

Application de méthodes intégrales au calcul du bruit de cavité

Xavier Gloerfelt, Christophe Bailly, Daniel Juvé

LMFA, UMR CNRS 5509, École centrale de Lyon, BP 163, 69131 Écully cedex, France

Reçu le 1^{er} octobre 2001 ; accepté le 30 octobre 2001

Note présentée par Geneviève Comte-Bellot.

Résumé

Une simulation numérique directe du bruit rayonné par un écoulement subsonique affleurant une cavité bidimensionnelle est réalisée et se compare favorablement aux expériences de Karamcheti. Cette simulation est prise comme référence pour étudier deux formulations intégrales : l'analogie acoustique de Ffowcs Williams et Hawkings et une méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H. Ces méthodes hybrides sont en bon accord avec la simulation directe par DNS et constituent des outils puissants pour calculer le champ acoustique lointain. Pour citer cet article : X. Gloerfelt et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 13–20. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustique / ondes / vibrations / aéroacoustique numérique / analogie de Ffowcs Williams–Hawkings / méthode d'extrapolation des ondes / bruit de cavité

Computation of cavity noise using integral methods

Abstract

A direct numerical simulation of the sound radiated by a flow over a 2-D subsonic cavity is performed using Computational AeroAcoustics tools. The simulation is consistent with Karamcheti's experiments. The numerical results are used as a reference to study two integral formulations: the Ffowcs Williams and Hawkings acoustic analogy and a wave extrapolation method based on FW-H equation. These hybrid approaches agree with the direct computation by DNS data and provide powerful tools to compute far-field noise. To cite this article: X. Gloerfelt et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 13–20. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustics / waves / vibrations / Computational AeroAcoustics (CAA) / Ffowcs Williams–Hawkings analogy / wave extrapolation method / cavity noise

Abridged English version

Recent advances of Computational Aeroacoustics (CAA), made possible by an increase of computer power, have permitted complex aeroacoustic simulations [1–4]. In aeroacoustic direct numerical simulation (DNS), one solves the compressible Navier–Stokes equations for both an unsteady aerodynamic region and its radiated sound field. Such calculations, though presently too expensive to be used as an engineering tool, are well suited to test the validity and applicability of aeroacoustic theories. These theories split the aerodynamic calculation and the noise propagation problem in order to apply at each step the most appropriate numerical method. The required computation times are then much lower and make these approaches attractive for realistic calculations. However, the basic difficulties in these so-called hybrid

Adresse e-mail : Xavier.Gloerfelt@ec-lyon.fr (X. Gloerfelt).

methods are the modelling of the source terms from aerodynamic fluctuations and the ability of the wave operator to include complex acoustic-flow interactions. The goal of this study is to evaluate two hybrid methods: the first one is the Ffowcs Williams and Hawkings [6] (FW-H) analogy, which extends Lighthill's acoustic analogy to take the effects of solid boundaries into account. The second method of interest is a Wave Extrapolation Method (WEM) based on the FW-H equation, which allows the evaluation of the far-field once some quantities are known on a control surface. These two approaches are expressed by Green functions, and both suffer from the limitation of the observer in a medium at rest. To extend the propagation operator to uniform flow in the observer region, a convected inhomogeneous wave equation is derived following recent developments by Lockard [9]. The calculation is performed in the spectral domain by convoluting an inhomogeneous Helmholtz equation with the 2-D convected Green's function in free space. The frequency domain formulation is very convenient in 2-D because it avoids the temporal integration.

The tested configuration is a 2-D rectangular cavity with $L/D = 2$, where $L = 5.08$ mm is the cavity length and $D = 2.54$ mm is its depth. The incoming flow is a laminar boundary layer with a Mach number $M = 0.7$ and a thickness $\delta \approx 0.2D$ with no forcing term. The Reynolds number chosen is $Re_D = 41\,000$ in order to match Karamcheti's experiment [8]. Other cavity noise computations are analysed in [7]. The direct numerical simulation uses the aeroacoustic code ALESIA [4,7] and predicts well the self-sustained oscillation frequency. The Schlieren pictures of Fig. 1 representing the noise field show a good agreement between DNS and Karamcheti's measurements, showing that directivity and wave patterns are consistent. This simulation serves as a reference solution for evaluation of the two integral methods.

