right) \quad (5)$$

où σ^{sc} est l'amplitude du filtrage évaluée par l'équation (4), les valeurs aux interfaces $i + \frac{1}{2}$ et $i - \frac{1}{2}$ sont prises comme les moyennes de σ^{sc} entre les cellules i et $i + 1$, et les cellules i et $i - 1$. Les fonctions de dissipation $D_{i+\frac{1}{2}}^{sc}$ et $D_{i-\frac{1}{2}}^{sc}$ sont évaluées à partir de la variable conservative U en utilisant les interpolations suivantes :

$$D_{i+\frac{1}{2}}^{sc} = \sum_{j=1-n}^n c_j U_{i+j} \quad \text{et} \quad D_{i-\frac{1}{2}}^{sc} = \sum_{j=1-n}^n c_j U_{i+j-1} \quad (6)$$

Pour déterminer la valeur des coefficients c_j , on utilise la forme non conservative centrée du filtrage :

$$U_i^{sc} = U_i - \sigma_i^{sc} \sum_{j=-n}^n d_j U_{i+j} \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) doivent être égales lorsque σ^{sc} est constant. Cela permet de déterminer les coefficients c_j en fonction des coefficients d_j . Les coefficients c_j pour le filtre standard d'ordre 2 (Fo2) sont reportés dans le tableau 1.

En explicitant les termes de dissipation de l'équation (5) à l'aide de l'équation (6) et en appliquant une transformée de Fourier spatiale, on obtient :

$$\hat{U}_i^{sc} = \hat{U}_i (1 - \sigma_i^{sc} D_{real}(k\Delta x) + i\Delta\sigma_i^{sc} D_{imag}(k\Delta x)) \quad (8)$$

où $\Delta\sigma_i^{sc} = (\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{sc} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^{sc})/2$, $D_{real}(k\Delta x)$ est la fonction de transfert équivalente du filtre obtenue pour une intensité de filtrage uniforme et $D_{imag}(k\Delta x)$ est la fonction de transfert de l'erreur de phase induite par les variations de l'intensité du filtrage $\Delta\sigma_i^{sc}$. En se basant sur cette analyse, un filtre optimisé Fopt pour la capture de choc est développé. Le filtre optimisé Fopt est discrétisé sur 4 points sous sa forme conservative, il possède une dissipation $D_{real}(k\Delta x)$ évoluant suivant l'ordre 2 et il minimise l'erreur de phase $D_{imag}(k\Delta x)$. Le détail de la procédure d'optimisation du filtre Fopt est disponible dans [9]. Les coefficients du filtre Fopt ont aussi été reportés dans le tableau 1.

	Fo2	Fopt
c_1	-1/4	-0.210383
c_2	0	0.039617

TAB. 1 – Coefficients c_j de la forme conservative du filtre de capture de choc avec $c_{1-j} = -c_j$. Filtre d'ordre 2 standart (Fo2) et filtre optimisé d'ordre 2 (Fopt).

3 Applications de la procédure de capture de choc

Deux exemples d'applications sont présentés pour illustrer les propriétés de la procédure de capture de choc développée. Ils ont été résolus en utilisant les équations d'Euler 1D ou 2D. Les dérivées spatiales sont calculées à l'aide de schémas aux différences finies centrés sur 11 points d'ordre 4 optimisés dans l'espace de Fourier [1]. L'intégration temporelle est réalisée à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 à 6 étapes optimisé dans l'espace de Fourier [1]. Un filtre sélectif centré sur 11 points d'ordre 6 optimisé [9] est utilisé pour dissiper les oscillations maille-à-maille. L'intensité σ^{sf} du filtrage sélectif est constante et égale à 1. Les deux exemples d'application sont la propagation d'un choc faible et l'interaction entre un choc droit et un tourbillon.

