Turbulence and Aeroacoustics
Research team of the Centre Acoustique
LMFA, École Centrale de Lyon & UMR CNRS 5509

ÉCOLE CENTRALE LYON

UNIVERSITÉ DE LYON

CNRS

CHEL[S]
Collège des Hautes Etudes
Lyon Science[s]

Décision, complexité, risque[s], 23 octobre 2014

Ordre & chaos ...
de Newton à Lorenz

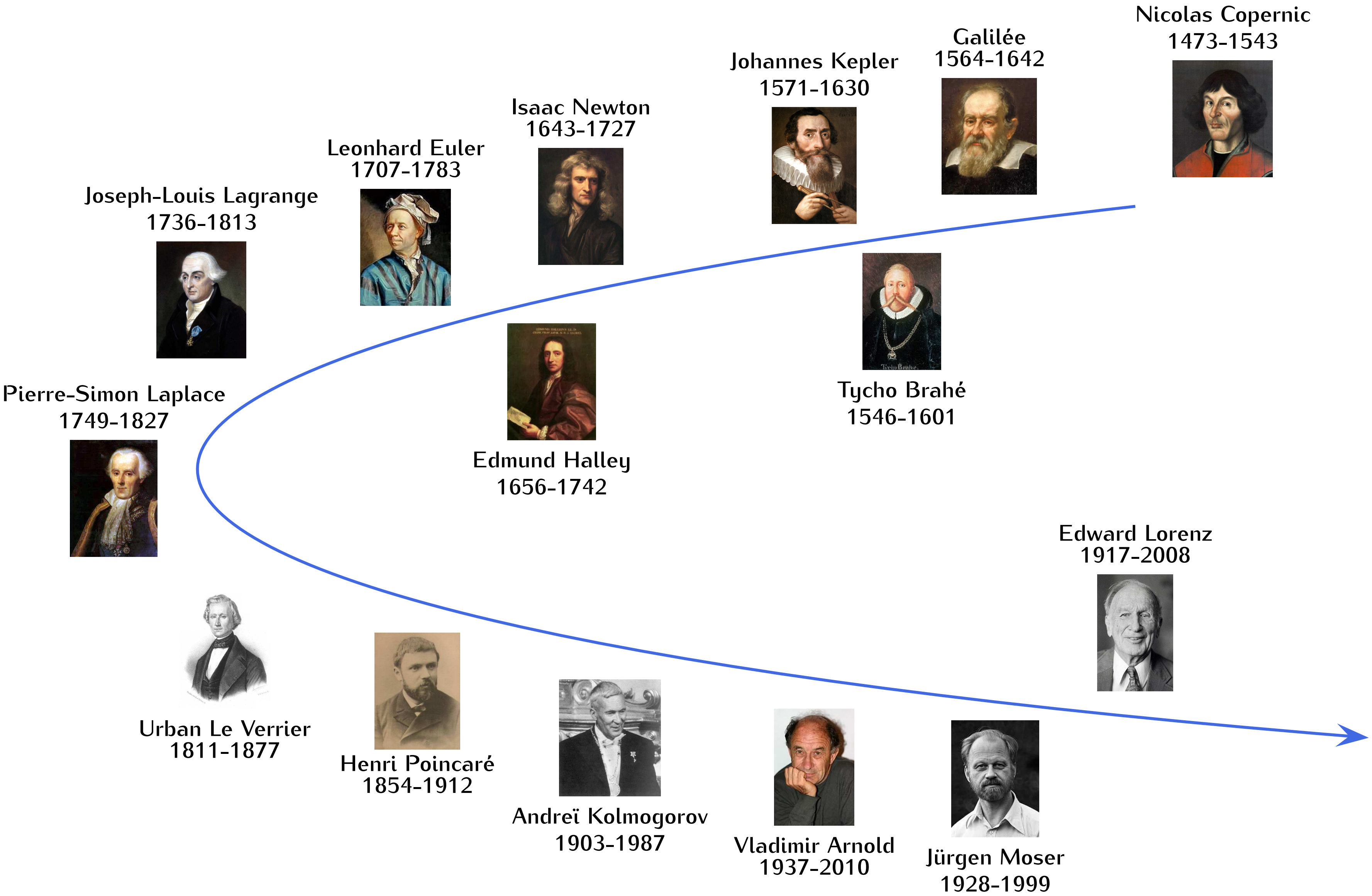
Christophe Bailly

Université de Lyon
Ecole Centrale de Lyon, LMFA - UMR CNRS 5509

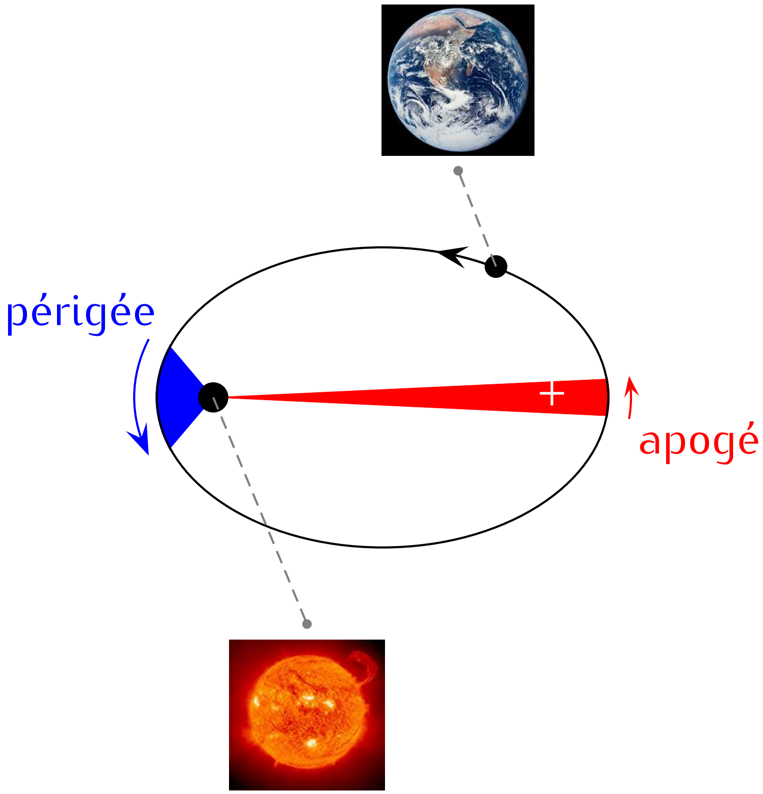
http://acoustique.ec-lyon.fr

- **La science est-elle toujours capable de prédire ?**

  Par exemple, qu'en est-il de la stabilité du système solaire ...



- **Johannes Kepler (1571-1630)**
  Lois empiriques pour les trajectoires des planètes, basées sur les observations très précises pour l'époque de Tycho Brahé (1546-1601), astronome Danois.



Les 3 lois de Kepler

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers

Les aires sont balayées uniformément

période^2/demi-grand axe^3 $=$ cst

Les lois de Kepler par Voltaire (1694-1778)

(Mélanges de philosophie, avec des figures)

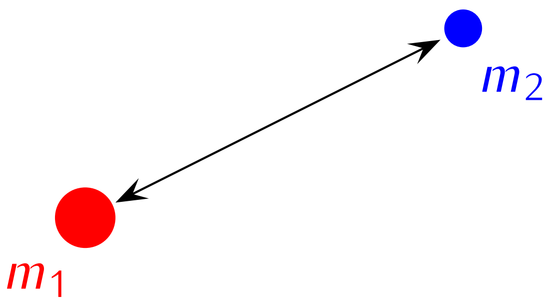
Képler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit, au quatrième livre de son épitome, que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, *animum*, mais une âme végétante, agissante, *animam* : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes ; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En fesant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ami est attiré, et le côté ennemi est repoussé ; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.

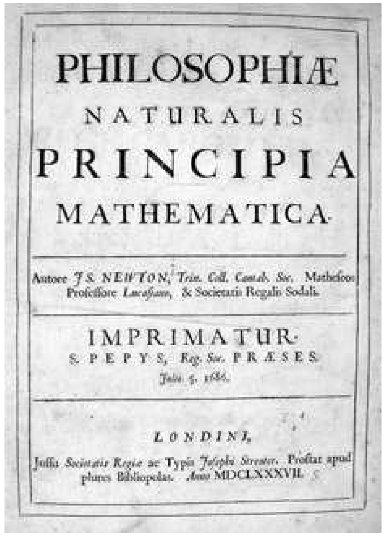
Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe ; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité ; il devina la rotation du soleil sur lui-même plus de quinze ans avant que les yeux de Galilée la reconnussent à l'aide des télescopes.

Képler ajoute dans son même épitome, page 495, que la masse du soleil, la masse de tout l'éther, et la masse des sphères des étoiles fixes, sont parfaitement égales ; et que ce sont les trois symboles de la très-sainte Trinité.

- **Isaac Newton (1643-1727)**
  Loi universelle de la gravitation (1687, Livre III)

$$F = \mathcal{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \mathcal{G} = \text{cst}$$




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.


[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

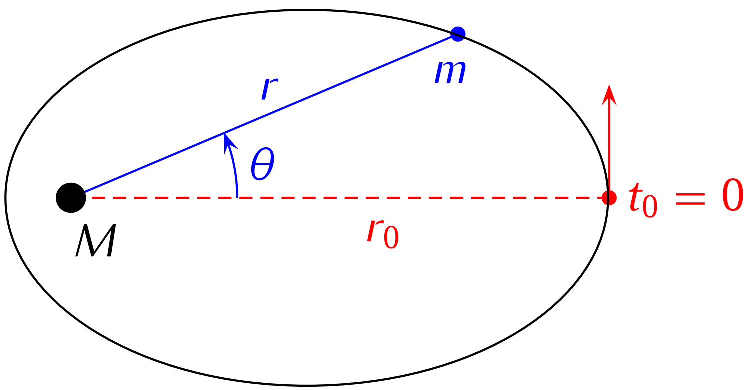
« Principia Mathematica » (1687) traduit en français par la marquise du Châtelet (1756)

Cette loi permet d'avoir une vue unifiée des travaux de Galilée sur la chûte des corps et des lois empiriques de Kepler en mécanique celeste : le monde est gouverné par quelques lois simples de la mécanique.

