

Relation de dispersion des ondes de pression dans un écoulement tournant *

par M. Roger et H. Arbey **

Ecole Centrale de Lyon (B. P. 163) 69131 Ecully Cedex (France)

Sommaire

Le calcul exposé ici se propose de mettre en place une théorie modale de la propagation des ondes de pression dans un écoulement tournant axisymétrique en conduit annulaire. Il met en évidence le fait que, sous l'effet de la rotation moyenne, il existe un couplage entre l'équation du tourbillon et celle de la pression. La résolution proposée permet de définir la relation de dispersion du conduit. Celle-ci comporte deux types de modes, les modes acoustiques et les modes inertiels. Il apparaît un effet sensible de la rotation sur les fréquences de coupure du conduit.

Dispersionbeziehung für Druckwellen in einer Rotationsströmung

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine modale Theorie für die Ausbreitung von Druckwellen in einer axial-symmetrischen Rotationsströmung im ringförmigen Kanal aufgestellt. Mit ihr wird gezeigt, daß unter dem Einfluß der mittleren Rotation eine Kopplung zwischen der Wirbelgleichung der Druckgleichung entsteht. Die vorgeschlagene Lösung ermöglicht die Definition der Dispersionsbeziehung des Kanals. Diese führt auf zwei Typen von Moden, nämlich akustische Moden und Trägheitsmoden. Es zeigt sich, daß die Rotation einen merklichen Einfluß auf die Grenzfrequenzen des Kanals hat.

Dispersion Relation of Pressure Waves in a Swirling Flow

Summary

This paper is devoted to a modal theory of the propagation of pressure waves in a duct with axisymmetric swirling flow.

By virtue of the mean rotation, a coupling between fluctuations of vortical and acoustic types is pointed out in the vorticity equation and in the pressure equation. This occurs even in the linear theory presented.

The dispersion relation of the duct is given for spinning modes, showing that pressure waves propagate at once as inertial modes and acoustic modes. First are then induced by complementary accelerations. The cut-off frequencies of spinning acoustic modes are systematically modified by the mean rotation.

1. Introduction

Les théories modales généralement utilisées pour prédire le bruit des compresseurs de turbomachines axiales reposent sur un modèle simplifié: on considère que les aubages tournants génèrent des structures de pression élémentaires appelées modes tournants, qui se propagent ensuite dans le corps de la machine. Le carénage et le moyeu se représentent alors par un conduit annulaire (Cf. Fig. 1), et l'écoulement moyen est supposé axial et uniforme [1].

Or de telles approches, par ailleurs puissantes, peuvent s'avérer insuffisantes lorsque la rotation moyenne de l'écoulement n'est plus négligeable.

Ainsi dans certains cas de fonctionnement des turboréacteurs à double flux actuels dont un schéma

de principe est donné Fig. 1, le spectre du compresseur est entaché d'une remontée à large bande autour de fréquences inexplicables. Il semble que ce phénomène, appelé bruit de bosses, soit attribuable aux instabilités inertielles qui naissent dans l'écoulement tournant généré par la soufflante à partir de l'inhomogénéité représentée par les sillages [2]. De tels phénomènes sont d'autant plus à considérer que les vitesses de rotation en jeu, et l'espacement entre la soufflante et son redresseur, sont importants.

Par ailleurs la rotation moyenne joue un rôle important dans la propagation. On peut s'attendre à ce que les modes d'interaction de type rotor-stator qui se propagent entre soufflante et redresseur possèdent des fréquences de coupure différentes de celles que l'on peut calculer sur la base d'un écoulement uniforme.

Pour ces raisons nous avons développé une théorie modale de la propagation des ondes de pression dans un écoulement moyen tournant axisymétrique.

* Texte présenté au 9ème «Colloque d'acoustique aéronautique», Compiègne, 14-16 novembre 1984.

