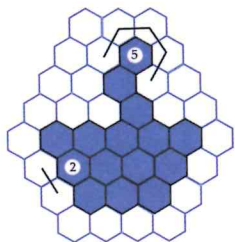


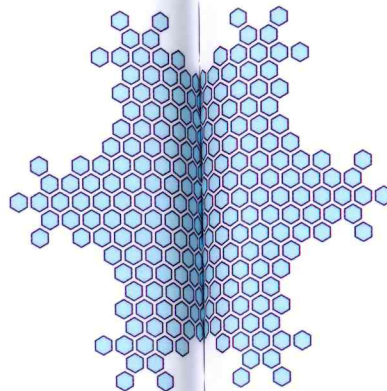
## Deuxième processus : la création de branches

C'est presque le processus inverse. Imaginez maintenant que le cristal présente une sorte de doigt qui pointe vers le haut. La case 5 est entourée par 5 hexagones pleins de vapeur. Cette case est alors cernée par la vapeur. Il est donc probable que le cristal va croître beaucoup plus vite sur cette case que du côté de la case 2 qui n'a que deux cases voisines pleines de vapeur. C'est donc l'effet inverse du facetage. Une fois qu'un doigt apparaît, il a tendance à se développer.



Ces deux processus sont un peu contradictoires. Le premier lisse les flocons et le deuxième les complique. C'est le mélange qui crée la diversité. Il est temps d'utiliser des modèles mathématiques...

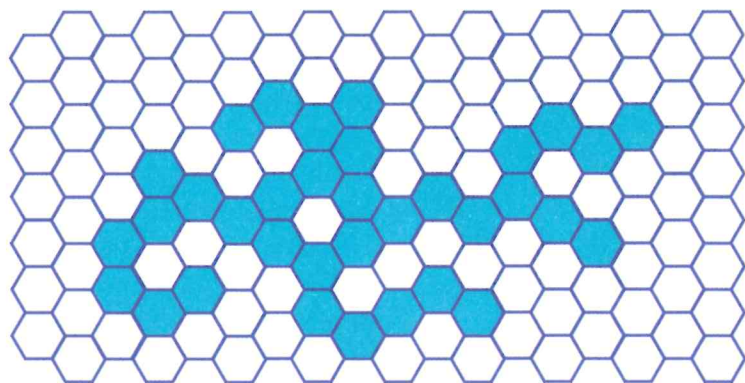
## NORMAN PACKARD : LE MATHÉMATICIEN



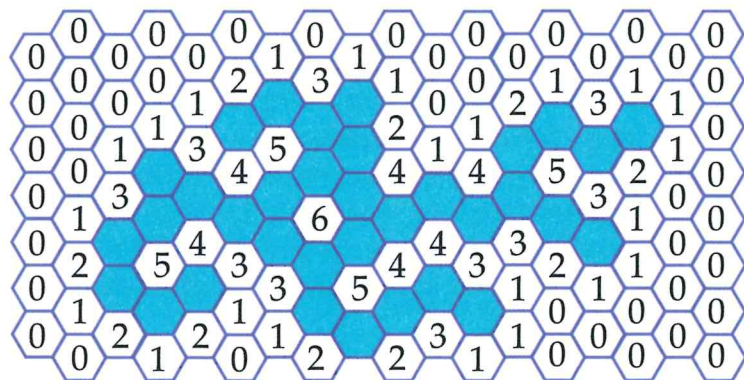
Quand un système physique est trop compliqué, on fait appel aux mathématiciens ! En 1986, Norman Packard a proposé un modèle très simple pour essayer de comprendre la croissance des cristaux. Il ne s'agit pas d'un modèle réaliste qui essaie de résoudre le vrai problème. On cherche un problème beaucoup plus simple qu'on peut résoudre, et qui ne fait que s'inspirer de la vraie difficulté. Bien entendu, rien ne prouve que la solution sera intéressante pour la vraie question ! On fait ce qu'on peut, mais souvent, cela permet d'y voir plus clair...