« Si j'ai vu plus loin, c'est en montant sur les épaules de géants. »

- **Isaac Newton énonce également le principe fondamental de la dynamique.**

C'est le développement du calcul différentiel essaimé en parallèle par Gottfried Leibniz (1646-1716), qui permet ensuite à **Leonhard Euler (1707-1783)** de proposer sa formulation actuelle, $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (en repère galiléen !).



Particule de masse m soumise à une force centrale créé par une masse M au repos, Euler (1749).

Cela posé, prenant l'element du tems dt pour conſtant, le changement inſtantané du mouvement du Corps ſera exprimé par ces trois équations :

I. $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}$; II. $\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}$; III. $\frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$

d'où l'on pourra tirer pour chaque tems ecoulé t les valeurs x, y, z, & par conſéquent l'endroit où le Corps ſe trouvera. C. Q. F. T.

Otons l'une de ces équations de l'autre, & nous aurons :

$$(2drd\Phi + rdd\Phi)(\mathrm{tang}\,\Phi + \cot\Phi) = 0$$

ou bien $2drd\Phi + rdd\Phi = 0$

Multiplions la premiere par $\cot\Phi$ & la ſeconde par $\mathrm{tang}\,\Phi$, & nous aurons en les ajoutant enſemble :

$(ddr - rd\Phi^2)(\cot\Phi + \mathrm{tang}\,\Phi) = -\frac{1}{2} V dt^2 (\cot\Phi + \mathrm{tang}\,\Phi)$

ou bien $ddr - rd\Phi^2 = -\frac{1}{2} V dt^2$.

De ſorte que n'ayant plus dans le calcul, ni le ſinus, ni le coſinus de l'angle Φ, le mouvement du Corps propoſé ſera exprimé par les deux équations ſuivantes :

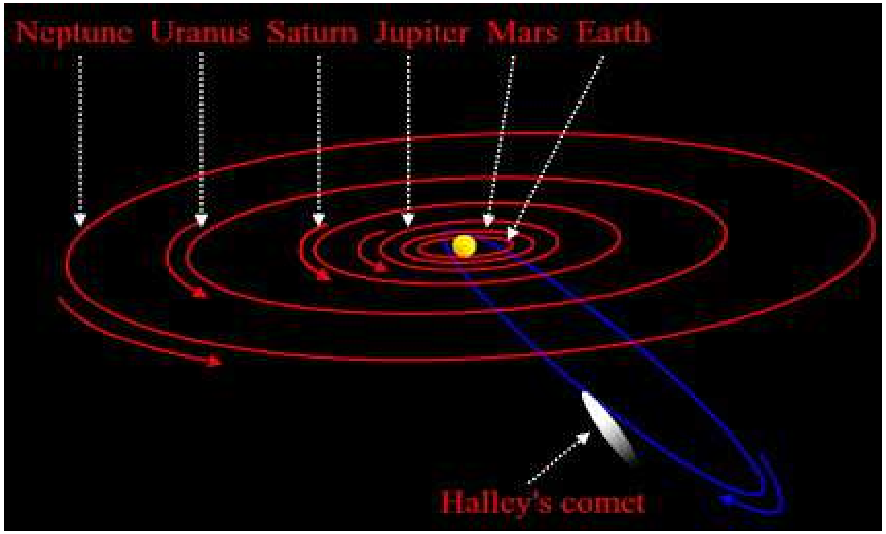
I. $2drd\Phi + rdd\Phi = 0$

II. $ddr - rd\Phi^2 = -\frac{1}{2} V dt^2$.

dont la premiére etant multipliée par r aura d'abord pour integrale.

$$rrd\Phi = Adt$$

- **Comète de Edmund Halley (1656-1742)**

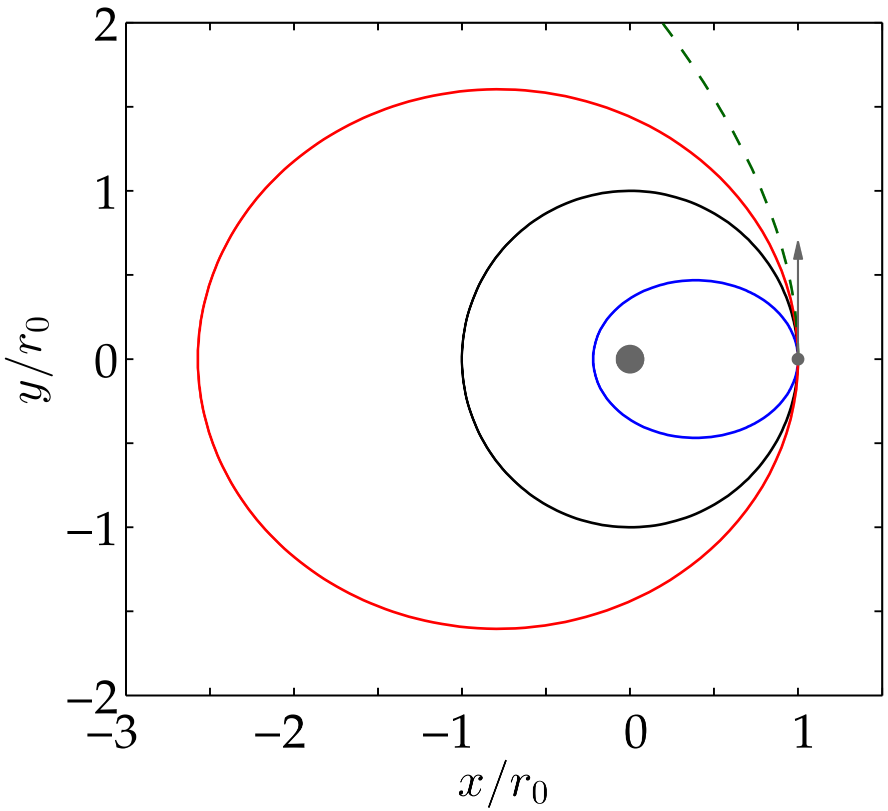


Tapisserie de Bayeux (1066)

« Si le retour prévu par nous pour l'année 1758 se réalise, l'impartiale postérité ne se refusera pas à reconnaître que ce fut un Anglais qui l'annonça pour la première fois. »

Premières prédictions de trajectoire des planètes

« le problème à deux corps »



Trajectoires ouvertes ou fermées (coniques)

Vitesse de libération à la surface de la Terre, $v_c = 11.2$ km.s^{-1}

Le problème à deux corps est intégrable (permet de retrouver les lois de Kepler par exemple) et stable : mouvement képlérien.

- **Peut-on prédire l'évolution du système solaire dans son ensemble ?**

Il faut prendre en compte l'interaction entre les planètes et avec le soleil, tenir compte de la présence de satellites naturels, d'astéroïdes, de l'aplatissement des planètes, des erreurs estimations de la position ou de la masse des planètes, ...

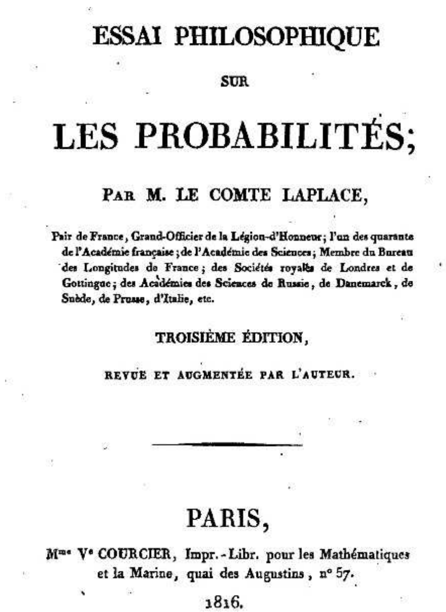
Les travaux de **Lagrange & Laplace** prédisent la stabilité du système (c'est-à-dire de pouvoir calculer des trajectoires sur des « temps longs » sans incident : variations bornées et quasi-périodiques des paramètres des trajectoires, pas d'intersection, stabilité perpétuelle) en s'appuyant sur des méthodes perturbatives.

Ces calculs seront par la suite remis en cause par **Le Verrier** (1840, 1841).

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

« Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. » (déterminisme laplacien)

Essai philosophique sur les probabilités (1796)



ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR

LES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Impr.-Libr. pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.

