



Ordre, chaos et fractales

Christophe Bailly & Didier Dagna

Ecole Centrale de Lyon • S8 – ELC-F5 • version 28-03-2025

<http://acoustique.ec-lyon.fr>

● **Sommaire**

Organisation du cours, références, notations	
Oscillateurs – Systèmes dynamiques	11
Notions sur la stabilité des équilibres	38
<i>Oscillateur de van der Pol</i>	76
<i>Modèle proies-prédateurs de May</i>	86
Objets fractals	98
Sensibilité aux conditions initiales, exposants de Lyapunov, chaos	127
<i>Attracteur étrange de Hénon</i>	151
<i>Application logistique</i>	168
<i>Fractales de Newton</i>	182
Stabilité du système solaire	191
<i>Attracteur de Rössler</i>	240
Reconstruction à partir de séries temporelles	253
Contrôle du chaos	266
<i>Attracteur étrange de Lorenz</i>	292
Conclusion	304

● Contrôle des connaissances

- **Travaux en autonomie (40%)** - remplacent les séances de travaux dirigés : critères d'instabilité, illustrations de cartes itérées et de flots, dimensions fractales, sensibilité aux conditions initiales ... (essentiellement sous Matlab ou équivalent)

Exercices à réaliser seul ou en binôme, avec un minimum de $N = 4$ exercices traités dans une liste d'une dizaine d'exercices.

Rendu en temps et heure des exercices (uniquement en version électronique sur moodle) : exercices corrigés au fur et à mesure

- **Mini-projet (40%)** sur le même principe avec séance de restitution au dernier créneau sur un thème de votre choix (par groupes de 4)
- **Test (20%)** avec documents, sous forme de courtes questions (20%)

● Emploi du temps

Restitution des miniprojets le vendredi 04-04-2025

Examen écrit le vendredi 11-04-2025

Supports de cours, énoncés des exercices et bibliographie :

<https://acoustique.ec-lyon.fr/christophe.bailly.php#chaos>

Dépôt des exercices, du miniprojet & forum :

<https://pedagogie2.ec-lyon.fr/course/view.php?id=2687>

● Quelques références générales

- Abarbanel, H.D.I., *Analysis of observed chaotic data*, Springer, New York.
- Acheson, D., 1997, *From calculus to chaos. An introduction to dynamics*, Oxford University Press, Oxford.
- Beltrami, E., 1987, *Mathematics for dynamic modeling*, Academic Press Inc., San Diego.
- Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, C., 1988, *L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann, 1988
- Chen, G., Dong, X., 1998, *From chaos to order*, World Scientific.
- Deruelle, N. & Uzan, J.-P., 2006, *Mécanique & gravitation newtoniennes. Cours de physique théorique*, Vuibert, Paris.
- Feder, J., 1988, *Fractals*, Springer, New York.
- Ghys, É., 2021, *La petite histoire des flocons de neige*, Odile Jacob, Paris.
- Gleick, J., 1987, *Chaos, Making a New Science*, Penguin Books.
- Jackson, E.A., 2008, *Perspectives of nonlinear dynamics*, Vols. 1 & 2, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kim, J.H., Stringer, J., 1992, *Applied chaos*, Wiley.
- Letellier, C., 2006, *Le chaos dans la nature*, Vuibert, Paris.
- Lorenz, E.N., 1993, *The Essence of Chaos*, The University of Washington Press, Seattle.
- Mandelbrot, B., 1975, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, Flammarion. (*The fractal geometry of nature*, Freeman, 1982)
- Murray, J.D., 2002, *Mathematical Biology : I. An Introduction*, 3rd Ed., Springer.
- Manneville, P., 2004, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique.
- Moon, F., 1992, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, Wiley.
- Notes, D.N., 2019, *Introduction to modern dynamics*, 2nd Ed., Oxford Univ. Press.

● Quelques références générales (suite)

Ott, E., 1993, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge Univ. Press.

Ottino, J.M., 1989, *The kinematics of mixing : stretching, chaos and transport*, Cambridge Univ. Press.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., 1992, *Fractals for the classroom*, Springer.

Poincaré, H., 1908, *Science et méthode*, Flammarion.

Poincaré, H., 1905, *La valeur de la science*, Flammarion.

Strogatz, S.H., 1994, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley.

Thomson, J.M.T., Stewart, H.B., 1986, *Non linear dynamics and chaos*, Wiley.

● Quelques références sur des sujets plus techniques liés aux exercices

Abarbanel, H.D.I., Brown, R., Sidorowich, J.J. & L.S., T., 1993, « The analysis of observed chaotic data in physical systems », *Reviews of Modern Physics*, 65(4), 1331-1392.

Eckmann, J.P. & Ruelle, D., 1985, « Ergodic theory of chaos and strange attractors », *Reviews of Modern Physics*, 57(3), 617-656.

Ottino, J.M., 1989, *The kinematics of mixing : stretching, chaos and transport*, Cambridge University Press, New-York.

Shinbrot, T., Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A., 1990, « Using chaos to direct trajectories to targets », *Phys. Rev. Letters*, 65(26), 3215-3218.

Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. & Vastano, J.A., 1985, « Determining Lyapunov exponents from a time series », *Physica D*, 16, 285-317.

- **Quelques références sur internet**

<http://www.chaos-math.org/fr>

<https://people.eecs.berkeley.edu/~chua/>

● **Module de cours en évolution**

2021 – début de rédaction des notes de cours,
ressource complémentaire : notes de cours de Daniel Juvé
liste des mini-projets complète

2022 – suite rédaction des notes de cours,
ressource complémentaire : notes de cours de Daniel Juvé
scripts Matlab, identification des systèmes dynamiques

2023 – suite rédaction des notes de cours
(reste à compléter reconstruction et fin chaos hamiltonien)
tous les exercices sont maintenant corrigés (c'est l'occasion d'en faire des nouveaux pour la suite !)

2024 – algorithmes de reconstruction testés, dans les notes de cours
Introduction de nouveaux modèles pour le mini-projet

2025 – fin rédaction chaos hamiltonien, petits diviseurs, illustration théorème KAM

● Principales notations & définitions

- D_s dimension fractale de similarité, voir page 105
- D_0 dimension fractale de recouvrement, voir page 120
- D_2 dimension fractale de corrélation, voir page 121
- D_{KY} dimension fractale avec la relation de Kaplan & Yorke, voir page 149
- f application itérée, voir page 34
- F flot, voir page 27
- \bar{J} matrice jacobienne, voir pages 34 et 46, $\bar{J}^* = \bar{J}(x^*)$
- s_i valeurs propres, souvent de la matrice jacobienne \bar{J} et alors solutions du polynôme caractéristique $\det(\bar{J} - s\bar{I}) = 0$
- x^* point fixe
- z $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$, voir par exemple page 57
- λ_i exposants de Lyapunov, avec la convention $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$
- μ paramètre de contrôle d'un flot
- ζ écart au point fixe, $\zeta = x - x^*$
- $+$ complexe conjugué & transposition pour une matrice

● **Principales notations & définitions (suite)**

bifurcation de Hopf, voir page 64

chaos hamiltonien, voir page 217

dérivée de Lie, voir page 147

point superstable, voir pages 181, 185

section de Poincaré, voir page 35

système autonome, voir page 27

système dissipatif, voir page 29

Introduction à la dynamique chaotique : le pendule simple comme paradigme^{*}

^{*} Est paradigme ce que l'on montre à titre d'exemple, ce à quoi on se réfère comme à ce qui exemplifie une règle et peut servir de modèle. Un paradigme est l'objet *facile* sur lequel on s'exerce avant de traiter d'un objet ressemblant au premier, mais plus *complexe*.

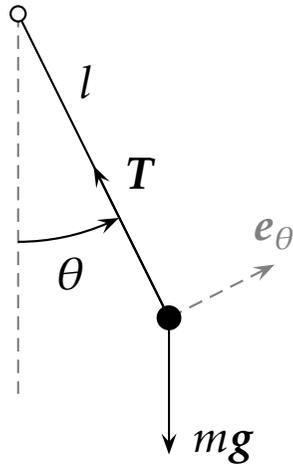
● Oscillateurs

Des systèmes simples, à nombre de degrés de liberté très limité, peuvent développer des comportements **chaotiques** (impossible de prévoir leur trajectoire sur un horizon temporel long). Même dans le cas des milieux continus, il est souvent possible de décrire l'essentiel du mouvement à l'aide d'une **dynamique effective** portant sur un nombre limité de modes

Cela motive l'étude des systèmes élémentaires, **les oscillateurs**, dont l'exemple le plus typique est le pendule simple, que l'on peut décliner sous des formes de plus en plus complexes :

- libre amorti ou non
- entretenu (van der Pol)
- paramétrique

● **Oscillateur libre non amorti**



Principe fondamental de la dynamique projeté selon e_θ

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \text{ soit encore}$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

... simple mais déjà **non linéaire!**

L'énergie mécanique E est conservée : énergie cinétique + énergie potentielle

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

(avec la convention $E = 0$ au point d'équilibre $\theta = \dot{\theta} = 0$)

On peut montrer que $dE/dt = 0$: **système conservatif**, il y a invariance des équations par renversement temporel ; système à deux degrés de liberté

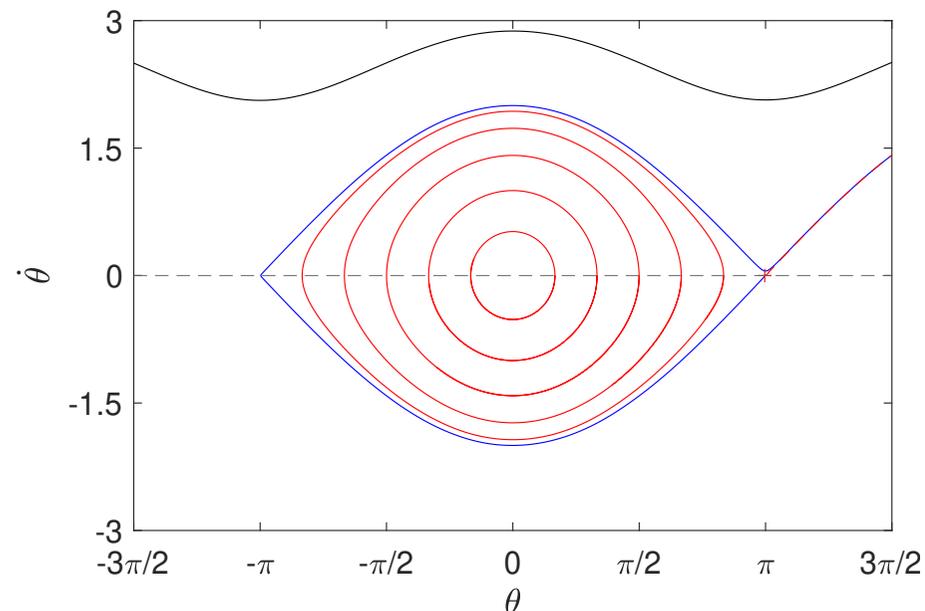
Pour des petits déplacements, $\sin \theta \simeq \theta$, et on a $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, oscillations isochrones (même période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ quelle que soit l'amplitude)

● **Oscillateur libre non amorti (suite)**

La description privilégiée pour le mouvement du pendule est celle de l'espace des phases, dans le plan (position, vitesse) en coordonnées généralisées.

Trajectoires dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta}) = (x_1, x_2)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 \end{cases}$$



- les trajectoires sont des courbes fermées autour de l'origine si l'énergie initiale E est petite
- sinon le pendule a un mouvement de rotation complète autour de son point d'attache
- les courbes limites ($E = 2mgl$) sont appelées séparatrices

● **Pendule de Léon Foucault (1851)**

Dans le repère local \mathcal{R}' en rotation avec la Terre, on a pour le mouvement du pendule

$$\mathbf{a}'_r = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} - 2\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{u}'_r$$

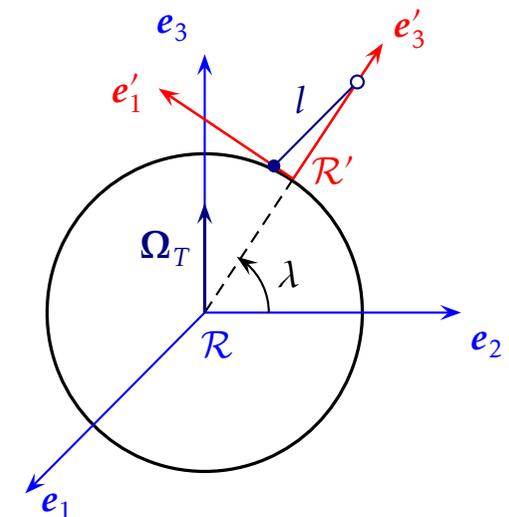
en tenant compte de la force de Coriolis $-2\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{u}'_r$ avec $\boldsymbol{\Omega}_T = \Omega_T (\cos \lambda \mathbf{e}'_1 + \sin \lambda \mathbf{e}'_3)$ dans le repère local, et $\Omega_T \simeq 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (soit 1675 km.s^{-1} à l'équateur!)

On néglige la force centrifuge $\sim \Omega_T^2$ en notant que $\Omega_T \ll \omega_0$ (fréquence propre du pendule)

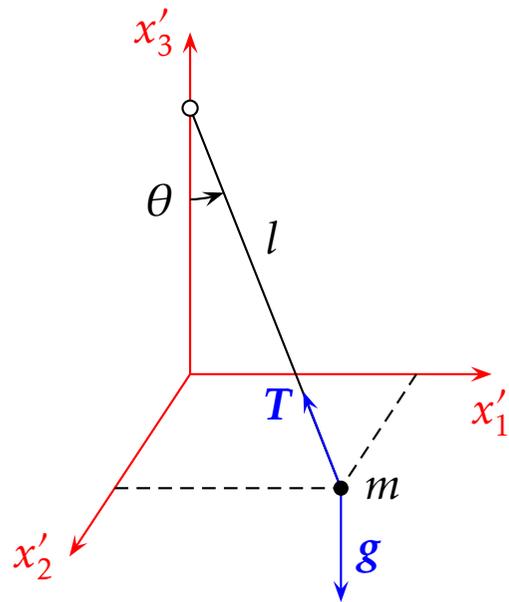


Panthéon à Paris (Misko/Flickr)

Foucault L., 1851, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 32, 135-138



● Pendule de Léon Foucault (suite)



Dans le plan (x'_1, x'_2) , et pour de petits déplacements du pendule ($T_i \simeq -T x'_i/l$)

$$\begin{cases} \ddot{x}'_1 = -\frac{T}{lm}x'_1 + 2\Omega_T \sin \lambda \dot{x}'_2 \\ \ddot{x}'_2 = -\frac{T}{lm}x'_2 - 2\Omega_T \sin \lambda \dot{x}'_1 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{T}{lm} \simeq \frac{g}{l} \quad (T \cos \theta - mg = 0)$$

Résolution en introduisant $\xi = x'_1 + ix'_2$, $\ddot{\xi} + 2i\Omega_T \sin \lambda \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$, et en tenant compte des conditions initiales à $t = 0$, $\xi = \xi_0$ et $\dot{\xi}_0 = 0$

$$\xi = \xi_0 e^{-i\Omega_T \sin \lambda t} \left[\cos(\tilde{\omega}t) + i \frac{\Omega_T \sin \lambda}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega}t) \right] \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_T^2 \sin^2 \lambda} \simeq \omega_0$$

- Pendule de Léon Foucault (suite)

On observe une rotation du plan contenant les oscillations du pendule avec le terme $e^{-i\Omega_T \sin \lambda t}$ sur un temps $T = 2\pi/(\Omega_T \sin \lambda)$ du nord vers l'est dans le repère local

Pendule installé au Panthéon

$$l = 67 \text{ m}, \lambda \simeq 48^\circ 51'$$

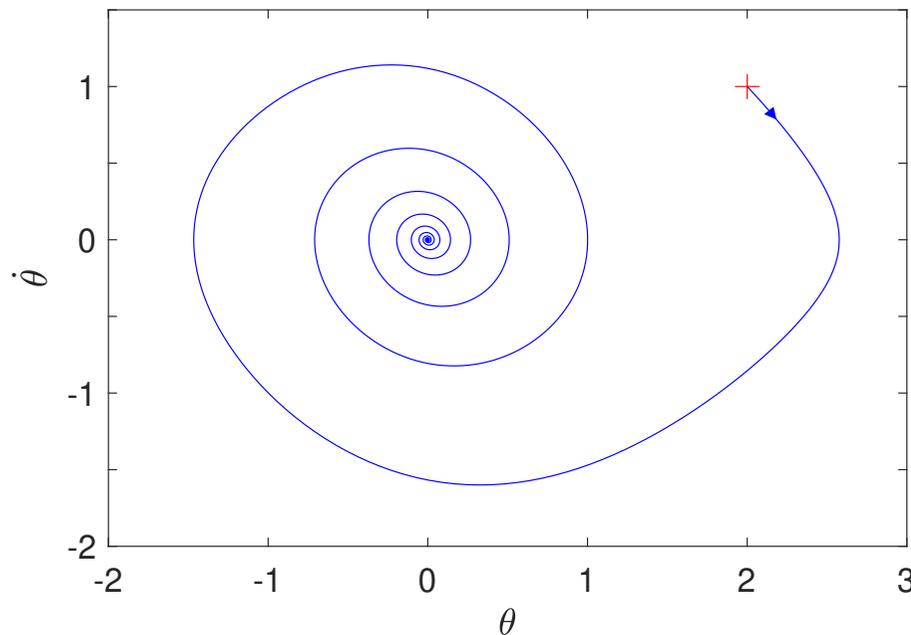
$$T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 16.4 \text{ s (période propre du pendule)}$$

$$T = 2\pi/(\Omega_T \sin \lambda) \simeq 32 \text{ h}, \Delta\varphi = 11.2^\circ \text{ en 1h}$$

● **Oscillateur libre amorti**

$$\ddot{\theta} + \eta \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt} = -\eta \dot{\theta}^2$$

Configuration classique lorsque $\eta > 0$ (frottement), mais configuration plus intéressante ici en considérant $\eta < 0$ (apport d'énergie sous condition : seuil avec l'amplitude par exemple)



Sans amortissement ($\eta = 0$) : voir le transparent précédent

Avec amortissement ($\eta > 0$) : toutes les trajectoires aboutissent à l'origine, avec une forme en spirale au voisinage de l'origine pour un amortissement faible

Ceci traduit une propriété de stabilité de l'origine, qui est **asymptotiquement stable** (propriété discutée plus loin)

● **Oscillateur entretenu**

Pour enrichir le comportement (trop simple) de l'oscillateur précédent, on considère maintenant un **oscillateur entretenu**, introduit par van der Pool (1926) :

$\eta < 0$ pour de faibles amplitudes (spirale s'éloignant de l'origine dans l'espace des phases),

et $\eta > 0$ pour de grandes amplitudes, ce qui empêche le système de diverger et de partir à l'infini

$$\eta = -\eta_0 \left(1 - \frac{\dot{\theta}^2}{\theta_0^2} \right)$$

En effectuant par ailleurs un changement de variables pour obtenir la forme canonique de l'équation de van der Pol,

$$\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{\eta_0}{\omega_0}} \frac{\theta}{\theta_0} \quad \tilde{t} = \omega_0 t \quad \epsilon = \frac{\eta_0}{\theta_0} \quad (\text{et on retire les tildes!})$$

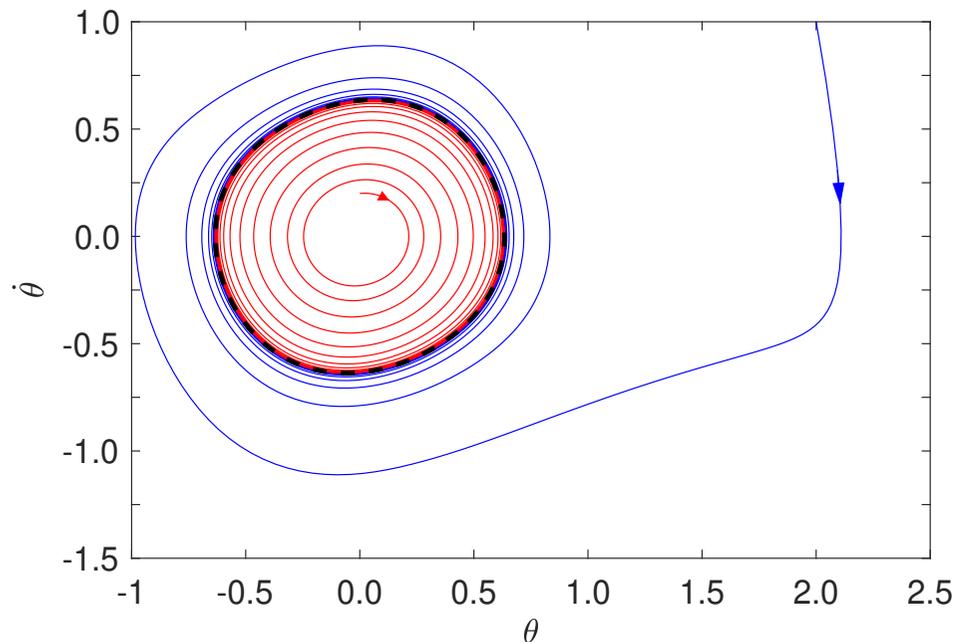
Éq. van der Pol :

$$\ddot{\theta} - \underbrace{(\epsilon - \theta^2)}_{\substack{\text{amortissement} \\ \text{non linéaire}}} \dot{\theta} + \theta = 0 \tag{1}$$

● **Oscillateur entretenu**

Cette équation de van der Pol admet des **solutions périodiques**, d'amplitude indépendante des conditions initiales. Dans le plan de phase, cela se traduit par l'existence d'un **cycle limite** vers lequel s'enroulent les trajectoires de points situés à l'intérieur ou à l'extérieur de celui-ci

van der Pol (cf. exercice, ici $\epsilon = 0.1$)



--- cycle limite

● **Evaluation de la taille du cycle limite pour $\epsilon \ll 1$**

Pour estimer la taille du cycle limite, on peut chercher à exprimer l'équilibre en moyenne sur un cycle entre l'énergie dissipée et l'énergie apportée à l'oscillateur

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \theta^2) \quad \frac{dE}{dt} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \theta\dot{\theta} = (\epsilon - \theta^2)\dot{\theta}^2 \quad \text{avec l'Éq. de van der Pol (1)}$$

En imposant l'équilibre en moyenne,

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = 0 \quad \implies \quad \underbrace{\overline{\epsilon\dot{\theta}^2}}_{\text{apport}} - \underbrace{\overline{\theta^2\dot{\theta}^2}}_{\text{dissipation par non linéarités}} = 0$$

Avec en première approximation $\theta \simeq \rho \sin(t)$ (*i.e.* que l'on ne considère que le premier harmonique pour ϵ petit, voir le spectre du signal $\theta(t)$ dans l'exercice associé), on obtient d'après l'équilibre précédent :

$$\epsilon \rho^2 \overline{\cos^2(t)} - \rho^4 \overline{\cos^2(t) \sin^2(t)} \simeq 0 \quad \epsilon \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{8} \rho^4 \simeq 0 \quad \implies \quad \rho \simeq 2\sqrt{\epsilon}$$

(caractéristique d'une **bifurcation de Hopf** en $\epsilon = 0$, voir plus loin)

● Exercices #1

- pendule forcé
- oscillateur van der Pol
- modèle proies - prédateur de May (*struggle for life!*)

Quelques règles pour les exercices

C'est l'occasion de mettre au point quelques scripts (Matlab, Python, ...) pour intégrer des équations différentielles, faire un spectre, ... d'observer par vous même ce qui est mentionné dans ce cours

Important de faire de jolies figures et [de les commenter!](#)

Vous devez prendre des initiatives, consulter des ressources suivant vos centres d'intérêt (origine modèle, résultats mathématiques, analyse numérique, ...)

Forum sur moodle

- **Oscillateur paramétrique**

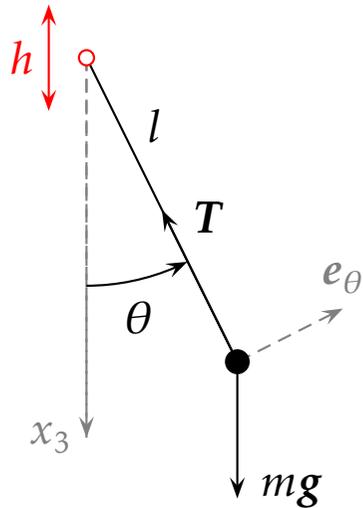
Un oscillateur paramétrique est système dont **un des paramètres dépend du temps**. On peut s'en faire une représentation mécanique en considérant un pendule simple dont le point de suspension est soumis à un mouvement vertical, par exemple périodique

Grand encensoir de Saint-Jacques de Compostelle



● **Oscillateur paramétrique**

On peut montrer que ce système est équivalent à un pendule simple soumis à un champ de pesanteur $g_e(t)$ dépendant du temps.



$h = h_0 \cos(2\omega t)$ selon x_3

Principe fondamental de la dynamique projeté selon e_θ
 $ml\ddot{\theta} - m\ddot{h} \sin \theta = -mg \sin \theta$

soit encore : $\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 - \ddot{h}/g) \sin \theta = 0$ $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 - \ddot{h}/g) \sin \theta = 0$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2[1 + \tilde{h}_0 \cos(2\omega t)] \sin \theta = 0$ $\tilde{h}_0 = 4\omega^2 h_0/g$

Éq. de Mathieu

Par comparaison avec l'oscillateur libre, on a ici une gravité effective $g_e(t) = g + 4\omega^2 h_0 \cos(2\omega t)$

Interprétation possible : asservissement de l'oscillateur en θ , forcé par un **oscillateur indépendant** $\xi = \tilde{h}_0 \cos(2\omega t)$ (horloge)

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + \xi^2) \sin \theta = 0 \\ \ddot{\xi} + 4\omega^2 \xi = 0 \end{cases}$$

● **Stabilité**

C'est une équation linéaire à coefficients périodiques, qui relève de l'analyse de Floquet (1883). On montre que les solutions sont de la forme

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t) \text{ avec } P(t) = P(t + \pi/\omega)$$

Le calcul de $P(t)$ est assez technique (fonctions spéciales de Mathieu), mais on s'intéresse seulement ici à la stabilité des solutions pour \tilde{h}_0 petit

On cherche $\theta(t) \simeq e^{\mu t} \cos(\omega t + \varphi)$ avec μ petit, et ω proche de ω_0 , afin de retrouver la solution classique $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ pour $\tilde{h}_0 = 0$

On peut alors montrer que μ est solution de l'équation bicarrée suivante :

$$\mu^4 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)\mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\tilde{h}_0^2}{4}\omega_0^2 = 0$$

Pour observer une instabilité, c'est-à-dire avoir $\Re(\mu) > 0$ et une croissance exponentielle de θ , il faut nécessairement que $\mu^2 > 0$, ce qui est vérifié si

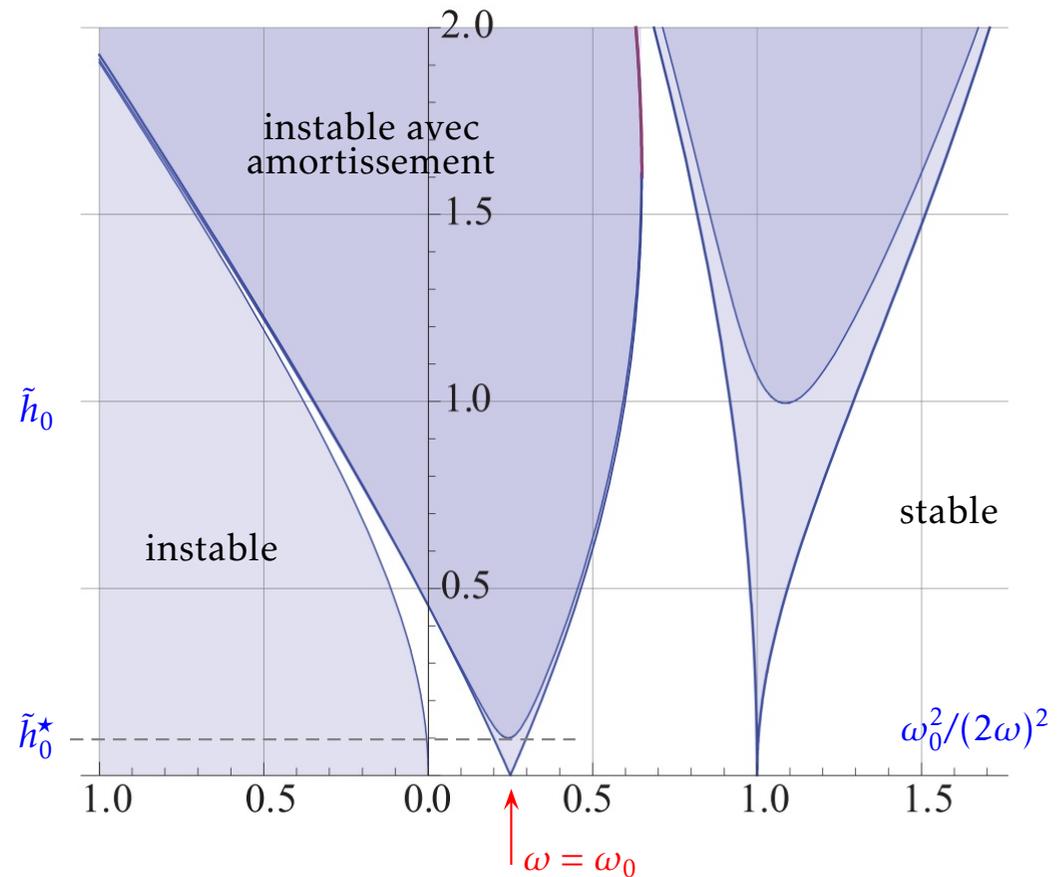
$$\tilde{h}_0 > 2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$$

● **Stabilité**

Le résultat précédent se traduit par une langue instable dans le plan (ω, \tilde{h}_0) . Pour $\omega = \omega_0$, une perturbation infinitésimale suffit à déclencher l'instabilité (lorsque l'amortissement est négligé, sinon présence d'un seuil \tilde{h}_0^*)

D'autres régions existent pour $\omega/\omega_0 = 1/n, n \in \mathbb{N}$ mais avec des langues plus étroites et un seuil d'instabilité plus élevé en présence d'un amortissement (l'instabilité pour $n = 1$ est la plus efficace)

L'instabilité correspondant à $\omega = \omega_0$ est appelée **instabilité (ou résonance) sous-harmonique** en se rappelant que $h = h_0 \cos(2\omega t)$



Attention à la lecture : plan $(\omega_0^2/(2\omega)^2, \tilde{h}_0)$ ici (Butikov, 2018, *Am. J. Phys.*)

● **Flot**

On s'appuie sur l'équation de **van der Pol** (1) à titre d'illustration,

$$\ddot{\theta} - (\epsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0$$

On cherche à remplacer toute ODE (*ordinary differential equation*) d'ordre n par un système de n équations du premier ordre. Pour l'Éq. de van der Pol, il suffit de poser $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, pour obtenir le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\epsilon - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Cette forme se prête mieux à la fois à l'analyse théorique, et à la résolution numérique. En adoptant une écriture vectorielle,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On observe que les ODE du système sont **autonomes** ici puisque la variable temps n'apparaît pas explicitement dans $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \cancel{t})$

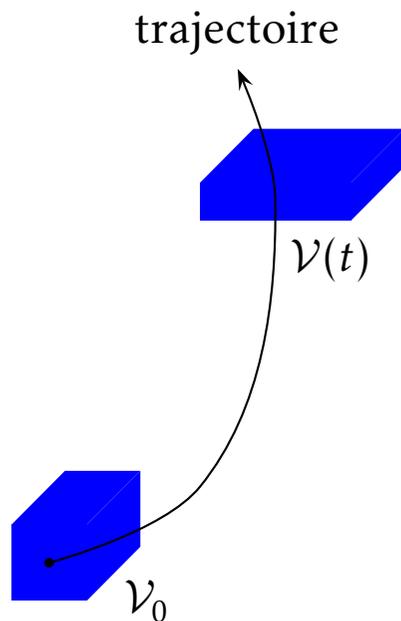
● **Flot**

Le système d'ODE définit un **système dynamique** continu, appelé aussi **flot**. Cette terminologie a été introduite par analogie avec l'étude des écoulements en mécanique des fluides (si \mathbf{x} est la position, alors $\dot{\mathbf{x}}$ est la vitesse et le second membre \mathbf{F} fournit la forme du champ de vitesse)

Le trajet suivi par le système dynamique dans l'espace des phases (x_1, x_2) quand le temps s'écoule est appelé **orbite** ou plus simplement **trajectoire**, toujours par référence à la mécanique

● **Systèmes conservatifs ou dissipatifs**

Cette classification, qui va au delà du sens énergétique premier, repose sur l'évolution d'un élément de volume dans l'espace des phases ; par exemple un volume de conditions initiales illustrant des incertitudes expérimentales



Théorème de Reynolds pour une quantité g

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} g(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot (g\mathbf{U}) \right] d\mathcal{V}$$

où $\mathbf{U} = d\mathbf{x}/dt$ est le champ de vitesse, ici $\mathbf{U} = \mathbf{F}$ (flot)

Cas particulier pour $g = 1$, résultat connu sous le nom de théorème de Liouville (1838)

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathcal{V}$$

Système conservatif $\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0$

Système dissipatif $\frac{d\mathcal{V}}{dt} < 0$

● **Systèmes conservatifs ou dissipatifs**

Illustration avec l'oscillateur amorti : $\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

En notant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, l'expression du flot est

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] \quad \mathbf{F} = \begin{cases} x_2 \\ -\eta x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1) \end{cases} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = -\eta < 0$$

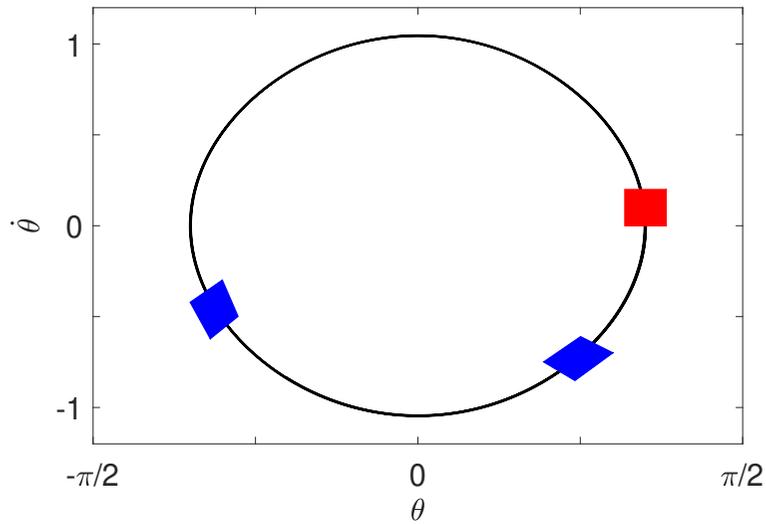
Le système est donc dissipatif (comme au sens ordinaire, il serait conservatif pour $\eta = 0$). Dans ce cas particulier, **la divergence de \mathbf{F} est uniforme le long des trajectoires** (indépendante de la position \mathbf{x} le long de la trajectoire), et on peut donc intégrer

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathcal{V} \quad \implies \quad \mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{-(\nabla \cdot \mathbf{F})t} = \mathcal{V}_0 e^{-\eta t}$$

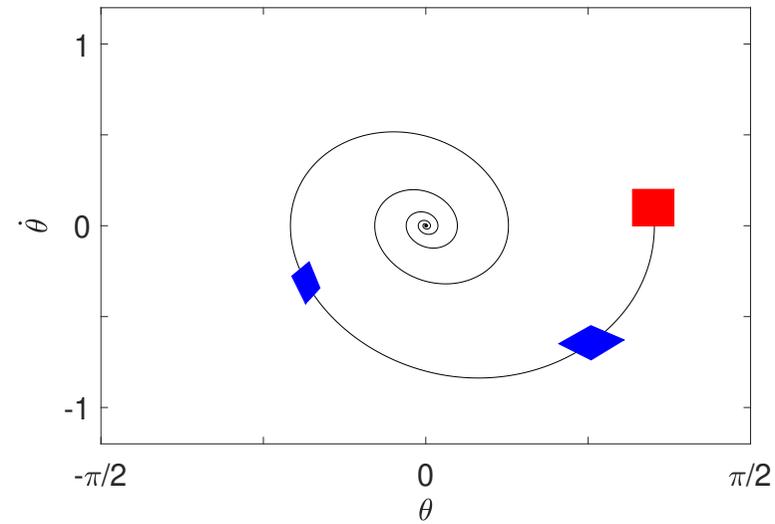
On observe donc une décroissance exponentielle du volume initial \mathcal{V}_0 des conditions initiales au cours du temps.

● Systèmes conservatifs ou dissipatifs

Contraction des aires dans l'espace des phases



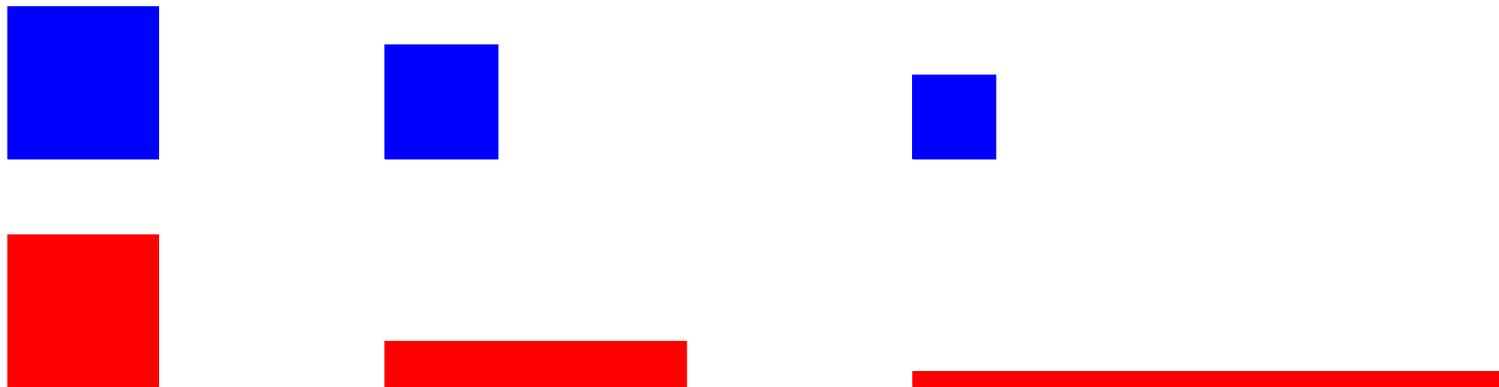
$\eta = 0$



$\eta = 0.3$

● **Systèmes conservatifs ou dissipatifs**

La **contraction des aires** n'implique pas la contraction des longueurs. On peut très bien avoir contraction dans une direction et dilation/expansion plus lente dans une autre direction. Cette remarque élémentaire est cependant capitale car elle montre que **la possibilité de divergence de deux trajectoires voisines subsiste même pour un système dissipatif**



Il n'est pas inutile de rappeler ici que deux trajectoires ne peuvent jamais se couper : en effet le **modèle déterminisme** serait alors mis en défaut – pour une même condition initiale, le point d'intersection en l'occurrence, on aurait la possibilité d'avoir deux futurs différents!

(associé au problème de Cauchy mathématiquement, pas de problème si F est de classe C^1)

● **Systèmes non autonomes**

Exemple d'un oscillateur forcé : $\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = A \cos(\omega t)$
 (dépendance explicite du temps)

On se ramène facilement à un système d'équations du 1er ordre autonomes, en augmentant d'une dimension l'ordre du système

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad x_3 = \omega t$$

L'expression du flot est alors

$$F = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \cos(x_3) - \eta x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1) \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases}$$

On transforme ainsi un système non autonome du 2nd ordre en un système autonome du 3e ordre (dissipatif ici puisque $\nabla \cdot F = -\eta < 0$)

● **Cartes itérées**

Une application itérée (carte) est définie par une relation de la forme $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, que l'on peut considérer comme une évolution à temps discret résultant d'un échantillonnage d'un système à temps continu (stroboscopie au sens large)

À partir d'une condition initiale \mathbf{x}_0 , l'application \mathbf{f} permet de construire une orbite du système à temps discret $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$

Exercices # 2 & #3

- Attracteur d'Hénon
- Application logistique

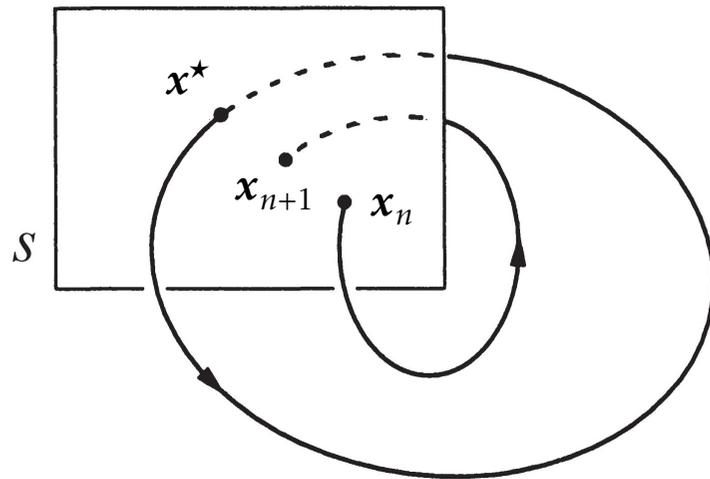
Le jacobien de la transformation $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_{n+1}$ permet de calculer l'évolution d'un élément de l'« espace des phases »

$$\bar{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad J = \det \bar{J}$$

Le système est dissipatif (*i.e.* qu'il y a contraction des aires) si $|J| < 1$, et est conservatif si $|J| = 1$

● Section de Poincaré

Il s'agit d'une méthode générale permettant la réduction d'un flot à une carte itérée, avec la réduction d'une dimension du problème



(fig. tirée de Strogatz, page 281)

Pour une trajectoire périodique
(orbite fermée), on a un point fixe
 $x^* = f(x^*)$

Le principe consiste à faire une coupe des trajectoires associées à un flot continu $\dot{x} = F[x(t)]$. Les intersections successives avec la surface de coupe \mathcal{S} définissent ainsi une suite de points x_n

$$x_{n+1} = f(x_n) = f \circ f(x_{n-1}) = \dots$$

La section de Poincaré du flot avec la surface considérée correspond à l'ensemble de ces points x_n

● **Section de Poincaré (suite)**

Sauf cas particuliers (section de Poincaré par stroboscopie ou échantillonnage périodique d'un signal; orbite fermée $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}^*)$ avec un point fixe \mathbf{x}^*), le temps qui s'écoule entre deux points successifs n'est pas constant

Comme le point \mathbf{x}_k ne peut avoir qu'un seul antécédent \mathbf{x}_{k-1} (déterminisme), l'application f est inversible.

Une carte itérée inversible peut donc être considérée comme équivalent à un flot continu; il est généralement impossible de préciser le passage de F à f et de connaître analytiquement f par exemple (mais on peut aussi construire des modèles, par exemple l'attracteur de Hénon)

L'étude des applications non inversibles (par exemple l'application logistique, exercice #3) semble découplée de l'analyse des systèmes continus. Il n'en est rien comme nous le verrons plus tard avec l'étude de l'attracteur de Lorenz et les cartes de premier retour

L'intérêt pratique des sections de Poincaré sera illustré tout au long de ce cours et dans les exercices (détection d'orbites périodiques, contrôle, ...)