Voici le modèle. Tout d'abord, on dessine le flocon dans un plan. Nous verrons plus tard d'autres modèles qui fonctionnent dans l'espace. Ensuite, on part d'un plan décomposé en hexagones, comme nous l'a appris Johannes Kepler. Réduisons à l'extrême notre problème : un hexagone peut être gelé ou plein de vapeur. C'est une simplification exagérée, mais continuons.

Un flocon de Packard ressemble à ceci. Les cases blanches sont pleines de vapeur et les cases bleues sont gelées.



Maintenant, il s'agit de comprendre comment certains hexagones pleins de vapeur peuvent geler et s'accrocher au cristal en croissance. Pour cela, on compte pour chaque case le nombre de ses voisins qui sont gelés, comme sur la figure suivante.



On va ensuite choisir une règle du jeu pour décider dans quelles conditions une case vapeur va geler un instant plus tard. Le choix peut être complètement arbitraire, mais on peut s'inspirer des deux processus que nous avons vus :

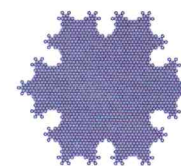
le facettage et la création de branches.

Norman Packard décide d'adopter la règle suivante :

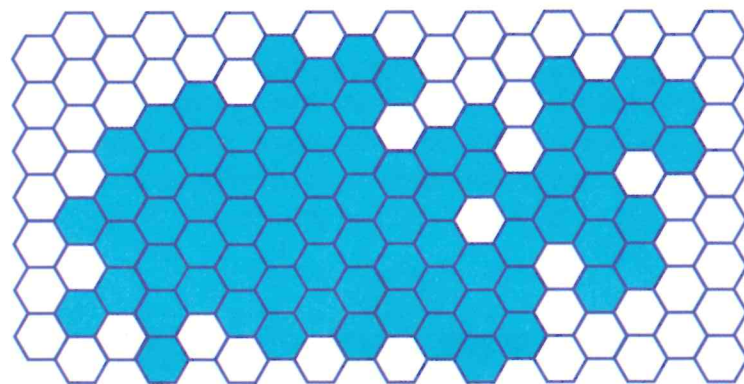
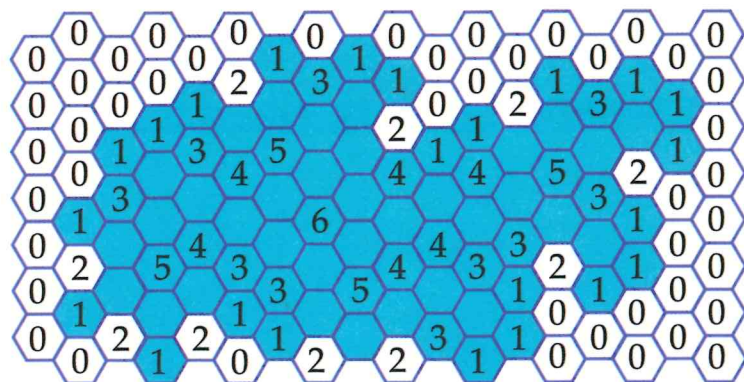
- Si une case vapeur possède 1, 3, 4, 5 ou 6 voisins gelés, alors la case gèle à l'instant suivant.

- Si elle possède 0 ou 2 voisins gelés, l'hexagone ne gèle pas et continue à être plein de vapeur.

Pourquoi cette règle plus qu'une autre ? Eh bien, ce n'est pas clair... Il est très probable que Packard ait procédé par essais successifs. On peut bien sûr imaginer d'autres règles mais il se trouve que c'est celle-ci qui donne les meilleurs résultats. Eh oui, on commence par tâtonner pour y voir plus clair...



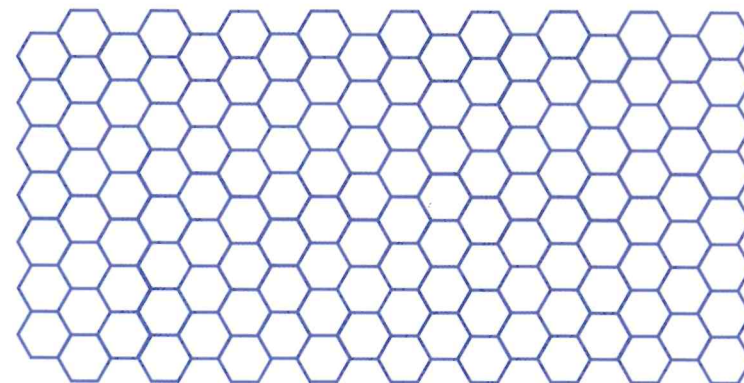
Voici donc ce que devient notre flocon. Les cases 1, 3, 4, 5 ou 6 ont gelé et font désormais partie du cristal.