** Adresse actuelle: I.N.R.S. - 54501 Vandœuvre.

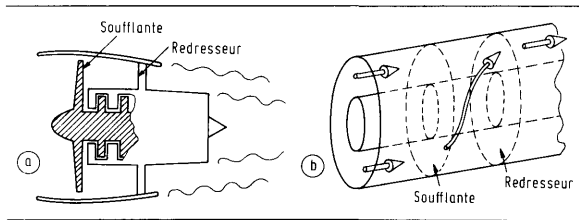


Fig. 1. a) Schéma de principe d'un turboréacteur à double flux.

b) Modélisation par un conduit annulaire.

La présente étude, fondée sur les calculs initiaux de Kerrebrock [3], fait suite à d'autres publications [4-6]. Elle a été abordée parallèlement par M. Poiree, qui utilise dans un cadre très général la représentation mixte des petites perturbations d'un écoulement. Ce sont alors les perturbations lagrangiennes qui sont examinées, alors que nous nous intéressons ici aux perturbations eulériennes [7].

2. Hypothèses et mise en place du modèle

Nous considérons un conduit annulaire infini et parfaitement rigide, de rayons r_1 et r_2 . Ce conduit est parcouru par un écoulement tournant axisymétrique défini dans un repère fixe en coordonnées cylindriques par les paramètres suivants: (Fig. 2)

- une composante de vitesse axiale uniforme W_0 ;
- une loi de vitesse tangentielle $V(r)$.

Il correspond à ce champ de vitesse un champ de pression $P_0(r)$, de densité $\varrho_0(r)$, de température $T_0(r)$ et d'entropie $S_0(r)$.

L'acoustique dans le conduit est décrite par une perturbation linéaire de l'écoulement moyen. Elle correspond au champ fluctuant défini par la vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$, la pression p , la densité ϱ , la température t , l'entropie s , toutes fonctions des variables (r, θ, z, t) .

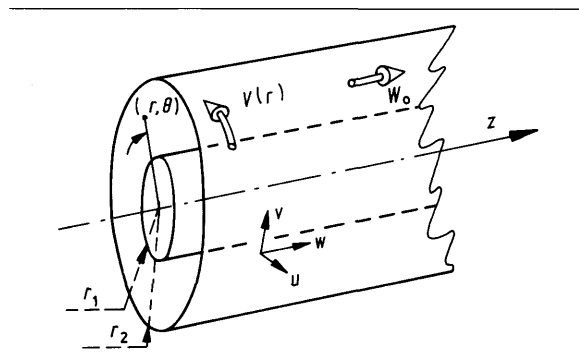


Fig. 2. Espace de résolution.

Le fluide est supposé parfait, et en l'absence de forces extérieures. Il satisfait aux équations thermodynamiques du gaz parfait. Nous le considérons en évolution adiabatique, c'est-à-dire que l'entropie des particules fluides se conserve le long des trajectoires; en particulier il peut exister un gradient radial d'entropie moyenne (les équations correspondantes ont été citées dans une précédente communication [7]). Cependant pour mettre en lumière les comportements principaux dus à la rotation, nous ferons l'hypothèse supplémentaire d'un écoulement moyen homoentropique, c'est-à-dire dans lequel l'entropie du fluide est uniforme. Dans ces conditions l'écoulement moyen n'est assujéti qu'à deux contraintes:

- La loi d'équilibre radial $\frac{dP_0}{dr} = \varrho_0 \frac{V^2}{r}$;
- L'équation d'homoentropie: $\frac{dP_0}{dr} = c_0^2 \frac{d\varrho_0}{dr}$,

$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\varrho_0}}$ étant la vitesse locale du son, fonction de r .