- **Pour conclure sur cette introduction : est-il nécessaire d'avoir un système de grande taille pour que le chaos puisse apparaître ?**

La vision classique de la première partie du XXe siècle, défendue en particulier par Landau avec la théorie de la turbulence (1944), était que le caractère irrégulier du mouvement provenait de l'existence d'un nombre de degrés de liberté très grand (voir infini) : existence d'une infinité de fréquences non commensurables apparues par déstabilisation de régimes périodiques

↪ la réalité est très différente (Ruelle & Takens, 1971)

Trois degrés de liberté suffisent pour donner naissance à un régime chaotique, c'est-à-dire un **système non linéaire décrit par 3 ODE du 1er ordre autonomes** et donc deux degrés de liberté pour une section de Poincaré

Cela justifie le grand intérêt d'étudier des systèmes avec un nombre de degrés de liberté réduit

Notions sur la stabilité des équilibres



Alexandre Liapunov
(1857-1918)



Henri Poincaré
(1854-1912)

● Motivation

On s'intéresse à la perte de stabilité d'un système dynamique en équilibre qui peut conduire éventuellement à un comportement chaotique

Mathématiquement, on ne considère ici que le cas de **systèmes dynamiques autonomes**, c'est-à-dire des équations différentielles ordinaires (ODE) dont les coefficients ne dépendent pas du temps, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. On suppose également que le système possède une unique position d'équilibre unique \mathbf{x}^* vérifiant donc $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$

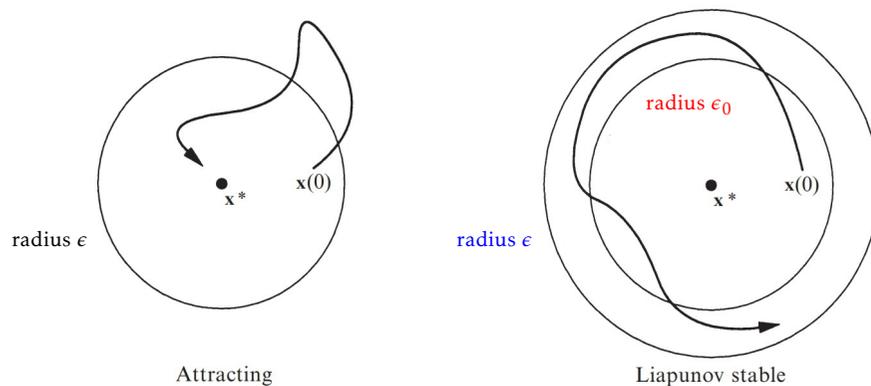
On veut ici étudier la **stabilité de ce point d'équilibre** (éventuellement en fonction d'un paramètre du système non explicité pour le moment) et les conditions pour l'existence d'un **cycle limite**

● **Stabilité au sens de Lyapunov**

Si on s'écarte de la position d'équilibre, reste-t-on dans un voisinage de celle-ci pour tout $t > 0$?

- si oui, l'équilibre est stable
- si non, l'équilibre est instable

Si de plus $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ lorsque $t \rightarrow \infty$ pour une orbite commençant dans un ouvert contenant \mathbf{x}^* , l'équilibre est dit **asymptotiquement stable**. Le plus grand ouvert Ω_0 satisfaisant cette propriété est appelé **bassin d'attraction** de \mathbf{x}^*



(fig. adaptée de Strogatz, page 143)

● **Stabilité au sens de Lyapunov (suite)**

Énoncé plus formel, en notant $\zeta = x - x^*$ la distance entre le point courant de la trajectoire et le point fixe x^* ,

- x^* est dit uniformément stable si **pour tout $\epsilon > 0$** , il existe un $\epsilon_0 > 0$ plus petit tel que si $\|\zeta(t_0)\| < \epsilon_0$, alors $\|\zeta(t)\| < \epsilon$ pour $t > t_0$

La trajectoire reste alors « sous contrôle » dans le voisinage du point fixe x^* : une trajectoire qui commence au voisinage du point fixe avec $\|\zeta(t_0)\| < \epsilon_0$ (qui dépend du ϵ choisi), doit rester dans le voisinage de ce point fixe $\|\zeta(t)\| < \epsilon$, pour tout choix de ϵ

- x^* est dit **asymptotiquement stable** si de plus $\zeta \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$

● **Fonction de Lyapunov - stabilité asymptotique**

On considère à titre d'exemple introductif le système suivant (flot 1-D) :

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1) = -x_1 - x_1^3 \text{ avec comme unique point d'équilibre } x_1^* = 0$$

On souhaite statuer sur la stabilité de x_1^* **sans résoudre l'équation différentielle**

On introduit pour cela **une fonction de Liapunov**, assimilée à l'énergie du système et trouvée le plus souvent par tâtonnement ou intuition. Cette fonction est définie positive ($V \geq 0, \forall x_1$) et son **évolution le long de la trajectoire** du système est donnée par,

$$\dot{V} = \frac{dV}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dV}{dx_1} F_1 \quad (\text{et plus généralement, } \dot{V} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \nabla V \cdot \mathbf{F})$$

En examinant le flot F_1 , on peut choisir $V(x_1) = x_1^2$ pour contrôler le signe de \dot{V} . On a en effet $\dot{V} = 2x_1(-x_1 - x_1^3) = -2(x_1^2 + x_1^4) < 0$ pour $x_1 \neq x_1^*$ et par ailleurs $V(x_1^*) = 0$. L'énergie V est donc toujours strictement décroissante et va converger vers zéro au point d'équilibre ; par conséquent, le point d'équilibre x_1^* est **globalement asymptotiquement stable**

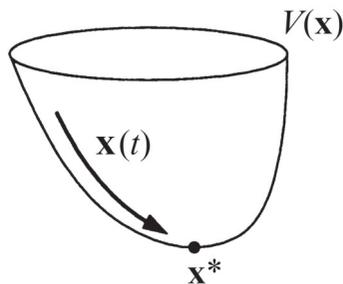
● Deux théorèmes fondamentaux

Théorème de stabilité de Liapunov

$V(\mathbf{x}^*) = 0$ et $V(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$
 (V est définie positive)

Si $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, \mathbf{x}^* est un point stable

Si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, \mathbf{x}^* est un point asymptotiquement stable



(fig. tirée de Strogatz, page 203)

Théorème d'invariance de LaSalle

$V(\mathbf{x}^*) = 0$ et $V(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$

$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ mais $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \Omega$

Si Ω ne contient que \mathbf{x}^* comme ensemble invariant, alors \mathbf{x}^* est un point asymptotiquement stable

● **Stabilité globale**

On démontre en appliquant un de ces deux théorèmes, que le point fixe \mathbf{x}^* est **globalement** asymptotiquement stable : quelle que soit la condition initiale $\mathbf{x}(t_0)$ dans l'espace des phases, on a $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ lorsque $t \rightarrow \infty$

Le bassin d'attraction est alors l'espace des phases complet. Il est de plus impossible d'avoir des trajectoires fermées

● **Application à l'oscillateur amorti**

$$\ddot{\theta} + \eta \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \text{ (voir page 18)}$$

$$\mathbf{x} = (x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\eta x_2 - \omega_0^2 \sin x_1 \end{cases} \quad \mathbf{x}^* = (0, 0)$$

On introduit une fonction de Liapunov en s'inspirant de l'expression de l'énergie mécanique ici,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos x_1) \quad V(\mathbf{x}^*) = 0$$

On détermine ensuite \dot{V}

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_2 \dot{x}_2 + \omega_0^2 \sin(x_1) \dot{x}_1 = x_2 [\dot{x}_2 + \omega_0^2 \sin(x_1)] = -\eta x_2^2 \leq 0$$

On observe alors que $\dot{V} = 0$ pour $x_2 = 0$, avec donc $\Omega = \{\mathbf{x} | x_2 = 0\}$. Pour $\mathbf{x} \in \Omega$, on a $\dot{x}_1 = 0$ ou $\dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1$. Le seul point invariant de Ω est $\mathbf{x}^* = (0, 0)$. En effet pour $x_1 \neq 0$, $\dot{x}_2 \neq 0$ et on s'éloigne donc de l'axe x_1 , qui n'est donc pas invariant à l'exception de \mathbf{x}^* . Le point fixe \mathbf{x}^* est donc bien asymptotiquement stable

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

Une **approche globale de la stabilité** (*i.e.* indépendante de la forme des perturbations) est généralement difficile et conduit souvent à des conditions suffisantes de stabilité donnant des bornes assez éloignées de la réalité. Nous nous contenterons d'une analyse locale (*i.e.* se limitant à des perturbations infinitésimales), quitte à revenir sur le comportement global par des exemples (exercice sur l'oscillateur de van der Pol)

Avec \mathbf{x}^* l'unique position d'équilibre, et en notant toujours $\zeta = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, on effectue un développement de Taylor du flot F au voisinage de \mathbf{x}^*

$$F_i(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \cdot \zeta + G_i$$

où $\|G\|/\|\zeta\| \rightarrow 0$ lorsque $\|\zeta\| \rightarrow 0$ et avec $F(\mathbf{x}^*) = 0$ par définition. En notant par ailleurs que $F(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\zeta}$, la **linéarisation du système** autour du point fixe conduit à la relation

$$\dot{\zeta} \simeq \bar{J} \cdot \zeta \quad \bar{J}(\mathbf{x}^*) = \bar{J} = \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \quad \text{matrice jacobienne}$$

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

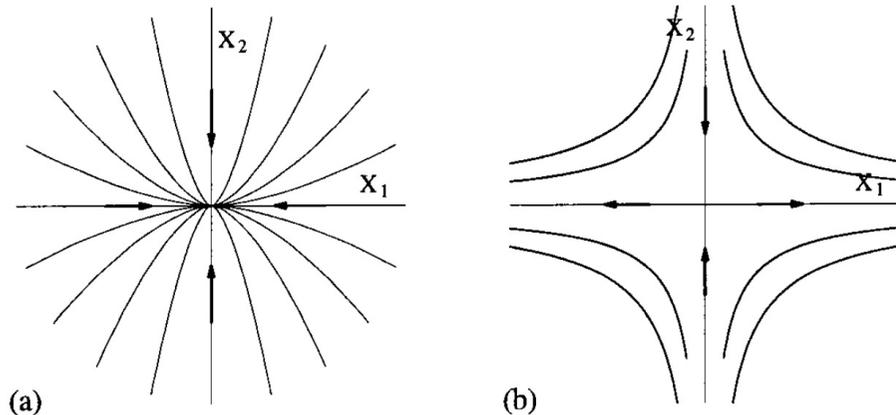
Nous allons illustrer la procédure dans le cas d'une fonction de 2 variables, en considérant une situation générique, dans laquelle $(\bar{J}^*)_{ij} = \partial F_i / \partial x_j |_{x^*}$ est supposée non singulière et à valeurs propres distinctes s_1 et s_2 (on réserve la notation λ_i pour les exposants de Liapunov). La solution du système linéarisé s'écrit,

$$\zeta = \alpha_1 e^{s_1 t} \mathbf{e}_1 + \alpha_2 e^{s_2 t} \mathbf{e}_2$$

où \mathbf{e}_i est le vecteur propre associé à la valeur propre s_i pour $i = 1, 2$

- Pour des valeurs propres réelles, $\zeta \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ si s_1 et s_2 sont négatives, et cela $\forall \zeta_{t=0}$. L'origine est donc globalement **asymptotiquement stable**
- Si s_1 et s_2 sont positives, l'équilibre du système linéarisé est bien sûr instable. Dans le cas $s_1 < 0 < s_2$, l'équilibre est généralement instable, sauf si les conditions initiales sont telles que $\zeta_{t=0}$ appartienne au sous-espace stable associé à la valeur propre négative s_1 . Bien qu'on puisse s'interroger sur la robustesse de ce cas particulier, nous verrons qu'il joue un rôle important pour le **contrôle des systèmes chaotiques**

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**



Racines réelles

(a) point fixe (noeud) stable $s_2 < s_1 < 0$

(b) point-selle (col) $s_2 < 0 < s_1$

(fig. tirée de Manneville, page 39)

- Enfin, si s_1 et s_2 sont complexes conjuguées, $s_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ et

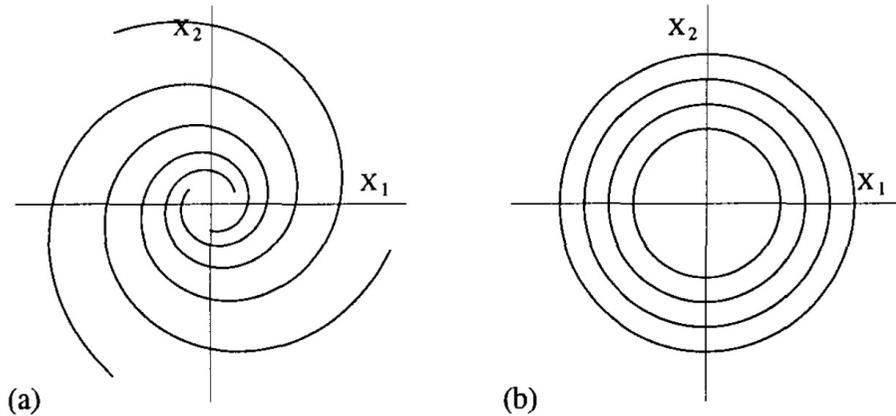
$$\zeta = e^{\sigma t} \left[\eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \right]$$

Pour $\sigma = \Re(s_i) < 0$, $\zeta \rightarrow 0$ en suivant une orbite en spirale, et l'origine est globalement **asymptotiquement stable**

Si $\sigma > 0$, l'équilibre est instable.

Si $\sigma = 0$, la solution reste bornée. Les orbites sont fermées et forment des cercles autour de l'origine, dont la taille dépend des conditions initiales. On dit que la **stabilité est marginale ou neutre**

● Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire



Racines complexes conjuguées

- (a) point fixe stable $\sigma < 0$
(foyer, orbites en spiral)
- (b) stabilité marginale $\sigma = 0$
(orbites circulaires, point elliptique)

(fig. tirée de Manneville, page 40)

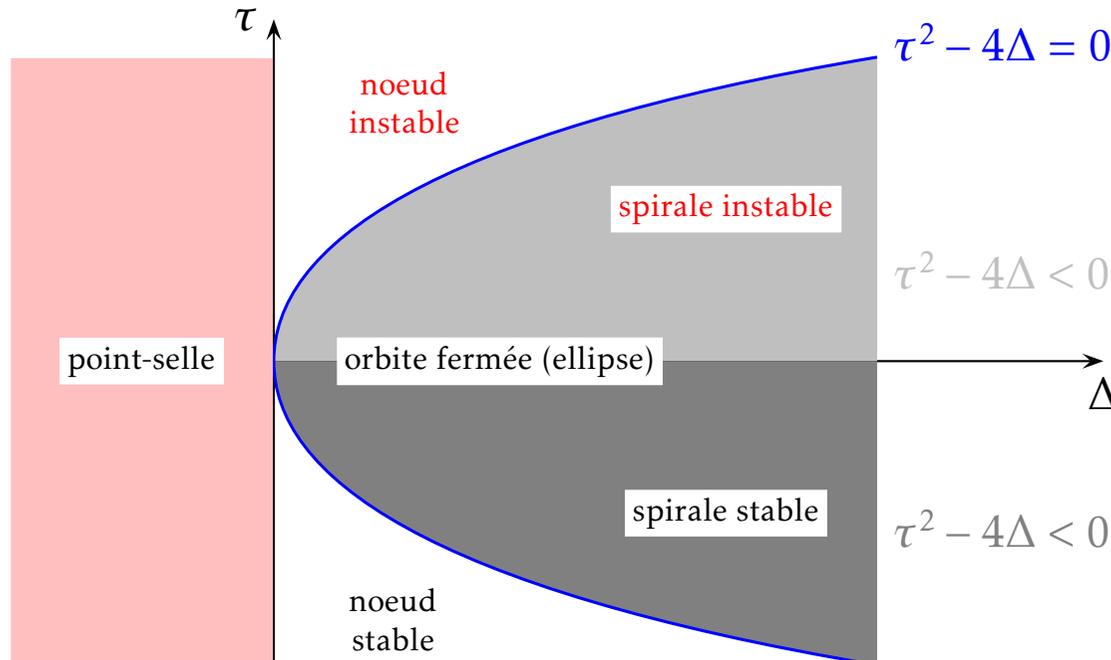
En résumé, l'équilibre $\dot{\zeta} \simeq \overline{J}^* \cdot \zeta$ avec $\zeta = x - x^*$ est

- (globalement) asymptotiquement stable si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de \overline{J}^* sont négatives,
- instable s'il existe une valeur propre de partie réelle positive,
- est marginalement stable si les valeurs propres ont leur partie réelle nulle.

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

Une formulation plus condensée peut être donnée dans le cas plan (2-D), en fonction de **la trace τ et du déterminant Δ de la matrice jacobienne \bar{J}^*** , en se rappelant que $s_1 + s_2 = \tau$ et que $s_1 s_2 = \Delta$

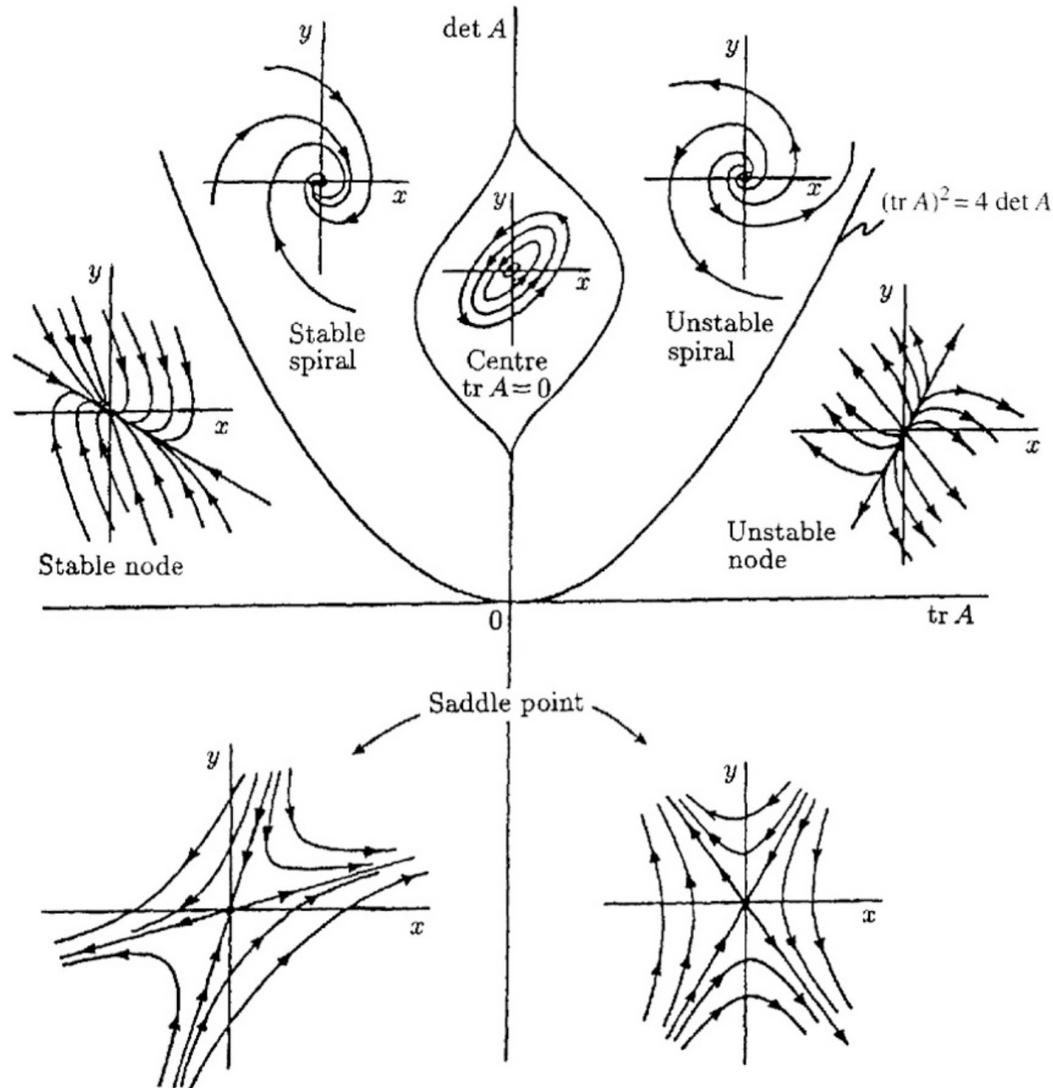
Par conséquent, $\Re(s_i) < 0$ ($i = 1, 2$) est équivalent à $\Delta = \det \bar{J}^* > 0$ et $\tau = \text{tr} \bar{J}^* < 0$, on a $s_1 < 0 < s_2$ si et seulement si $\det \bar{J}^* < 0$, et les valeurs propres sont imaginaires pures si et seulement si $\text{tr} \bar{J}^* = 0$



Valeurs propres solutions de $s^2 - \tau s + \Delta = 0$

racines	réelles	complexes
τ	$s_1 + s_2$	2σ
Δ	$s_1 s_2$	$\sigma^2 + \omega^2$

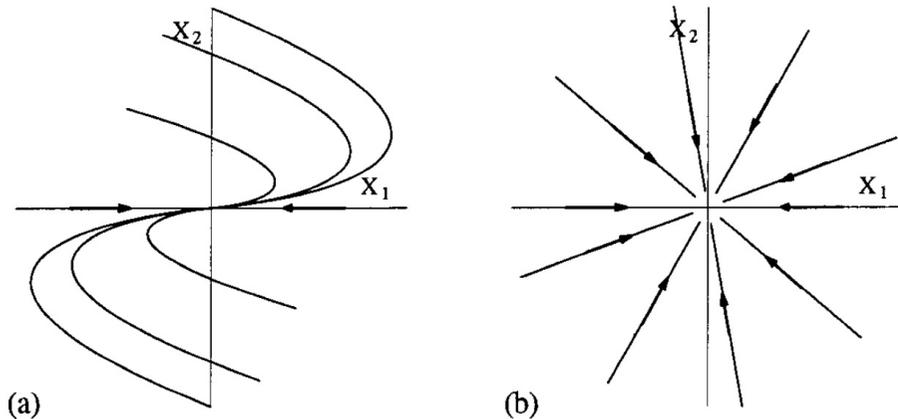
● Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire



(Murray, 2002, vol. 1, page 504 with $A = \overline{J}^*$)

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

Cas particulier où $\tau^2 - 4\Delta = 0$. La matrice $\overline{\mathbf{J}}^*$ n'est généralement pas diagonalisable, et il n'y a qu'une seule valeur propre (et direction propre)



Racine double réelle

(a) point fixe impropre

(b) matrice diagonale ($\overline{\mathbf{J}}^*$ symétrique)

(fig. tirée de Manneville, page 41)

Il est cependant possible de mettre le système sous la **forme canonique de Jordan** avec le choix d'une base adéquate,

$$\overline{\mathbf{J}}^* = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = s\zeta_1 + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = s\zeta_2 \end{cases} \implies \zeta_2 = \zeta_2^0 e^{st} \implies \dot{\zeta}_1 - s\zeta_1 = \zeta_2^0 e^{st}$$

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

La relation $\dot{\zeta}_1 - s\zeta_1 = \zeta_2^0 e^{st}$ peut s'interpréter comme la réponse d'un oscillateur du 1er ordre forcé par un **terme résonnant** évoluant au même taux que le membre de gauche. L'intégration de cette équation (par la méthode de variation de la constante) conduit à,

$$\zeta_1(t) = (\zeta_1^0 + \zeta_2^0 t) e^{st}$$

et le deuxième terme de la parenthèse est un **terme séculaire**

L'existence de termes séculaires associés à des seconds membres « résonnants » est un avatar classique des méthodes de perturbations « naïves » en séries de puissances qui conduisent à des approximations non uniformes en temps (*i.e.* qui ne sont valables que pour les temps courts). Des techniques spécifiques doivent être utilisées pour résoudre cette difficulté, méthode de Poincaré-Lindstedt, de moyennage, ou plus généralement méthode des échelles multiples

Variation de la constante : solution de l'équation homogène, $\dot{\zeta}_1 - s\zeta_1 = 0$, $\zeta_1 = \alpha e^{st}$
 $\alpha \rightarrow \alpha(t)$, $\dot{s} + s\alpha - s\alpha = \xi_2^0$, $\alpha = \zeta_1^0 + \zeta_2^0 t$

● **Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire**

À titre d'exemple, on considère l'oscillateur amorti suivant,
 $\ddot{x} - 2\epsilon x + x = 0$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 1$

pour lequel on peut déterminer explicitement la solution,
 $x(t, \epsilon) = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} e^{-\epsilon t} \sin[(1 - \epsilon^2)^{1/2} t]$

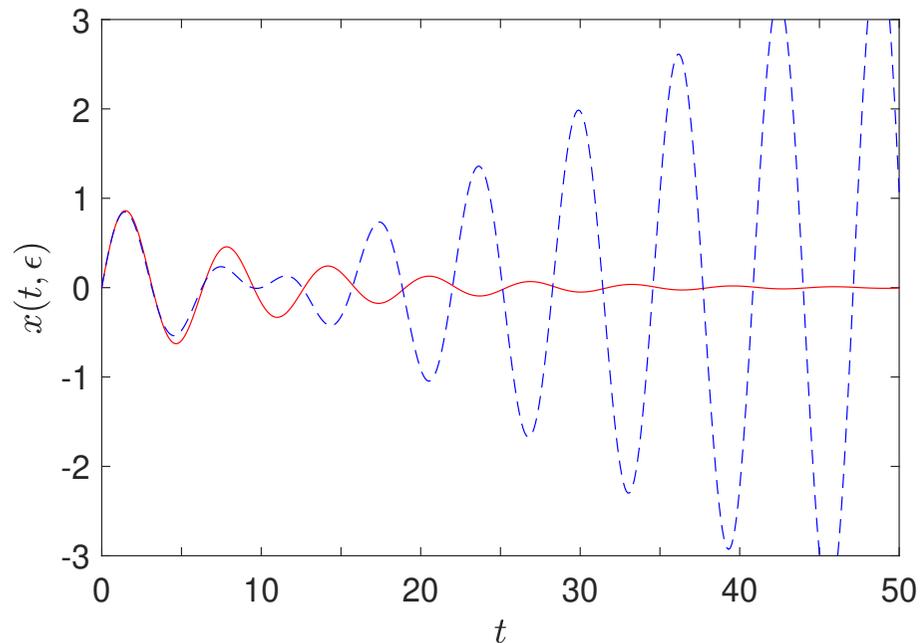
Application « naïve » de la théorie des perturbations. On cherche la solution sous la forme d'un développement en ϵ , $x(t, \epsilon) \simeq x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$. Pour chaque puissance de ϵ , on résoud l'équation différentielle pour trouver :

$x_0(t) = \sin t$, $x_1(t) = -t \sin t$ et ainsi de suite

$$x(t, \epsilon) \simeq \sin t - \epsilon t \sin t + O(\epsilon^2)$$

une approximation qui tombe en défaut aux temps longs ($\epsilon t > 1$) aussi petit que soit ϵ à cause du terme séculaire $\epsilon t \sin(t)$! Le problème est ici clairement dû à l'horloge dont la fréquence a été conservée égale à 1, au lieu de $(1 - \epsilon^2)^{1/2}$

● Approche locale - linéarisation d'un système non linéaire



$$\epsilon = 0.1$$

$$\text{—} x(t, \epsilon) = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} e^{-\epsilon t} \sin[(1 - \epsilon^2)^{1/2} t]$$

$$\text{---} x(t, \epsilon) \simeq x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t)$$

Deux échelles de temps dans la solution $x(t, \epsilon)$,
oscillations en $\mathcal{O}(1)$ mais variation exponentielle de l'amplitude en $\mathcal{O}(1/\epsilon)$

● Quiz

Points fixes et stabilité ?

$$F = \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

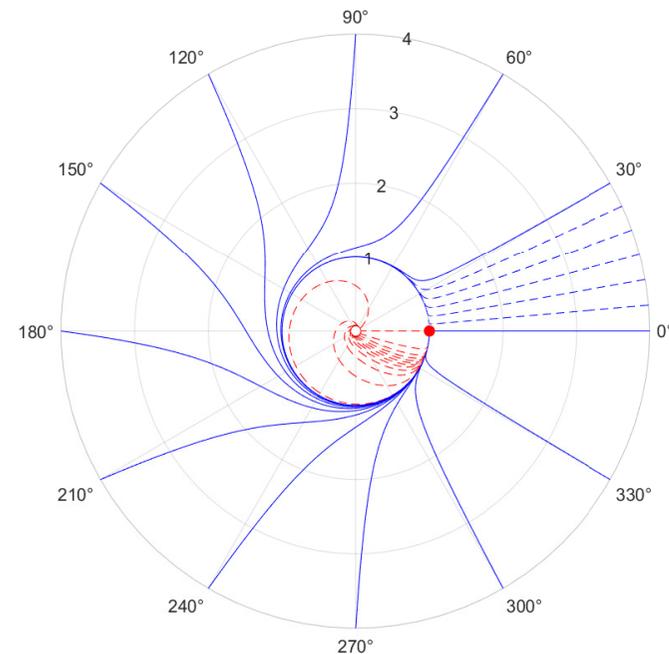
● Quiz

$$F = \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

Éqs découplées; deux points fixes en $r = 0$ (répulsif) ou $r = 1, \theta = 0$ (attractif)

On observe numériquement qu'à l'exception des trajectoires obtenues pour une condition initiale $\theta = 0$, toutes les autres suivent le cercle unité avant de converger vers le point fixe attractif $\mathbf{x}^* = (1, 0)$

On ne peut pas trouver de voisinage ϵ_0 autour de ce point fixe en choisissant un ϵ plus petit que la taille du cercle unité : point fixe pas stable au sens de Lyapunov



$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \implies r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad \frac{d}{d\eta} \text{atan}(\eta) = \frac{1}{1 + \eta^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2}$$

● Quiz

$$F = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

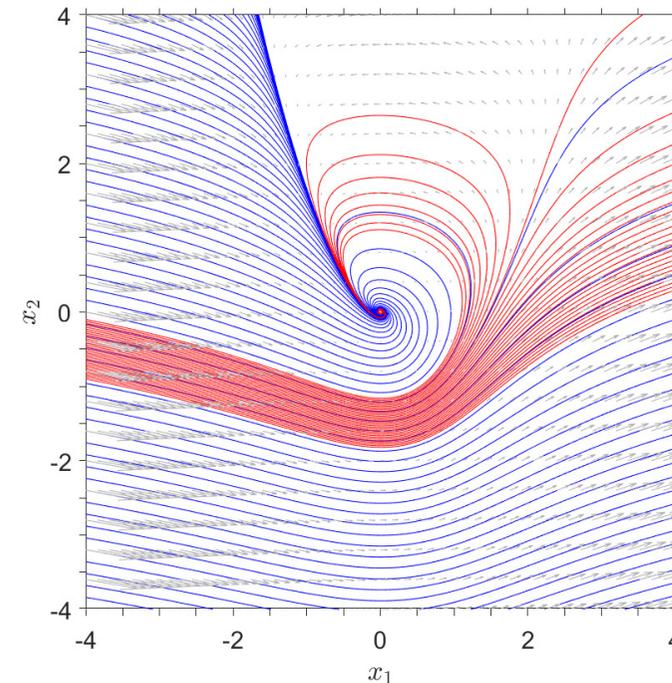
Point fixe $F(\mathbf{x}^*) = 0$, $\mathbf{x}^* = (0, 0)$

Matrice jacobienne

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det \bar{J}^* = 1$ et $\text{tr} \bar{J}^* = -1$, et on en déduit que le point \mathbf{x}^* est localement stable

Le point fixe n'est cependant pas stable globalement, pas de fonction de Liapunov $V(\mathbf{x})$ pour ce cas par exemple



● Quiz

Flot défini avec les expressions suivantes dans les 4 quadrants

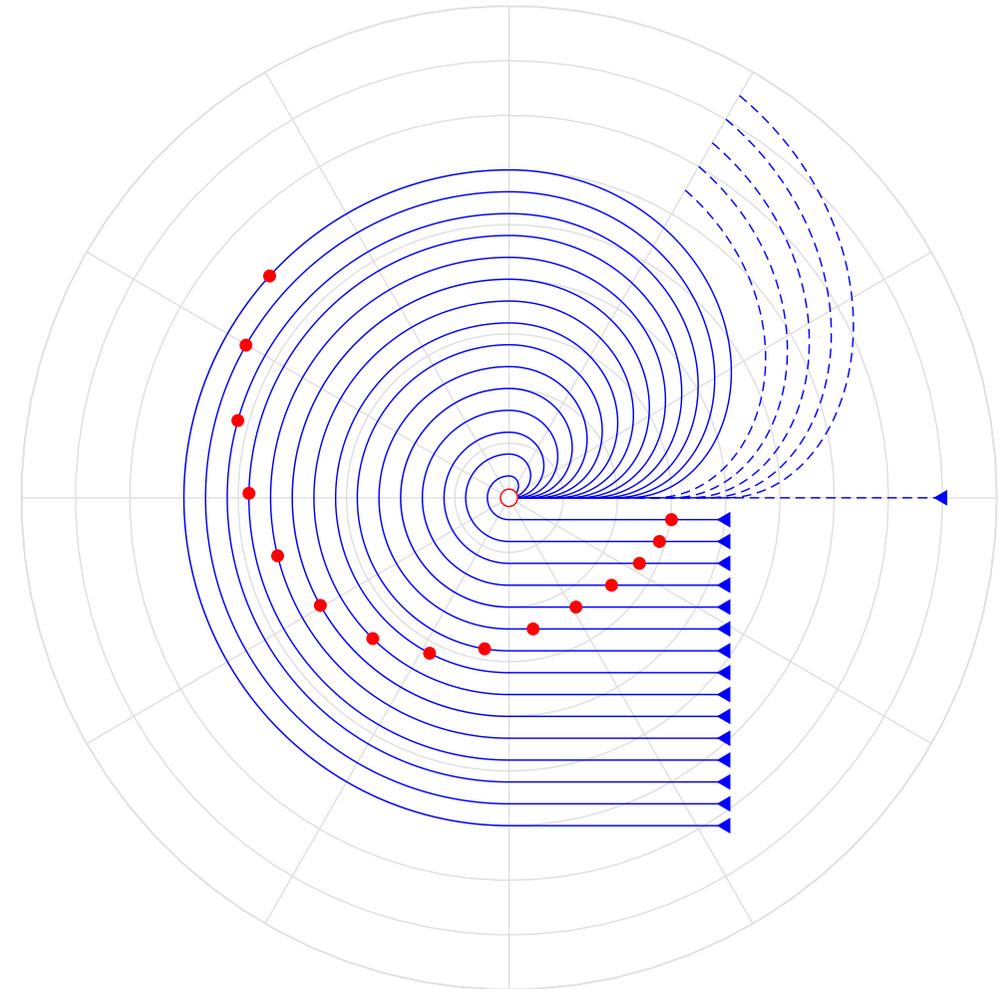
$$Q_1 \begin{cases} \dot{r} = -\sqrt{r} \cos \theta \\ \dot{\theta} = -\sqrt{\theta} \end{cases}$$

$$Q_2 \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r \cos \theta - \sqrt{\pi/2} \sin \theta \end{cases}$$

$$Q_3 \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = -r \end{cases}$$

$$Q_4 \begin{cases} \dot{x}_1 = -\sqrt{x_1} - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

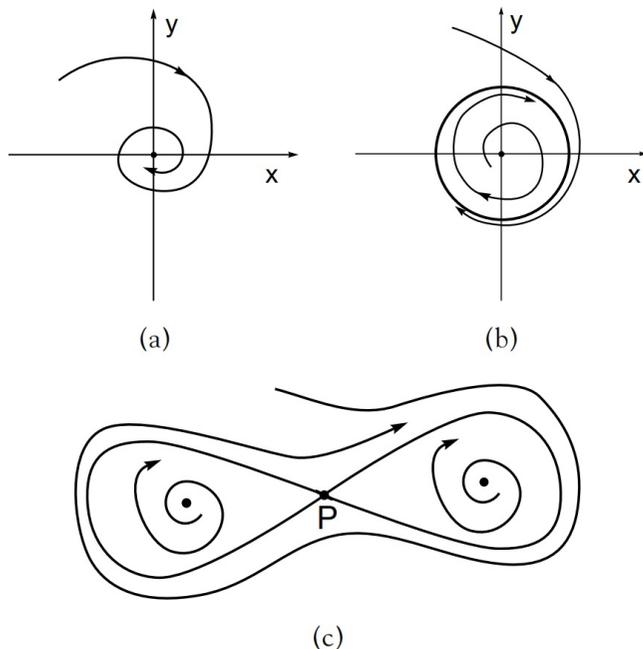
Bhat & Bernstein (2000, *SIAM J. Control. Optim.*)



● Cycle limite

Lorsque l'équilibre du système non linéaire est instable, on peut se demander si x s'éloigne indéfiniment de x^* ou non.

Théorème de Poincaré-Bendixson : approche géométrique pour un flot avec $x \in \mathbb{R}^2$. Soit x^* un équilibre isolé instable, x^* appartenant à un ensemble invariant Ω borné, alors Ω contient un cycle limite. Un ensemble Ω est dit invariant si toute orbite entrant dans Ω ne peut plus en sortir (forme faible d'application courante)



Ce théorème est uniquement valable sur \mathbb{R}^2 , car la démonstration utilise le fait qu'un cycle divise le plan en un intérieur et un extérieur. Le théorème d'unicité (une seule trajectoire pour un point du plan) ne permet pas à une trajectoire de couper le cycle et de passer d'une région à l'autre. Cette contrainte n'existe pas pour des dimensions plus élevées

Pas de chaos possible dans l'espace des phases en 2-D

● **Cycle limite**

Illustration avec le [cycle de la glycolyse \(Sel'kov, 1968\)](#) : les cellules vivantes tirent leur énergie de la décomposition du sucre en pyruvate (possiblement dégradé en acide lactique par fermentation ensuite)

Avec x_1 la concentration en ADP (adenosine diphosphate) et x_2 la concentration en F6P (fructose 6-phosphate), la cinétique chimique est décrite par

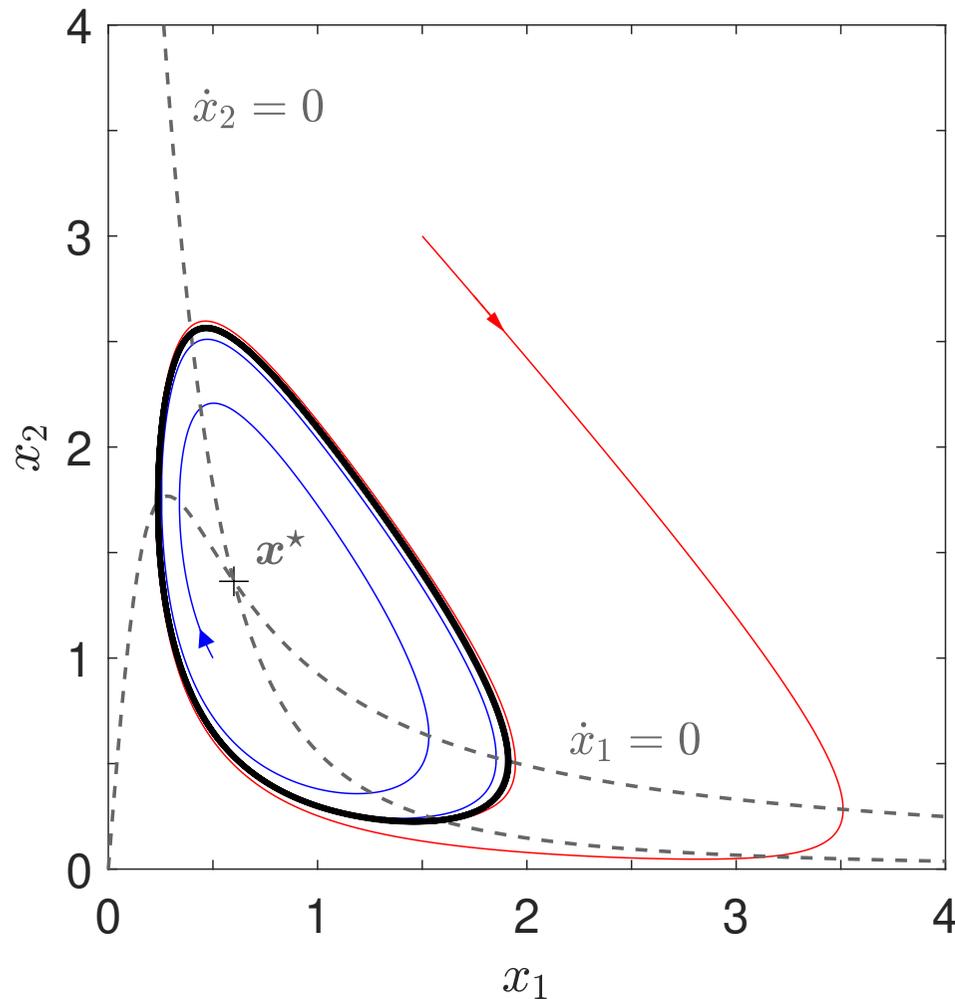
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + ax_2 + x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 = b - ax_2 - x_1^2x_2 \end{cases} \quad a, b > 0 \quad (a = 0.08, b = 0.6)$$

On recherche les points fixes \mathbf{x}^* du flot $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ en considérant $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$. Par sommation des deux équations, on obtient $x_1^* = b$, et avec la seconde équation $x_2^* = b/(a + b^2)$. On s'intéresse à la matrice jacobienne pour statuer sur la stabilité de cet unique point fixe \mathbf{x}^*

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -1 + 2x_1x_2 & a + x_1^2 \\ -2x_1x_2 & -(a + x_1^2) \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{J}}^* = \begin{pmatrix} -1 + 2b^2/(a + b^2) & a + b^2 \\ -2b^2/(a + b^2) & -(a + b^2) \end{pmatrix}$$

● Cycle limite

Cycle de la glycolyse (suite)



On retient que

$$\begin{cases} \Delta = \det \overline{J}^* = a + b^2 > 0 \\ \tau = \text{tr} \overline{J}^* = -\frac{b^4 + (2a - 1)b^2 + a + a^2}{a + b^2} \end{cases}$$

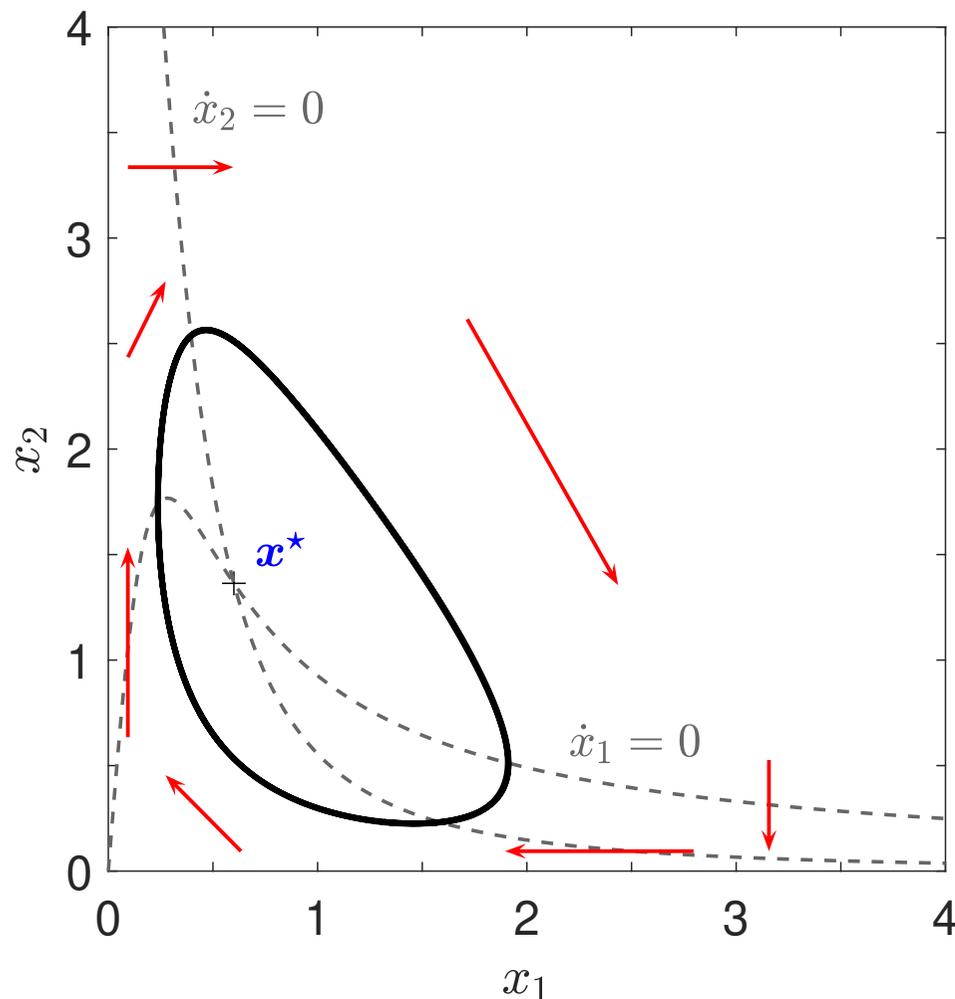
et l'unique point fixe x^* sera instable lorsque $\tau > 0$ (dépend de la valeur des paramètres a et b du modèle)

$$\dot{x}_1 = 0, x_2 = x_1 / (a + x_1^2)$$

$$\dot{x}_2 = 0, x_2 = b / (a + x_1^2)$$

● Cycle limite

Cycle de la glycolyse (suite)



Application du théorème de Poincaré-Bendixson avec un exemple de construction d'une région de confinement (*trapping zone*)

On définit une région de l'espace autour du cycle limite (et du point fixe répulsif donc), et on montre que le flot $F = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ est toujours orienté vers l'intérieur de cette région à sa frontière (formellement $F \cdot n < 0$ avec n normale extérieure)

● Cycle limite

Approche « algébrique » avec le **théorème de Hopf**

On considère un flot pour lequel on fait apparaître explicitement un paramètre de contrôle μ dont l'évolution peut faire changer la nature de l'équilibre,

$$\dot{x} = F(x, \mu)$$

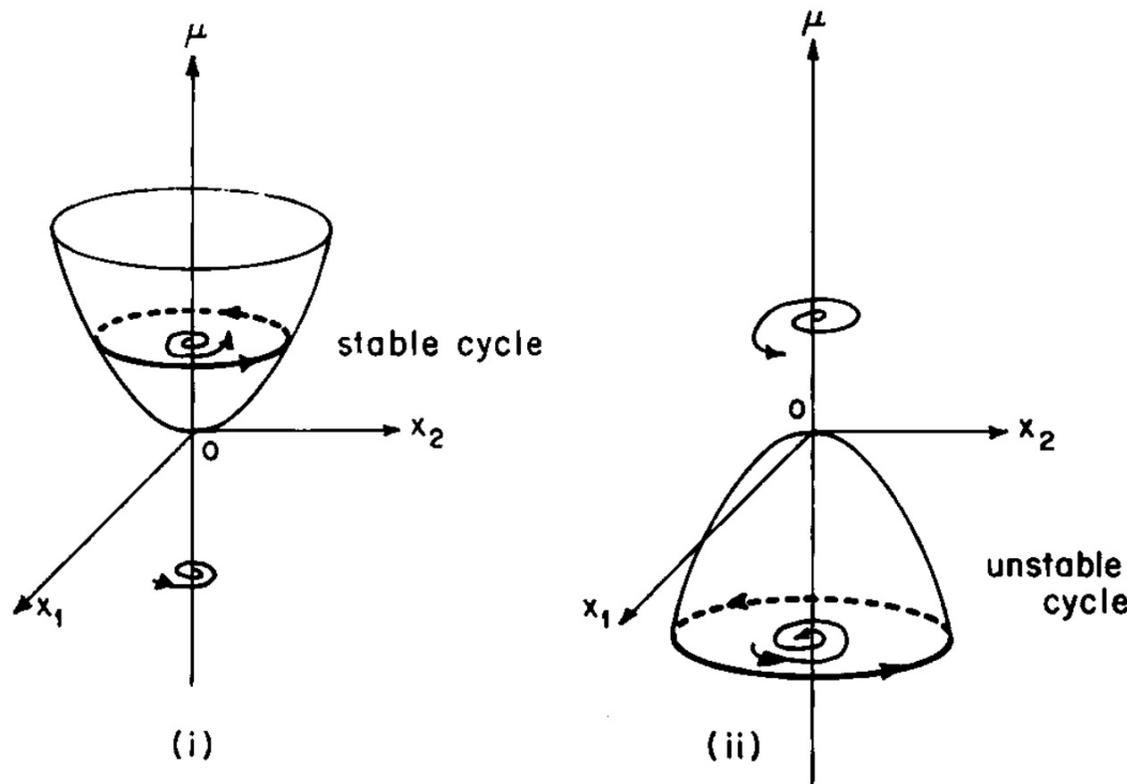
avec $x^*(\mu)$ un équilibre isolé. On note $\sigma(\mu) \pm i\omega(\mu)$ les deux valeurs propres de la matrice jacobienne \bar{J}^* du système linéarisé (le théorème est donné pour \mathbb{R}^2 , mais s'étend par exemple à \mathbb{R}^3 , la 3e valeur propre étant réelle et négative en $\mu = 0$)

On suppose que $x^*(\mu)$ est asymptotiquement stable pour $\mu < 0$, et que $\sigma(0) = 0$. Si $\omega(0) \neq 0$ et $d\sigma/d\mu|_{\mu=0} > 0$, alors il existe un cycle limite pour $\mu < 0$ ou $\mu > 0$ avec $|\mu|$ petit.