1816.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

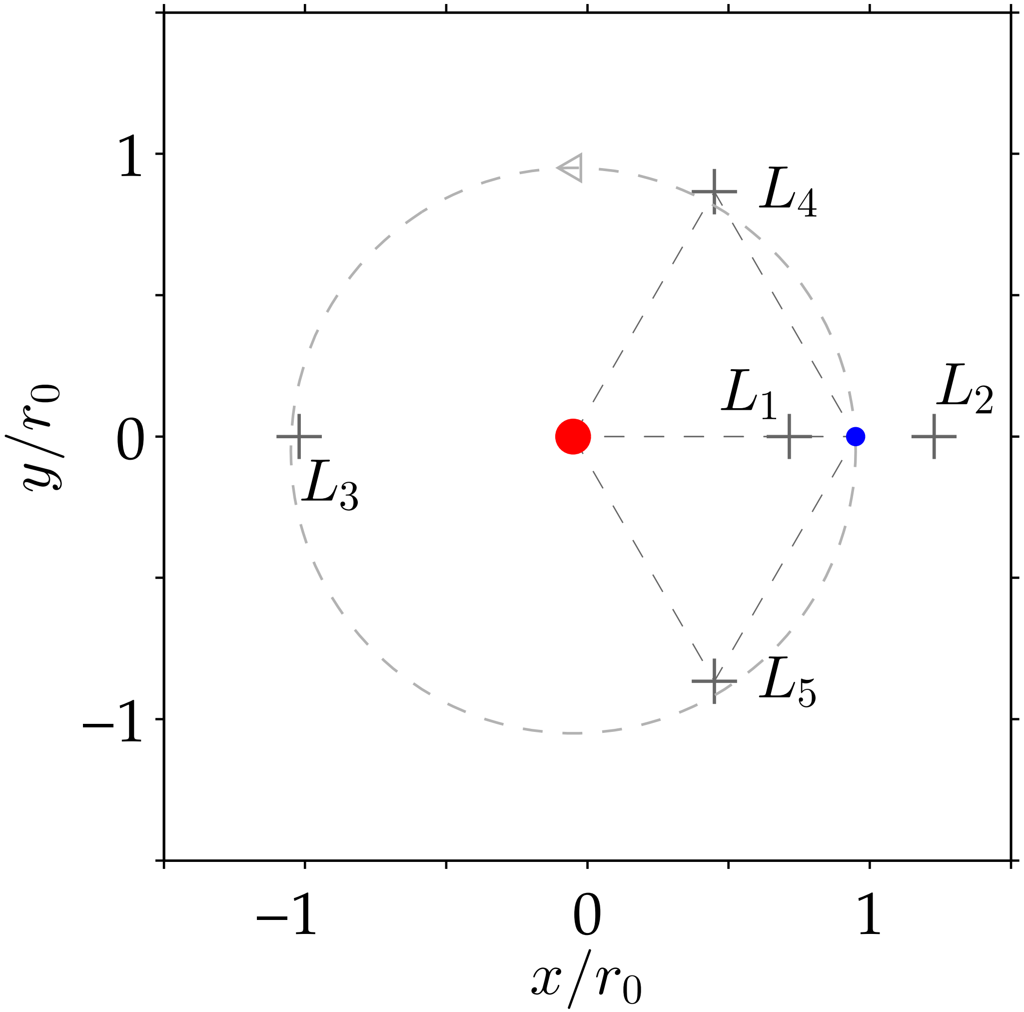
Laplace a été nommé Ministre de l'intérieur par Napoléon en 1799, mais l'expérience ne dura que 6 semaines !

— « A l'intérieur, le ministre Quinette fut remplacé par Laplace, géomètre du premier rang; mais qui ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail, les Consuls s'aperçurent qu'ils s'étaient trompés : Laplace ne saisissait aucune question sous son vrai point de vue. Il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques, et portait enfin l'esprit des infiniment petits dans l'administration. » (*Gourgaud*, t. I, p. 3.)

(Biographie des contemporains, par Napoléon)

Points de Lagrange (1772)

Les effets de la gravité se compensent en ces 5 points.



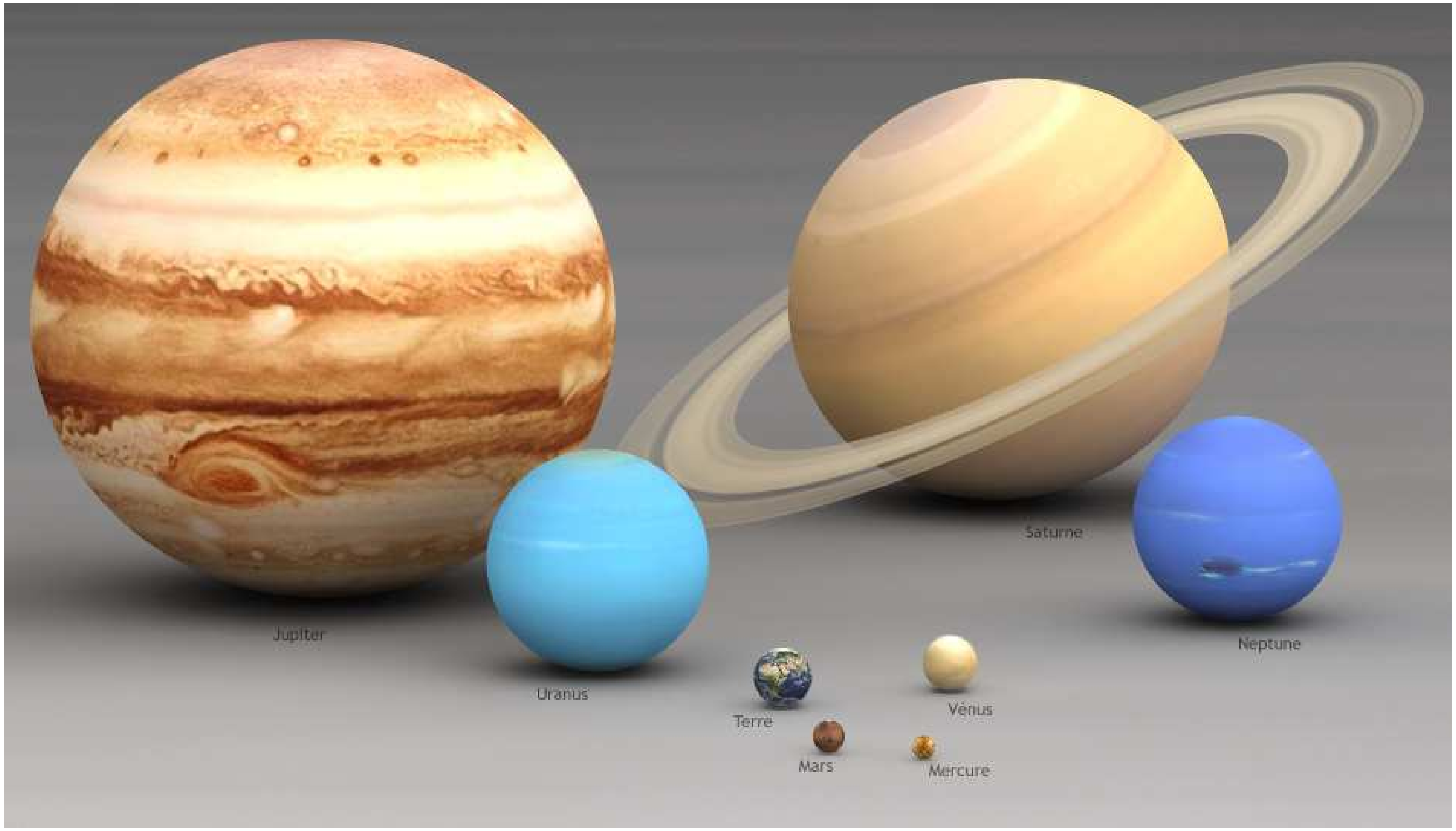
Les trois premiers sont des positions instables (L_1, L_2 et L_3),

et les deux derniers stables pour $\mu \leq \mu_c$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Pour le système Soleil-Jupiter par exemple, $\mu < \mu_c$, L_4 et L_5 sont des positions stables.

- Taille des planètes du système solaire



- Taille des planètes du système solaire

- **Points de Lagrange (1772)**
  Dans le système Soleil - Jupiter, les points L_4 et L_5 sont stables et abritent les astéroïdes troyens

  Premier corps observé en 1906 par Max Wolf (observatoire d'Heidelberg) : *Achille*, $\sim$ 100 km, au voisinage de L_4 ; le plus gros connu actuellement : *Hector*, 370 km $\times$ 195 km

  Environ 2000 astéroïdes troyens recensés (sur probablement plus d'un million de corps de plus de 1 km), majoritairement au voisinage de L_4.

  Les astéroïdes sont nommés selon leur position sur l'orbite commune avec Jupiter : s'ils la précèdent (point L_4), leur nom est choisi parmi les héros grecs de l'Iliade et ils font partie du groupe des « Grecs ». S'ils la suivent (point L_5), ils portent celui d'un héros troyen proprement dit.

  Il y a d'autres troyens dans le système solaire.

Points de Lagrange (1772)

Gaia, le portulan céleste

Le 19 décembre, une fusée Soyouz doit s'envoler depuis Kourou (Guyane) avec, à son bord, le satellite Gaia, réalisé par Astrium pour l'Agence spatiale européenne (ESA). Objectif de ce « microscope galactique » : cartographier en 3D un milliard d'étoiles de la Voie lactée pour produire l'image la plus détaillée de notre galaxie. Une fois en orbite, l'engin ira se placer sur le point L2 de Lagrange, situé à 1,5 million de kilomètres de notre planète. De ce « promontoire », il utilisera la parallaxe, une technique géométrique qui consiste à viser une étoile deux fois, à six mois d'intervalle, afin d'obtenir une mesure d'angle. A partir de celle-ci, les astronomes calculent la distance entre la Terre et l'étoile et en déduisent ses caractéristiques (âge, masse, température, luminosité). Côté français, le Centre national d'études spatiales (Cnes) est chargé de la majeure partie du traitement des données, ce qui l'amènera à mobiliser une puissance de calcul de 60 000 milliards d'opérations par seconde (6 téraflops). Un véritable défi technologique autant qu'une course contre la montre : « Dans moins de deux ans, on disposera d'un catalogue complet du ciel, » s'enthousiasme François Mignard, de l'observatoire de la Côte d'Azur (Nice). •