The FW-H analogy formulation is given by equation (1) with one volume source (2) and two surface sources (3) and (4) where the impermeability condition $u_n = 0$ has been applied. In 2-D, the volume sources are reduced to the surfaces S_0 and S'_0 and the surface integration is performed on the cavity walls L_0 , defined in Fig. 2. The source terms are calculated from near-field quantities of DNS. The FW-H Wave Extrapolation Method uses equation (5) corresponding to the FW-H analogy formulation without the volume integral, because all quadrupolar sources are assumed to be enclosed beneath the control surface. Only surface integrals have then to be evaluated, reducing the problem by one dimension. In addition, the impermeability condition $u_n = 0$ is no longer required in the source terms (6) and (7). One has indeed to allow a fluid flow across the control surface. Thus this WEM is sometimes called the porous FW-H method. For the 2-D cavity application, it is applied on a fictitious line L_1 spanning the longitudinal domain. The numerical implementation is the same as for the FW-H analogy.

The acoustic field computed by integral methods is compared to the direct approach using visualisations of the pressure field in Fig. 3 and instantaneous pressure profiles along $x_1 + x_2 = 2D$ in Fig. 4. In the FW-H analogy, the total noise, obtained by summing volume and surface contributions, is consistent with the DNS results. Moreover, following the reflection theorem of Powell [12], we can argue that volume integrals represent the direct radiated field, and surface integrals show essentially the reflected part of the field due to cavity walls. The radiated noise predicted by the FW-H WEM, depicted in Figs. 3 and 4, is even more consistent with DNS results than the FW-H analogy.

In conclusion, two hybrid integral methods based on the FW-H equation have been successfully compared to the DNS results. The wave extrapolation method is a valuable complementary tool to extend CAA near-fields to far-fields. The FW-H acoustic analogy method is less efficient, because volume integrations are costly and sensitive to truncature effects. Nevertheless, it allows a separation between direct and reflected sound fields, useful for a first analysis of radiation patterns. A more complete approach requires full 3-D simulations.

1. Introduction

Les développements récents de l'aéroacoustique numérique ont permis la simulation numérique de problèmes aéroacoustiques de plus en plus complexes [1–4]. Cette approche directe s'appuie sur la

résolution des équations de Navier–Stokes en écoulement compressible pour obtenir à la fois l’écoulement aérodynamique, source du rayonnement acoustique, et une large zone du champ sonore rayonné. De telles simulations, même si elles sont à l’heure actuelle encore trop coûteuses pour constituer un outil pour l’ingénieur, peuvent servir à tester la validité et l’applicabilité de nombreuses théories aéroacoustiques, en fournissant des informations simultanées sur les champs proche et lointain. Ces théories aéroacoustiques proposent une approche hybride où la résolution s’effectue en deux temps. On effectue d’abord un calcul de la partie aérodynamique qui permet de construire des termes sources. On résout ensuite un problème de propagation des ondes acoustiques pour ces sources. Étant donné les différences d’ordre de grandeur entre les variables aérodynamiques et acoustiques, ces méthodes hybrides permettent, à chaque étape, l’utilisation d’outils adaptés à leurs spécificités. L’économie de calcul ainsi réalisée rend cette approche très attrayante pour des configurations réalistes. Cependant, sa validité repose sur une modélisation adéquate des sources de bruit ainsi que sur l’aptitude du modèle de propagation à décrire les interactions complexes entre l’écoulement dans la région d’observation et les ondes acoustiques.

Une des premières théories sur le bruit d’origine aérodynamique est l’analogie de Lighthill [5]. Elle a été étendue par Ffowcs Williams et Hawkings [6] (FW-H) au cas d’un écoulement en présence d’une surface en mouvement quelconque. Si l’analogie acoustique a d’abord servi à des études analytiques, elle connaît aujourd’hui un nouvel essor avec la possibilité du calcul numérique. Profitant du caractère ondulatoire de l’acoustique, on peut aussi utiliser une méthode d’extrapolation des ondes. La plus utilisée est la méthode de Kirchhoff mais une méthode d’extrapolation similaire basée sur l’équation de FW-H, parfois appelée méthode FW-H *poreux*, apparaît plus polyvalente. Ces méthodes d’extrapolation permettent le calcul du champ acoustique rayonné à partir de sa donnée sur une surface englobant toutes les sources de bruit. Comme pour l’approche analogique, on utilise le formalisme des fonctions de Green pour se ramener au calcul d’une expression intégrale. C’est pourquoi, dans les deux cas, on parle de *méthodes intégrales*.