Si de plus $x^*(0)$ est **asymptotiquement stable**, alors il existe un **cycle limite stable** pour $\mu > 0$ assez petit, et le rayon r de ce cycle limite varie comme $r \sim \sqrt{\mu}$

● **Bifurcation de Hopf**

Apparition d'un cycle limite lorsque un point d'équilibre perd sa stabilité,
 $x^*(\mu = 0)$ point (critique) de bifurcation



(fig. tirée de Beltrami, page 148)

(i) bifurcation supercritique :
 transition vers un cycle limite
 stable pour $\mu > 0$

(ii) bifurcation sous-critique :
 transition vers un cycle limite
 instable pour $\mu < 0$

● **Bifurcation : perte de stabilité structurelle**

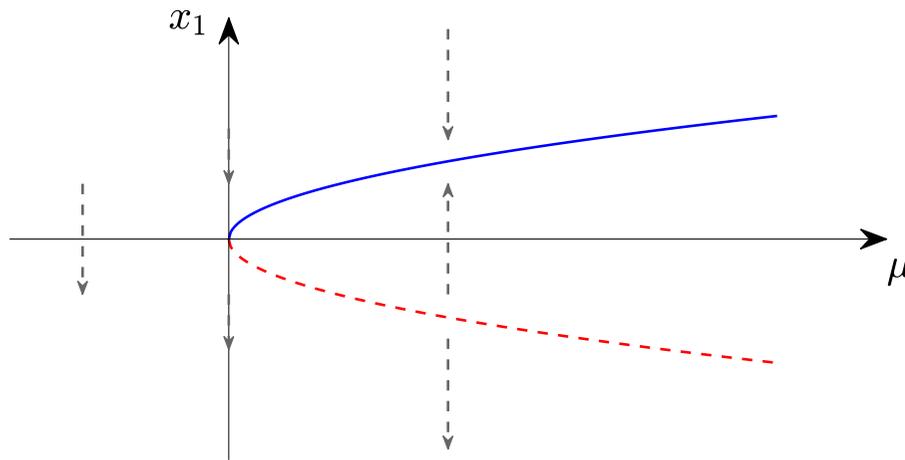
On considère un système dynamique fonction de paramètres de contrôle. Un **point de bifurcation** est un point de l'espace de contrôle pour lequel le portrait de phase change de façon qualitative; une bifurcation correspond à une **perte de stabilité structurelle** du système. On se limite ici à des bifurcations locales dans lesquelles le portrait de phase est modifié au voisinage d'ensembles limites particuliers; par exemple la bifurcation d'un nœud vers un col quand une valeur propre réelle passe par zéro et change de signe

Nous considérons dans la suite qu'un seul paramètre de contrôle μ est responsable du changement qualitatif du portrait de phase; les bifurcations correspondantes sont appelées bifurcations de co-dimension 1 et peuvent se ramener à quelques archétypes relativement simples. On peut montrer qu'une seule variable de phase est suffisante pour traiter le problème (loin d'être évident). Grâce à un ensemble de transformations non linéaires, les équations prennent localement des formes normales classiques. Nous décrivons dans la suite quelques unes des formes les plus fréquentes

● Bifurcations canoniques

bifurcation noeud-col (*saddle-node*)

$$\dot{x}_1 = \mu - x_1^2$$



jacobien $J = -2x_1$ ($\dot{\zeta}_1 \simeq J\zeta_1$, $\zeta_1 = x_1 - x_1^*$)

point fixe $x_1^* = \mu$, pas de solution pour $\mu < 0$
et deux branches pour $\mu \geq 0$

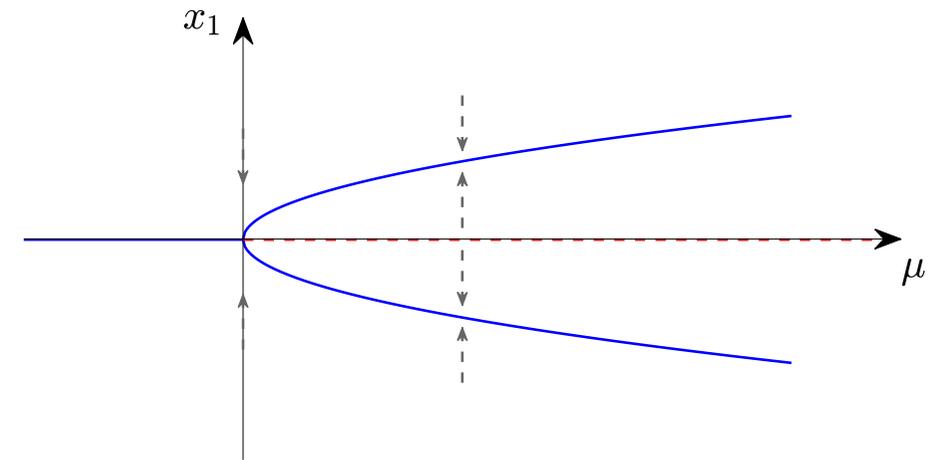
$x_1^* = +\sqrt{\mu}$, $J < 0$, branche stable —

$x_1^* = -\sqrt{\mu}$, $J > 0$, branche instable - - -

trajectoires à μ fixé - - -

bifurcation fourche (*pitchfork*)

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3$$



jacobien $J = \mu - 3x_1^2$

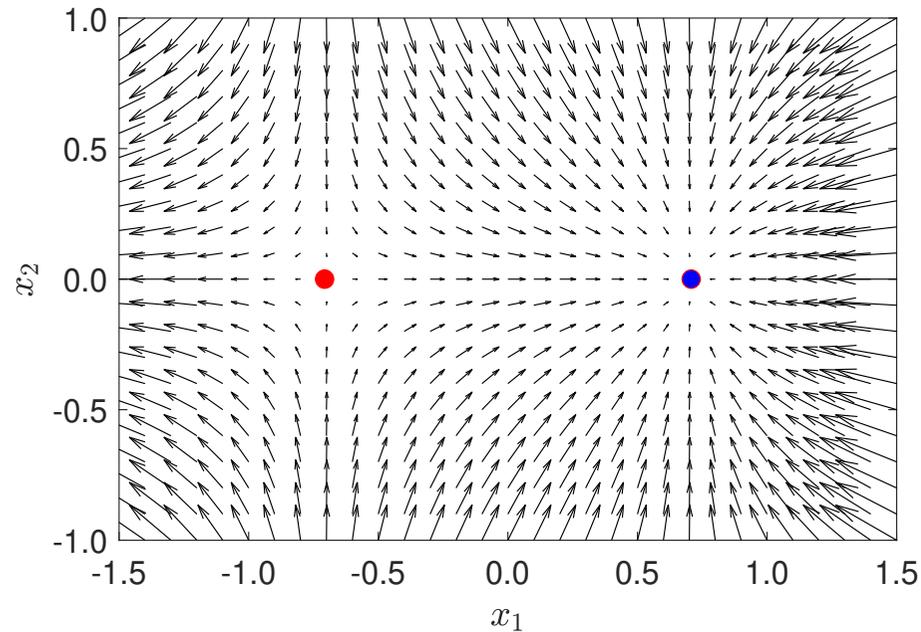
point fixe $x_1^* = 0$ stable pour $\mu < 0$ ($J < 0$) et
instable pour $\mu > 0$

$x_1^* = \pm\sqrt{\mu}$ pour $\mu > 0$, deux branches stables
($J = -2\mu < 0$)

● **Bifurcations canoniques**

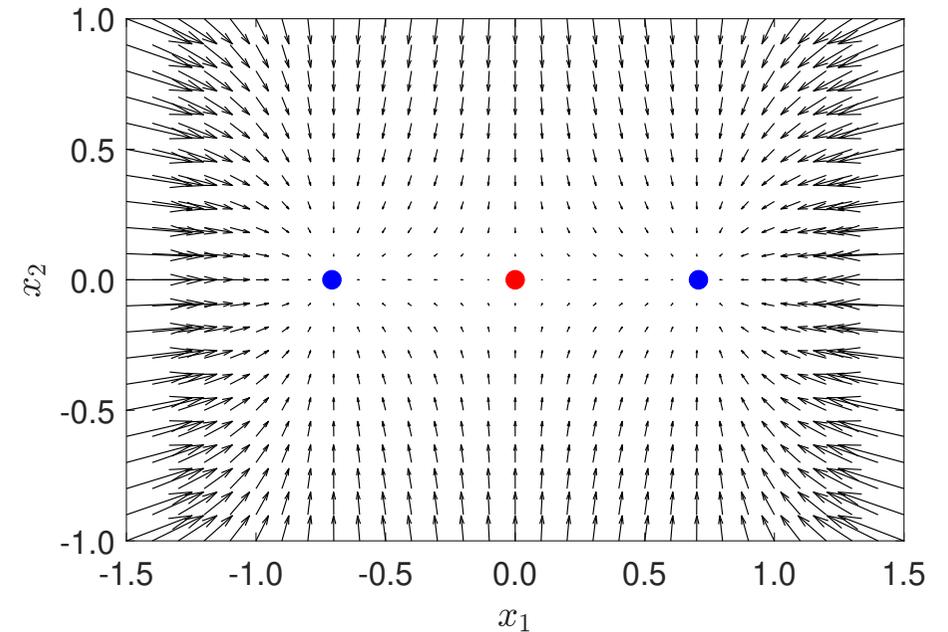
bifurcation noeud-col (*saddle-node*)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \mu = 0.5$$



bifurcation fourche (*pitchfork*)

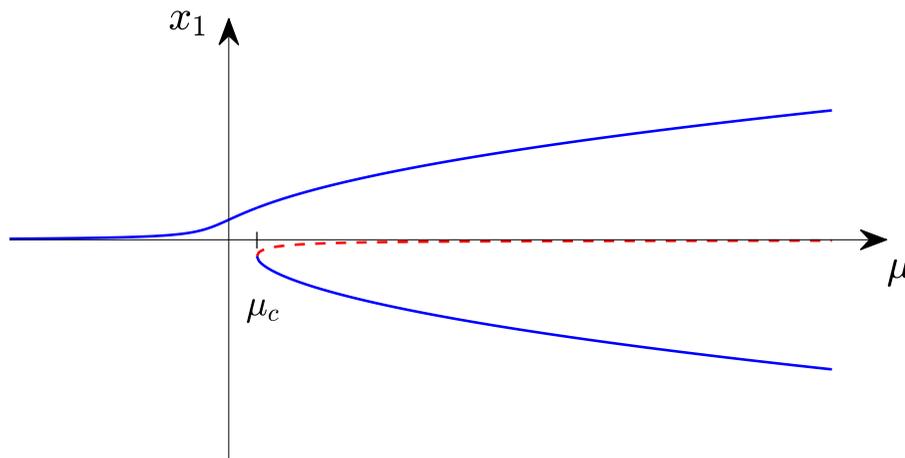
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \mu = 0.5$$



● **Bifurcations canoniques**

bifurcation imparfaite

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3 + \gamma \quad (\gamma = \text{cst})$$

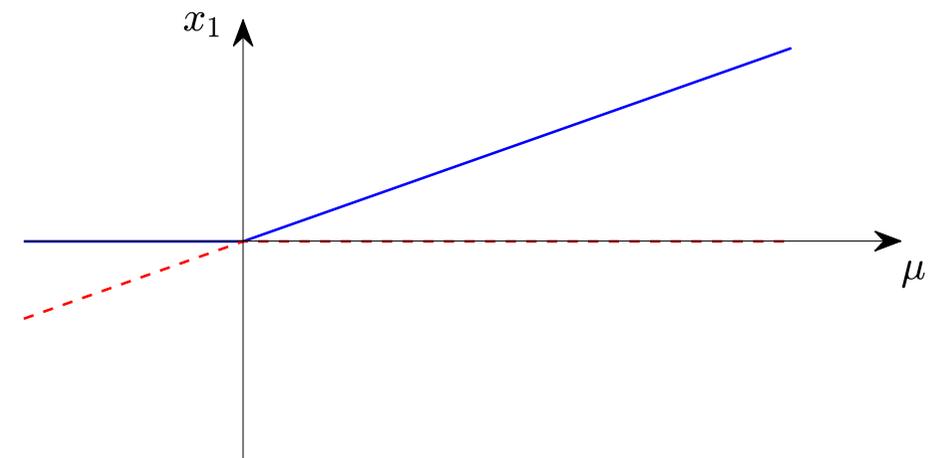


jacobien $J = \mu - 3x_1^2$, $\mu^c = (27\gamma^2/4)^{1/3}$

une branche stable pour $\mu < \mu^c$ (et deux autres racines complexes conjuguées), et deux branches stables et une instable pour $\mu > \mu^c$, avec brisure de la symétrie

bifurcation transcritique (transcritical)

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^2$$



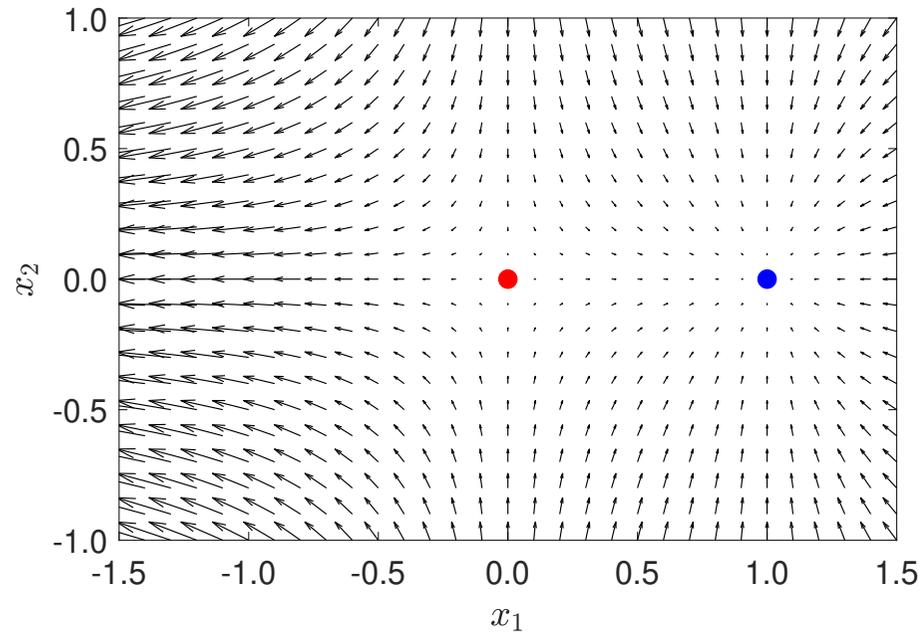
jacobien $J = \mu - 2x_1$

points fixes $\mu x_1^* = x_1^{*2}$, avec $x_1^* = 0$ stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$, et $x_1^* = \mu$ instable pour $\mu < 0$ et stable pour $\mu > 0$

● **Bifurcations canoniques**

bifurcation transcritique (*transcritical*)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \mu = 1.0$$



● **Bifurcations canoniques**

La **bifurcation de Hopf** correspond à l'apparition d'oscillations temporelles. Un espace des phases à 2 dimensions est nécessaire pour son développement et il est commode d'introduire une variable de phase complexe $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$

$$\dot{z} = (\mu + i\gamma)z - z|z|^2 \quad (\gamma = \text{cst})$$

$$\dot{r} + i\dot{\theta}r = (\mu + i\gamma)r - r^3 \quad \implies \quad \begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \gamma \end{cases}$$

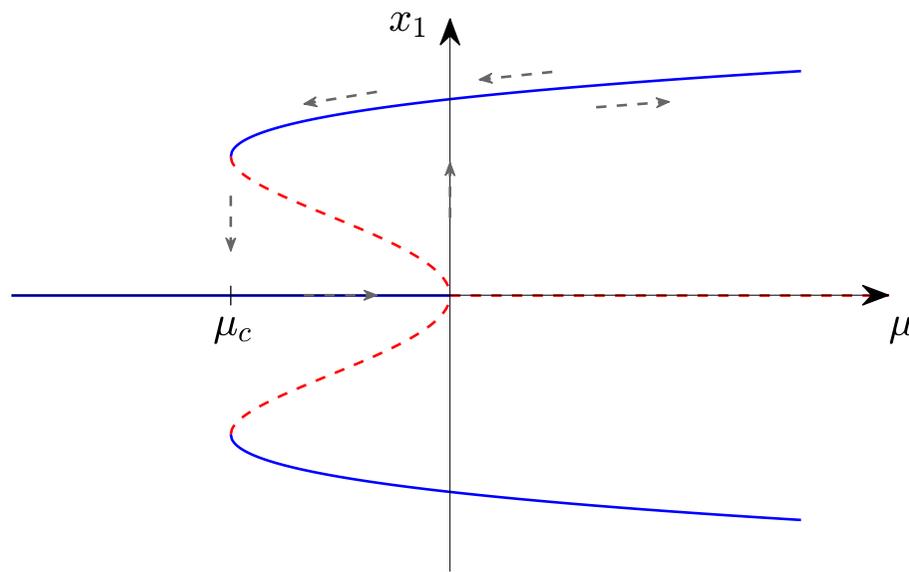
Point fixe $r^* = 0$ stable pour $\mu < 0$, et aussi $r^* = \sqrt{\mu}$ pour $\mu > 0$ qui est stable avec une vitesse de rotation constante γ le long du cycle. On a une bifurcation fourche (supercritique) pour la variable radiale r .

Les bifurcations précédentes correspondent à des situations dites **supercritiques**, dans lesquelles les non linéarités ont tendance à saturer l'effet de l'instabilité linéaire. Rien n'empêche cependant que le terme non linéaire d'ordre le plus bas ait lui aussi un caractère déstabilisant pour la solution (il faudra cependant adjoindre un terme saturant d'ordre plus élevé pour éviter la divergence de la solution). On parle alors de **bifurcation sous-critique ou inverse**

Par exemple, bifurcation de Hopf sous-critique $\dot{z} = (\mu + i\gamma)z + z|z|^2$

● **Bifurcations canoniques**

Dernier exemple avec une bifurcation sous-critique saturée par un terme quinquatique, $\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3 - x_1^5$



jacobiennne $J = \mu + 3x_1^2 - 5x_1^4$

points fixes : $x_1^* = 0$ stable pour $\mu < 0$, et les racines de l'eq. bicarrée

$$\mu + x_1^{*2} - x_1^{*4} = 0$$

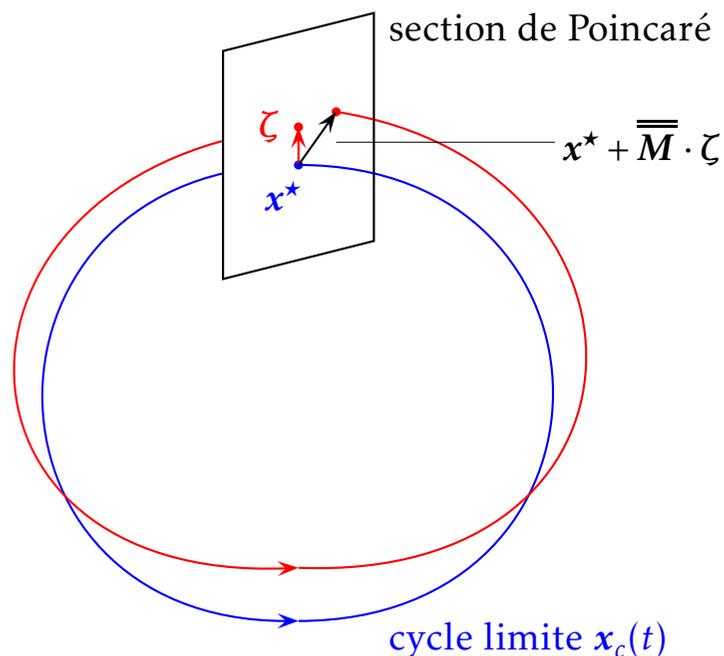
$\mu_c = -1/4 \leq \mu \leq 0$ pour avoir deux racines positives

$\mu > 0$ une seule racine positive

On observe des branches stables de grande amplitude qui peuvent coexister avec un point d'équilibre stable en $x_1 = 0$ pour une plage de valeurs de $\mu_c < \mu < 0$. L'existence de ces états stables différents conduit à la possibilité de sauts quand μ croît légèrement à partir de 0 et d'**hystérésis**. Les branches stables sont décrites différemment suivant les conditions initiales sur μ

● Stabilité des cycles limites

Un scénario classique lors de l'évolution d'un paramètre de contrôle est le suivant : point fixe stable, qui devient un **cycle limite stable** par une bifurcation de Hopf. L'étape naturelle suivante est de s'interroger sur la perte de stabilité de ce cycle limite, et de la suite de l'évolution du système dynamique ...



Formellement, on considère une solution périodique sur un cycle limite x_c , $x_c(t + T) = x_c(t)$

On s'écarte alors légèrement de la trajectoire du cycle limite, avec $x^* + \zeta$ dans une section de Poincaré, et on examine l'évolution de cet écart ζ au bout d'une période, $x^* + \overline{\overline{M}} \cdot \zeta$, où $\overline{\overline{M}}$ est la matrice de Floquet

La perte de stabilité du cycle limite se produit lorsque une des valeurs propres de $\overline{\overline{M}}$ traverse le cercle unité (module plus grand que l'unité)

● **Attracteur (système dissipatif)**

Dans les exemples précédents nous avons vu que des systèmes pouvaient présenter une stabilité asymptotique qui amenait les trajectoires à converger vers un point fixe x^* ou vers un cycle limite $x_c(t)$. Il s'agit de 2 exemples d'ensembles appelés attracteurs.

Un **attracteur** \mathcal{A} est un ensemble fermé possédant les propriétés suivantes :

- C'est un ensemble invariant, toute trajectoire commençant/entrant dans \mathcal{A} reste dans \mathcal{A} , $\forall t$
- \mathcal{A} attire les trajectoires commençant dans un ensemble ouvert de conditions initiales. Le plus grand ouvert Ω_0 satisfaisant cette propriété est appelé **bassin d'attraction** de \mathcal{A}
- \mathcal{A} est minimal, c'est-à-dire qu'aucun sous-espace de \mathcal{A} ne répond aux deux premiers points

● **Attracteur (système dissipatif)**

Quelques remarques :

- Il n'y a pas d'attracteur pour les **systèmes conservatifs**, l'attraction impose la contraction des volumes
- La dimension de l'attracteur est inférieure à celle de l'espace des phases et le volume de l'attracteur est nul, par exemple pour un point fixe x^* ou un cycle limite stable $x_c(t)$
- Il existe des attracteurs plus compliqués associés aux **systèmes chaotiques**, appelés **attracteurs étranges**, dont la dimension est fractale (non entière)

Oscillateur de van der Pol (1926)



(1889-1959)

● **Point fixe de l'oscillateur**

Éq. de van der Pol,

$$\ddot{\theta} - (\epsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0$$

On se ramène à un système du premier ordre en posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\epsilon - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \text{flot 2-D}$$

Point fixe $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2) = (0, 0)$. On examine sa stabilité locale en linéarisant le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ autour de ce point d'équilibre,

$$\zeta = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad \begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{pmatrix} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{J}}^*} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \det \bar{\mathbf{J}}^* = 1 > 0 \\ \text{tr} \bar{\mathbf{J}}^* = \epsilon \end{cases}$$

Lorsque $\epsilon < 0$ (amortissement), stabilité du point fixe

Lorsque $\epsilon > 0$ (apport d'énergie), point fixe instable, $\text{tr} \bar{\mathbf{J}}^* < 0$

Lorsque $\epsilon = 0$, stabilité marginale

● **Existence d'un cycle limite**

Application du théorème de bifurcation de Hopf (1942)

Point fixe isolé \mathbf{x}^* , valeurs propres s_i de $\overline{\mathbf{J}}^*$

$$s_{1,2} = \frac{\epsilon \pm i\sqrt{4 - \epsilon^2}}{2} \equiv \sigma(\epsilon) \pm i\omega(\epsilon)$$

On a bien $\mathbf{x}^*(\epsilon)$ asymptotiquement stable pour $\epsilon < 0$, instable pour $\epsilon > 0$, et $\sigma(0) = 0$. De plus $\omega(0) \neq 0$ et $d\sigma/d\epsilon|_{\epsilon=0} > 0$

\mathbf{x}^* asymptotiquement stable pour $\epsilon = 0$?
(souvent le point dur pour appliquer ce théorème)

● **Existence d'un cycle limite (suite)**

On cherche une fonction de Liapunov V qui représenterait une certaine énergie du système $V = (\dot{\theta}^2 + \theta^2)/2 = (x_1^2 + x_2^2)/2$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1 x_2 + (\epsilon - x_1^2) x_2^2 - x_1 x_2 = (\epsilon - x_1^2) x_2^2 \quad \dot{V}|_{\epsilon=0} \leq 0 \end{aligned}$$

En s'appuyant sur le **théorème d'invariance de LaSalle** :

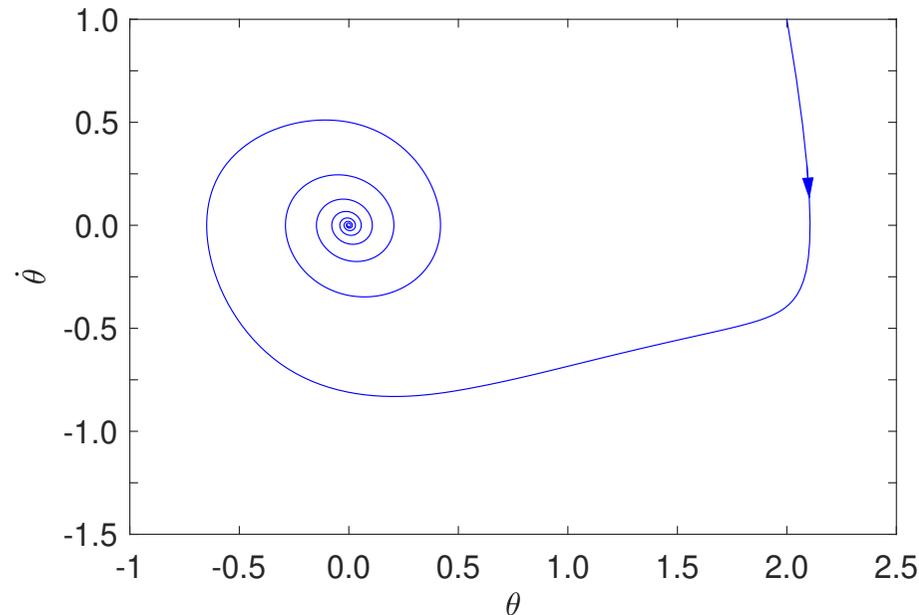
$\dot{V} = 0$ pour le point d'équilibre \mathbf{x}^* , mais aussi pour les deux axes $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, donc a priori $\Omega = \{\mathbf{x}^*, \mathbf{x} | x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0\}$. Ces deux axes ne sont cependant pas des ensembles invariants par F . Par exemple, pour $x_1 \neq 0$ et $x_2 = 0$, on a $\dot{x}_1 = 0$ mais $\dot{x}_2 = -x_1 \neq 0$ et on quitte donc l'axe $x_2 = 0$. Au final, $\Omega = \{\mathbf{x}^*\}$

Le point d'équilibre \mathbf{x}^* est donc asymptotiquement stable lorsque $\epsilon = 0$

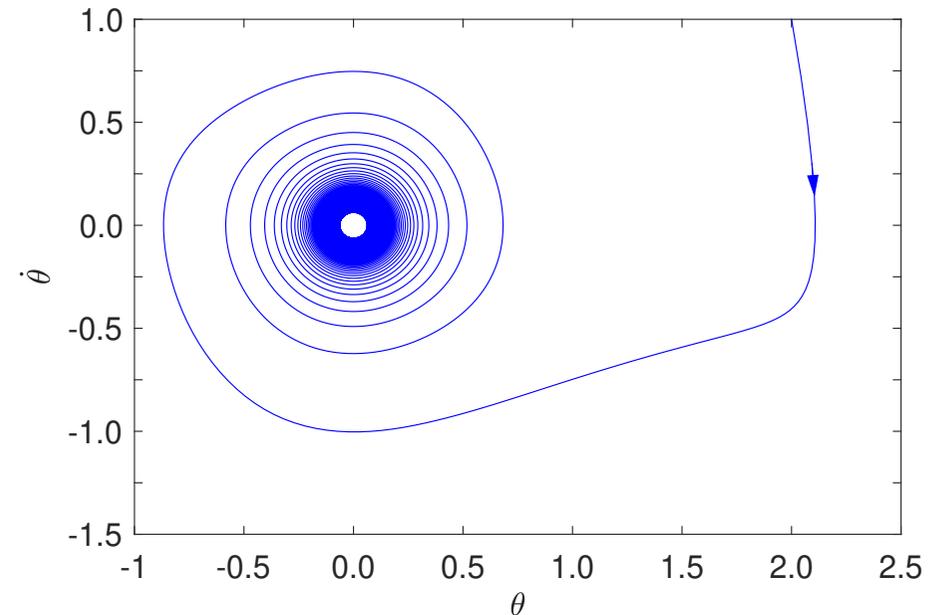
Il existe par conséquent un cycle limite stable pour $\epsilon > 0$, dont le rayon caractéristique ρ varie comme $\rho \sim \sqrt{\epsilon}$, résultat déjà obtenu par des considérations énergétiques (cf. transparent 21)

● Trajectoires dans le plan de phase

$\epsilon = -0.2$



$\epsilon = 0.$



stabilité marginale (intégration pour $0 \leq t \leq 1000 \approx 159T_0$),

x^* **asymptotiquement** stable,

et point de bifurcation supercritique

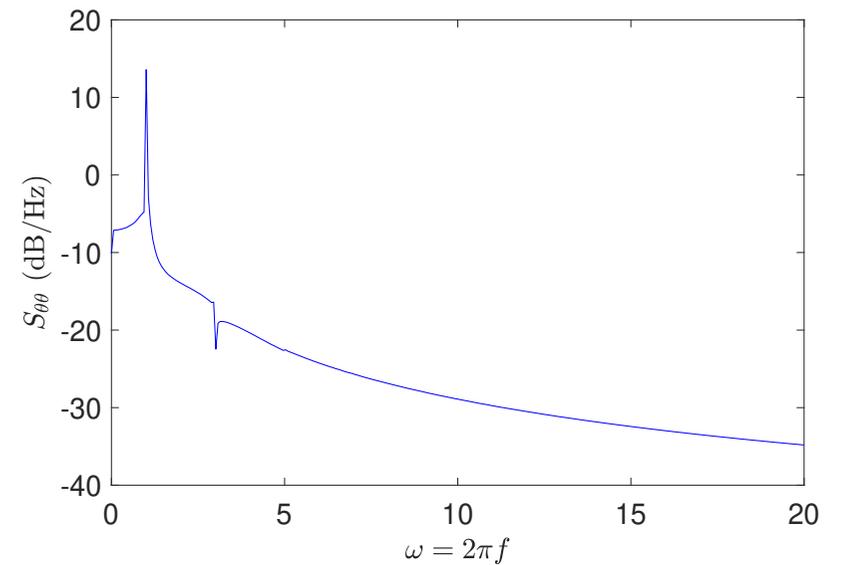
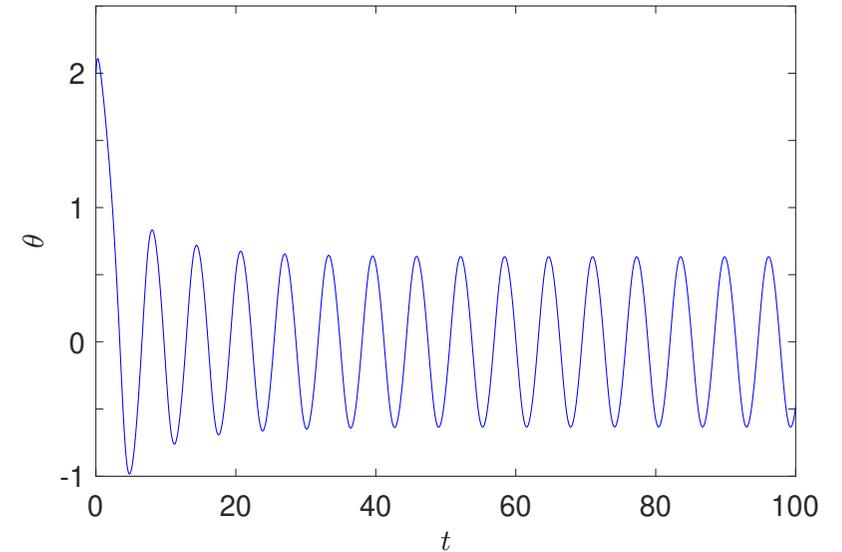
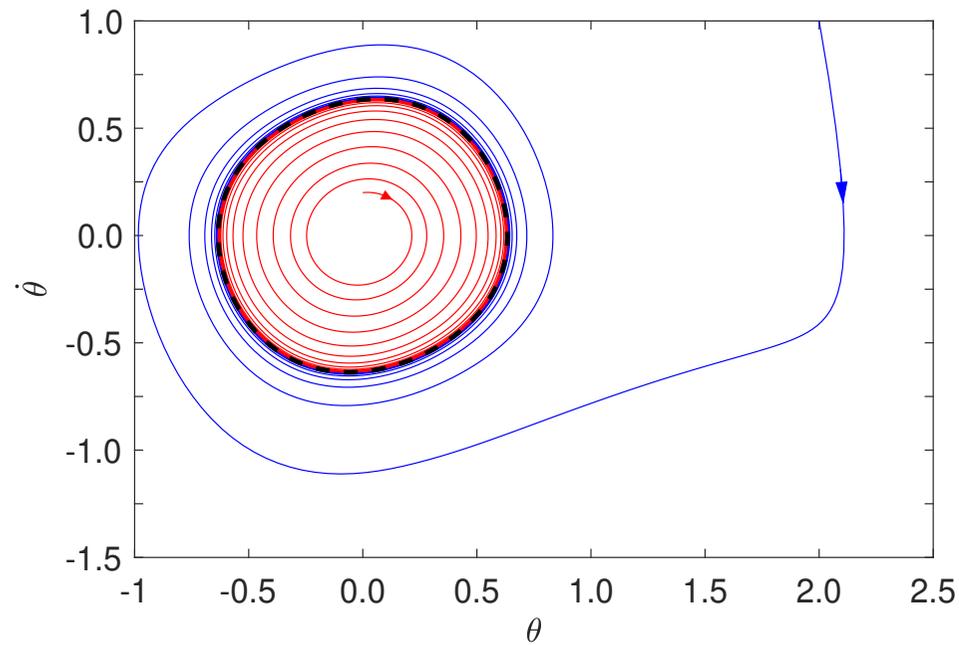
Temps d'un cycle $\ddot{\theta} + \theta \simeq 0$, $\theta \simeq \cos(\omega_0 t + \varphi)$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1$, $T_0 = 2\pi$

● Trajectoires dans le plan de phase

$\epsilon = 0.1$

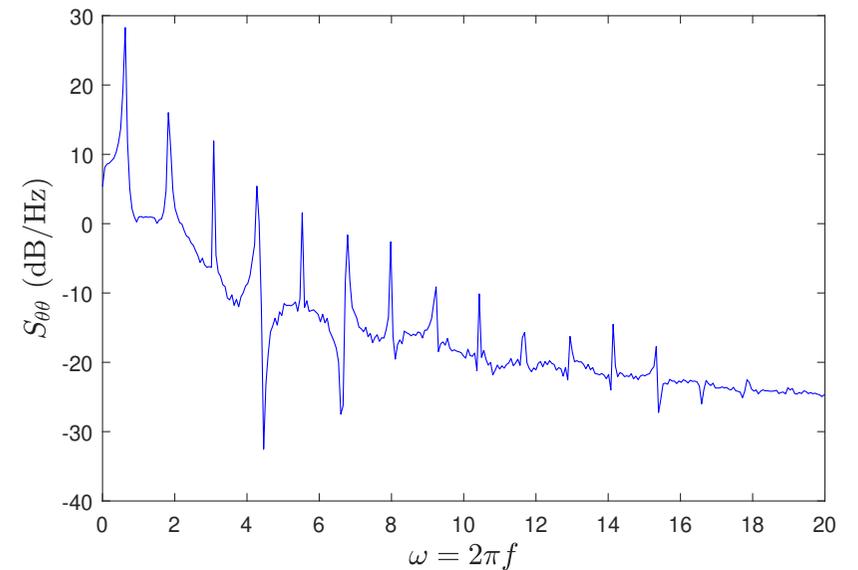
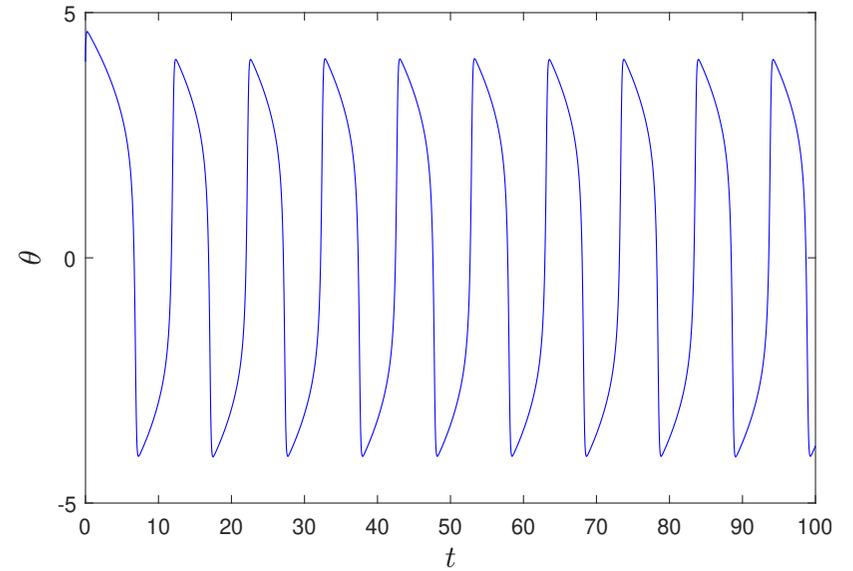
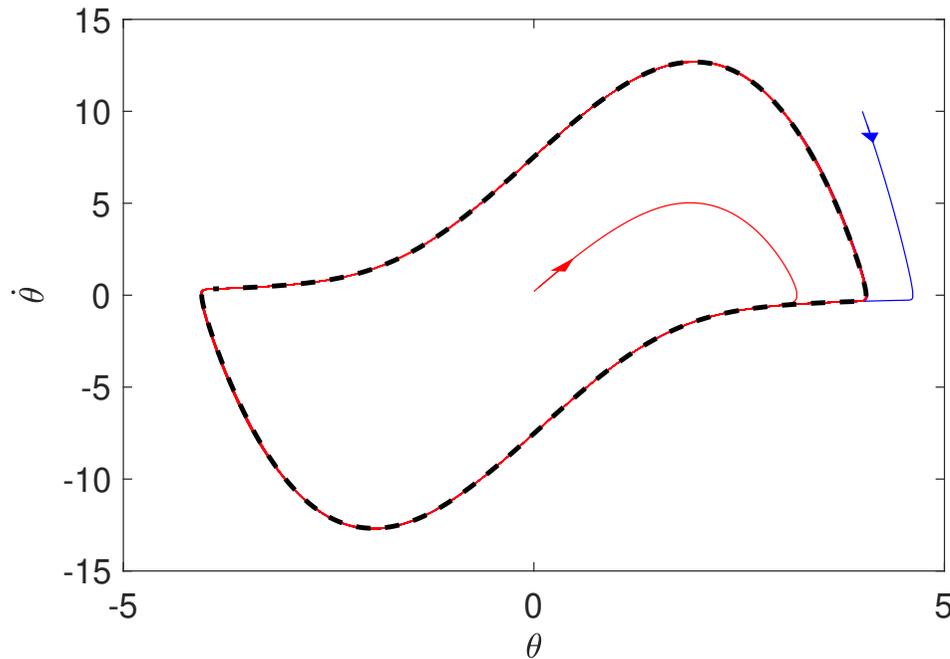
--- cycle limite



