



# Mécanique des fluides et énergie

Christophe Bailly & Pietro Salizzoni

Centrale Lyon - UE FLE (version sept. 2024)

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

## ∟ Références ¬

### • En mécanique des fluides

- Anderson Jr. J.D., 1991, Fundamentals of aerodynamics, McGraw-Hill Int. Edts.
- ——, 2004, Modern compressible flow with historical perspective, McGraw-Hill Int. Edts.
- Batchelor G.K., 1967, An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Candel S., 1995, Mécanique des fluides, Dunod Université, 2nd édition, Paris.
- **Guyon E., Hulin J.P. & Petit L.**, 2001, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences / Editions du CNRS, Paris Meudon (translated in english).
- Kambe, T., 2007, Elementary fluid mechanics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Landau L. & Lifchitz E., 1971, Mécanique des fluides, Editions MIR, Moscou. Pergamon Press.
- Lienhard IV, J.H. & Lienhard V, J.H., 2017, A heat transfer textbook, Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts.
- Panton, R., 2013, Incompressible flows, Wiley.
- Scorer, R.S., 1978, Environmental Aerodynamics, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- Tavoularis, S., 2005, Measurement in fluid mechanics, Cambridge University Press, New York.
- Thompson, P.A., 1988, Compressible fluid dynamics, Advanced engineering series, McGraw-Hill Int. Edts.
- Van Dyke M., 1982, An album of fluid motion, The Parabolic Press, Stanford, California.
- White F., 1991, Viscous flow, McGraw-Hill, Inc., New-York.

National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF) Gallery of fluid motion (APS division of fluid mechanics)

# ∟ Références ¬

### • En turbulence

- Bailly C. & Comte Bellot G., 2003, *Turbulence* (in french), CNRS éditions, Paris.
  - ——, 2015, Turbulence (in english), Springer, Heidelberg.
- Davidson P.A., 2004, Turbulence. An introduction for scientists and engineers, Oxford University Press, Oxford.
- Davidson P.A., Kaneda Y., Moffatt H.K. & Sreenivasan K.R., Edts, 2011, A voyage through Turbulence, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hinze J.O., 1975, Turbulence, McGraw-Hill International Book Company, New York, 1st edition in 1959.
- Lesieur M., 2008, Turbulence in fluids : stochastic and numerical modelling, 4th revised and enlarged ed., Springer.
- Pope S.B., 2000, Turbulent flows, Cambridge University Press.
- Tennekes H. & Lumley J.L., 1972, A first course in turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachussetts.

# ${\scriptstyle L}$ Glossaire ${}^{\neg}$

airfoil	profil
bluff body	corps non profilé
boundary layer	couche limite
bulk velocity	vitesse de débit
buoyancy	flottabilité
curl	rotationnel
chord	corde
conservative force	force qui dérive d'un potentiel (gravité par exemple)
creeping flow	écoulement rampant
Darcy friction coefficient	coefficient de pertes de charge
drag	traînée
density (mass per unit volume)	masse volumique
efficiency	rendement
energy head	charge
friction velocity	vitesse de frottement
head loss	perte de charge
inviscid flow	écoulement non visqueux
leading edge	bord d'attaque (d'un profil)
lift	portance
lift-to-drag ratio	finesse
mass fraction	fraction massique
mixture	mélange
point vortex	tourbillon ponctuel

# ∟ Glossaire ¬

relative density densité shaft work travail de l'arbre (d'une machine tournante) skin-friction coefficient coefficient de frottement slip boundary condition condition aux limite glissante stall décrochage strain (deformation) tensor tenseur des déformations fonction de courant stream function streamlined body corps profilé tenseur des contraintes stress tensor thrust poussée torque (angular momentum) couple trailing edge bord de fuite (d'un profil) vortex shedding frequency fréquence du lâcher tourbillonnaire vortex sheet nappe (infiniment mince) de vorticité wake sillage wall shear stress contrainte pariétale

aka also known as wrt with respect to

# ∟ Notations ¬

On utilise indifféremment ici une lettre en gras ou une notation indicielle pour désigner une quantité vectorielle. Quelques exemples :

vecteur vitesse  $U \equiv \overrightarrow{U}$ ,  $i^{e}$  composante  $U_{i}$ , norme U avec  $U^{2} = U \cdot U$ gravité g,  $g_{i} = -g \delta_{3i}$ ,  $g = (g_{1}, g_{2}, g_{3}) = (0, 0, -g)$ ,  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ 

On note  $\rho$  (kg.m<sup>-3</sup>) la masse volumique et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker

### Convention de sommation d'Einstein

Lorsqu'un indice muet apparait deux fois dans un terme, il est sommé sur toutes les valeurs que peut prendre l'indice.

Par exemple, pour le produit scalaire de deux vecteurs a et b

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$$
 (indice muet *i* répété)

Quiz  $\delta_{ij}a_j =? \quad \delta_{ij}\delta_{ij} =?$ 

### ${\scriptstyle L}$ Notations ${}^{\neg}$

• Opérateurs differentiels (exprimés en coordonnées cartésiennes ici)

Gradient

$$\boldsymbol{b} = \nabla f \equiv \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \qquad b_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = \operatorname{div}(\boldsymbol{U}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

Rotationnel

$$\nabla \times \boldsymbol{U} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \boldsymbol{U}$$

# ∟ Notations ¬

# • Opérateurs differentiels (suite)

Expression du tenseur de gradient des vitesses abla U

$$\nabla \boldsymbol{U}\Big|_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{ij} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{array}\right)$$

Remarque : un tenseur est un objet géométrique, qui est indépendant du système de coordonnées choisi. Un tenseur du premier ordre est un vecteur,  $\nabla U$ (sans point!) est un tenseur du second ordre, comme le symbole de Kronecker parmi d'autres à venir.

Une référence essentiel pour les passionnés de mathématiques :

Aris, R., 1962, Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics, Dover Publications, Inc., New York.

# ∟ Notations ¬

### • Opérateurs differentiels (suite)

Théorème de la divergence : pour un domaine  $\mathcal{D}$  fermé par une surface  $\mathcal{S}$  de normale extérieure n, on a l'identité suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \overline{\overline{A}} \, d\nu = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{A}} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

où  $\overline{A}$  est un tenseur arbitraire. Ce résultat est utilisé régulièrement dans le cours, par exemple pages 42 et 251. À titre d'illustration, on a pour le gradient de pression,



$$\int_{\mathcal{D}} \nabla p \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (p\overline{\overline{I}}) \, d\nu = \int_{\mathcal{S}} p\overline{\overline{I}} \cdot n \, ds = \int_{\mathcal{S}} pn \, ds$$

Remarque finale sur les notations : le symbole · n'est jamais décoratif, mais indique un produit scalaire

# I Notations <sup>¬</sup>

### Opérateurs differentiels (suite)

On pourra très ponctuellement être amener à utiliser les identités vectorielles suivantes :

$$\nabla \cdot (\alpha a) = \alpha \nabla \cdot a + \nabla \alpha \cdot a$$
$$\nabla \times (\alpha a) = \nabla \alpha \times a + \alpha \nabla \times a$$
$$\int_{\mathcal{S}} a \times n \, ds = -\int_{\mathcal{D}} \nabla \times a \, dv$$

On a par exemple pour le calcul du couple associé à la force d'Archimède au transparent 48

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{x} \times (-p\mathbf{n}) \, ds = -\int_{\mathcal{S}} p\mathbf{x} \times \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{V}} \nabla \times (p\mathbf{x}) \, d\nu = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \nabla p \times \mathbf{x} \, d\nu}_{\text{en notant que } \nabla \times \mathbf{x} = 0}$$

identité vectorielle précédente

# ${\scriptstyle L}$ Notations ${}^{\neg}$

# Nomenclature

а	diffusivité thermique (voir le transparent 266)
Bi	nombre de Biot (voir le transparent 286)
$\mathcal{D}$	domaine de contrôle (matériel ou pas)
D/Dt	dérivée matérielle (voir le transparent 26)
$\overline{\overline{D}}$	tenseur des déformations (ou des gradients de vitesse)
е	énergie spécifique interne (voir le transparent 231)
g	vecteur gravité ( $m{g}=- abla\Psi$ )
$\Gamma_{\mathcal{C}}$	circulation (voir le transparent 175)
Gr	nombre de Grashof (voir le transparent 293)
h	enthalpie specifique (voir le transparent 238)
$ ilde{h}$	coefficient d'échange thermique (voir le transparent 282)
h	coefficient d'échange thermique local (voir le transparent 287)
${\cal H}$	énergie locale par unité de volume (voir le transparent 95)
k	conductivité thermique (voir le transparent 244)
$\overline{\overline{I}}$	tenseur identité
$\lambda$	seconde viscosité (voir le transparent 230)
т	masse d'une particule fluide (voir le transparent 22)
$M_a$	nombre de Mach (voir le transparent 34)
$q_{\infty}$	pression dynamique (voir le transparent 59)
μ	viscosité dynamique ou de cisaillement ( $\mu =  ho  u$ )
n	vecteur unitaire normal sortant pour la surface ${\cal S}$

# ∟ Notations ¬

# • Nomenclature (suite)

- Nu nombre de Nusselt (voir le transparent 283)
- Pe nombre de Péclet (voir les transparents 276
- Pr nombre de Prandtl (voir le transparent 268)
- $\Psi$  fonction potentielle du champ de gravité potential ( $\Psi = g \cdot x$ , voir le transparent 55)
- $\psi$  fonction de courant (voir le transparent 191)
- *q* vecteur flux de chaleur (voir le transparent 244)
- $\rho$  masse volumique
- *T* température
- t temps
- $\overline{\overline{\sigma}}$  tenseur des contraintes
- *T* vecteur contrainte
- $\overline{\overline{\tau}}$  tenseur des contraintes visqueuses (voir les transparents 67 et 230)
- *U* vecteur vitesse
- $U_d$  vitesse de débit (voir les transparents 37 et 125)
- $U_n$  échelle de vitesse pour la convection naturelle (voir le transparent 292)
- $U_{\mathcal{S}}$  vitesse de la surface de contrôle  $\mathcal{S}$  (voir le transparent 28)
- $\mathcal{V}$  volume d'une particule fluide (voir le transparent 22)
- *x* vecteur position
- $x_P$  point matériel (voir le transparent 20)

# ${\scriptstyle L}$ Notations ${}^{\neg}$

# • Nomenclature (suite)

- $\equiv$  signifie par définition
- $-_{f}$  indice pour désigner le fluide
- -*s* indice pour désigner le solide
- $-_w$  indice pour désigner la paroi

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux



### 1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux

#### Description du mouvement

Échelles microscopiques et macroscopiques Quantities macroscopiques Domaine matériel Particule fluide Lignes de courant et trajectoires Théorème de Reynolds Incompressibilité

#### Conservation de la masse

Formulation integrale et locale Reformulation du théorème de Reynolds

Forces s'exerçant sur un domaine fluide Forces surfaciques et volumiques Tenseur des contraintes Conservation de la quantité de mouvement

Formulation intégrale et locale

#### Hydrostatique

Équation d'équilibre Force de flottabilité

#### Modèle non visqueux

Équations d'Euler Équation de Bernoulli

#### À retenir

### ∟ Description du mouvement ¬

# • Échelles microscopiques et macroscopiques



Un écoulement de liquide ou de gaz peut ainsi être considéré comme un milieu continu, car toutes les échelles de longueurs d'intérêt sont très grandes par rapport à l'échelle microscopique *l* 

On peut caractériser le milieu continu en formant le rapport de ces deux échelles de longueur, dénommé nombre de Knudsen et noté Kn, Kn =  $l/L \ll 1$ 

> Nombre d'Avogadro  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$  molécules dans 1 mole Conditions standards  $T_0 = 0^\circ$  C and  $P_0 = 101325$  Pa For une molécule diatomique,  $l = \sqrt{\gamma \pi/2} (\nu/c)$

# • Quantités macroscopiques

On considère un petit volume élémentaire de fluide  $\mathcal{V}$  de longueur d telle que  $l \ll d \ll L$ . Les propriétés macroscopiques du fluide sont déterminées en prenant la moyenne de ces propriétés sur toutes les molécules contenues dans ce volume  $\mathcal{V}$ . On a ainsi pour la masse volumique  $\rho$  et la vitesse U,

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}} \quad (\text{kg/m}^3) \qquad \qquad \boldsymbol{U} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \boldsymbol{u}_{\alpha}}{m} \quad (\text{m.s}^{-1})$$

où  $m_{\alpha}$  et  $\boldsymbol{u}_{\alpha}$  sont la masse et la vitesse de la molécule  $\alpha$  dans le volume  $\mathcal{V}$  $m = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$  est la masse totale du volume  $\mathcal{V}$ 

Ces variables (macroscopiques)  $\rho$  et U sont bien définies car le nombre de molécules est très grand : la description macroscopique utilisé en mécanique des fluides repose sur cette hypothèse.

Ces variables sont des fonctions du temps t et de l'espace x, par exemple U = U(x,t). L'échelle de longueur macroscopique L, échelle de longueur caractéristique de l'écoulement, est associée aux variations spatiales de ces quantités.

# Domaine matériel

On décrit l'écoulement par sa vitesse U(x,t), sa masse volumique  $\rho(x,t)$  et une autre quantité  $\varphi(x,t)$  d'intérêt (la température ou l'énergie par exemple)

Un point matériel x(t) est défini comme un point se déplaçant à la vitesse locale du fluide, c'est-à-dire que l'on a toujours  $dx/dt \equiv U$ 

Un domaine matériel  $\mathcal{D}$  est un ensemble de points matériels, qui se déplace donc à la vitesse de l'écoulement par définition.



Écoulement stationnaire dans une contraction : on marque régulièrement l'écoulement avec des microbulles d'hydrogène utilisées comme traceurs pour visualiser la déformation lors de la contraction (Schraub *et al.,* 1965, électrolyse avec émission pulsée)

### Domaine matériel (suite)



Considérons un domaine quelconque  $\mathcal{D}$  fermé par la surface  $\mathcal{S}$ , et se déplaçant à la vitesse (arbitraire)  $U_{\mathcal{S}}$ 

 $U_{\mathcal{S}}$  est la vitesse locale des points appartenant à la surface  $\mathcal{S}$ 

 $\mathcal{D}$  est un domaine matériel seulement si  $U_{\mathcal{S}} = U$ , la vitesse locale de l'écoulement

n est le vecteur unitaire normal à la surface et pointant vers l'extérieur depuis la surface  $\mathcal{S}$ 

# Particule fluide

Une particule fluide est le domaine matériel élémentaire (au sens de petit) que l'on va toujours utiliser pour la discrétisation de l'écoulement à l'échelle macroscopique L



volume  $\mathcal{V}$ masse m

La taille d d'une particule fluide est par définition petite par comparaison avec l'échelle de longueur L, mais contient néanmoins un grand nombre de molécules

Une particle fluide est classiquement associée avec un point matériel  $x_P$ , et ses propriétés sont homogènes (masse volumique, vitesse, pression, température, ...) de sorte que  $\rho = \rho(x_P, t)$  par exemple

Un domaine matériel  ${\mathcal D}$  est par définition un ensemble de particules fluides

# • Particule fluide (suite)

La masse M d'un domaine  $\mathcal{D}$  est définie par l'intégrale de la masse volumique,

$$M = \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\nu$$

La masse d'une particule fluide est simplement  $m = \rho(\mathbf{x}_P, t)\mathcal{V}$ puisque la masse volumique est alors constante

### • Lignes de courant et trajectoires

Les lignes de courant d'un écoulement sont des courbes dont la tangente en chaque point est la vitesse locale de l'écoulement pour un temps fixé t. Ces courbes sont déterminées par la condition  $U \times dx = 0$ .

On utilise ici une description eulérienne de l'écoulement, dans laquelle x et t sont des variables indépendantes.



Écoulement autour d'un profil NACA 64A015 (tunnel hydraulique,  $Re_c = 7 \times 10^3$ , sans incidence). L'écoulement est laminaire, et reste attaché au profil (on distingue cependant une petite séparation près du bord de fuite)

Werlé (1974) dans Van Dyke (1982, Fig. 23)

### • Lignes de courant et trajectoires (suite)

Dans le cadre d'une description lagrangienne, on suit le déplacement d'une particule fluide dont on connait la position initiale a : a et t sont des variables indépendantes, mais pas la position x = x(a, t)

La trajectoire de cette particule fluide est obtenue en résolvant dx/dt = U(x,t)avec comme condition initiale x = a à t = 0



Il y a un cas particulièrement intéressant à considérer lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire que U = U(x). Les particules fluides suivent alors les lignes de courants, qui coïncident avec des trajectoires (cf. image précédente)

### ∟ Description du mouvement ¬

### • Dérivée matérielle

Comment définir la dérivée d'une quantité  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$  dans un écoulement?



(attention à la sommation implicite sur i)

On choisit alors de suivre un point matériel x = x(t), vérifiant par définition dx/dt = U, et on introduit pour ce choix la dérivée matérielle D/Dt

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{U} \implies \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\varphi$$
$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1}$$

# • Dérivée matérielle (suite)

La variation temporelle d'une variable quelconque de l'écoulement  $\varphi$  (température, pression, vitesse, ...) le long de l'écoulement est donnée par



La notation D/Dt pour la dérivée matérielle, appelée encore dérivée convective, a été introduite par Stokes (1845)

Sir George Gabriel Stokes (1819-1903)



### • Théorème de transport de Reynolds



On considère un domaine  $\mathcal{D}(t)$  fermé par la surface  $\mathcal{S}(t)$ se déplaçant arbitrairement à la vitesse  $U_{\mathcal{S}}$ 

*n* est la normale extérieure à la surface de contrôle SQue peut-on dire de la variation d'une quantité  $\varphi$  dans le domaine D?

On introduit l'intégrale de la quantité d'intérêt  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  sur tout le domaine  $\mathcal{D}(t)$ 

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(\boldsymbol{x}, t) \, dv$$

Le théorème de Reynolds permet d'écrire que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\nu}_{\text{variation de } \varphi} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}(t)} \varphi \mathbf{U}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\text{mouvement de } \mathcal{S}}$$

$$egin{aligned} m{U}_{\mathcal{S}} &= m{0} & ext{domaine fixe} \ m{U}_{\mathcal{S}} &= m{U} & ext{domaine matériel} \end{aligned}$$

(2)

### ∟ Description du mouvement ¬

### • Théorème de transport de Reynolds (suite)

Pour mémoire, règle de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\xi,t)d\xi = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}d\xi + \frac{db}{dt}f(b,t) - \frac{da}{dt}f(a,t)$$



Le théorème de transport de Reynolds est la généralisation en 3-D de la règle de Leibniz pour différentier une intégrale avec des bornes variables.

On trouvera une preuve de ce théorème dans les références mentionnées en introduction du cours

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)

# Condition d'incompressibilité

On peut commencer par appliquer le théorème de Reynolds à un domaine matériel ( $U_S = U$ ) avec simplement  $\varphi \equiv 1$ 

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \varphi \, d\nu}_{\text{volume du}} = 0 + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\nu \qquad \text{(avec le th. de la divergence)}$$

Pour le cas d'une particule fluide de volume  $\mathcal{V}$ ,

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\boldsymbol{v} = (\nabla \cdot \boldsymbol{U}) \, \mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{U}$$

 $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} < 0 & \text{contraction} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} > 0 & \text{expansion} \end{cases} \quad \text{de la particule fluide}$ 

Le taux de variation du volume d'une particule fluide est donc donné par  $\nabla \cdot U$ (Euler, 1755) et conduit à la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot U = 0$  $\rightarrow$  le volume d'une particule fluide reste constant durant son mouvement

### Principes fondamentaux

- conservation de la masse
- conservation de la quantité de mouvement (2e loi de Newton)
- conservation de l'énergie, qui sera introduit au chapitre 7 (dans le cadre des écoulements compressibles)

### ∟ Conservation de la masse ¬

### • Pour un domaine matériel ${\mathcal D}$

$$M = \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\nu \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\nu = 0$$

 $(\mathcal{D} \text{ contient toujours})$  les mêmes particules fluides)

On applique alors le théorème de Reynolds (2) avec  $\varphi = \rho$  et  $U_S = U$ 

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) \right\} \, d\nu$$

En passant à la limite pour le cas d'une particule fluide,  $\mathcal{D} \to \mathcal{V}$ , une expression locale de la conservation de la masse est obtenue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0 \tag{3}$$

L'éq. (3) peut également s'écrire sous forme indicielle  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$ 

### ∟ Conservation de la masse ¬

### Formulations alternatives

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$$
(4)

Pour un écoulement incompressible,  $\nabla \cdot U = 0$ . La conservation de la masse impose alors simplement que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Autrement dit, la masse volumique  $\rho$  d'une particule fluide (c'est-à-dire en suivant l'écoulement) reste constante. On peut retrouver ce résultat en observant que nous avons pour une particule fluide,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{cst}}{\text{cst}}$$
 (conservation masse)  
(incompressibilité)

### • Condition d'incompressibilité revisitée

Nous avons vu avec l'éq. (4) précédente que la conservation de la masse peut s'écrire comme,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

On montrera un peu plus tard dans le cours (au Chap. 7) que

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim M_a^2$$
  $M_a \equiv \frac{U}{c}$  nombre de Mach

où *c* est la vitesse du son. La condition d'incompressiblité est donc satisfaite pour des écoulements à faible nombre de Mach, on retient  $M_a \le 0.3$  en pratique

### ∟ Conservation de la masse ¬

# Reformulation du théorème de Reynolds en prenant en compte la conservation de la masse

On écrit le théorème de Reynolds pour la variable  $\varphi = \rho \chi$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  quelconque. En utilisant l'éq. (2)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \chi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial(\rho \chi)}{\partial t} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \rho \chi U_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

On peut réorganiser le premier terme de la dernière expression de la manière suivante,

$$\frac{\partial(\rho\chi)}{\partial t} = \rho \frac{\partial\chi}{\partial t} + \chi \frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi \nabla \cdot (\rho U) = \rho \frac{\partial\chi}{\partial t} + \rho U \cdot \nabla\chi - \nabla \cdot (\rho\chi U)$$
$$= \rho D\chi/Dt$$

Variante du théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \chi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \rho \chi (\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} \, ds \tag{5}$$

### ∟ Conservation de la masse ¬

### Reformulation du théorème de Reynolds (suite)

Pour un domaine matériel,  $U_S = U$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \chi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\nu$$

Pour un domaine fixe,  $U_S = 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \chi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\nu - \int_{\mathcal{S}} \rho \chi \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

Dans l'éq. (5),  $U - U_S$  représente la vitesse relative du fluide traversant la surface de contrôle S pour un observateur lié au domaine D
#### ∟ Conservation de la masse ¬

#### • Un premier résultat célèbre!

Conservation de la masse pour un écoulement incompressible en conduit



Le débit volumique  $Q_v$  (m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>) est donc constant et la vitesse de débit  $U_d$  diminue lorsque l'aire de la section droite du conduit augmente  $S_2$  (Leonardo da Vinci, 1502)

$$Q_v = \int_{S_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} = \operatorname{cst} \qquad U_d = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} \qquad (\forall S_2)$$

#### ∟ Conservation de la masse ¬

#### • Leonardo da Vinci (1452-1519) et la mécanique des fluides

"Water that flows through a pipe which is empty and fills first the whole of its flat part, will fill up all the other parts, straight and oblique, and moving with equal speed."

