Analyse spectrale

Un outil classique de caractérisation des signaux est l'analyse spectrale, ie la répartition de l'énergie du signal en fonction de la fréquence.

Soit x(t) le signal (réel); sa transformée de Fourier est notée X(f)

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+i2\pi ft}df$$

Les TF sont évaluées par transformée de Fourier rapide (routine fft de Matlab par exemple; *attention à l'échantillonnage: th. de Shannon, $f_s>2f_{max}$; $df=1/T_{max}$* …)

$X(f).X^*(f)$ traduit la répartition de l'énergie du signal selon les fréquences

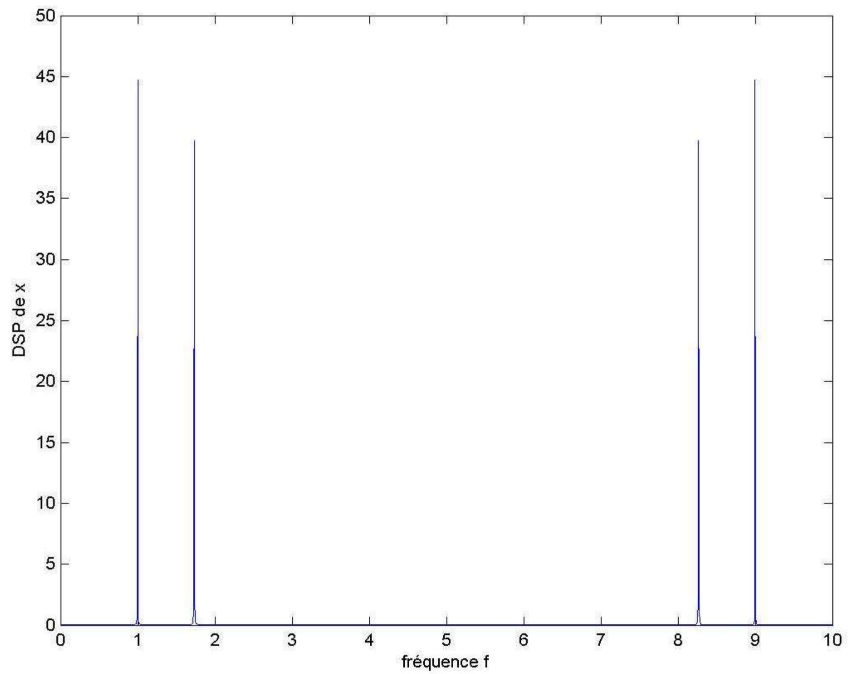
Théorème de Parseval : $E=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f)df$

Rem : pour les signaux à puissance moyenne finie, comme les signaux périodiques ou aléatoires stationnaires, on parle de densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ telle que

$$P_m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df$$

A titre d'exemple, voici un programme de calcul de la DSP d'un signal, somme de 2 sinusoïdes de fréquences non commensurables (f=1, racine de 3). On utilise la routine FFT et les normalisations appropriées. La fréquence d'échantillonnage est fixée à f_s=10.

```
% ==================================================
% .. FFT et Spectre d'un signal multi périodique
% ==================================================
clear all;
close all;
dt = 1/10;  %fmax=1/2dt=5 Hz
niter = 5000;
nfft=1024*2;
df=1/(nfft*dt);
it = 1;
for i=1:niter
  T(it)=(it-1)*dt;
  Xs(it) = sin(2*pi*T(it))+sin(2*sqrt(3)*pi*T(it));
  it=it+1;
end
tfxs(1:nfft)=Xs(niter-nfft+1:niter);
z=fft(tfxs);
spectre=z.*conj(z)/nfft/nfft/df; %DSP « two-sided »
for i=1:nfft
    f(i)=(i-1)*df;
end
pw1=sum(Xs.^2)/niter
pw2=sum(spectre)*df  %    « vérification » de Parseval, pw1=pw2
figure(3)
axes('units','centimeters','position',[1.5 1.5 10. 8.]);
plot(f(1:nfft),(spectre(1:nfft)));
xlabel('fréquence f');
ylabel('DSP de x');
axis([0 nfft*df 0 50])
```



Fréquences de 0 à fmax, suivies des fréquences négatives