● Trajectoires dans le plan de phase

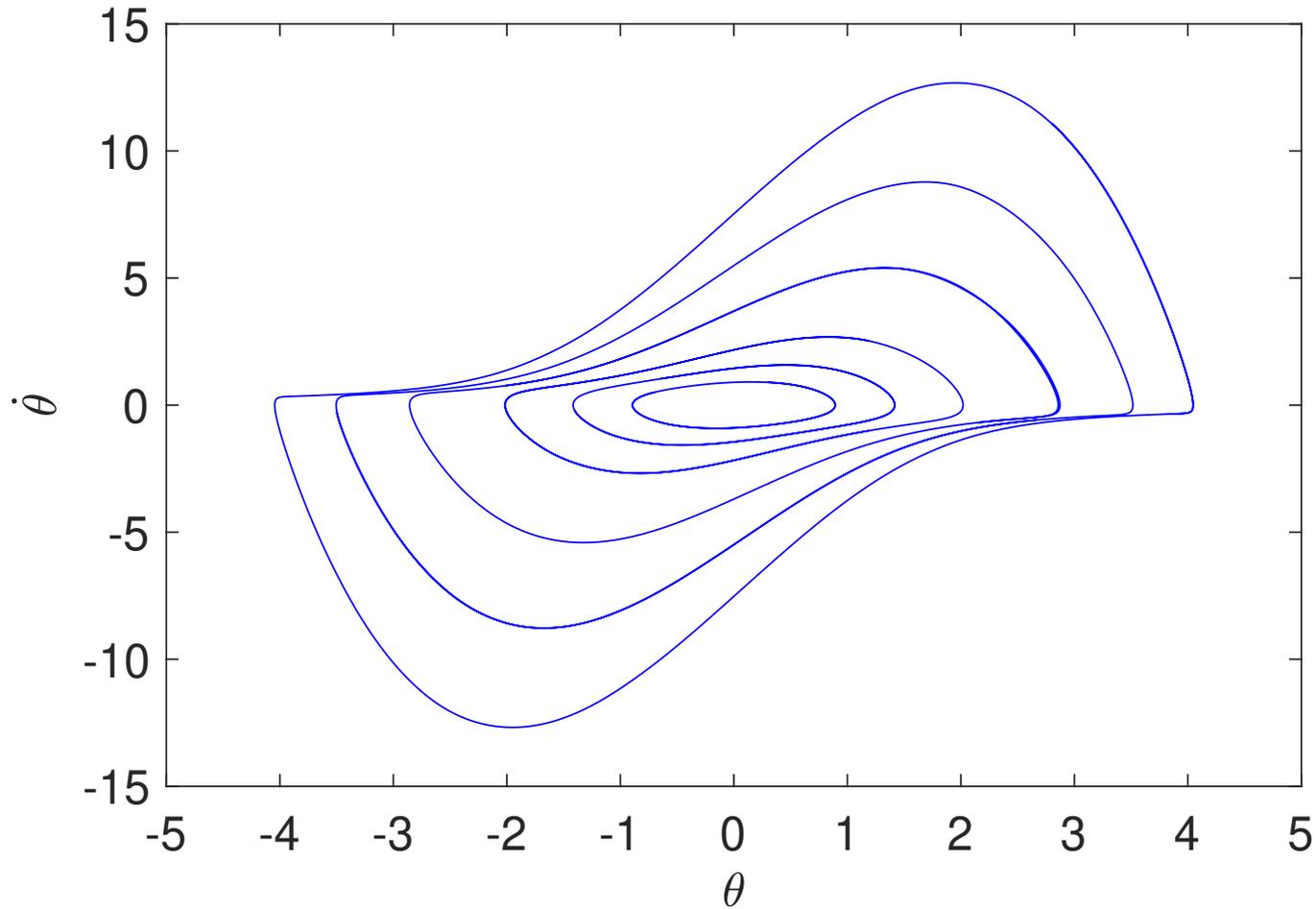
$\epsilon = 4$

--- cycle limite



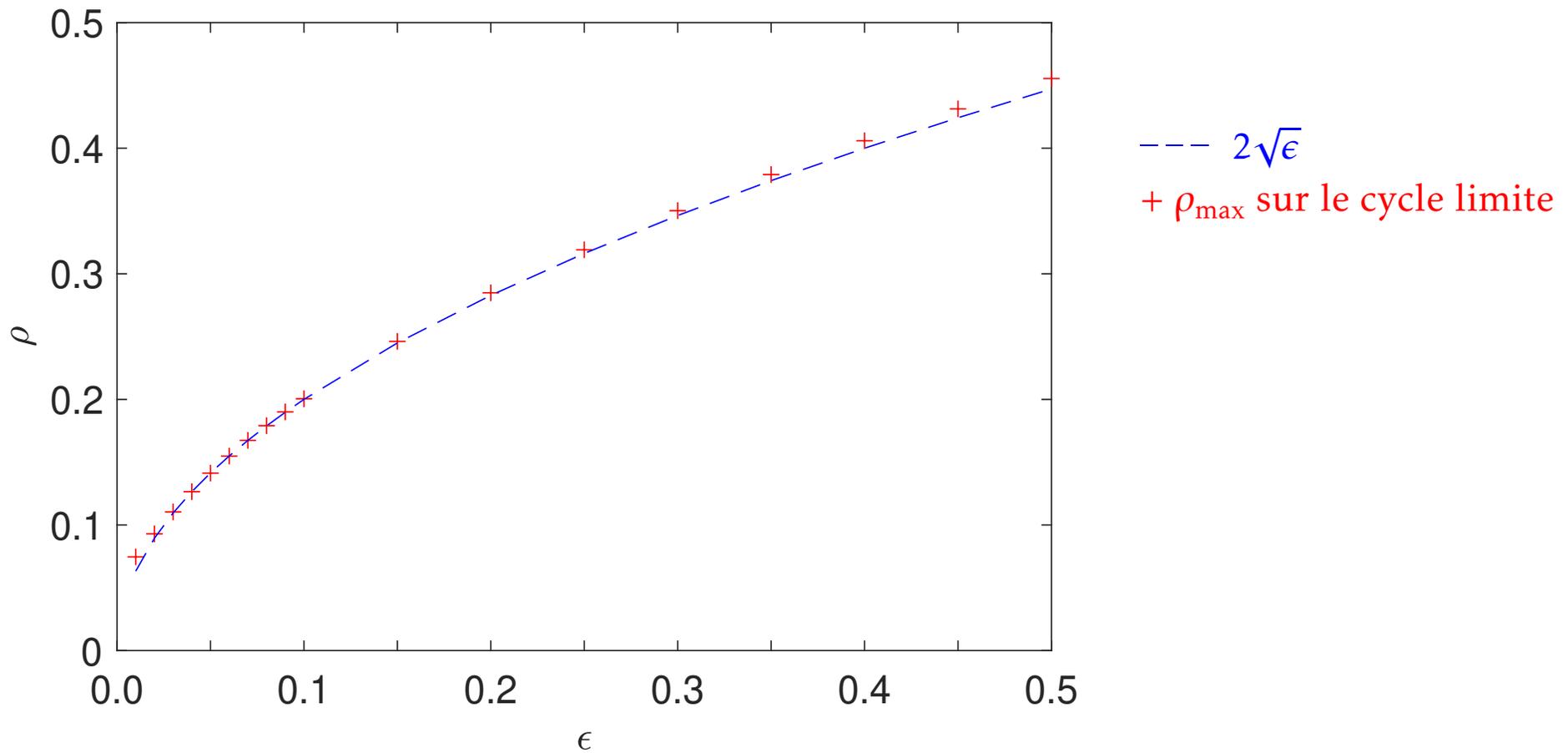
● Evolution du cycle limite en fonction de ϵ

$\epsilon = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$



● Evolution du cycle limite en fonction de ϵ pour $\epsilon \ll 1$

$\rho \simeq 2\sqrt{\epsilon}$ pour $\epsilon \ll 1$

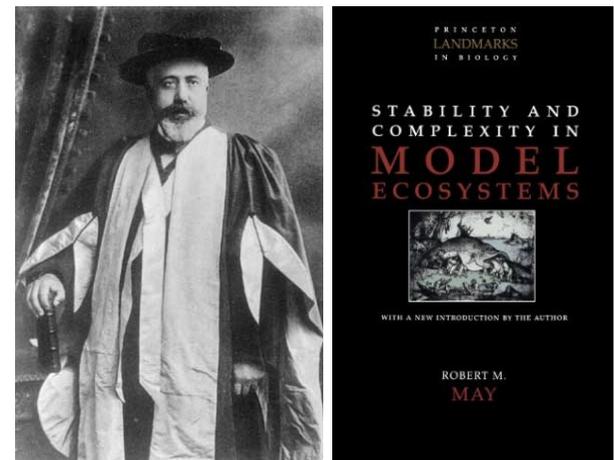


● Commentaires

- bifurcation supercritique de Hopf, apparition d'un cycle limite stable pour $\epsilon > 0$
- système dynamique temporel continu avec un **espace des phases bidimensionnel** : on ne peut pas avoir de régime plus compliqué que des régimes périodiques (voir le théorème de **Poincaré-Bendixson**)

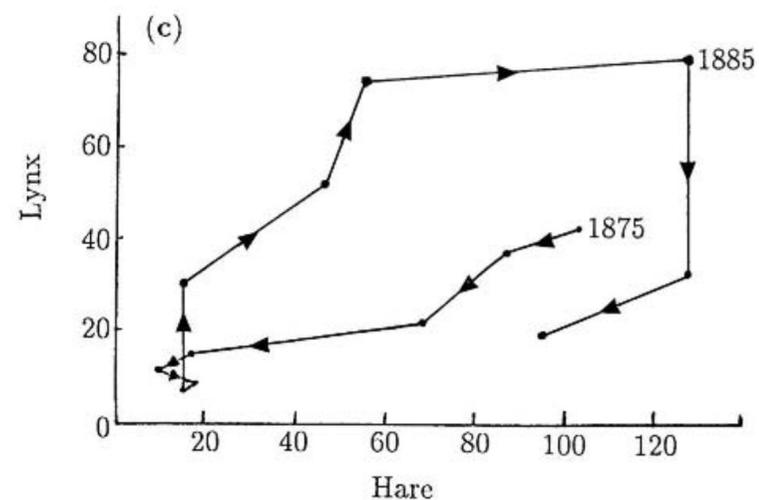
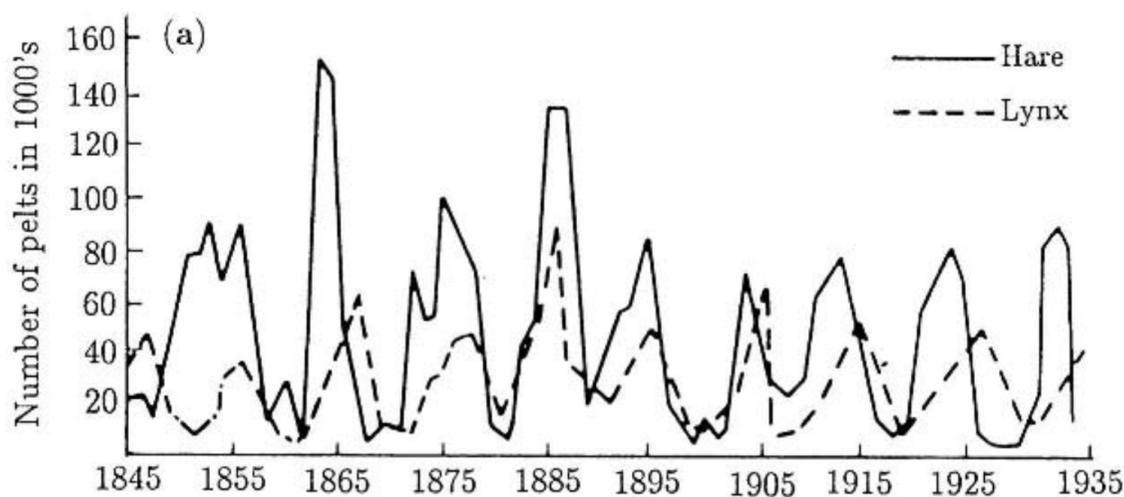
Le déterminisme impose qu'en chaque point de l'espace des phases ne peut passer qu'une seule trajectoire (un seul passé et un seul futur) : en 2-D, les trajectoires ne peuvent pas se croiser sans se couper, ce qui limite drastiquement leur complexité. Il faut une troisième dimension pour observer le chaos ...

Modèle proies-prédateurs de May (1973)



● Modèle proies-prédateurs

Interaction entre le lynx canadien et le lièvre d'Amérique dans les registres de prises de fourrures de la Compagnie de la Baie d'Hudson depuis environ 1845 jusqu'aux années 1930. On suppose (par défaut) que les chiffres reflètent une proportion fixe de la population totale de ces animaux. Ces données sont néanmoins rares sur un siècle, avec une durée du cycle limite d'environ 9 ans (Murray, 2001, page 84)



- **Modèle proies-prédateurs (suite)**

Observations expérimentales : fluctuations de la population (souvent des félins) sur des cycles d'une dizaine d'année.

Construction d'un modèle réaliste qui permet de reproduire ce cycle, de converger vers ce cycle en cas de perturbations extérieures (épidémie, ...) et de prévoir les conditions d'extinction.

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \frac{kPH}{H+D} \\ \frac{dP}{dt} = sP \left(1 - \frac{P}{\gamma H}\right) \end{cases}$$

avec H population des proies et P population des prédateurs

voir May, 1973, Eqs (4.5) page 84

historiquement travaux de Lotka (1920) et de Volterra (1926)

● **Modèle proies-prédateurs (suite)**

- Pour l'évolution des proies H ,

Sans prédateur ($P = 0$), application logistique pour H avec $\dot{H} = rH(1 - H/K)$, et équilibre stable pour $H = K$ (cf. exercice #3)

Terme d'interaction $\propto PH$, mais qui doit raisonnablement être proportionnel à P lorsque $H \gg 1$ (proies abondantes), d'où la forme $\propto PH/(H + D)$. Le terme $kH/(H + D)$ représente le nombre de proies mangées par prédateur et par unité de temps (et k le nombre maximum de proies que peut manger un prédateur par unité de temps)

- Prédateurs gouvernés par une application logistique modifiée

$$\dot{P} = sP[1 - P/(\gamma H)]$$

Changement de variables pour mettre le système sous une forme plus canonique
 $\tau = rt$, $\xi = H/D$ (proies), $\eta = P/(\gamma D)$ (prédateurs)

● **Modèle sous forme canonique**

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \xi - A\xi^2 - B\frac{\xi\eta}{1+\xi} \\ \frac{d\eta}{d\tau} = C\eta\left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right) \end{cases} \quad A = \frac{D}{K} = 0.1 \quad B = \frac{\gamma k}{r} = 1 \quad C = \frac{s}{r} = \frac{1}{6}$$

et on considère **C** comme paramètre du système ici.

Les points fixes du système doivent satisfaire $\dot{\eta} = 0$ et $\dot{\xi} = 0$

$$\dot{\eta} = 0 \implies \eta = 0 \quad \text{ou} \quad \eta = \xi$$

$$\dot{\xi} = 0 \implies \begin{cases} \eta = 0 & \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = 1/A \\ \eta = \xi, \xi \neq 0 & A\xi^2 + (A + B - 1)\xi - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{\pm}^{\star} = \frac{1 - A - B \pm \sqrt{(A + B - 1)^2 + 4A}}{2A}$$

Trois points d'équilibre sont trouvés : $E_1 = (\xi = 0, \eta = 0)$ qui correspond à l'extinction totale, $E_2 = (\xi = 1/A, \eta = 0)$ avec équilibre des proies et extinction des prédateurs et $E_3 = (\xi_+^{\star}, \eta_+^{\star} = \xi_+^{\star})$ avec $\xi_+^{\star} = \eta_+^{\star} > 0$ (physiquement acceptable)

● **Stabilité des points fixes**

Matrice Jacobienne \bar{J} que l'on calcule au point d'équilibre, pour ensuite déterminer les valeurs propres du système linéarisé au point d'équilibre et conclure sur la stabilité locale

Le système a une forme particulière,

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi f(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = \eta g(\xi, \eta) \end{cases} \quad \bar{J} = \frac{\partial(\dot{\xi}, \dot{\eta})}{\partial(\xi, \eta)} \quad \bar{J} = \begin{pmatrix} f + \xi f_{\xi} & \xi f_{\eta} \\ \eta g_{\xi} & g + \eta g_{\eta} \end{pmatrix}$$

$$f = 1 - A\xi - \frac{B\eta}{1 + \xi} \quad g = C \left(1 - \frac{\eta}{\xi} \right)$$

On trouve ainsi que les points fixes E_1 et E_2 sont instables, $\det \bar{J} < 0$, quelque soit la valeur du paramètre de contrôle C

$$\bar{J}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & -C \end{pmatrix} \quad \bar{J}_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 & -B/(1 + A) \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

● **Stabilité du point fixe E_3**

Matrice Jacobienne \bar{J} que l'on calcule au point d'équilibre (ξ_+^*, η_+^*) , en notant pour simplifier $\xi^* = \xi_+^* = \eta_+^*$ et $\bar{J}^* = \bar{J}(\xi_+^*, \eta_+^*)$, pour ensuite déterminer les valeurs propres du système linéarisé au point d'équilibre.

On utilise de nouveau la forme particulière du système, en notant que $f(\xi^*, \eta^*) = g(\xi^*, \eta^*) = 0$

$$\bar{J}^* = \begin{pmatrix} \xi^* f_\xi|^\star & \xi^* f_\eta|^\star \\ \eta^* g_\xi|^\star & \eta^* g_\eta|^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\xi^* + \frac{B\xi^{*\ 2}}{(1 + \xi^*)^2} & -\frac{B\xi^*}{1 + \xi^*} \\ C & -C \end{pmatrix}$$

$$\xi_+^* = \eta_+^* = (-1 + \sqrt{41})/2 \simeq 2.7016$$

$$\text{tr} \bar{J}^* = J_{11}^* - C \simeq 0.2625 - C$$

$$\det \bar{J}^* = -(J_{11}^* + J_{12}^*)C \simeq 0.4673C$$

● **Stabilité du point fixe (suite)**

Point d'équilibre stable avec des valeurs propres $s_{\pm} = \sigma \pm i\omega$ de partie réelle négative, $\text{tr} \bar{J}^{\star} = 2\sigma < 0$ lorsque $C > J_{11}$

Discriminant pour le calcul des valeurs propres $\delta = (J_{11}^{\star} - C)^2 + 4C(J_{11}^{\star} + J_{12}^{\star})$, noeud spiral puisque $\omega \neq 0$, **équilibre asymptotiquement stable localement**

Application du **théorème de Hopf** avec $\mu = J_{11}^{\star} - C$

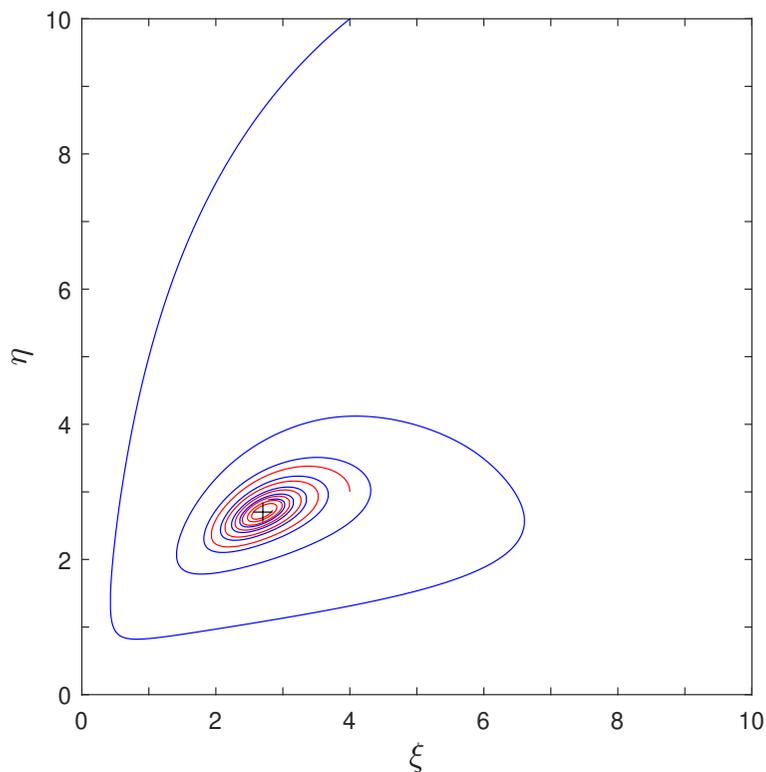
$$\sigma(\mu = 0) = 0 \quad \left. \frac{d\sigma}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \frac{1}{2} > 0 \quad \omega(\mu = 0) \neq 0$$

et en notant que le point d'équilibre est asymptotiquement stable, on a donc une **bifurcation supercritique** pour $C = J_{11}$ avec l'apparition d'un cycle limite stable

● Existence d'un cycle limite

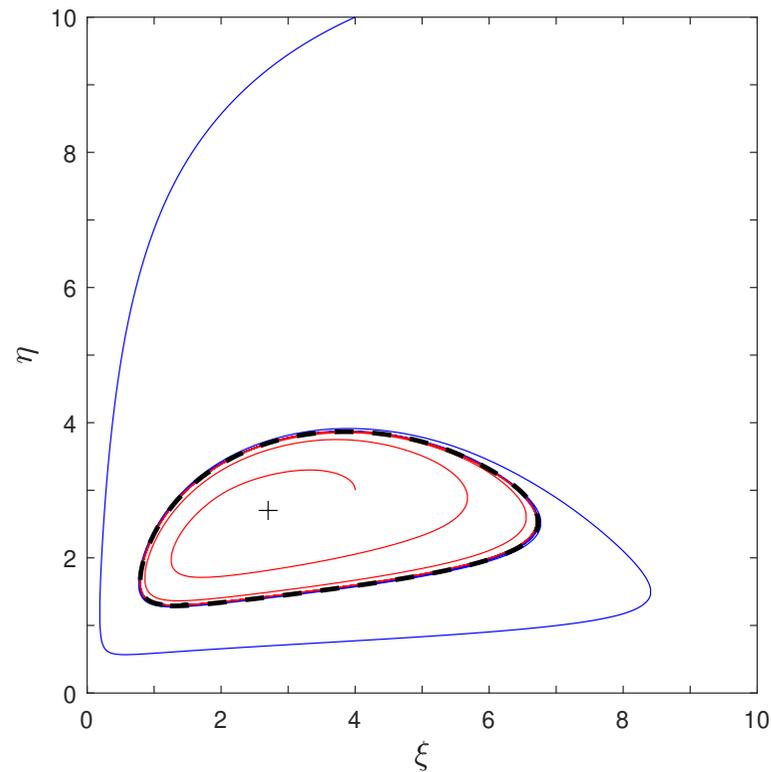
$C = 0.30$, + équilibre stable (spirale)

$$\mu = J_{11}^* - C < 0$$



$C = 1/6$, + instable, cycle limite ---

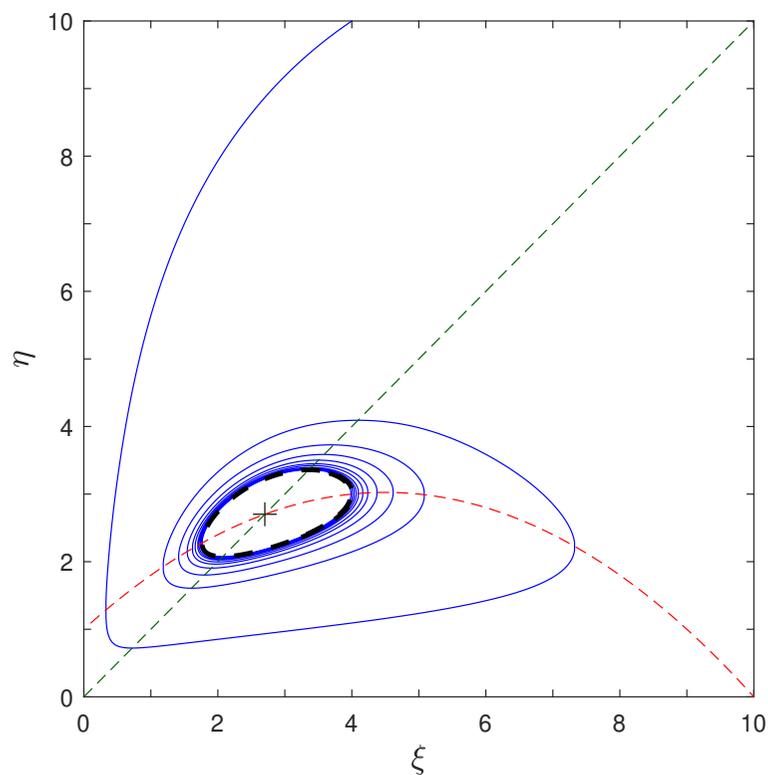
$$\mu = J_{11}^* - C > 0$$



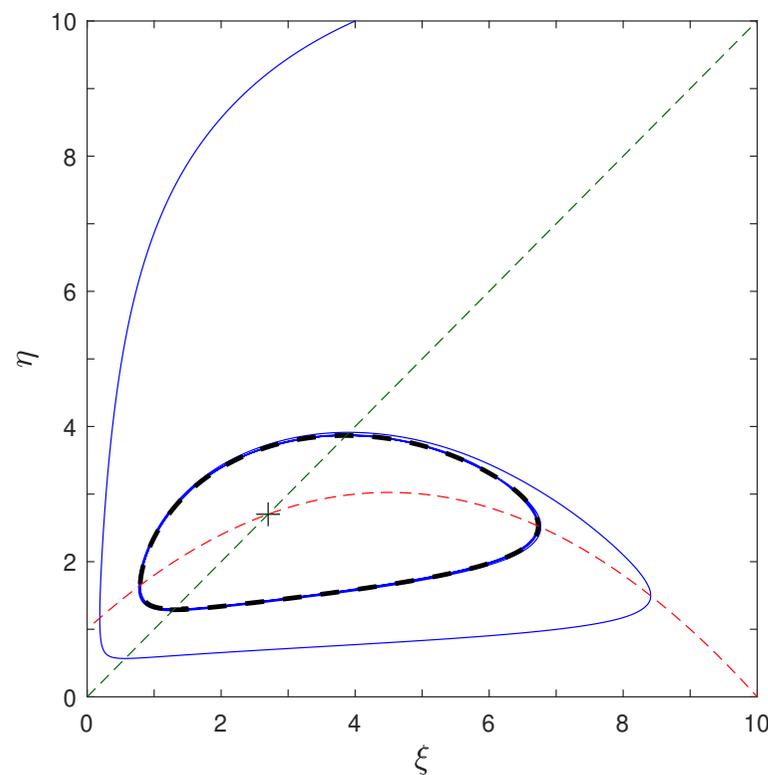
● Existence d'un cycle limite (suite)

Taille du cycle limite qui varie comme $\rho \sim \sqrt{\mu}$
avec $\mu = J_{11}^* - C > 0$

$C = 0.25, \mu \simeq 0.0125$



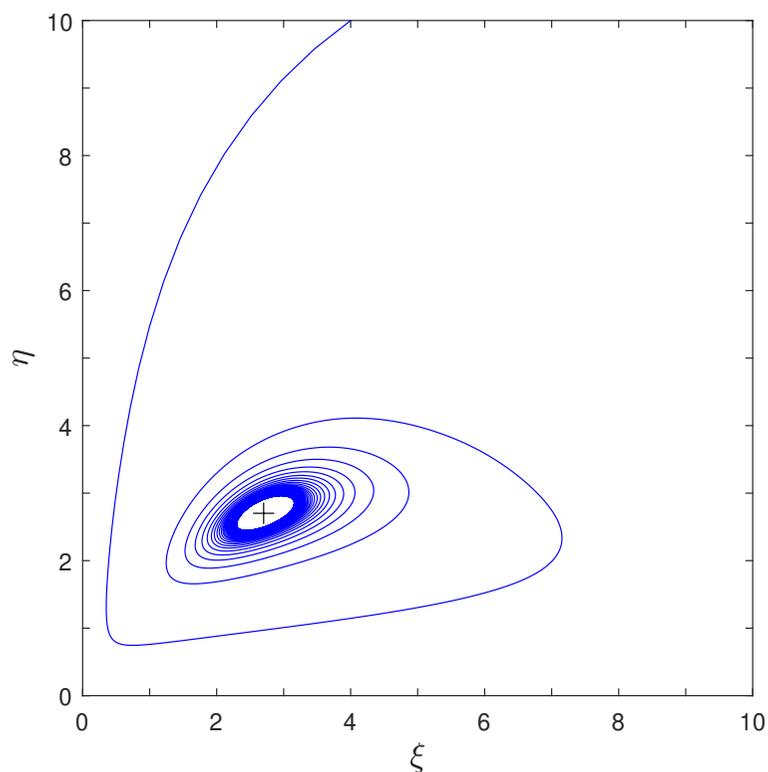
$C = 1/6, \mu \simeq 0.0958$



● Existence d'un cycle limite (suite)

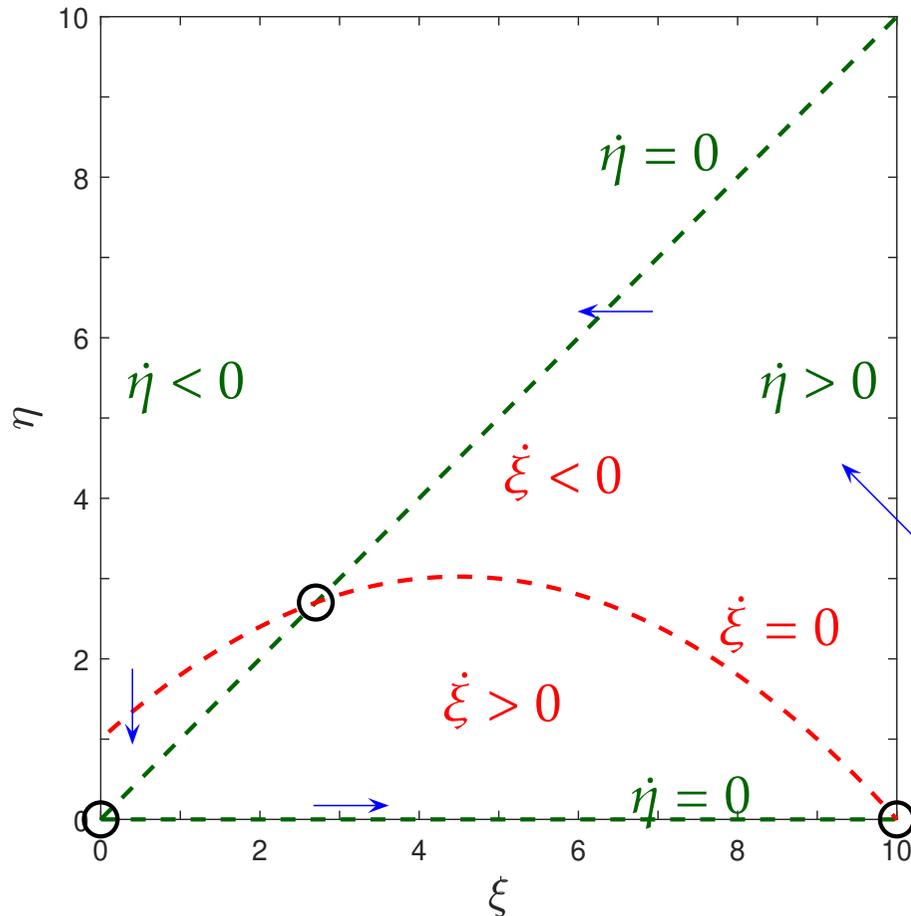
Point de bifurcation

$$C = J_{11}^*, \mu = 0$$



● Existence d'un cycle limite (suite)

Également possible d'utiliser le **théorème de Poincaré-Bendixson**



On s'aide du tracé des isoclines (courbes ayant la même tangente) pour identifier une région invariante (confinement des trajectoires, $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} < 0$) contenant un point d'équilibre instable

$\dot{\eta} = 0 \quad \xi = \eta \text{ ou } \eta = 0$
 flot horizontal le long de $\dot{\eta} = 0$

$\dot{\xi} = 0 \quad \eta = (\xi - A\xi^2)B(1 + \xi)/\xi$
 flot vertical le long de $\dot{\xi} = 0$

On peut définir une région où les trajectoires sont piégées, région contenant le point fixe instable (répulsif) : on a donc bien l'existence d'un cycle limite

Objets fractals

Benoît Mandelbrot (1924-2010)

<https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/fr/fr/icons/fractal/>



● Introduction

Historiquement la notion de fractales s'est imposée à partir des années 1970-1980 et des travaux de **Benoît Mandelbrot**. Cette notion a été depuis utilisée dans de nombreux domaines : percolation, fronts de flamme en combustion, biologie, économie, création d'images de synthèses ou théorie de l'information par exemple

Mandelbrot a introduit les fractales, **objets dont la dimension est fractionnaire**, pour répondre à la question suivante : quelle est la longueur de la côte britannique ?

Cette question avait déjà été posée et des éléments de réponses apportés par **Lewis Fry Richardson**, un physicien anglais original. Des mathématiciens avaient par ailleurs étudiés des problèmes plus généraux depuis la fin du 19e siècle (en particulier Felix Hausdorff). Il revient cependant à Mandelbrot d'avoir mis en lumière le caractère général de la notion et de l'avoir popularisée dans diverses communautés scientifiques



On emploie fractal comme adjectif, ou comme nom féminin, **une fractale**, mots créés par Mandelbrot.

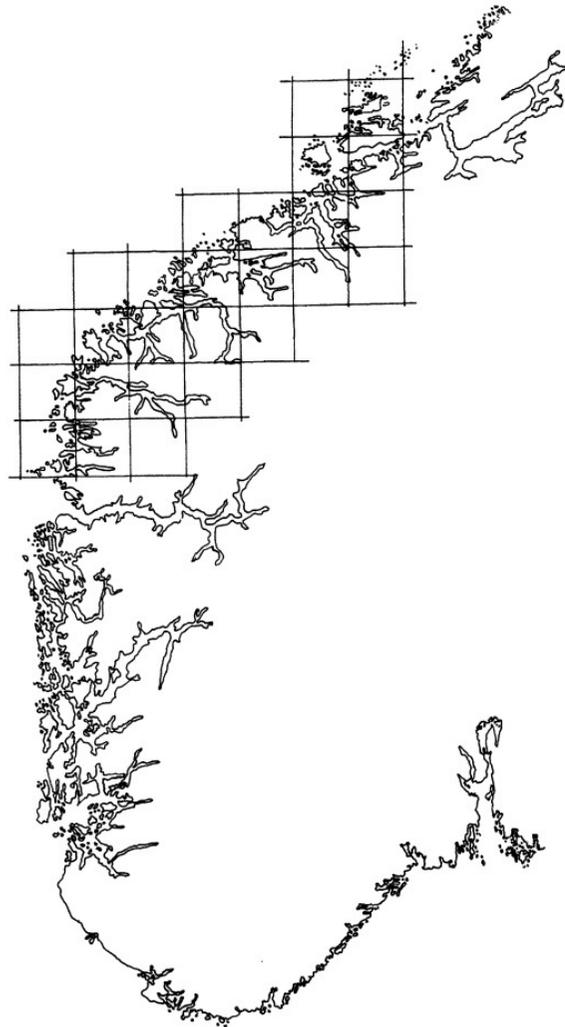
● Introduction

Lewis Fry Richardson (1881-1953)

En étudiant les causes de la guerre entre deux pays, Richardson a décidé de chercher une relation entre la probabilité que deux pays entrent en guerre et la longueur de leur frontière commune. En collectant des données, il s'est rendu compte que les longueurs des frontières internationales publiées dans les journaux officiels variaient considérablement. Par exemple, la frontière entre l'Espagne et le Portugal variait entre 987 km et 1214 km, tandis que celle entre les Pays-Bas et la Belgique était comprise entre 380 km et 449 km

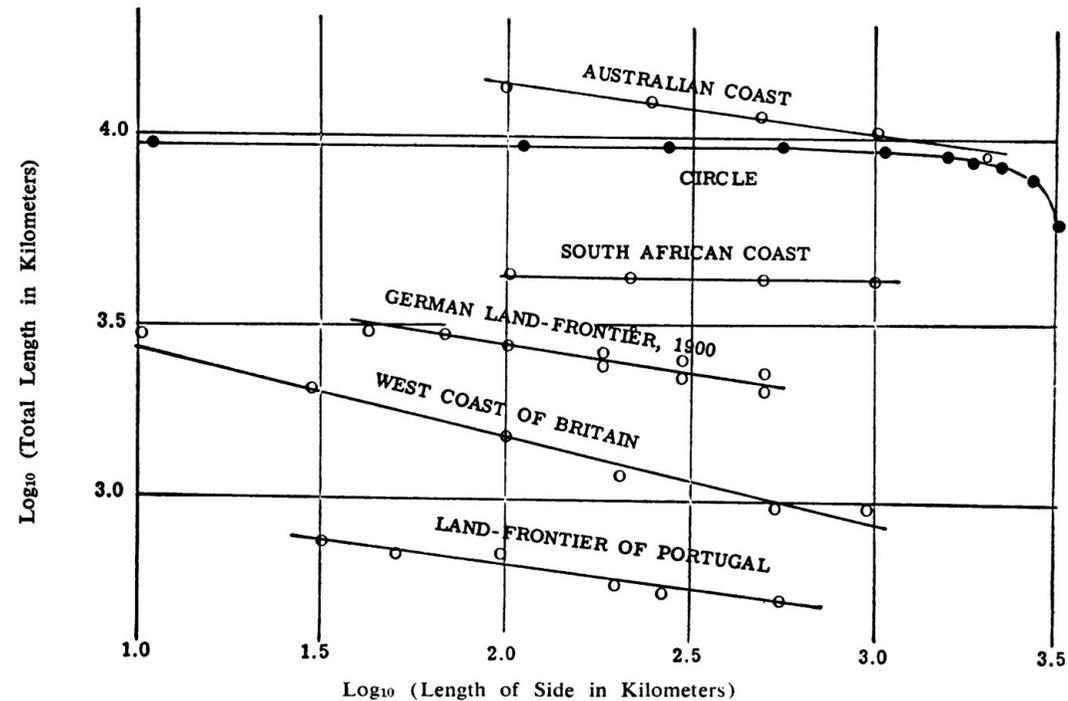


● Introduction



Partie sud de la Norvège, carrés de $\delta = 50$ km (fig. tirée de Feder, page 7)

La longueur estimée de la côte dépend du pas d'approximation utilisé (de la longueur étalon de mesure). En utilisant des cartes établies à différentes échelles, on va découvrir des détails de plus en plus fins, et donc la longueur mesurée sera d'autant plus grande que le grandissement sera important

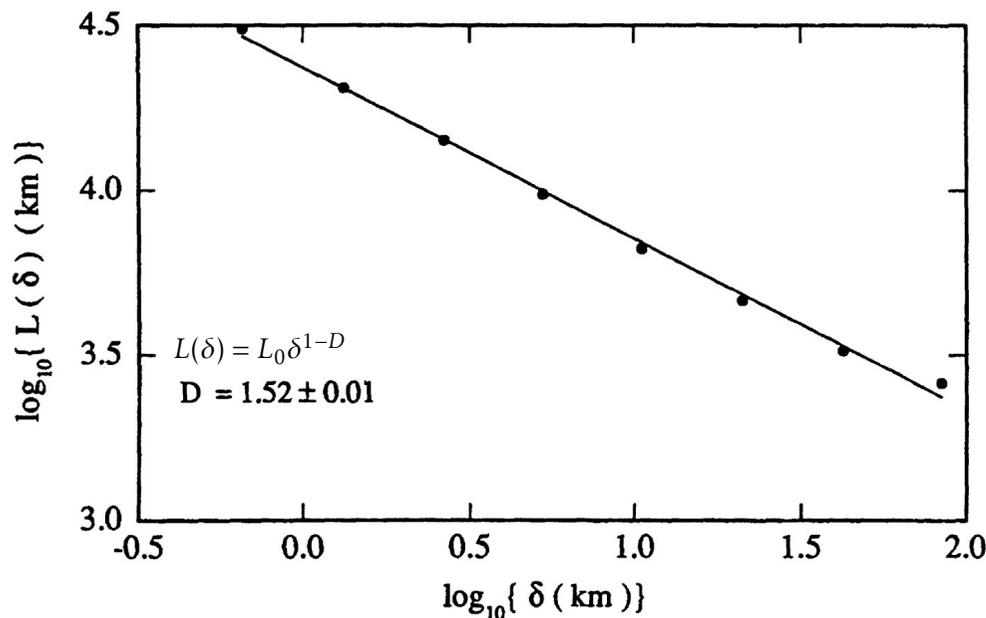


Mandelbrot, 1967, *Sciences*, 156

● **Introduction**

On observe à partir du graphique précédent, une relation linéaire en échelle logarithmique, entre la longueur mesurée L et le pas de mesure δ , $\ln L = a \ln \delta$, soit encore $L = L_0 \delta^a$ avec $a < 0$. Les courbes ne montrent pas de limite lorsque $\delta \rightarrow 0$, la longueur au sens classique tend donc vers l'infini ...

A contrario, pour une courbe classique comme le cercle, $a = 0$, et $L = L_0 = \text{cst}$. La dimension du cercle est $D = 1 = 1 - a$. On peut généraliser cette définition pour introduire une **dimension effective** $D = 1 - a$



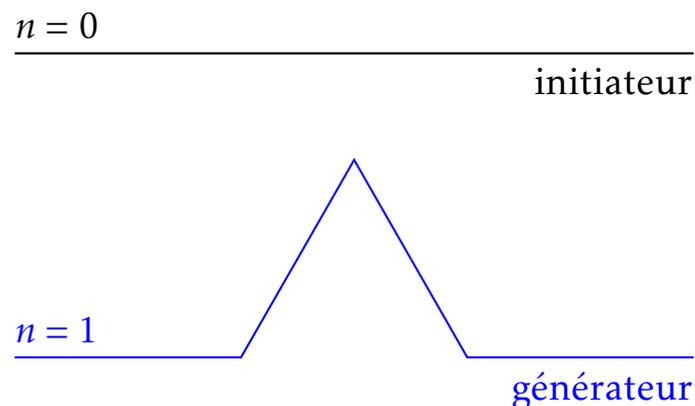
Longueur de la côte norvégienne (fig. tirée de Feder, page 8)

D rend compte de la plus ou moins grande complexité des courbes, de la façon dont elle remplissent le plan. Cette dimension **non entière** (différente de la dimension topologique un) est appelée **dimension fractale**

● **Objets autosimilaires**

Une famille d'objets pour lesquels une dimension fractale non entière apparaît naturellement est celle des objets possédant une **homothétie interne** : on retrouve un motif constant mais décliné à différentes échelles.

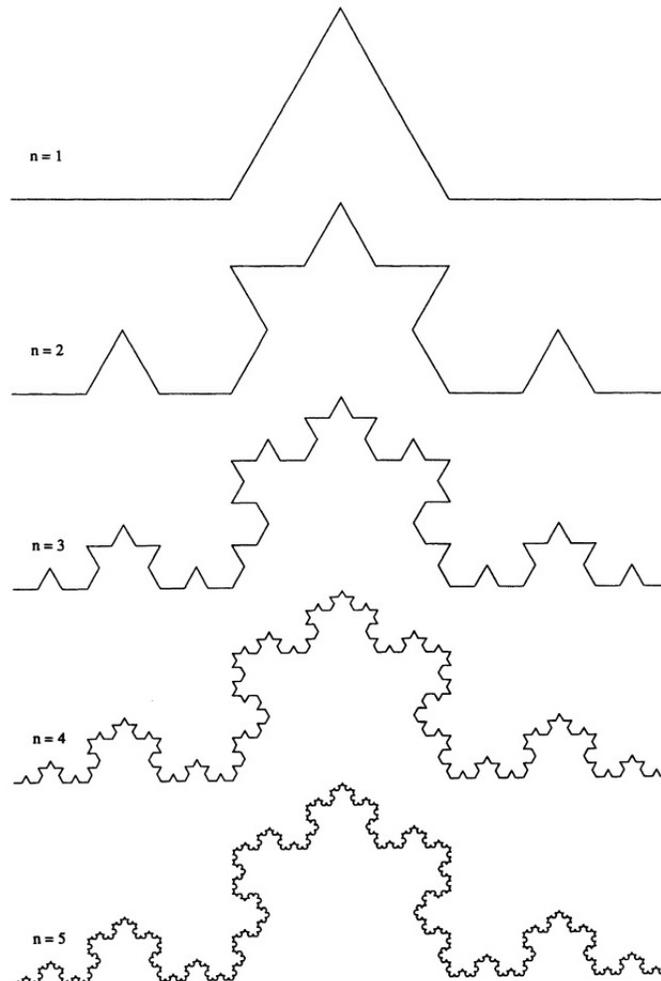
Un exemple classique est la **courbe triadique de von Koch** (1904) ou flocon de neige : courbe continue mais presque partout non dérivable.