An interesting analogy related to the conservation of volume, which Leonardo applied between different natural world systems, is that of the flow through branches of a tree and through rivers or closed conduits.

"each year when the branches of the plants have exhausted their growth, they comprise together as much as the size of their trunk, and in each degree of their [branch] growth, you will find the size of said trunk as in .i.K. .g.h. .e.f. .CD. .a.b. All of them will be the same the tree not being damaged; otherwise the rule does not fail."

From Marusic & Broomhall, 2021, Leonardo da Vinci and Fluid Mechanics, Ann. Rev. Fluid Mech., **53** 





#### Introduction

La force totale F qui s'applique à un domaine fluide D peut être décomposée en une contribution surfacique  $F_s$  et une contribution volumique  $F_v$ ,  $F = F_s + F_v$ 

 $F_v$  représente les forces à distance qui s'exercent en volume, la force électromagnétique pour les fluides conducteurs et la force de gravité. Pour la force de gravité, on a

$$\boldsymbol{F}_{v} = \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g} \, dv$$

Les forces de surface  $F_s$  sont associées aux interactions microscopiques qui s'exercent au travers de la surface de contrôle S



En introduisant T(x, t, n) la force par unité de surface, *i.e.* le vecteur contrainte (en Pascal, Pa)

$$F_s = \int_{\mathcal{S}} T \, ds$$

# • Force surfacique



 $dF_s = T(x, t, n) ds$ est la force exercée par le milieu A sur le milieu Bau travers de ds

Le principe d'action-reaction (3e loi de Newton) impose que T(x, t, -n) = -T(x, t, n)

Lorsque seule la pression p(x,t) contribue à la force surfacique, pour un fluide au repos ou pour un écoulement non visqueux, T = -pn

$$F_s = -\int_{\mathcal{S}} p n \, ds$$
 (avec la pression  $p$  en Pa)

La force due à la pression est isotropique, *i.e.* sans direction privilégiée



Tenseur des contraintes



Le théorème de Cauchy (démonstration en annexe) permet d'écrire le vecteur contrainte sous la forme  $T(x,t,n) = \overline{\sigma} \cdot n$ , c'est-à-dire avec une dépendance linéaire explicite entre T et la normale n de ds. La composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes représente la  $i^{e}$  composante de T dans la direction j, c'est-à-dire  $T_i(e_j)$ 

Le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{\sigma}}$  est symétrique,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (équilibre des moments)

### • Tenseur des contraintes (suite)



Auguste (Louis) Cauchy (1789-1857)

Expression de la force surfacique  $F_s$ 

$$F_{s} = \int_{\mathcal{S}} T \, ds = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\sigma}} \cdot n \, ds = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} \, dv$$

th. de la divergence

Lorsque la pression seule contribue à  $F_s$  (écoulement non visqueux), on a simplement T = -pn, n est donc vecteur propre de  $\overline{\overline{\sigma}}$  et  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ 

$$\boldsymbol{F}_{s} = -\int_{\mathcal{S}} p\boldsymbol{n} \, ds = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \left(\begin{array}{ccc} -p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p \end{array}\right)$$

 $\boldsymbol{T}_1 = -p\boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{T}_2 = -p\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{T}_3 = -p\boldsymbol{e}_3$ 

# • Équation du mouvement

Nous avons maintenant tous les éléments pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide de masse  $\rho V$ 

$$\rho \mathcal{V} \frac{D \boldsymbol{U}}{D t} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g} \, d\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{F}_{s} + \boldsymbol{F}_{v} = \boldsymbol{F}}$$

Accélération (dérivée matérielle de  $\boldsymbol{U}$ )  $\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}\Big|_{\boldsymbol{i}} = \frac{DU_{\boldsymbol{i}}}{Dt} = \frac{\partial U_{\boldsymbol{i}}}{\partial t} + U_{\underline{j}}\frac{\partial U_{\boldsymbol{i}}}{\partial x_{\underline{j}}}$ 

$$\int_{S} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D} \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} \, dv = \mathcal{V} \, \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}$$
$$\int_{D} \rho \mathbf{g} \, dv = \mathcal{V} \, \rho \mathbf{g}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D \boldsymbol{U}}{D t} = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g}$$

(6)

∟ Conservation de la quantité de mouvement ¬

#### • Version intégrale

En utilisant le théorème de Reynolds (5), la formulation locale précédente (6) peut également s'écrire comme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U} \, d\nu = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U} (\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} \, ds \tag{7}$$

avec toujours  $U_S = 0$  pour un domaine fixe et  $U_S = U$  pour un domaine matériel

## • On s'intéresse pour finir à deux cas particuliers

L'hydrostatique et le principe d'Archimède, avec l'équilibre d'un corps flottant ou submergé dans le cadre de la statique des fluides (U = 0). La pression est alors la seule contribution pour le tenseur des contraintes

#### Le modèle non visqueux

Tout fluide possède une viscosité, mais les effets visqueux peuvent être négligés dans un certain nombre de cas (discuté plus tard au chapitre 4). On peut alors introduire un modèle non visqueux, dans lequel la viscosité est nulle (pas de frottement). La seule force surfacique qui s'exerce sur une particule fluide est de nouveau due à la pression.

En hydrostatique ou pour un modèle d'écoulement non visqueux,  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ 

# • Équilibre hydrostatique

On considère un corps immergé dans un fluide homogène ( $\rho = \operatorname{cst}$ ) et au repos (U = 0), avec donc  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ 

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement (6) se réduit ici à  $-\nabla p + \rho g = 0$ 

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \implies p = p(x_3)$$

et par intégration, on obtient  $p = p_0 - \rho g x_3$ (attention  $x_3 < 0$  ici)

Avec de l'eau,  $\rho\simeq 10^3$  kg.m^-^3, la pression augmente dont d'environ une atmosphère tous les 10 m de profondeur



### • Force d'Archimède

Force élémentaire  $dF_A$  exercée par le fluide sur le corps (n pointant ici dans le domaine fluide),

$$d\mathbf{F}_{A} = \mathbf{T} \ ds = \overline{\mathbf{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \ ds = -p\overline{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{n} \ ds$$
$$\mathbf{F}_{A} = \int_{\mathcal{S}} -p\overline{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{n} \ ds = \int_{\mathcal{D}} -\nabla p \ d\nu = -\int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{g} \ d\nu = -\mathbf{g} \int_{\mathcal{D}} \rho \ d\nu = -\mathbf{g} M_{f}$$
(cf. transparent 10)

Principe d'Archimède : la force de flottabilité ascendante  $F_A$  exercée sur un corps immergé dans un fluide est égale au poids du fluide  $M_f$  déplacé par le corps

# Force d'Archimède (suite)

Quel est le point d'application de cette force d'Archimède  $F_A$ ?

Le couple C qui s'exerce sur le corps est donné par

$$C = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{x} \times (-p\mathbf{n}) \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \nabla p \times \mathbf{x} \, d\mathcal{V} = \mathbf{g} \times \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{x} \, d\mathcal{V} \qquad \text{(voir le transparent 11)} pour la démonstration)}$$

En choisissant le centre de masse  $x_A$  du fluide déplacé (point fictif), défini comme  $M_f x_A \equiv \int_{\mathcal{D}} \rho x \, dv$ 

comme point de référence pour calculer le couple C, c'est-à-dire que  $x \rightarrow x - x_A$ , on a

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \, d\nu = 0 \qquad \text{et donc } \mathbf{C} = \mathbf{0} \text{ (équilibre)}$$

La force de flottabilité  $F_A$  s'applique donc au centre de masse  $x_A$  du fluide déplacé

### • Force d'Archimède (suite)

Stabilité d'un sous-marin complètement immergé



Le centre de gravité  $x_G \bullet (F = M_s g)$  du corps doit être localisé en dessous du centre de masse  $x_A \bullet (F_A$  force d'Archimède)

#### Partie visible d'un iceberg

eau salée,  $\rho_s \simeq 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ eau douce glacée,  $\rho_f \simeq 920 \text{ kg.m}^{-3}$ 

 $\mathcal{V}$  volume total et  $\mathcal{V}_i$  volume immergé de l'iceberg



$$\rho_f g \mathcal{V} = \rho_s g \mathcal{V}_i \implies \frac{\mathcal{V}_i}{\mathcal{V}} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \simeq 0.9$$

Voir Pollack, 2019, *Phys. Today*, **72**(12), 70-71 (sur moodle) pour poursuivre la discussion sur la stabilité ...



copyright Erwan AMICE/LEMAR/CNRS Photothèque

#### Dessinez votre propre iceberg ici!

## • Archimède (Grec, Syracuse en Sicile, 287-212 av. J.-C.)

Archimède est considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps et le plus grand mathématicien de l'Antiquité





Médaille Fields

Archimède montre que le volume de la boule est égal aux deux tiers du volume du cylindre de révolution circonscrit à la sphère qui la borde.

# • Vis d'Archimède (vis sans fin)



(Électricité de France / Julien Goldstein)

Centrale nucléaire de Flamanville 3 (EPR, 3e génération de réacteur nucléaire à eau pressurisée). Station de pompage d'eau de mer : les deux vis d'Archimède (15 m de longueur, 1.5 m de diamètre, 6 tonnes;  $Q_v = 1500 \text{ m}^3/\text{h}$ )

https://www.edf.fr/centrale-nucleaire-flamanville3

# • Équations d'Euler

Un écoulement non visqueux est un modèle d'écoulement pour lequel la viscosité est nulle : il n'y a ni frottement, ni quelconque effet visqueux. La seule force surfacique à considérer est due à la pression, et le tenseur des contraintes est simplement  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ 

L'écoulement (incompressible on rappelle ici dans cette première partie du cours) est alors gouvernée par les équations Euler (1757)

$$\begin{pmatrix} D\boldsymbol{U}\\ D\boldsymbol{t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$
(8)

Dans un modèle non visqueux, l'écoulement possède une composante tangentielle de vitesse non nulle à la paroi (glissement), en observant que la condition aux limites d'imperméabilité à la paroi s'écrit  $U \cdot n = 0$ 

Pour une interface entre deux milieux A et B,  $U_A \cdot n = U_B \cdot n$ 

#### ∟ Modèle non visqueux ¬

### • Leonhard Euler (1707-1783)



Leonhard Euler est, avec Isaac Newton (1643-1727), le fondateur de la mécanique analytique (résolution du problème des deux corps en mécanique céleste par exemple), et de la dynamique des fluides, en utilisant le calcul différentiel introduit par Gottfried Leibniz (1646-1716)



# • Équation de Bernoulli

Il est déjà possible d'établir un des résultats les plus célèbres de la mécanique des fluides, simple à appliquer (lorsque les hypothèses sont vérifiées). Pour cela, nous allons d'abord écrire la conservation de l'énergie cinétique à partir des équations d'Euler (8)

$$\boldsymbol{U} \cdot \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \boldsymbol{U} \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}\right)$$

Pour des forces conservatives, comme la gravité, il est toujours possible de trouver une fonction potentielle pour exprimer cette force<sup>†</sup>

$$g = -\nabla \Psi(\mathbf{x}) \qquad g_i = -g\delta_{3i} \quad \Psi = -g \cdot \mathbf{x} = gx_3$$
$$U \cdot g = -U \cdot \nabla \Psi$$



<sup>+</sup> l'existence du potentiel  $\Psi$ requière que  $\nabla \times g = 0$ 

La conservation de l'énergie cinétique peut alors se mettre sous la forme

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2} \right) + \boldsymbol{U} \cdot \nabla p + \rho \boldsymbol{U} \cdot \nabla \Psi = 0$$

# • Équation de Bernoulli (suite)

Avec les hypothèses suivantes, pour un écoulement

- **1.** non visqueux  $(\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}})$
- 2. stationnaire  $(\partial_t = 0)$
- **3.** incompressible  $(\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \text{ and } \rho = \text{cst})$
- 4. soumis à des forces volumiques conservatives  $(g = -\nabla \Psi \text{ ici})$

la conservation de l'énergie cinétique se réduit à  $U \cdot \nabla (\rho U^2/2 + p + \rho \Psi) = 0$ , conduisant à l'équation de Bernoulli

$$\mathcal{H} \equiv p + \rho \Psi + \rho \frac{U^2}{2} = \text{cst}$$
 le long d'une ligne de courant (9)

 $\mathcal{H}$  prend des valeurs différentes pour chaque ligne de courant. Par ailleurs, pour un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires,  $\mathcal{H}$ est donc constant pour une particule fluide. L'éq. (9) traduit la conservation de l'énergie mécanique (le travail des forces est équilibré par la variation de l'énergie cinétique,  $\mathcal{H} \sim J.m^{-3}$  énergie par unité de volume)

### ∟ Modèle non visqueux ¬







Daniel Bernoulli (1700-1782)



#### Hydrodynamica (1738)

(the mot hydrodynamique a été introduit par Bernoulli pour fusionner les deux domaines de l'hydrostatique et de l'hydraulique)

# ∟ Modèle non visqueux ¬

### Tube de Pitot

Henri Pitot (1732) a développé cet instrument (tube de Pitot combiné à un manomètre) pour pouvoir mesurer la vitesse de la Seine à Paris

DES SCIENCES. 363

DESCRIPTION

D'une Machine pour mefurer la vîteffe des Eaux courantes, & le fillage des Vaiffeaux.

Par М. Рітот.

Leurs différentes pentes, la chûte de leurs caux, les contours & coudes de leurs bords, les qualités de leurs lits, font les principales caufés de teurs chângePlusieurs tubes de Pitot sont utilisés sur les avions pour mesurer sa vitesse (ainsi que l'angle d'incidence avec des sondes similaires)



(Airbus A350 XWB)

• Tube de Pitot (suite)



Pour un écoulement incompressible, la différence de pression mesurée par le capteur est (application de l'équation de Bernoulli  $p + \rho U^2/2 = \text{cst}$ )

à gauche, pression totale 
$$p_0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 U_1^2 \implies U_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho_1}}$$
  
à droite, pression statique  $p_1$ 

Le terme  $q_1 = \frac{1}{2}\rho_1 U_1^2$  désigne la pression dynamique. La pression totale  $p_0$  est la somme de la pression statique et de la pression dynamique : valide seulement en incompressible (une formulation compressible sera donnée plus loin dans le cours, voir transparent 253)

### ∟ Modèle non visqueux ¬

### • Peigne de tubes de Pitot



Formula 1 pré-saison de test en 2020, circuit de Barcelona, Williams FW43 pilotée par George Russell



(source inconnue)

y-250 vortex 🎬

Les peignes de Pitot permettent de mesurer la distribution de la pression totale (dans un plan ou le long d'une ligne par exemple)

# ∟ À retenir ¬

• Concept de particule fluide, de domaine matériel et de dérivée matérielle

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + U_{\boldsymbol{i}} \frac{\partial}{\partial x_{\boldsymbol{i}}}$$

- Écoulement incompressible  $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$  (vérifié lorsque  $M_a \leq 0.3$ )
- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0$$

• Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D \boldsymbol{U}}{D t} = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$$

• Écoulement non visqueux : T = -pn  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ 

# ∟ À retenir (suite) ¬

 Formulations intégrales pour un domaine de contrôle quelconque avec le théorème de Reynolds, éqs (2), (5) & (7)

Théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \varphi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \varphi \mathbf{U}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \, ds$$
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \chi \, d\nu = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\nu + \int_{\mathcal{S}} \rho \chi (\mathbf{U}_{\mathcal{S}} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, ds$$

 Modèle non visqueux : équilibre hydrostatique, équations d'Euler (8), équation de Bernoulli (9)

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 2 - Fluide visqueux newtonien



#### 2 - Fluide visqueux newtonien

#### Fluide visqueux

Loi de comportement newtonienne Mouvement d'une particule fluide Écoulement de Couette plan Forces de portance et de traînée, finesse

#### Équations de la dynamique des fluides

Équations de Navier-Stokes Conditions aux limites

#### Bilan de l'énergie cinétique

Forme intégrale Dissipation visqueuse Plane channel flow

#### Energétique d'un système à flux continu

Bilan d'énergie mécanique Perte de charge

À retenir

#### Loi de comportement newtonienne

On rappelle l'équation de conservation de la quantité de mouvement (6) introduite au chapitre 1,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g}$$

où  $\overline{\overline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes (les forces internes dans le fluide)

Pour un fluide au repos (hydrostatique) ou pour un écoulement non visqueux, on a seulement la contribution de la pression,  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$ , mais plus généralement, on a une relation de la forme  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$  où  $\overline{\overline{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses

$$\rho \frac{D \boldsymbol{U}}{D t} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \begin{cases} -\nabla p & \text{force de pression} \\ & \text{force visqueuse exercée} \\ \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} & \text{sur la particule fluide} \end{cases}$$

$$i^{e} \text{ composante du vecteur } \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}\Big|_{i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{j}} = -\frac{\partial (p\delta_{ij})}{\partial x_{j}} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_{j}} = -\frac{\partial p}{\partial x_{i}} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_{j}} \quad (\text{implicite sommation sur } j)$$

#### • Loi de comportement newtonienne

C'est la loi de comportement rhéologique utilisée pour les fluides usuels (gaz, liquides), et qui sera utilisée dans tout ce cours. Pour un écoulement incompressible (expression plus complexe en compressible, voir le transparent 230),

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}}$$

 $\mu$  viscosité dynamique ou de cisaillement, propriété intrinsèque du fluide

$$\overline{\overline{D}}$$
 tenseur des déformations  $D_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ 

Cette relation traduit le lien local, instantané et linéaire entre le tenseur visqueux  $\overline{\overline{\tau}}$  et le tenseur des déformations  $\overline{\overline{D}}$ 

Le tenseur des déformations  $\overline{D}$  est directement associé à la déformation des particules fluides

### Mouvement d'une particule fluide

En effectuant un développement limité dans le voisinage de la particule fluide en  $x_P$  (pour un temps t donné)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{P} & \qquad U_{i}(\mathbf{x}) = U_{i}(\mathbf{x}_{P}) + \frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} \Big|_{\mathbf{x}_{P}} (x_{j} - x_{Pj}) + \cdots \\ \frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial U_{j}}{\partial x_{i}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} - \frac{\partial U_{j}}{\partial x_{i}} \right) \\ \underbrace{D_{ij}} & \qquad D_{ij} \end{aligned} \qquad \begin{cases} \overline{\mathbf{D}} \text{ partie symétrique de } \nabla \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{\Omega}} \text{ partie antisymétrique de } \nabla \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{\Omega}} \text{ partie antisymétrique de } \nabla \mathbf{U} \end{cases} \end{aligned}$$

 $\Omega_{ij}$  représente la rotation solide (en bloc) de la particule fluide

#### Mouvement d'une particule fluide (suite)

$$U(x) \simeq \underbrace{U(x_P)}_{\text{translation}} + \underbrace{\overline{\overline{D}} \cdot (x - x_P)}_{\text{déformation}} + \underbrace{\overline{\overline{\Omega}} \cdot (x - x_P)}_{\text{rotation à } \Omega} + \cdots$$

Ni la translation ni la rotation ne déforment la particule fluide (pas de frottement interne) : les déformations sont seulement induites au travers du bien nommé tenseur des déformations  $\overline{\overline{D}}$ 

Illustration avec la déformation d'une particule fluide dans un écoulement cisaillé 2-D :  $U_1 = Sx_2$  et  $U_2 = U_3 = 0$  (écoulement incompressible puisque  $\nabla \cdot U = 0$ )

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \overline{D}} + \underbrace{\frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \overline{\Omega}} \qquad \Omega = \frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mouvement d'une particule fluide (suite)





### • Quelques lois rhéologiques pour un fluide



(1) fluide parfait,  $\tau_{12} = 0$ modèle de fluide non visqueux  $\mu = 0$ 

(2) fluide newtonien,  $\tau_{12} = \mu dU_1/dx_2$  $\mu$  seulement fonction de la température

(3) fluide épaississant,  $\tau_{12} = \mu (dU_1/dx_2)^n$ , n < 1viscosité apparente  $\mu (dU_1/dx_2)^{n-1}$ mélange eau-maïzena par exemple

(4) fluide rhéofluidifiant,  $\tau_{12} = \mu (dU_1/dx_2)^n$ , n > 1, viscosité apparente  $\mu (dU_1/dx_2)^{n-1}$ sang, peinture, ketchup par exemple

(5) fluide de Bingham (seuil  $\tau_0$ )  $\tau_{12} - \tau_0 = \mu dU_1/dx_2$  si  $\tau_{12} > \tau_0$ fluides avec particules (polymères)





 $U_e$  est la vitesse constante imposée par le plan supérieur

 $U = (U_1(x_2), 0, 0)$  $U_1 = U_e x_2 / h$  (montré plus tard)

$$\nabla \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/(2h) & 0 \\ U_e/(2h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ 

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & \mu U_e/h & 0 \\ \mu U_e/h & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

La contrainte de cisaillement est ici constante,  $\tau_{12} = \mu \frac{U_e}{h} = \text{cst}$
## • Écoulement de Couette plan (suite)

Quelle est la force dF = T ds exercée par le plan supérieur sur le fluide? En introduisant le vecteur normal pointant vers l'extérieur du volume de contrôle n = (0, 1, 0)

$$\boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} \Big|_{x_2 = h} = \begin{pmatrix} -p & \mu U_e / h & 0 \\ \mu U_e / h & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu U_e / h \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\tau_w = \tau_{12}|_{\text{wall}} = \frac{\mu U_e}{h}$$

contrainte (de cisaillement) pariétale exercée par le plan mobile sur le fluide

## • Écoulement de Couette plan (suite)

Par curiosité, qu'en est-il de rotation de la particule fluide?

