



MF 208 – Aéroacoustique et propagation en écoulement

Travaux dirigés

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR 5509

christophe.bailly@ec-lyon.fr
<http://acoustique.ec-lyon.fr>

mars 2020

1 Bilan d'énergie acoustique en milieu uniforme

On considère un milieu fluide homogène et stationnaire à la vitesse $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{x}_1$ se comportant comme un gaz parfait.

1. Écrire les équations de continuité, d'Euler et d'entropie linéarisées autour de cet écoulement.
2. Montrer que p' est solution d'une équation des ondes convectées où $\partial/\partial t$ est remplacé par l'opérateur de dérivation en suivant l'écoulement moyen, $D_0/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$.
3. Écrire l'équation de conservation de l'énergie acoustique, et vérifier que :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{u}_0 + \mathbf{I}) = 0$$

où E et \mathbf{I} sont les expressions de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique dans un milieu au repos. Donner une interprétation physique de ce résultat en considérant un volume de contrôle.

4. Montrer que l'on peut se ramener pour ce problème au cas d'un milieu au repos, en effectuant le changement de variables suivant : $\tilde{x}_1 = x_1 - u_0 t$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_3 = x_3$ et $\tilde{t} = t$.

2 Propagation dans un fluide visco-thermique

On se propose de revenir sur l'hypothèse de fluide parfait ($\mu = 0, \lambda = 0$) qui nous a permis d'écrire les équations d'Euler linéarisées, et d'estimer l'atténuation du niveau sonore due à la conductivité et à la viscosité du fluide, puis de montrer qu'elle est généralement négligeable pour les ondes sonores audibles se propageant dans l'air par exemple. On s'intéresse pour cela à la propagation dans un homogène et au repos se comportant comme un gaz parfait.

Version simplifiée. Afin d'alléger les calculs, on ne considère le cas où $\mu \neq 0$ mais $\lambda = 0$. Il faut cependant noter, comme le montre la résolution de l'exercice complet, que les effets de conductivité sont du même ordre de grandeur que les effets visqueux pour l'atténuation dans l'air.

1. Écrire les équations linéarisées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'entropie.
2. Écrire l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par p' . On introduira pour la suite $k_0 = \omega/c_0$ et la longueur $l_v = (4/3)(\mu/\rho_0 c_0)$.
3. On cherche une solution sous la forme d'ondes monochromatiques $p' = \hat{p}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ avec $k = k_r + ik_i$. Montrer que l'on obtient des ondes progressives exponentiellement décroissantes. Comment varie l'absorption avec la fréquence? Calculer l'atténuation en décibels pour une fréquence de 1 kHz sur une distance de 1 km dans l'air.

Version complète.

1. Écrire les équations linéarisées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'entropie.
2. Écrire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par p' , en éliminant les perturbations de vitesse \mathbf{u}' et d'entropie s' .

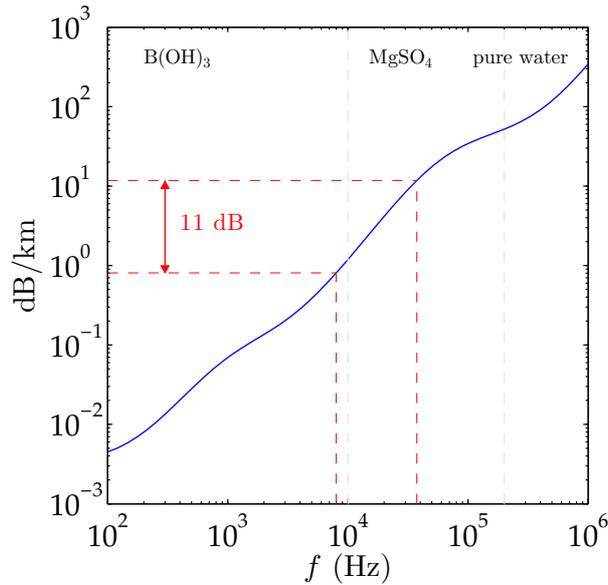


FIGURE 1 – Atténuation du son dans l'eau salée, en dB/km en fonction de la fréquence f (Hz). L'atténuation associée à l'eau pure n'est observable que pour $f \geq 200$ kHz. Relaxation moléculaire pour des fréquences plus basses. Fisher & Simmons, 1977, *J. Acous. Soc. Am.*, **62**(3), 558-564; Eq. (14)

3. Linéariser la loi des gaz parfaits $p = \rho r T$ et montrer que :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\lambda}{\rho_0 c_p} \nabla^2 T'$$

4. Montrer qu'au premier ordre en coefficients λ et μ , la pression vérifie l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 p' - c_0 (l_v + l_h) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial t} = 0$$

$$\text{où } l_v = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0 c_0} \text{ et } l_h = \frac{\lambda}{c_p \rho_0 c_0}$$

5. On cherche une solution sous la forme d'ondes monochromatiques $p' = \hat{p}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ avec $k = k_r + ik_i$. Montrer que l'on obtient des ondes progressives exponentiellement décroissantes. Calculer l'atténuation en décibels pour une fréquence de 1 kHz sur une distance de 1 km dans l'air.

