

# Construction d'un opérateur de propagation à partir des équations d'Euler linéarisées

Ludovic GRÉVERIE, Christophe BAILLY

Centre acoustique, École centrale de Lyon, UMR CNRS 5509, BP 163, 69131 Écully cedex, France

(Reçu le 24 avril 1998, accepté le 4 mai 1998)

**Résumé.** Nous utilisons les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen pour calculer la propagation acoustique. Cette méthode permet, en effet, de bien prendre en compte les effets de l'écoulement moyen sur le champ sonore rayonné. La nature multipolaire d'une source apparaît explicitement uniquement en formant une équation des ondes. Nous montrons que ces sources sont bien reconnues numériquement en résolvant directement les équations d'Euler linéarisées. L'exemple d'une distribution quadrupolaire placée dans un écoulement de jet est finalement présenté comme illustration. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

aéroacoustique / équations d'Euler / réfraction / bruit de jet / numérique

## *Formulation of an acoustic wave operator based on linearized Euler equations*

**Abstract.** *Linearized Euler equations based on a stationary mean flow are used to calculate the propagation of acoustic waves. This method allows one to take into account the mean flow effects on the radiated sound field. The multipolar feature of a source clearly appears in the wave equation. It is shown that these sources are numerically identified in solving directly the linearized Euler equations. The case of a quadrupolar distribution in a jet flow is then investigated.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

*aeroacoustics / Euler equations / refraction / jet noise / numerical*

## **Abridged English Version**

Sound generation and propagation in a flow is a very difficult numerical problem; for a complete review see Tam [1]. Lighthill's analogy [equation (1)] is one of the classical approaches for solving it. However, the integral formulation requires a Green function which is unknown for complex geometry. The case of the noise generated in a duct obstructed by a diaphragm is one of the most complex geometries investigated in the literature [3]. Furthermore, refraction effects are not taken into account with equation (1).

The linearized Euler equations are an alternative method in computational aeroacoustics. First, Euler equations are linearized around a stationary mean flow, previously calculated by solving the Reynolds-averaged Navier–Stokes equation; see equation (9) for the general expression. Then, a turbulent source term  $S_j$  is introduced in the linearized equations. A first formulation has been used by Béchara et al. [4] and Bailly et al. [5] to calculate a subsonic jet noise in the axisymmetric case.

Note présentée par Geneviève COMTE-BELLOT.

In this Stochastic Noise Generation and Radiation model, the turbulent velocity field was modelled by a sum of random Fourier modes. With regard to aerodynamic noise applications, it is important to check that the resolution of linearized Euler equations preserves the multipolar features of sources. This is discussed with emphasis on the ability of the method to describe correctly the multipolar structure of aeroacoustic sources.

The linearized Euler equations take the simplified form [equation (2)] for an homogeneous medium at rest. A dipole distribution  $S_i = F_i$  [equation (3)] and a quadrupole distribution  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$  [equation (4)] are investigated. The size of the source domain has the same order of magnitude as wavelength, which is a delicate problem [7] since spatial derivatives are present in the associated wave equations [equations (5) and (7)].

The numerical solver is obtained by using the 7-point stencil, dispersion relation preserving (DRP) scheme of Tam and Webb [8] in space, combined with a fourth-order Runge–Kutta algorithm in time. The radiation boundary conditions of Tam and Webb [8] are also implemented. All the details of the procedure and several numerical tests are provided in Bailly et al. [9, 10].

*Figure 1* shows the density iso-contours for the dipole distribution: the directivity is well illustrated. A comparison between the calculated density profile along the axis  $y = 0$  and the analytical solution is plotted in *figure 2* for two points in time. The analytical solution is obtained by the convolution product  $\rho' = -F_1 * G$  where  $G$  is the Green function (6). The acoustic field is calculated very accurately, without spurious oscillations near the source. The radiated field of the quadrupole distribution is displayed in *figure 3*: the expected directivity is again well shown.

A last test has been carried out in setting the same quadrupole distribution [equation (4)] in the axis of a fully developed jet modelled by the Bickley velocity profile [equation (8)]. The Mach number of the jet is  $M = 0.5$ , and the ratio between the wavelength  $\lambda$  and the half-width  $b$  of the jet is taken as  $\lambda/b = 3$ . *Figure 4* displays the calculated pressure field: the directivity pattern is strongly modified by the mean flow with respect to the no-flow situation (*figure 3*). The acoustic intensity reaches a peak in the downstream direction. For smaller angles, the intensity decreases due to the refraction effects and a shadow zone is observed. However, the multipole nature of the source is again clearly identifiable.