On se propose d’étudier deux formulations intégrales : l’analogie de FW-H et la méthode d’extrapolation des ondes basée sur l’équation de FW-H. On pourra ainsi tester leur domaine d’applicabilité ainsi que leur complémentarité avec une approche directe. La configuration choisie pour la comparaison est le bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité rectangulaire bidimensionnelle.

2. Simulation numérique directe

Le calcul direct du bruit d’origine aérodynamique s’effectue par simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier–Stokes en écoulement compressible. L’algorithme de résolution est celui du code aéroacoustique ALESIA [4,7]. Il s’appuie sur des schémas d’ordre élevé et des conditions aux limites autorisant la sortie des fluctuations aérodynamiques ou acoustiques sans réflexion notable.

On reproduit numériquement à l’échelle 1 l’expérience de Karamcheti [8], qui a étudié le rayonnement acoustique de cavités bidimensionnelles. On choisit ici la configuration $L/D = 2$, où $L = 5,08$ mm et $D = 2,54$ mm sont respectivement la longueur et la profondeur de la cavité, avec un écoulement laminaire à Mach $M = 0,7$. D’autres simulations aéroacoustiques du bruit de cavité sont décrites dans [7]. Le maillage cartésien à pas variable comporte 147×161 points dans la cavité et 501×440 points en dehors. Le domaine de calcul s’étend ainsi sur $8,5D$ verticalement et $12D$ horizontalement afin d’inclure une portion du champ rayonné. On impose $\Delta y_{\min}^+ = 0,8$ en variable de paroi pour mailler la sous couche visqueuse. Le nombre de Reynolds basé sur D est $Re_D = 41\,000$, la température de l’air vaut 298,15 K et la pression statique est fixée à 1 atm. Le calcul est initialisé avec une expression polynomiale du profil de Blasius correspondant à une épaisseur de couche limite $\delta \approx 0,2D$, sans aucune excitation.

Des oscillations auto-entretenues s’établissent dans la cavité à la fréquence $f_0 = 32$ kHz, correspondant à un écoulement pseudo-périodique composé de deux structures tourbillonnaires au dessus de la cavité (Fig. 1a). La carte des gradients verticaux de masse volumique du champ acoustique calculé par DNS est comparée à celle obtenue par Karamcheti sur la Fig. 1b. On retrouve une directivité marquée vers l’amont et la présence de deux types de fronts d’onde. La fréquence principale mesurée vaut 34 kHz, soit une

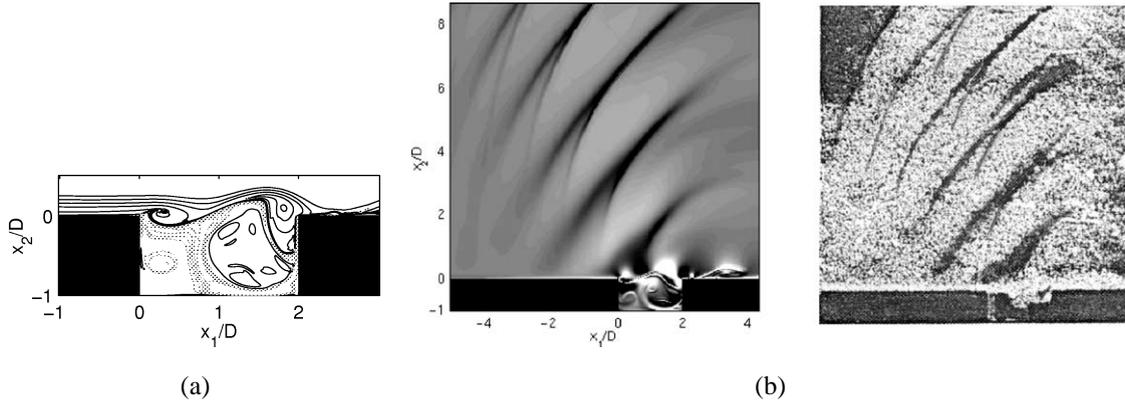


Figure 1. (a) Visualisation du champ de vorticité instantané (16 contours entre $\omega D/U_\infty = -10,5$ et $1,36$: (–) contours négatifs, (· · ·) contours positifs). (b) Représentation Schlieren correspondant aux gradients verticaux de masse volumique : à gauche, simulation DNS et, à droite, expérience de Karamcheti [8].