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/(2h) & 0 \\ -U_e/(2h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_e/(2h) \end{pmatrix}$$
(sens horaire)



Maurice Couette (1858-1943) (*Rhéologie*, **8**, 2005)

• Forces de portance et de traînée

Illustration avec un profil cambré



La force aérodynamique résultante F exercée par l'écoulement sur le profil est classiquement décomposée en une force de portance  $F_L$ , définie comme la composante perpendiculaire à l'écoulement incident  $U_{\infty}$ , et une force de traînée  $F_D$  qui s'oppose au déplacement du profil.

 $T_R$  est la force de poussée induite par le système de propulsion, et mg la force de gravité

#### • Finesse : ratio entre portance et traînée $F_L/F_D$



### • Solar Impulse 2



#### Planeur stratospherique : projet Perlan

planeur de 26 m d'envergure, de 10 m de long,  $U_f \le 194$  m.s<sup>-1</sup> 76 124 ft (23.2 km) le 02-09-2018, objectif ultime de 90 000 ft (27000 m)



Button, K., Aerospace America, nov. 2019, 14-17 (Perlan 2 versus Airbus A350 XWB en fond pour l'échelle!)

#### • Interprétation de la finesse $F_L/F_D$

Pour un avion volant à vitesse constante,  $0 = T_R + F_L + F_D + mg$ 



$$\int -F_D + mg\sin\alpha + T_R = 0$$
$$\int F_L - mg\cos\alpha = 0$$

Avec les moteurs éteints  $(T_R = 0)$ ,  $\frac{F_L}{F_D} = \frac{1}{\tan \alpha}$ 



Avion moderne en condition de croisière  $h \simeq 13150$  m,  $F_L/F_D \simeq 20$ 

angle de glissement  $\alpha = 2.86^{\circ}$ distance parcourue  $L \simeq 263$  km

 On rappelle ci-dessous les équations du mouvement pour un écoulement incompressible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\\\ \rho \frac{D \boldsymbol{U}}{D t} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} + \rho \boldsymbol{g} \\\\ \overline{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \overline{\boldsymbol{D}} \end{cases}$$

conservation de la masse (en incompressible)

conservation de la quantité de mouvement

loi de comportement pour les fluides newtoniens

Nous allons conserver la condition d'incompressibilité jusqu'au chapitre 7, et supposer également que la masse volumique reste constante, pour permettre un découplage formel entre les équations de la dynamique des fluides, et l'équation sur l'énergie.

La masse volumique en incompressible doit vérifier  $D\rho/Dt = 0$ . Il suffit donc d'avoir à un instant donné  $\rho$  homogène, pour satisfaire  $\rho(x,t) = \text{cst.}$  Pouvez vous néanmoins citer un contre-exemple en incompressible?

## • Équations de Navier-Stokes

Nous connaissons l'expression du tenseur visqueux en incompressible  $\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{D}$ et on peut calculer sa divergence, terme qui apparaît dans la conservation de la quantité de mouvement  $\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} = \mu \nabla^2 U$ 

On obtient ainsi les équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire les équations de la dynamique des fluides pour un écoulement incompressible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\ \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} + \boldsymbol{g} \end{cases}$$
(10)

où  $\nu \equiv \mu/\rho$  est la viscosité cinématique en m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>

Pour de l'air,  $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}$ Pour de l'eau,  $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}$ 

(valeurs à la pression atmosphérique pour une température de 20°C)

Navier & Stokes

# MÉMOIRE

#### SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

#### PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

740

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$\begin{split} \mathbf{P} & \stackrel{d}{\to} \frac{dp}{dx} = \rho \Big( \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \Big) - \epsilon \Big( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \Big), \\ \mathbf{Q} & \stackrel{dp}{\to} \frac{dp}{dy} = \rho \Big( \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \Big) - \epsilon \Big( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \Big), \\ \mathbf{R} & - \frac{dp}{dz} = \rho \Big( \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \Big) - \epsilon \Big( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \Big). \end{split}$$

Navier, C.L.M.H., 1823, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides (lu à l'Académie le 18 mars 1822), *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France*, 389-440 XXII. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. By G. G. STOKES, M.A., Fellow of Pembroke College.

• The same equations have also been obtained by Navier | T. v1.) but his principles differ from mine still more than do in the case of an incompressible fluid, (Mém. de l'Institut, Poisson's.

$$\rho\left(\frac{Du}{Dt}-X\right)+\frac{dp}{dx}-\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dx}\right)=0, \quad \& c....(12)$$

Stokes, G. G., 1845, On the theory of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, 287-305



Navier (1785-1836)



Stokes (1819-1903)

#### Conditions aux limites

Les équations de Navier-Stokes (10) ne peuvent être résolues qu'avec des conditions aux limites appropriées (résolution d'un problème aux limites)

Paroi solide : condition d'adhérence (de non glissement)  $U_{fluide} = U_{paroi}$ (*e.g.* écoulement de Couette plan)

Interface entre deux fluides *A* et *B* (sans transfert de masse et en négligeant la tension superficielle) :

condition d'adhérence  $U_A = U_B$ continuité des efforts  $\overline{\overline{\sigma}}_A \cdot n = \overline{\overline{\sigma}}_B \cdot n$ imperméabilité de l'interface  $U_S \cdot n = U \cdot n$ 



 $oldsymbol{U}_{\infty}$ 

#### • Conditions aux limites (suite)

Illustration avec l'écoulement se développant autour d'un corps

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \\ \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Psi}) + \boldsymbol{\nu} \nabla^2 \boldsymbol{U} \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites : U = 0 sur la surface du corps, et  $U 
ightarrow U_\infty$  loin de ce dernier

La géométrie du corps et la vitesse de l'écoulement incident  $U_{\infty}$  interviennent dans les conditions aux limites. La force de gravité peut-être intégrée à la pression, et n'apparaît alors que comme une correction  $p + \rho \Psi$  (« pression effective »)

Le fluide lui-même est caractérisé par sa masse volumique  $\rho$  et sa viscosité  $\nu$ 

Après un transitoire, on observe un écoulement développé ou établi : les conditions initiales ont été oubliées. Bien noter que l'écoulement n'est pas nécessairement stationnaire ou permanent (indépendant du temps)

#### • Forme intégrale

Dans cette dernière partie, on cherche à avoir une vue globale de l'écoulement, qui va nous servir pour modéliser les écoulements internes. On commence par établir le bilan de l'énergie cinétique turbulente en prenant le produit scalaire de la vitesse avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\boldsymbol{U} \cdot \left\{ \rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g} \right\} \implies \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2} \right) = \boldsymbol{U} \cdot \left( \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g} \right)$$

On utilise alors le théorème de Reynolds (5) pour un domaine fixe ( $U_S = 0$ ) avec  $\chi = U^2/2$ 

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{U^2}{2} \, d\nu = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{U} \cdot \left(\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \boldsymbol{g}\right) d\nu}_{= (\mathbf{a})} - \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{U^2}{2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

∟ Bilan de l'énergie cinétique (suite) ¬

#### • Forme intégrale (suite)

et en utilisant l'identité vectorielle suivante (discutée juste après)

 $\boldsymbol{U} \cdot (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) - \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \boldsymbol{U} = \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) - \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{D}}$ 

$$(a) = \begin{cases} P_{ext} \equiv \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} \, dv & \text{forces} \\ P_{ext} \equiv -\int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{D}} \, dv & \text{forces} \\ P_{int} \equiv -\int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{D}} \, dv & \text{forces} \\ \end{array}$$

#### ∟ Bilan de l'énergie cinétique (suite) ¬

#### • Courte pause ...

## ... pour correctement définir l'expression $\overline{\overline{\sigma}}$ : $\overline{\overline{D}}$

Produit scalaire entre deux tenseurs : le résultat est un scalaire (multiplication terme à terme et sommation)

$$\overline{\overline{\sigma}}: \overline{D} = \sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{11} D_{11} + \sigma_{12} D_{12} + \dots + \sigma_{32} D_{32} + \sigma_{33} D_{33}$$

... et pour démontrer l'identité vectorielle suivante  $U \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) = \nabla \cdot (U \cdot \overline{\overline{\sigma}}) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}$ 

$$U_{i}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial}{\partial x_{j}}(U_{i}\sigma_{ij}) - \sigma_{ij}\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial}{\partial x_{j}}(U_{i}\sigma_{ij}) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_{j}}(U_{i}\sigma_{ij}) - \sigma_{ij}D_{ij} \qquad (i \leftrightarrow j, \sigma_{ij} = \sigma_{ji})$$

#### ∟ Bilan de l'énergie cinétique (suite) ¬

#### • Forme intégrale (suite)

On retient au final

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{U^2}{2} d\mathcal{V} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} - \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{U^2}{2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds \tag{11}$$

La puissance des forces extérieures  $P_{\text{ext}}$  sert à accroître l'énergie cinétique (avec le terme de bord à droite pour un domaine fixe  $\mathcal{D}$ ) mais une partie est aussi utilisée avec la puissance des efforts internes  $P_{\text{int}}$  pour la déformation des particules fluides à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}$ . Ce dernier terme  $P_{\text{int}}$  peut s'arranger comme suit pour un écoulement incompressible

$$-P_{\rm int} = \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} \, d\nu = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} \, d\nu}_{\rm discinction} \tag{12}$$

dissipation visqueuse > 0

### Définition

La puissance des forces visqueuses qui s'exerce sur les particules fluides induit une dissipation visqueuse, une transformation irréversible de l'énergie mécanique en chaleur par frottements

Pour un écoulement incompressible,

$$\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}} = 2\mu\overline{\overline{D}}:\overline{\overline{D}} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2 > 0 \qquad (W.m^{-3})$$

#### ∟ Dissipation visqueuse ¬

 Illustration avec l'écoulement laminaire dans un canal plan (entre deux plaques parallèles, écoulement de Poiseuille)



Le champ de vitesse est donné  $U = (U_1(x_2), 0, 0)$  avec

 $\rightarrow_{x_1}$   $U_1 = \frac{U_0}{h^2}(h^2 - x_2^2)$  (voir page 123)

Quelle est la force visqueuse exercée par l'écoulement sur les parois du canal? Tenseur des contraintes :  $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$  avec  $\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}}$ 

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0\\ -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\tau}} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0\\ -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & -2\mu \frac{U_0 x_2}{h^2} & 0\\ -2\mu \frac{U_0 x_2}{h^2} & -p & 0\\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

#### ∟ Dissipation visqueuse ¬

## • Écoulement laminaire dans un canal plan (suite)

Sur la paroi du haut,  $x_2 = h$ ,  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ , vecteur contrainte  $\mathbf{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ 

$$T = \begin{pmatrix} -2\mu \frac{U_0}{h} \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} \qquad dF = T \ ds \qquad (force exercée par la paroi du haut sur l'écoulement)$$

La force visqueuse exercée par l'écoulement sur la paroi supérieure par unité de surface est donc donnée par  $\mathbf{F} = 2(\mu U_0/h)\mathbf{e}_1$ . En effectuant le même raisonnement pour la paroi du bas, on en déduit que la force totale est  $\mathbf{F} = 4\mu(U_0/h)\mathbf{e}_1$ 

Dissipation visqueuse?

$$\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}} = 2\mu\overline{\overline{D}}:\overline{\overline{D}} = 2\mu(D_{12}^2 + D_{21}^2) = 4\mu\left(\frac{U_0x_2}{h^2}\right)^2$$
$$\int_{-h}^{+h} \overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}}\,dx_2 = \frac{8\mu U_0^2}{h^2} \quad \text{Wm}^{-2} \quad \text{c'est-à-dire par m}^2 \text{ dans}$$

 $\int_{-h} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} dx_2 = \frac{6\mu O_0}{3h} \quad \text{W.m}^{-2} \quad \text{c'est-à-dire par m}^2 \text{ dans le plan } (x_1, x_3)$ 

 $\rightarrow$  dissipation visqueuse proportionnelle à  $U_0^2$ 

#### Bilan d'énergie mécanique



Domaine de contrôle  $\mathcal{D}$ , avec  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_w$ 

 $S'_w$  surface imperméable mobile avec  $U = U_S$ ,  $S_1$  and  $S_2$  surfaces fixes ( $U_S = 0$ )

 $P_m$  puissance mécanique fournie à l'écoulement avec le travail de l'arbre (ce dernier traversant la surface de contrôle)

Hypothèses : écoulement incompressible, pas de contribution des contraintes visqueuses sur  $S_1$  and  $S_2$  (sera justifié en travaux dirigés)

Conservation de la masse

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\boldsymbol{v} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} = Q_{v2} - Q_{v1} = 0$$
$$Q_{v1} = Q_{v2} = Q_v \quad (\mathbf{m}^3 \cdot \mathbf{s}^{-1})$$

#### Bilan d'énergie mécanique (suite)

#### Conservation de l'énergie cinétique

En se rappelant que pour la force de gravité,  $g = -\nabla \Psi(x)$  avec  $\Psi = -g \cdot x = gx_3$ , le bilan d'énergie cinétique (voir page 85) peut s'écrire comme

$$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{U} \cdot \nabla \Psi = -\frac{D\Psi}{Dt} \implies \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2} + \Psi \right) = \boldsymbol{U} \cdot \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}$$
(13)

On introduit alors la puissance des efforts surfaciques externes plutôt que  $P_{\text{ext}}$  $P_{\text{ext}}^{\mathcal{S}} \equiv \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) ds$ 

ce qui conduit à l'expression suivante pour la forme intégrale (11) de la conservation de l'énergie cinétique pour un domaine fixe et des surfaces mobiles imperméables  $S'_w$  (sans terme de bord pour le théorème de Reynolds)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho\left(\frac{U^2}{2} + \Psi\right) d\nu = P_{\text{ext}}^{\mathcal{S}} + P_{\text{int}} - \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \rho\left(\frac{U^2}{2} + \Psi\right) \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds \tag{14}$$

### • Bilan d'énergie mécanique (suite)

On peut détailler chacun des deux termes de puissance de l'éq. (14), à savoir

$$\begin{pmatrix}
P_{\text{ext}}^{S} = \int_{S} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS = \underbrace{P_{m}}_{\text{via } S'_{w}} - \int_{S_{1} \cup S_{2}} p \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \qquad \text{(On ne souhaite pas connaître} \\
de détails sur P_{m})
\end{pmatrix}$$

$$P_{\text{int}} = - \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}} \, d\nu}_{\text{dissipation visqueuse}} = -\mathcal{D}_{\nu} \\
\underbrace{\mathcal{D}_{\nu} > 0}
\end{pmatrix}$$

On peut regrouper le terme de pression avec les deux autres termes dans l'intégrale surfacique précédente

Bilan d'énergie mécanique (suite)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \left( \frac{U^2}{2} + \Psi \right) d\mathcal{V} = P_m - \mathcal{D}_{\nu} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \mathcal{H} U \cdot n \, ds}_{(a)}$$

où  $\mathcal{H} = p + \rho U^2/2 + \rho \Psi$  est l'énergie locale par unité de volume (J.m<sup>-3</sup>) déjà introduite avec l'éq. de Bernoulli (9). Le terme (*a*) représente ce flux d'énergie entrant et sortant au travers des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . En prenant alors la moyenne temporelle de cette équation



#### • Perte de charge

Avec l'équation précédente, nous avons presque un modèle 1-D pour représenter notre système à flux continu, à condition de pouvoir modéliser l'intégrale de flux. On introduit pour cela la charge H (attention  $\neq H$ ) telle que

$$\bar{Q}_v \boldsymbol{H} \equiv \int_{\mathcal{S}} \overline{\mathcal{H} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}} \, ds$$

*H* est donc une valeur moyenne du flux de  $\mathcal{H}$  en temps (on pourra plus tard tenir compte du régime turbulent) et dans la section droite, divisé par le flux volumique moyen  $\bar{Q}_v$ . On retient alors pour la conservation de l'énergie mécanique la forme compacte suivante

$$\bar{P}_m + \bar{Q}_\nu (H_1 - H_2) = \bar{\mathcal{D}}_\nu \quad (\sim J.s^{-1} \sim W)$$
 (15)

Pour une simple conduite sans machine  $(\bar{P}_m = 0)$ , on a  $\bar{Q}_v(H_1 - H_2) = \bar{D}_v > 0$ , on observe une perte de charge entre  $H_1$  et  $H_2$  induite par les effets visqueux (une dégradation irréversible de l'énergie mécanique), voir par exemple l'écoulement de Poiseuille précédent page 123 pour connaître  $\bar{D}_v$ 

### Perte de charge (suite)

Dans ce contexte, on introduit aussi le rendement  $\eta$  de la machine pour déterminer la puissance transmise (pompe) ou récupérée (turbine) par l'arbre de la machine



Pour une pompe ou un ventilateur :  $Q_v(H_2 - H_1) = (P_m - D_v) = \eta P_m > 0$  $Q_v \Delta H_P = \eta P_m > 0$ 

Pour une turbine :  $P_T = -P_m = Q_v(H_1 - H_2) - \mathcal{D}_v = \eta Q_v(H_1 - H_2) > 0$   $P_T = \eta Q_v \Delta H_T > 0$ 

 $\sim$  Par abus de notation, les barres indiquant la moyenne temporelle seront souvent omises

#### Illustration avec un barrage de montagne



 $H_D - H_R = \rho g(z_D - z_R) = \Delta H_L + \Delta H_T + \Delta H_O \qquad \Delta H_L, \Delta H_O \text{ pertes de charge}$  $P_T = \eta_T Q_v \Delta H_T = \eta_T Q_v \left[ \rho g(z_D - z_R) - \Delta H_L - \Delta H_O \right]$ 

#### Illustration avec un barrage de montagne (suite)

Remarque - Pour déterminer la charge  $H_D$  à la surface de la retenue d'eau du barrage en  $z = z_D$ , on doit d'abord observer que

 $\mathcal{H}_D = p_0 + \rho g z_D + \rho U_D^2/2 \simeq p_0 + \rho g z_D = \text{cst.}$ 

Le débit volumique est  $Q_v = U_D \times S$  est en effet obtenu avec une très grande surface S et une très faible vitesse  $U_D$ 

Cela permet d'écrire dans ce cas

$$H_D = \frac{\int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_D \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds}{Q_v} \simeq \mathcal{H}_D \frac{\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds}{Q_v} \simeq \mathcal{H}_D$$

## ∟ À retenir ¬

- Tenseur visqueux pour un fluide newtonien (version incompressible dans ce chapitre)
- Expression et le sens de la dissipation visqueuse
- Équations de Navier-Stokes (10) & conditions aux limites
- Écoulements de Couette et de Poiseuille
- Perte de charge dans un système à flux continu (15)

### ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

### • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

## 3 - Dimensional analysis - Reynolds number



#### 3 - Dimensional analysis - Reynolds number

#### Dimensional analysis

Motivation Units and dimensions Π-theorem Illustration

#### Reynolds number

Definition Interpretation

#### Flow around a body

Dimensional analysis Lift and drag coefficients Drag coefficient for a smooth sphere Reynolds number and mock-up Nondimensional Navier-Stokes eqs.

#### Applications of the $\Pi$ -theorem

Drag on a ship hull Rowing shell

#### **Duct flow**

Poiseuille flow Skin-friction coefficient 1-D model

To know more about it

Key results

### Motivation

Can the performance of a model aircraft in a wind tunnel be used to predict its aerodynamic performances at full scale (similitude requirements)?

Can parameters governing the general behavior of a particular flow (wake behind a cylinder for instance) be identified in a systematic way, avoiding to make a lot of experiments?