Computation sound propagation by solving the linearized Euler equations provides accurate solutions with very good performances in terms of stability, low storage and computation time. The multipolar nature of the source is well preserved by the numerical scheme, a crucial point for aerodynamic noise predictions. All the results presented in this paper have been obtained in a 2D geometry. An extension of this work to 3D is under development to compute the noise radiated by a subsonic jet.

## 1. Introduction

Le calcul de la génération du bruit aérodynamique et de sa propagation en écoulement est un problème numérique difficile à traiter, comme le rappelle Tam [1] par exemple. L'analogie acoustique proposée par Lighthill en 1952 [2] est l'une des formulations les plus employées pour résoudre ce problème. Elle s'appuie sur l'équation des ondes suivante, exacte dans un milieu homogène et au repos :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{où} \quad T_{ij} \approx \rho u_i u_j \quad (1)$$

Afin d'obtenir une solution intégrale à cette équation, il est nécessaire de connaître la fonction de Green associée. Par conséquent, seules des configurations géométriques simples peuvent être étudiées lorsque l'on ne dispose que du champ fluctuant de vitesse. Le calcul analytique de la fonction de Green d'un diaphragme effectué par Van Herpe et al. [3] est certainement un des cas traités les plus complexes de la littérature. Par ailleurs, les effets de l'écoulement moyen sur la propagation acoustique ne sont pas pris en compte.

## Construction d'un opérateur de propagation numérique

Pour s'affranchir de ces difficultés, une alternative consiste à résoudre les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen, préalablement calculé. Il faut cependant définir des termes sources aérodynamiques pour ce système, équivalents au tenseur de Lighthill  $T_{ij}$ . Une première formulation a déjà été utilisée pour estimer le bruit quadrupolaire d'un jet subsonique axisymétrique par Béchara et al. [4] et par Bailly et al. [5]. Le modèle SNGR, pour *Stochastic Noise Generation and Radiation*, consiste à utiliser les fluctuations turbulentes de la vitesse pour construire un terme source associé aux équations linéarisées d'Euler. Notons que cette approche est également étudiée sous des formes similaires dans Viswanathan et Sankar [6] par exemple. La forme de ce terme est cruciale puisqu'elle définit la nature même de la source acoustique. Dans ce présent travail, nous montrons que la résolution des équations d'Euler linéarisées permet bien de retrouver le caractère multipolaire d'une source. On s'assure ainsi de la reconstruction numérique de l'opérateur de propagation à partir des équations d'Euler. Deux simulations sont tout d'abord proposées, afin de mettre en évidence respectivement une distribution de nature dipolaire et quadrupolaire. Le cas d'une source en écoulement est ensuite traité afin de mettre en évidence les effets de l'écoulement moyen sur la propagation acoustique.

### 2. Distribution dipolaire et quadrupolaire

Les équations d'Euler linéarisées, pour un milieu homogène et au repos, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho_o \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = S_i \end{cases} \quad (2)$$

où  $S_i$  désigne un terme source. En suivant Crighton [7], on rappelle qu'une distribution dipolaire est représentée par une force source  $S_i = F_i$  dans l'équation (2) vérifiant la relation :

$$\int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_S n_i F_i dS = 0 \quad \text{et} \quad \int_V F_i d\mathbf{x} \neq 0$$

À l'inverse, une distribution quadrupolaire  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$  dans l'équation (2) doit vérifier :

$$\int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} d\mathbf{x} = 0$$

On cherche à montrer que la nature multipolaire de la source, qui apparaît seulement explicitement en formant l'équation des ondes, se retrouve néanmoins en résolvant directement les équations d'Euler linéarisées. Autrement dit, la directivité très caractéristique, ainsi que les interférences destructives sont bien retrouvées sans considérer l'opérateur de propagation. On se propose pour cela d'examiner les deux distributions bidimensionnelles suivantes : tout d'abord une distribution dipolaire  $F_i$  telle que :