Figure 1. (a) Snapshot of vorticity contours (16 contours between $\omega D/U_\infty = -10.5$ and 1.36 : (–) negative contours, (· · ·) positive contours). (b) Schlieren pictures corresponding to transversal derivative of the density: present simulation on the left, Karamcheti's experiment [8] on the right.

différence de 5 % par rapport à la simulation, ce qui est excellent compte tenu de l'incertitude expérimentale sur δ et du caractère 2-D de la simulation. Le champ acoustique obtenu par DNS va maintenant servir de référence pour l'étude des méthodes intégrales.

3. Analogie acoustique de FW-H

L'équation de FW-H [6] est une recombinaison exacte des équations de la mécanique des fluides sous la forme d'une équation des ondes inhomogène faisant apparaître deux termes sources surfaciques et un terme source volumique. Une solution intégrale est alors obtenue par convolution avec la fonction de Green en espace libre.

Les calculs sont effectués dans l'espace spectral en appliquant la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[\phi(\mathbf{x}, t)] = \phi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt$$

On résout ainsi une équation de Helmholtz inhomogène pour chaque fréquence, en évitant l'évaluation des temps retardés, qui est souvent une étape délicate du calcul intégral. Cela est tout particulièrement le cas en 2-D, où la fonction de Green implique une intégration temporelle sur un intervalle infini de temps retardés.

La principale limitation de l'équation de FW-H est que le milieu d'observation est supposé au repos et il est très difficile d'étendre l'opérateur de propagation à des écoulements complexes. Seul le cas d'un écoulement uniforme est traité de façon satisfaisante. En suivant la démarche de Lockard [9] pour un écoulement à la vitesse $\mathbf{U}_\infty = (U_1, 0)$, on forme une équation de Helmholtz convectée en appliquant la transformation galiléenne du repère mobile $(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ à la vitesse $-\mathbf{U}_\infty$ vers le repère fixe (\mathbf{x}, t) lié à la cavité, telle que $x_i = \tilde{x}_i + U_1 t$. La fonction de Green $\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega)$ pour cette équation convectée est obtenue en appliquant une transformation de Prandtl–Glauert à la fonction de Green 2-D en espace libre, dans l'espace spectral :

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4\beta} e^{i(Mk(x_1 - y_1)/\beta^2)} H_0^{(2)}\left(\frac{kr\beta}{\beta^2}\right)$$

où $k = \omega/c_\infty$ et $r_\beta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2}$, avec \mathbf{y} les coordonnées d'un point source. $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre zéro et $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ est le facteur de Prandtl–Glauert, $M = U_1/c_\infty < 1$. Par convolution, on obtient alors la formulation spectrale convectée de l'analogie de FW-H :

$$p'(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{L_0} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl(\mathbf{y}) - \int_{L_0} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega) dl(\mathbf{y}) - \iint_{S_0 \cup S'_0} \tilde{T}_{ij}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} \quad (1)$$

où les termes sources modifiés par la prise en compte de la convection et de la condition d'imperméabilité $u_n = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ s'écrivent :

$$\tilde{T}_{ij} = \rho(u_i - U_i)(u_j - U_j) + [p - c_\infty^2(\rho - \rho_\infty)]\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (2)$$

$$\tilde{F}_i = [\rho_\infty U_i U_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}]\hat{n}_j \quad (3)$$