La définition part d'un segment de longueur unité (initiateur). Le tiers central est remplacé par deux segments de longueur $1/3$ formant un triangle équilatéral avec le segment central (le générateur). On obtient ainsi l'itération $n = 1$ avec 4 segments de longueur $\delta = 1/3$. La longueur de la courbe est donc $L(1) = 4/3$

La génération suivante est formée en remplaçant chaque segment central par une version réduite du générateur, dans un rapport $1/3$. On obtient à l'itération 2, 16 segments de longueur $\delta = 1/9$, et par conséquent $L(2) = 16/9 = (4/3)^2$

● Objets autosimilaires



Courbe triadique de Helge von Koch (1870-1924)

À l'étape n , la longueur des segments est $\delta = (1/3)^n$, et il y en a 4^n . La longueur est donc $L(n) = (4/3)^n$, qui tend vers l'infini quand n augmente et que la longueur des segments élémentaires δ tend vers zéro

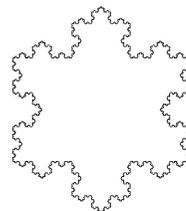
D'après ce qui précède,

$$\ln L = n \log 4 + \ln(1/3^n) = n \ln 4 + \ln \delta$$

$$a = \frac{\ln L}{\ln \delta} = 1 + \frac{\ln 4}{\ln(1/3)} = 1 - D$$

et la dimension fractale est $D = \ln 4 / \ln 3 \simeq 1.26$

Les courbes obtenues pour n fini sont appelées préfractales, et le flocon de neige est une courbe **autosimilaire** de rapport d'échelle $r = 1/3$



L'aire du flocon est $(2/5)\sqrt{3}a^2!$
(a le côté du triangle initial)

● Objets autosimilaires

La façon dont on vient de définir la longueur de la courbe de von Koch est **implicitement une dimension de recouvrement** ou de Hausdorff-Besicovich : on a compté le nombre de segment nécessaires pour recouvrir complètement la courbe à chaque itération

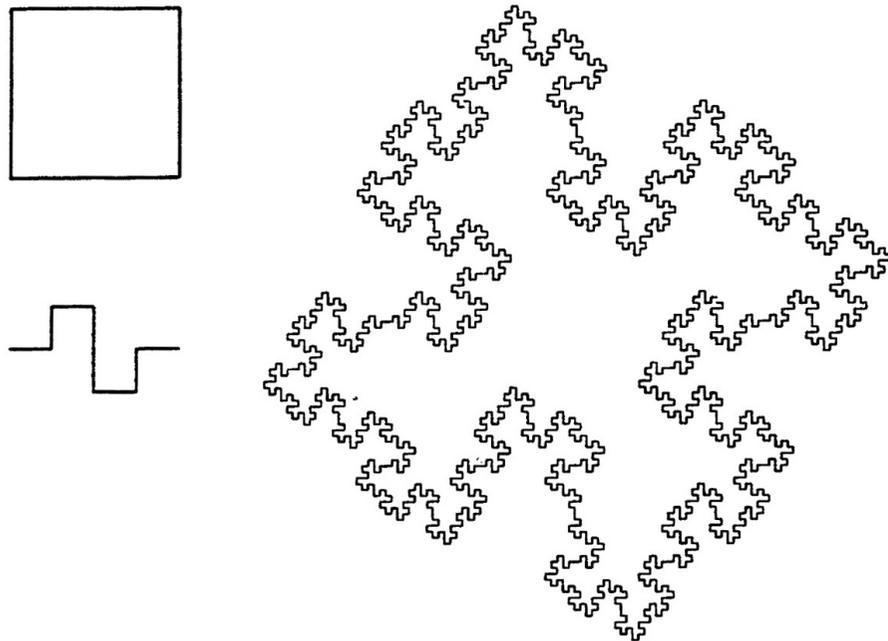
Compte-tenu du caractère **auto-similaire** de l'objet, on peut définir une **dimension de similarité** de la façon suivante :

$$D_s = -\frac{\ln N(n)}{\ln r(n)}$$

où $r(n)$ est le facteur d'échelle à l'étape n , $r = (1/3)^n$ pour la courbe de von Koch, et $N(n)$ le nombre de segments associés. On retrouve pour $D_s = -\ln 4^n / \ln (1/3)^n \simeq 1.26$ sans surprise. Cette dimension de similarité est très facile à déterminer pour les constructions de courbes similaires

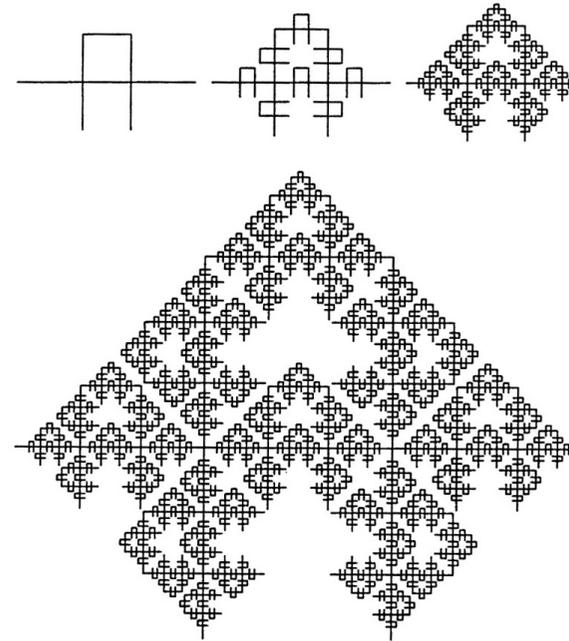
● **Objets autosimilaires**

Quelques exemples devenus célèbres :



courbe de von Koch quadratique

$$D_s = -\frac{\ln 8}{\ln(1/4)} = 1.5$$



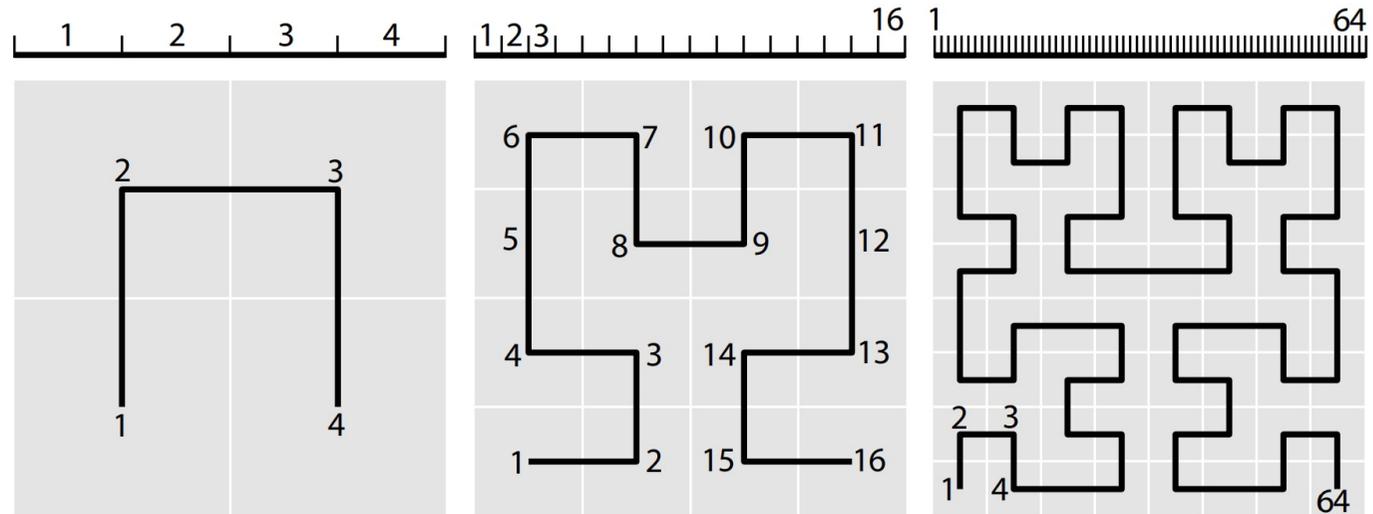
Mandelbrot & Given, 1984, *Phys. Rev. Lett.*

$$D_s = -\frac{\ln 8}{\ln(1/3)} \simeq 1.89$$

● Courbes remplissantes

Giuseppe Peano (1890,
“Sur une courbe, qui
remplit toute une aire
plane”)

David Hilbert (1891)
courbe sans intersection



Hayes, 2013, *Am. Scientist*, 103(3)

Partager le grand carré en 4 petits carrés égaux ; numéroter chacun des carrés de sorte que 2 carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le carré en bas à gauche, et en terminant par le carré en bas à droite.

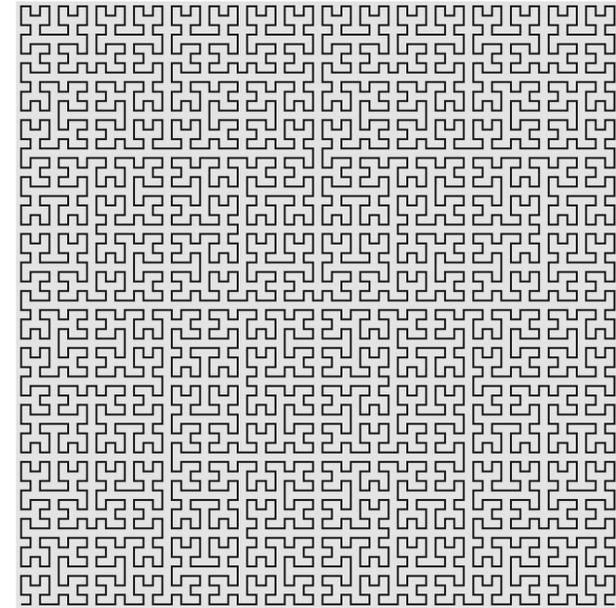
Partager chacun de ces 4 carrés en 4 petits carrés ; numéroter chacun de ces carrés de sorte que 2 carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le carré en bas à gauche, et en terminant par le carré en bas à droite ; le premier petit carré d’un carré devant avoir un côté en commun avec le dernier petit carré du carré précédent, et le dernier petit carré devant toucher par un côté le petit carré suivant. Recommencer ce processus à l’infini ...

● Courbes remplissantes

À l'étape n , on obtient une suite de 4^n carrés de côté $1/2^n$.

La courbe de Hilbert est obtenue en joignant les centres successifs de ces carrés : $D_s = 2$

Courbe de Hilbert à l'itération $n = 7$, après $4^7 = 16384$ divisions du carré initial!

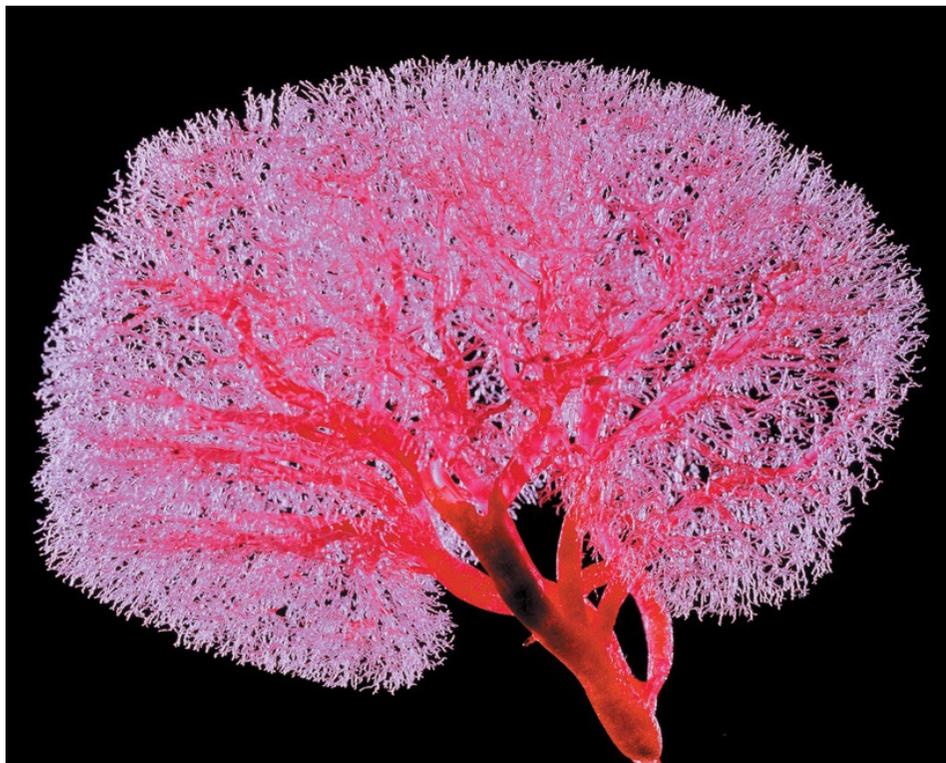


Hayes, 2013, *Am. Scientist*, **103**(3)

- **Où est la physique?**

(Kadanoff, 1986, *Physics Today*)

On reproduit et **on modélise** ce que l'on observe expérimentalement, dans des domaines et/ou pour des applications très variés.



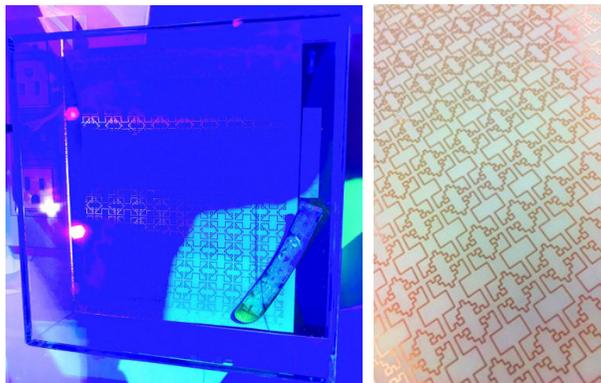
Moulage d'un rein d'enfant, système veineux et artériel (© Manfred Kage)



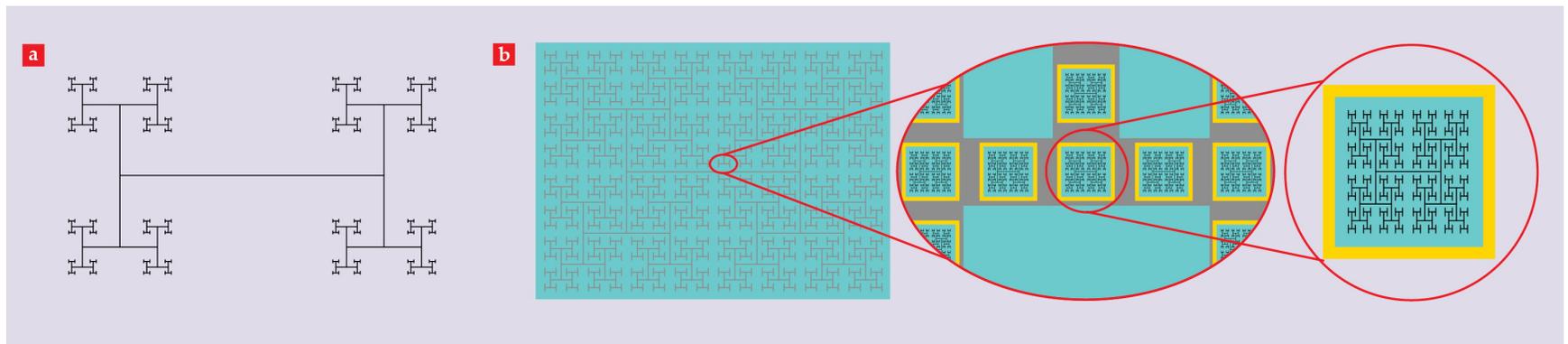
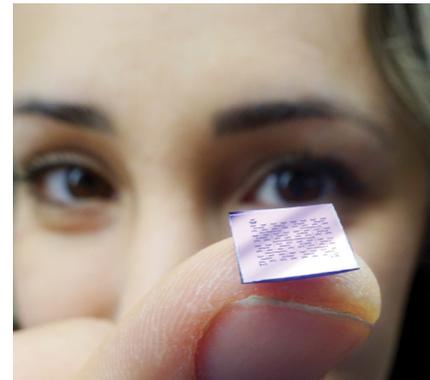
Chou romanesco

● Où est la physique?

Antennes de communication fractales
<http://fractenna.com/>

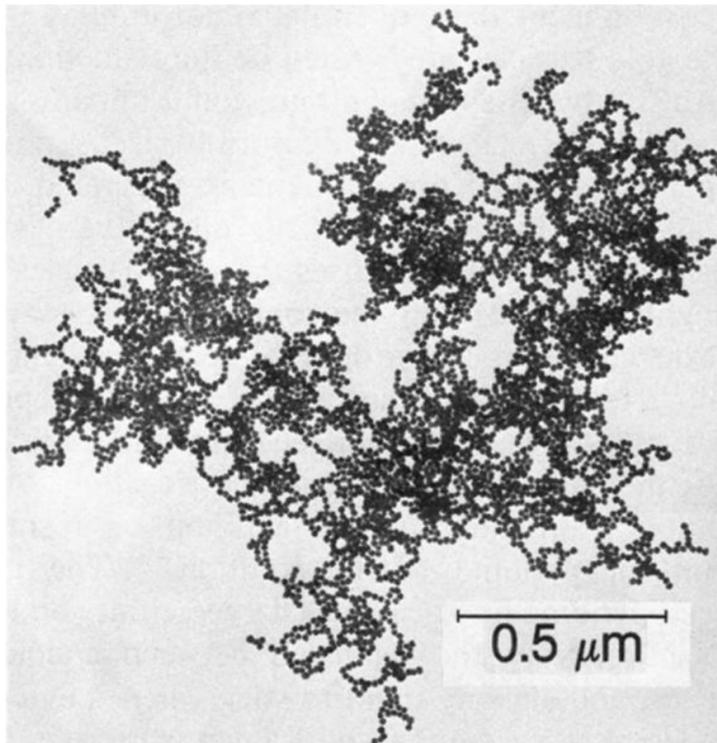


Fractal bionics (Taylor, R., 2024, *Phys. Today*)
 Artificial eye based on fractal electrodes



● **Agrégation à diffusion limitée (DLA, *Diffusion-Limited Aggregation*)**

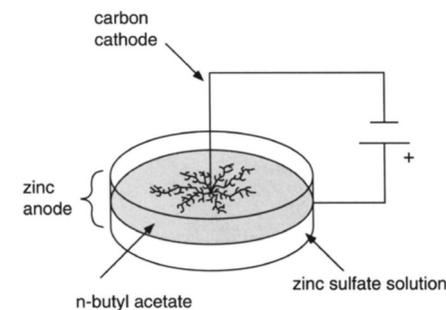
Formation d'agrégats à partir de la diffusion de particules qui suivent une marche aléatoire (mouvement brownien)



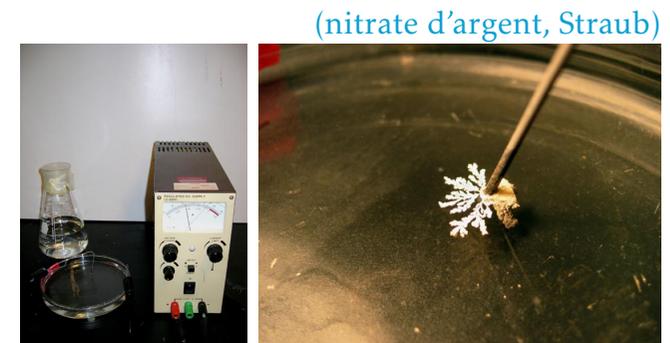
Agrégation de colloïdes d'or dans le cas d'une agrégation rapide (DLCA). Photographie réalisée par microscopie électronique. L'amas de l'image contient 4739 particules d'or

Weitz & Oliveria, 1984, Phys. Rev. Lett., 52(16)

Electrodéposition avec une solution aqueuse



(fig. de Peitgen *et al.*)



● **Agrégation à diffusion limitée**

Un des algorithmes les plus connus a été proposé par Witten & Sander (1981) : des particules émises de manière équiprobable le long d'un cercle se déplacent, de case en case sur un réseau ou bien sans maillage selon une marche complètement aléatoire, jusqu'à ce qu'elles se fixent à la dendrite existante

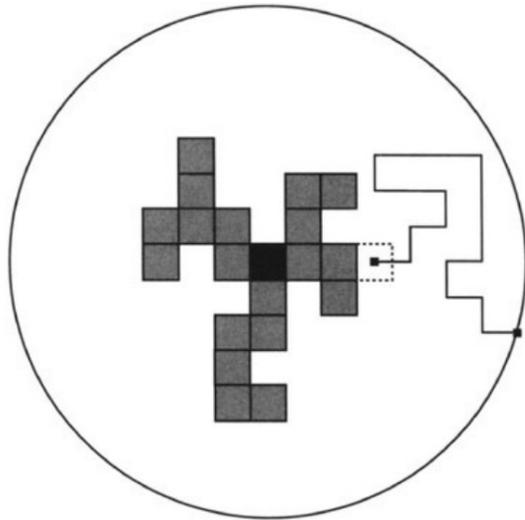


Fig. tirée de Peitgen *et al.* (1992)

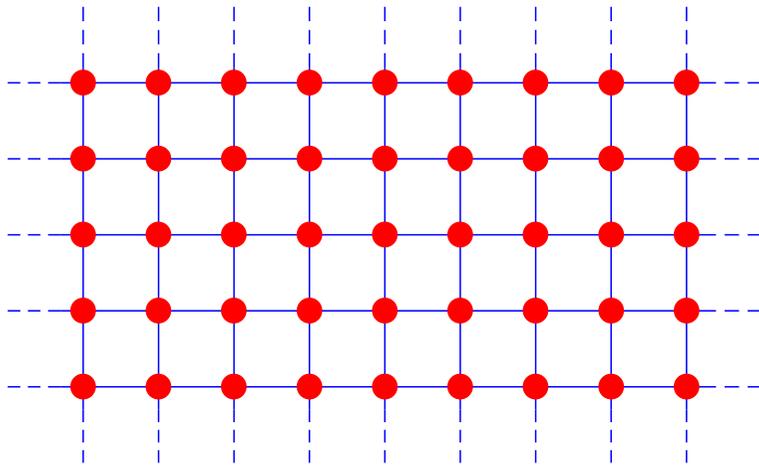
3D Diffusion-Limited Aggregation



Possible d'obtenir des objets ressemblants avec des fractales déterministes bruitées : par exemple, le flocon de neige de von Koch : on choisit l'orientation du générateur à chaque itération. Beaucoup d'autres exemples possibles

● **Percolation**

La percolation (latin *percolare* = couler à travers) est un terme générique pour étudier la connection d'un bout à l'autre d'un ensemble d'éléments reliés entre eux que partiellement : propagation d'un feu de cime, d'un parasite dans un verger, d'une épidémie, d'un fluide dans un milieu poreux (percolateur d'expresso, infiltration de l'eau de pluie dans les sols), de la conduction d'un matériau composite; modèles de ségrégation de la population en milieu urbain, de réseaux de communication, ...



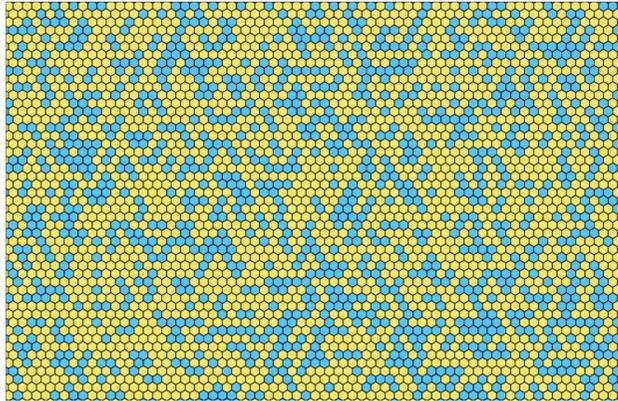
Théorie des graphes : des arrêtes (liens —), des sommets (sites ●) et un réseau (2-D carré ici)

Deux manières de décrire les phénomènes de percolation : **percolation de site** ou **percolation de lien** (et de temps en temps les deux !)

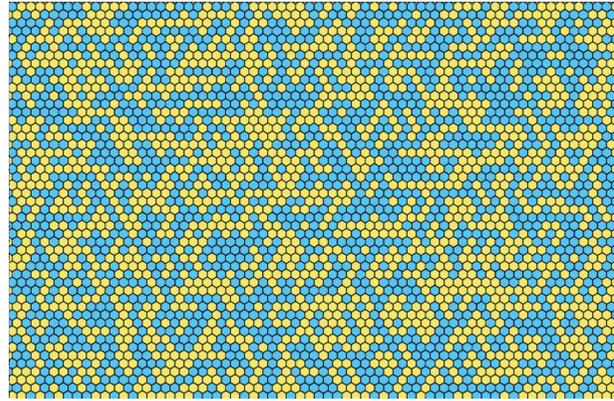
Souvent pour la percolation de site (cas que l'on retient ici), les liens sont masqués par convention

● Percolation

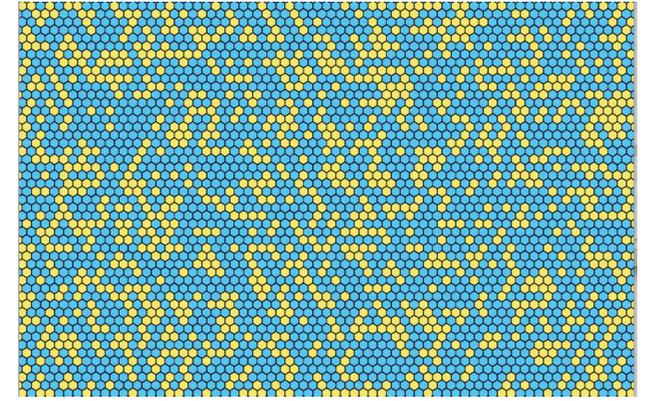
$p < 1/2$ pour hexagones bleus



$p = 1/2$

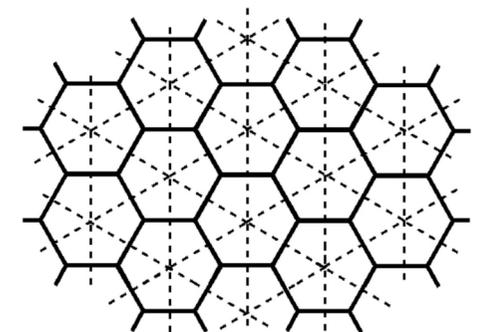


$p > 1/2$



(Duminil-Copin, Images des mathématiques, CNRS, 2012)

Probabilité de rallier le bord du pavage depuis le centre en ne marchant que sur des *hexagones* bleus? **seuil de percolation pour $p_c = 1/2$** ; attention : valable pour un réseau triangulaire 2-D avec une **coordinnence** de 6, c'est-à-dire le **nombre de plus proches voisins** (Kesten, 1992)



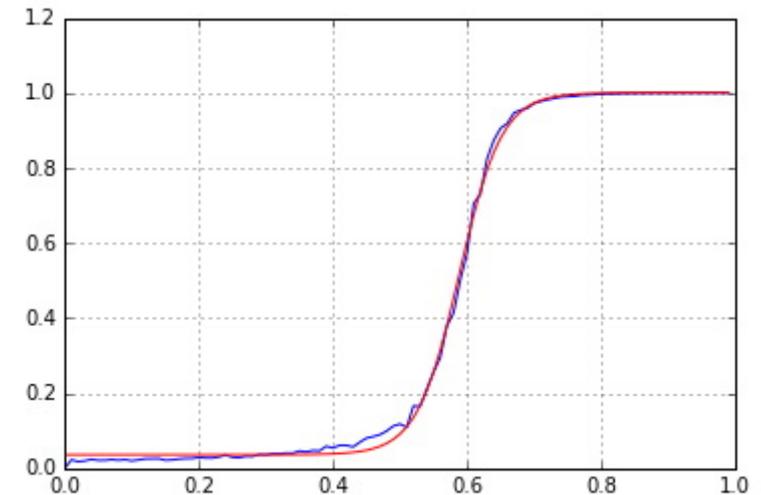
● Percolation

Le basculement de l'état non connecté vers l'état connecté (percolation) est très brutal. Sur la figure, on trace l'évolution de la probabilité pour avoir connection pour plusieurs tailles du réseau.

Pour un réseau carré 2-D, le seuil de percolation est estimé à $p_c \simeq 0.59275$

Au seuil de la percolation, le cluster est une fractale!

Pour un réseau triangulaire, on montre que la dimension est $D = 91/48 \simeq 1.896$ – valeur très proche du modèle de Mandelbrot-Given, voir le transparent 106



Évolution de la propabilité de percolation en fonction de la probabilité p d'occupation des sites (réseau carré 2D)

<http://www.tangenteX.com/Percolation.htm>

● **Modèles épidémiologiques : introduction au modèle SIR**

Modèles introduit au début du XXe siècle (paludisme, peste, ...) avec la notion de seuil, et le fameux paramètre \mathcal{R}_0

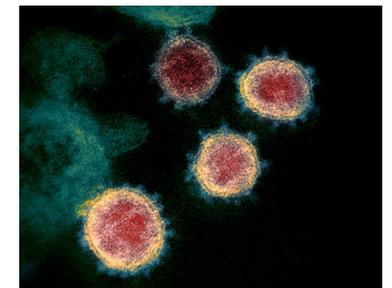
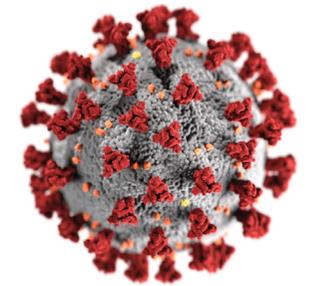
$$\begin{cases} S & \% \text{ population saine (Susceptible)} \\ I & \% \text{ population infectée (Infected)} \\ R & \% \text{ population guérie/immunisée (Recovered/Removed)} \end{cases}$$

$$S + I + R = 1$$

$\beta S I$ flux d'individus infectés par unité de temps (taux d'incidence)

$1/\gamma$ temps de guérison par unité de temps d'un individu infecté

Ultrastructure du SARS-CoV-2



SARS-Cov-2 en microscopie électronique à transmission : particules de virus (bleues) émergent de la surface de cellules cultivées en laboratoire

[Journal du CNRS \(2020\)](#)

● Introduction au modèle SIR

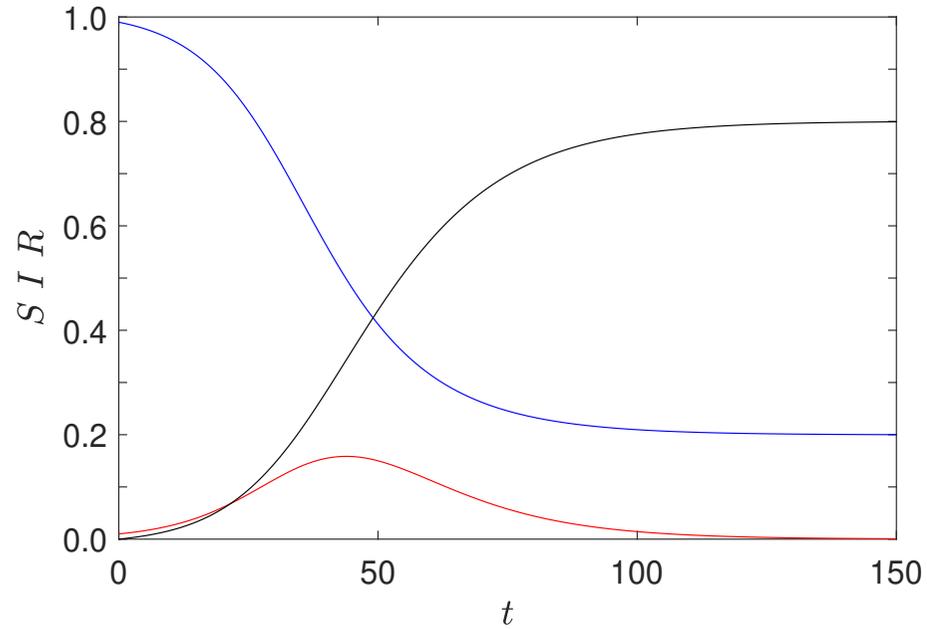
$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases} \quad \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$$

Dynamique du système imposée par le **taux de reproduction de base** $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$. En observant que le temps caractéristique de contact pour être contaminé est $1/\beta$, et que le temps de guérison est $1/\gamma$, le rapport \mathcal{R}_0 correspond au nombre de personnes infectées par un individu infectieux au cours de sa maladie (si il n'est pas isolé)

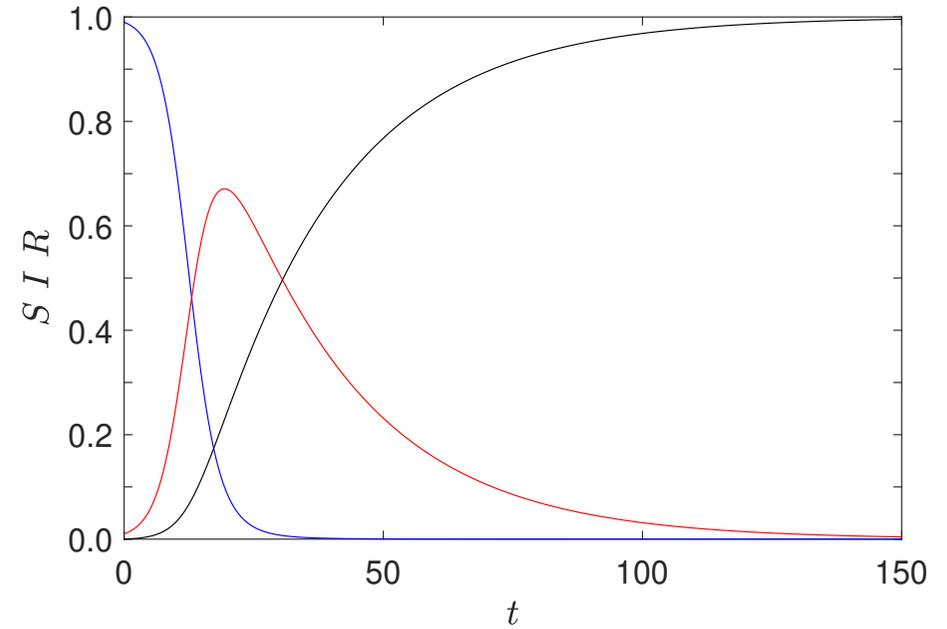
$$\dot{I} > 0 \implies \beta S - \gamma > 0 \implies S \mathcal{R}_0 > 1 \implies \mathcal{R}_0 \geq 1$$

(avec $S \simeq 1$ initialement). **Seuil donné par $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ pour observer la propagation d'une épidémie**; γ varie peu, alors que β peut beaucoup varier au cours du temps (politique mesures prophylactiques, population non homogène, vaccination, complexité des modèles) : modèles SEIR, SEIRS, SIRV, ...

● Introduction au modèle SIR



$\beta = 0.2$ et $\gamma = 0.1$ ($\mathcal{R}_0 = 2$)



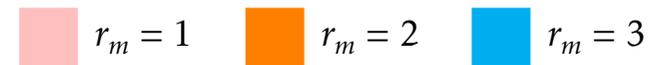
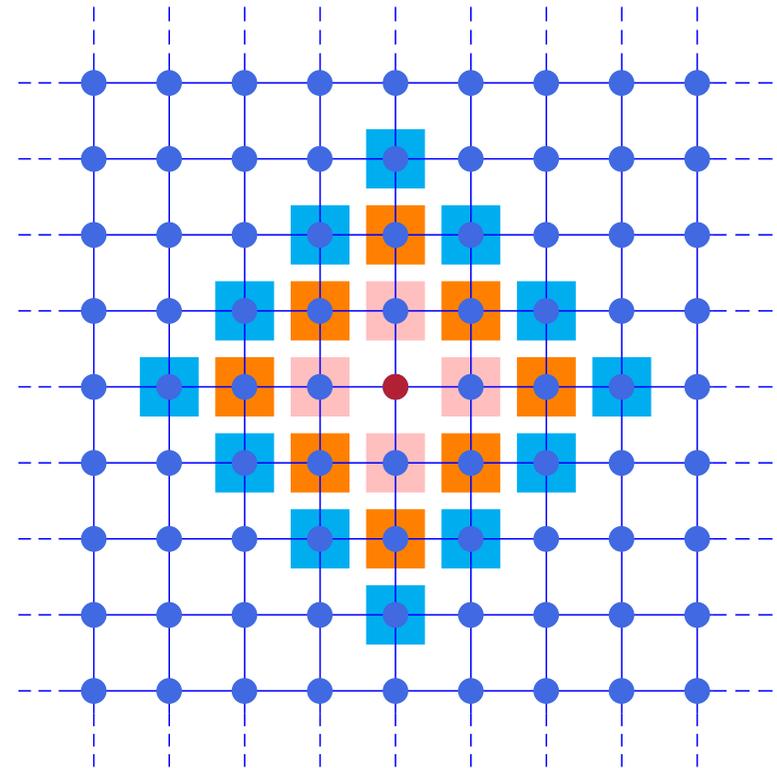
$\beta = 0.4$ et $\gamma = 0.04$ ($\mathcal{R}_0 = 10$)

● Introduction au modèle SIR : paramètre β

Processus stochastique pour simuler la diffusion : à chaque unité de temps, à partir d'une distribution aléatoire $I(t = 0)$ de personnes infectées (●), une personne infectée rencontre n_m individus par unité de temps (et rencontrera n_m/γ individus durant sa maladie). Pour chaque individu infecté i

- on vérifie qu'il n'est pas guéri en tirant au hasard n_i sur $[0, 1]$, guéri si $n_i \leq \gamma$
- sinon, elle rencontre n_m personnes au hasard dans un certain rayon r_m . Pour chaque individu sain, on tire un second nombre aléatoire n_{ij} sur $[0, 1]$ et il y a infection si $n_{ij} \leq \beta$
(une personne infectée fait n_m rencontres parmi 12 personnes pour $r_m = 2$ par exemple)

À la fin du processus, il reste des individus sains, $S(t) \neq 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$



r_m distance de Manhattan

<https://zestedesavoir.com/>

● **Dimension de recouvrement D_0 (box-counting dimension)**

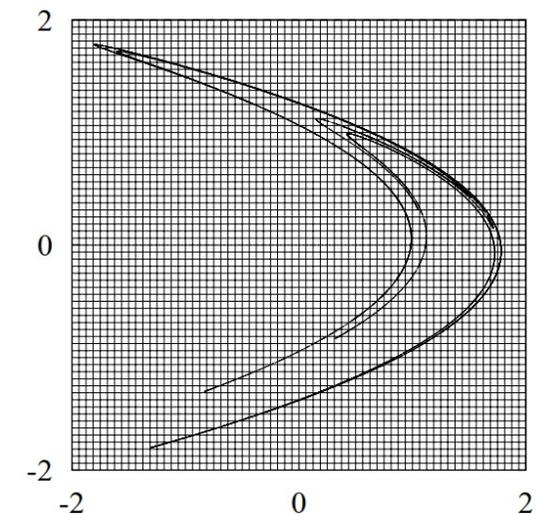
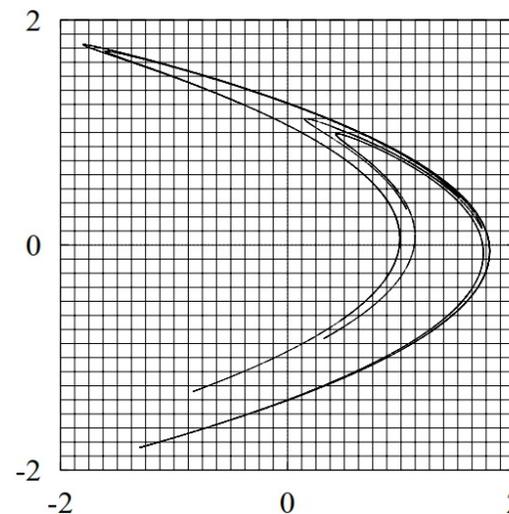
Approximation de la dimension de Hausdorff (1918)

La dimension fractale de similarité D_s ne convient pas à l'étude des objets réels, comme le front de percolation par exemple. On verra que cette dimension ne convient pas non plus pour les attracteurs étranges, décrits par un ensemble de points

On peut définir la **dimension de recouvrement D_0** , dont le principe est celui utilisé en introduction, pour estimer la dimension fractale

On recouvre la fractale avec $N(\epsilon)$ hyper-cubes d'arête ϵ , et la dimension de recouvrement est obtenue en prenant la limite,

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$



● **Dimension de corrélation D_2**

(Grassberger and Procaccia, 1983, *Physica D*, 9)

À partir d'un point \mathbf{x}_j donné, on compte le nombre de points dans une (hyper) sphère de rayon r pour un ensemble de N points de la fractale

$$n(\mathbf{x}_j, r) = \sum_{i=1}^N H(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$$

où H est la fonction d'Heaviside. La probabilité de trouver un point dans la sphère de rayon r est donnée par $n(\mathbf{x}_j, r)/N$. On fait ensuite varier le point de référence \mathbf{x}_j pour $j = 1$ à N pour obtenir une valeur moyenne. On construit alors la fonction de corrélation $C(r)$ suivante

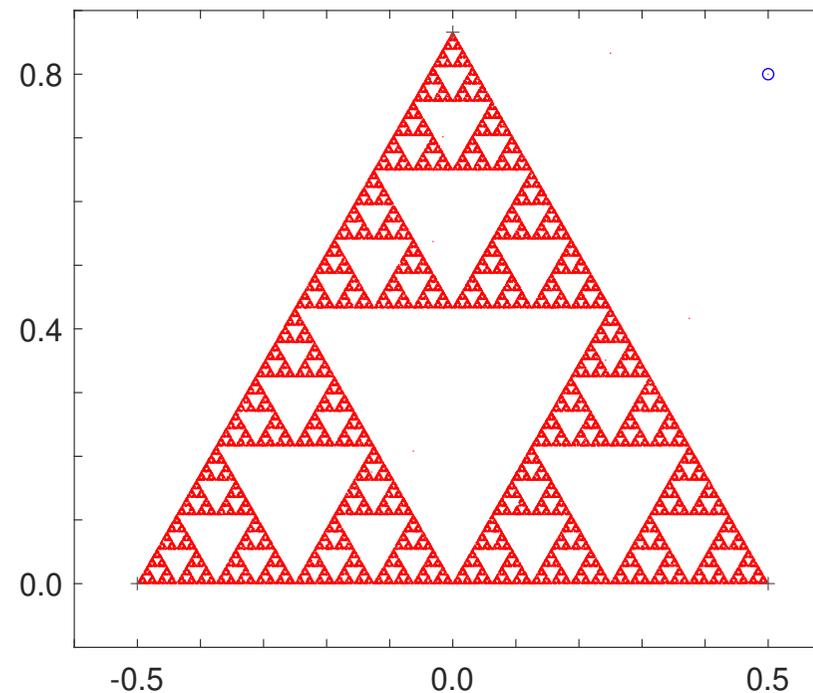
$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \qquad D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

- **Triangle de Sierpinski (1915)**

À partir d'un triangle équilatéral, on retire le triangle formé par les milieux des trois côtés du triangle initial



Waclaw Sierpinski (1882-1969) :
mathématicien polonais



Dimension de similarité

$$D_s = \ln(3)/\ln(2) \simeq 1.58$$

● **Triangle de Sierpinski par la méthode du jeu du chaos**

(Barnsley, 1988)

On considère un triangle équilatéral de sommets s_i de $i = 1, 2, 3$. A partir d'un point \mathbf{x}_n , on construit le point suivant \mathbf{x}_{n+1} en tirant de manière équiprobable un des sommets (probabilité $p_i = 1/3$), $\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{x}_n + s_i)/2$.