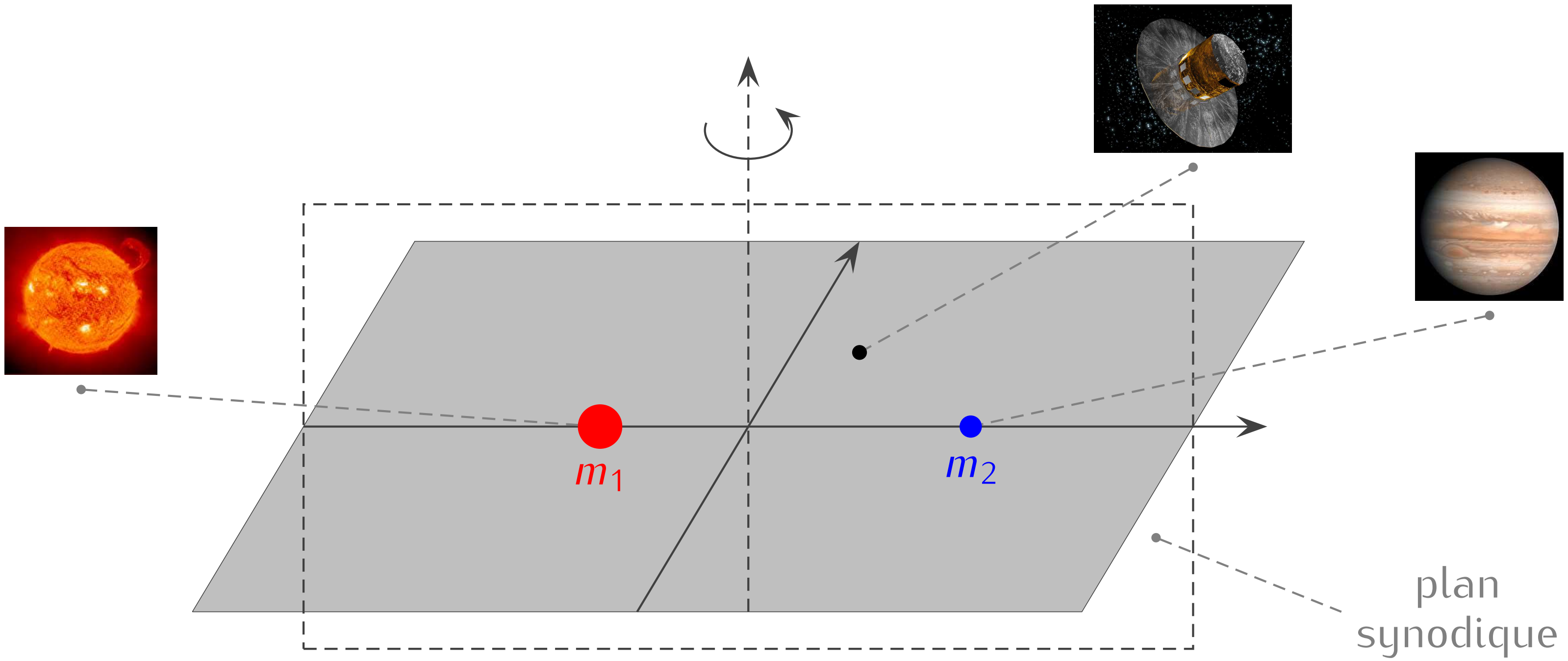
L'Express – 18 déc. 2013

Satellite repositionné (trajectoire corrigée) tous les dix jours environ.

Problème des trois corps restreints

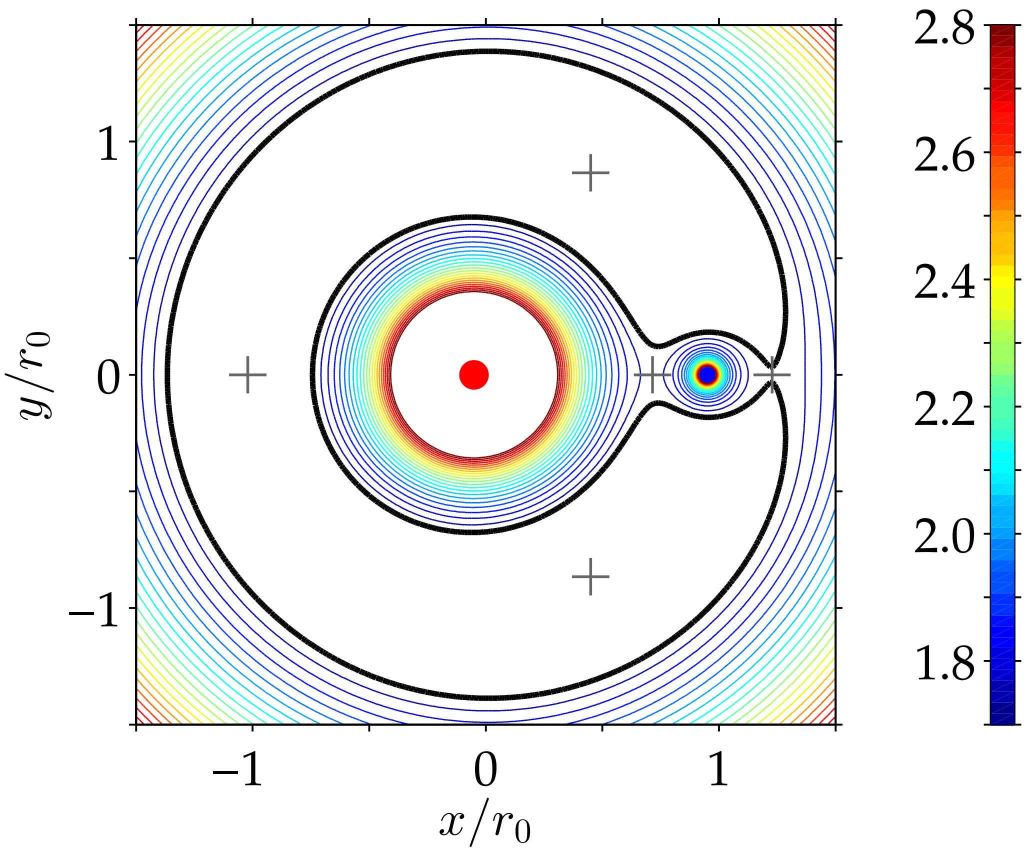
Extension du problème à deux corps dans le cas le plus simple possible, mais qui va s'avérer extraordinairement complexe ...

On considère deux corps de masse m_1 et m_2 suivant une trajectoire circulaire (cas particulier du problème à deux corps avec le Soleil et Jupiter par exemple), et on cherche à déterminer le mouvement d'un troisième corps de masse quasi-nulle, un petit satellite par exemple. (Carl Gustav Jacobi, 1836)



Problème des trois corps restreints

George W. Hill (1878)



($\mu = 0.05$)

Intégrale première du système, qui permet de définir la courbe de Hill (courbe noire), et la région interdite (en blanc) pour la trajectoire du troisième (petit) corps : problème à trois degrés de liberté.

C'est aussi la naissance d'une nouvelle stratégie : on ne cherche plus nécessairement à déterminer explicitement la trajectoire (trop complexe) pour étudier le comportement du système.

Henri Poincaré (1854-1912)

Un immense mathématicien qui maitrisait l'ensemble des mathématiques de son temps, élu à l'Académie des Sciences en 1887, et à l'Académie Française en 1908. (à ne pas confondre avec Raymond Poincaré, président de la république de 1913 à 1920 !)

1885 – lancement d'un concours de mathématique pour le 60e anniversaire d'Oscar II de Suède et de Norvège, organisé par Gösta Mittag-Leffler (avec Charles Hermite et Karl Weierstrass comme autres membres du jury)

Poincaré est lauréat le 21 janvier 1889 (2500 couronnes, salaire de Mittag-Leffler 7000 couronnes par an, manuscrit de 160 pages) avec son manuscrit « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » qui doit être publié dans *Acta Mathematica*.

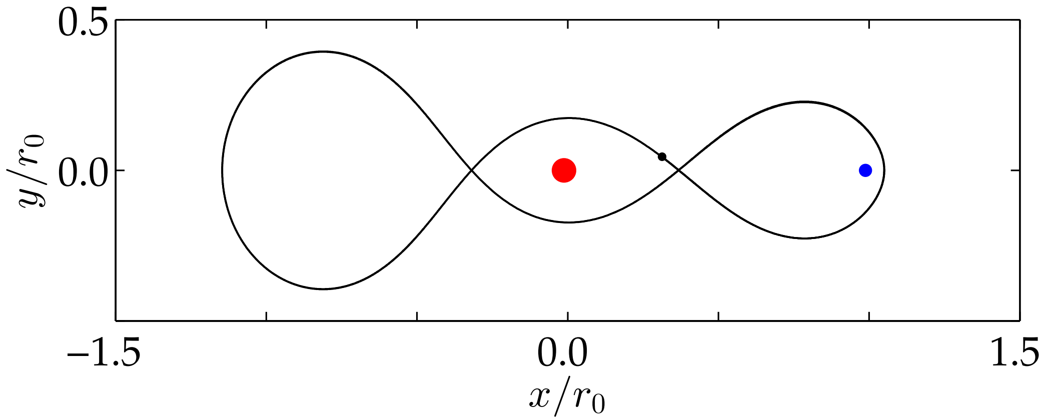
Poincaré veut montrer que le mouvement du petit corps est stable, c'est-à-dire qu'il repassera arbitrairement près de sa position d'origine si on attend suffisamment longtemps.