3 Signal d'une boîte noire

1. Les deux boîtes noires équipant les avions commerciaux possèdent chacune une balise ULB, pour *Underwater Locator Beacon*, qui émet un signal ultrasonore en cas d'immersion afin d'aider à leur localisation. Les données du constructeur indiquent que le signal est émis à une fréquence de 37.5 kHz, avec un niveau acoustique de 160.5 dB à 1 mètre, avec comme référence 1 μ Pa. Estimer le niveau acoustique perçu à 4 km, à 20 km et l'atténuation due aux effets visqueux. On supposera que la source est omnidirectionnelle, et l'atténuation des ondes acoustique dans l'eau salée est tracée sur la figure 1.
2. Suite à l'accident du vol AF 447 (1er juin 2009), le BEA recommande dans son rapport la présence d'une seconde balise émettant autour de 8 kHz. Quel serait l'intérêt de choisir une telle fréquence?

4 Acoustique sous-marine

Un sonar de sous-marin situé au point S à une profondeur $z_0 = 200$ m depuis la surface, cf. la figure 2, détecte un bateau pour un angle de θ_s par rapport à l'horizontal. On cherche à calculer la distance horizontale qui sépare le vaisseau en V du sous-marin. On suppose que le profil de vitesse du son varie linéairement avec la profondeur, et on se place ici dans le repère local du sous-marin,

$$c(z) = c_s(1 + \alpha z) \quad c_s = 1448.3 \text{ m.s}^{-1} \quad \alpha = 1.786 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \quad (1)$$

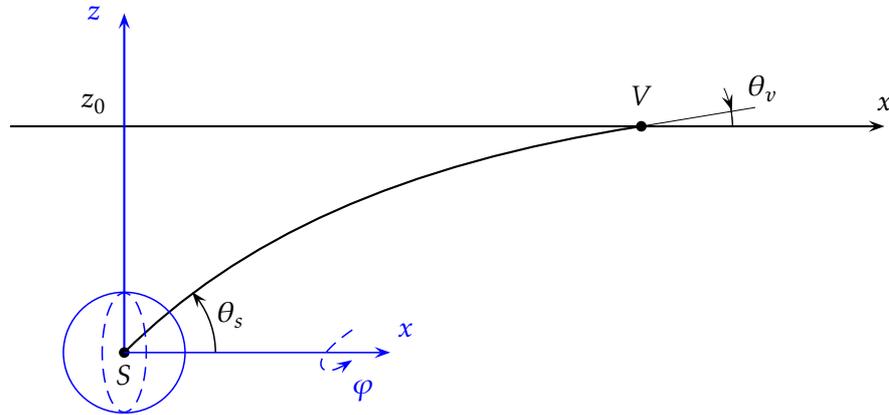


FIGURE 2 – Propagation acoustique sous-marine. La position du sous-marin en S est prise comme origine du repère.

On rappelle les équations des rayons dans le cadre de l'acoustique géométrique en 2-D pour un milieu stratifié $c = c(z)$ et au repos $\mathbf{u}_0 = 0$,

$$\frac{dx_i}{dt} = c \frac{k_i}{k} \quad \text{et} \quad \frac{dk_i}{dt} = -k \left. \frac{\partial c}{\partial x_i} \right|_x \quad (2)$$

et on adopte les notations de la figure, avec en un point courant du rayon, $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ et $k = \omega/c$. À fin de résoudre le problème, on cherche tout d'abord à déterminer quelques propriétés des rayons pour un milieu non homogène stratifié.

1. Quelle hypothèse doit-on vérifier pour pouvoir appliquer l'approximation géométrique?
2. Montrer en détaillant l'écriture du système (2) pour le profil linéaire de vitesse du son (1), que la composante horizontale du nombre d'onde se conserve sur un rayon. En déduire la loi de Snell-Descartes :

$$\frac{\cos \theta}{c(z)} = \frac{\cos \theta_s}{c_s} \quad (3)$$

Interpréter physiquement ce résultat.