3. Équations du champ fluctuant

Compte tenu de l'équation d'équilibre radial, les équations linéarisées de la dynamique des gaz sont successivement:

- L'équation de continuité traduisant la conservation de la masse

$$\varrho_0 \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{d\varrho_0}{dr} u = 0. \quad (1)$$

- L'équation d'Euler traduisant la conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \varrho_0 \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{2V}{r} v \right] &= \frac{V^2}{r} \varrho - \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \varrho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) u \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \varrho_0 \frac{Dw}{Dz} &= -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

- L'équation d'homoentropie rendant compte de la loi de compressibilité du fluide

$$p = c_0^2 \varrho. \quad (3)$$

Dans ces écritures $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + W_0 \frac{\partial}{\partial z}$ représente la dérivée suivant l'écoulement moyen axisymétrique défini par $V(r)$ et W_0 .

Dès que le champ moyen $\{P_0(r), \varrho_0(r), V(r), W_0\}$ est connu, le système d'équations précédent peut être résolu. Dans le cas particulier où $V(r) = 0$, le champ fluctuant peut être décomposé en deux parties tout à fait indépendantes [8]:

- un champ à divergence nulle auquel n'est associé aucune fluctuation de pression (mouvement tourbillonnaire).
- un champ irrotationnel qui porte toute l'information acoustique (mouvement acoustique).

Dans le cas d'un écoulement moyen tournant quelconque, ce résultat n'est plus vrai. On peut en effet écrire les équations suivantes:

- Equations du champ tourbillonnaire $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_r}{Dt} &= \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D\omega_\theta}{Dt} &= \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \omega_r, \quad (4) \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \text{div } \mathbf{u} \right] \\ &\quad - \left[\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} + r \frac{d^2 V}{dr^2} \right] \frac{u}{r}. \end{aligned}$$

- Equation du champ de pression

$$\begin{aligned} \Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} &= \frac{V^2}{r c_0^2} \left(\frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\varrho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{V^2 p}{\varrho_0 c_0^2} \right] \quad (5) \\ &\quad + \frac{2\varrho_0}{r} \left[\left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{dV}{dr} + V \frac{\partial v}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

C'est cette dernière que nous allons nous attacher à résoudre, conformément à la démarche traditionnelle de l'acoustique.

On vérifie bien que les éqs. (4) d'une part et (5) d'autre part sont couplées, ce qui signifie que les deux types de mouvement, acoustique et tourbillonnaire, ne peuvent plus être déterminés, ni même exister, séparément, et perdent ainsi leur sens.

En particulier une fluctuation tourbillonnaire embarquée dans un écoulement moyen tournant peut produire du bruit, même dans le cadre d'une théorie linéarisée, par l'intermédiaire de ce couplage. Ainsi, à l'aval d'une soufflante dans le circuit périphérique d'un turboréacteur à double flux, les sillages peuvent devenir une source de bruit.

4. Résolution modale des équations

La technique modale consiste à rechercher la solution sous la forme de modes de propagation

appelés modes tournants [1]:

$$p(r, \theta, z, t) = p(r) e^{-i(\omega t + kz + n\theta)}.$$

Dans le cas d'un écoulement uniforme le problème a été résolu [9, 10].

Ici cette technique permet d'écrire l'équation vérifiée par la dépendance radiale du mode $p(r)$. On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{V^2}{c_0^2} \right) - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] \frac{dp}{dr} \\ + \left[\frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2nV}{\lambda r^2} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dr} - \frac{1}{r} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) \right. \\ \left. + \frac{V^2}{r c_0^2} \left((\gamma - 1) \frac{V^2}{r c_0^2} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} + \frac{2nV}{\lambda r^2} \right] p = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

où nous avons posé $D = \lambda^2 - \frac{2V}{r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right)$.

$\lambda = \omega + k W_0 + n V/r$ est la valeur propre de l'opérateur de dérivée suivant l'écoulement tournant, c'est-à-dire la fréquence vis-à-vis de cet écoulement (fréquence relative). Dans le cas général c'est une fonction de r .