3.1 Propagation d'un choc faible

La procédure de capture de choc est maintenant mise en oeuvre pour résoudre la propagation 1D d'un choc faible [13]. A l'instant $t = 0$, une impulsion de pression est introduite en $x = 0$. A cause des effets non-linéaires, l'impulsion se transforme en choc faible au cours de sa propagation. Le problème est résolu sur une grille uniforme avec une taille de maille $\Delta x = 1$ et un pas de temps $\Delta t = 0.8$. Pour les différents cas traités, les résultats obtenus pour la pression au temps $t = 200$ sont comparés sur la figure 2.

On s'intéresse tout d'abord aux grandeurs filtrées par le filtre sélectif [14] sans la procédure de capture de choc. Si le filtrage sélectif est appliqué sur les flux, comme sur la figure 2(a), l'impulsion de pression est totalement dispersée. Par contre, lorsque l'on applique le filtrage sélectif sur les variables conservatives des équations d'Euler, comme sur la figure 2 (b), l'impulsion de pression se raidit, forme un choc faible, et laisse apparaître des oscillations de Gibbs au niveau de la discontinuité à cause de la troncature spectrale. Le choc est alors positionné en $x \simeq 249\Delta x$.

En plus du filtrage sélectif appliqué sur les variables conservatives, la procédure de capture de choc est maintenant utilisée avec un paramètre seuil $r_{th} = 10^{-5}$ et le filtre Fo2. Sur la figure 2(c), le filtre Fo2 a été implémenté sous sa forme non-conservative, décrite par l'équation (7), alors que, sur la figure 2 (d), le filtre a été implémenté en utilisant sa forme conservative explicitée par l'équation (6). Dans les deux cas, les oscillations de Gibbs sont supprimées au voisinage de la discontinuité par la dissipation induite par le filtre Fo2. Lorsque le filtrage est utilisé sous sa forme non-conservative, la prédiction de la localisation du choc est incorrecte. Ainsi, sur la figure 2(c), le choc est situé en $x \simeq 252\Delta x$. Par contre, lorsque le filtrage est appliqué sous sa forme conservative, la localisation du choc est correcte. Sur la figure 2(d), le choc est situé au même emplacement que sur la figure 2(b), i.e. en $x \simeq 249\Delta x$. Enfin, on constate dans la référence [9] que l'intensité du filtrage est nulle partout