$$F_1 = \epsilon \cos\left(\frac{\pi}{10} x_1\right) e^{-\alpha x_1^2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad F_2 = 0 \quad \text{sur} \quad (x_1, x_2) \in [-5; 5] \times \mathbb{R} \quad (3)$$

et une distribution quadrupolaire  $T_{ij}$  dans (2) telle que :

$$T_{ij} = \epsilon \frac{20}{\pi} \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{20} x_1\right) e^{-\alpha x_1^2} & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{20} x_2\right) e^{-\alpha x_2^2} \end{bmatrix} \sin(\omega t) \quad (4)$$

sur  $(x_1, x_2) \in [-10; 10] \times [-10; 10]$ . La pulsation temporelle est fixée à  $\omega \Delta t = 2\pi/60$ , l'amplitude de la source est  $\epsilon = 0,01$  et le coefficient  $\alpha$  est égal à  $(\ln 2)/5$ . Ces deux sources correspondent à une configuration intermédiaire entre une distribution compacte et non compacte, cas a priori difficile à traiter pour l'analogie acoustique [7].

### 3. Algorithme numérique et validation

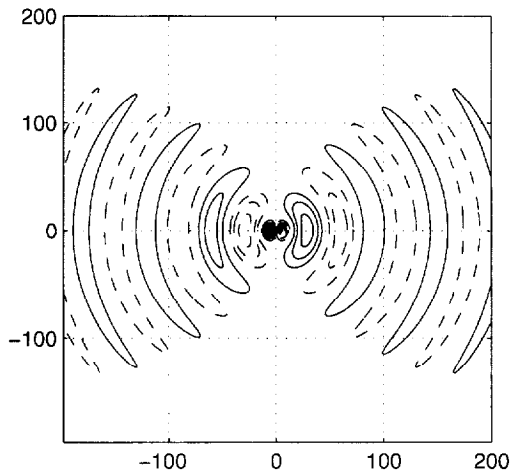
L'intégration numérique des équations d'Euler linéarisées est faite avec le schéma compact de Tam et Webb [8] en espace, incluant le filtrage sélectif, et un schéma optimisé de Runge-Kutta en temps. On dispose ainsi d'un solveur peu dissipatif, peu dispersif et isotrope pour la propagation des ondes sonores. Les conditions aux limites anéchoïques sont traitées avec la formulation proposée par les mêmes auteurs. Tous les détails de l'algorithme et plusieurs exemples de simulations sont donnés dans Bailly et al. [9, 10]. Le domaine de calcul est un pavé tel que  $-200 \leq x_1, x_2 \leq 200$  avec un pas de maillage  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta = 1$ . Le pas de temps est fixé par la relation  $\Delta t = \Delta/c_o$ .

La *figure 1* montre les isocontours de la densité pour le cas de la distribution dipolaire. On observe bien la directivité classique d'un dipôle d'axe  $Ox$ . L'opérateur de propagation est donc bien reconstruit numériquement, pour donner une solution identique à celle obtenue en résolvant analytiquement l'équation :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho' = -\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (5)$$

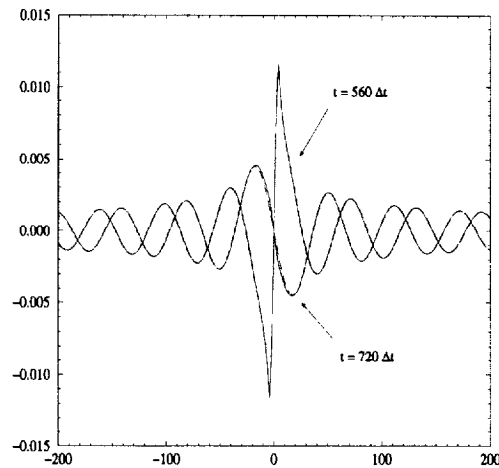
en faisant ici l'hypothèse de perturbations isentropiques. Précisément, la *figure 2* montre le profil de densité sur l'axe  $x_2 = 0$ , et la comparaison avec la solution analytique, obtenue dans ce cas par le produit de convolution  $\rho' = -F_1 * G$  où la fonction de Green est ici :

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{i}{4c_o^2} H_o^{(1)} \left( \frac{\omega x}{c_o} \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (6)$$



**Figure 1.** Distribution dipolaire  $S_i = F_i$ . Isocontours de la densité au temps  $t \Delta/c_o = 640$ . — valeurs positives, de 0,001 à 0,011 avec un pas de 0,001, ---- valeurs négatives.