A l'éq. (6) est associée une condition aux limites d'imperméabilité sur les parois du conduit, que nous supposons infini et parfaitement rigide. Puisque le fluide est parfait celle-ci s'écrit:

$$u = 0, \quad r = r_1, r_2$$

soit encore, d'après l'éq. (2):

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{r c_0^2} \right] p = 0, \quad r = r_1, r_2. \quad (7)$$

Dans le contexte de la propagation de modes dans un conduit infini, l'équation radiale et ses conditions aux limites constituent un problème aux valeurs propres. Si l'on désire appliquer le formalisme à l'étude du bruit des turbomachines la fréquence réduite ω et l'ordre azimutal n peuvent être considérés comme des paramètres. Ils sont imposés par exemple par la vitesse de rotation et le nombre de pales d'un rotor. Par suite la véritable valeur propre du problème est le nombre d'onde axial k .

La théorie modale que nous avons introduite ici n'a d'intérêt que si l'on peut déterminer l'ensemble des valeurs propres k_i et si l'ensemble des fonctions propres associées $p_i(r)$ est orthogonal et complet. Elle est totalement dépendante des résultats géné-

raux ayant trait aux problèmes différentiels de Sturm-Liouville [11].

Or dans notre cas la valeur propre k intervient dans l'expression des conditions aux limites par l'intermédiaire de la fréquence relative λ . Par suite nous n'obtenons pas un problème de Sturm-Liouville bien posé, et les théorèmes conséquents nous font défaut.

Cet inconvénient d'ordre mathématique est dû à la combinaison des deux mouvements de rotation et d'entraînement axial. Pour cette raison il suffit d'effectuer le changement de repère galiléen suivant :

$$r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad z' = z - W_0 t, \quad t' = t.$$

En vertu de l'invariance galiléenne des équations, tous les résultats précédents sont conservés à ceci près que l'on a :

$$\lambda = \omega' + n' \frac{V}{r'}.$$

La valeur propre k a donc disparu de la définition de λ , et le problème obtenu est un problème de Sturm-Liouville bien posé; on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{F}}{D} \frac{dp}{dr} \right) + \frac{\mathcal{F}}{D} C_2 p - k^2 \frac{\mathcal{F}}{\lambda^2} p &= 0, \\ \frac{dp}{dr} + \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{r c_0^2} \right) p &= 0, \quad r = r_1, r_2 \end{aligned} \quad (8)$$

avec :

$$\mathcal{F} = \exp \left\{ \int_{r'}^r \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{V^2}{c_0^2} \right) dr' \right\}.$$

On dispose des résultats suivants [11] :

- Pour les conditions aux limites précitées il existe une infinité de valeurs propres k_j réelles positives, correspondant donc bien à des modes de propagation \mathcal{P}_j , n , ω' , r_1/r_2 et λ étant fixés.
- Les modes vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda^2} \exp \left\{ \int_{r'}^r \frac{1}{r'} \left(1 - \frac{V^2}{c_0^2} \right) dr' \right\} \mathcal{P}_j(r) \mathcal{P}_h(r) dr = \delta_{jh}$$

- Toute fonction $f(r)$ satisfaisant aux conditions aux limites admet un développement sur l'ensemble des modes propres $\mathcal{P}_j(r)$ lié à la transformation intégrale suivante :

$$f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \mathcal{P}_j(r),$$

$$f_j = \int_{r_1}^{r_2} f(r) \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{F} \mathcal{P}_j(r) dr.$$

A ce stade on est en mesure de généraliser la méthode employée par Homicz et al. dans le cas d'un écoulement uniforme [10]. Toute solution $p(r, \theta, z, t)$ de l'équation d'onde en écoulement tournant, avec forces extérieures jouant le rôle de sources acoustiques, est décomposable sur l'ensemble des modes tournants précités.

Mais cette application s'éloigne de notre propos. Pratiquement les lois de vitesses tangentielles rencontrées derrière les aubages de turbomachines peuvent se modéliser à l'aide de deux lois simples : le tourbillon libre, et la rotation solide. Nous nous attachons donc dans ce qui suit à exploiter les renseignements fournis par la relation de dispersion $k = k(\omega)$, dans ces deux cas particuliers.