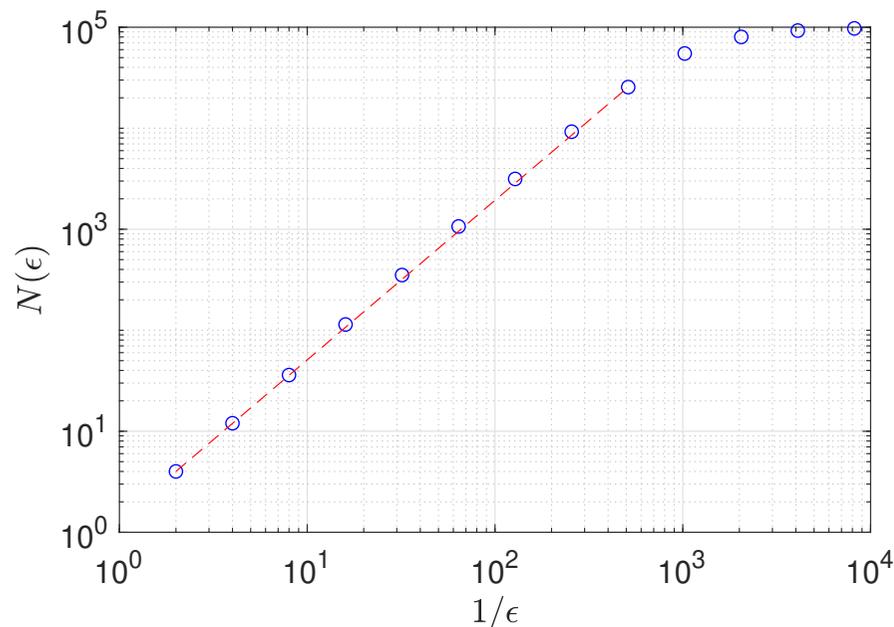
Formulation plus générale avec la construction de fractales par **IFS pour Iterated Function System** : transformation affine $\mathbf{x}_{n+1} = \overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{b}$

Sierpinski : $p_i = 1/3$ $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = s_i/2$ ($i = 1, 2, 3$)

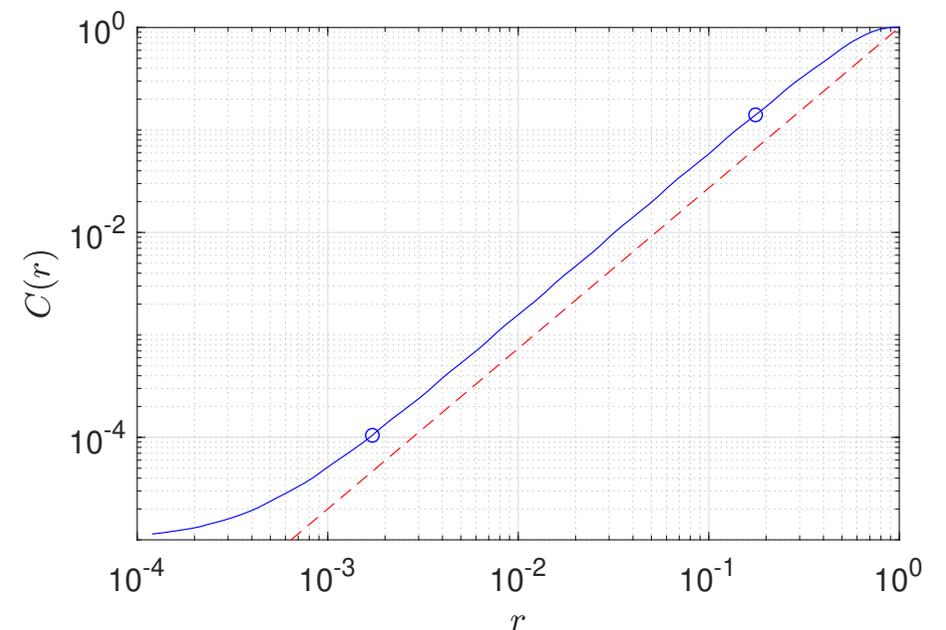
● Triangle de Sierpinski par la méthode du jeu du chaos (suite)

- Dimension de similarité $D_s = \ln(3)/\ln(2) \simeq 1.58$
- Dimension de recouvrement $D_0 \simeq 1.59$ avec 10^5 points (on doit avoir $D_s = D_0$ pour une fractale homogène)
- Dimension de corrélation $D_2 \simeq 1.57$ avec 10^5 points, et deuxième somme (sur j) faite avec 5000 points

Dimension de recouvrement D_0



Dimension de corrélation D_2



● Fougère de Barnsley



$$\overline{\overline{A}}_1 = [0., 0.; 0., 0.16]^T$$

$$\overline{\overline{b}}_1 = [0.; 0.]^T \quad p_1 = 0.01$$

$$\overline{\overline{A}}_2 = [0.85, 0.04; -0.04, 0.85]^T$$

$$\overline{\overline{b}}_2 = [0.; 1.60]^T \quad p_2 = 0.85$$

$$\overline{\overline{A}}_3 = [0.20, -0.26; 0.23, 0.22]^T$$

$$\overline{\overline{b}}_3 = [0.; 1.60]^T \quad p_3 = 0.07$$

$$\overline{\overline{A}}_4 = [-0.15, 0.28; 0.26, 0.24]^T$$

$$\overline{\overline{b}}_4 = [0.; 0.44]^T \quad p_4 = 0.07$$

Position initiale, $\mathbf{x}_1 = [0.; 0.]^T$ avec 200000 itérations

Michael F. Barnsley (1988) – Fractal geometry will make you see everything differently. There is danger in reading further. You risk the loss of your childhood vision of clouds, forests, flowers, galaxies, leaves, feathers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same

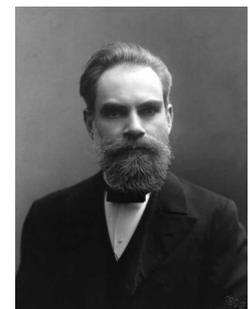
● Ensembles de Julia et de Mandelbrot



Gaston Julia (1893-1978)

Ensembles de Julia et de Mandelbrot
cf. exercices, avec également les fractales de Newton

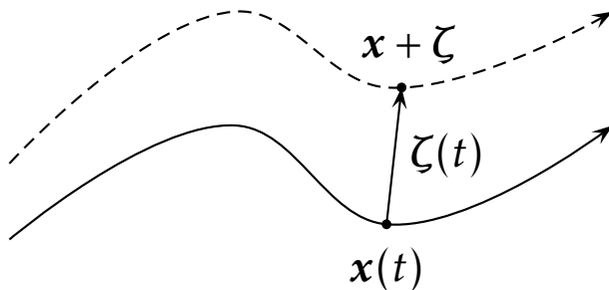
Sensibilité aux conditions initiales - Exposants de Lyapunov - Chaos



Alexandre Lyapunov
(1857-1918)

● Introduction

La **sensibilité aux conditions initiales** est la caractéristique centrale des **systèmes chaotiques**. Elle est liée à la divergence exponentielle des trajectoires suivies par 2 points initialement voisins situés sur l'attracteur du système chaotique. Le paramètre qui caractérise la vitesse de divergence de ces trajectoires est appelé le plus grand **exposant de Liapunov**



$\dot{x} + \dot{\zeta} = F(x + \zeta)$
 $\dot{\zeta} \simeq \bar{J} \cdot \zeta$ par linéarisation

On considère un flot autonome $\dot{x} = F(x)$, et on linéarise ce flot autour d'une trajectoire $x(t)$ pour obtenir l'évolution de l'écart $\zeta(t)$ à cette trajectoire au cours du temps, ce qui conduit à la relation

$$\dot{\zeta} \simeq \bar{J} \cdot \zeta \quad \text{où} \quad \bar{J} = \frac{\partial F}{\partial x}[x(t)]$$

est la matrice jacobienne du flot F le long de la trajectoire $x(t)$

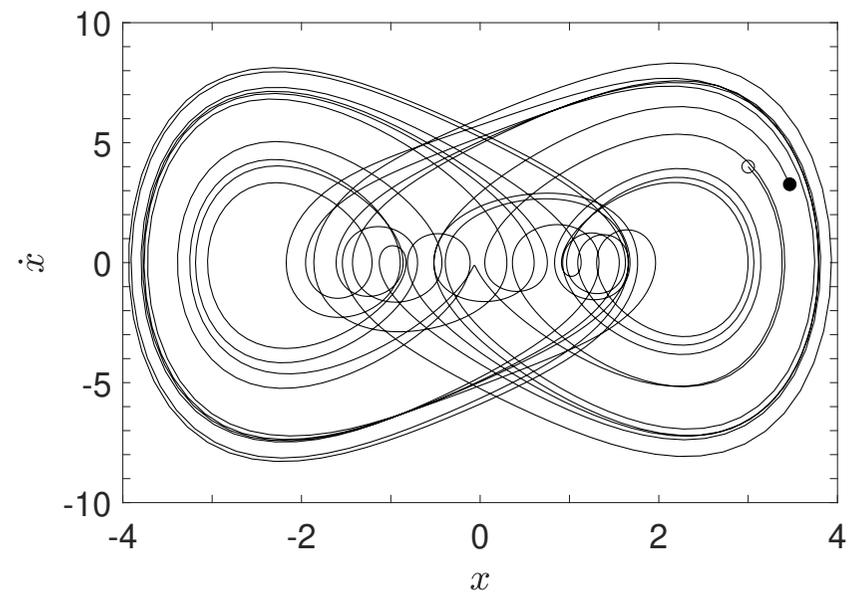
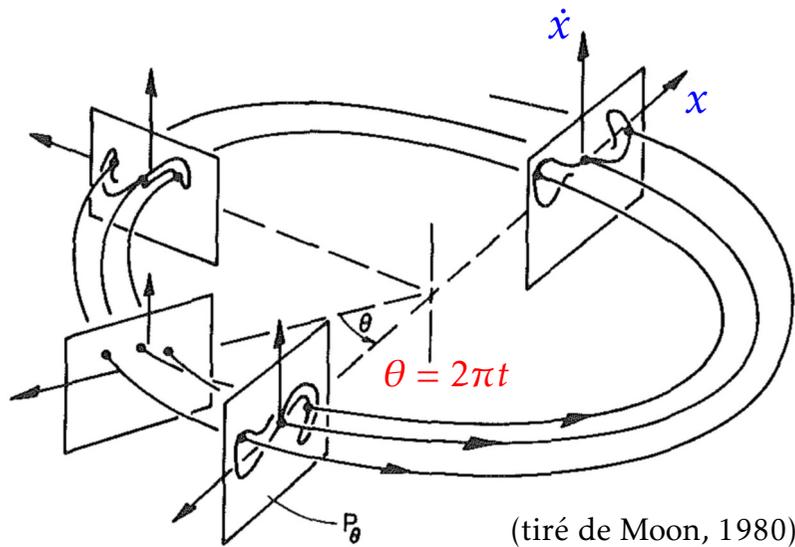
● Une illustration avec l'attracteur japonais

Oscillateur de Duffing

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos(t) \text{ avec } k = 0.1 \text{ \& } B = 12$$

Dans l'espace des phases (x, \dot{x}) , système non autonome. Reformulation comme un flot 3-D

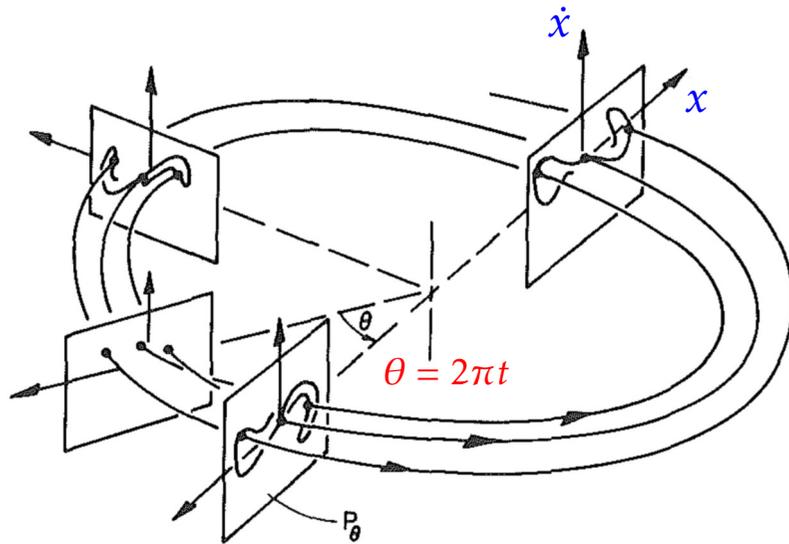
$$\dot{x} = F(x) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = B \cos(x_3) - kx_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$



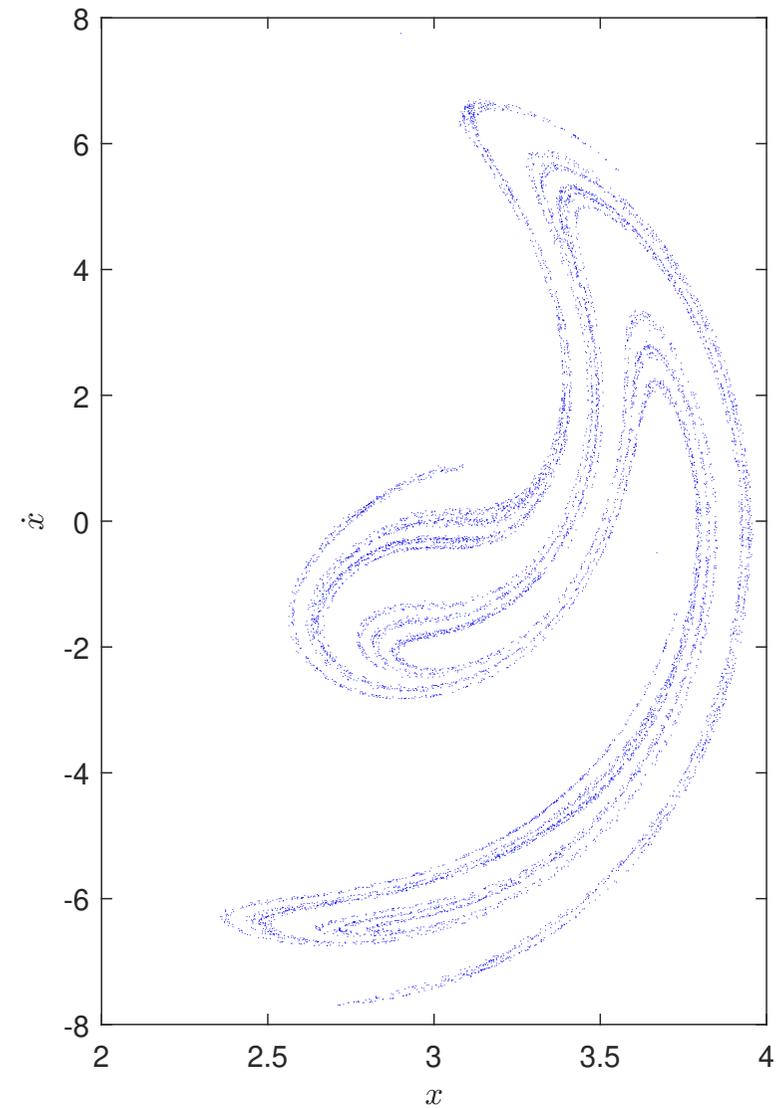
Trajectoire projetée pour un point initialement en $t = 0$, ● $(x_0 = 3, \dot{x}_0 = 4)$

● Une illustration avec l'attracteur japonais

Section de Poincaré, $T = n2\pi$ avec $n = 10^4$



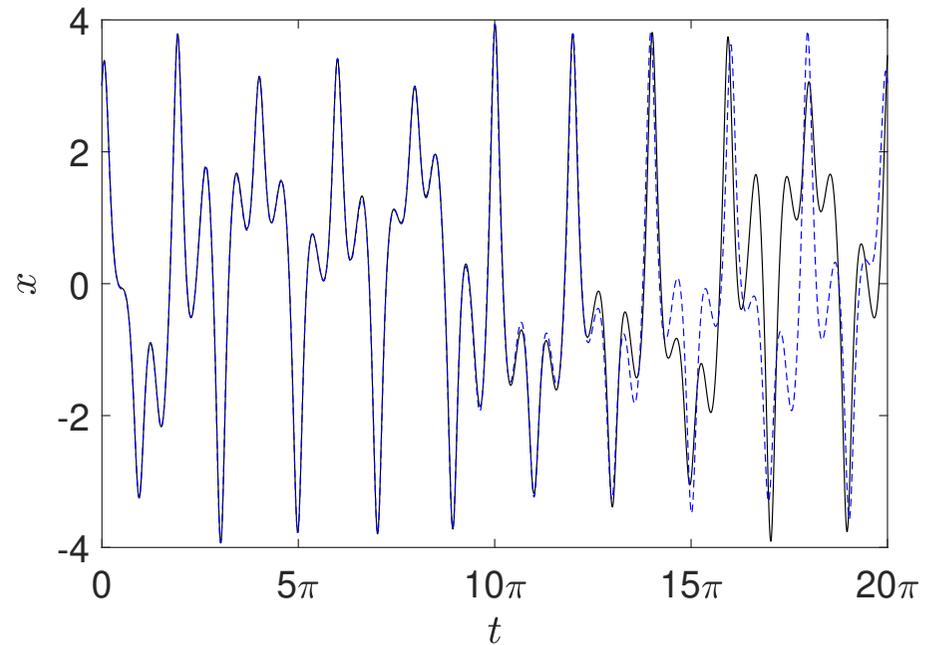
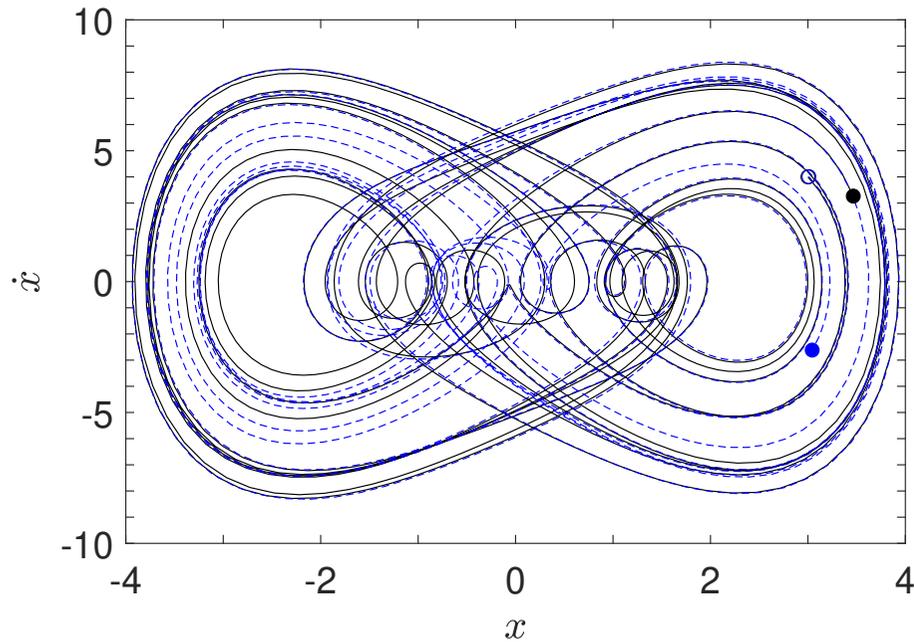
Systeme dissipatif,
 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{tr} \bar{\mathbf{J}} = -k < 0$



● Une illustration avec l'attracteur japonais

Trajectoires projetées pour deux points initialement voisins en $t = 0$

- $(x_0 = 3, \dot{x}_0 = 4)$
- $(x_0 = 3 + 0.01, \dot{x}_0 = 4 + 0.01)$



● Carte itérée 1D

On peut d'abord illustrer le principe sur les cartes à une dimension, comme l'application logistique, en considérant donc $x_{n+1} = f(x_n)$. Le principe est de considérer l'écart entre une trajectoire issue d'un point x_0 et celle issue d'un point voisin $x_0 + \zeta_0$. Il vient pour un déplacement infinitésimal ζ_0

$$x_1 + \zeta_1 = f(x_0 + \zeta_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\zeta_0$$

et après une itération, en passant de x_0 à x_1 , la distance entre les deux trajectoires est simplement $|\zeta_1| = |f'(x_0)||\zeta_0|$

Après la deuxième itération, on a $|\zeta_2| = |f'(x_1)||\zeta_1| = |f'(x_1)||f'(x_0)||\zeta_0|$, et après n itérations, on obtient pour l'écart à la trajectoire,

$$|\zeta_n| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| |\zeta_0|$$

À chaque itération, on peut définir un coefficient multiplicateur h_1 et un **taux d'allongement (ou de contraction) moyen** λ_1

$$h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\zeta_n|}{|\zeta_0|} \right)^{1/n} \quad \lambda_1 = \ln(h_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

● **Carte itérée 1D**

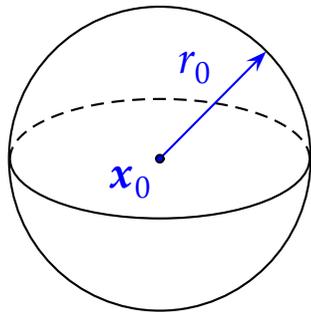
λ_1 est appelé **exposant de Liapunov** de l'application (et h_1 est le nombre de Lyapunov). On admettra que la limite existe et est indépendante de la trajectoire suivie (donc de x_0). Si h_1 est supérieur à 1, c'est-à-dire $\lambda_1 > 0$, les trajectoires issues de deux points initialement proches divergent (exponentiellement dans la phase initiale).

Cette **sensibilité aux conditions initiales** est la marque du **chaos**

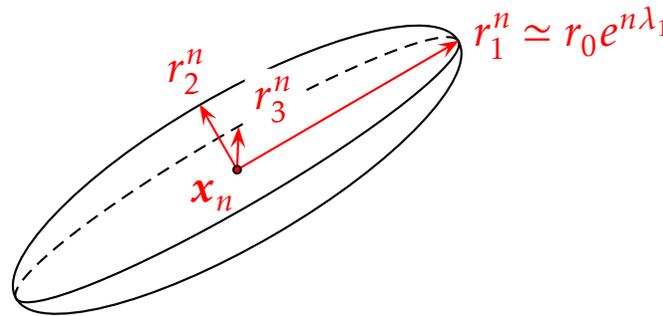
cf. exercice sur l'**application logistique**

● Carte itérée multidimensionnelle

Une carte sur \mathbb{R}^m possède m exposants de Lyapunov qui traduisent les taux de séparation (ou de rapprochement) selon m directions orthogonales, par exemple $m = 2$ avec Hénon. Ceci est illustré sur la figure ci-dessous, qui montre la déformation d'une boule (infinitésimale) de conditions initiales vers un ellipsoïde dont la longueur (normalisée) des axes correspond aux nombres de Lyapunov



sphère infinitésimale
initiale



après n itérations

A partir de l'application $x_{n+1} = f(x_n)$, on définit l'application linéarisée qui fait apparaître la matrice Jacobienne $\bar{J} = \partial f / \partial x$

● Carte itérée multidimensionnelle (suite)

On considère alors la matrice $\bar{\bar{J}}_n = \bar{\bar{J}}(\mathbf{x}_{n-1})\bar{\bar{J}}(\mathbf{x}_{n-2})\dots\bar{\bar{J}}(\mathbf{x}_0)$ qui traduit l'évolution après n itérations

Par définition le k^e nombre de Lyapunov h_k est la limite quand n tend vers l'infini de la longueur de l'axe k de l'ellipsoïde $\bar{\bar{J}}_n \cdot S$, si S est la sphère initiale centrée en \mathbf{x}_0 (et dont la taille a été prise comme unité), et $\lambda_k = \ln(h_k)$. Par convention, les exposants de Lyapunov sont rangés par ordre décroissant $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$

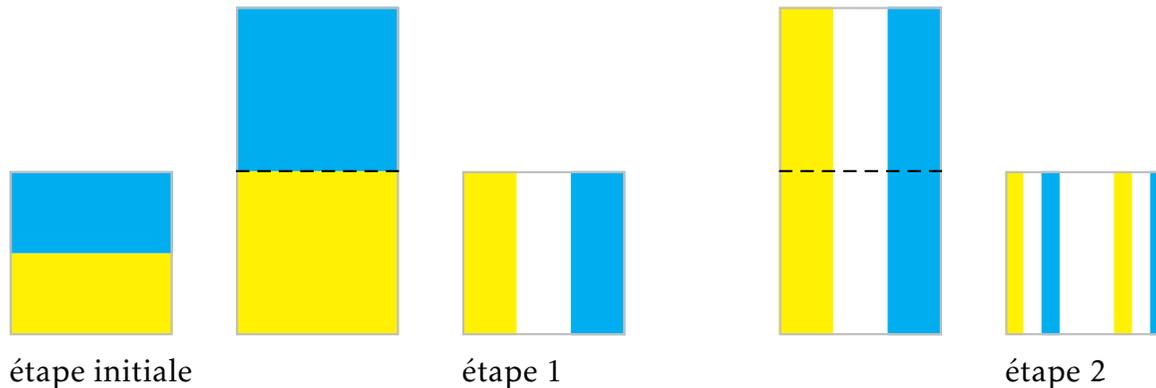
Les exposants de Lyapunov sont liés par une relation traduisant l'évolution du volume dans l'espace des phases (le produit des nombres de Lyapunov donne le volume de l'ellipsoïde); si la carte est dissipative en moyenne, le déterminant de $\bar{\bar{J}}_n$ est inférieur à 1 et la somme des exposants de Lyapunov est nécessairement négative (ce qui n'interdit pas le chaos)

● **Transformation du boulanger** (*skinny baker's map*)

Application géométrique très simple pour illustrer la sensibilité aux conditions initiales, avec deux ingrédients essentiels du chaos : étirement et repliement !

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (x_n/3, 2y_n) & 0 \leq y_n \leq 1/2 \\ (x_n/3 + 2/3, 2y_n - 1) & 1/2 \leq y_n \leq 1 \end{cases}$$

Ici étirement dans la direction y ,
puis contraction et repliement dans la direction x



On obtient un ensemble de Cantor selon x de dimension $\ln(2)/\ln(3) \simeq 0.63$

Matrice jacobienne

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{cst}$$

Exposants de Liapunov

$$\lambda_1 = \ln 2 > 0, \lambda_2 = \ln(1/3) < 0$$

Contraction des aires,

$$|\det \bar{\mathbf{J}}| = 2/3$$

$$|\det \bar{\mathbf{J}}| < 1 \implies \lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

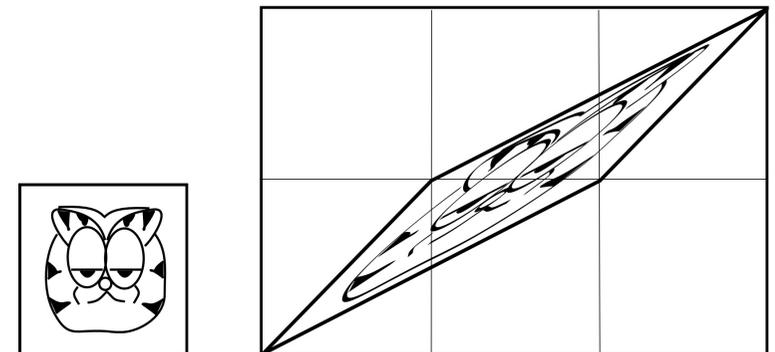
● **Transformation du chat** (*Cat map*, Arnold & Avez, 1967)

Transformation définie par,

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) = \overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_n \quad \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{modulo } 1)$$

et illustrée sur la figure ci-dessous, avant de prendre en compte le modulo 1. La matrice jacobienne est de nouveau constante ici, avec $\overline{\overline{\mathbf{J}}} = \overline{\overline{\mathbf{A}}}$, $\det \overline{\overline{\mathbf{J}}} = s_- s_+ = 1$ et $\text{tr} \overline{\overline{\mathbf{J}}} = s_- + s_+ = 3$. Il n'y a donc pas de contraction des aires, mais seulement le mélange chaotique. En effet, on a pour les valeurs propres $s_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ et par conséquent $\lambda_1 = \ln[(3 + \sqrt{5})/2] \simeq 0.962$ et $\lambda_2 = \ln[(3 - \sqrt{5})/2] \simeq -0.962$

cf. illustration sous Matlab



(fig. tirée de Alligood, Sauer & Yorke, page 95)

● **Détermination numérique pour une carte itérée**

Dans les deux exemples précédents, il est important d'observer que la matrice jacobienne \bar{J} est constante : les valeurs propres s_i de \bar{J} sont alors directement associées aux coefficients de Liapunov, $\lambda_i = \ln |s_i|$

Dans un cas plus général, $\bar{J} = \bar{J}(x)$, et même la moyenne des valeurs propres au cours des itérations ne permet pas de déterminer les exposants λ_i car les directions propres ne sont pas préservées. Il reste cependant possible de déterminer λ_1 , le plus grand de ces exposants, celui qui pilote l'allongement de l'ellipse. On peut former pour cela $\bar{J}_n \bar{J}_n^+$ (matrice symétrique diagonalisable, $^+ =$ conjuguée et transposée pour une matrice), et considérer que la trace va être dominée par la plus grande valeur propre,

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \text{tr}(\bar{J}_n \bar{J}_n^+)$$

cf. exercice sur l'**attracteur d'Hénon** pour une illustration et pour noter les limites de cette approche également

● **Détermination numérique pour une carte itérée (suite)**

En règle générale seule une estimation numérique des exposants est possible. Cela consiste à suivre la croissance de l'ellipsoïde itération par itération. On examine les vecteurs transformés d'une base orthonormée $(\mathbf{e}_1^0, \dots, \mathbf{e}_m^0)$, avec

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_1^0, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m = \bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_m^0$$

Ces vecteurs $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m)$ sont bien sur l'ellipsoïde $\bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{S}$, mais ne sont pas nécessairement orthogonaux. A partir de la direction d'allongement principale qui va s'imposer naturellement, on applique la procédure de Gram-Schmidt (suffisant pour ce cours) qui définit de nouveaux vecteurs orthogonaux, en n'oubliant pas d'enregistrer l'allongement de chaque vecteur

● **Détermination numérique pour une carte itérée (suite)**

- Base orthonormée $(\mathbf{e}_1^k, \dots, \mathbf{e}_m^k)$ à l'itération k ,
 $\tilde{\mathbf{e}}_1^{k+1} = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{e}_1^k, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m^{k+1} = \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{e}_m^k$
- Orthogonalisation à l'itération $k + 1$ de $(\tilde{\mathbf{e}}_1^{k+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m^{k+1}) \rightsquigarrow (\mathbf{e}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{e}_m^{k+1})$ avec l'algorithme de Gram-Schmidt. Pour $m = 3$ à titre d'illustration,

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^k = \tilde{\mathbf{e}}_1^{k+1} & \mathbf{e}_1^{k+1} = \mathbf{a}_1^k / \|\mathbf{a}_1^k\| \\ \mathbf{a}_2^k = \tilde{\mathbf{e}}_2^{k+1} - (\tilde{\mathbf{e}}_2^{k+1} \cdot \mathbf{e}_1^{k+1})\mathbf{e}_1^{k+1} & \mathbf{e}_2^{k+1} = \mathbf{a}_2^k / \|\mathbf{a}_2^k\| \\ \mathbf{a}_3^k = \tilde{\mathbf{e}}_3^{k+1} - (\tilde{\mathbf{e}}_3^{k+1} \cdot \mathbf{e}_1^{k+1})\mathbf{e}_1^{k+1} - (\tilde{\mathbf{e}}_3^{k+1} \cdot \mathbf{e}_2^{k+1})\mathbf{e}_2^{k+1} & \mathbf{e}_3^{k+1} = \mathbf{a}_3^k / \|\mathbf{a}_3^k\| \end{cases}$$

Pour le calcul de \mathbf{e}_2^{k+1} , on conserve la composante perpendiculaire à \mathbf{e}_1^{k+1} . Pour le calcul de \mathbf{e}_3^{k+1} , on retire la composante selon \mathbf{e}_1^{k+1} et \mathbf{e}_2^{k+1} , en ne conservant donc que la composante perpendiculaire au plan défini par $(\mathbf{e}_1^{k+1}, \mathbf{e}_2^{k+1})$. Cette procédure d'orthogonalisation conserve le volume de l'ellipsoïde

- La nouvelle base orthonormée est $(\mathbf{e}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{e}_m^{k+1})$ pour poursuivre l'itération de $k + 1$ à $k + 2$

Les exposants de Lyapunov sont donnés par

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \|\mathbf{a}_i^k\|$$

● Flot 3-D

On revient maintenant au cas d'un flot F , pour lequel l'évaluation de ζ dépend de la matrice jacobienne

$$\bar{J} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(t)]$$

Pour se familiariser avec ce calcul, on considère d'abord le cas très particulier où cette matrice \bar{J} ne dépend pas du temps (de $\mathbf{x}(t)$ en pratique), ce qui permet une intégration analytique de l'écart conduisant à $\zeta(t) = \bar{L}(t)\zeta(0)$. La matrice $\bar{L}(t)$ peut toujours s'écrire dans son repère propre comme

$$\bar{L}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

Il est alors possible de former $\text{tr}[\bar{L}(t)\bar{L}^+(t)] = e^{(\lambda_1+\lambda_1^+)t} + \dots + e^{(\lambda_m+\lambda_m^+)t}$, et de calculer la plus grande valeur propre en prenant la limite,

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln[\text{tr}(\bar{L}\bar{L}^+)]$$

● **Flot 3-D : détermination numérique des exposants de Lyapunov**

Dans le cas général, $\bar{J} = \bar{J}[\mathbf{x}(t)]$, la matrice jacobienne ne possède pas de valeurs propres constantes et n'est pas diagonalisable dans un repère fixe. Il est cependant toujours possible d'utiliser la relation précédente pour définir le plus grand exposant de Lyapunov du flot. Mathématiquement, on montre par ailleurs l'existence des exposants de Lyapunov dans un cadre général, théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec (1968)

Plusieurs approches sont possibles en pratique,

- Estimation du plus grand exposant de Lyapunov λ_1
 - en suivant deux trajectoires proches
 - avec l'approche du transparent précédent
- Détermination du spectre complet $(\lambda_i)_{i=1,\dots,m}$ des exposants de Lyapunov, algorithme de Benettin *et al.* (1980)

● **Estimation du plus grand exposant de Lyapunov λ_1 en suivant deux trajectoires proches**

On intègre deux fois $\dot{x} = F(x)$ à partir de deux conditions initiales proches x_0 et $x_0 + \zeta_0$ respectivement, et on examine $\zeta \simeq \zeta_0 e^{\lambda_1 t}$, en effectuant la procédure pour plusieurs points x_0 afin de pouvoir estimer avec une certaine précision λ_1 (en prenant la moyenne)

Formellement, on écrit

$$\lambda_1 = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \epsilon_0 \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{\zeta(t)}{\zeta_0}$$

- **Estimation du plus grand exposant de Lyapunov λ_1**
(Benettin *et al.*, 1980)

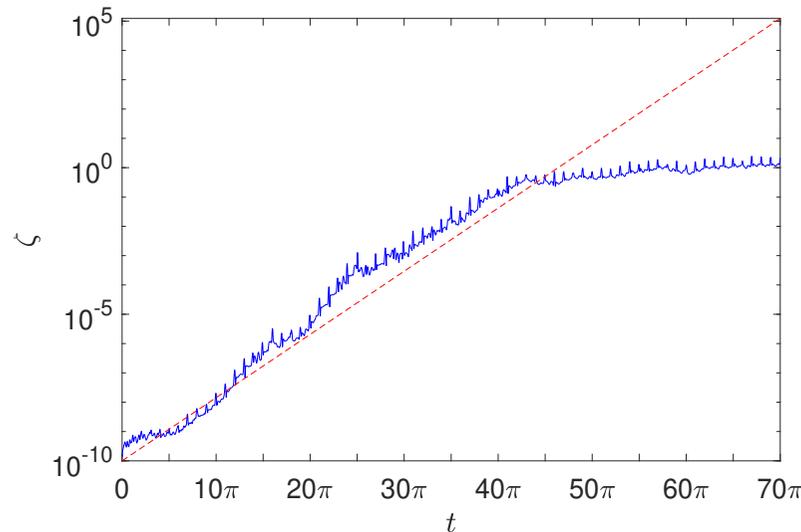
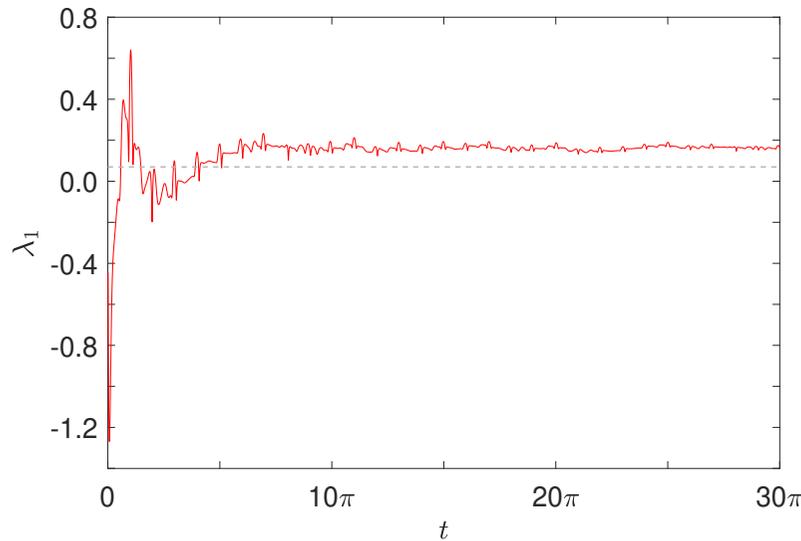
En parallèle de l'intégration d'une trajectoire $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sur l'attracteur (après le transitoire), on suit l'évolution d'un vecteur ζ_1 arbitrairement petit pour être gouverné par $\dot{\zeta}_1 = \bar{J}[\mathbf{x}(t)] \zeta_1$

Système linéaire, donc on choisit $\|\zeta_1(t_0)\| = 1$, et on intègre jusqu'en $t_1 = t_0 + T$: on renormalise alors le vecteur sans changer sa direction, $\tilde{\zeta}_1(t_1) = \zeta_1(t_1) / \|\zeta_1(t_1)\|$, et on reprend l'intégration avec comme condition initiale $\zeta_1 = \tilde{\zeta}_1$ de t_1 à $t_2 = t_1 + T$. Au final,

$$\lambda_1 \simeq \frac{1}{nT} \sum_{k=1}^n \ln \|\zeta_1(t_0 + kT)\|$$

● Estimation du plus grand exposant de Lyapunov λ_1

Illustration avec l'attracteur japonais



Matrice jacobienne \bar{J}

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3x_1^2 & -k & -B \sin(x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tr} \bar{J} = -k < 0$$

En appliquant l'algorithme de Benettin *et al.*

$$\lambda_1 \simeq 0.16$$

En notant par ailleurs que $\text{tr}(\bar{J})$ est une constante ici.

Sachant qu'un des exposants est nécessairement nul, $\lambda_2 = 0$, on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \langle \text{tr}(\bar{J}) \rangle$ et par suite $\lambda_3 \simeq -0.26$

On peut aussi estimer λ_1 en suivant l'écart entre deux trajectoires proches, et en moyennant pour plusieurs conditions initiales.

$$\zeta \propto \zeta_0 e^{\lambda_1 t}$$

● **Détermination numérique du spectre des exposants de Lyapunov**

(Benettin *et al.*, 1980)

On suit l'évolution d'un repère orthonormé le long de la trajectoire, avec à $t = t_0$, $\zeta_1 = (1, 0, 0)^+$, $\zeta_2 = (0, 1, 0)^+$, $\zeta_3 = (0, 0, 1)^+$ et donc $3 + 9 = 12$ éqs scalaires à prendre en compte dans dans *ode45.m* par exemple

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad \dot{\zeta}_i = \bar{J}[\mathbf{x}(t)]\zeta_i \quad \bar{J} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$$

On orthogonalise ces vecteurs tous les temps T avec l'algorithme de Gram-Schmidt : à $t_1 = t_0 + T$, on a $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ et on reprend l'intégration avec $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3)$ tels que

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_1 = \mathbf{a}_1 / \|\mathbf{a}_1\| & \text{avec } \mathbf{a}_1 = \zeta_1 \\ \tilde{\zeta}_2 = \mathbf{a}_2 / \|\mathbf{a}_2\| & \text{avec } \mathbf{a}_2 = \zeta_2 - (\zeta_2 \cdot \tilde{\zeta}_1)\tilde{\zeta}_1 \\ \tilde{\zeta}_3 = \mathbf{a}_3 / \|\mathbf{a}_3\| & \text{avec } \mathbf{a}_3 = \zeta_3 - (\zeta_3 \cdot \tilde{\zeta}_1)\tilde{\zeta}_1 - (\zeta_3 \cdot \tilde{\zeta}_2)\tilde{\zeta}_2 \end{cases}$$

$$\lambda_i \simeq \frac{1}{nT} \sum_{k=1}^n \ln \|\mathbf{a}_i(t_0 + kT)\|$$

● Quelques remarques

- Par définition, une orbite bornée est **chaotique si au moins le premier exposant de Lyapunov λ_1 est positif**
- La **dérivée de Lie $\nabla \cdot F$** moyennée sur l'attracteur fournit la somme des exposants de Lyapunov. On a en effet $\nabla \cdot F = \text{tr} \bar{J}$, et ainsi

$$\langle \nabla \cdot F \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

Il faut se rappeler ici, voir le transparent 29, que la divergence du flot $\nabla \cdot F$ est associée à la variation de volume dans l'espace des phases

- Pour un flot chaotique, un des exposants de Lyapunov est positif (chaos) et un des exposants est nul également, celui associé à la direction de la trajectoire
- Bien distinguer les exposants de Liapunov d'un flot F , et l'analyse menée pour une carte itérée (section de Poincaré) modélisée par f

● **Exposant de Lyapunov nul**

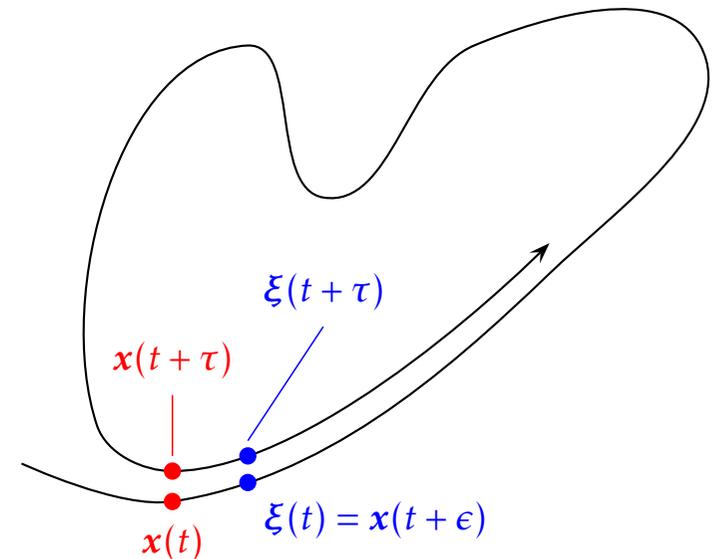
Tout système dynamique dont la trajectoire est bornée et sans point fixe (sur un attracteur étrange entre autres) possède nécessairement un de ses exposants de Lyapunov égal à zéro
 (Haken, 1983, *Phys. Lett.*, 94A(2))

Pour s'en convaincre, on peut considérer deux points $x(t)$ et $\xi(t) = x(t + \epsilon)$ le long de la trajectoire, avec ξ en avance de ϵ sur x . La distance entre les deux points $\|x - \xi\|$ peut varier au cours du temps (avec la variation de la vitesse du flot dans l'espace des phases) mais, en moyenne, cette séparation reste constante.

Pour une trajectoire bornée, on va pouvoir trouver un temps τ pour lequel $x(t + \tau) \simeq x(t)$, et par suite $\xi(t + \tau) = x(t + \epsilon + \tau) \simeq x(t + \epsilon) = \xi(t)$
 $\|x(t + \tau) - \xi(t + \tau)\| \simeq \|x(t) - \xi(t)\| \quad (\epsilon \rightarrow 0)$

Exposant de Lyapunov λ dans la direction de la trajectoire

$$\lambda = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|x(t + \tau) - \xi(t + \tau)\|}{\|x(t) - \xi(t)\|} = 0$$



(la séparation en temps joue un rôle très singulier par rapport à l'espace)

● **Conjecture de Kaplan & Yorke (1979)**

Relation entre la dimension fractale de l'attracteur et les exposants de Lyapunov d'un flot F

$$D_{KY} = p + \frac{1}{|\lambda_{p+1}|} \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

où p est le plus grand entier tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 0$, et donc $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i < 0$

$D_{KY} = D_0$ (**dimension de recouvrement**)

● **Horizon de prédiction**

Le plus grand exposant de Lyapunov traduit l'horizon de prédiction d'un système, c'est-à-dire le temps maximum pour lequel une prédiction raisonnable de l'évolution d'un système est possible

À titre d'illustration, supposons que l'on veuille prédire l'état futur d'un système chaotique avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$. Si l'état initial est connu avec une précision $\epsilon_0 = 10^{-7}$, pendant combien de temps peut-on prédire l'état du système considéré?