**Figure 1.** Dipole distribution  $S_i = F_i$ . Density iso-contours at time  $t \Delta/c_o = 640$ . — positive values, from 0.001 to 0.011 with a step size of 0.001, ---- negative values.



**Figure 2.** Distribution dipolaire  $S_i = F_i$ . Deux profils de la densité sur l'axe  $x_2 = 0$  pour les temps  $t = 560 \Delta t$  et  $t = 720 \Delta t$ . — solution calculée, ---- solution analytique.

**Figure 2.** Dipole distribution  $S_i = F_i$ . Two density profiles along the axis  $x_2 = 0$  at times  $t = 560 \Delta t$  and  $t = 720 \Delta t$ . — calculated solution, ---- analytical solution.

## Construction d'un opérateur de propagation numérique

De la même façon, les isocontours de la densité correspondant au cas de la distribution quadrupolaire sont tracés sur la *figure 3*. On note à nouveau la directivité caractéristique d'un quadrupôle transversal, que l'on identifie formellement en formant l'équation :

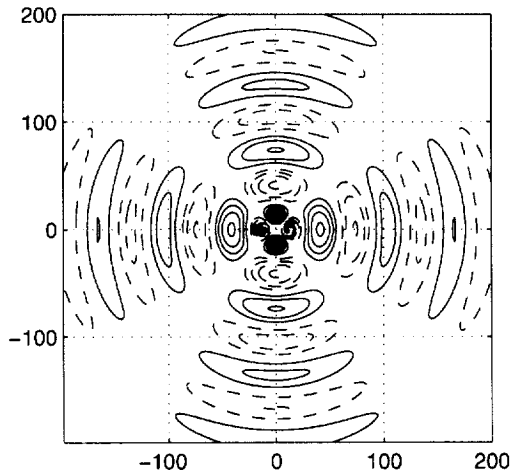
$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho' = -\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) \quad (7)$$

Ces deux exemples montrent qu'il n'est pas nécessaire de résoudre une équation des ondes pour obtenir un champ acoustique rayonné. D'un point de vue plus physique, l'un des intérêts d'une équation des ondes est d'identifier clairement le mode acoustique. Cependant, nous savons que dans le cas d'un écoulement moyen quelconque, il est très difficile d'identifier ce dernier. Une alternative consiste donc à résoudre directement les équations linéarisées d'Euler : ces équations gouvernent les fluctuations acoustiques en écoulement et la nature multipolaire des sources éventuelles est conservée.

### 4. Source quadrupolaire dans un jet

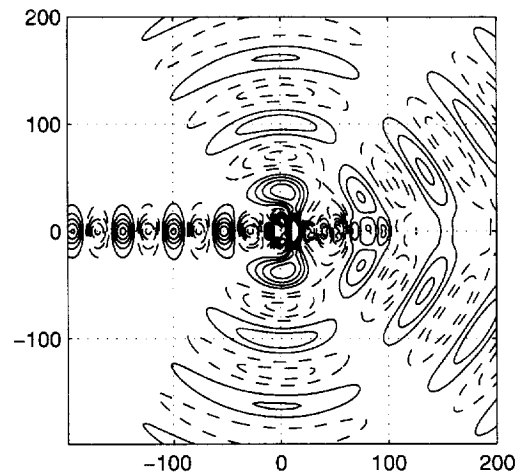
On place maintenant la distribution quadrupolaire précédente dans un écoulement moyen cisailé, plus précisément un profil bidimensionnel de jet de Bickley :

$$\frac{u_{o1}}{c_o} = \frac{0,5}{\cosh^2[(1 + \sqrt{2}) x_2/b]} \quad (8)$$



**Figure 3.** Distribution quadrupolaire  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$ . Isocontours de la densité au temps  $t = 640 \Delta t / c_o$ . — valeurs positives, de 0,001 à 0,011 avec un pas de 0,001, ----- valeurs négatives.

**Figure 3.** Quadrupole distribution  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$ . Density iso-contours at time  $t \Delta t / c_o = 640$ . — positive values, from 0.001 to 0.011 with a step size of 0.001, ----- negative values.