$$\tilde{Q} = [-\rho_\infty U_j]\hat{n}_j \quad (4)$$

Dans ces expressions $p'(\mathbf{x}, \omega)$ représente les fluctuations de pression dans l'espace spectral et \hat{n}_j est la composante j de la normale unitaire qui pointe vers l'extérieur du domaine source. Tous les termes \tilde{T}_{ij} , \tilde{F}_i , \tilde{Q} sont exprimés en fonction des variables définies dans le repère fixe ; p , ρ et u_i sont respectivement la pression, la masse volumique et les composantes de la vitesse dans la région source ; τ_{ij} correspond aux tensions visqueuses ; U_i et ρ_∞ dénotent les composantes de la vitesse uniforme et la masse volumique constante dans le milieu d'observation. En 2-D, l'intégrale de volume se réduit à une intégrale surfacique et les intégrales de surface se réduisent à des intégrales sur les lignes qui représentent les parois de la cavité. Les termes sources sont évalués à partir des variables aérodynamiques de la DNS. Les dérivées sont appliquées à la fonction de Green et non aux variables aérodynamiques en utilisant les propriétés du produit de convolution. L'utilisation de la transformée de Fourier inverse permet de revenir à la pression dans l'espace temporel pour chaque point du domaine d'observation, discrétisé par un maillage régulier de 76×184 points correspondant au domaine acoustique de la DNS.

4. Méthode d'extrapolation des ondes basée sur l'équation de FW-H

Les méthodes d'extrapolation des ondes permettent de résoudre un problème de propagation linéaire une fois connues les données issues de la DNS sur une surface fictive englobant toutes les sources de bruit. Il n'y a donc plus d'intégrale volumique à évaluer et le problème est réduit d'une dimension par rapport aux approches analogiques, ce qui est particulièrement intéressant d'un point de vue numérique. La méthode la plus utilisée est celle de Kirchhoff mais une méthode d'extrapolation basée sur l'équation de FW-H se révèle souvent moins sensible à la position de la surface de contrôle [10,11] et a été préférée ici. La formulation pour un milieu externe en mouvement uniforme subsonique a encore la forme de l'équation (1) mais, cette fois, sans l'intégrale de volume, soit :

$$p'(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{L_1} \tilde{F}_i(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} dl(\mathbf{y}) - \int_{L_1} i\omega \tilde{Q}(\mathbf{y}, \omega) \tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \omega) dl(\mathbf{y}) \quad (5)$$

avec les deux termes sources \tilde{F}_i et \tilde{Q} modifiés :

$$\tilde{F}_i = [\rho(u_i - 2U_i)u_j + \rho_\infty U_i U_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}]\hat{n}_j \quad (6)$$

$$\tilde{Q} = [\rho u_j - \rho_\infty U_j]\hat{n}_j \quad (7)$$

La condition d'imperméabilité $u_n = 0$ n'est plus appliquée et, au contraire, on doit autoriser le fluide à traverser la surface de contrôle. C'est pourquoi, on parle aussi de méthode FW-H *surface poreuse*. La résolution numérique utilisée est similaire à celle de l'approche analogique.

5. Résultats et discussions

L'extrapolation est réalisée à partir d'une ligne horizontale L_1 traversant tout le domaine et située à $x_2 = 0,5D$ (Fig. 2). D'autres calculs réalisés [7] montrent que le résultat est relativement indépendant de la position de L_1 . Le résultat de l'intégration de (5) avec les termes sources définis par (6) et (7) avec $M = 0,7$ dans le domaine d'observation est comparé à la DNS sur les Figs. 3a et 3b. Le très bon accord avec la solution de référence est confirmé par le profil de la pression le long de la droite $x_1 + x_2 = 2D$ de la Fig. 4.