- **Henri Poincaré (1854-1912)**

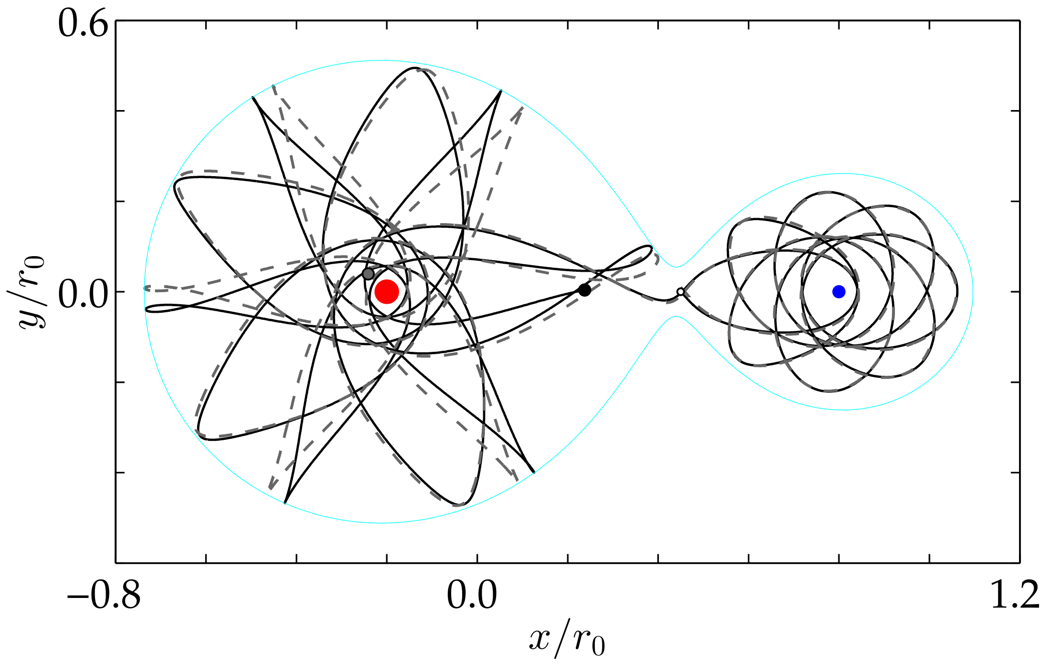
  Mais une erreur est découverte dans le manuscrit par Lars Phragmen (relecteur) ... et au final, Poincaré démontre le contraire. Le manuscrit révisé de 270 pages sera finalement publié en 1890 (mais il en coûtera 3500 couronnes à Poincaré pour les frais d'impression déjà engagés).

  Les résultats de ce travail ont une influence considérable, en particulier pour l'étude des systèmes dynamiques chaotiques et la sensibilité aux conditions initiales.

Problème des trois corps restreints

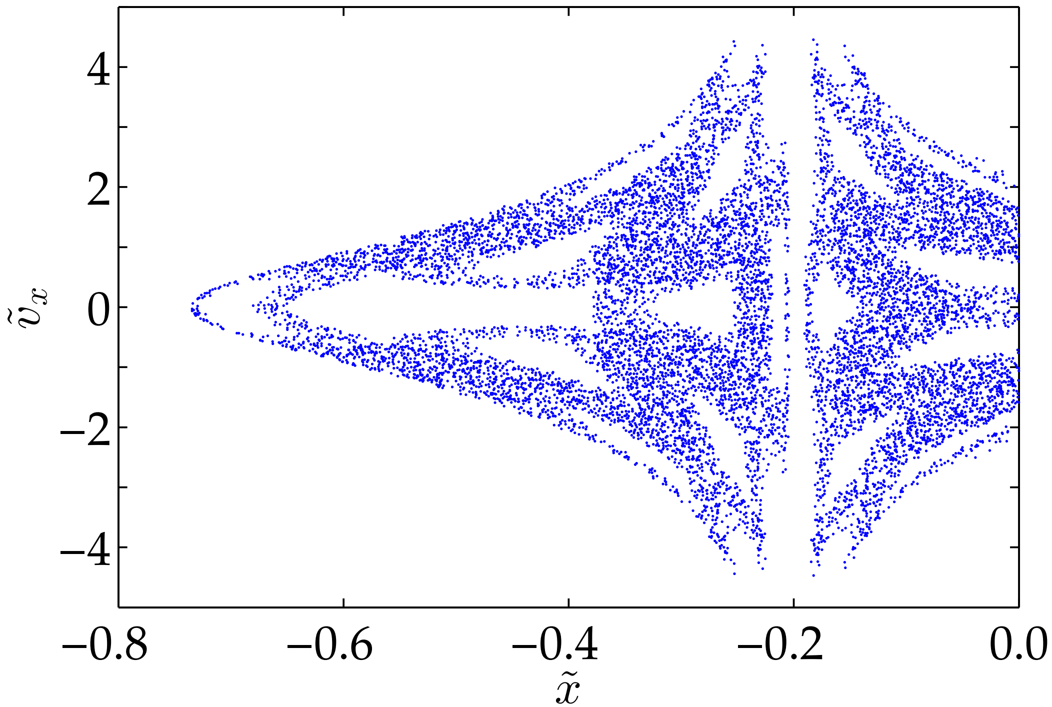


Exemple de trajectoire périodique ($\mu = 1/82$, $E = -1.3231$)



Exemple de trajectoire chaotique ($\mu = 0.2$, $E = -1.9734$ —— et $E = -1.9731$ - - -)

Problème des trois corps restreints



(section de Poincaré $y = 0$, $x < 0$)

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. » (Poincaré, 1908)

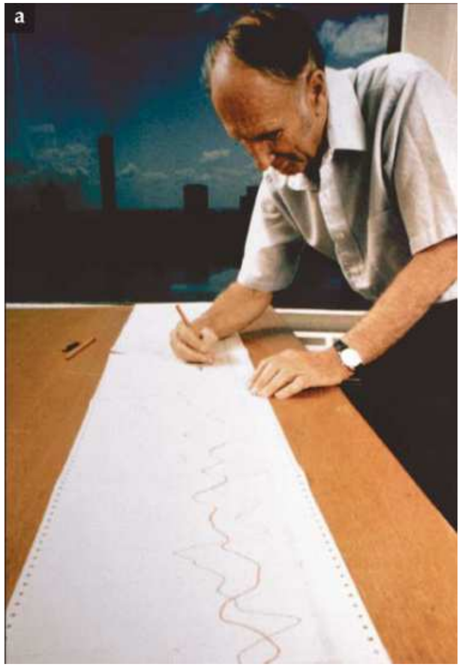
Sensibilité aux conditions initiales

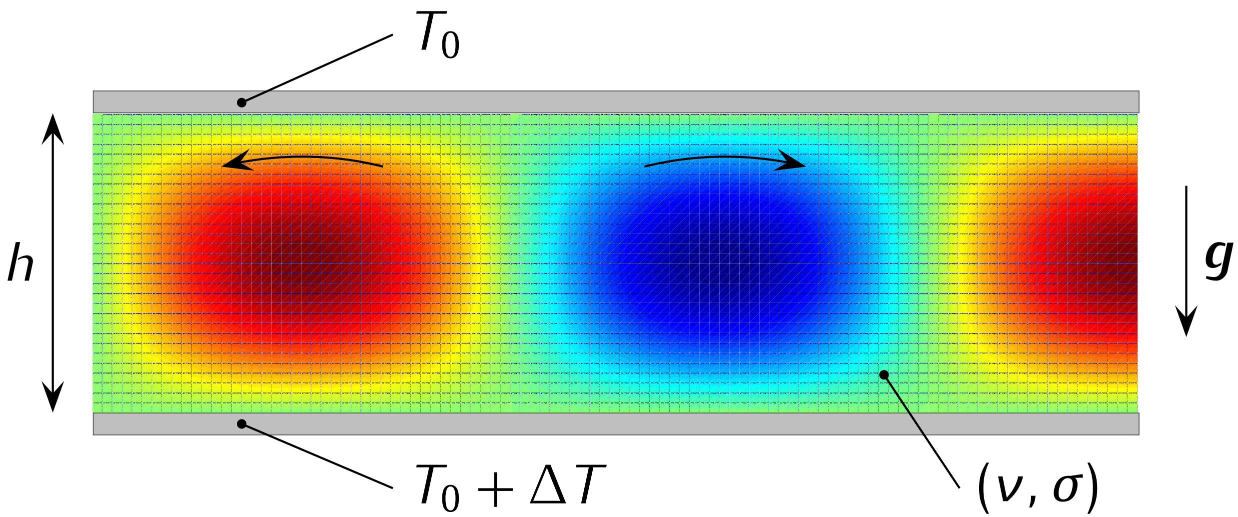
« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la Nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur.

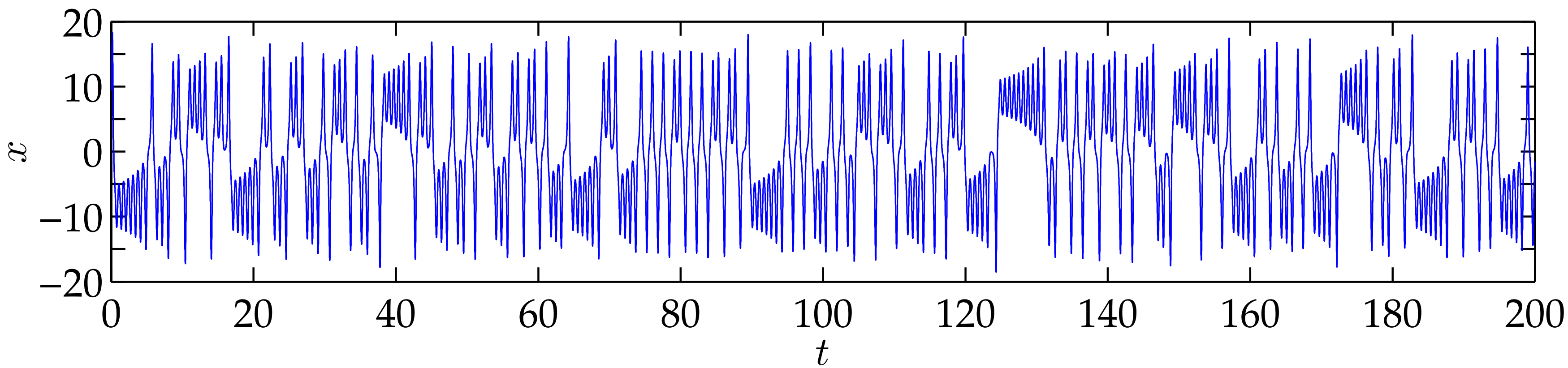
... mais il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible. »