The answer is yes, based on dimensional analysis which provides scaling laws (linked to similitude & self-similar solutions)



Mock-up of the Airbus A380 in the F1 wind tunnel at ONERA Fauga-Mauzac

(courtesy of Jean Délery)

### Units and dimensions

Primary dimensions	[ ]	unit
mass	[M]	kg
length	[L]	m
time	[T]	S
temperature	$[\Theta]$	K

(choice of units is quite arbitrary)

```
velocity [V] = LT^{-1}
force [F] = MLT^{-2}
pressure [P] = ML^{-1}T^{-2}(=[F]/L^2)
kinematic viscosity [\nu] = L^2T^{-1}
density [\rho] = ML^{-3}
dynamic viscosity [\mu] = ML^{-1}T^{-1}(=[\rho][\nu])
energy [E] = ML^2T^{-2}
power [P] = ML^2T^{-3}
```

#### ∟ Dimensional analysis ¬

#### • Vaschy - Buckingham theorem ( $\Pi$ -theorem)

Vaschy (Annales Télégraphiques, 1892) & Buckingham (Phys. Rev. Let., 1914)

The  $\Pi$ -theorem is a general statement for predicting the number of dimensionless quantities in a given problem

- *n* dimensional physical quantities  $a_i$  directly associated with the considered problem, including the particular quantity of interest  $a_1$  (the drag for instance): an implicit physical relation  $\mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$  is assumed
- *r* is the rank of the matrix formed with the exponents of the variable dimensions *a<sub>i</sub>*

$$\begin{bmatrix} a_i \end{bmatrix} = L^{\alpha_i} T^{\beta_i} M^{\gamma_i} \Theta^{\delta_i} \\ \text{dimensionless parameters} \\ \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}^{\lambda_1} \cdots \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix}^{\lambda_n} = L^0 T^0 M^0 \Theta^0 \\ \text{Values of } \lambda_1, \dots, \lambda_n ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nl} \\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{nl} \\ \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{nl} \\ \delta_{11} & \cdots & \delta_{nl} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

#### • Vaschy - Buckingham theorem (cont.)

• The problem can be reduced to a dimensionless law of n - r dimensionless parameters  $\prod_i$ , that is

 $\Pi_1 = \mathcal{F}_0(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$ 

where  $\Pi_1$  is the dimensionless number associated with the quantity of interest  $a_1$ . If n - r = 1, then  $\Pi_1 = \text{cst.}$ 

#### An operational formulation of the $\Pi$ -theorem

For a problem involving n variables, with r independent dimensions occurring in those variables, a dimensionless physical law of n - r dimensionless parameters  $\Pi_i$  can be found

 $\mathcal{F}(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0 \quad \text{or equivalently} \quad \Pi_1 = \mathcal{F}_0(\Pi_2, ..., \Pi_{n-r})$ 

### • Application of the $\Pi$ -theorem

Frequency f of the vortex shedding behind a cylinder

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{f}, U_{\infty}, \rho, \mu, D) = 0 \qquad \Longrightarrow n = 5$$

	$U_{\infty}$	ρ	μ	D	f
L	1	-3	-1	1	0
Т	-1	0	-1	0	-1
M	0	1	1	0	0
Θ	0	0	0	0	0



 $\implies$  r = 3 (c4 = c3-c2-c1; c4+c5 = c1)

n-r=2 dimensionless parameters  $\Pi_i$  to identify

$$\Pi_{1} = \frac{fD}{U_{\infty}} = \text{St Strouhal number}$$
  
$$\Pi_{2} = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu} = \text{Re Reynolds number}$$
$$\implies \text{St} = \mathcal{F}_{0}(\text{Re})$$

The same Strouhal number (dimensionless frequency) will be observed in two different experiments/simulations having the same Reynolds number Re
### ∟ Dimensional analysis ¬

# • Low-Reynolds number flow around a cylinder Re = 150, $M_{\infty} \simeq 0.33$ , $D = 2 \times 10^{-5}$ m





Vorticity  $\omega_3 = \partial U_2 / \partial x_1 - \partial U_1 / \partial x_2$  superimposed with fluid particle trajectories



Marsden et al., J. Comput. Acoust., 13(4), 2005

### Definition and interpretation

U,L characteristic velocity and length scales of the flow  $\nu$  kinematic viscosity of the fluid

 $Re = \frac{UL}{v}$  The most important dimensionless parameter in fluid mechanics

From Navier-Stokes' equation (10)

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{\nu} \nabla^2 \boldsymbol{U} + \boldsymbol{g}$$
$$\sim \frac{U^2}{L} \qquad \sim \boldsymbol{\nu} \frac{U}{L^2}$$

$$\frac{\text{convective term}}{\text{viscous term}} \sim \frac{UL}{\nu} = \text{Re}$$

### Interpretation (cont.)

The Reynolds number is a measure of the ratio of inertial forces to viscous forces for a given flow.

 $Re \ll 1$ : convective term negligeable, Stokes or creeping flow  $Re \gg 1$ : necessary condition (only) to apply an inviscid model

The Reynolds number can also be interpreted as the ratio of two characteristic times

 $Re = \frac{L^2/\nu}{L/U} \sim \frac{\text{viscous time}}{\text{convective time}}$ 

In other words, a small viscous time  $L^2/\nu \ll L/U$  corresponds to efficient viscous effects : a small perturbation is damped during its convection, and the flow regime remains laminar

#### • Experience of Reynolds : laminar versus turbulent regime





The general results were as follows :---

(1.) When the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube, fig. 3.



(2.) If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinuosity.

(3.) As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water, as in fig. 4.



Any increase in the velocity caused the point of break down to approach the trumpet, but with no velocities that were tried did it reach this.

On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies, as in fig. 5.



Reynolds, O., 1883, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **174**, 935-982 Osborne Reynolds (1842-1912)

### Nondimensional Navier-Stokes equations

$$\tilde{U}_i = \frac{U_i}{U_{\infty}}$$
  $\tilde{p} = \frac{p}{\rho U_{\infty}^2}$   $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}$   $\tilde{t} = \frac{t}{L/U_{\infty}}$ 

(t normalized by the convective time scale)

Navier-Stokes' equations read

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{U} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{U} \qquad \text{Re} = \frac{U_{\infty}L}{\nu} \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{U} = 0 \end{cases}$$

Boundary conditions

 $\begin{cases} \tilde{U} = 0 \text{ on the body surface} \\ \tilde{U} \rightarrow (1, 0, 0) \text{ far from the body} \end{cases}$ 

The fully developed flow (when initial conditions are forgotten) is only a function of the Reynolds number Re

#### ∟ Flow around a body ¬

#### • Dimensional analysis for the drag force $F_D$ exerted by the flow on the body



### ${\scriptstyle L}$ Flow around a body ${\scriptstyle \urcorner}$

### • Drag coefficient for a smooth sphere

(diameter *D*,  $S = \pi D^2/4$ , cont. in Chapter 4)



### ∟ Flow around a body ¬

### Reynolds number and mock-up

full scale 
$$\operatorname{Re}' = \frac{\rho'_{\infty} U'_{\infty} c'}{\mu'_{\infty}}$$
 scaled mock-up  $\operatorname{Re} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} c}{\mu_{\infty}}$   
In aeronautics,  $U_{\infty} \simeq U'_{\infty}$  (Mach number similitude), but *c* is smaller than  $c' \Longrightarrow$  need to increase Re to reach the nominal value Re', and thus to correctly measure  $C_D = C_D(\operatorname{Re}')$ 

How to increase the Reynolds number (for a perfect gas)?

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} c}{\mu_{\infty}} \qquad \rho_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{rT_{\infty}} \qquad q_{\infty} \equiv \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^{2} = \frac{\gamma}{2} p_{\infty} M_{\infty}^{2}$$

 $p_{\infty}$  / pressurized wind tunnel (inducing mechanical constraints with the increase of the dynamic pressure  $q_{\infty}$ ), see the Superpipe in slide 126!

 $T_{\infty} \searrow$  cryogenic wind tunnel ( $\mu_{\infty} \searrow \rho_{\infty} \nearrow$ )

A320 (180 passengers) in cruise condition Reynolds number Re' =  $3 \times 10^7$ At an altitude of 10000 m,  $\mu'_{\infty}/\rho'_{\infty} = 3.53 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ M<sub> $\infty$ </sub> = 0.8,  $U'_{\infty} = 240 \text{ m.s}^{-1}$ , c' = 4.4 m



### • Dynamic viscosity $\mu$ for a gas

For common gases,  $\mu = \mu(T)$  but the kinematic viscosity  $\nu = \mu/\rho = \nu(p, T)$ Air at  $T = 20^{\circ}$  C and  $p_{\infty} = 1$  bar,  $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>

(As a reminder,  $v = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}$  for water)

### ${\scriptstyle L}$ Flow around a body ${\scriptstyle \urcorner}$

### • European Transonic Windtunnel (ETW, Cologne, Germany)



http://www.etw.de/

## ∟ Application ¬

### Drag on a ship hull



USS John F. Kennedy aircraft carrier and accompanying destroyers



Ducks swimming across a lake Same angle ( $\simeq 39^{\circ}$ ) for the wake!

Flow parameters  $F_D$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $U_{\infty}$ , L, g

	$F_D$	μ	ρ	$U_{\infty}$	L	g
L	1	-1	-3	1	1	1
Т	-2	-1	0	-1	0	-2
M	1	1	1	0	0	0
Θ	0	0	0	0	0	0

 $(c_1 = c_2 + c_4 + c_5; c_3 = c_2 - c_4 - 2c_5; c_6 = 2c_4 - c_5)$ n - r = 6 - 3 = 3 dimensionless parameters

$$\Pi_{1} = \frac{F_{D}}{\frac{1}{2}\rho U^{2}S} \qquad (S = wetted-surface area)$$
$$\Pi_{2} = Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$
$$\Pi_{3} = Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \qquad Froude number$$

## Drag on a ship hull (cont.)

The drag is induced by surface gravity waves and by the (classical) viscous friction,  $C_D = C_D$  (Re, Fr). It is not possible - however - to preserve both Reynolds and Froude number similitude in experiments.

# Froude's hypothesis $C_D \simeq C_F(\text{Re}) + C_R(\text{Fr})$

Friction drag coefficient  $C_F$  and residual (wave) drag coefficient  $C_R$  induced by two distinct physics

- For the model boat, the velocity is imposed by the Froude number and the model size : the total drag  $C_D$  is *measured*, and from the knowledge of  $C_F(\text{Re})$ , the residual drag of the model  $C_R$  is then *calculated*.
- For the full scale ship, the residual drag  $C_R$  is known from previous experiments (same value of Fr), and the friction drag is again *calculated* as a function of the Reynolds number.

# ∟ Application ¬

### • Rowing shell (McMahon, 1971)

How does the boat's speed change with the number of rowers?



4 person shell, 88% of the drag due to wetted-surface friction

Killing, S., 2017, Row360, 009

N identical oarsmen – same individual power P and weight, geometric similarity between boats, the drag is dominated by the friction drag  $C_D \simeq C_F(\text{Re})$  for a fitted body, and the value of the Reynolds number does not change with the number of rowers

power 
$$\propto C_F \frac{1}{2} \rho U^2 S \times U \propto N \times P$$

The submerged volume is  $\mathcal{V} \sim N$ , leading to  $S \sim N^{2/3}$  for the wetted surface

Finally, one gets  $U \sim N^{1/9}$ 

### ∟ Application ¬

### • Rowing shell (cont.)

How does the boat's speed change with the number of rowers?



Data from Lucerne 2010 A-finals (Sunday 11 July 2010) http://sanderroosendaal.wordpress.com/

### Poiseuille flow

Application to the laminar steady flow established in a circular pipe. Our objective is to derive a 1-D model from the analytical solution, see Eq. (15)



Cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$  $\boldsymbol{U} = (0, 0, U(r)) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$  Conservation of mass,  $Q_{v2} = Q_{v1} = Q_v$ (volumetric flow rate, ~ m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup>)

Navier-Stokes' equations (gravity force neglected, horizontal duct)

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) \end{cases}$$

### • Poiseuille flow (cont.)

From Navier-Stokes' equations

$$p = p(z)$$
 and  $\underbrace{\frac{dp}{dz}}_{\text{fct of } z} = \underbrace{\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right)}_{\text{fct of } r} = \text{cst} \equiv G$ 



and p = Gz, p decreases linearly along z (G < 0 if  $U_0 \ge 0$ )

The pressure drop is balanced by the wall viscous friction

### Poiseuille flow (cont.)

Bulk velocity  $U_d$ 

$$U_d \equiv \frac{1}{S} \int_{S} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_{0}^{R} U(r) 2\pi r dr = \frac{U_0}{2}$$

Wall shear stress  $\tau_w$ 

$$\tau_w = \tau_{zr}(r=R) = -2\mu \frac{U_0}{R}$$

Skin-fiction coefficient  $C_f (\propto C_D)$ 

$$C_f \equiv \frac{|\tau_w|}{\rho U_d^2/2} = \frac{16}{\text{Re}_D} \qquad \text{Re}_D \equiv \frac{U_d D}{\nu}$$

The subscript D indicates that the Reynolds number  $\text{Re}_D$  is built by choosing D as length scale

# • Skin-friction coefficient $C_f = \tau_w / (\rho U_d^2/2)$ for a circular pipe



$$\begin{array}{l} \hline & \\ \hline & \\ - & \\$$

Oregon facility
Princeton Superpipe



McKeon *et al.* (2004) - *Superpipe,* the Reynolds number is increased through the pressure

#### Laminar versus turbulent regime



### • Poiseuille flow (cont.)

Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869)

He was interested in the flow of human blood in narrow tubes :

- Recherches sur la force du coeur aortique (PhD 1828)
- Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres (book, 1840)





Scanning electron microscope image of blood cells

(National Cancer Institute, https://visualsonline.cancer.gov/... ...details.cfm?imageid=2129)

### • Development of a 1-D model for the Poiseuille flow

(energy budget of a continuous-flow system, refer to slide 95)

$$\int_{S_1} \mathcal{H} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds \equiv H_1 Q_v$$
  
with  $\mathcal{H} \equiv p + \frac{1}{2} \rho U^2$  (local)

 $Q_v(H_1-H_2)=\mathcal{D}_v$ 

Mechanical energy is converted into heat by internal viscous friction

Development of a 1-D model for energy loss : only the pressure p contributes to the variations of H

$$\Delta H = [H]_2^1 = [p]_2^1 = \underbrace{-GL = \frac{4\mu U_0}{R^2}L}_{\text{Poiseuille flow}} = \underbrace{\frac{64}{\text{Re}_D}}_{\psi(\text{Re}_D)} \frac{L}{D} \frac{1}{2}\rho U_d^2$$

More generally,

$$\Delta H = \psi(\text{Re}_D) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U_d^2 \qquad \qquad \psi(\text{Re}_D) = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad \text{for Poiseuille flow (laminar)}$$

### Short quiz



Water height in each open tube when valve is open? (from firefighter training)

• Short quiz (cont.)



An illustration of the linear head loss in a pipe!

$$\Delta H = [\Delta p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}]_2^1 = \boldsymbol{\psi}(\mathsf{Re}) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U_d^2$$

### ${\scriptstyle L}$ Summary of the key results ${}^{\neg}$

- Operational formulation of the Π-theorem
- Expression of some dimensionless parameters : Reynolds number, Strouhal number, Drag and Lift coefficients
- Clear interpretation of these dimensionless numbers in particular for the Reynolds number (laminar/turbulent regime)
- Poiseuille flow and associated 1-D model for the laminar regime

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 4 - Flow regimes as a function of Reynolds number



### 4 - Flow regimes as a function of the Reynolds number

#### Low Reynolds number flow

Reynolds number Stokes problem Stokes force Drag coefficient for a sphere

#### High Reynolds number flow

Introduction Boundary layer Streamlined body Bluff body Delayed boundary layer separation Wake and free jet

#### Laminar boundary layer

Boundary Layer approximations Prandtl equations Pressure gradient Blasius solution

#### Key results

### Reynolds number

Navier-Stokes equation, see Eq. (10)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 U$$

$$\sim \frac{U^2}{L} \qquad \sim \nu \frac{U}{L^2} \qquad \frac{\text{convective term}}{\text{viscous term}} \sim \frac{UL}{\nu} = \text{Re}_L$$

U, L characteristic velocity and length scales of the flow v kinematic viscosity of the fluid

The convective term can be neglected when  $\text{Re}_L \ll 1$ 

### • The Stokes problem ( $\text{Re}_L \ll 1$ )

Alternative dimensionless form of Navier-Stokes equations ( $\neq$  slide 113) by considering the diffusion time  $L^2/\nu$  to build  $\tilde{t}$ 

$$\tilde{U}_{i} = \frac{U_{i}}{U_{\infty}} \qquad \tilde{t} = \frac{t}{L^{2}/\nu} \qquad \tilde{p} = \frac{p}{\mu U_{\infty}/L} = \frac{p}{\rho U_{\infty}^{2}} \frac{\rho U_{\infty}L}{\mu} \qquad \operatorname{Re}_{L} = \frac{\rho L U_{\infty}}{\mu}$$
$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{Re}_{L} \tilde{U} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{U} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^{2} \tilde{U}$$

For low Reynolds number flows, the term  $\operatorname{Re}_{L} \tilde{U} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{U} \ll 1$  is assumed to be small (must be checked by the approximate solution at the end, very restrictive condition in practice) : creeping flow or Stokes flow assumption

Notations : 
$$\tilde{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_3^2}$$

• Stokes problem (cont.)

Stokes equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} &= 0 \end{aligned}$$

supplemented by initial and boundary conditions. For given boundary conditions, the fully developed flow can reach a steady state as  $t \to \infty$ .



Uniform flow at  $U_{\infty}$  past a circular cylinder of diameter D,  $\text{Re}_D = 0.16$ 

Visualization of streamlines with a water flow and aluminium dust, by S. Taneda (fig. 6 in Van Dyke, 1982)



• Steady Stokes flow (creeping flow)

 $\begin{pmatrix} \mu \nabla^2 \boldsymbol{U} = \nabla p \\ + (\text{steady}) \text{ boundary conditions in 3-D} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$ 

Mathematical and physical problem which is more simple to solve that the high Reynolds number case (but 2-D models must be developed with caution!)



Flow past a sphere : 3-D analytical solution by Stokes (1851) :

velocity field, streamlines and isopressure lines are superimposed (from blue – to red +; pressure high in the front and low in the back)

 $\xrightarrow{U_{\infty}}$ 

#### Drag coefficient for a smooth sphere

$$F_{\text{flow} \to \text{sphere}} = \int_{\mathcal{S}} -pn \, ds + \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\tau}} \cdot n \, ds$$

drag force  $F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x$ = pressure drag (form drag) + skin friction drag

• For small Reynolds numbers, namely  $\text{Re}_D = U_{\infty}D/\nu < 1$ Drag or Stokes force given by  $F_D = 6\pi\mu a U_{\infty}$  with D = 2a

and  $6\pi = 2\pi + 4\pi$ ,  $2\pi$  induced by the large front-to-back difference in pressure despite the flow symmetry

Drag coefficient  $C_D = C_D(\text{Re}_D)$  $C_D \equiv \frac{F_D}{\rho U_{\infty}^2/2 \times S} = \frac{6\pi \mu a U_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2/2 \times \pi a^2} = \frac{24}{\rho U_{\infty}D/\mu} = \frac{24}{\text{Re}_D}$ 

### • Drag coefficient for a smooth sphere

(adapted from Clift, Grace, & Weber, 1978)



### • Application of the Stokes force

Relevant for small particles (dispersion of suspended particles) or high viscous flows (glacier flow)

• Seeding particles for optical measurements in fluid mechanics :

```
drops of oliv oil

\rho = 970 \text{ kg.m}^{-3}, \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}, d_p = 1.5 \ \mu\text{m}

drag provided by Stokes force

\text{Re} = U_{\infty} d_p / \nu \le 1 \Longrightarrow U_{\infty} < 9.7 \text{ m.s}^{-1}
```

• Famous application of the Stokes force : Millikan (1913) in a oil drop experiment to measure the elementary charge, that is the magnitude of the negative electric charge carried by a single electron.

#### Further reading :

Perry, M.F., 2007, Remembering the oil-drop experiment, *Phys. Today*, **56**(5)

∟ High Reynolds number flow ¬

#### Introduction

The viscous term is small with respect to the dominating nonlinear convective term, pressure variation scales as  $\rho U^2$  and the inviscid model may be applied

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$
 Euler equations

The assumption of a high Reynolds number  $\text{Re} \gg 1$  corresponds to an overall view of the flow, but some flow regions have strong velocity gradients associated with viscous effects, in particular near the wall due to the no-slip boundary condition : presence of a boundary layer (thin layer of fluid close to the surface in which viscous effects are dominant)

∟ High Reynolds number flow ¬

• Concept of boundary layer (introduced by Prandtl in 1904)



The inviscid model can only be applied outside of the boundary layer (BL). The boundary layer thickness  $\delta$  tends to zero as the Reynolds number goes to infinity.

boundary layer ( $\delta \ll L$ ): stronger flow deceleration and viscous effects (no-slip boundary condition at the wall)

Two additional remarks :

When the Reynolds number decreases, the boundary layer thickens, and there is no particular structuration of the fluid flow for  $\text{Re} \leq O(1)$ 

When the Reynolds number is high enough, a transition from a laminar to a turbulent boundary layer occurs (leading to the drag crisis for instance)

### • Flow around a streamlined body

For a streamlined or slender body, (a large part of) the boundary layer developing along the surface must remain attached to the body.