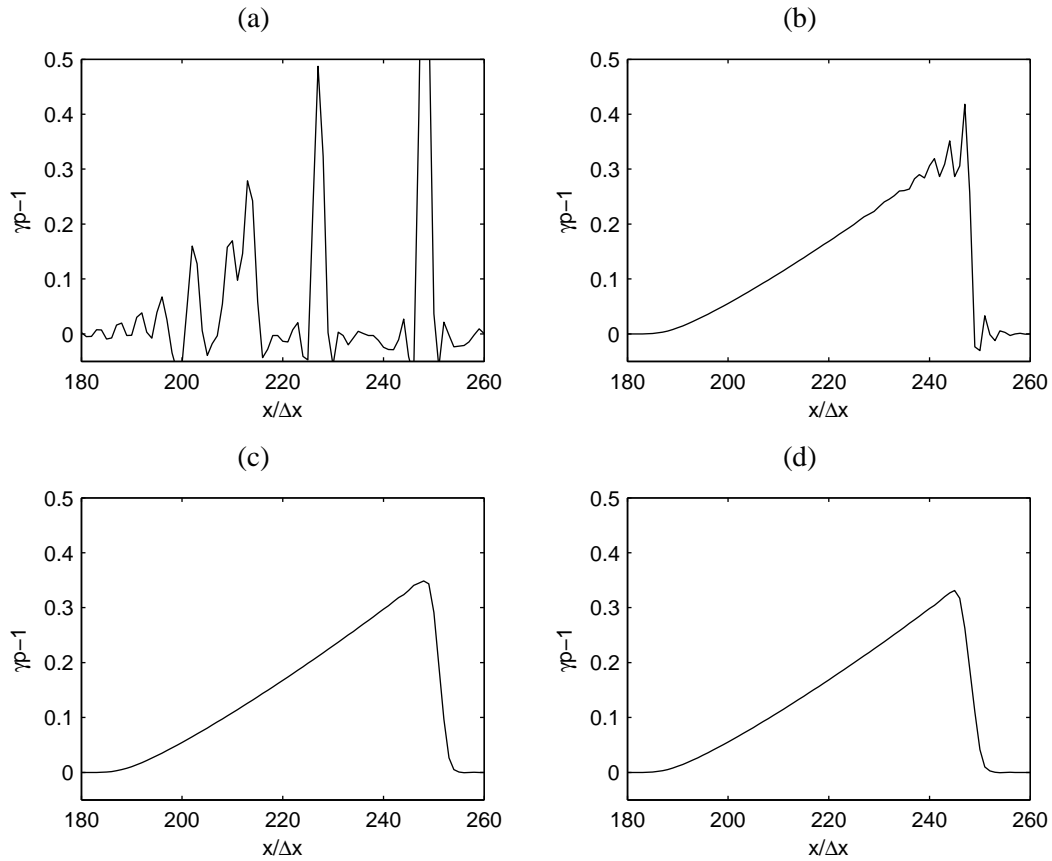


FIG. 2 – Propagation d'un choc faible. Pression calculée au temps $t = 200$: (a) sans le schéma de capture de choc avec le filtrage sélectif appliqué sur les flux, (b) sans le schéma de capture de choc avec le filtrage sélectif appliqué sur les variables conservatives, (c) avec le schéma de capture de choc appliqué de manière non conservative et le filtrage sélectif sur les variables, (d) avec le schéma de capture de choc appliqué sous forme conservative et le filtrage sélectif sur les variables. Le filtre utilisé est Fo2 et la seuil est $r_{th} = 10^{-5}$.

sauf au voisinage du choc.

Cet exemple permet d'illustrer la nécessité d'appliquer le filtrage sélectif sur les variables, et d'utiliser la forme conservative de la procédure de capture de choc.

3.2 Interaction choc-tourbillon

On cherche maintenant à montrer l'efficacité du couplage entre les méthodes d'ordre élevé et la procédure de capture de choc développée pour résoudre des problèmes non-linéaires. Cette efficacité repose sur la capacité du détecteur de la procédure à dissocier les chocs des autres phénomènes de l'écoulement.

Pour cela, on s'intéresse à l'interaction entre un choc droit dont le nombre Mach de l'écoulement amont est $M_s = 1.2$ et un tourbillon de Taylor dont le nombre de Mach maximum de la vitesse azimuthale est $M_v = 0.8$. Ce cas test classique pour les schémas de capture de choc a été étudié par Inoue & Hattori [15] et par Grosso & Pirozzoli [16]. Lorsque le tourbillon passe au travers du choc, il y a création d'ondes acoustiques et d'entropie. De plus, la déformation du choc par le tourbillon produit des chocs réfléchis qui s'enroulent autour du tourbillon.

Le calcul a été résolu sur une grille de taille $n_x \times n_y = 701 \times 501$, les directions X et Y ont été adimensionnalisées par rapport au rayon du tourbillon. Le filtrage sélectif est appliqué sur les variables conservatives et la procédure de capture de choc est utilisée sous sa forme conservative, avec le filtre Fo2t et une valeur de seuil $r_{th} = 10^{-5}$. Le choc est situé en $x = 0$, le champ moyen est initialisé à l'aide des relations de saut pour un choc droit [17], et le tourbillon est discrétisé avec 20 points dans son rayon.

Les fluctuations du champ de pression sont représentées sur la figure 3(a), avec $\Delta p = p - \bar{p}$, où \bar{p} est la pression moyenne. On observe la génération d'ondes acoustiques ainsi que la création de chocs réfléchis. La simulation ne semble pas présenter d'oscillations de Gibbs importantes au voisinage des chocs, ce qui signifie que la procédure de capture de choc a correctement fonctionné. Afin d'améliorer la visualisation des chocs réfléchis ainsi que la déformation du choc droit, le Laplacien de la densité $\nabla \rho$ a été représenté sur la figure 3(b).