Poincaré, Science et méthode (1908)

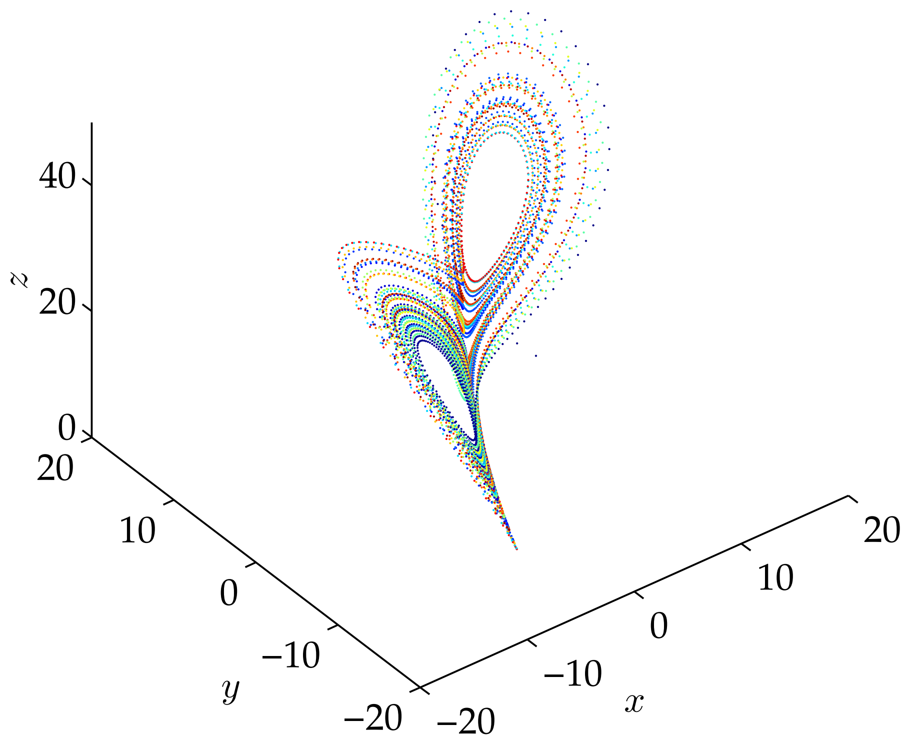
- **Edward Lorenz (1963), météorologue au MIT**
  L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos déterministe

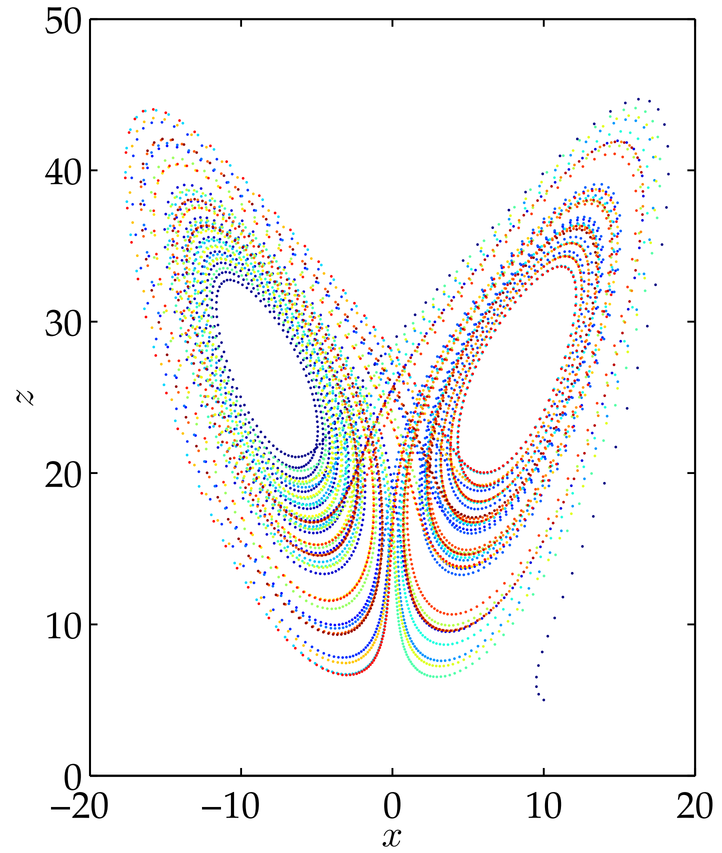






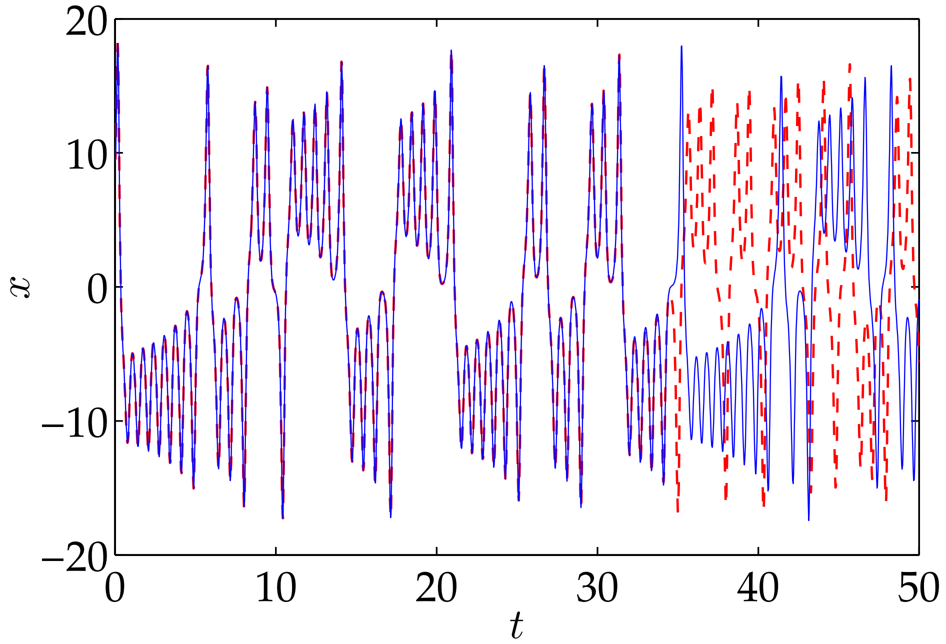
- **Attracteur de Lorenz**
  (dimension fractale 2.06)

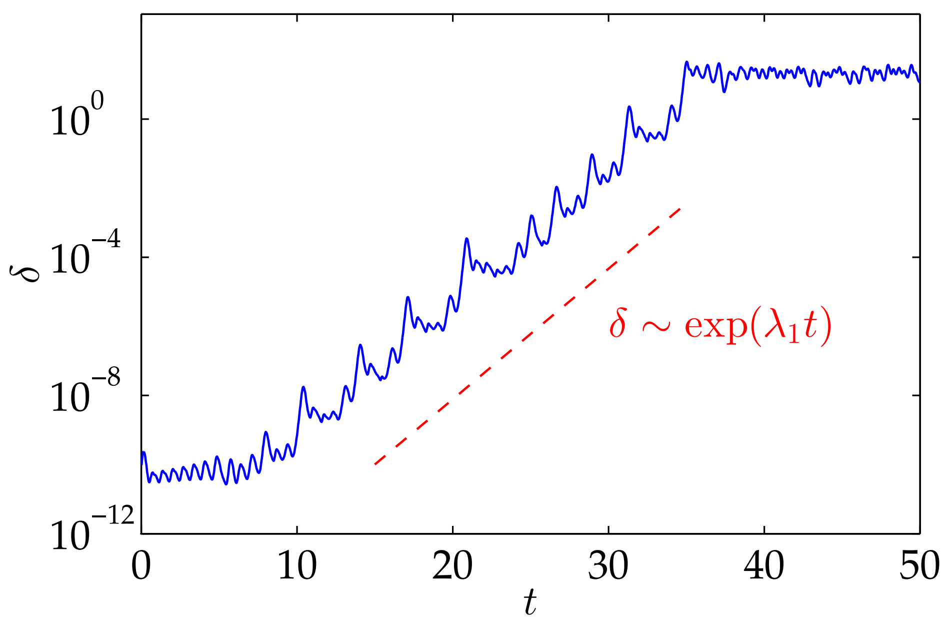




Attracteur de Lorenz

« Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? »
(Lorenz, 1972)





$\boldsymbol{x}_0$

$\boldsymbol{x}_0 + \epsilon[1, 0, 0]$ avec $\epsilon = 10^{-10}$

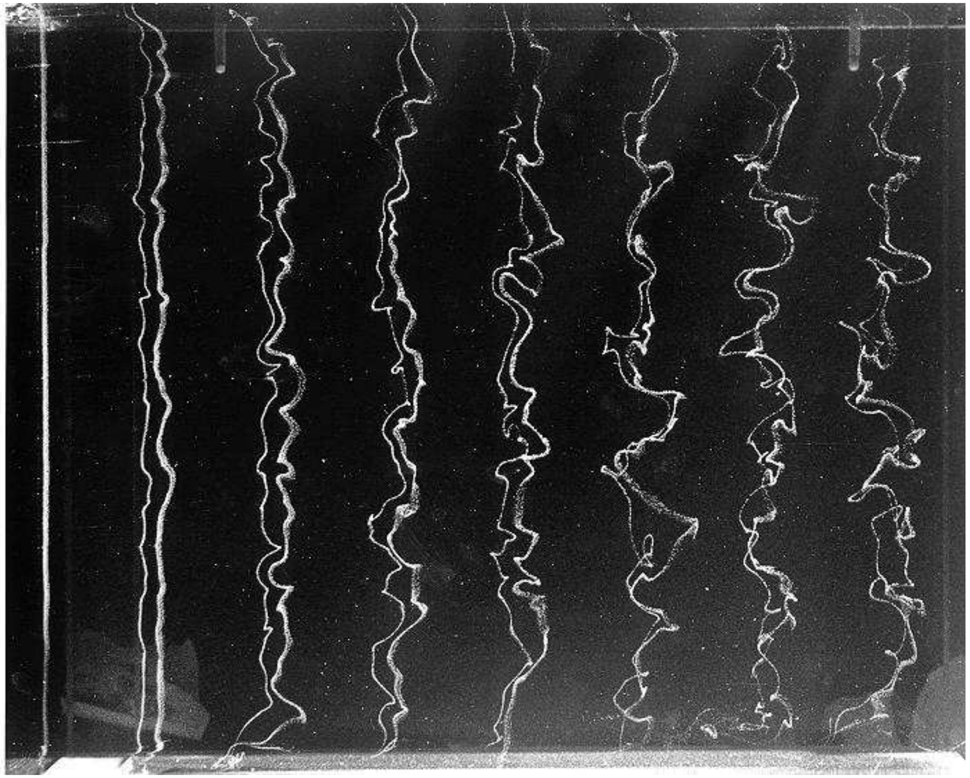
λ_1 exposant de Liapunov

Alexandre Liapunov (1857-1918)

L'effet papillon existe-il en mécanique des fluides ?