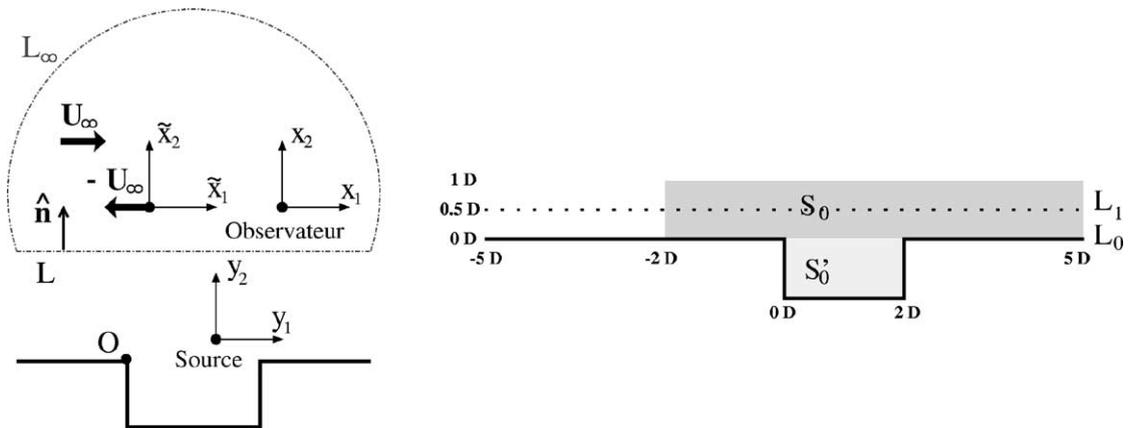


Figure 2. Schéma des systèmes de coordonnées (à gauche) et des lignes et surfaces utilisées pour l'évaluation des formulations intégrales (à droite).

Figure 2. Sketch of coordinate systems (on the left) and of lines and surfaces for evaluation of integral formulations (on the right).

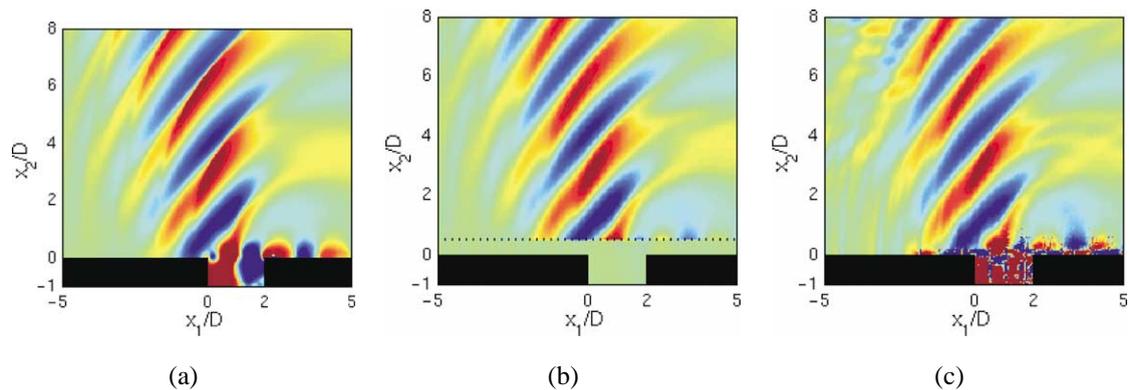


Figure 3. Champ de pression au même instant calculé par : (a) DNS, (b) méthode d'extrapolation FW-H à partir de L_1 , (c) analogie de FW-H.

Figure 3. Pressure field calculated at the same time by: (a) DNS, (b) FW-H extrapolation method from L_1 , (c) FW-H analogy.