La technique utilisée consiste à ramener l'équation du second ordre (6) à un système du 1^{er} ordre plus adapté au traitement informatique :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= \left[\frac{n}{\lambda r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) - \frac{1}{r} \right] U - \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \frac{p}{\lambda}, \\ \frac{dp}{dr} &= \frac{D}{\lambda} U + \left(\frac{V^2}{r c_0^2} - \frac{2nV}{\lambda r^2} \right) p \end{aligned}$$

avec $U = i \varrho_0 u$, les conditions aux limites s'écrivant : $U = 0$ en r_1, r_2 .

La détermination des valeurs propres s'effectue à partir de ce système par un algorithme de Runge-Kutta associé à un procédé simple de contrôle optimal [2].

5. Relation de dispersion dans un écoulement de rotation solide

L'écoulement de rotation solide est défini par une loi de vitesse tangentielle $V(r) = \Omega r$. Dans ce cas la fréquence relative λ est une constante :

$$\lambda = \omega + k W_0 + n \Omega, \quad D = \lambda^2 - 4 \Omega^2.$$

L'équation radiale de la pression devient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c_0^2} \right) \frac{dp}{dr} \\ + \left[\left(1 - \frac{4 \Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} \left((\gamma - 1) \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} - \frac{2}{r} + \frac{2n\Omega}{\lambda r} \right) \right] p &= 0 \end{aligned}$$

et les conditions aux limites :

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2n\Omega}{\lambda r} - \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} \right] p = 0, \quad r = r_1, r_2.$$

Pour mettre en lumière les effets premiers de la rotation dans un tel cas, nous considérerons le cas de très faible rotation traduit par l'approximation:

$$\frac{\Omega^2 r^2}{c_0^2} \ll 1, \quad \frac{\Omega r}{c_0}$$

étant le nombre de Mach tangentiel.

Le problème simplifié obtenu s'écrit:

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0,$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2n\Omega}{\lambda r} p = 0, \quad r = r_1, r_2 \quad (c_0 \text{ uniforme}).$$

La théorie de Sturm-Liouville permet alors d'affirmer que la quantité:

$$A^2 = \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right)$$

est positive pour les solutions de type propagatif recherchées. Ces solutions définissent deux types de branches dans la relation de dispersion, que nous sommes en mesure de tracer vis-à-vis des deux repères galiléens considérés (Fig. 3).

Les solutions en haute fréquence relative, vérifiant la condition $\lambda^2 > 4\Omega^2$, se comportent comme l'hyperbole obtenue dans le cas d'un écoulement uniforme [9] (sans rotation). Ce sont des modes acoustiques.

Les solutions en basse fréquence relative, telles que $\lambda^2 < 4\Omega^2$, correspondent au comportement des instabilités inertielles qui existent dans tout écoulement tournant incompressible [12, 13]. Ce sont des modes inertiels, dus aux accélérations complémentaires.

Ce type de comportement est fondamental; il met en lumière l'insuffisance d'une hypothèse d'écoulement axial pour obtenir tous les modes de propagation possibles dans une turbomachine. Par ailleurs, on remarque que la relation de dispersion par rapport au repère fixe n'est plus symétrique dans le plan (k, ω) comme elle l'était en écoulement axial uniforme. Le décalage introduit $n\Omega$ dépend directement de l'ordre azimutal du mode considéré et de l'intensité de rotation solide. Par suite il existe pour les modes acoustiques deux fréquences de coupure ω_{c_1} et ω_{c_2} distinctes, l'une valable pour les modes tournants polarisés dans le même sens que la rotation moyenne, et l'autre pour les modes polarisés dans le sens inverse. Lorsqu'on tient compte des termes d'ordre plus élevé en nombre de Mach tangentiel (forte rotation), les résultats ne sont pas qualitativement modifiés, comme le montre la Fig. 4.