Dans l'atmosphère, on estime que deux particules fluides distantes de 10 cm se retrouvent séparées d'environ 10 km en une journée, « effet papillon ».

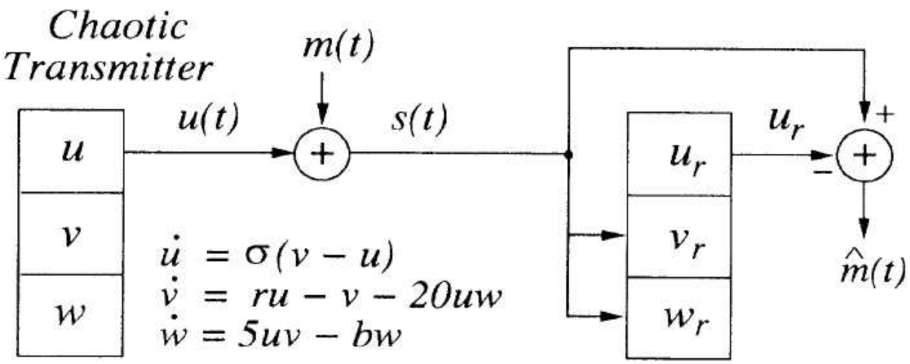
Équations de Navier-Stokes (Ruelle & Takens, 1971)

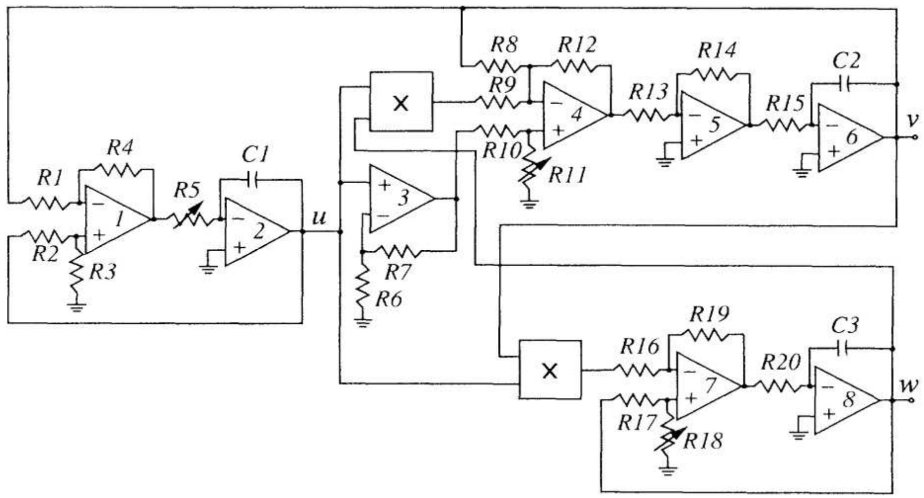


Growth of material lines in isotropic turbulence
Corrsin & Karweit (1969)

Synchronisation et cryptage

Emetteur : souhaite masquer un signal $m(t)$ à transmettre $s(t) = m(t) + u(t)$
$S_{uu}(f) \gg S_{mm}(f)$, $u(t)$ fourni par l'attracteur de Lorenz



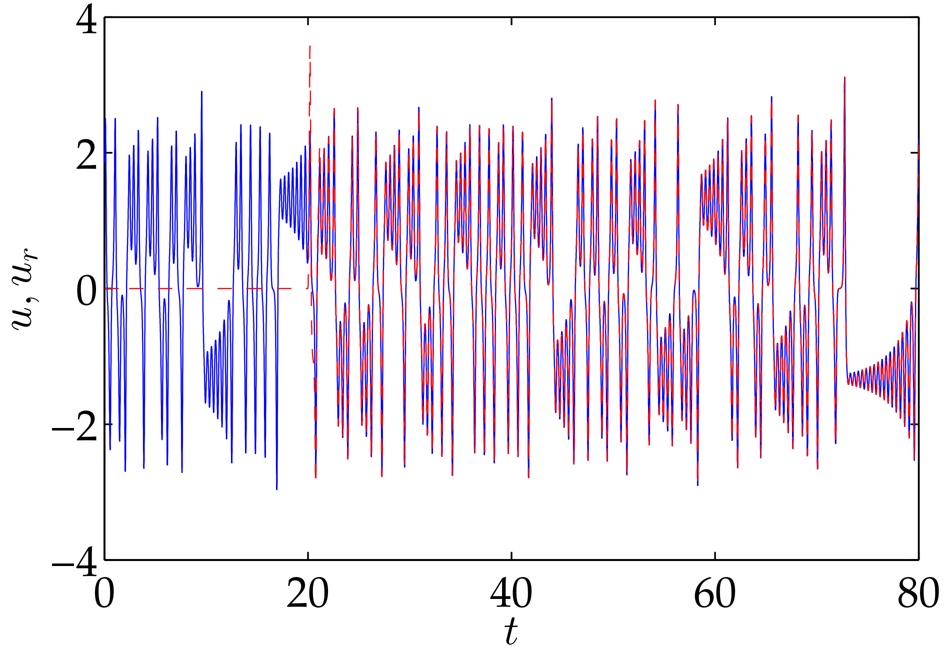


Synchronisation et cryptage

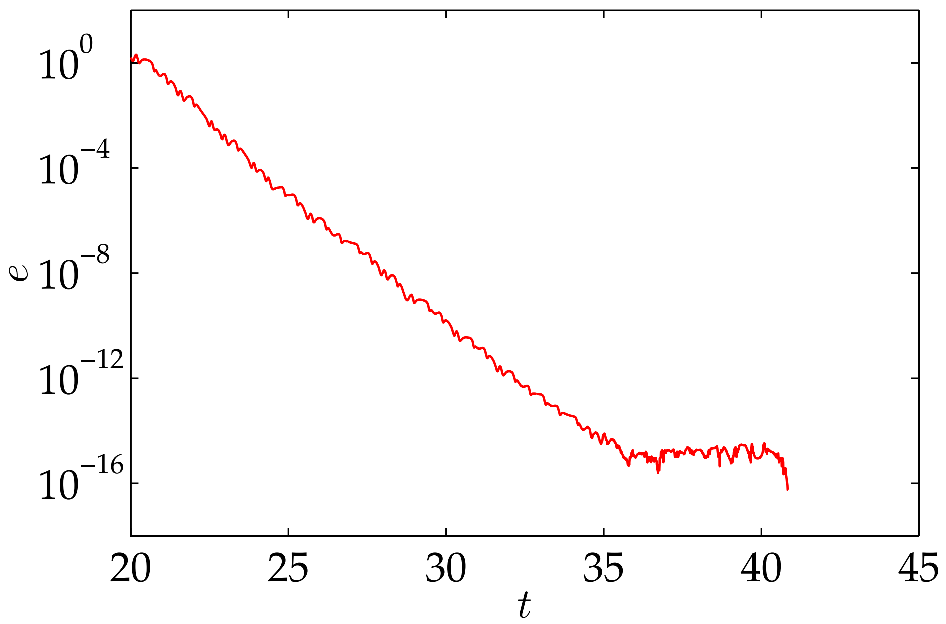
Récepteur : décryptage du signal reçu à partir de $s(t)$

$u_r(t) \to u(t)$ rapidement, et le signal secret est donné par $m(t) = s(t) - u_r(t)$

$u(t)$ $u_r(t)$



erreur $e(t) = |u(t) - u_r(t)|$



Algorithme de Newton

Newton (1669), Raphson (1690), Simpson & Cayley

Comment calculer la valeur numérique de $\sqrt{2}$?

Comme une solution de l'équation $z^2 - 2 = 0$, par itérations successives en construisant une suite (z_n)

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f'(z_n)}{f(z_n)} \qquad f(z) = z^2 - 2$$

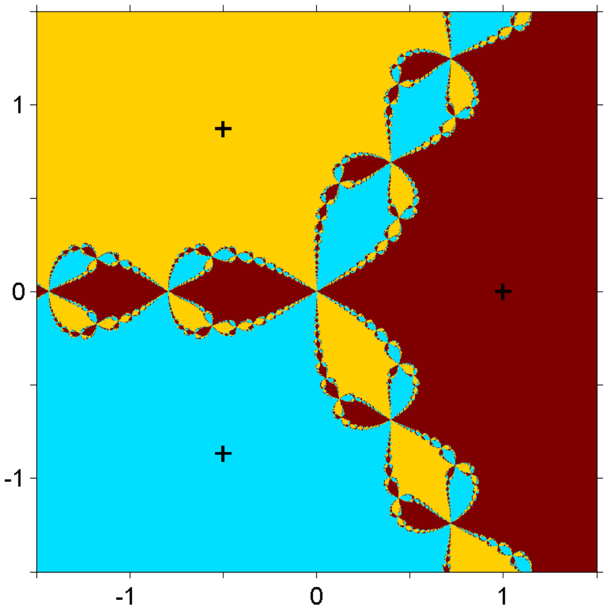
$$\begin{array}{r|l}
n = 1 & z_1 = 3.70000000000000 \\
n = 2 & z_2 = 2.12027027027027 \\
n = 3 & z_3 = 1.53177312111346 \\
n = 4 & z_4 = 1.41872475585884 \\
n = 5 & z_5 = 1.41422073461231 \\
n = 6 & z_6 = 1.41421356239128
\end{array} \qquad \to \sqrt{2}$$

Convergence quadratique quand tout va bien !