Maintenant on a un nouveau cristal et on recommence ce petit jeu. Pour chaque case de ce nouveau cristal, on compte le nombre de voisins gelés, on applique la règle et on recommence encore et encore. Ainsi, si on part d'un petit cristal, il va grandir peu à peu.

## À vous de jouer !

Commençons avec des hexagones pleins de vapeur, comme ceci.



Choisissez un petit nombre de cases, disons 4 ou 5, qui forment le début d'un cristal. Coloriez-les dans la couleur de votre choix.

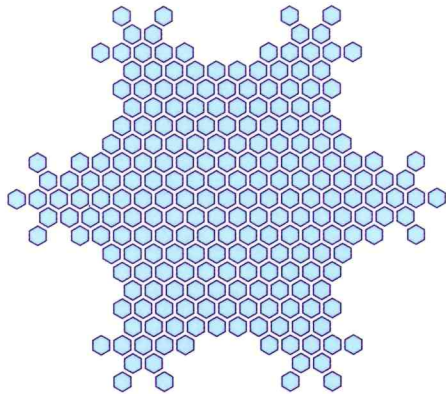
Repérez toutes les cases vapeur, c'est-à-dire celles qui ne sont pas encore coloriées, qui ont 1, 3, 4, 5 ou 6 cases voisines qui sont gelées, c'est-à-dire qui sont déjà coloriées. Coloriez-les toutes !

Vous obtenez un nouveau cristal.

*Recommencez !*

Évidemment, on peut le faire avec du papier et des crayons de couleur, mais c'est plus rapide avec un ordinateur. Voyons ce que cela donne.

Si on commence avec un flocon qui ne contient qu'un seul hexagone gelé et si on fait tourner notre modèle



onze fois, on obtient la figure ci-contre.

Les quelques images page suivante montrent l'évolution du flocon.

Pour bien comprendre

ce qui se passe, on a mis des couleurs différentes sur les hexagones gelés, en fonction du moment où ils ont gelé. L'hexagone au centre était gelé au début, puis à chaque étape on a de nouveaux hexagones gelés qui apparaissent. Par ailleurs, comme notre flocon grandit, il faut bien zoomer pour le garder d'une taille raisonnable sur les images qui suivent.