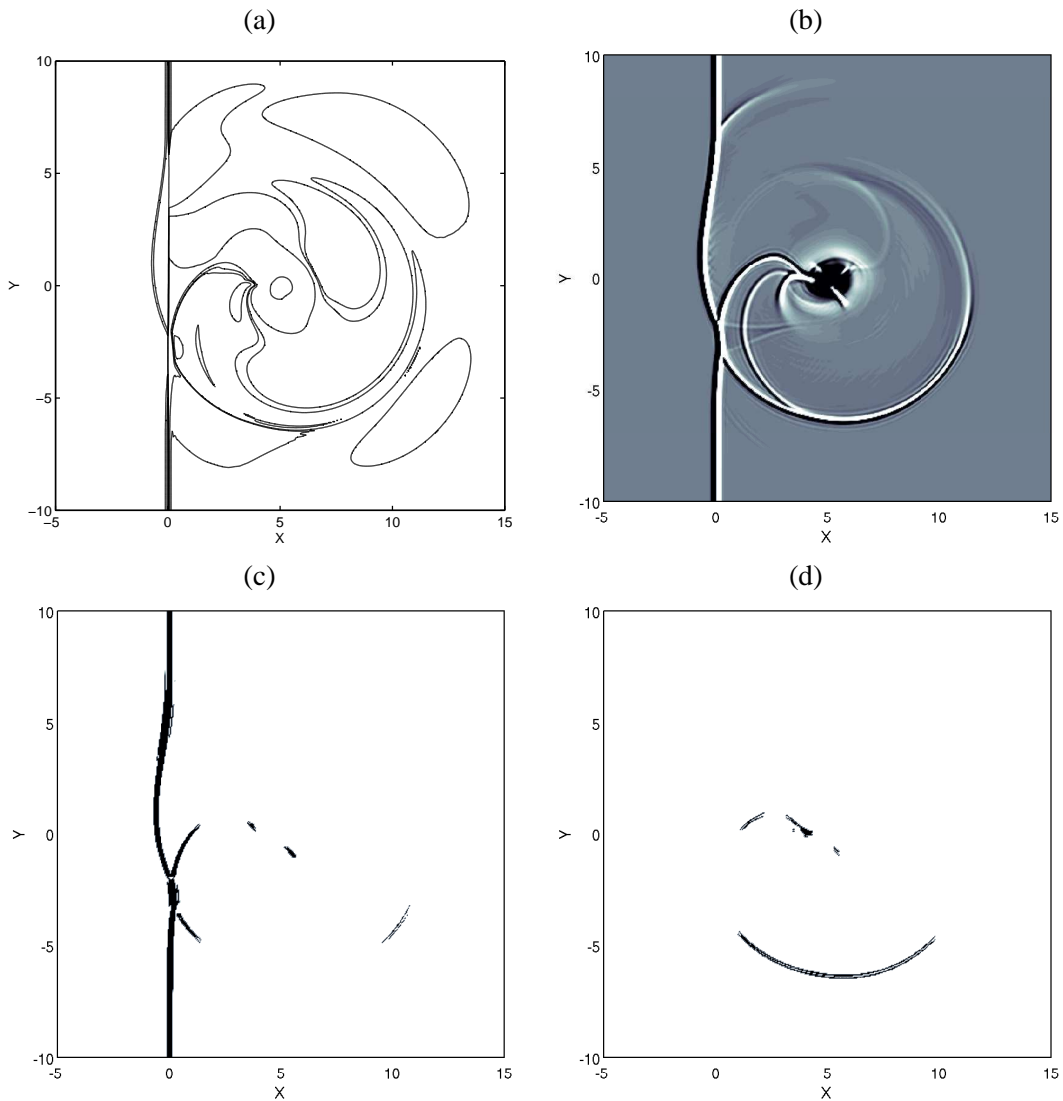


FIG. 3 – Interaction choc-tourbillon, $M_s = 1.2$, $M_v = 0.8$. (a) Représentation des contours du champ de pression fluctuante $\Delta p = [-0.7, -0.07, -0.007, 0.007, 0.07, 0.7]$, (b) Laplacien de la densité $\nabla^2 \rho$, (c) intensité σ^{sc} du filtrage dans la direction X et (d) intensité σ^{sc} du filtrage dans la direction Y .