Visualization (dye streaks in water) of laminar separation from an airfoil 64A015,  $Re_c = 7000$ , with zero incidence, and with an angle of attack  $\alpha = 5^{\circ}$  (Werlé, 1974, ONERA)
## • Separation of the boundary layer



Airfoil (ONERA, *D*-profile) chord c = 100 mm, e/l = 10.5% $10^4 \le \text{Re}_l \le 5 \times 10^4$  From Werlé, SFP 37 (1980)

streamlined body  $\rightarrow$  bluff body

(a) 
$$\alpha = 5^{\circ}$$
  
(b)  $\alpha = 10^{\circ}$   
(c)  $\alpha = 17.5^{\circ}$   
(d)  $\alpha = 25^{\circ}$ 



## ${\scriptstyle L}$ High Reynolds number flow ${}^{\neg}$

## • Characterisation of flow past real road vehicles with blunt afterbodies



Citroën C2 at scale 1/24, square cross-section of  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  in an Eiffel wind tunnel, velocity of a few km/h; overview of the detached flow by PIV (combined with a permanent lighting)

Courtesy of Mathieu Grandemange (PhD thesis, ENSTA-ParisTech, 2013)

## • Flow around a bluff body

Drag crisis – critical Reynolds number for which the flow pattern changes, leaving a narrower turbulent wake : the boundary layer on the front surface becomes turbulent

The reduction in form/pressure drag (induced by a narrower wake) is more important than the increase in friction drag (induced by the laminar-turbulent transition of the boundary layer)

$$F_{\text{flow} \to \text{body}} = \int_{\mathcal{S}} -pn \, ds + \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\tau}} \cdot n \, ds$$

(*n* outward normal of the body)

drag force  $F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x$ pressure drag (form drag) + skin friction drag

## • Drag coefficient for a smooth sphere

(adapted from Clift, Grace, & Weber, 1978)



## • Pressure distribution around a sphere

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{q_{\infty}}$$
  $q_{\infty} = \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2$   $C_p$  pressure coefficient



stagnation point



--- potential flow solution (inviscid solution),  $C_p = 1 - (9/4) \sin^2 \theta$ 

• Expts by Achenbach (1972) for  $\text{Re}_D \simeq 1.65 \times 10^5$ (subcritical, before the drag crisis)

• Expts by Achenbach (1972) for  $\text{Re}_D > \text{Re}_D^c$ (supercritical, after the drag crisis)

(See also viscous Stokes' solution for  $\text{Re} \ll 1$ )

## ${\scriptstyle L}$ High Reynolds number flow ${}^{\neg}$

## • Why golf balls have dimples?





Moin & Kim, 1997, *Scientific American* Goff, E., 2010, Power and spin in the beautiful game, *Phys. Today*, **67**(3) Drag coefficient of spheres with varying surface roughness. The drag crisis or sudden drop in drag as Reynolds number increases occurs when the boundary layer transitions to turbulence upstream of separation

 $D = 4.3 \text{ cm}, U \simeq 67 \text{ m.s}^{-1}, \text{Re} \simeq 1.9 \times 10^5 \text{ (professional golfer)}$ 



Munson et al., 2014, Fundamentals of fluid mechanics

## Vortex generators

for delaying boundary layer separation (generation of tip vortex which will promote transition)

#### Beechcraft Baron

(twin-engined piston aircraft)



#### Boeing-777-3ZG-ER http://www.airliners.net/



## • Drag coefficient for a smooth cylinder



## • Wake behind an obstacle : Kármán's vortex street



Alexander Selkirk Island in the southern Pacific Ocean.







These Karman vortices formed over the islands of Broutona, Chirpoy, and Brat Chirpoyev ("Chirpoy's Brother"), all part of the Kuril Island chain found between Russia's Kamchatka Peninsula and Japan.

## Kármán's vortex street (1911)



Legend has it that Theodore von Kármán was motivated by a painting of St. Christopher (Church of St. Dominic in Bologna, Italy) to study his vortex street ...

See also the vortex shedding frequency

Mizota *et al.,* 2000, Nature, **404** 

## Boundary layer developing on a flat plate

2-D laminar steady flow (fully turbulent for  $\text{Re}_{\delta} = U_{e1}\delta/\nu \ge 2800$ or equivalently  $\text{Re}_{L} \ge 3 \times 10^{5}$ )



#### Characteristic scales

- boundary layer thickness  $\delta$
- longitudinal length  ${\cal L}$
- external velocity  $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$

Assumption :  $\delta \ll L$ 

(typically,  $\delta \simeq 1$  cm for  $L \simeq 1$  m along a commercial aircraft wing)

## Boundary layer developing on a flat plate



Visualization of the laminar boundary layer,  $U_{e1} = 9 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\text{Re}_L \simeq 500$ ,  $\delta_1 = 5 \text{ mm}$ 

(L distance from the plate leading edge)

A fine tellurium wire perpendicular to the plate at the left is subjected to an electrical impulse of a few milliseconds duration. A chemical reaction produces a slender colloidal cloud, which drifts with the stream and is photographed a moment later to define the velocity profile.

(Van Dyke, 1982, fig. 30)

#### Boundary layer approximations

Navier-Stokes equations for a 2 - D laminar flow

#### Conservation of mass

Both terms must be of the same order of magnitude,

## Boundary layer approximations (cont.)

Navier-Stokes equation along  $x_1$ 

$$\begin{pmatrix} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) U_1 \\ \sim \frac{\mathcal{U}_1^2}{L} - \frac{\mathcal{U}_1^2}{L} - \frac{\mathcal{U}_1^2}{L} - \frac{\mathcal{U}_1^2}{L} - \frac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

The first viscous term can be neglected with respect to the second one in  $\sim \nu U_1/\delta^2$ . The convective term on the left hand side must balance the viscous term on the right hand side : this term cannot be dominant, would lead to an inviscid solution; cannot be negligible, would lead to a Stokes flow (Re<sub>L</sub>  $\leq 1$ )

$$\frac{\mathcal{U}_1^2}{L} \sim \nu \frac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} \implies \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 L} \implies \frac{\delta}{L} \sim \operatorname{Re}_L^{-1/2} \qquad \operatorname{Re}_L \equiv \frac{\mathcal{U}_1 L}{\nu}$$

The Reynolds number must therefore be high enough to ensure that  $\delta \ll L$ , and moreover,  $\delta \sim \sqrt{L}$ 

## Boundary layer approximations (cont.)

Navier-Stokes equation along  $x_2$ 

$$\begin{cases} U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) U_2 \\ \sim \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} - \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} - \nu \frac{\delta}{L} \frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} - \nu \frac{\delta}{L} \frac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} - \frac{1}{\mathsf{Re}_L} \frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} - \frac{1}{$$

(All the terms are smaller by a factor  $(\delta/L)^2 \sim 1/\text{Re}_L$  wrt the projection along  $x_1$ , in particular for the pressure term)

The pressure term must have the same order of magnitude to ensure the balance. By integration in the transverse direction with  $p \sim \rho U_1^2$ ,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\operatorname{Re}_L}\frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad [p]_0^\delta \sim \frac{1}{\operatorname{Re}_L}\rho\mathcal{U}_1^2$$

The pressure change across the boundary layer is thus very small, and can be neglected :  $p(x_1, x_2) \simeq p(x_1)$  and  $\frac{\partial p}{\partial x_2} \simeq 0$ . For a given location  $x_1$ ,  $p = p(x_2 = \delta) = p_e$  and  $p = p(x_2 = 0) = p_e$  also!

## Boundary layer approximations (cont.)

Finally, the gouverning equations read

$$\begin{cases} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \\\\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\\\ \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

associated with the following orders of magnitude

$$U_1 \sim \mathcal{U}_1 \qquad U_2 \sim \frac{\delta}{L} \mathcal{U}_1 \qquad \frac{\delta}{L} \sim \operatorname{Re}_L^{-1/2} \qquad \operatorname{Re}_\delta = \operatorname{Re}_L^{-1/2} \frac{\mathcal{U}_1 L}{\nu} \sim \operatorname{Re}_L^{1/2}$$

 $\text{Re}_{\delta}$  is also an important parameter involved in the boundary-layer stability theory (transition between a laminar and a turbulent regime); By definition,  $1 \ll \text{Re}_{\delta} \ll \text{Re}_{L}$ 

## • Boundary layer approximations (cont.)

The pressure is constant across the boundary layer,  $p = p(x_1) = p_e(x_1)$ , which means that the pressure is imposed by the external flow

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp_e}{dx_1} = -\rho U_{e1} \frac{dU_{e1}}{dx_1}$$



## • Prandtl's equations (1904)

(16)

The Prandtl equations are a parabolized form of the Navier-Stokes Eqs. Formally, one has

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = f\left(U_1, U_2, \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\right) \qquad U_2 = -\int_0^{x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_2$$

where the external flow  $(U_e, p_e)$  is assumed to be known. An initial velocity profile  $U_1(x_2)$  at a given location  $x_1$  is required to start the integration along  $x_1$ .

## • Ludwig Prandtl (1875-1953)



Ludwig Prandtl with his water tunnel in 1903 (for flow visualization of large structures using particle tracers)



and in the mid to late 1930s

A voyage through Turbulence edited by, P. A. Davidson, Y Kaneda, H.K. Moffatt & K.R. Sreenivasan (Cambridge University Press, 2011)

Anderson Jr, D.J., 2005, *Physics Today*, **58**(12), 42–48.

## • The Blasius solution (PhD 1907)

Self-similar solution for laminar flow over a flat plate ( $U_{e1} = \text{cst}$ , no pressure gradient), the profile can be compared with the visualization slide 156

Boundary layer thickness  $\delta$ 

 $\frac{\delta}{x_1} \simeq 4.92 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_{x_1}}} \qquad (\delta \sim x_1^{1/2})$ 

Friction coefficient  $C_f$  (one face plate)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_{e1}^2} \sim \frac{\mu \frac{\mathcal{U}_1}{\delta}}{\rho \mathcal{U}_1^2} \sim \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 \delta} \sim \frac{1}{\operatorname{Re}_l^{1/2}}$$
$$C_f \simeq \frac{0.664}{\sqrt{\operatorname{Re}_{x_1}}}$$





Heinrich Blasius (1883-1970), first PhD student of Prandtl

## • Role of the pressure gradient

Favorable pressure gradient  $dp_e/dx_1 < 0$  (accelerated flow) Adverse pressure gradient  $dp_e/dx_1 > 0$  (decelerated flow)



## ${\scriptstyle L}$ Summary of the key results ${}^{\neg}$

- Creeping flow or Stokes flow; Stokes force (drag for a smooth sphere); low Reynolds number flow
- High Reynolds flow around streamlined body and bluff body; drag crisis; boundary layer
- Laminar boundary layer : Prandt's equations

## ${\scriptstyle L}$ Summary of the key results ${}^{\neg}$

## Streamlined and bluff bodies



Unstalled aerofoil

#### Streamlined or slender body

Streamwise direction is often much larger than the cross-sectional dimension

No (small) drag crisis



Stalled aerofoil

#### Bluff body

Dimension along the incoming flow and in the transverse direction are similar

Drag crisis, see slide 147

## ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 5 - Vorticité



#### 5 - Vorticité

#### Vorticité

Définition Tourbillon circulaire Circulation Version forte de l'équation de Bernoulli Équation de transport de la vorticité Écoulement bidimensionnel Vorticité produite par les parois Écoulement autour d'un corps à grand Reynolds

- Écoulement autour d'un corps non profilé
- Écoulement autour d'un corps profilé
- Modélisation pour un corps profilé

#### Bases de l'aérodynamique

Théorème de Kutta-Joukowski Éffet Magnus

#### À retenir

## Définition

Le vecteur vorticité vector est défini par  $\omega = \nabla \times U$ 

Lorsque  $\omega = 0$ , l'écoulement est irrotationnel

Le vecteur vorticité est deux fois le vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  associé à la rotation solide d'une particule fluide, voir le transparent 68

$$U(x) = U(x_P) + \underbrace{\overline{D}(x_P) \cdot (x - x_P)}_{\text{déformation}} + \underbrace{\Omega(x_P) \times (x - x_P)}_{\text{rotation}} \text{ as } x \to x_P \qquad \Omega = \frac{1}{2}\omega$$



Décomposition du mouvement d'une particule fluide dans un écoulement cisaillé

## • Définition (suite)

Pour un écoulement bidimensionnel  $U = (U_1(x_1, x_2, t), U_2(x_1, x_2, t), 0)$ 

$$\omega = (0, 0, \omega_3)$$
  $\omega_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$ 



## • Tourbillon circulaire

En utilisant des coordonnées cylindriques, la vitesse d'un tourbillon circulaire est donnée par  $\boldsymbol{U} = u(r)\boldsymbol{e}_{\theta}$ 

 $U_{\theta} = u(r), U_r = U_z = 0$ 



$$\omega_z(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \implies u(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' \omega_z(r') dr'$$

On peut déterminer le champ de vorticité connaissant le champ de vitesse et réciproquement (mais dans ce dernier sens, cela requière un calcul souvent fastidieux en s'appuyant sur la loi de Biot & Savart)

Il y a une relation spatiale non locale entre la vitesse et la vorticité : la vorticité qui est concentratée ou localisée produit un champ de vitesse dans tout l'espace

On utilise indifféremment tourbillon et vortex

#### Illustration avec le tourbillon de Rankine (1858)

$$\begin{cases} u(r) = v_0 \frac{r}{r_0} = \Omega_0 r & r \le r_0 \\ u(r) = v_0 \frac{r_0}{r} = \Omega_0 r_0 \frac{r_0}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$$(v_0 = \Omega_0 r_0 = \omega_0 r_0/2)$$





Mouvement de rotation solide à l'intérieur du vortex lui même, *i.e.* for  $r \le r_0$  dans la région rotationnelle

Écoulement irrotationnel à l'extérieur, pour  $r > r_0$ : le disque localisé de vorticité produit un champ de vitesse partout dans l'espace

## Oirculation

L'intégrale de la composante tangentielle de la vitesse le long d'une ligne fermée  $\mathcal{C}$  fournit la circulation  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ 

$$\Gamma_{\mathcal{C}} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad (\mathsf{m}^2.\mathsf{s}^{-1})$$



Considérons alors la surface S fermée par la courbe C. En appliquant le théorème de Gauss, on observe que la circulation représente et mesure le flux de vorticité flux traversant cette surface

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, d\boldsymbol{s}$$



## • Circulation d'un tourbillon circulaire

En choisissant la courbe C pour contenir toute la vorticité, la circulation  $\Gamma$  est alors indépendante d'un choix particulier de C, et permet donc de caractériser le tourbillon considéré. On a en effet dans ce cas,

$$\Gamma = 2\pi r u(r) \implies u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Dans la région irrotationnelle (à l'extérieur de la zone de vorticité), la vitesse décroit comme 1/r





Il est possible de définir un tourbillon ponctuel, pour lequel toute la vorticité est concentré en un point, avec la composante  $\omega_3 = \Gamma \delta(x_1) \delta(x_2)$  en s<sup>-1</sup>. La relation précédente  $u(r) = \Gamma/(2\pi r)$  est alors valable partout à l'exception du point occupé par le tourbillon.

## • Version forte de l'équation de Bernoulli

On rappelle la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} + \boldsymbol{g}$$

En utilisant l'identité vectorelle suivante,

$$\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}=\omega\times\boldsymbol{U}+\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right)$$

et en se souvenant également que  $g = -\nabla \Psi$ , on obtient alors la forme équivalente suivante

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \omega \times U = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{H} + \nu \nabla^2 U \qquad \mathcal{H} = p + \frac{1}{2} \rho U^2 + \Psi$$
(17)

On retrouve l'équation de Bernoulli pour un écoulement non visqueux et stationnaire en prenant le produit scalaire de l'éq. (17) avec U, c'est-à-dire  $U \cdot \nabla \mathcal{H} = 0$ et donc  $\mathcal{H} = \text{cst}$  le long d'une ligne de courant.

Pour un écoulement irrotationnel (sans vorticité), H = cst dans tout l'écoulement : c'est une version forte de l'éq. de Bernoulli

# • Équation de transport de la vorticité

En prenant le rotationel de l'éq. (17) et en utilisant les deux identités vectorielles suivantes

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{U} = 0)$$
$$\nabla \times \nabla \mathcal{H} = 0 \quad (\text{avec } \rho = \text{cst})$$

l'équation de transport sur la vorticité est finalement obtenue

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \omega = \mathbf{\omega} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nu \nabla^{2} \omega$$

$$\underbrace{\mathbf{convection}}_{= D \omega/D t} \quad \underbrace{\mathbf{evolution 3-D}}_{\text{visqueuse}} \quad \underbrace{\mathbf{diffusion}}_{\text{visqueuse}} \quad (18)$$

L'évolution du champ de vorticité est avant tout liée aux effets tridimensionnels, tout particulièrement pour les écoulements turbulents, et aux effets plus classiques de diffusion par la viscosité

Pour un écoulement non visqueux,  $D\omega/Dt = \omega \cdot \nabla U$ . Sans vorticité initiale, le mouvement d'une particule fluide reste alors irrotationnel (d'où l'intérêt des écoulements irrotationnels lorsque cela a un sens)

# • Écoulement bidimensionnel

Pour des écoulements en deux dimensions,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$  et  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = 0$  par conséquent. L'équation (scalaire) sur la vorticité s'écrit alors comme

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \omega_3 = \nu \nabla^2 \omega_3 \tag{19}$$

La convection d'une particle fluide est donc seulement affectée par la diffusion visqueuse (on mentionne de nouveau que c'est une classe d'écoulements très particulière)

On observe également que pour un écoulement non visqueux bidimensionnel,  $D\omega_3/Dt = 0$ . La vorticité issue des conditions initiales est simplement convectée par l'écoulement

# • Écoulement bidimensionnel (suite)

Interprétation de l'équation d'advection-diffusion (19) :

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = 0 \quad \iff \quad \frac{D\omega_3}{Dt} = 0 \quad \text{le long de la courbe} \quad \frac{dx_1}{dt} = U_1$$



La dérivativée matérielle D/Dtest la différentielle totale de  $\omega_3$ le long de la courbe  $dx_1 = U_1dt$ (une droite ici en supposant que  $U_1 = cst$ )

---- solution pour 
$$\frac{D\omega_3}{Dt} = 0$$
,  
à savoir  $\omega_3(x_1 - U_1 t)$ 

$$\frac{D\omega_3}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega_3$$
### Diffusion visqueuse en 2-D

On considère de nouveau un tourbillon circulaire en coordonnées cylindriques  $U = (U_r, U_\theta, U_z) = (0, u(r), 0)$  et  $\omega = (0, 0, \omega_z)$  avec  $\omega_z = \omega_z(r, t)$ 

 $\boldsymbol{U} \perp \nabla \omega_z \Longrightarrow \boldsymbol{U} \cdot \nabla \omega_z = 0$  (pas de convection)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega_z \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right)$$

Une solution particulière connue est le tourbillon de Lamb-Oseen

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)\right]$$

Le rayon du cœur du vortex varie comme  $r_c(t) = \sqrt{4\nu t} \propto \sqrt{\nu t}$ , qui est la signature de la diffusion moléculaire



 $\omega_z^{\star} = (\pi r_c^2 / \Gamma) \omega_z \quad u^{\star} = (2\pi r_c / \Gamma) u$  $u^{\star} = 1/r^{\star} \text{ (ligne en tirets)}$ 

#### Diffusion visqueuse en 2-D (suite)

La vorticité totale (et donc la circulation) est conservée, mais on observe un étalement depuis le point de concentration initial où  $\omega_3 = \Gamma \delta(x_1) \delta(x_2)$ , due à la diffusion visqueuse



Champ de vitesse du vortex de Lamb-Oseen pour  $0 \le r^* \le 5$ 



# Tourbillon annulaire de vapeur éjecté par l'Etna

(L'Etna est le volcan le plus haut et le plus actif d'Europe)



Expérience japonaise sur des anneaux tourbillonnaires de fumée avec une boîte géante de 30 m! (tourbillon de démarrage)

L'anneau tourbillonnaire se déplace (pourquoi?) sans élément de référence pour estimer sa taille. Les volcanologues estiment que ces anneaux mesurent environ 200 m de diamètre se déplacent jusqu'à 1000 m au-dessus du sol

Photos prises par Dr Jurg Alean & Dr Marco Fulle, Stromboli online

### • Vorticité produite par les parois

Trois mécanismes ont été identifiés dans l'éq. de transport de la vorticité (18), mais aucun ne permet d'expliquer sa production. L'origine de la vorticité réside dans les frontières de l'écoulement. Pour mettre en lumière la production de vorticité à la paroi, qui est ensuite diffusée et convectée par l'écoulement de la couche limite (CL), on peut utiliser la circulation :



La force visqueuse dF = T ds s'exerçant sur le fluide à la paroi

$$\boldsymbol{T} = -\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_1 = \mu \omega_3 \boldsymbol{e}_1 \qquad (\boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{n} = \mu \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} \text{ avec ici } \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_2)$$

### Cas d'un corps non profilé







Vue rapprochée du Brazuca (Adidas), ballon officiel de la coupe du monde 2014, dans une soufflerie de section carrée de 2 ft. Des filets de fumée éclairés un laser permettent de visualiser l'écoulement autour du ballon (NASA's Ames Research Center, R. Mehta, 2014)

 $U_{\infty} \simeq 48 \text{ km.h}^{-1}$ , bien en dessous de la vitesse de frappe typique d'un joueur professionnel, qui correspond à peu près au Reynolds critique de la sphère)

# Écoulement autour d'un corps profilé



(c)

Visualisation de l'établissement de l'écoulement (période transitoire) autour d'une aile portante :

(a) juste après le démarrage de la soufflerie

(b) à un moment intermédiaire

(c) à l'état final, pour lequel un écoulement stationnaire s'est établi autour du profil

Tiré de Prandtl & Tietjens*, Fundamentals of Hydro Aeromechanics* (1934) et cité dans J.D. Anderson, Jr (1991, p. 261)

### Modélisation pour un corps profilé

On s'intéresse au cas limite d'un écoulement autour d'un corps profilé lorsque  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . L'écoulement n'est jamais détaché du profil, avec une couche limite et un sillage infiniment fins.