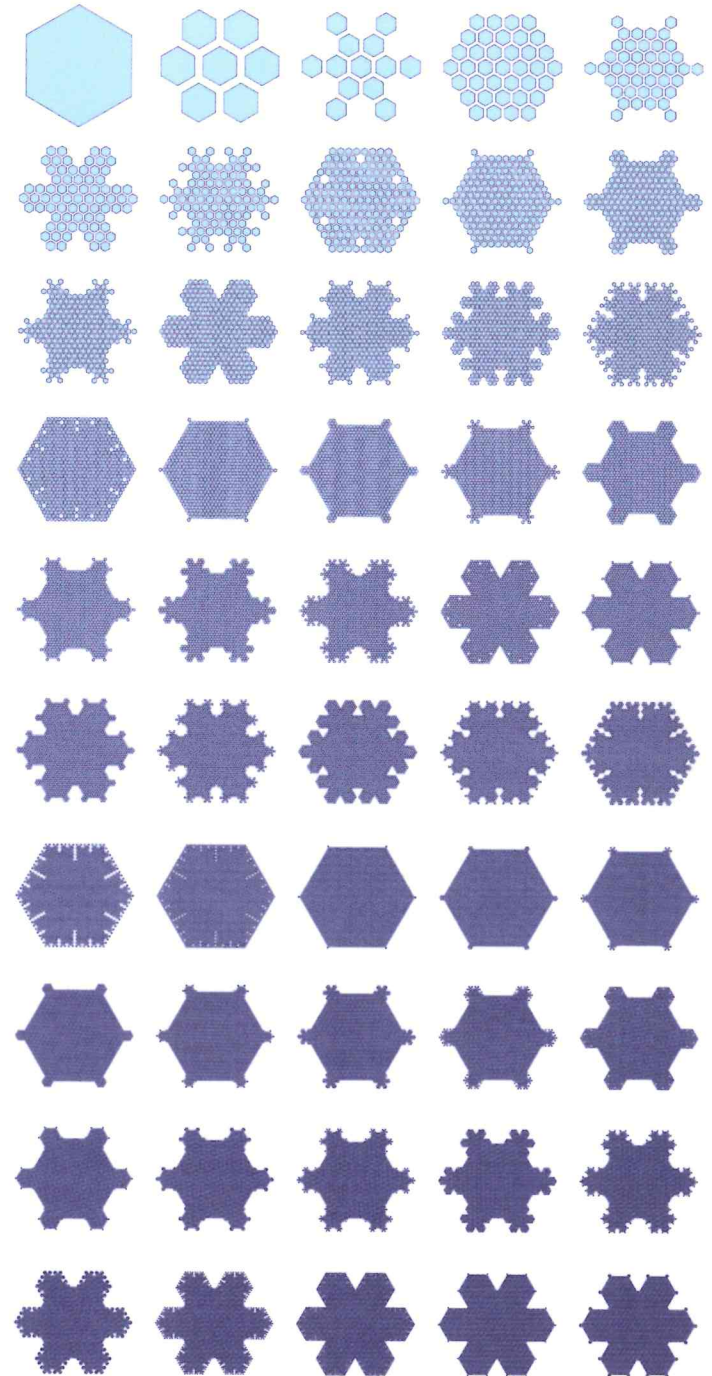
*Le modèle de Packard rend-il compte de la réalité ?  
Certainement pas !*

Les images sont certes intéressantes - elles rappellent vaguement les vrais flocons de la nature - mais il faut bien reconnaître que les vrais flocons sont beaucoup plus beaux.

Cependant, ce qui est remarquable, c'est qu'avec des règles du jeu aussi simples, presque trop simples, on produit des images assez semblables aux flocons. On constate aussi la coexistence du facettage et de la création de branches.

*Nous sommes sur la bonne voie...*

En compliquant un peu le modèle, on devrait pouvoir fabriquer des choses qui ressemblent vraiment à des flocons.



# CLIFFORD REITER, JANKO GRAVNER & DAVID GRIFFEATH : MATHÉMATICIENS

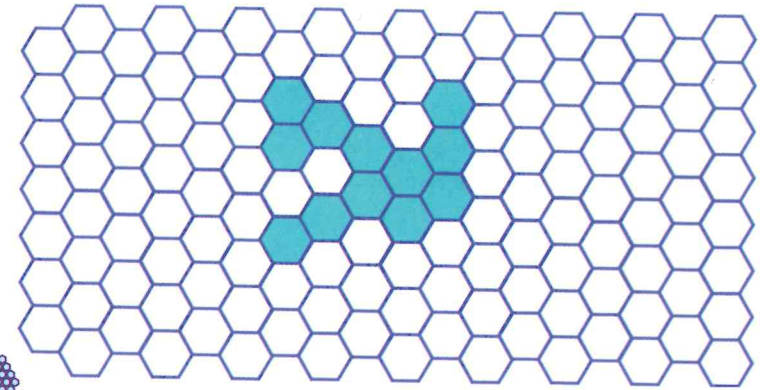
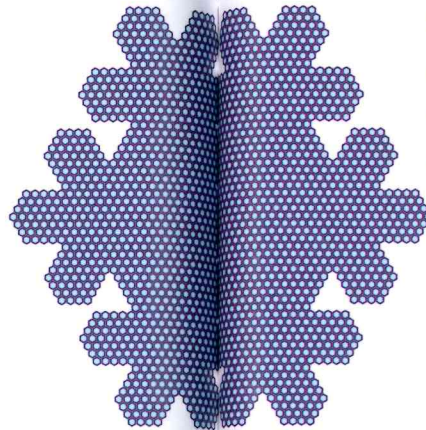


Clifford Reiter

Ce chapitre est plus compliqué que les autres.