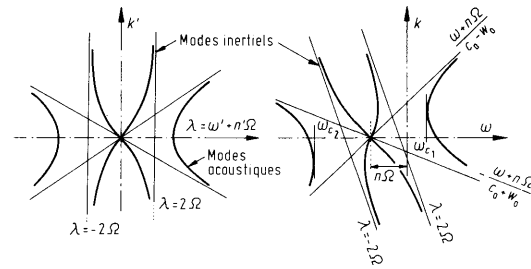


Fig. 3. Relation de dispersion en faible rotation solide, dans le repère convecté $k' = k'(\lambda)$ et dans le repère fixe $k = k(\omega)$.

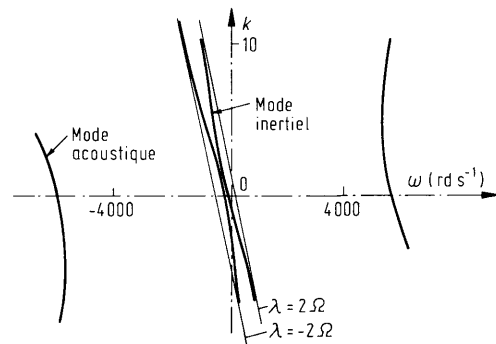


Fig. 4. Relation de dispersion dans un cas réel de rotation solide. Mode radial 1 acoustique et inertiel. $W_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$, $\Omega = 200 \text{ rd s}^{-1}$, $n = 1$, $r_1 = 0.2 \text{ m}$, $r_2 = 0.4 \text{ m}$.

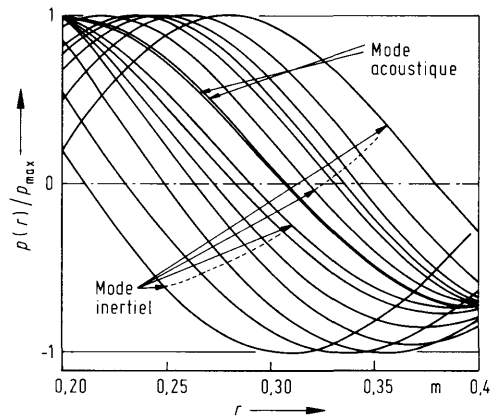


Fig. 5. Faisceau des distributions de pression $p(r)$ du mode radial 1 de la Fig. 4 pour différentes valeurs de la fréquence.

La Fig. 5 représente le faisceau des distributions $p(r)$ correspondant à un mode donné. On peut remarquer que la forme radiale du mode dépend de la fréquence, ce qui est une conséquence des conditions aux limites.

6. Relation de dispersion dans un écoulement de tourbillon libre

L'écoulement tournant de tourbillon libre se définit par une loi de vitesse tangentielle du type:

$$V(r) = \Gamma/r.$$

C'est un écoulement irrotationnel. Par contre la fréquence relative dépend de r :

$$\lambda(r) = \omega + k W_0 + \frac{n\Gamma}{r^2}.$$

Le problème aux limites à traiter s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{r^2 c_0^2} \right) + 4n \frac{\Gamma}{\lambda r^3} \right] \frac{dp}{dr} \\ + \left[\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} + \frac{2n\Gamma}{\lambda r^3} \left(\frac{4n\Gamma}{\lambda r^3} - \frac{2}{r} \right) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma^2}{c_0^2 r^3} \left((\gamma - 1) \frac{\Gamma^2}{c_0^2 r^3} - \frac{4}{r} - \frac{2n\Gamma}{\lambda r^3} \right) \right] p = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2n\Gamma}{\lambda r^3} - \frac{\Gamma^2}{c_0^2 r^3} \right] p = 0, \quad r = r_1, r_2.$$