 $S_w$  est une nappe de vorticité. Toute la vorticité est concentrée dans cette nappe, et l'écoulement est irrotationnel ailleurs

Couche de mélange entre deux écoulements  $\boldsymbol{U} = (U(x_2), 0, 0)$ 



 $<sup>\</sup>omega_3 = -\frac{dU}{dx_2}$ 

## Modélisation pour un corps profilé (suite)



Une nappe de vorticité n'a de sens que pour un écoulement non visqueux : la viscosité détruirait la discontinuité et imposerait une épaisseur non nulle

Le saut de vitesse tangentielle au travers de la nappe en  $x_2 = 0$  est  $\gamma_s = U_1^- - U_1^+$ , et la vorticité s'écrit comme  $\omega = \gamma_s \delta(x_2)$  en s<sup>-1</sup> On a sur le domaine  $[0, l_1] \times [-l_2, +l_2]$ 

$$\Gamma = \left(U_1^- - U_1^+\right)l_1 = \int_{-l_2}^{+l_2} \gamma_s \delta(x_2) \, l_1 \, dx_2$$

Plus généralement, la discontinuité de vitesse est le vecteur  $\gamma_s = U_B - U_A$ , et la nappe de vorticité se déplace à la vitesse locale  $U_w$ On rappelle que les conditions aux limites à imposer à l'interface sur  $S_w$  pour un écoulement non visqueux sont la continuité de la pression  $p_A = p_B$  et de la composante normale de la vitesse  $U_A \cdot n = U_B \cdot n$ 

La vitesse de l'interface vérifie  $\boldsymbol{U}_w \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}$ 







On doit également vérifier les conditions aux limites suivantes :

- $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = 0$  sur la surface  $\mathcal{S}$  du profil et  $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}_{\infty}$  à l'amont
- la continuité de p et U au travers de la nappe de vorticité  $S_w$ (avec éventuellement le mouvement de la nappe elle-même)

Ce problème est généralement difficile à résoudre, mais il existe un cas très instructif à étudier en aérodynamique lorsque l'on recherche une solution 2-D stationnaire

# • Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile

On considère un écoulement 2-D stationnaire autour d'un profil d'aile à grand nombre de Reynolds avec  $U = (U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2))$ 

En utilisant la version forte de l'éq. de Bernoulli (voir page 177), on a  $p + \frac{1}{2}\rho U^2 = cst$  (pas de force de gravité ici)

Pour la nappe de vorticité, la continuité de la pression impose que la norme de la vitesse U soit constante au travers de  $S_w$ , et comme de plus  $U \cdot n$  doit aussi être continue, le vecteur vitesse U est aussi continue au travers de la nappe  $S_w$ 

La nappe de vorticité peut donc être retirée du problème à résoudre et l'écoulement est maintenant irrotationnel dans tout le domaine



# • Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile (suite)

Pour des écoulements bidimensionnels incompressibles, il est souvent commode d'introduire la fonction de courant  $\psi$ 

$$U_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$
  $U_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ 

La condition  $\nabla \cdot U = 0$  est alors toujours vérifiée par construction. On a par ailleurs les propriétés suivantes pour  $\psi$ 

• 
$$\nabla^2 \psi = -\omega_3$$

•  $\boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} = 0$  par construction,  $\boldsymbol{\psi} = \text{cst}$  le long d'une ligne de courant

Dans notre cas, l'écoulement recherché est irrotationnel, et par conséquent  $\nabla^2 \psi = 0$ 

Sur la surface S du profil, on a  $U \cdot n = 0$ . La surface est donc une ligne de courant avec  $\psi = \text{cst.}$  On choisit souvent de prendre  $\psi = 0$  sur S par convention

Enfin, loin du profil, on doit satisfaire  $\psi \to \psi_{\infty} = U_{\infty} x_2$ , pour avoir  $U_{\infty} = U_{\infty} e_1$ 

# • Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile (suite)





 $\psi \sim U_{\infty} x_2$  loin du profil

Le problème n'est pas difficle à résoudre numériquement : on a une équation de Laplace associée à des conditions aux limites mixtes

Lorsque la fonction  $\psi$  est déterminée, le champ de vitesse est directement obtenu par dérivation de  $\psi$  et la pression est déterminée avec l'équation de Bernoulli  $p + \rho U^2/2 = \text{cst}$ 

Il est cependant possible de montrer au premier ordre (c'est-à-dire sans se préoccuper de la géométrie précise du profil) que la solution est toujours de la même forme : théorème de Kutta-Joukowski

## • Théorème de Kutta-Joukowski

On introduit les coordonnées polaires pour exprimer  $\nabla^2 \psi = 0$ 

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0$$

et on observe que la solution est périodique en  $\theta$  et peut être recherchée comme une série de Fourier

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(r) e^{in\theta}$$



Les fonctions  $C_n(r)$  doivent vérifier l'équation suivante,

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dC_n}{dr}\right) - n^2C_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_0 = A_0 \ln r + B_0 & n = 0\\ C_n = A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|} & n \neq 0 \end{cases}$$

Les termes en rouge contribuent seulement au champ proche (lié à la géométrie particulière du profil) et sont négligés pour la solution loin du profil

#### Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

La fonction de courant  $\psi$  doit aussi se raccorder à  $\psi_{\infty}$  lorsque  $r \to \infty$ 

$$\psi_{\infty} = U_{\infty} x_2 = U_{\infty} r \sin \theta = \frac{U_{\infty} r}{2i} \left( e^{i\theta} - e^{-i\theta} \right) \implies A_1 = A_{-1} = \frac{U_{\infty}}{2i}$$

et  $A_n = A_{-n} = 0$  for n > 1 (en notant que  $C_0$  ne contribue pas au champ de vitesse U lorsque  $r \to \infty$ ). On retient pour  $\psi$ 

$$\psi = U_{\infty}r\sin\theta + A_0\ln(r) + B_0 + \mathcal{O}(r^{-1})$$

On revient alors au champ de vitesse en coordonnées cylindriques

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad U_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{\infty} \cos \theta \boldsymbol{e}_r + \left(-\boldsymbol{U}_{\infty} \sin \theta - \frac{A_0}{r}\right) \boldsymbol{e}_{\theta} + \mathcal{O}(r^{-2}) = \boldsymbol{U}_{\infty} - \frac{A_0}{r} \boldsymbol{e}_{\theta} + \mathcal{O}(r^{-2})$$

On note que le terme en rouge correspond au champ de vitesse d'un tourbillon circulaire, voir page 176

### • Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Comme l'écoulement est irrotationel, la circulation  $\Gamma$  est une propriété du profil seulement. En considérant un cercle C de rayon R entourant le profil, que l'on parcourt dans le sens horaire,

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_{0}^{2\pi} \left( -\frac{A_{0}}{R} \boldsymbol{e}_{\theta} \right) \cdot R d\theta \boldsymbol{e}_{\theta} = 2\pi A_{0}$$
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{\infty} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \boldsymbol{e}_{\theta} + \mathcal{O}(r^{-2})$$



Sans connaître le détail de la géométrie, on observe que le profil se comporte comme un vortex ponctuel en champ lointain

La pression est obtenue avec l'équation de Bernoulli

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho(U_{\infty}^2 - U^2) = p_{\infty} + \frac{\rho\Gamma}{2\pi r}U_{\infty} \cdot \boldsymbol{e}_{\theta} + \mathcal{O}(r^{-2})$$

### Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Quelle est la force qui s'exerce sur le profil d'aile?

En considérant le domaine fixe  $\mathcal{D}$  fermé par  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  pour un écoulement stationnaire non visqueux, la conservation de la quantité de mouvement impose que (cf. travaux dirigés)

$$\int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}^*} \underbrace{p\mathbf{n} + \rho \mathbf{U}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})}_{\bullet} ds = 0$$

La force **F** s'exerçant sur le profil, calculée par unité de longueur dans la direction de l'envergure, est donnée par

$$\mathbf{F} = -\int_{\mathcal{S}} p\mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{S}^{\star}} \mathbf{\bullet} \, ds$$
$$= -\int_{0}^{2\pi} \left[ p\mathbf{e}_{r} + \rho \mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{r}) \right]_{r=R} R d\theta$$



#### Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Nous avons montré dans ce qui précède que pour *R* suffisamment grand,  $U \sim U_{\infty} - \frac{\Gamma}{2\pi R} e_{\theta} \qquad p \sim p_{\infty} + \frac{\rho \Gamma}{2\pi R} U_{\infty} \cdot e_{\theta}$ 

La force **F** par unité de longueur dans l'envergure est donc donnée par

$$\mathbf{F} \sim -\int_{0}^{\infty} 2\pi \left[ \frac{\rho\Gamma}{2\pi} (-U_{\infty}\sin\theta) \mathbf{e}_{r} + \rho U_{\infty}\cos\theta \left( -\frac{\Gamma}{2\pi} \right) \mathbf{e}_{\theta} \right] Rd\theta$$
$$\sim \frac{\rho\Gamma U_{\infty}}{2\pi} \int_{0}^{\infty} 2\pi \left[ \sin\theta \left( \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) + \cos\theta \left( \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} \right) \right] d\theta$$
$$\sim \frac{\rho\Gamma U_{\infty}}{2\pi} 2\pi \mathbf{e}_{2} \qquad \mathbf{F} \sim (0, \rho\Gamma U_{\infty}) \quad \text{Kutta-Joukowski theorem}$$

Il n'y a donc pas de force de traînée (paradoxe de d'Alembert), mais une force de portance directement proportionnelle à la circulation autour du profil

### • Théorème de Kutta-Joukowski (suite)



Sillage derrière un avion Cessna (photographié par Paul Bowen)

### Effet Magnus

Le résultat précédent est aussi connu sous le nom de force de Magnus (1852), qui s'exerce sur un objet en rotation (vitesse angulaire  $\Omega$ )

 $\boldsymbol{F}_{M} \propto \rho L^{3} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{U} \qquad S \propto L^{2} \qquad \Gamma = \Omega S$ 

Pour déterminer la trajectoire x d'une balle en rotation sur elle même de masse m et de rayon a, on doit résoudre ( $\dot{x} = U$ )

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} - C_D \frac{1}{2} \rho U^2 S \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} + C_M \rho \pi a^3 \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$
$$= -C_D \frac{1}{2} \rho |\dot{\mathbf{x}}| \dot{\mathbf{x}} \qquad C_M = C_M \left( \operatorname{Re}, \frac{\Omega a}{U} \right)$$



France / Brésil à Gerland en 1997 : coup franc de Roberto Carlos (position des joueurs et trajectoires, les français sont figurés en bleu et les brésiliens en jaune)

# ∟ À retenir ¬

- Concepts de vorticité, d'écoulement irrotationnel avec la version force de l'équation de Bernoulli, de relation non locale entre la vitesse et la vorticité, de la circulation, d'un tourbillon circulaire et d'un tourbillon ponctuel
- Équation de transport sur la vorticité
- Origine pariétale de la vorticité
- Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile
- Théorème de Kutta-Joukowski

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 6 - Turbulent flow



### 6 - Turbulent flow

A short description of turbulent flow

#### Statistical description

Reynolds decomposition Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

#### Turbulence modeling

Turbulent kinetic energy and dissipation Concept of turbulent viscosity Turbulent kinetic energy budget

#### Energy Cascade

Scales Phenomenological description

Key results

### Turbulent flow

- unsteady aperiodic motion
- unpredictable behaviour over a long time horizon
- presence of a wide range of time and three-dimensional space scales

Turbulence appears when the source of the kinetic energy which drives the fluid motion is able to overcome viscosity effects. Reynolds number must be large enough to observe the turbulent state, refer to Reynolds' experiment

- astrophysics, geophysical flows including ocean circulation, climate, weather forecast, hydrology, dispersion of aerosols
- external aerodynamics for aeronautics & ground transportation, internal flows in mechanical engineering, biomechanics, biological flows
- noise of turbulent flows (aeroacoustics), sound propagation (atmosphere, ocean), fluid-solid coupling and vibroacoustics

## • Turbulent subsonic (round) jet

# $\operatorname{Re}_D = u_j D / v$



Prasad & Sreenivasan (1989)  $Re_D \simeq 4000$ 



Dimotakis *et al.* (1983)  $Re_D \simeq 10^4$ 



Kurima, Kasagi & Hirata (1983) $Re_D\simeq 5.6\times 10^3$ 



Ayrault, Balint & Schon (1981)  $Re_D \simeq 1.1 \times 10^4$ 



Mollo-Christensen (1963)  $Re_D = 4.6 \times 10^5$ 

### Importance of entrainment for free shear flows

The flow divergence is induced by the entrainment of the surrounding fluid into the jet (turbulent mixing)



Visualization with smoke wires  $\text{Re}_D \simeq 5.4 \times 10^4$ Courtesy of H. Fiedler (1987)



Entrainment by a turbulent round jet from a wall  $Re_D = 10^6$ Florent, J. Méc. (1965)

 Fluctuating velocity signal in the shear layer of a subsonic round jet (measured by crossed-wire probes at x₁ = 2D, x₂ = D/2, x₃ = 0)
Nozzle diameter D = 50 mm, exit velocity U<sub>j</sub> = 30 m.s<sup>-1</sup>
→ Reynolds number Re<sub>D</sub> = 10<sup>5</sup>



• Fluctuating velocity signal in the shear layer of a jet (cont.)  $u'_1(t)$  and  $u'_2(t)$  with  $\xi = u'_{\alpha}(t)/u_{\alpha rms}$ 





What is the reason for this asymmetry of transverse velocity fluctuations?

### • Fluctuating velocity signal in the shear layer of a jet (cont.)

For a centered variable  $x'_i \equiv x_i - \bar{X}_i$  of root-mean-square deviation  $x'_{i,rms} \equiv (\overline{x'^2_i})^{(1/2)} = \sigma_{x_i}$ , the skewness *S* and the flatness or kurtosis *T* factors are defined by

$$S_{x_i} \equiv \frac{\overline{x_i'^3}}{x_{i,\text{rms}}'^3} \qquad \qquad T_{x_i} \equiv \frac{\overline{x_i'^4}}{x_{i,\text{rms}}'^4}$$

Skewness is a measure of the asymmetry of the probability density function (pdf) about its mean, and flatness is a measure of the tailedness of the pdf.

The Gaussian (normal) distribution is a usual reference pdf,

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_i}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right) \qquad x'_{i,\text{rms}} = \sigma_{x_i} \qquad S_{x_i} = 0 \qquad T_{x_i} = 3$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \qquad \overline{x_i'^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n p(\xi) d\xi$$

#### Chaotic mixing : blinking vortex flow of Aref (1984)



 $\begin{cases} \text{for } 0 \le t \le T, \text{ vortex } (-a, 0) \text{ on} \\ \text{for } T \le t \le 2T, \text{ vortex } (a, 0) \text{ on} \end{cases}$ 



control parameter :  $\beta = \frac{\Gamma T}{2\pi a^2}$ 

We observe the sensitivity of initial conditions, the transport efficiency and the velocity field induced by vorticity, see Chapter 5

### • Transport efficiency

Turbulence  $\rightarrow$  increase of diffusion, reduction of flow separation regions, decrease of pressure drag (versus increase in wall friction), increase in thermal exchanges



The laminar boundary layer in the upper photograph separates from the sharp corner whereas the turbulent boundary layer in the second photograph remains attached (from Van Dyke, fig. 156)

Refer also to illustrations in Chapters 3 & 4!

### ∟ Statistical description ¬

### • Mean and fluctuating quantities

The statistical mean  $\overline{F}(\mathbf{x}, t)$  of a variable  $f(\mathbf{x}, t)$  is defined as

$$\bar{F}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(\boldsymbol{x},t)$$

where  $f^{(i)}$  is the *i*-th realization : convenient when manipulating equations but difficult to implement in practice, or even impossible for geophysical flows!

We approximate the ensemble mean  $\overline{F}$  of  $f = \overline{F} + f'$  by a sufficiently long time average of one realization only :

$$\bar{F}(\boldsymbol{x}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} f(\boldsymbol{x}, t') dt'$$

Time average makes sense only if turbulence is stationary, that is statistics are independent of time (refer to the concept of ergodicity in signal processing)

### Reynolds decomposition

For a given variable f, Reynolds decomposition  $f = \overline{F} + f'$  into mean and fluctuating (deviation) components is introduced.

• Centered fluctuating field

 $f \equiv \overline{F} + f'$  with  $\overline{f'} = 0$   $(f' = f - \overline{F} \text{ and } \overline{f'} = \overline{F} - \overline{F} = 0)$ 

• Rule for the product of two any variables (f and g here),

$$fg \equiv (\bar{F} + f')(\bar{G} + g') = \bar{F}\bar{G} + \bar{F}g' + f'\bar{G} + f'g'$$
  
and thus,  $\overline{fg} = \bar{F}\bar{G} + \bar{F}\overline{g'} + \overline{f'}\bar{G} + \overline{f'g'} = \bar{F}\bar{G} + \overline{f'g'}$ 

$$\overline{fg} = \overline{F} \ \overline{G} + \overline{f'g'} \tag{20}$$

Reynolds decomposition for velocity :  $U_i \equiv \overline{U}_i + u'_i$  with  $\overline{u'_i} = 0$ 

- $\bar{U}_i$  part which can be reasonably calculated
- $u'_i$  part which must be modelled (turbulent fluctuations)

### ∟ Statistical description ¬

### • Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

Assumptions (to simplify) : incompressible flow  $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$ and homogeneous fluid, constant density  $\rho$ 

How to determine the transport equation of the mean quantities? First, substitute Reynolds decomposition and then, average the equation!

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial(\bar{U}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (21)$$

By substracting both equations,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$
 and  $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0$   $\implies$   $\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$ 

The mean flow field  $ar{U}$  is incompressible, and so is the fluctuating field u'

#### ∟ Statistical description ¬

### • Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$$

By introducing Reynolds decomposition, and taking the average  $U_i \equiv \bar{U}_i + u'_i$   $p \equiv \bar{P} + p'$   $\tau_{ij} \equiv \bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}$ 

$$\frac{\partial(\rho\bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{U}_i\bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\tau}_{ij} - \rho\overline{u'_iu'_j}\right)$$
(22)

The term  $-\rho u'_i u'_j$  is Reynolds stress tensor, unknown, thus leading to a closure problem for Eqs. (21) and (22). Generally this term is larger than the mean viscous stress tensor except for wall bounded flows, where the viscosity effects become preponderant close to the wall (no-slip boundary condition)

### ∟ Turbulence modeling ¬

### • Turbulent kinetic energy $k_t$ and dissipation $\epsilon$

The turbulent kinetic energy and the turbulent dissipation are two key quantities to examine turbulent flows. By introducing Reynolds decomposition, using the rule (20), we obtain

for the kinetic energy,

$$\frac{\overline{U_i U_i}}{2} = \frac{\overline{U_i \overline{U_i}}}{2} + \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} \qquad k_t \equiv \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$$

 $k_t$  is the turbulent kinetic energy

for the dissipation,

$$2\nu \overline{D_{ij}D_{ij}} = 2\nu \overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij} + 2\nu \overline{d'_{ij}d'_{ij}} \qquad \epsilon \equiv 2\nu \overline{d'_{ij}d'_{ij}}$$

 $\epsilon$  (m<sup>2</sup>.s<sup>-3</sup>) is the dissipation rate of  $k_t$  (m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup>) induced by the molecular viscosity
# Concept of turbulent viscosity for turbulence models introduced by Boussinesq (1877)

Modeling of Reynolds stress tensor  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ . By analogy with the viscous stress tensor  $\overline{\overline{\tau}}$ , one defines

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = 2\mu_t \overline{D}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k_t \delta_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k_t \delta_{ij}$$

where  $\mu_t = \mu_t(x, t)$  is the turbulent viscosity, a property of the flow field (and not of the fluid as for the molecular viscosity  $\mu$ )

The introduction of a turbulent viscosity for closing Reynolds stress tensor is an assumption, so not always verified by turbulent flows. In addition, it is also assumed that the turbulent viscosity remains positive (thus inducing specific behaviours in terms of energy transfer)

#### Illustration for a free subsonic round jet

M = 0.16 and  $Re_D = 9.5 \times 10^4$  (from Hussein, Capp & George, 1994)



# • Concept of turbulent viscosity for turbulence models (cont.)

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} &= 0\\ \frac{\partial (\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial (\bar{P} + \frac{2}{3}\rho k_t)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Big( 2(\mu + \mu_t) \bar{D}_{ij} \Big) \end{aligned}$$

How to compute the turbulent viscosity  $\mu_t(x, t) = \rho v_t$ ?

From dimensional arguments, the product of a velocity scale by a length scale, for example  $v_t \sim k_t^{1/2} \times k_t^{3/2}/\epsilon \sim k_t^2/\epsilon$ , and then write a transport equation for  $k_t$  and  $\epsilon$  to obtain the famous  $k_t - \epsilon$  model.

There are about 200 turbulent viscosity models published in the literature! (see textbooks by Wilcox and Durbin among others)

#### • Turbulent kinetic energy budget

The transport equation for  $k_t$  is a key result, providing an overview for energy transfers between the mean and the turbulent flows (the demonstration can be found in textbooks). At first glance, production of  $k_t$  requires the presence of a mean velocity shear,



transport terms

 ${\ensuremath{\, \bullet }}$  Heuristic interpretation of the production term  ${\ensuremath{\mathcal{P} }}$ 



The production term  $\mathcal{P}$  is – in general – a transfer from the shear mean flow  $\overline{U}$  to the turbulent field u' (but becomes always a positive transfer term using a turbulent viscosity model, a drawback of turbulence models)

# Scales

Large scales in O(L, u') – associated with the geometry (cavity, cylinder, jet, wake, car, airfoil, pipe, ...) and thus directly linked to the size of the flow itself

 $\rightarrow$  energy transfer between (basically from) large scale structures to small scale structures, but this transfer is stopped by the molecular viscosity for the smallest scales

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} \simeq \boldsymbol{\nu} \nabla^2 \boldsymbol{u}'$$

Smallest scales in  $O(l_{\eta}, u_{\eta})$  – known as the Kolmogorov scales (Re =  $u_{\eta}l_{\eta}/\nu = 1$ ). The Kolmogorov length scale  $l_{\eta}$  plays a fundamental role in experiments (sampling frequency) as well as in numerical simulations (grid size).