*C'est normal :  
la science n'est pas toujours facile...  
Si vous le trouvez trop difficile, il suffit...  
de ne pas le lire !*

Clifford Reiter est un mathématicien américain. En 2005, il a publié un article qui améliore le modèle de Packard et qui produit des images réalistes. Mieux encore, son modèle contient des « paramètres » qu'on peut régler pour obtenir à peu près toutes les formes observées par Ukichiro Nakaya. On commence comme Packard, avec une décomposition du plan en hexagones.



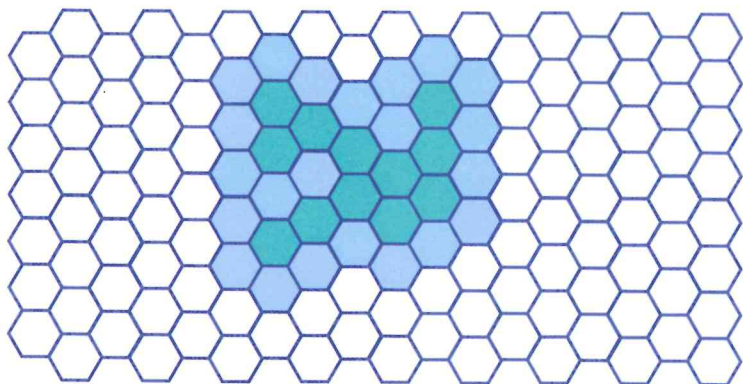
Les hexagones colorés sont gelés, comme précédemment. Mais la différence est que les autres hexagones, en blanc, contiennent de la vapeur dans des quantités différentes. On imagine donc que chaque hexagone blanc contient un nombre compris entre 0 et 1, selon la quantité de vapeur qui s'y trouve.

Dès que la quantité de vapeur dépasse 1, l'hexagone gèle. Il s'agit maintenant de trouver les règles du jeu qui vont décrire la croissance du flocon. On peut le faire en deux étapes.

Tout d'abord, on distingue deux types d'hexagones. Le type 1 correspond aux hexagones qui sont déjà gelés ou qui sont voisins d'un hexagone gelé. Ce sont ceux qui vont *peut-être* geler un instant plus tard. Sur le dessin les types 1 : sont  (gelé) ou  (voisin d'un hexagone gelé).

Les autres hexagones sont du type 2 : ils ne vont pas geler à l'étape suivante.

Voici la situation :



Au début du jeu, un hexagone seulement est gelé, et on lui fixe une quantité de vapeur égale à 1. Tous les autres hexagones ont la même quantité de vapeur égale à un certain nombre  $a < 1$  qu'on peut choisir comme on le souhaite ( $a$  est ce qu'on appelle un paramètre). La croissance du flocon fonctionne alors de la manière suivante.

**Diffusion de la vapeur :** chaque hexagone du type 2 donne une certaine proportion  $b < 1$  de sa vapeur à chacun de ses voisins (y compris ceux qui sont de type 1). C'est un peu comme la diffusion de la chaleur : si un endroit est beaucoup plus chaud que son environnement, il va se refroidir, et la chaleur qu'il perd réchauffe le voisinage.

**Croissance du flocon :** chaque hexagone du type 1 reçoit une certaine quantité additionnelle  $c$  de vapeur. Chaque hexagone contenant une quantité de vapeur supérieure à 1 gèle immédiatement et restera gelé dans le futur. On obtient ainsi un nouveau flocon, avec une nouvelle répartition de la vapeur, et...

on recommence l'opération. Ce qui est intéressant, c'est que ce processus dépend des paramètres  $a, b, c$ . Pour chaque choix de ces valeurs, on obtient une croissance du cristal différente. C'est exactement ce qui est nécessaire, si on veut se rapprocher de la nature... Rappelez-vous le diagramme de Nakaya. Il contient lui aussi des paramètres : la température et l'humidité. Voyons les résultats. Voici quelques images extraites de l'article de Clifford Reiter, montrant qu'on obtient bien des flocons variés. Ici, les axes horizontaux et verticaux représentent la variation des paramètres.