3. La figure ci-dessus montre le profil de célérité du son et le tracé de quelques rayons issus du point S pour différents angles de tir. Calculer l'angle de tir θ_s^* correspondant au rayon tangentant la surface en $z = z_0$ et vérifier votre calcul sur la figure.
4. Faire un dessin pour représenter la zone observable en surface depuis le sous-marin.
5. Montrer, toujours à partir de (3), que le rayon de courbure $R = ds/d\theta$, où $ds^2 = dx^2 + dz^2$, d'un rayon acoustique est donné par :

$$R = -\frac{1}{\alpha \cos \theta_s}$$

et en déduire alors que ces rayons sont des arcs de cercle.

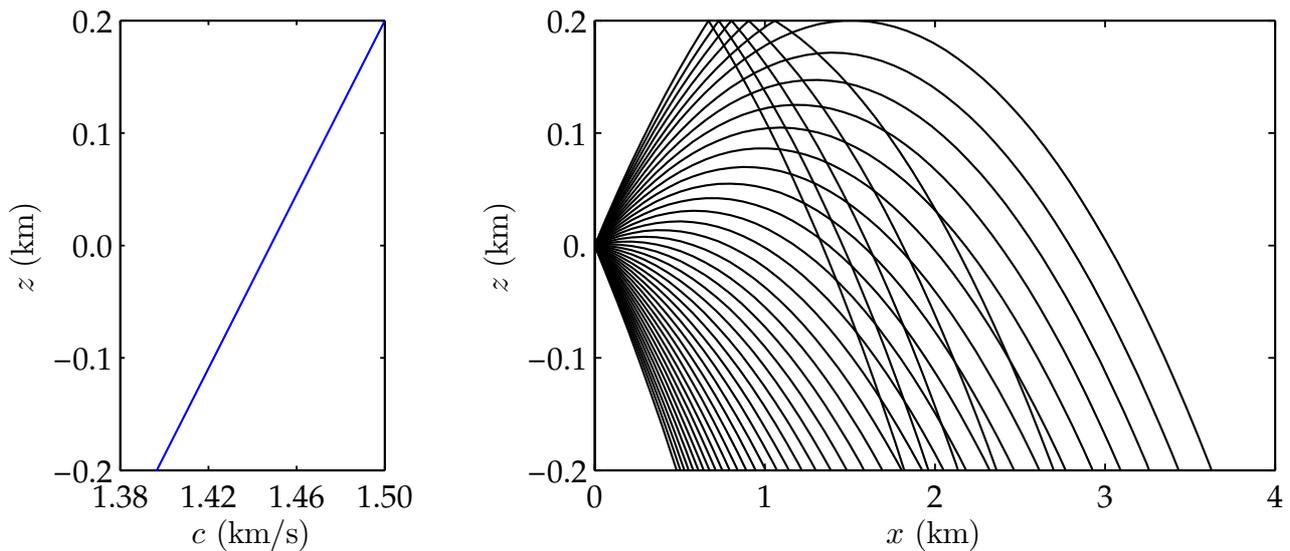


FIGURE 3 – Propagation acoustique sous-marine : tracé de rayons dans le repère lié à la surface de l'eau.

6. Montrer, en intégrant par exemple $dz/dx = \tan \theta$, que l'équation du cercle est donnée par :

$$\left(x - \frac{\tan \theta_s}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} + z\right)^2 = R^2$$

7. Le sonar du sous-marin reçoit un signal acoustique suivant la direction $\theta_s = 16^\circ$. En déduire la position du vaisseau. Donner également l'angle θ_v avec lequel arrive le rayon à la surface. Quelle erreur commet-on sur la position x_v du vaisseau en négligeant le gradient de célérité du son?
8. On cherche à évaluer le déplacement dx_v à la surface z_0 en fonction d'une variation $d\theta_s$ de l'angle de tir θ_s . Montrer, en différentiant l'équation du cercle, que l'on a :

$$\frac{dx_v}{d\theta_s} = -\frac{x_v / \cos^2 \theta_s}{\tan \theta_s - \alpha x_v}$$

9. Calculer le déplacement dx_v de la position en surface, en prenant un angle de tir $\theta_s + d\theta_s$ avec $d\theta_s = 0.1^\circ$?
10. Le vaisseau possède également un sonar et détecte un signal de pression de 80 dB (re 1 μ Pa) en surface. Estimer la puissance acoustique W de la source en supposant que celle-ci correspond à un monopole de directivité isotrope.