Le temps maximal de prédiction t_H est tel que

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{\lambda_1 t_H} \implies t_H = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{\lambda_1} \ln(10^4) = \frac{4 \ln(10)}{\lambda_1}$$

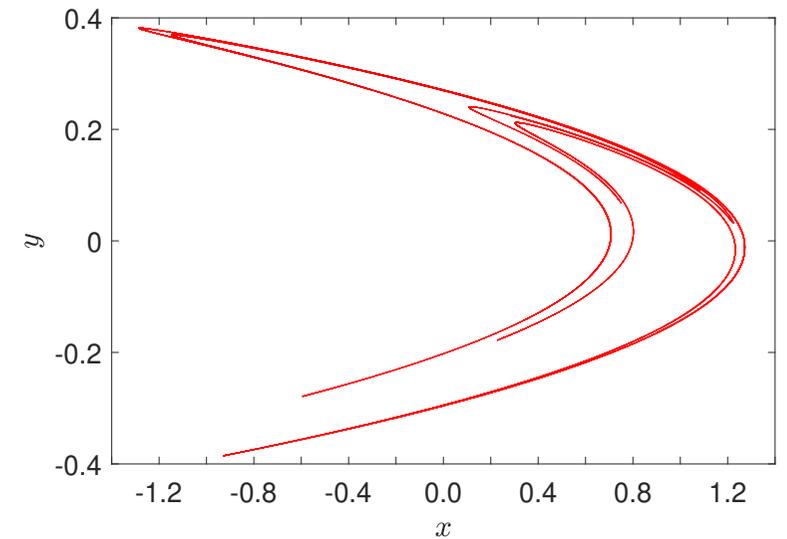
En admettant qu'on soit capable d'améliorer d'un facteur un million la précision des données initiales, $\epsilon_0 = 10^{-13}$, le nouvel horizon t'_H serait

$$t'_H = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{\lambda_1} \ln(10^{10}) = 2.5 t_H \quad \text{seulement!}$$

Attracteur étrange de Hénon (1976)

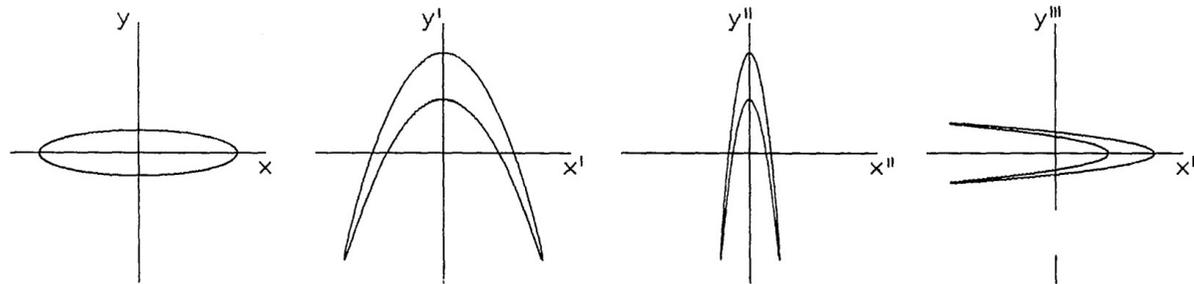


Michel Hénon
(1931-2013)



● Construction du modèle

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$



Pliage

$$\begin{cases} x' = x_n \\ y' = y_n + 1 - ax_n^2 \end{cases}$$

$$\det \bar{\mathbf{J}} = 1$$

Contraction de l'axe x

$$\begin{cases} x'' = bx' \\ y'' = y' \end{cases}$$

$$\det \bar{\mathbf{J}} = b$$

Retour à l'orientation initiale

$$\begin{cases} x_{n+1} = y'' \\ y_{n+1} = x'' \end{cases}$$

$$\det \bar{\mathbf{J}} = -1$$

- **Construction du modèle (suite)**

Le paramètre a contrôle le terme non linéaire et b la dissipation

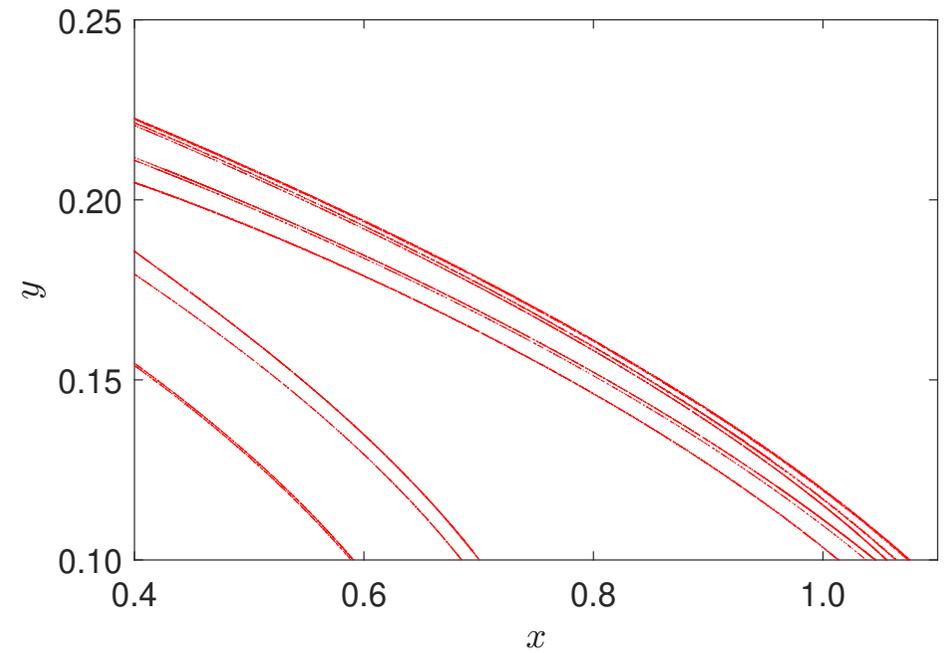
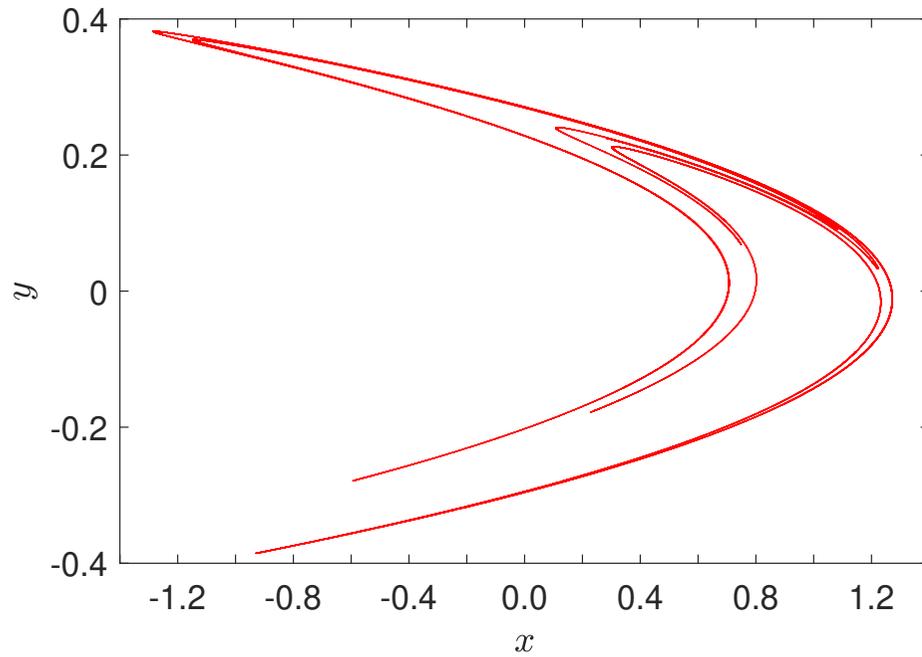
L'espace est étiré et replié sur lui-même à chaque itération

La transformation f est réversible (biunivoque) pour $b \neq 0$, on a en effet

$$\begin{cases} x_n = y_{n+1}/b \\ y_n = x_{n+1} + (a/b^2)y_{n+1}^2 - 1 \end{cases}$$

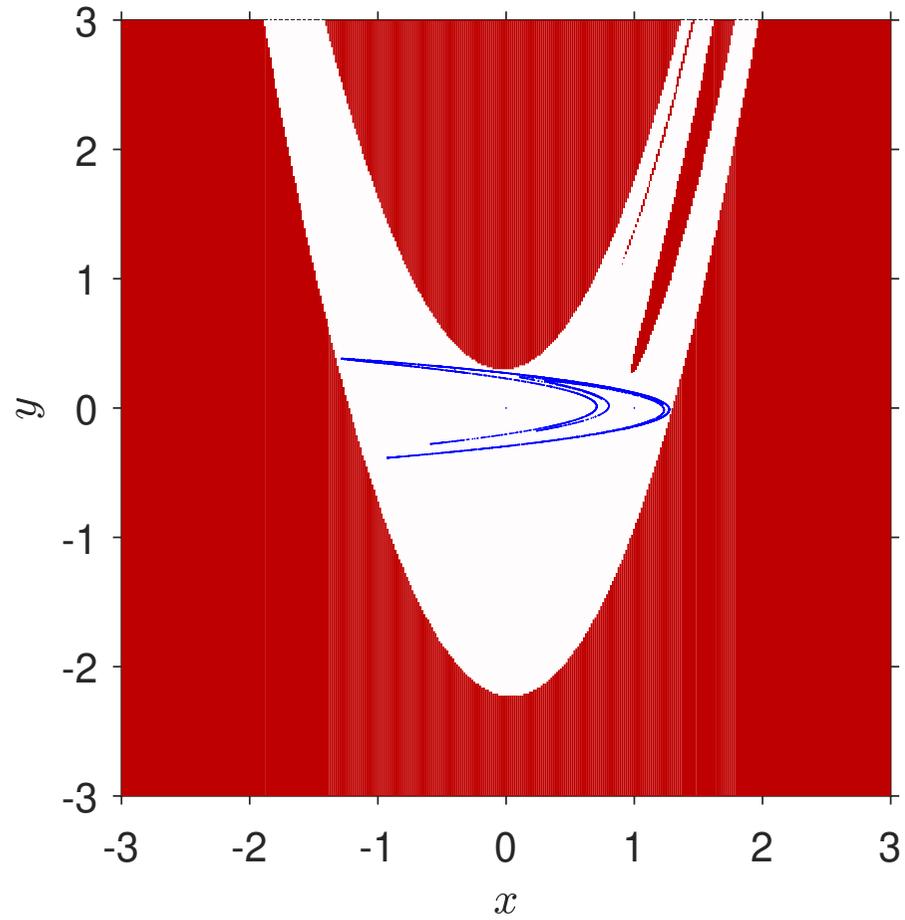
et traduit l'objectif de Hénon de modéliser analytiquement une section de Poincaré d'un système chaotique (trajectoire unique associée à chaque point dans l'espace des phases)

● **Attracteur étrange**
 ($a = 1.4, b = 0.3$)



● Bassin d'attraction

$(a = 1.4, b = 0.3)$



● **Points fixes**

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}^*) \quad \begin{cases} x = -ax^2 + y + 1 \\ y = bx \end{cases} \implies ax^2 + (1 - b)x - 1 = 0$$

Déterminant $\Delta = (1 - b)^2 + 4a > 0$

Points fixes réels pour $a > -(1 - b)^2/4 \simeq -0.1225$

$$x_{\pm}^* = \frac{b - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad y_{\pm}^* = bx_{\pm}^*$$

Stabilité linéaire de ces points fixes ?

On examine pour cela l'évolution d'un écart ζ par rapport au point fixe \mathbf{x}^* en linéarisant f autour de ce point fixe, $\mathbf{x}^* + \zeta_{n+1} = f(\mathbf{x}^* + \zeta_n) \simeq \mathbf{x}^* + \bar{J}(\mathbf{x}^*)\zeta_n$ avec \bar{J} la matrice jacobienne de l'application f

$$\bar{J} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

On observe que $\det \bar{J} = -b = -0.3 < 0$, avec donc une contraction significative des aires à chaque itération

● **Points fixes (suite)**

Valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -2ax - s & 1 \\ b & -s \end{vmatrix} = s(2ax + s) - b = 0 \quad \begin{matrix} s_{1,2} = -ax \pm \sqrt{(ax)^2 + b} \\ (s_1 s_2 = -b) \end{matrix}$$

On montre que le premier point fixe $\mathbf{x}_1^* = (x_+^*, y_+^*)$ est linéairement stable, *i.e.* $|s_{1,2}(\mathbf{x}_1^*)| \leq 1$, pour

$$a < \frac{3}{4}(1 - b)^2 \simeq 0.3675$$

alors que le second point fixe $\mathbf{x}_2^* = (x_-^*, y_-^*)$ est toujours instable (toujours une valeur propre en dehors du cercle unité)

Pour la valeur nominale $a = 1.4$

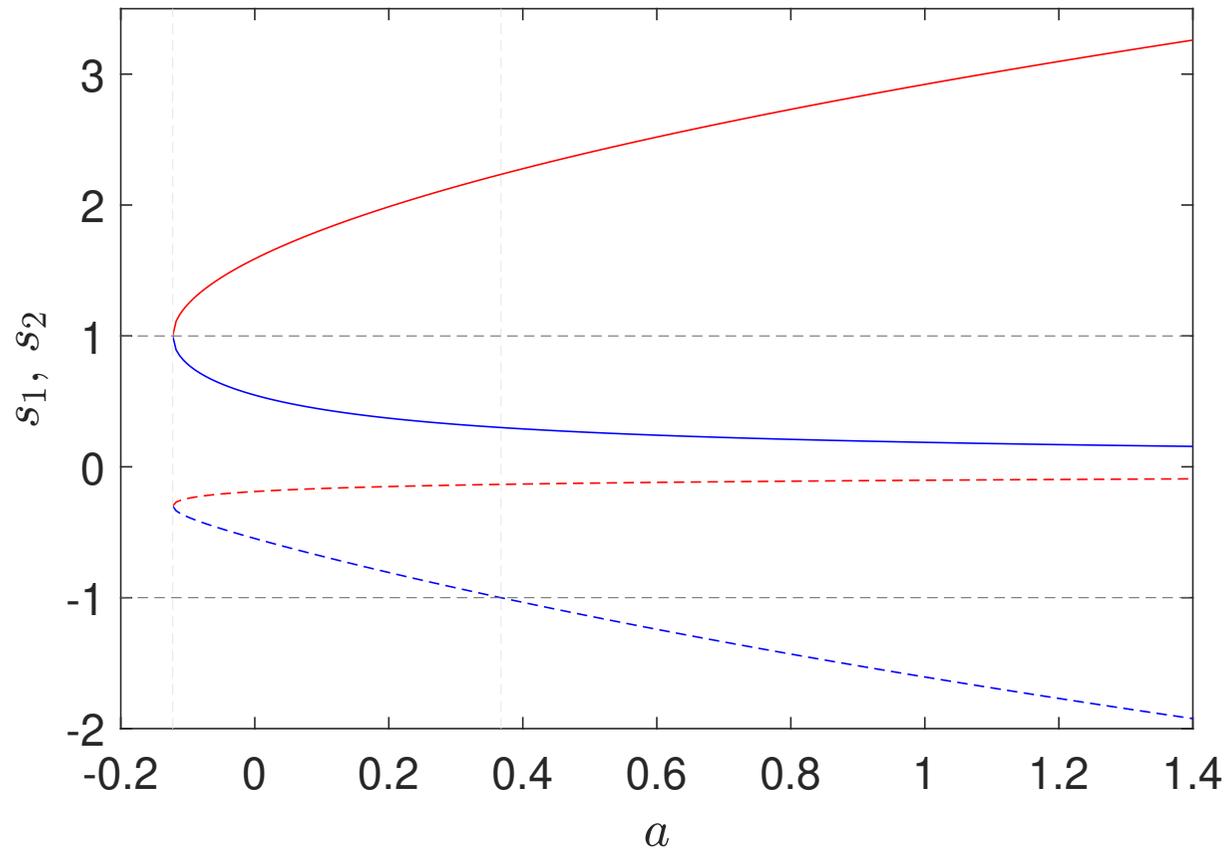
$$\mathbf{x}_1^* = (x_+^*, y_+^*) \simeq (0.63, 0.19)$$

$$s_1 \simeq 0.16, s_2 \simeq -1.92$$

$$\mathbf{x}_2^* = (x_-^*, y_-^*) \simeq (-1.13, -0.34)$$

$$s_1 \simeq 3.26, s_2 \simeq -0.09$$

● Stabilité locale des deux points fixes



Point fixe $x_1^* = (x_+, y_+)$

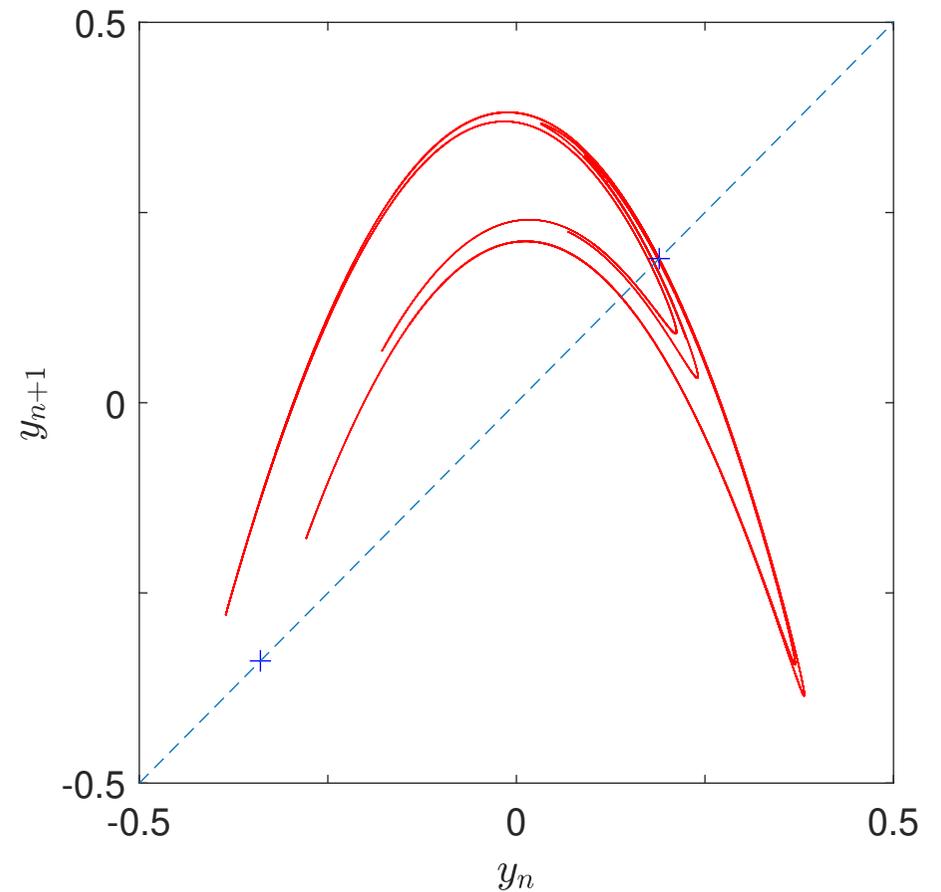
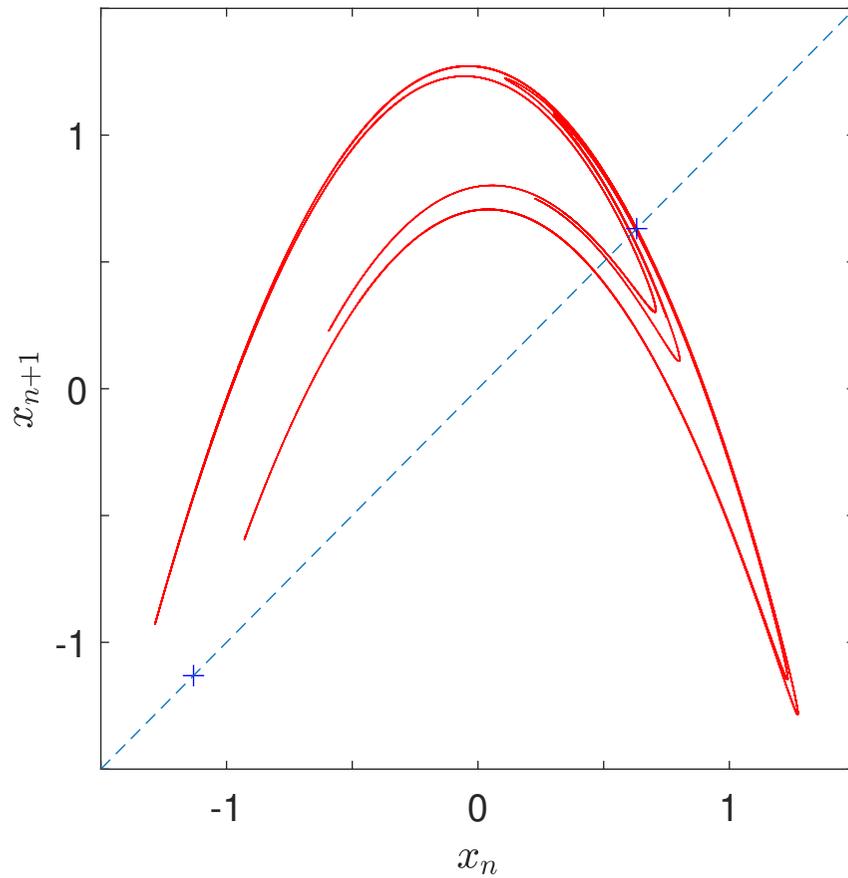
s_1 ——— s_2 - - -

Point fixe $x_2^* = (x_-, y_-)$

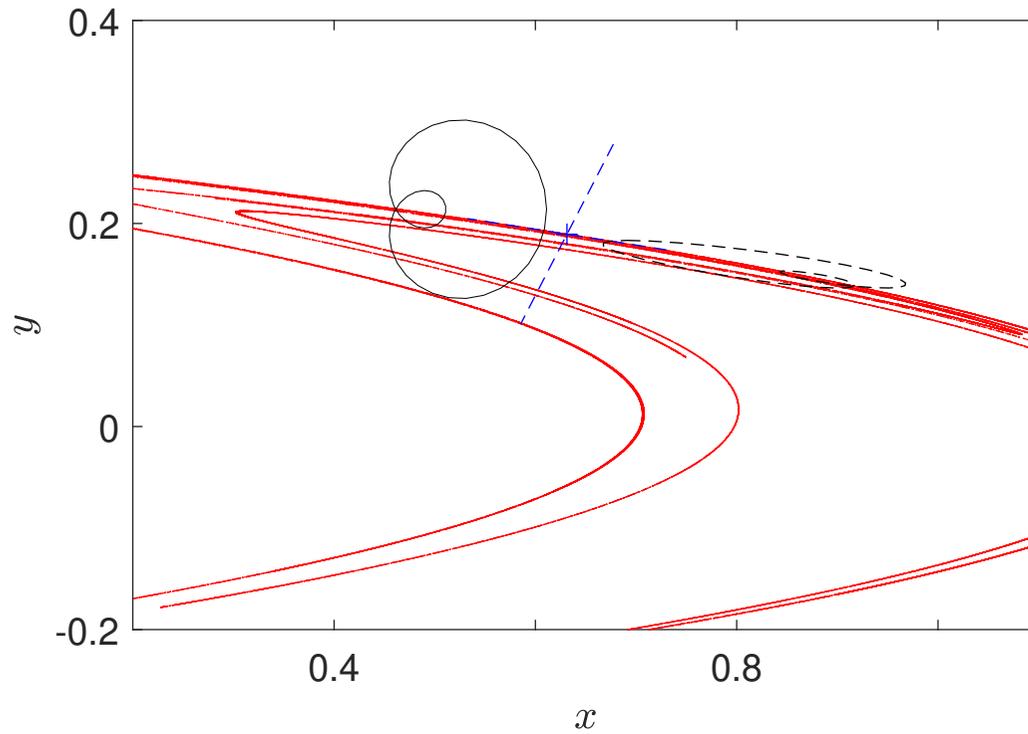
s_1 ——— s_2 - - -

(toujours instable)

- **Cartes de premier retour**
(le second point fixe x_2^* n'est pas "fréquenté")



● Autour du premier point fixe



● **Points fixes de l'application double**

(on se donne plus de liberté pour chercher des points fixes d'intérêt)

$$f \circ f \quad \begin{cases} x_{n+2} = -a(-ax_n^2 + y_n + 1)^2 + bx_n + 1 \\ y_{n+2} = b(-ax_n^2 + y_n + 1) \end{cases}$$

On connaît déjà deux des quatre points fixes, les deux points fixes de l'application simple f qui vérifient $ax^2 + (1 - b)x - 1 = 0$

On a avec la seconde équation pour y

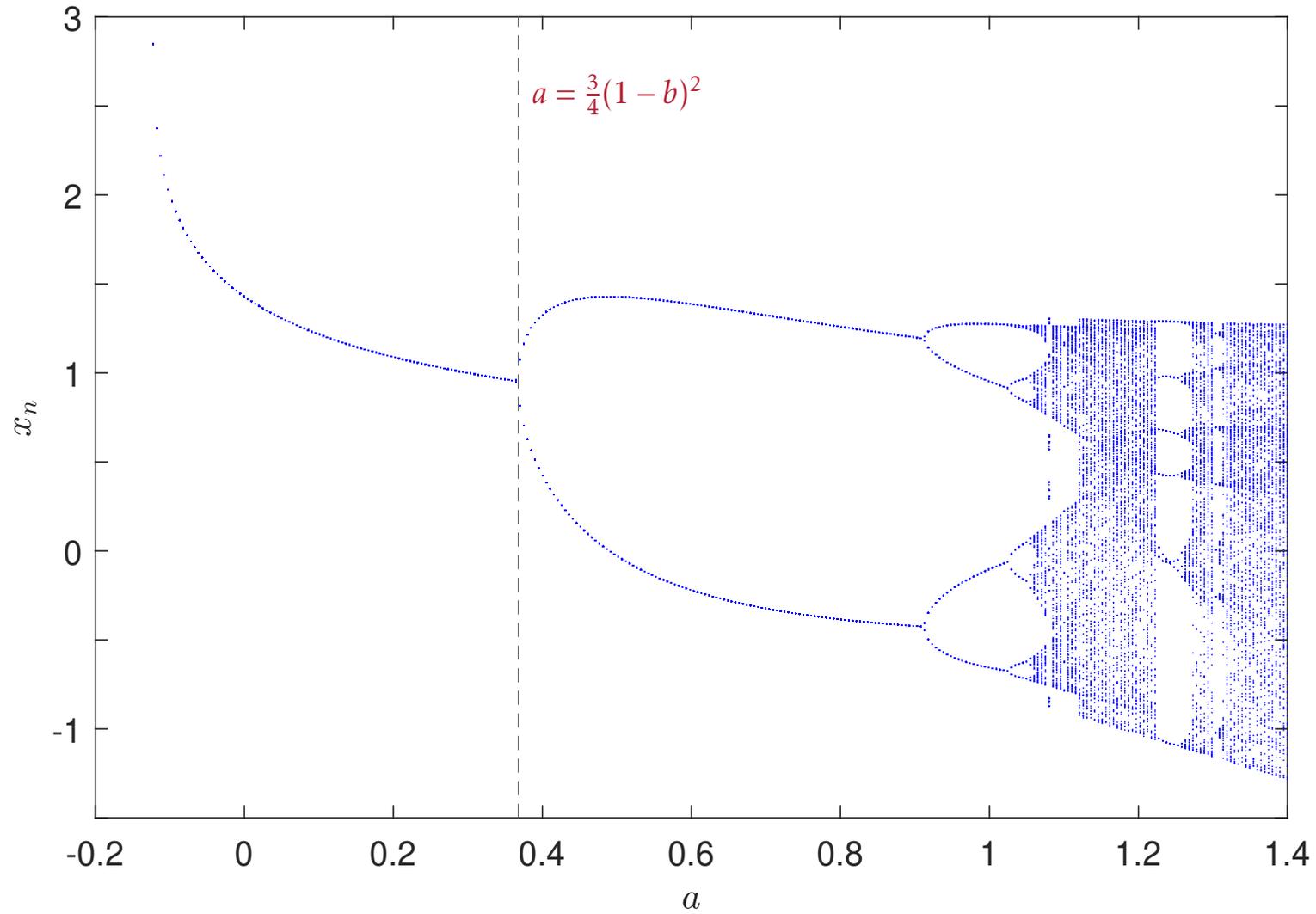
$$y = \frac{b}{1 - b}(1 - ax^2) \quad \text{et} \quad a^3x^4 - 2a^2x^2 + (1 - b)^3x - (1 - b)^2 + a = 0$$

$$\left[ax^2 + (1 - b)x - 1 \right] \left[a^2x^2 - (1 - b)ax + (1 - b)^2 - a \right] = 0$$

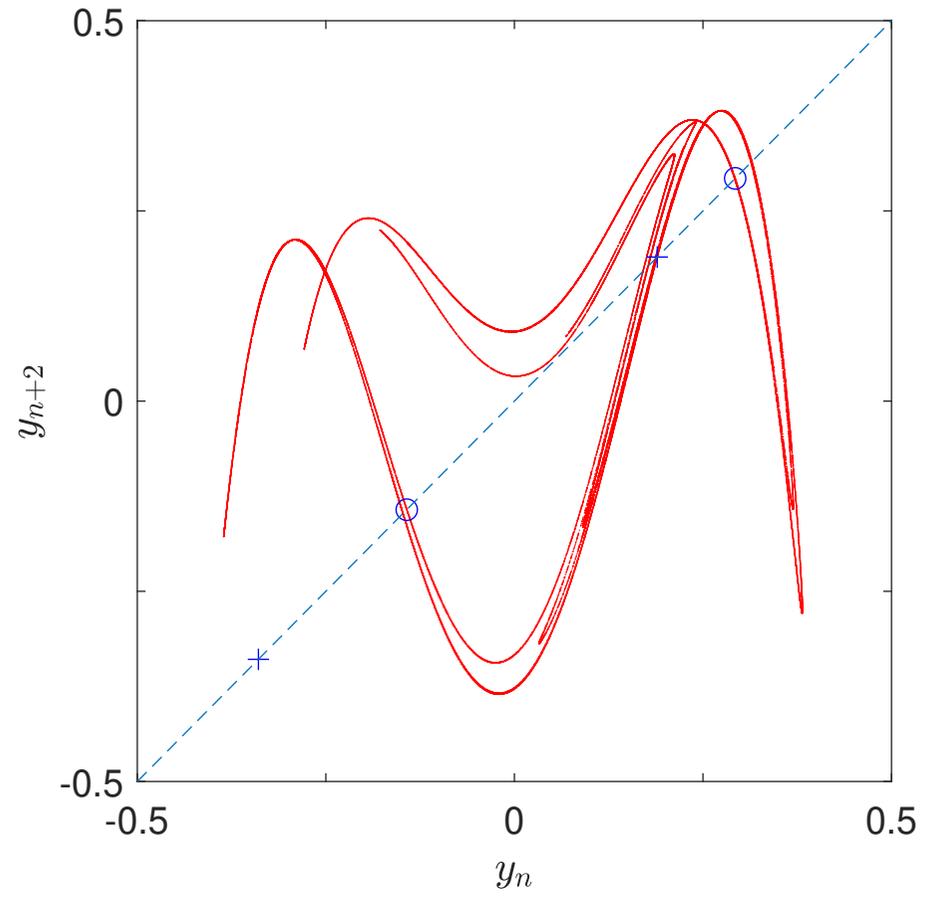
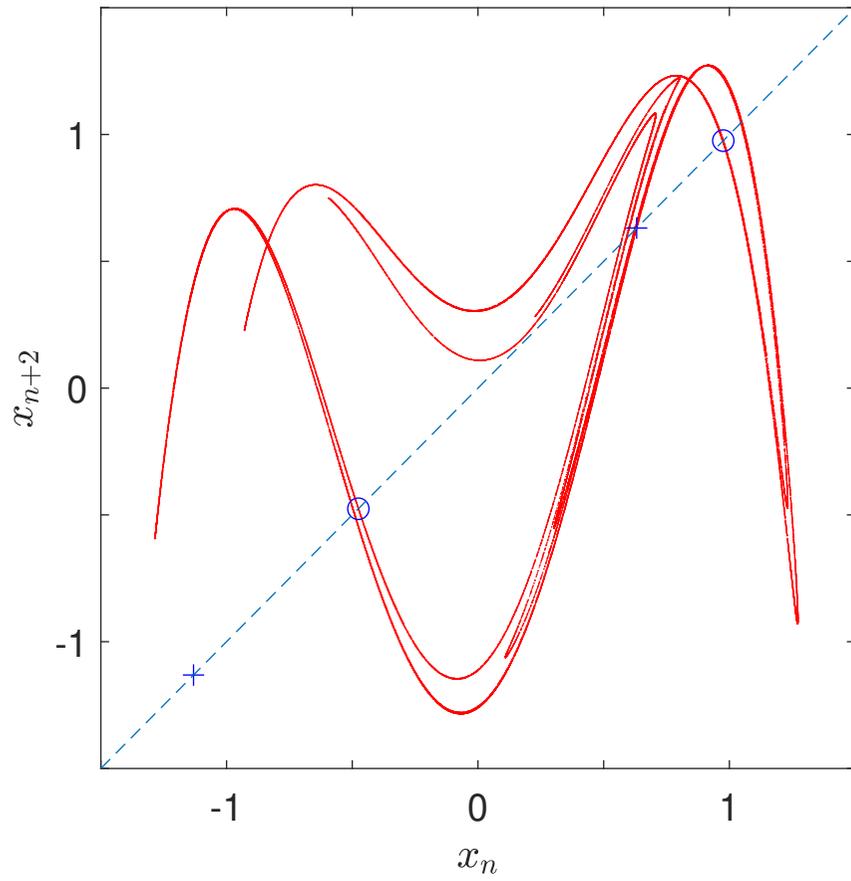
$$\mathbf{x_3^* = (x_+^*, y_+^*) \simeq (0.98, -0.14)}$$

$$\mathbf{x_4^* = (x_-^*, y_-^*) \simeq (-0.48, 0.29)}$$

● Diagramme de bifurcation

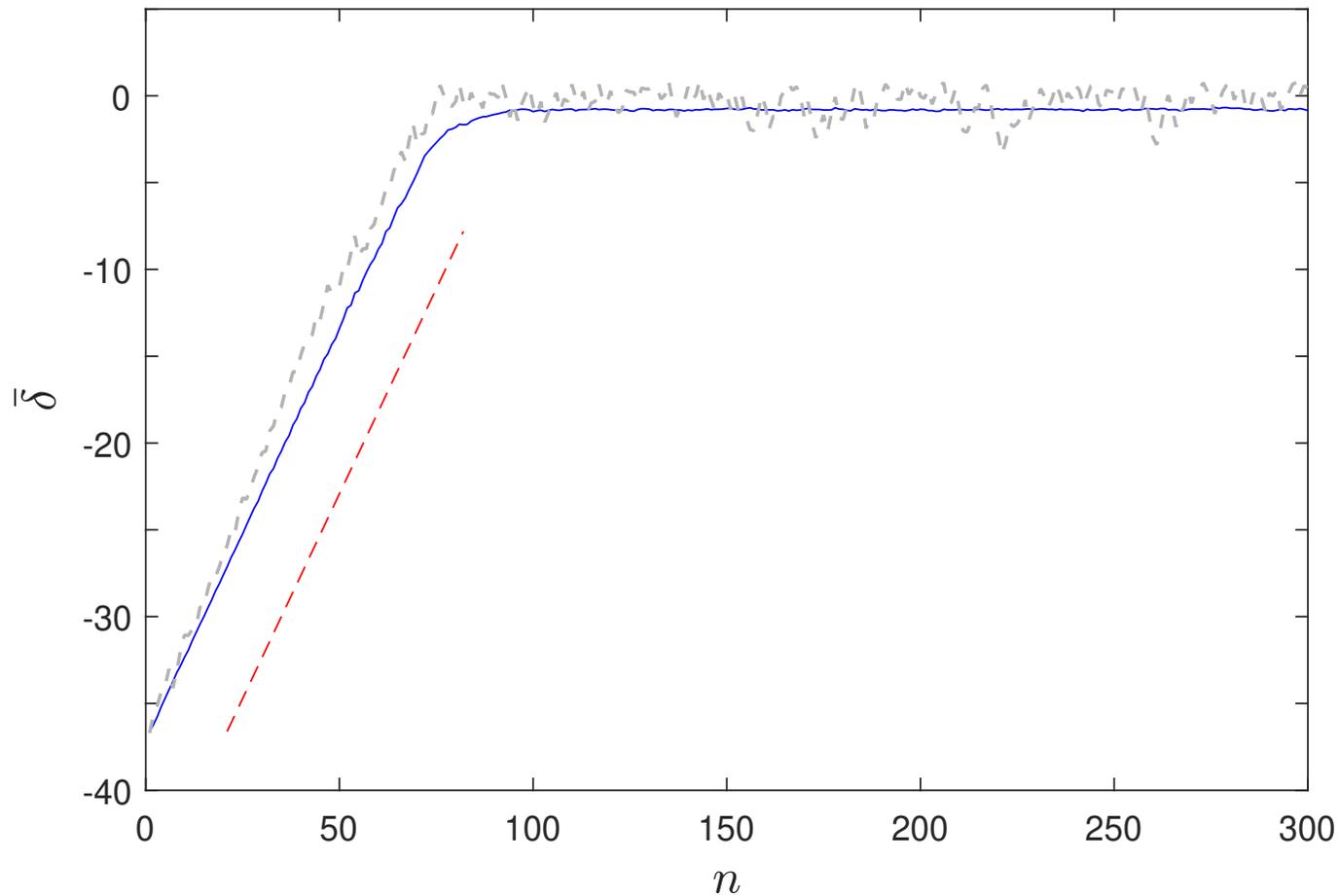


● Cartes de second retour



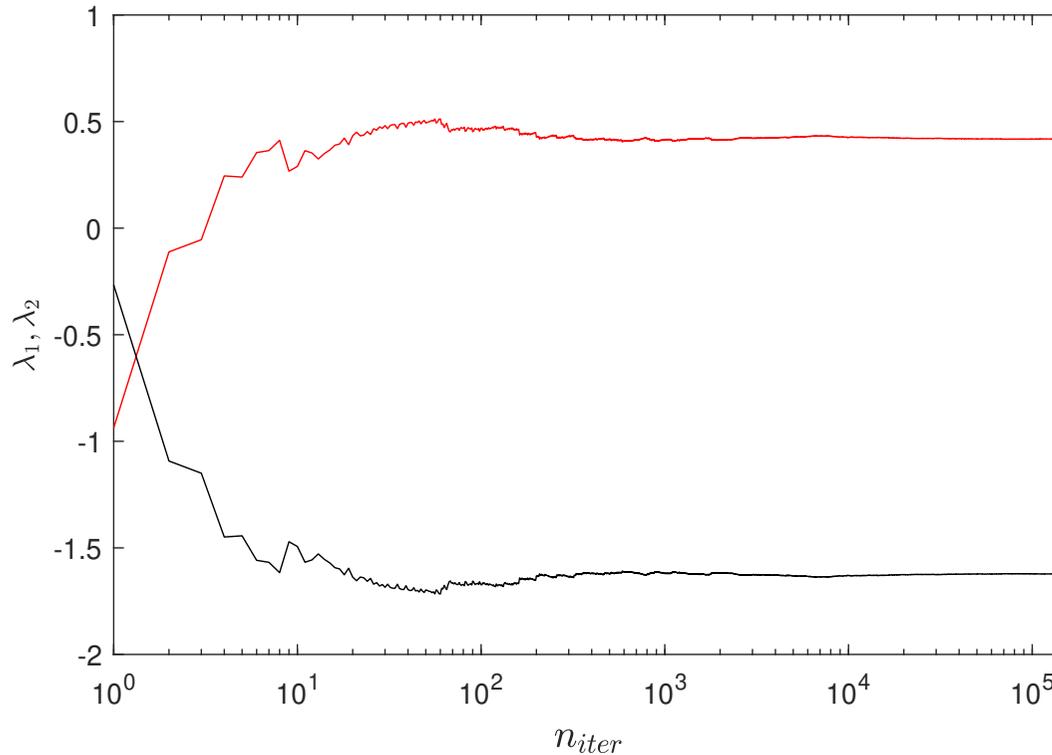
● **Sensibilité aux conditions initiales**

Estimation du coefficient de Liapounov λ_1 , en prenant la moyenne des écarts sur 500 positions initiales : $\bar{\delta} = \delta_0 e^{\lambda_1 n}$ avec $\lambda \simeq 0.46$



● **Exposants de Liapunov**

(procédure basée sur l'algorithme de Benettin *et al.*, 1980)



$\lambda_1 \simeq 0.42$

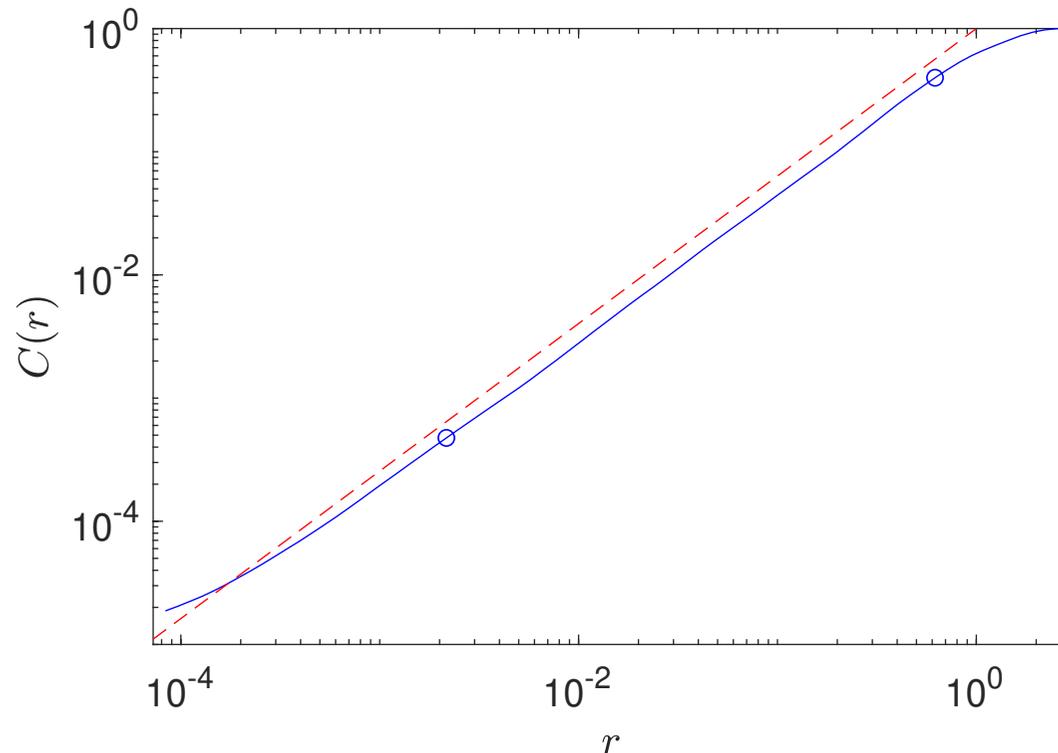
$\lambda_2 \simeq -1.62$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \ln b$

Kaplan & Yorke (1979)

$D_{KY} = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \simeq 1.26$

● Dimension de corrélation D_2

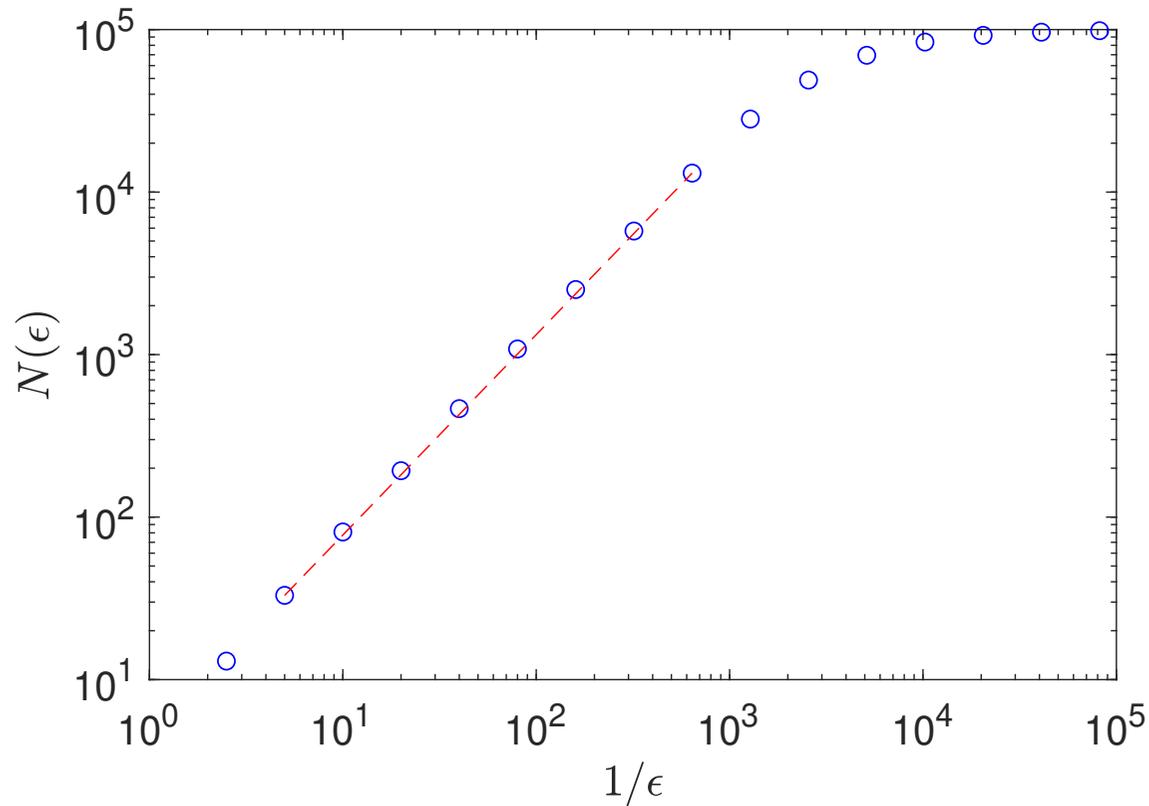


$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$$

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

Avec $N = 100000$ pour j , et la double somme faite pour $N = 5000$ avec i , on trouve --- $D_2 \simeq 1.19$ (méthode des moindres carrés)

● Dimension de recouvrement D_0



$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

---- $D_0 \simeq 1.23$

avec moindres carrés; on trouve dans la littérature $1.24 \leq D_0 \leq 1.26$

$$D_2 \leq D_0 \simeq D_{KY}$$

Application logistique

« The phenomenon of deterministic chaos ... very simple and purely deterministic laws or equations can give rise to dynamic behavior that not merely looks like random noise, but is so sensitive to initial conditions that long-term prediction is effectively impossible. This ended the Newtonian dream that if the system is simple (very few variables) and orderly (the rules and parameters are exactly known) then the future is predictable » (R. May, *Theoretical Ecology*, 2007)



Lord Robert May (1952-present)
Pr. at Oxford University (UK)



Hill, 2022, *Phys. Today*

● **Construction du modèle**

Évolution d'une population animale X_n de l'année n à l'année $n + 1$
 $X_{n+1} = AX_n$, où le facteur A représente un taux de fécondité

Modèle peu raisonnable, car on observe une croissance exponentielle de la population : ajout d'une saturation de la croissance induite par des ressources alimentaires finies $A = a(1 - X_n/X_{\max})$

En introduisant $x_n = X_n/X_{\max}$, on obtient l'**application logistique**, déjà rencontrée dans le **modèle proies-prédateurs**, $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ avec $0 \leq x_n \leq 1$

L'application logistique $x_{n+1} = f(x_n)$ est un endomorphisme du segment $[0, 1]$ pour $0 \leq a \leq 4$ (on a $x_n \rightarrow -\infty$ pour $x_n > 1$ par ailleurs)

Deux points fixes, dont un trivial $x_1^* = 0$ (extinction de la population), et le second $x_2^* = 1 - 1/a$

Stabilité de ces deux points fixes ?