**Figure 4.** Distribution quadrupolaire  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$ , dans un jet de Bickley à  $M = 0,5$ . Isocontours de la pression acoustique au temps  $t \Delta t / c_o = 640 / (1 + M)$ . — valeurs positives, de 0,001 à 0,011 avec un pas de 0,001, ----- valeurs négatives.

**Figure 4.** Quadrupole distribution  $S_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$ , in a Bickley jet at  $M = 0.5$ . Pressure iso-contours at time  $t \Delta t / c_o = 640 / (1 + M)$ . — positive values, from 0.001 to 0.011 with a step size of 0.001, ----- negative values.

L. Gréverie, C. Bailly

où  $b$  désigne la demi-largeur du jet, ici  $b = 20$ . Le domaine de calcul est identique aux cas précédents, et la distribution quadrupolaire  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  est placée en  $x_1 = -100$  et  $x_2 = 0$ . Dans ce cas, les équations d'Euler linéarisées sont résolues sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho' \mathbf{u}_o + \rho_o \mathbf{u}'] &= 0 \\ \frac{\partial(\rho_o \mathbf{u}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}_o \mathbf{u}') + \nabla p' + [\rho_o \mathbf{u}' + \rho' \mathbf{u}_o] \cdot \nabla \mathbf{u}_o &= \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot [p' \mathbf{u}_o + \gamma p_o \mathbf{u}'] + (\gamma - 1)p \nabla \cdot \mathbf{u}_o - (\gamma - 1)\mathbf{u}' \cdot \nabla p_o &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La figure 4 montre les isocontours de la pression au temps  $t \Delta/c_o = 640/(1 + M)$  où le nombre de Mach est ici égal à  $M = 0,5$ . La directivité quadrupolaire du rayonnement acoustique reste visible, mais les lobes horizontaux sont maintenant nettement altérés par les effets de réfraction : la longueur d'onde de la source est en effet de l'ordre de grandeur de la demi-largeur du jet,  $\lambda/b = 3$ . Ces effets de réfraction se manifestent par un cône de silence en aval de la source, et par une focalisation des ondes acoustiques dans le cœur du jet en amont de cette source. Pour ces conditions, il n'y a pas développement du mode tourbillonnaire dans le jet [10].

## 5. Conclusion

Les simulations réalisées sur des sources multipolaires mettent en évidence la bonne reconstruction de l'opérateur de propagation acoustique à partir des équations d'Euler linéarisées, à la fois dans un milieu au repos et en présence d'un écoulement. La production et la propagation du bruit aérodynamique peuvent ainsi être calculées par résolution numérique des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire. Il est en effet possible de définir une distribution quadrupolaire dans ce contexte, à l'image de celle définie par Lighthill en 1952. Les premiers calculs tridimensionnels sont actuellement effectués avec ce modèle pour étudier le bruit d'un jet subsonique.

## Références bibliographiques

- [1] Tam C.K.W., Computational aeroacoustics: issues and methods, AIAA J. 33 (10) (1995) 1788–1796.
- [2] Lighthill M.J., On sound generated aerodynamically. I. General theory, Proc. Roy. Soc. London 211 (A1107) (1952) 564–587.
- [3] Van Herpe F., Crighton D., Lafon P., Noise generation by turbulent flow in a duct obstructed by a diaphragm, 16th Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 95-035, 1995.
- [4] Béchara W., Bailly C., Lafon P., Candel S., Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows, AIAA J. 32 (3) (1994) 455–463.
- [5] Bailly C., Lafon P., Candel S., A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows, 16th Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 95-092, 1995.
- [6] Viswanathan K., Sankar L.N., Toward the direct calculation of noise: fluid/acoustic coupled simulation, AIAA J. 33 (12) (1995) 2271–2279.
- [7] Crighton D., Basic principles of aerodynamic noise generation, Prog. Aerospace Sci. 16 (1) (1975) 31–96.
- [8] Tam C.K.W., Webb J.C., Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics, J. Comput. Phys. 107 (1993) 262–281.
- [9] Bailly C., Thévenin R., Juvé D., Numerical simulation of sound source radiation in flows, Third International Conference on Theoretical and Computational Acoustics, Newark, New Jersey, USA, 14–18 July, in press.
- [10] Bailly C., Juvé D., Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler's equations, 18th Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 98-2267, 1998.