5 Modélisation d'un tube de Rijke

Rijke (1859) a mis en évidence expérimentalement qu'il est possible d'obtenir des oscillations auto-entretenues de forte amplitude de pression acoustique en présence d'une source de chaleur placée dans un tube ouvert à ses deux extrémités. Il s'avère que la position de la source de chaleur, typiquement une grille chauffante électrique, dans le tube de Rijke a une grande importance puisque les oscillations ne sont observées que si la grille est située dans la partie basse du tube.

Cette configuration relativement simple s'avère cependant être représentative de beaucoup de problèmes d'instabilité rencontrés notamment en combustion. Un couplage peut ainsi se produire entre une flamme et le champ de pression à l'intérieur d'une chambre de combustion, conduisant à

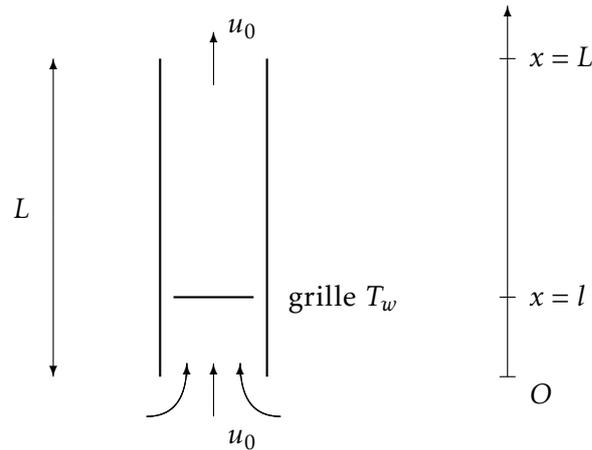


FIGURE 4 – Schéma d'un tube de Rijke.

un système instable, avec des oscillations de forts niveaux pour des fréquences de résonance proche de celles de la géométrie. Ces instabilités de combustion sont dommageables pour la structure, mais aussi pour le système lui-même, en le perturbant ou en le détruisant. Cela a été le cas pour les premiers moteurs fusées, et lors de la conception d'un système propulsif, une des premières études consiste à vérifier que l'on est pas en présence d'instabilités thermoacoustiques.

La figure 4 représente schématiquement un tube de Rijke. La source de chaleur positionnée en $x = l$ est obtenue avec une grille à la température T_w , chauffée par un bec bunsen ou par effet Joule. Une onde acoustique de forte amplitude s'établit dans le tube. Cette onde est entretenue par la source de chaleur, qui génère un apport de chaleur fluctuant q'_e sensible à la vitesse acoustique au voisinage de la grille.

Le champ moyen ρ_0, c_0, p_0 est considéré uniforme dans le tube, et la vitesse moyenne u_0 , imposée par la convection stationnaire dans le tube, est supposée négligeable pour la modélisation acoustique : on a en effet typiquement $M = u_0/c_0 \sim 10^{-3}$. De même, les pertes visco-thermiques ne sont pas prises en compte. En particulier, l'équation linéarisée sur l'entropie s'écrit :

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 T_0} q'_e \quad (4)$$

où $q'_e(x, t)$ est l'apport de chaleur par unité de masse et par unité de temps dans le tube. Compte tenu des dimensions caractéristiques du tube circulaire, $L = 1$ m avec un rayon $r = 2.24$ cm, la propagation s'effectue en ondes planes avec une fréquence caractéristique dominante associée au mode fondamental du conduit.

1. Rappeler les 3 autres équations qui gouvernent le problème avec (4). En éliminant les fluctuations de masse volumique et d'entropie, montrer que la conservation de la masse et l'équation d'Euler peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = \frac{\gamma - 1}{c_0^2} q'_e \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6)$$

2. Écrire l'équation des ondes associée aux équations (5) et (6), et commenter.
3. Écrire également l'équation bilan de l'énergie acoustique sous sa forme locale.

4. Intégrer cette équation pour le tube, et montrer que :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a}{\partial t} + Sp'u'|_{x=L} - Sp'u'|_{x=0} = \frac{\gamma-1}{\rho_0 c_0^2} \int p'q_e' dx \quad (7)$$

où $dx = S dx$, S désignant l'aire de la section du tube et,

$$\mathcal{E}_a = S \int_0^L E_a dx \quad \text{avec} \quad E_a = \frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{\rho_0 u'^2}{2}$$

représentant la densité d'énergie acoustique. Donner une interprétation des différents termes de l'équation (7).