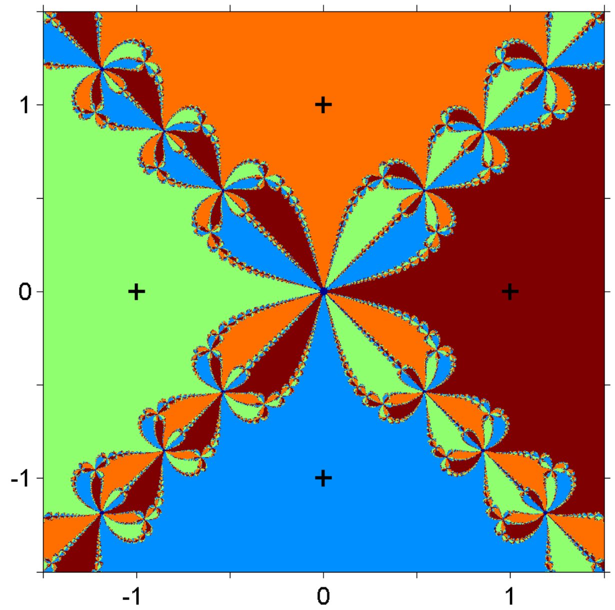
Algorithme de Newton pour $z^p - 1 = 0$

avec comme condition initiale $z_0 = x_0 + iy_0$, *i.e.* un point du plan (x_0, y_0)
Bassin d'attraction pour les p racines (en couleur) et ensemble de Julia (en noir)

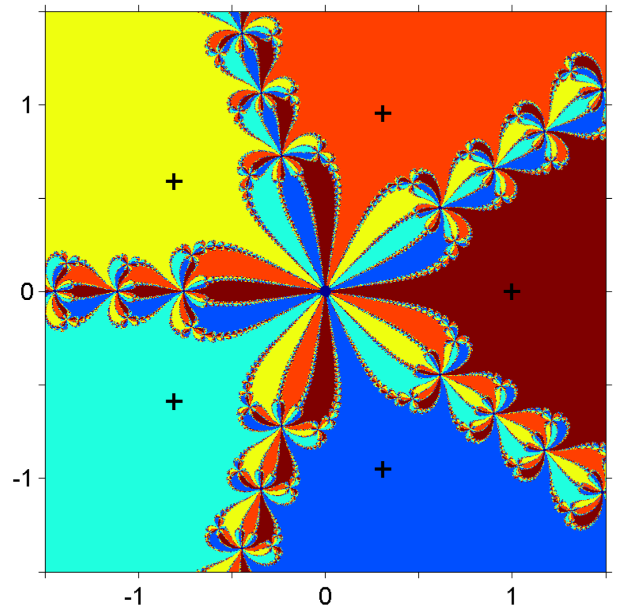
$p = 3$



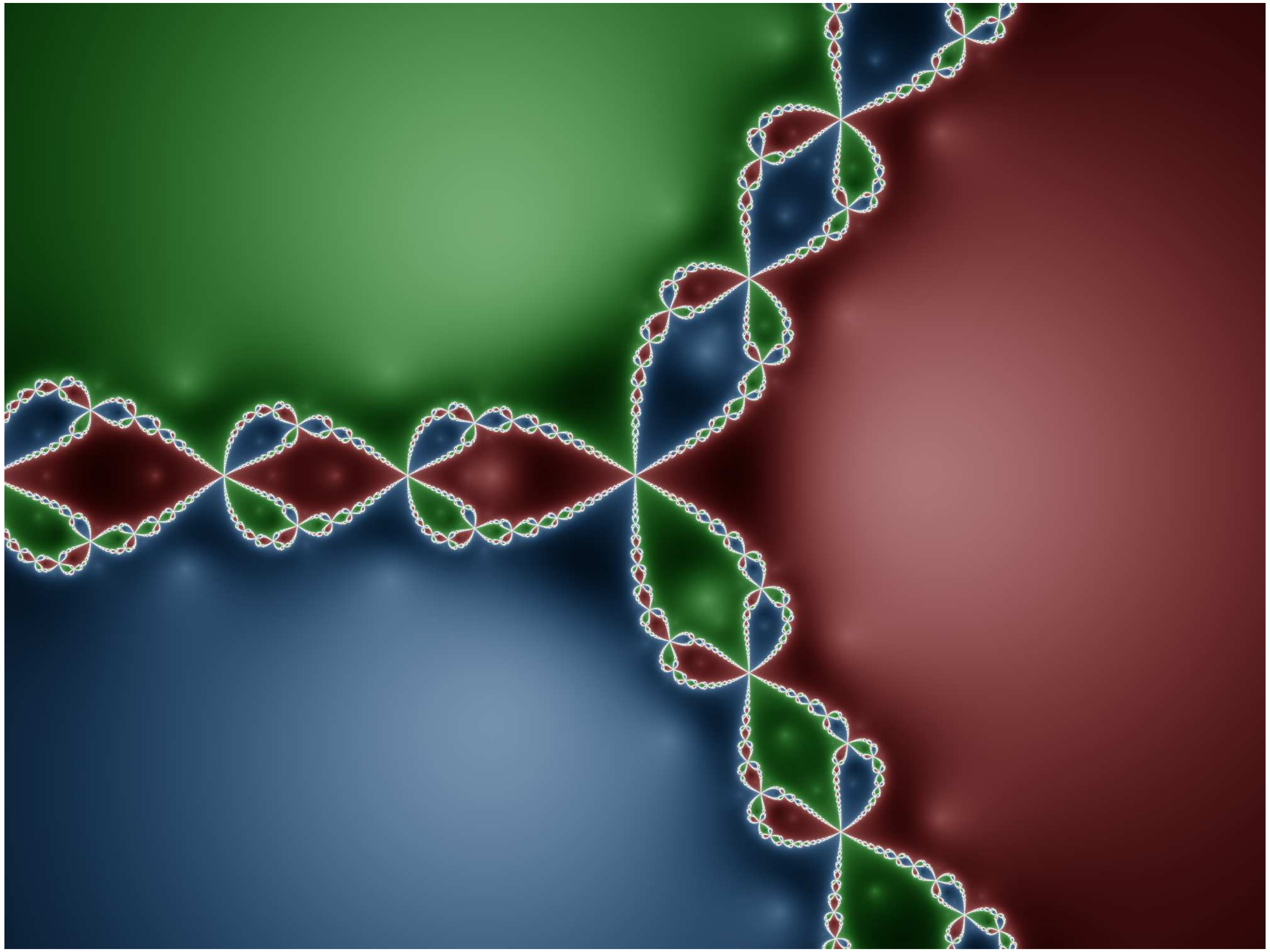
$p = 4$



$p = 5$



- Algorithme de Newton



Pour conclure (temporairement !) sur la stabilité du système solaire

Jacques Laskar (Observatoire de Paris, 2012 et travaux antérieurs)

Simulation directe de 2501 solutions (trajectoires) sur 5 milliards d'années, *i.e.* l'espérance de vie du système solaire, avec les équations générales de la mécanique (relativité générale), et dans 1% des cas, le système solaire interne est déstabilisé (Mercure, Venus, Terre et Mars) ...

et plus généralement

Les systèmes chaotiques sont plutôt la règle (condition nécessaire : 3 degrés de liberté et au moins une non-linéarité pour un système dynamique)

Difficile de prévoir une trajectoire sur un long horizon (sensibiblité aux conditions initiales), mais les statistiques des évènements le long de cette trajectoire sont significatifs (peu sensible aux C.I.).

Références

Acheson, D., 1997, *From calculus to chaos. An introduction to dynamics*, Oxford University Press, Oxford.

Deruelle, N. & Uzan, J.-P., 2006, *Mécanique & gravitation newtoniennes. Cours de physique théorique*, Vuibert, Paris.

Ghys, E., 2010, L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos, *Séminaire Poincaré XIV*.

Hill, G.W., 1878, Researches in the lunar theory, *American Journal of Math.*, **1**(5), 5-26.

Kneisl, K., 2001, Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method, *Chaos*, **11**(2), 359-370.

Laskar, J., 2012, Is the Solar system stable ?, *Séminaire Poincaré XIV*.

Letellier, C., 2006, *Le chaos dans la nature*, Vuibert, Paris.

Lorenz, E.N., 1993, *The Essence of Chaos*, The University of Washington Press, Seattle.

Lorenz, E.N., 1963, Deterministic nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.

Motter, A.E. & Campbell, D.K., 2013, Chaos at fifty, *Physics Today*, **66**(5), 27-33.

Poincaré, H., 1908, *Science et méthode*, Flammarion.

Poincaré, H., 1905, *La valeur de la science*, Flammarion.

Ruelle, D. & Takens, F., 1971, On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.*, **20**, 167.

Yoccoz, J.-C., 2006, Une erreur féconde de Henri Poincaré, *Tangente*, HS **25**, 30-39.

Vela-Arevalo, L. V. & Marsden, J. E., 2004, Time-frequency analysis of the restricted three-body problem : transport and resonance transitions, *Class. Quantum Grav.*, **21**, S351-S375.