The ratio  $L/l_{\eta}$  is a function of Reynolds number  $\text{Re}_L = u'L/\nu$ , where  $u'^2 \simeq 2k_t/3$ 

$$\frac{L}{l_{\eta}} \sim \operatorname{Re}_{L}^{3/4}$$

# ∟ Energy cascade ¬

# • Turbulent mixing layer (Brown & Roshko, 1974)



(Shadowgraphs with a spark source)

Energy cascade in a mixing layer by increasing Reynolds number (through pressure and velocity, ×2 for each view)

More small-scale structures are produced without basically altering the large-scale ones (linked to the transition process, as shown by Winant & Browand, 1974)

> Anatol Roshko (1923-2017)



# ∟ Energy cascade ¬

#### • Taylor-Green vortex flow

Re = 3000 on a 384<sup>3</sup> grid at times t = 0, t = 9 and t = 18 (dimensionless variables) From Fauconnier *et al.* (2013)

#### Vortex structures colored by *z*-vorticity, $\omega = \nabla \times \boldsymbol{u}$





### ∟ Energy cascade ¬

 High-fidelity simulation of turbulent flow and its noise in a physically and numerically controlled environment



Isothermal turbulent jet at M = 0.9 and  $Re_D = 10^5$ ,  $1.1 \times 10^9$  points,  $0 \le r \le 7.5D$  and  $-D \le z \le 20D$ 

Pressure fluctuations (±55 Pa) and normalized vorticity  $(|\omega| \times \delta_{\theta}/U_c)$ 

(Bogey, 2017)



- Features of turbulence
- Reynolds decomposition, RANS Eqs. (22) and the closure of Reynolds stress tensor  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$
- Concept of turbulent viscosity
- Key scales and energy cascade

# ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 7 - Energy, thermodynamics and compressible flow



#### 7 - Energy, thermodynamics and compressible flow

#### Conservation of total energy

Compressible viscous stress tensor Internal energy First law of thermodynamics Heat input Local formulation of the energy conservation

#### Thermodynamics of equilibrium

Thermodynamic variables First law of thermodynamics Gibbs identity Specific heats Perfect gas

#### Thermodynamics of motion

Thermodynamic variables Constitutive laws Governing equations Boundary conditions

Entropy and the second law of thermodynamics

Entropy's equation Conservation of internal energy Equation for temperature

#### **Compressibility effects**

Mach number Selected historical milestones Supersonic flow

#### ∟ Compressible viscous stress tensor ¬

# • Flow is henceforth compressible : $\nabla \cdot \boldsymbol{U} \neq 0$

- As a result, the interactions between heat and dynamics must be now considered, with the introduction of thermodynamic relations
- Newtonian law for the viscous stress tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \quad \text{with} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{U})\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$$

where  $\lambda$  is the second viscosity

It is straightforward to show that (left as an exercise) that the viscous dissipation reads

$$\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}}=2\mu\overline{\overline{D}}:\overline{\overline{D}}+\lambda(\nabla\cdot \boldsymbol{U})^2\geq 0$$

• Mean normal shear stress :  $\sigma_{ii}/3 = -p + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\nabla \cdot U$ 

 $\rightarrow$  the thermodynamic pressure now differs from the mean normal shear stress

#### ∟ Conservation of total energy ¬

### Internal energy

$$E_t = \int_{\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\nu = \int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, d\nu$$

The new variable e = e(x, t) is associated with the internal state description of the fluid (internal motion of molecules or thermal agitation)

e is the specific internal energy in J.kg<sup>-1</sup>

(specific quantity = value per unit of mass of the fluid)

 $e_t$  is the specific total energy

 $E_t$  is the total energy contained in the fluid domain  $\mathcal{D}$ 

## ∟ Conservation of total energy ¬

# First law of thermodynamics (conservation of energy)

$$\frac{dE_t}{dt} = P_{\text{ext}} + Q$$

 $P_{\text{ext}} \equiv \text{rate of work by body and surface (external) forces}$  $Q \equiv \text{amount of heat provided to the fluid domain } \mathcal{D}$ (Remark : time rate of energy change - strictly speaking - power terms, in W)

From the conservation of the kinetic energy, refer to Eq. (11) in slide 88, written here for a material domain D, one has

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{U^2}{2} \, d\nu = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

from which it can be deduced that

(= heat addition + viscous effects/friction)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e \, d\nu = Q - P_{\text{int}}$$

# ${\scriptstyle L}$ Conservation of total energy ${}^{\neg}$

# • First law of thermodynamics (cont.)





#### ∟ Conservation of total energy ¬

## • First law of thermodynamics (cont.)

Reminder of the expressions of  $P_{\text{ext}}$  and  $P_{\text{int}}$ , refer to Eq. (12) in slide 88,

$$P_{\text{ext}} \equiv \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) \, d\boldsymbol{s} + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} \, d\boldsymbol{v} = \int_{\mathcal{D}} \left[ \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} \right] \, d\boldsymbol{v}$$
$$-P_{\text{int}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{D}} \, d\boldsymbol{v} = -\int_{\mathcal{D}} p \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\boldsymbol{v} + \int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}} \, d\boldsymbol{v} \qquad (23)$$
$$\underbrace{\sum_{\substack{\text{compression / } \\ \text{dilatation}}}_{\text{viscous}} = 0$$

The first term is associated with the work of pressure on fluid particles : this term is positive or negative (acts like a ressort), and is null for an incompressible flow

The second term represents the work of viscous forces acting on fluid particles

#### ∟ Conservation of total energy ¬

#### Heat input

 $Q \equiv \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_v$ 

Surface heat input  $Q_s = -\int_{\mathcal{S}} q \, ds$ 

Input heat flux accross the surface S : thermal conduction, tranfer of energy through the motion / collisions of molecules and electrons (no mass transfer) q in W.m<sup>-2</sup>

Volumetric heat input  $Q_v = \int_{\mathcal{D}} \rho q_\star \, dv$  Radiative heat transfer : direct input inside the domain  $\mathcal{D}$ , for instance by radiation absorption or emission (electromagnetic waves)  $q_{\star}$  in W.kg<sup>-1</sup> (amount of heat addition per unit mass)

# ${\scriptstyle L}$ Conservation of total energy ${}^{\neg}$

# Heat flux vector

 $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds$  heat flux



heat flux vector q(x, t)

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t) = \begin{bmatrix} q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1) \\ q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2) \\ q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix}$$

Cauchy's relation :  $q(x, n) = q(x) \cdot n$ , linear relation in n (refer to a similar discussion in Chapter 1 for the stress tensor  $T = \overline{\overline{\sigma}} \cdot n$ )

 $q \cdot n \, ds$  is the heat flux from B to A accross the elementary surface ds

$$Q_s = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = -\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{q} \, dv$$

## ∟ Conservation of total energy ¬

#### • Local formulation for the conservation of energy

Can be written in many different forms, all of which are useful!

total energy 
$$\rho \frac{De_t}{Dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho \boldsymbol{q}_{\star}$$
  
kinetic energy 
$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U^2 \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} + p \nabla \cdot \boldsymbol{U} - \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{D}$$
(24)  
internal energy 
$$\rho \frac{De}{Dt} = \underbrace{-p \nabla \cdot \boldsymbol{U}}_{\text{compression}} + \underbrace{\overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{D}}_{\text{dissipation}} \underbrace{-\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho \boldsymbol{q}_{\star}}_{\text{heat input}}$$

 $\begin{array}{l} \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} \quad \text{local rate of external work } (P_{\text{ext}}) \\ - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_{\star} \quad \text{local heat addition } (Q) \\ p \nabla \cdot \boldsymbol{U} - \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}} \quad \text{local rate of internal work } (P_{\text{int}}) \end{array}$ 

Integral formulations can also be established by using the Reynolds theorem (5) introduced in Chapter 2, see slide 35

# • Thermodynamic variables

## Fluid in equilibrium

(steady state, no flow (no motion), U = 0 $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$  (only pressure)  $\implies$  pressure is then defined (fluid properties such as  $\rho$ , p and e are independent of x and t

Thermodynamics introduces new state variables : the absolute temperature T, the specific entropy s and the specific enthalpy  $h \equiv e + p/\rho$ 

Among all these thermodynamic variables, that is  $\rho$ , e, p, T, s, and h, only  $\rho$  and e are defined independently of any thermodynamic equilibrium (*i.e.* defined independently of any thermodynamic analysis)

For a simple thermodynamic system, any variable can be calculated from two other independent variables. A local thermodynamic state in fluid mechanics, that is with the presence of flow, can be generalized by first considering  $\rho(x,t)$  and e(x,t), to thus determine other variables,  $s = s(\rho, p)$  or  $p = (\rho, s)$  for instance

#### • Link with the first law of thermodynamics for a closed system



Both heat and work are forms of energy, and energy is conserved

James Prescott Joule (1818-1889) For a closed system,

$$\delta q = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{25}$$

 $\delta q$  heat supplied to the system (positive toward the system) - $pdv_s$  work done on the system by the surroundings, positive toward the system,  $v_s = 1/\rho$  is the specific volume

 $d \equiv$  depends only upon the change of state (applied to a state variable)  $\delta \equiv$  depends upon the process used to change the state

When  $\delta q$  is obtained by a reversible process, that is a succession of equilibrium states in (25), the internal energy conservation (24) for an ideal fluid is retrieved,

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{u} + q_{\star} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + q_{\star} = -p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) + q_{\star}$$

# Specific heats



Heat  $\delta q$  is supplied to the system at constant volume, the internal energy increases by  $\delta q = de = c_v dT$ 

 $c_v = \frac{\partial e}{\partial T} \bigg|_{\rho}$  specific heat at constant volume

p = cst



At constant pressure  $\delta q = dh = c_p dT$ 

 $c_p = \frac{\partial h}{\partial T}\Big|_p$  specific heat at constant pressure

With respect to the previous configuration at constant volume, the volume must now expand which requires work,  $\delta q = de + p dv$ 

Ideal (perfect) gas  $c_p = c_v + r$ 

Liquid (incompressible) :  $c = c_p = c_v$ 

### Second law of thermodynamics and Gibbs relation



Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903)

For a reversible process,  $\delta q \equiv T ds$  where the entropy *s* is a new state variable (Rudolf Clausius, 1822-1888)

and combining with the first law of thermodynamics (25), the following fundamental identity is derived  $Tds = de + pd\left(\frac{1}{o}\right)$  Gibbs relation

where for an arbitrary process,

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T}\right)_{\rm rev} + ds_{\rm irr} \qquad ds_{\rm irr} > 0$$

 $ds_{irr}$  is induced by thermal conduction, viscosity, species diffusion or shocks in supersonic flow

Adiabatic transformation  $\delta q = 0$  and  $ds \ge 0$ Adiabatic and reversible transformation  $\delta q = 0$  and ds = 0: isentropic process

#### About thermodynamics!

"Thermodynamics is a funny subject. The first time you go through it, you don't understand it at all. The second time you go through it, you think you understand it, except for one or two points. The third time you go through it, you know you don't understand it, but by that time you are so used to the subject, it doesn't bother you anymore"

attributed to Arnold Sommerfeld around 1940 (1868-1951, German theoretical physicist)

# Perfect (ideal) gas

Equation of State :  $p = \rho r T$ , simple thermodynamic system  $p = p(\rho, T)$ 

 $r = \frac{R}{M}$  with  $\begin{cases} R \simeq 8.314472 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} & \text{ideal (universal) gas constant} \\ M & \text{molecular weight of the gas} \end{cases}$ 

$$c_p - c_v = r$$
 (Mayer's relation)

$$de = c_v dT$$
  $dh = c_p dT$   $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$   $s = c_v \ln(p/\rho^{\gamma}) + \text{cst}$ 

Air 
$$r = 287.06 \text{ J.kg}^{-1} \text{.K}^{-1}$$
  
 $\gamma = 1.4$   $c_p = 1000 \text{ J.kg}^{-1} \text{.K}^{-1}$   $c_v = 720 \text{ J.kg}^{-1} \text{.K}^{-1}$   
(standard conditions)

### ∟ Thermodynamics of motion ¬

# • Constitutive laws

Newtonian law for the viscous stress tensor (see slide 230)  $\sigma = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad \text{with} \quad \overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}} + \lambda(\nabla \cdot U)\overline{\overline{I}}$ 

Fourier's law  $q = -k\nabla T$ where k is the thermal conductivity (the minus sign expresses that heat flows from hot to cold region)



The coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  and k are also functions of the local thermodynamic state, for instance with the thermal conductivity  $k = k(\rho, e)$ 

#### ∟ Thermodynamics of motion ¬

#### • Governing equations for a compressible flow

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \qquad \text{mass}$$

$$\rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \text{momentum}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \boldsymbol{U} + \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_{\star} \qquad \text{internal energy}$$

with constitutive laws

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}} + \lambda (\nabla \cdot U) \overline{\overline{I}}$$
$$q = -k \nabla T$$

and equations of state (by choosing  $\rho$  and T here to express the other thermodynamic variables)

$$p = p(\rho, T)$$
  $e = e(\rho, T)$   $\mu = \mu(\rho, T)$   $\lambda = \lambda(\rho, T)$   $k = k(\rho, T)$ 

#### Boundary conditions at a solid wall

For the velocity, viscous fluid,  $U = U_{wall}$ inviscid fluid,  $U \cdot n = U_{wall} \cdot n$ 

For the temperature,  $T = T_{wall}$  for a wall.

The fluid problem should be coupled with the thermal conduction inside the solid, by imposing the continuity of the temperature T and of the heat flux  $q = -k\mathbf{n} \cdot \nabla T$  between the solid and the fluid.

As for an inviscid flow (no viscosity), the case k = 0 (thermal conductivity neglected) must be interpreted with some caution, see slide 280 about the thermal boundary layer

An ideal flow is a flow model for which v = 0 and k = 0(no viscosity, no thermal conductivity)

## ${\scriptstyle L}$ Entropy and the second thermodynamic law ${}^{\neg}$

# Entropy's equation

By applying the Gibbs relation (see slide 241) to a fluid particle, in order to introduce entropy

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \implies T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

the last term can be recast by using the conservation of mass

$$-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{U} \implies \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \boldsymbol{U}$$

Then, the conservation of the internal energy can be recast as

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \boldsymbol{U} + \overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_{\star} \implies \rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\overline{\boldsymbol{\tau}} : \overline{\boldsymbol{D}}}{T} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} + \frac{\rho q_{\star}}{T}$$

and finally, with the help of the following vectorial identity

$$\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} = \frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla T}{T^2} + \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)$$

# ${\scriptstyle L}$ Entropy and the second thermodynamic law ${}^{\neg}$

# • Entropy's equation (cont.)

... the following transport equation for entropy is obtained,



The production of entropy in a control domain  $\mathcal{D}$  is thus given by (refer to the definition of dissipation for the first term)

$$\mathcal{P}_{s} \equiv \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}}{T} - \frac{q \cdot \nabla T}{T^{2}} \right) d\nu = \begin{array}{c} \text{mechanical dissipation} \\ \text{induced by friction} \end{array} + \begin{array}{c} \text{thermal "dissipation"} \\ \text{induced by conduction} \end{array}$$

According to the second law of thermodynamics, entropy never decreases in an isolated system ( $q \cdot n = 0$  on S,  $q_{\star} = 0$ ), and increases in presence of an irreversible process. It can be mathematically demonstrated that

$$\mathcal{P}_s \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu \ge 0 \\ \lambda \ge -2\mu/3 \\ k \ge 0 \end{cases}$$

#### ∟ Entropy and the second thermodynamic law ¬

#### Conservation of the internal energy



 $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} < 0 & \text{compression} & \text{kinetic energy} \rightarrow \text{internal energy} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} > 0 & \text{expansion} & \text{internal energy} \rightarrow \text{kinetic energy} \end{cases}$ 

#### ${\scriptstyle L}$ Entropy and the second thermodynamic law ${}^{\neg}$

#### • Transport equation for temperature

From s = s(p, T), it can be written that

 $\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial p} \bigg|_{T} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial s}{\partial T} \bigg|_{p} \frac{DT}{Dt} = -\frac{\beta}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{c_{p}}{T} \frac{DT}{Dt}$ 

(using Maxwell relations)

and by using the entropy conservation equation

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho \boldsymbol{q}_{\star}$$

the transport equation for the temperature can be finally derived (general formulation for gas and liquid)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} + \beta T \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_{\star}$$
(26)

 $\beta \equiv -\rho \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p = \frac{1}{T} \text{ for a perfect gas} \quad (\beta \text{ thermal expansion coefficient})$ 

# ∟ Compressibility effects ¬

# • 1-D compressible ideal flow model



steady inviscid flow

no gravity

1-D duct model (flow uniform in a cross section)

Application of the Reynolds theorem (5) for a fixed domain  $\mathcal{D}$ , using Eq. (24) for the total energy  $e_t$ 

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\nu = -\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{U} \, d\nu = -\int_{\mathcal{D}} \nabla p \, d\nu - \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\int_{\mathcal{S}} [p\mathbf{n} + \rho \mathbf{U}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})] \, ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, d\nu = -\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (p\mathbf{U}) \, d\nu - \int_{\mathcal{S}} \rho e_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\int_{\mathcal{S}} (p + \rho e_t) \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds \end{cases}$$

#### ∟ Compressibility effects ¬

#### • 1-D compressible inviscid flow model (cont.)

Introducing the total enthalpy  $h_t = h + U^2/2$ , with  $h = e + p/\rho$  and consequently  $\rho e_t + p = \rho h_t$ , the last previous Eq. reads as

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, d\nu = -\int_{\mathcal{S}} \rho h_t \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

The conservation of mass, momentum and total energy then provides

$$\begin{cases} [\rho US]_{1}^{2} = 0 \\ [(\rho U^{2} + p)S]_{1}^{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho_{1}U_{1}S_{1} = \rho_{2}U_{2}S_{2} = \dot{Q}_{m} \text{ mass flow rate} \\ (\rho_{1}U_{1}^{2} + p_{1})S_{1} = (\rho_{2}U_{2}^{2} + p_{2})S_{2} \\ h_{t1} = h_{t2} \end{cases}$$
#### ∟ Compressibility effects ¬

#### • The Pitot tube revisited, see slide 58

The total (or stagnation) enthapy  $h_t$  is thus preserved. Using the same notations as for the incompressible case,

$$h_{t1} = h_{t0}$$
  $c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p T_0$   $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$  (perfect gas)

$$T_0 = T_1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{\gamma r} U_1^2 \implies T_0 = T_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \qquad M_1 = \frac{U_1}{c_1} \qquad (c_1^2 = \gamma r T_1)$$

From the equation of state for ideal gas  $p = \rho r T$  and the isentropic relation  $p/\rho^{\gamma} = cst$ , refer to slide 243, it is then straightforward to obtain a similar relation for pressure

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

## ∟ Compressibility effects ¬

## • The Pitot tube revisited (cont.)



Compressible flow model

$$M_{1}^{2} = \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_{0}}{p_{1}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Incompressible flow model

 $M_1^2 = \frac{2}{\gamma} \left( \frac{p_0}{p_1} - 1 \right)$ 

$$M_1 \rightarrow M_1$$
 as  $\Delta p = p_0 - p_1 \rightarrow 0$ 

Deviation by 5% of the incompressible model from the compressible one for  $M_1 \simeq 0.3$ , which provides the classical condition for applying incompressible flow model



#### Some historical milestones



Ernst Mach (1838-1916, Austrian physicist) (The origins of the Mach number 1887)

## Karl Gustaf Patrik de Laval (1845-1913, Sweden) Supersonic convergent-divergent nozzle (1893)

#### ∟ Supersonic flow ¬

#### Some historical milestones

14 oct. 1947 - First supersonic aircraft Bell X-1 flying at  $M \simeq 1.06$ Major Chuck Yeager (USAF, 1923-2020)



(US Air Force, 1947)



14 oct. 2012 - First person to break the sound barrier  $M \simeq 1.25$  (freefall) Felix Baumgartner (Austrian, living in Germany)



(Red Bull Stratos project)

#### ∟ Supersonic flow ¬

#### Sonic boom



F/A-18 Hornet breaks the sound barrier Off the coast of Pusan, South Korea, July 7, 1999 (U.S. Navy/Ensign John Gay)

The cloud forms as a result of the decrease in pressure and temperature behind the shock

N-wave pattern measured close to the ground from Concorde



Concorde - Shock waves at Mach 2.2 in wind tunnel (ONERA)



#### ${}_{\sf L}$ Supersonic flow $\urcorner$

## • Shock waves of a supersonic jet flying above the Mojave desert (NASA, 2015)





#### ∟ Supersonic flow ¬

#### • Shadowgraph of transition on a sharp cone at Mach 4.31

(Schneider, *Prog. Aero. Sci.*, 2004, from Naval Ordnance Lab ballistics range)

A shock wave emanating from the nose of a cone travelling at Mach 4 in a ballistic range shows up as a thin dark line in this Schlieren image; the sharp jump in density across the shock produces a steep refractive-index gradient, which in turn deflects transmitted light, thereby producing the contrast that we observe in the figure. Also visible are laminar and turbulent boundary layers and the wake. Re  $\simeq 6.2 \times 10^5$ 



- Compressible flow
- Conservation of energy, Eqs. (24)
- Governing equations for a compressible flow
- 1-D compressible inviscid flow model
- General transport equation for temperature, see Eq. (26) in slide 250

## ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# 8 - Heat transfer



#### 8 - Heat transfer

#### Heat transfer

Assumptions and Boussinesq's approximation Transport Eq. for temperature Prandtl number

#### Heat conduction

Some classical solutions

#### **Advection - diffusion**

Péclet number High Péclet number flow Thermal boundary layer

#### Convection heat transfer

Transfert coefficient and Nusselt numberBiot numberSolid-fluid heat transfer modelHeat transfer to flow in pipe

#### Natural convection

Forced and natural convection Grashof number

Key results

If you can't take the heat, don't tickle the dragon!

#### Assumptions

The assumption of low Mach number flow is relevant in many heat transfer problems, and is useful as it makes the problem much simpler to solve. It will be hold throughout this chapter.

Transport equation for temperature, see Eq. (26) in slide 250



 $-\nabla \cdot \boldsymbol{q}$ 

heat flux by thermal conduction  $q = -k\nabla T$  Fourier's law, k (constant) thermal conductivity

 $\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}}$ 

 $\beta T \frac{Dp}{Dt}$ 

heat generated through deformation by viscous stresses ( $\sim M_a^2$ ) (frictional dissipation)

influence of pressure (~ 
$$M_a^2$$
 for a gas),  $\beta$  thermal expansion coefficient  $\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p = \frac{1}{T}$  for perfect gas (and  $\beta \simeq 0$  for a liquid)

 $\rho q_{\star}$  heat input (e.g. radiation), not considered here

#### Boussinesq's approximation

For the equation of state, in accordance with the assumption of low Mach number flow (incompressible), density is assumed to be a function of the temperature only, that is  $\rho = \rho(T, P) \simeq \rho(T)$ .