5. En déduire que l'énergie acoustique dans le tube ne peut augmenter en moyenne, que si

$$\Delta \bar{E} = \frac{\gamma-1}{\rho_0 c_0^2} \int \overline{p'q_e'} dx > 0$$

c'est-à-dire si la pression et l'apport de chaleur sont en phase : ce critère est connu sous le nom de **critère de stabilité de Rayleigh** (1894).

6. Rappeler la structure du champ acoustique dans un conduit ouvert en négligeant l'impédance de rayonnement aux deux extrémités.

Expérimentalement, on observe et on entend essentiellement que le mode fondamental, les autres harmoniques étant inférieures d'au moins 10 dB en niveau. On ne considère donc dans la suite que ce mode dominant de nombre d'onde $k = \pi/L$, et on note :

$$p' = \hat{p} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad u' = -\frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0} \cos(kx) \sin(\omega t) \quad (8)$$

Par ailleurs, l'apport de chaleur dans le tube, localisé en $x = l$, peut se modéliser par la relation :

$$q_e' = \frac{\beta_w}{S} u'(l, t - \tau) \delta(x - l) \quad \tau \simeq 0.2 d_w / u_0 \quad q_l'(t) = \beta_w u'(l, t - \tau)$$

où β_w est une constante qui dépend des caractéristiques de la résistance chauffante et du régime de convection, et d_w est le diamètre de la résistance électrique.

7. Montrer à partir de (7) que l'énergie apportée en moyenne en temps par la source de chaleur s'écrit :

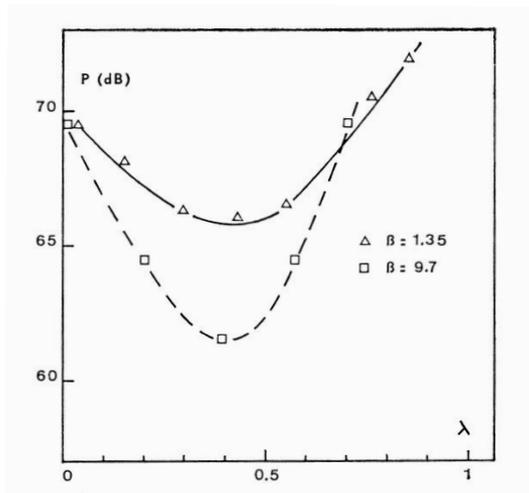
$$\Delta \bar{E} = \frac{\gamma-1}{4} \frac{\beta_w \hat{p}^2}{\rho_0^2 c_0^3} \sin(2kl) \sin(\omega\tau)$$

En déduire que l'instabilité ne peut exister que pour $l < L/2$. Que dire du temps de retard τ ? Calculer la meilleure position de la grille l pour développer l'instabilité thermoacoustique.

8. Le coefficient β_w est proportionnel à $\beta_w \sim (T_w - T_0)$ où T_w est la température de la résistance. Que pensez-vous de la configuration $T_w < T_0$? Dans quel partie du tube faudrait-il placer cette grille froide (tube de Bosscha) pour avoir développement d'oscillations de pression auto-entretenues?

6 Jet noise

1. **Acoustic power of a booster.** We consider the following supersonic jet : the nozzle diameter is $D = 2.4$ m, the Mach number is $M = 3.09$, the exit temperature is $T_j = 1644$ K, the specific heat ratio is $\gamma = 1.21$ and the molecular weight of the gas is 27 g.mol^{-1} . Estimate the radiated acoustic power and the thrust.
2. **Diameter or Velocity?** Two subsonic jet engines have the same thrust. The characteristics of the two jets are identical, but the first jet has twice the diameter of the other. Which is the loudest?
3. **Coaxial jets.** We consider a double flux engine. All the parameters of the primary hot jet are held constant, namely the density ρ_1 , the velocity U_1 and the diameter D_1 . We know the density ρ_2 and the diameter D_2 of the secondary cold jet. We shall assume that the intensities of the two jets are independent, and the observer will be taken to be at $\theta = 90^\circ$ in order to eliminate the convection effects.
 - (i) Introduce the dimensionless numbers $\lambda = U_2/U_1$, $\beta = D_2/D_1$ and $\phi = \rho_2/\rho_1$ to express the acoustic intensity.
 - (ii) Find the value of the velocity ratio λ which minimizes the radiated acoustic intensity.
 - (iii) Numerical application with $U_1 = 130$ m, $D_1 = 30$ mm, $D_2 = 100$ mm and $\phi = 1$. Compare your estimate with the experimental value $\lambda = 0.4$.



Juvé, Bataille & Comte Bellot (1978)

$$\lambda = U_2/U_1 \quad \beta = D_2/D_1$$