Puisque λ n'est plus une constante, on peut observer pour certaines valeurs des paramètres un rayon critique r_0 entre r_1 et r_2 pour lequel $\lambda(r_0) = 0$. Ce rayon peut s'interpréter comme un lieu de changement de polarisation des modes cherchés. Il représente une discontinuité dans les coefficients de l'équation. Il est cependant possible de pallier cet inconvénient en imposant un noeud de pression pour les modes en $r = r_0$. On est alors conduit à effectuer le changement de variable dépendante suivant:

$$p = \lambda q,$$

moyennant quoi nous obtenons un problème différentiel pour q sans discontinuité:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{r^2 c_0^2} \right) \frac{dq}{dr} \\ + \left[\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} + \frac{2\Gamma^2}{c_0^2 r^4} + (\gamma - 1) \frac{\Gamma^4}{c_0^4 r^6} \right] q = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{dq}{dr} - \frac{\Gamma^2}{c_0^2 r^3} q = 0, \quad r_1, r_2.$$

Comme dans le cas de la rotation solide nous allons considérer tout d'abord une faible rotation de tourbillon libre:

$$\frac{\Gamma^2}{c_0^2 r^2} \ll 1 \quad (c_0 \text{ uniforme}).$$

L'équation devient alors une équation de Bessel:

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[\frac{\lambda_0^2}{c_0^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} - \frac{2\lambda_0^2 r_0^2}{c_0^2 r^2} \right] q = 0,$$

$$\frac{dq}{dr} = 0, \quad r = r_1, r_2$$

et

$$\lambda_0 = \omega + k W_0, \quad \lambda(r_0) = 0.$$

On remarque qu'il n'existe ici que des modes propres propagatifs de type acoustique, et pas de modes inertiels. Ceci est dû au fait que, l'écoulement moyen étant irrotationnel, la fluctuation reste irrotationnelle à partir d'un état initial irrotationnel. Ce comportement est caractéristique du tourbillon libre. Dans tout autre cas les modes inertiels doivent exister.

Là encore les résultats ne sont pas qualitativement modifiés lorsqu'on résout le problème exact en prenant en compte les termes d'ordres supérieurs (Figs. 6 et 7).

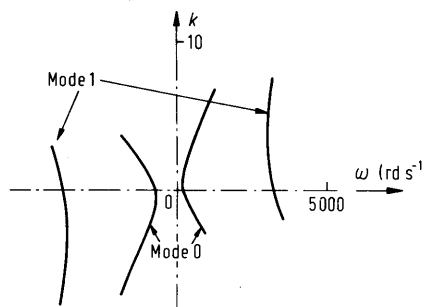


Fig. 6. Relation de dispersion dans un cas réel de tourbillon libre. Modes radiaux 0 et 1 (acoustiques). $\Gamma = 200$, $n = 1$, $W_0 = 100$ m/s, $r_1 = 0,7$ m, $r_2 = 1,0$ m.

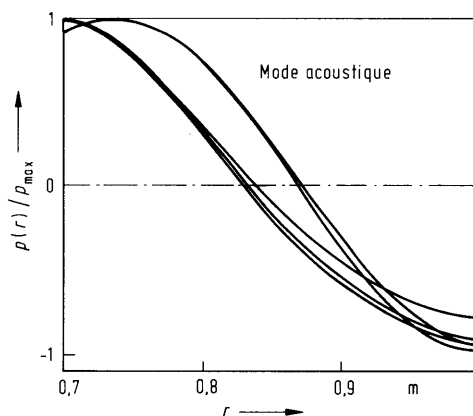


Fig. 7. Faisceau des distributions de pression du mode radial 1 de la Fig. 6 pour différentes valeurs de la fréquence.