Density is assumed to be a linear function of the temperature for small temperature variations

 $\rho/\rho_0 \simeq 1 - \beta(T - T_0)$ 

where  $\rho_0 = \rho_0(T_0)$  stands for the fluid at rest. Finally, one usually may neglect density variations,  $\beta(T - T_0)$  is a small term, except in the buoyancy force for natural convection. This leads to the Boussinesq approximation for the momentum conservation equation,

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{U} + \rho \boldsymbol{g}$$
(27)

#### ∟ Heat transfer ¬

#### • Transport equation for temperature

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T \qquad \text{where} \qquad a \equiv \frac{k}{\rho c_p} \tag{28}$$

*a* is the thermal diffusivity, has units  $m^2 \cdot s^{-1}$ , and measures the ability of the molecular transport to remove temperature gradient (similar to the dynamic viscosity v for velocity gradient)

This transport Eq. must be completed by appropriate boundary conditions.

The velocity is assumed to be known here, in order to determine T(x, t) (this point will be discussed in the last section)

#### ∟ Heat transfer ¬

#### Joseph Fourier



# Baron Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Joseph Fourier lived a remarkable double life. He served as a high government official in Napoleonic France and he was also an applied mathematician of great importance. He was with Napoleon in Egypt between 1798 and 1801, and he was subsequently prefect of the administrative area ("Département") of Isère in France until Napoleon's first fall in 1814. During the later period he worked on the theory of heat flow and in 1807 submitted a 234-page monograph on the subject. It was given to such luminaries as Lagrange and Laplace for review. They found fault with his adaptation of a series expansion suggested by Daniel Bernoulli in the eighteenth century. Fourier's theory of heat flow, his governing differential equation, and the now-famous "Fourier series" solution of that equation did not emerge in print from the ensuing controversy until 1822.

(from Lienhard IV & Lienhard V, A Heat Transfer Textbook, 2017)

#### ∟ Heat transfer ¬

#### Prandtl number

$$\Pr \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu i \text{scous diffusion rate}}{\text{thermal diffusion rate}} = \frac{L^2/a = \tau_{\text{thermal}}}{L^2/\nu = \tau_{\text{viscous}}}$$

Prandtl number of various fluids at 20° C (White, *Viscous Fluids*, 1991)



#### Heat transfer by conduction, i.e. without motion of the medium

The heat diffusion equation reads

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T$$

#### 1-D elementary solution : initial temperature jump

 $T = T_{-}$  for  $x_{1} < 0$  and  $T = T_{+}$  for  $x_{1} > 0$  at t = 0The temperature evolution is governed by

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \qquad t > 0$$

 $\begin{array}{c} T_{+} \\ \hline T_{-} \\ \hline 0 \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{1} \end{array} \end{array}$ 

and the solution is given by

$$T(x_1,t) = \frac{T_- + T_+}{2} + \frac{T_+ - T_-}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{at}}\right) \qquad \operatorname{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\xi^2} d\xi$$

where erf is the error function.

#### • 1-D elementary solution : initial temperature jump (cont.)

Solution  $T(x_1)$  plotted for different times t



#### — initial condition

The initial temperature jump is eliminated by thermal diffusion, propagating at the characteristic length scale  $\sqrt{at}$ 

The solution is self-similar, by considering the variable  $\eta$ 

 $\eta = \frac{x_1}{2\sqrt{at}}$ 

#### • General solution to the heat diffusion equation

Diffusion of a point heat source

$$T(x_1, t) = T_0 + \frac{C}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4at}\right)$$

Gaussian shape, width  $\propto \sqrt{at}$  and peak  $\propto \sqrt{t}$ 

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (T - T_0) \, dx_1 = C$$

$$T \rightarrow T_0 + C\delta(x_1) \text{ as } t \rightarrow 0$$
  
— initial condition



#### • Thermal shock in a semi-infinite medium

Initial condition  $T(x_1, 0) = T_0$  for  $x_1 > 0$ ,

with a sudden change in temperature (thermal shock) applied at  $x_1 = 0$  for t > 0,  $T(0,t) = T_1$ , associated with  $T(x_1,t) \rightarrow T_0$  as  $x_1 \rightarrow \infty$ 

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \qquad t > 0$$

$$T(x_1, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{at}}\right)$$

Penetration depth  $\propto \sqrt{at}$ 



#### Heat diffusion in an isolated finite body

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

 $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$  initial-value problem (non uniform)  $\mathbf{n} \cdot \nabla T = 0$  adiabatic boundary condition (isolated)

Estimation of the time scale for heat diffusion  $L \sim \sqrt{at} \implies t \sim L^2/a$ 

For  $t \ll L^2/a$ , one has  $T \sim T_0(\mathbf{x})$ 

For  $t \sim L^2/a$ , diffusive evolution by heat conduction

For  $t \gg L^2/a$ , the whole temperature field takes a constant value inside the body

For the case of a thermal shock, with  $T = T_1(x, t)$  prescribed on the surface S, the temperature field becomes uniform for a time  $t \sim L^2/a$ . The time evolution of the penetrate depth is given by  $\sqrt{at}$ .

273



#### • The age-of-the-Earth debate

- about 4000 years old from the Bible
   J. Keplers (1571-1630)
  - I. Newton (1643-1727)

J. Ussher (1581-1656)

(also from Chinese imperial dynasty)



Solidification from molten rocks  $T - T_s \simeq (T_0 - T_s) \operatorname{erf}[x_1/(2\sqrt{aT})]$  (1-D)  $G_s = \frac{\partial T}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = (T_0 - T_s)/\sqrt{\pi at}$ 

Lord Kelvin (1844, 1846) :  $T_0 \simeq 2900^{\circ}$ C,  $T_S \simeq 20^{\circ}$ C  $a = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{.s}^{-1}$ ,  $G_s \simeq 36^{\circ}$ C/km  $\implies 20 \text{ Ma} < t_E < 400 \text{ Ma}$  -• Controversies (among others) with the geologists! Charles Darwin (1809-1882) John Perry (1850-1920)  $t_E \ge 2$  Ga

Ma = million years ago, Ga = giga-annum

→ E. Rutherford (1871-1937) radioactive heat (small)

> Claire Patterson (1922-1995) radioactive dating (1956)  $t_E \simeq 4550 \text{ Ma} \pm 70 \text{ Ma}$

A. Wegener (1880-1930) Earth not a solid rock!



## Steady conduction

The steady solution verifies Laplace's equation  $\nabla^2 T = 0$ , associated with appropriate boundary conditions :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = 0 \qquad T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{e} x_1$$
Fourier's law  $q = \frac{k(T_0 - T_1)}{e} e_1$ 
Heat flux (in W) accross a surface  $S$ ,  

$$\Phi = \frac{kS}{e} (T_0 - T_1)$$

Concept of thermal resistance  $R \equiv (T_0 - T_1)/\Phi$ , has units K W<sup>-1</sup>, R = e/(kS) for a layer of thickness *e*.

There is an electrical analogy, (temperature, heat flux)  $\leftrightarrow$  (tension, intensity), sometimes used in engineering.

#### • Advection-diffusion in a flow : Péclet number

The Péclet number is the analogue of the Reynolds number for heat transfer problems



The value of the Péclet number indicates the relative importance (efficiency) of advection with respect to thermal diffusion. Two asymptotic regimes,

 $Pe \ll 1$  corresponding to a pure heat conduction problem.

Pe  $\gg 1$ , where advection dominates and heat conduction is negligible, except near walls with the presence of thermal boundary layers.

#### ∟ Advection-diffusion ¬

#### Advection-diffusion around an isothermal body

Transport Eq. for temperature,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T$$

$$\begin{cases} T = T_s = \operatorname{cst} \operatorname{on} \mathcal{S} \\ T \to T_{\infty} \text{ upstream far from the body} \end{cases}$$

By introducing the following dimensionless variables

$$x^{\star} = \frac{x}{L}$$
  $t^{\star} = \frac{U_{\infty}t}{L}$   $\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}}$   $U^{\star} = \frac{U}{U_{\infty}}$ 

The transport Eq. for temperature reads

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^{\star}} + \mathbf{U}^{\star} \cdot \nabla^{\star} \theta = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^{\star^2} \theta \qquad \begin{cases} \theta = 1 \text{ on } S \\ \theta \to 0 \text{ upstream at infinity} \end{cases}$$



#### • High Péclet number flow

Heat conduction (temperature diffusion) can be neglected, and temperature is simply advected by the flow,

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

In other words, temperature of fluid particles remains constant. Inlet boundary conditions (but not only) must be prescribed, e.g.  $T = T_{\infty}$  here.

There is, however, a discontinuity of temperature on the body surface  $T_{\infty} \neq T_s$ , but this singularity is an artefact of the model (Pe  $\rightarrow \infty$ ). Physically, a thin thermal boundary layer of thickness  $\delta_T$  develops around the body



The thermal wake is formed by fluid particles from the thermal boundary layer

#### ∟ Advection-diffusion ¬

### • High Péclet number flow (cont.)

The thermal boundary layer and wake are induced by conduction heat transfer between the solid body and the fluid. This thermal boundary layer is thin, a consequence of the high Péclet number flow assumption.



There is an analogy between the velocity and the thermal boundary layers, but the momentum and heat diffusivity coefficients are not the same :  $\nu$  for  $\delta$ , and *a* for  $\delta_T$ 

## • Thermal boundary layer equation

For a steady laminar flow with a high Péclet number value, and thus  $\delta_T/L \ll 1$  the transport Eq. (28) for temperature reads

$$U_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right)$$

Approximation of the boundary layer, with  $\nabla^2 \simeq \partial^2 / \partial x_2^2$  (parabolization of the differential equation)

$$U_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

Advection and diffusion terms are of the same order of magnitude, that is with  ${\cal T}$  the temperature scale and  ${\cal U}$  the velocity scale

$$\mathcal{U}\frac{\mathcal{T}}{L} \sim a\frac{\mathcal{T}}{\delta_T^2} \implies \delta_T \sim \left(\frac{aL}{\mathcal{U}}\right)^{1/2}$$

During the advection time  $t = L/U_1$  (in general  $U_1 \neq U_{\infty}$ ), the penetration depth of the conduction heat flux inside the flow is  $\delta_T \sim (at)^{1/2} \sim (aL/U_1)^{1/2}$ 

#### ∟ Advection-diffusion ¬

#### Thermal boundary layer equation (cont.)

Estimation of the thickness  $\delta_T$  of the thermal boundary layer

# $\Pr \gg 1$

The viscous diffusion is faster than the thermal diffusion,  $\delta_T \ll \delta$ 

At the edge  $\delta_T$  of the thermal boundary layer,  $U_1 \sim U_\infty \delta_T / \delta$ , and from the previous slide,  $\delta_T \sim [aL\delta/(U_\infty \delta_T)]^{1/2}$ 

# $\Pr \ll 1$

The thermal diffusion is faster than the viscous diffusion,  $\delta_T \gg \delta$ 

At the edge  $\delta_T$  of the thermal boundary layer,  $U_1 \sim U_\infty$ , and  $\delta_T \sim (aL/U_\infty)^{1/2}$ 

 $\delta_T/L \sim \mathrm{Pe}_L^{-1/2}$ 

Both expressions can be applied for gas flow. One indeed has, Pr = O(1),  $Re_L \sim Pe_L$  since  $Pr = Pe_L/Re_L$ , and thus  $\delta \sim \delta_T$ 

 $\delta_T/L \sim \operatorname{Pe}_I^{-1/3} \operatorname{Re}_I^{-1/6}$ 

#### ∟ Convection heat transfer ¬

#### Solid-fluid heat transfer by convection

Conduction and convection are involved in flow heat transfer



Wall heat flux

$$\Phi_{s \to f} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla T \, ds$$

(subscripts s and f stand for solid and fluid)

For the convective cooling of an isothermal heated body at  $T_s = \operatorname{cst}$ , the total heat flux  $\Phi_{s \to f}$  is given by

$$\Phi = -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla T \, ds$$
$$= -k_f (T_s - T_\infty) \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla \theta \, ds \propto T_s - T_\infty$$



#### • Convective heat transfer coefficient

The heat flux is usually modeled by introducing a (global) heat transfer coefficient  $\bar{h}$  as

$$\Phi_{s \to f} = \bar{h} \mathcal{S} \left( T_s - T_f \right) \tag{29}$$

where  $\bar{h}$  is an average value over the surface of the body, and has units W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup> (see tables where  $\bar{h}$  is provided for a sphere and rods for instance)

The dimensionless heat transfer coefficient is written as a Nusselt number Nu, defined by

$$\mathsf{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f}$$

where  $k_f$  is the thermal conductivity of the fluid



Ernst Kraft Wilhelm Nusselt (1882-1957), an avid mountain climber! (taken from Lienhard IV & Lienhard, 2017, A heat transfer textbook)

#### ∟ Convection heat transfer ¬

#### Interpretation of the Nusselt number

If the flow motion could be stopped (fictitiously!), with  $U_{\infty} = 0$  to remove convection, the heat flux would then be given by

$$\Phi_{s \to f} = -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla T|_f \, d\mathcal{S} \sim k_f \frac{T_s - T_f}{L} \mathcal{S}$$

Nussel number can thus be recast as,

$$\mathsf{Nu} = \frac{\bar{h}(T_s - T_f)\mathcal{S}}{k_f(T_s - T_f)\mathcal{S}/L} \sim \frac{\Phi_{\mathsf{convection}}}{\Phi_{\mathsf{(fictitious) conduction}}}$$

Nusselt number indicates the ability of the flow to increase heat transfer through convection. For a small Péclet number flow, convection is negligible and Nu = O(1). On the contrary for Pe  $\gg 1$ , the wall temperature gradient takes higher values than for the case of a pure conduction heat transfer. The convective heat transfer is more efficient, Nu  $\gg 1$ ; hence the interest of using flow motion (pump, fan, suction device) to increase heat transfers : forced convection

#### • Conduction in the solid body

The temperature T(x,t) is determined through the resolution of an advectiondiffusion equation in the fluid, and a conduction equation in the solid. The coupling conditions at the interface are obtained by imposing the continuity of temperature and heat flux, as usual

Inside the solid,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_s \nabla^2 T \qquad a_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{ps}}$$
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_s} \rho_s c_{ps} T \, d\nu = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = \Phi_{f \to s}$$



#### Biot number

Biot number measures the relative importance - in the solid - of convection heat transfer with the fluid and conduction heat inside the solid,

$$\mathsf{Bi} = \frac{\bar{h}L}{k_s} \qquad \neq \qquad \mathsf{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f}$$

## ${\rm Bi} \ll 1$

Heat conduction dominates. During a first transitional step of duration  $t \sim O(L^2/a_s)$ , the solid appears to be isolated, its temperature  $T_s$  becomes uniform by thermal conduction, and thus  $T_s(x,t) \simeq T_s(t)$ . A slow evolution is then observed thanks to heat exchange by convection with the flow

$$\underbrace{\underset{s \in C_s \text{ solid}}{\rho_s c_{ps} \mathcal{V}_s}}_{= C_s \text{ solid}} \frac{dT_s}{dt} = \bar{h} \mathcal{S} \left( T_f - T_s \right) \qquad \underbrace{T_f = \text{cst}}_{= C_s \text{ solid}} T_s = T_f + T_0 \exp\left(-\frac{\bar{h} \mathcal{S}}{C_s}t\right)$$

The solid temperature exponentially tends to the (constant) fluid temperature  $T_f$ 

#### Local solid-fluid heat transfer model

In practice, a simplified solid-fluid heat transfer model is often used, by introducing a local heat transfer coefficient h

$$d\Phi_{s \to f} = h(T_s - T_f) \, ds$$
$$-k_s \, \mathbf{n} \cdot \nabla T|_s \, ds = h(T_s - T_f) \, ds$$

where  $T_s$  and  $T_f$  are the local temperature of the solid and of the fluid outside of the boundary layer, meaning that Pe  $\gg 1$ .



In this local formulation, h,  $T_s$  and  $T_f$  can change along the interface solid-fluid. That should not be confused with Eq. (29) involving  $\bar{h}$  applied to a whole body immersed in a flow motion

#### ∟ Convection heat transfer ¬





 $T_w = 150^{\circ}\mathrm{C}$ 

water at  $T_1 = 25^{\circ}$ C,  $Q_v = 100 \text{ l/mn}$ , L = 4.5 m, D = 2.5 cm $\mu = 10^{-3}$  Pa.s,  $c_p = 4.18 \text{ kJ/(kg.K)}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , k = 0.64 W/(m.K)

Forced convection in *turbulent* pipe flow,  $Nu = Nu(Re, Pr) \simeq 0.027 Re^{4/5} Pr^{1/3}$  (Sieder & Tate)
#### ∟ Convection heat transfer ¬

#### Heat transfer to flow in pipe (cont.)

$$S = \pi D^2/4 \qquad U_d = Q_v/S \simeq 3.4 \text{ m.s}^{-1} \qquad \text{Re}_D \simeq 8.5 \times 10^4 \text{ (turbulent flow)}$$
$$a = \frac{k}{\rho c_p} \qquad \text{Pe} = \frac{U_d D}{a} \simeq 5.5 \times 10^5 \qquad \text{Pr} = \frac{\mu}{k/c_p} \simeq 6.5 \qquad Q_m \equiv \rho U_d S \simeq 1.7 \text{ kg.s}^{-1}$$
$$\text{Nu} = \frac{Dh}{k} \simeq 443 \gg 1 \text{ (forced convection)} \qquad h \simeq 1.13 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Energy equation written for the temperature (steady incompressible flow)  $\rho c_p \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}$ 

and integrated over the elementary volume control S between z and z + dz, with the aim of formulating a 1-D model

$$\underbrace{\int_{\mathcal{S}} \rho c_p T \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}}_{(a)} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}} -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}}_{(b)}$$

(a) = 
$$\rho c_p U_d ST(z+dz) - \rho c_p U_d ST(z) = Q_m c_p dT$$

#### ∟ Convection heat transfer ¬

#### • Heat transfer to flow in pipe (cont.)

For the term (b), by neglecting the heat flux along the z direction (Pe  $\gg 1$ )

$$(b) = \pi D dz k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{w} = \pi D dz h(T_{w} - T)$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial r}}_{\text{into the fluid}} = \pi D dz h(T_{w} - T)$$

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial r}}_{\text{into the fluid}} = \pi D dz h(T_{w} - T)$$

The energy budget takes the form  $Q_m c_p dT = \pi D dz h(T_w - T)$ , which leads to

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T_w - T} = \int_0^L \frac{\pi Dh}{Q_m c_p} dz \qquad \Longrightarrow \qquad \log\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right) = \frac{\pi DLh}{Q_m c_p}$$

and finally  $T_2 = T_w - (T_w - T_1)e^{-\frac{\pi DLh}{Q_m c_p}}$ 

 $T_2\simeq 80^{\rm o}{\rm C}$  , and the removed heat by the flow is given by  $\Phi=Q_mc_p(T_2-T_1)\simeq 381~{\rm kW}$ 

# Forced and natural convection

In natural or free convection, the fluid motion is only produced by density differences in the fluid occurring due to temperature gradients, and not by any external source (pump, fan, ...) as in forced convection.

Fluid receives heat and by thermal expansion becomes less dense and rises. The driving force for natural convection is buoyancy, a result of differences in fluid density.



Schlieren visualization of a Kettle (*Spectabit Optics LLC*) and a human body to study airborne transmission of infection (Clark & de Calcina-Goff, *J. R. Soc. Interface*, 2009)

## Boussinesq's approximation

In the framework of Boussinesq's approximation, the hydrostatic balance  $\nabla p_0 = \rho_0 g$  is then subtracted from Navier-Stokes Eq. (27), leading to the governing equations for natural convection,

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (p - p_0) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} - \beta (T - T_0) \boldsymbol{g}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T$$

A strong coupling now occurs between the velocity and temperature fields, even if the flow is incompressible.

The balance between  $U \cdot \nabla U$  on the left hand side and the buoyancy force on the right hand side, leads to the following estimate of the velocity scale  $U_n$  of natural convection  $U_n = (\beta g L \Delta T)^{1/2}$  where  $\Delta T \propto T - T_0$  is the scale of temperature variations

#### ∟ Natural convection ¬

## • Grashof number

The Reynolds number based on  $U_n$ , that is  $\text{Re} = U_n L/\nu$ , is usually replaced by the Grashof number in natural convection

$$\mathsf{Gr} = \mathsf{Re}^2 = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}$$

Like the Reynolds number, the Grashof number indicates a laminar or a turbulent regime for natural convection, that is

$$Gr = \frac{(L^2/\nu)^2}{(L/U_n)^2} \sim \frac{\tau_{\text{viscous}}^2}{\tau_{\text{convection}}^2}$$

## ${\scriptstyle L}$ Summary of the key results ${}^{\neg}$

- Temperature Eq. for low Mach number flows, thermal diffusivity
- Fundamental solutions for pure conduction problems
- Thermal boundary layer, Péclet and Prandtl numbers
- Forced convection, Nusselt number and local heat transfer coefficient
- Natural convection, velocity scale and Grashof number

## ${\scriptstyle L}$ Organisation du cours ${}^{\neg}$

# • Plan général

Introduction liminaire	2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux	16
2 - Fluide visqueux newtonien	64
3 - Dimensional analysis - Reynolds number	102
4 - Regimes and flow structures as a function of the Reynolds number	133
5 - Vorticité	169
6 - Turbulent flow	202
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow	228
8 - Heat transfer	262
Conclusion	296
Annexes (online)	

# **Concluding remarks**



Concluding remarks