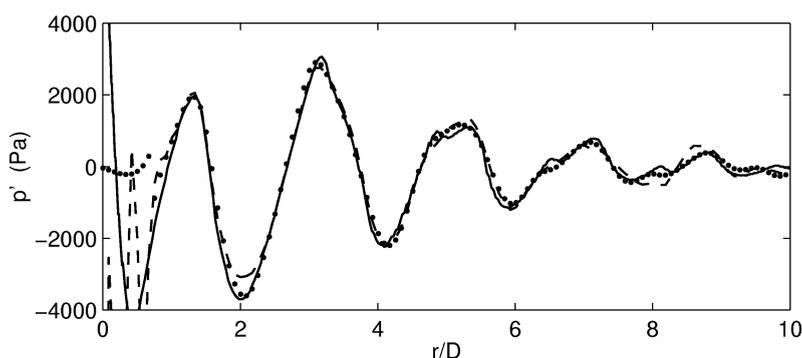


Figure 4. Profils de pression suivant la droite $x_2 = 2D - x_1$: (—) DNS, (···) méthode d’extrapolation, (---) analogie de FW-H. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Figure 4. Pressure profiles along the line $x_2 = 2D - x_1$ obtained by: (—) DNS, (···) extrapolation method, (---) FW-H analogy. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Pour appliquer l’analogie de FW-H (1), les intégrales linéiques sont évaluées sur les parois de la cavité (ligne brisée L_0) et l’intégrale surfacique sur S_0 et S'_0 définies sur la Fig. 2. En suivant le principe de réflexion de Powell [12], la partie surfacique représente essentiellement le rayonnement direct et la partie linéique le champ acoustique réfléchi par les parois. En sommant ces deux contributions, on reconstruit le champ total qui est trouvé en très bon accord avec la DNS (Fig. 3c). Le profil de pression suivant $x_1 + x_2 = 2D$, donné sur la Fig. 4, présente des écarts avec la solution de référence plus marqués que pour la méthode d’extrapolation. Cette dégradation de la précision pour des grands r/D est due au fait que l’évaluation volumique est sensible aux erreurs de troncature des termes sources. Pour $r/D < \sqrt{2}/2$, la solution fournie par la méthode d’extrapolation est nulle car on se trouve à l’intérieur de la surface de contrôle. De même, l’analogie de FW-H ne fournit pas de résultats exploitables à l’intérieur de la région source (pour $r/D < \sqrt{2}$).

Cependant, si la méthode analogique est moins précise, elle fournit plus d’informations sur la structure du champ rayonné en permettant d’identifier l’onde directe et l’onde réfléchie. Ce sont ces deux ondes qui sont encore identifiables sur la Fig. 1 car la cavité n’est pas compacte à la fréquence des oscillations ($L/\lambda = 0,47$).

6. Conclusion

Dans un premier temps, le bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité a été obtenu par simulation numérique directe et se compare favorablement avec les mesures de Karamcheti dans la même configuration. Cette solution de référence nous a permis de tester deux méthodes intégrales. La méthode d’extrapolation basée sur l’équation FW-H donne de très bons résultats avec un faible coût numérique, ce qui en fait un outil efficace pour étendre le champ acoustique du champ proche vers le champ lointain. L’analogie de FW-H est moins précise et plus coûteuse mais permet de séparer le champ sonore direct du champ sonore réfléchi par les parois.

Pour une analyse plus fine des mécanismes de génération de bruit, une simulation tridimensionnelle est actuellement en cours de développement.

Remerciements. Les calculs ont été réalisés sur le NEC SX-5 du Centre National de la Recherche Scientifique, mis à disposition par l’IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique). Les auteurs remercient très chaleureusement Christophe Bogey pour avoir fourni les sources du code ALESIA-2D, initialement développé pour une couche de mélange, et pour avoir suivi ce travail avec attention.

Références bibliographiques

- [1] Bogey C., Bailly C., Juvé D., Calcul direct du rayonnement acoustique d'une couche de mélange par macrosimulation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 327 (1999) 1029–1034.
- [2] Colonius T., Basu A.J., Rowley C.W., Numerical investigation of the flow past a cavity, AIAA Paper 99-1912, 1999.
- [3] Gloerfelt X., Bailly C., Juvé D., Calcul direct du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 328 (2000).
- [4] Bogey C., Bailly C., Juvé D., Computation of the sound radiated by a 3-D jet using large eddy simulation, AIAA Paper 2000-2009, 2000.
- [5] Lighthill M.J., On sound generated aerodynamically I. General theory, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 211 (1952) 564–587.
- [6] Ffowcs Williams J.E., Hawkins D.L., Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 264 (1151) (1969) 321–342.
- [7] Gloerfelt X., Bailly C., Juvé D., Computation of the noise radiated by a subsonic cavity using direct simulation and acoustic analogy, AIAA Paper 2001-2226, 2001.
- [8] Karamcheti K., Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces, Technical Note 3487, N.A.C.A., 1955. Cité parfois sous le patronyme Krishnamurty K.
- [9] Lockard D.P., An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkins equation, J. Sound Vibration 229 (4) (2000) 897–911.
- [10] Brentner K.S., Farassat F., An analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces, AIAA J. 36 (8) (1998) 1379–1386.
- [11] Prieur J., Rahier G., Comparison of Ffowcs Williams–Hawkins and Kirchhoff rotor noise calculations, AIAA Paper 98-2376, 1998.
- [12] Powell A., Aerodynamic noise and the plane boundary, J. Acoust. Soc. Am. 32 (8) (1960) 982–990.