7. Perspectives et conclusions

Le programme que nous avons mis au point permet de traiter a priori n'importe quel cas de figure. Cependant pour un écoulement tournant quelconque, c'est-à-dire différent d'un tourbillon libre ou d'une rotation solide, il persiste pour certains paramètres une singularité dans les coefficients de l'équation, que nous n'avons pas encore réussi à éliminer. Cette singularité se situe, dans le plan de la relation de dispersion, dans des zones à basse fréquence relative λ , donc là où doivent se trouver les branches correspondant aux modes inertiels. Par suite, elle n'empêche pas de déterminer les branches acoustiques et les fréquences de coupure pour une loi de vitesse tangentielle quelconque.

A l'issue de cette étude un certain nombre de résultats sont à retenir:

- Dans un écoulement tournant la rotation moyenne modifie les propriétés du conduit vis-à-vis de la propagation des ondes de pression. Généralement celles-ci se propagent suivant deux types de modes: les modes acoustiques, et des modes inertiels supplémentaires induits par la rotation. Ces derniers, toujours négligés dans les théories modales classiques, sont d'autant plus susceptibles de représenter une source de bruit inexplorée qu'ils ne possèdent pas de fréquence de coupure vis-à-vis d'un repère fixe.
- Les modes acoustiques ont des fréquences de coupure différentes suivant leur sens de rotation. Le conduit pénalise les modes polarisés dans le même sens que la rotation de l'écoulement, et a tendance à favoriser la propagation des modes polarisés dans le sens inverse. Ce comportement revêt une grande importance si l'on s'intéresse au circuit périphérique d'un turboréacteur à double flux; en effet les modes d'interaction de type rotor-stator qui s'y développent ont des vitesses et des sens de rotation très variés [1].

Des calculs de fréquences de coupure appliqués aux turbomachines sont d'ores et déjà utilisés par l'Equipe Acoustique de la SNECMA; on peut citer à ce sujet les calculs développés par M. André [14] à partir des travaux de Kerrebrock. Nous pensons qu'une telle étude, prenant en compte les effets de la rotation moyenne, peut apporter des améliorations sur la prédiction des performances acoustiques des compresseurs.

Remerciements

Cette étude a bénéficié du soutien financier de la D.R.E.T. Nous remercions vivement Monsieur B. Poirée pour l'intérêt qu'il y a porté, et la qualité de ses interventions.

(Reçu le 7 février 1985.)

Références

- [1] Tyler, J. M. et Sofrin, T. G., S.A.E. Trans. **70** [1962], 309-332.
- [2] Roger, M., Thèse Docteur-Ingénieur ECL 1983.
- [3] Kerrebrock, J. L., AIAA Paper n° 74-87, 1974.
- [4] Roger, M. et Arbey, H., 8ème Colloque d'Acoustique Aéronautique, Toulouse 1982; Revue d'Acoustique **67** [1983], 240.
- [5] Roger, M. et Arbey, H., 9ème CANCAM (Canadian Congress of Applied Mechanics), Saskatoon 1983.
- [6] Roger, M. et Arbey, H., 6ème JESPA (Journées d'Etudes Sur la Propagation Acoustique), Strasbourg 1984; Revue du CETHEDC **79** [1984], 11-20.
- [7] Poirée, B., 9ème Colloque d'Acoustique Aéronautique, Compiègne, 1984.
- [8] Chu, B. T. et Kovaszny, L. S. G., J. F. M. **3** [1958], 494, 514.
- [9] Junger, M. C. et Perulli, M., Eléments d'Acoustique Physique, Maloine SA 1978.
- [10] Homicz, G. F., Ludwig, G. R. et Lordi, J. A., AIAA Paper n° 75-443, 1975.
- [11] Nikiforov, A. et Ouvarov, V., Eléments de la théorie des fonctions spéciales, M.I.R. 1974.
- [12] Greenspan, H. P., The theory of rotating fluids. Cambridge Univ. Press 1968.
- [13] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford Univ. Press 1961.
- [14] André, M., 9ème Colloque d'Acoustique Aéronautique, Compiègne 1984. Revue d'Acoustique **72** [1985].