L'intensité du filtrage σ^{sc} dans les directions X et Y a été tracée sur les figures 3(c) et 3(d). On remarque que l'intensité du filtrage est non nulle uniquement au voisinage des chocs. Le détecteur développé distingue donc correctement les chocs des tourbillons et des ondes acoustiques.

Cette exemple permet de montrer l'efficacité de la procédure de capture de choc dans une configuration instationnaire et complexe. Cette efficacité repose notamment sur l'adaptativité de la procédure ainsi que son couplage avec les méthodes numériques d'ordre élevé.

4 Conclusion

Une procédure de capture de choc a été développée pour permettre la résolution de problèmes non-linéaires contenant des chocs par des méthodes numériques peu dissipatives d'ordre élevé. Cette procédure utilise un filtrage adaptatif et conservatif d'ordre 2 qui s'applique uniquement au voisinage de la discontinuité. La détection du choc est basée sur la dilatation et permet de fixer l'intensité du filtrage. Le filtre doit être d'ordre 2 afin de dissiper suffisamment les oscillations de Gibbs et utilisé sous sa forme conservative pour avoir une localisation correcte des chocs. Cette procédure est décrite plus en détail et est appliquée sur des cas test linéaires et non-linéaires dans la référence [9]. Enfin les simulations réalisées révèlent que cette procédure est efficace, facile à programmer et peu coûteuse numériquement.

Remerciements

Le premier auteur remercie le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) pour son soutien financier. Les simulations ont été réalisées sur le Nec-SX8 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS - CNRS).

Références

- [1] Bogey C. and Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.*, 194(1), 194–214, 2004.
- [2] Lele S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103(1), 16–42, 1992.
- [3] Visbal M. and Gaitonde D. High-order-accurate methods for complex unsteady subsonic flows. *AIAA Journal*, 37(10), 1231–1239, 1999.
- [4] Berland J., Bogey C., and Bailly C. Numerical study of screech generation in a planar supersonic jet. *Phys. Fluids.*, 19, 2007.
- [5] Pirozzoli S. On the spectral properties of shock-capturing schemes. *J. Comput. Physics*, 219, 489–497, 2006.
- [6] Daru V. and Gloerfelt X. Aeroacoustic computations using a high-order shock-capturing scheme. *AIAA Journal*, 45(10), 2474–2486, 2007.
- [7] Tam C. and Shen H. Direct computation of nonlinear acoustic pulse using high order finite difference schemes. *AIAA*, 1993.
- [8] Kim J. and Lee D. Adaptive nonlinear artificial dissipation model for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, 39(5), 810–818, 2001.
- [9] Bogey C., de Cacqueray N., and Bailly C. A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations. *J. of Comput. Phys.*, 228(5), 1447–1465, 2009.
- [10] Jameson A., Schmidt W., and Turkel E. Numerical solutions of the euler equation by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes. *AIAA Journal*, 1981.
- [11] Ducros F., Ferrand V., Nicoud F., Weber C., Darracq D., Gacherieu C., and Poinot T. Large-eddy simulation of shock/turbulence interaction. *J. of Comput. Phys.*, 152(2), 517–549, 1999.
- [12] LeVêque R. Numerical methods for conservation laws. *Birkäuser*, 1992.
- [13] Tam C. Benchmark problems and solutions. *ICASE/LaRC Workshop on CAA*, NASA CP 3300, 1-13, 1995.
- [14] Bogey C. and Bailly C. On the application of the explicit filtering to the variable or the fluxes of linear equations. *J. Comput. Phys.*, 225, 1211–1217, 2007.
- [15] Inoue O. and Hattori Y. Sound generation by shock-vortex interactions. *J. Fluid Mech.*, 380, 81–116, 1999.
- [16] Grosso F. and Pirozzoli S. Shock-wave-vortex interactions : shock and vortex deformations, and sound production. *Theoret. Comput. Fluid Dynam.*, 13(6), 421–456, 2000.
- [17] Candel S. *Mécanique des fluides*. Dunod université, 1990.