● **Stabilité locale des points fixes**

Linéarisation autour du point d'équilibre,

$$\zeta_{n+1} \simeq \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \zeta_n \implies \text{point fixe } x^* \text{ stable si } |s| < 1 \text{ avec ici } s \equiv f'(x^*)$$

(stabilité si les valeurs propres de la matrice jacobienne sont dans le cercle unité)

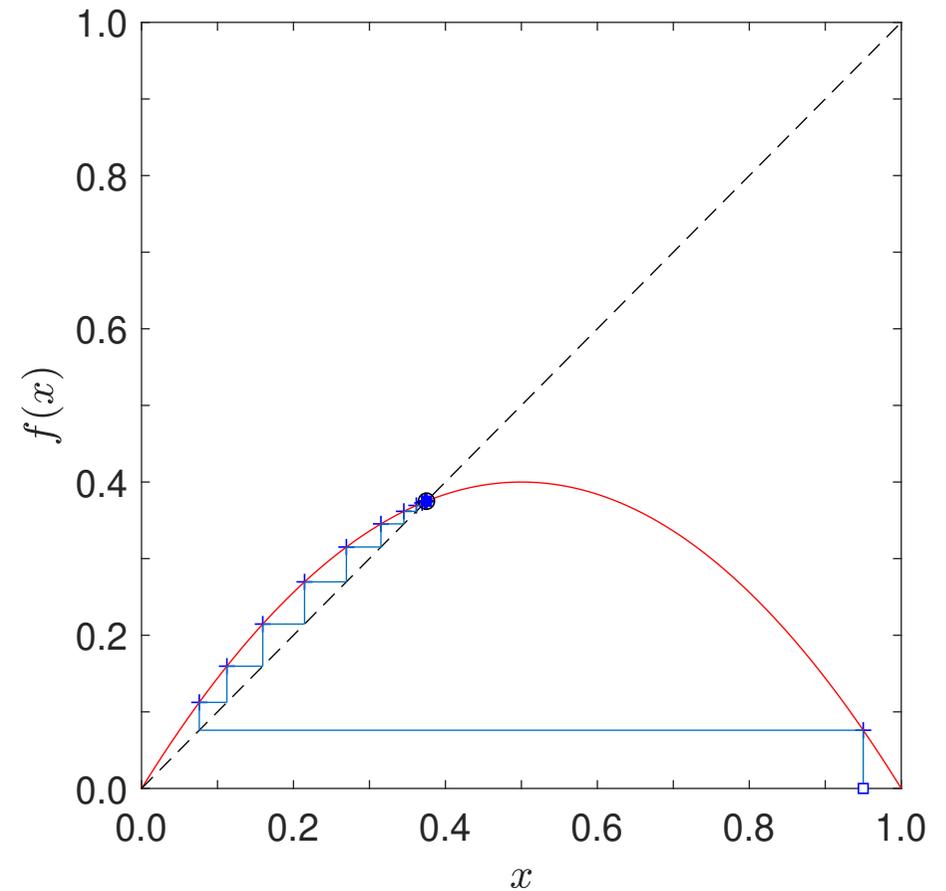
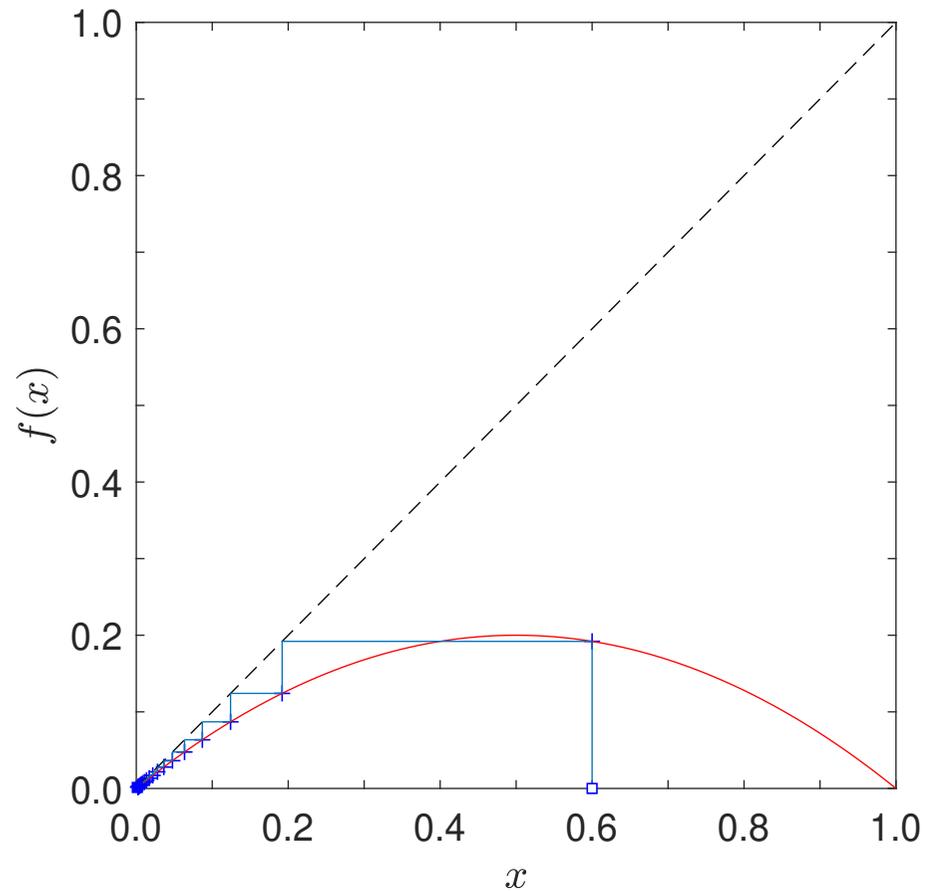
En notant que $s = a(1 - 2x^*)$, on en déduit que

- Le premier point fixe $x_1^* = 0$ est stable pour $a < 1$, et répulsif sinon
- Le second point fixe $x_2^* = 1 - 1/a$ est stable pour $1 < a < 3$, en observant que $s = 2 - a$

Bifurcation sous-harmonique par doublement de période (*flip bifurcation*) pour $a = 3$, car croisement du cercle unité par $s = -1$ pour la valeur propre

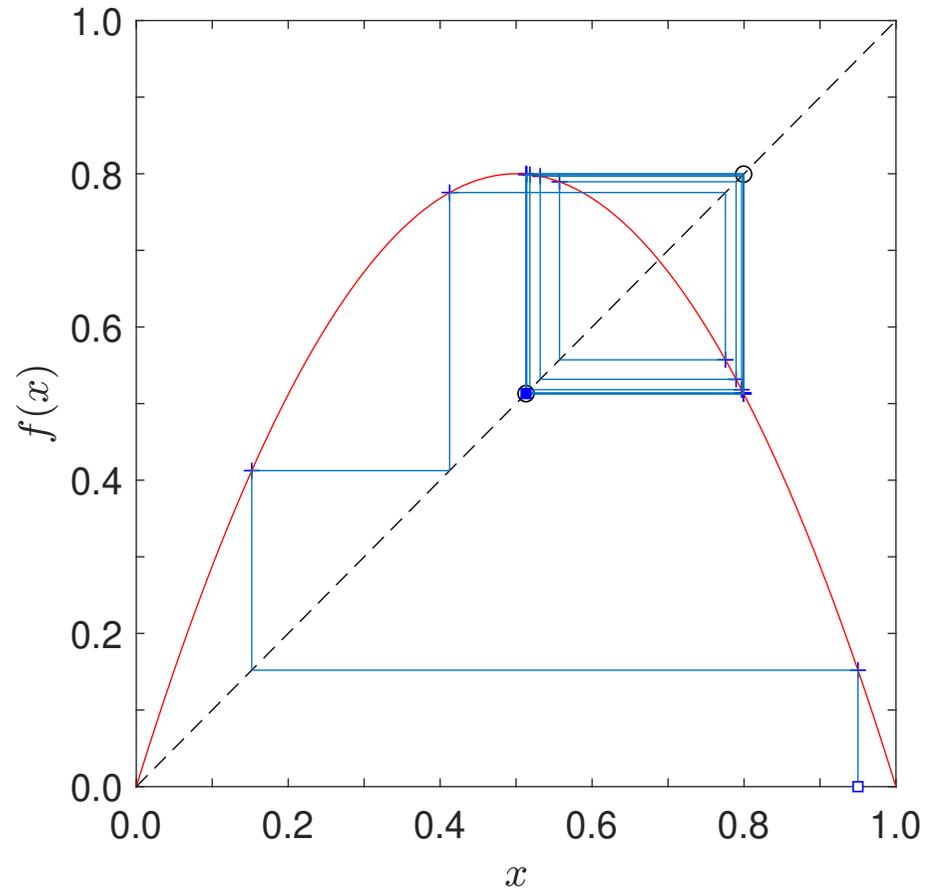
● **Évolution de la suite x_n**

Diagramme en toile d'araignée (*cobweb plot*) pour $a = 0.8$ avec l'origine stable (et x_2^* répulsif), et $a = 1.6$ avec $x_2^* = 1 - 1/a = 0.375$ stable (et l'origine x_1^* point répulsif)



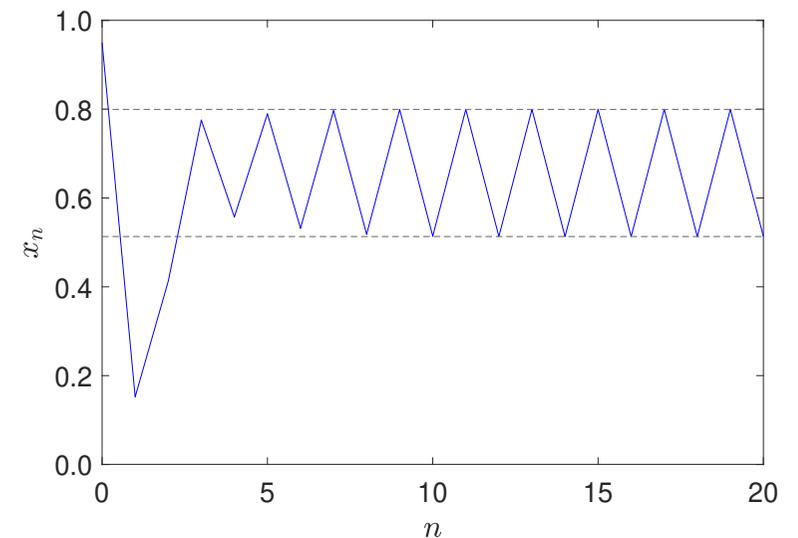
● **Bifurcation sous-harmonique**

$a = 3.2$



Oscillation entre une valeur basse ξ_- (nourriture abondante, augmentation de la population) et une valeur plus élevée ξ_+ (peu de nourriture, taux de mortalité plus élevé)

... comportement bien connu des enseignants aussi!



● **Bifurcation sous-harmonique (suite)**

Points fixes du cycle d'ordre 2 (carte des seconds itérés)

$$f \circ f : \quad x_{n+2} = a^2 x_n (1 - x_n) (1 - ax_n + ax_n^2)$$

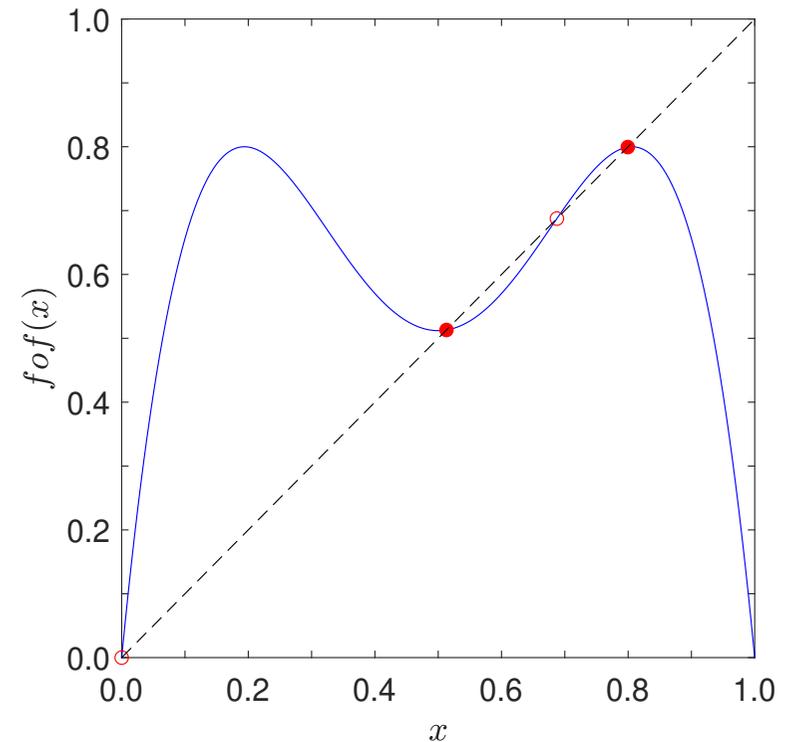
Pour déterminer les points fixes $x^* = f \circ f(x^*)$, on peut observer que les deux points fixes de l'application logistique $x^* = f(x^*)$ sont aussi points fixes de $f \circ f$

Par factorisation, ou par identification, on peut montrer que

$$x(ax - a + 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

$$\alpha = -a^2 \quad \beta = a(a + 1) \quad \gamma = -(a + 1)$$

○ x_1^*, x_2^* ● ξ^-, ξ^+



● **Bifurcation sous-harmonique (suite)**

Cycle d'ordre 2, $f(\xi_+) = \xi_-$ et $f(\xi_-) = \xi_+$,
 ξ_+ et ξ_- points fixes de $f \circ f$

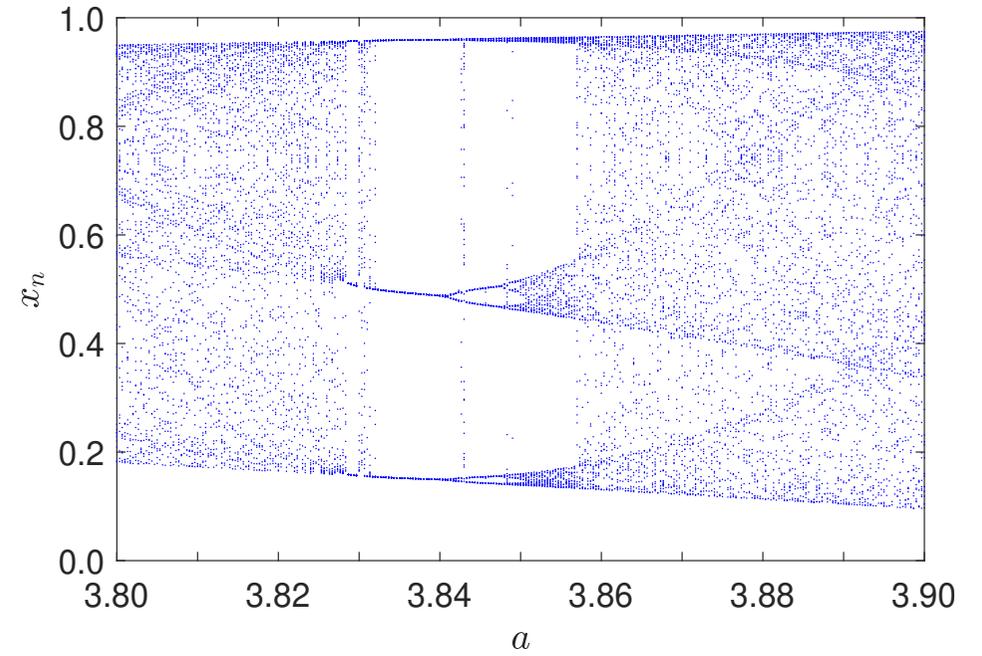
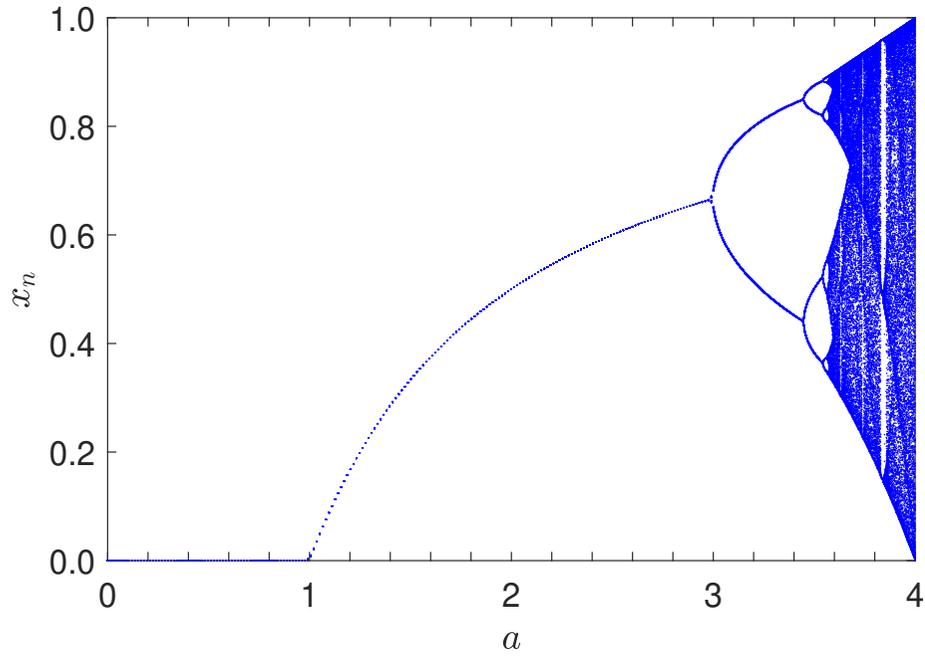
Points fixes du cycle d'ordre deux (en plus des points x_1^* et x_2^*)

$$\xi_{\pm} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a - 3)(a + 1)}}{2a} \quad a \geq 3$$

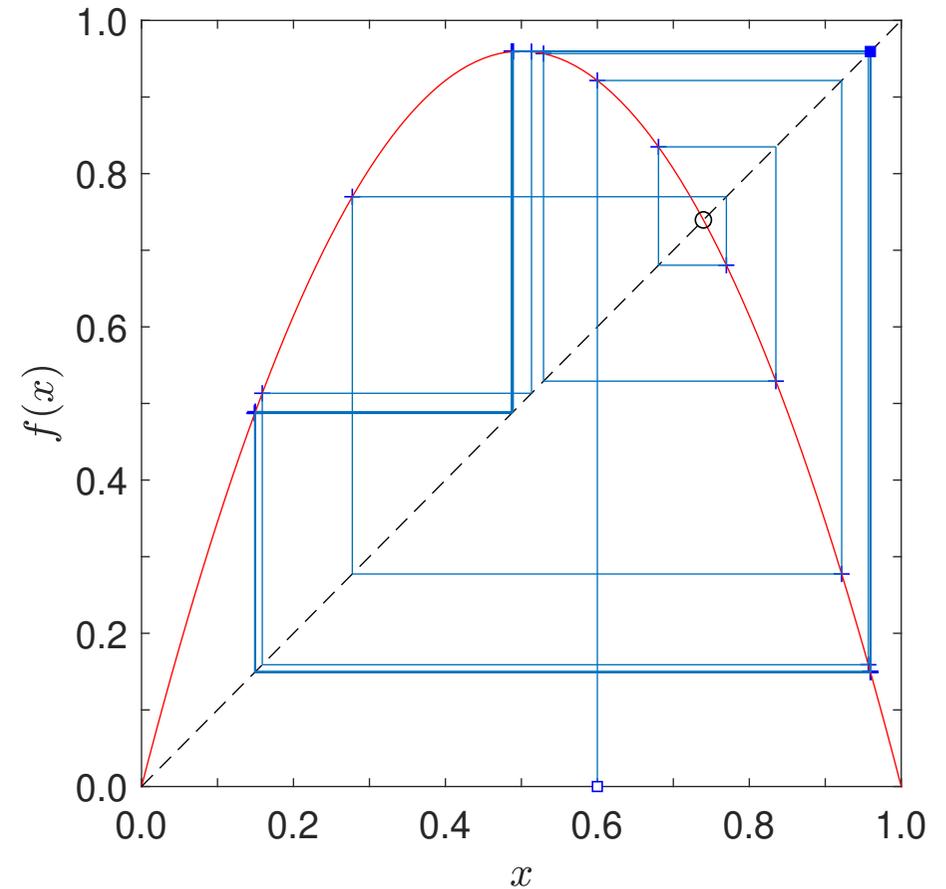
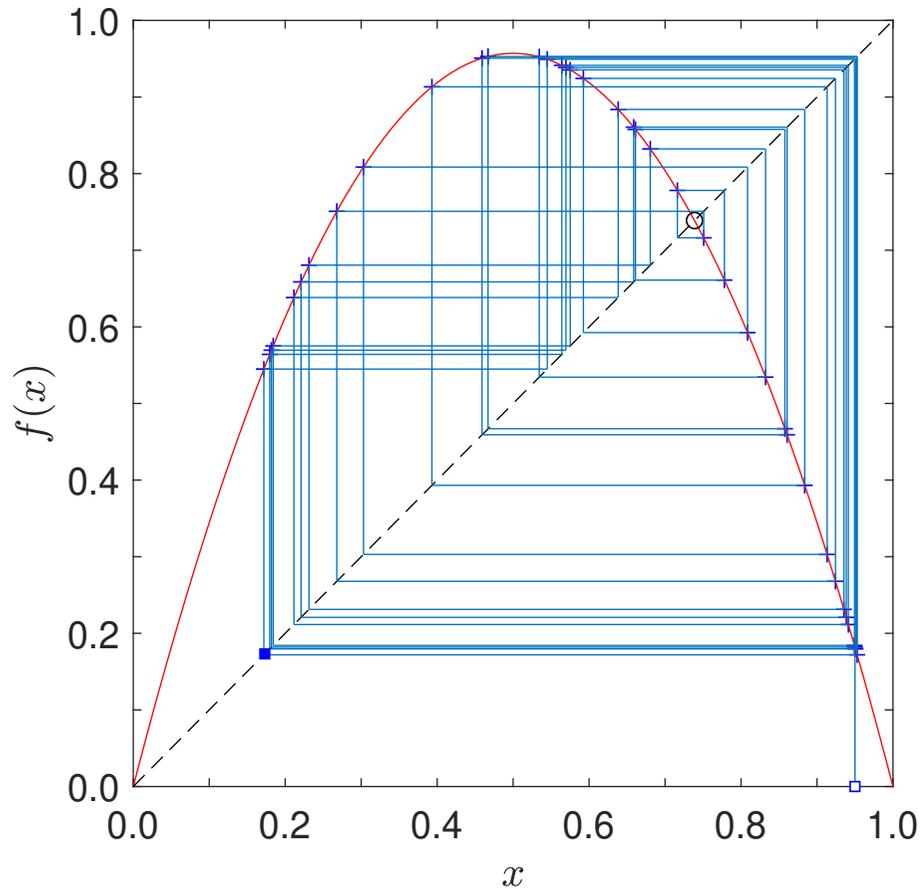
Pour avoir stabilité de ces points fixes, il faut que la dérivée s reste en module dans le cercle unité. On montre que :

$$s = \frac{d}{dx} [f \circ f(x)]_{\xi_{\pm}} \quad |s| < 1 \quad \implies \quad 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{6} \simeq 3.45$$

● Diagramme de bifurcation

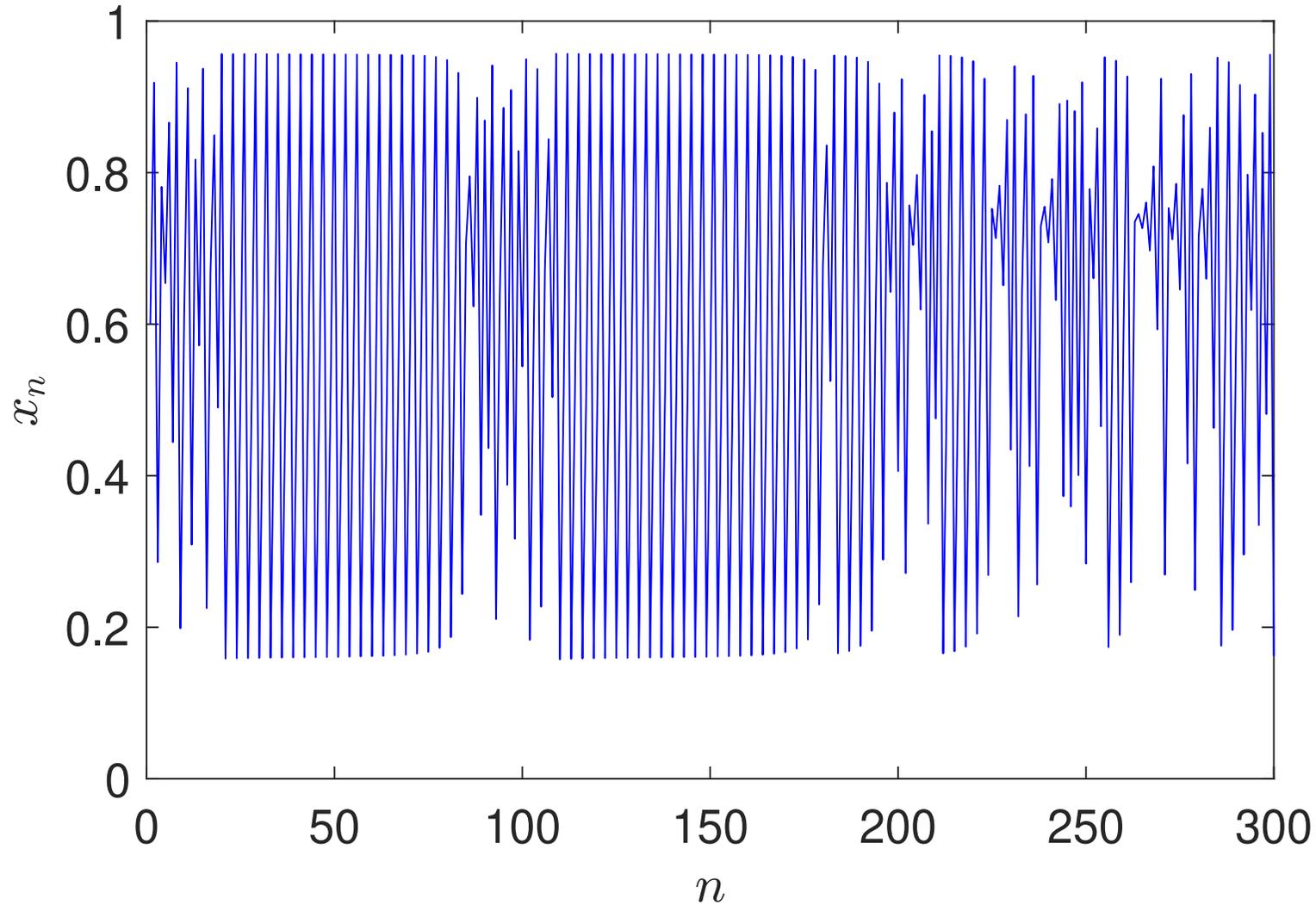


- **Évolution de la suite x_n**
 $a = 3.8282$ et $a = 3.84$



- **Route vers le chaos - intermittence**

$$a = 3.8282$$



● Transition vers le chaos

Théorème de Sharkovsky (1964). Sharkovsky a défini un nouvel ordre des entiers positifs \mathbb{Z}^+ , avec du plus grand au plus petit :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \times 3 \triangleright 2 \times 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \times 3 \triangleright 2^2 \times 5 \triangleright \dots \\ \triangleright 2^3 \times 3 \triangleright 2^3 \times 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \times 3 \triangleright 2^n \times 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Pour une application continue, si il existe un point fixe de période n , alors il existe aussi des points fixes de période k pour tous les k qui suivent n dans l'ordre des entiers de Sharkovsky. À titre d'exemple, si f un point fixe d'ordre 4, elle a nécessairement un point fixe d'ordre 2 et un point fixe : $\triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$

Li & Yorke (1975), *Period Three Implies Chaos!*

Une application f ayant un point fixe d'ordre 3, possède (donc, mais ce résultat a été obtenu sans la connaissance du théorème de Sharkovsky!) un point fixe pour tous les ordres; cela implique aussi l'existence d'un ensemble infini non dénombrable de points qui ne correspondent à aucun cycle, régime chaotique!

C'est aussi dans cet article que le mot **chaos** est introduit dans la littérature pour la première fois

● Transition vers le chaos

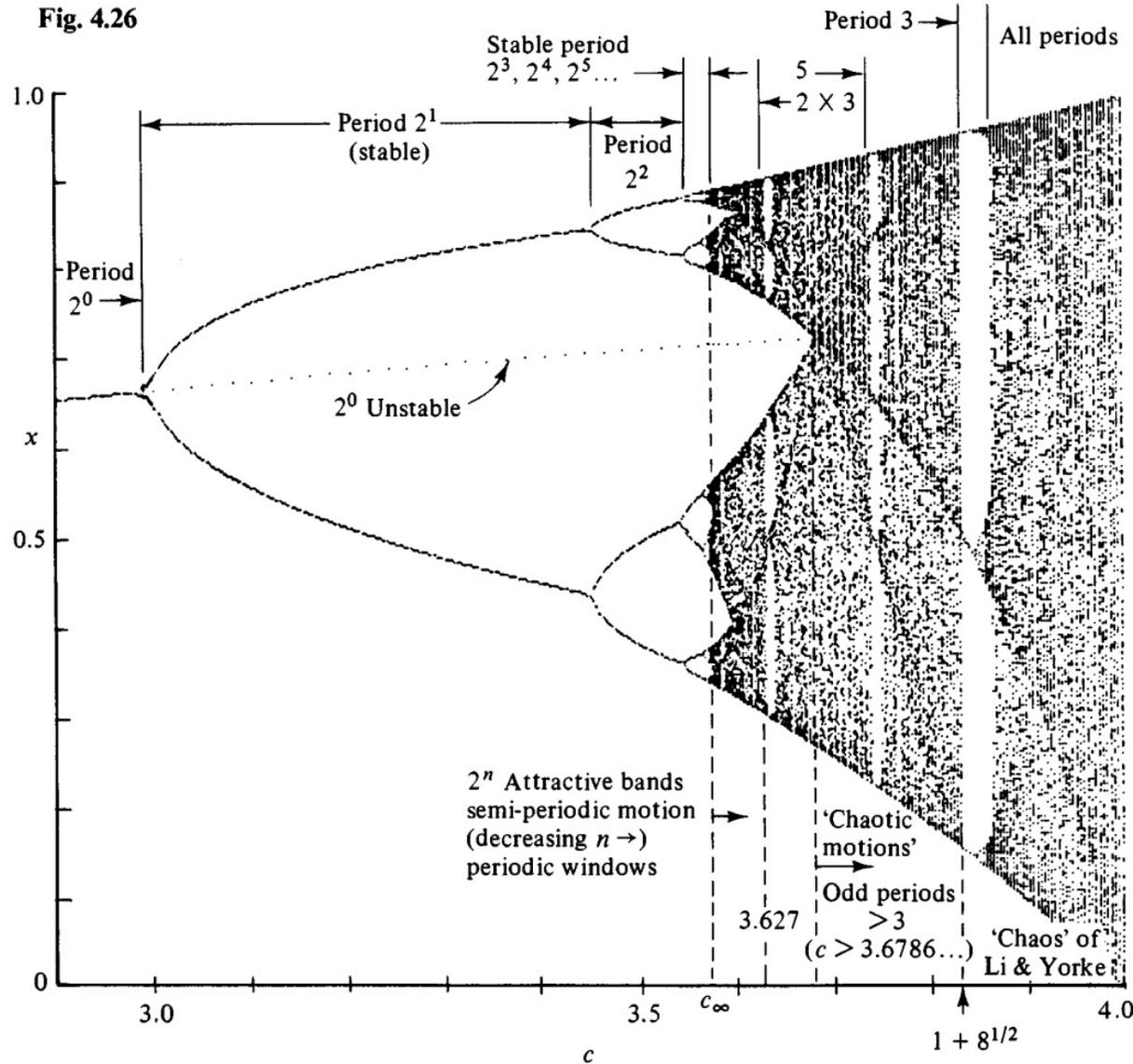


fig. 4.26 page 167 de Jackson, avec les notations de l'auteur

● **Universalité de la transition par bifurcations successives vers le chaos**

Constante de Feigenbaum δ

On indexe les valeurs du paramètre a pour chaque bifurcation (dédoublément de période),

$$a_1 = 3, a_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \simeq 4.6692016\dots$$

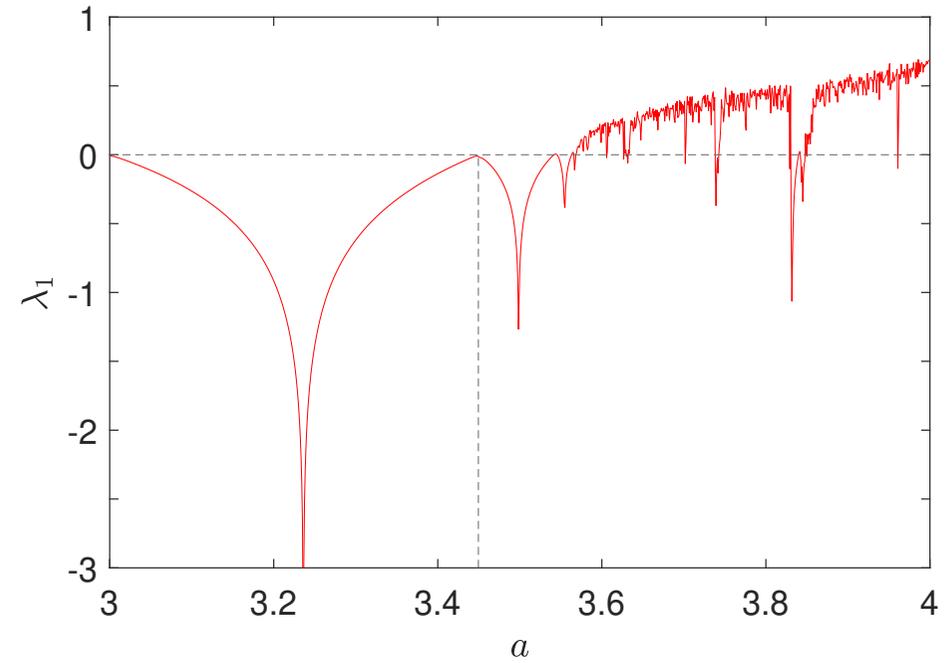
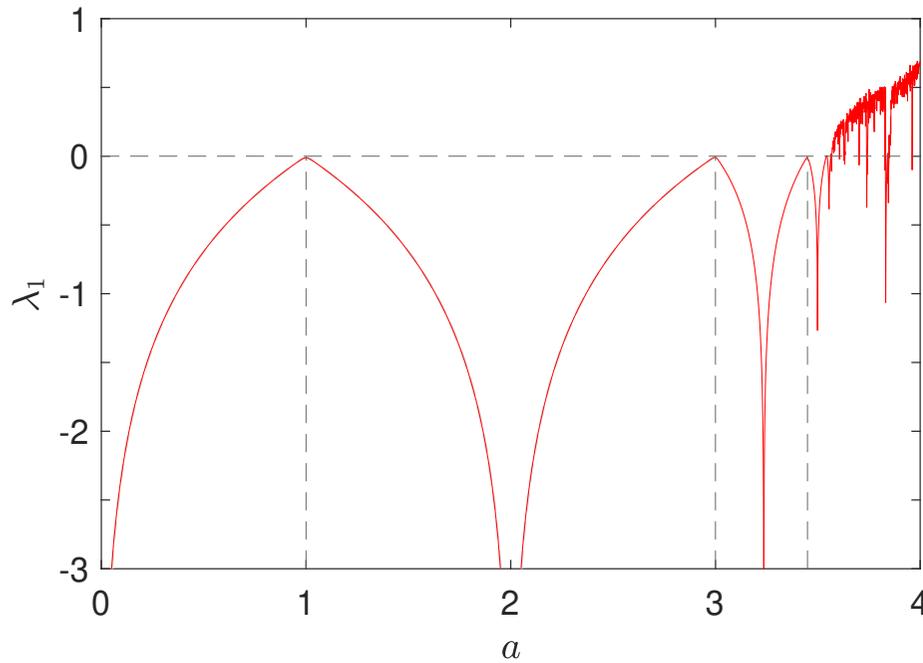


(1944-2019)

Constante découverte par Feigenbaum (1975), et résultat démontré ensuite par Lanford (1980)

● **Exposant de Lyapunov**

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |a(1 - 2x_k)| \quad (\text{voir page 132})$$



Les **bifurcations** correspondent à l'annulation de l'exposant de Lyapunov $\lambda_1 = 0$ et à la traversée du cercle unité en $s = f'(x^*) = -1$. Les **points superstables** correspondent à $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ soit $s = 0$ (point fixe avec décroissance très rapide de la perturbation)

Fractales de Newton

(dont Newton ignorait l'existence!)

● **Algorithme de Newton**

Newton (1669), Raphson (1690), Simpson & Cayley (1879)

Comment calculer la valeur numérique de $\sqrt{2}$?

Comme une solution de l'équation $f(z) = 0$ avec $f(z) = z^2 - 2$, par itérations successives en construisant une suite de nombres (z_n) à partir d'une valeur initiale z_0 choisie plus ou moins arbitrairement

$$z_{n+1} = f_{\mathcal{N}}(z_n) \quad f_{\mathcal{N}}(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (2)$$

$n = 0$	$z_0 = 3.7000000000000000$	
$n = 1$	$z_1 = 2.120270270270270$	
$n = 2$	$z_2 = 1.531773121113465$	
$n = 3$	$z_3 = 1.418724755858846$	
$n = 4$	$z_4 = 1.414220734612313$	
$n = 5$	$z_5 = 1.414213562391282$	$\rightarrow \sqrt{2} \simeq 1.414213562373095$

Convergence quadratique quand tout va bien!

● **Algorithme de Newton : convergence**

On peut montrer que z^* est un **point fixe superstable** de f_N

On a vu avec l'application logistique qu'un point fixe superstable correspond à avoir un exposant de Liapunov $\lambda_1 \rightarrow -\infty$. Il faut donc vérifier que $f'_N(z^*) = 0$

On a par calcul

$$f'_N(z) = \frac{df_N}{dz} = 1 - \frac{f'(z)}{f'(z)} + \frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)} = \frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)}$$

et on observe ainsi que $f'_N(z^*) = 0$ puisque $f(z^*) = 0$. C'est une des raisons du succès de l'algorithme de Newton.

● **Point superstable**

Pour une carte itérée, voir page 132, on examine l'évolution d'une petite perturbation ζ_0 à partir d'une condition initiale x_0 , $x_1 + \zeta_1 = f(x_0 + \zeta_0) \simeq x_1 + f'(x_0)\zeta_0$. On a ainsi de proche en proche,

$$|\zeta_n| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| |\zeta_0| \quad e^{\lambda_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|\zeta_n|}{|\zeta_0|} \right)^{1/n} \quad \lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

En prolongeant à l'ordre 2 le développement limité autour du point fixe x^*

$$x^* + \zeta_1 = f(x^* + \zeta_0) \simeq x^* + f'(x^*) \zeta_0 + \frac{1}{2} f''(x^*) \zeta_0^2 \quad \zeta_1 \simeq \frac{1}{2} |f''(x^*)| \zeta_0^2$$

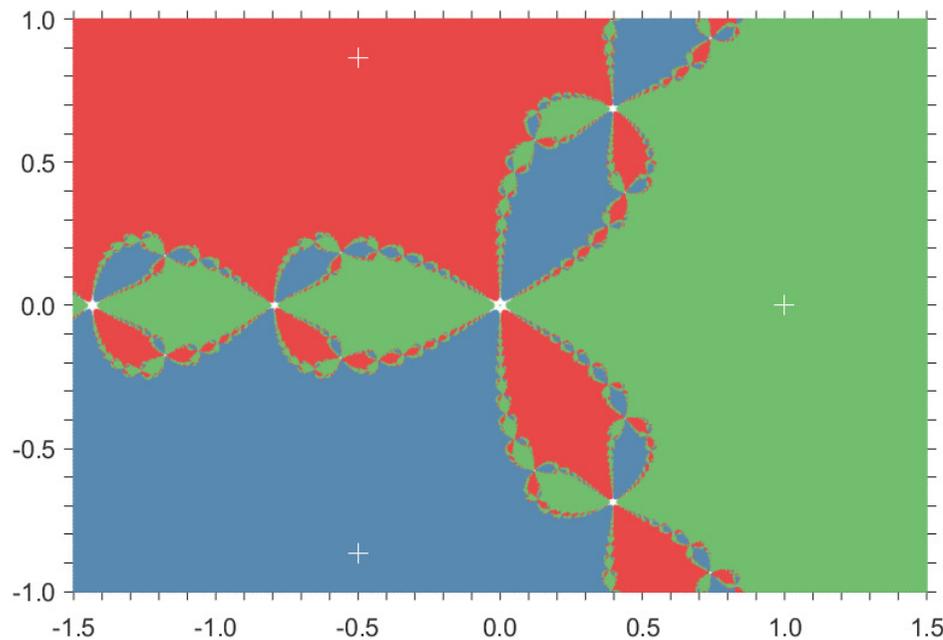
et de proche en proche

$$\zeta_{n+1} \simeq \frac{1}{2^n} |f''(x_1^*)|^n \zeta_0^{2^n}$$

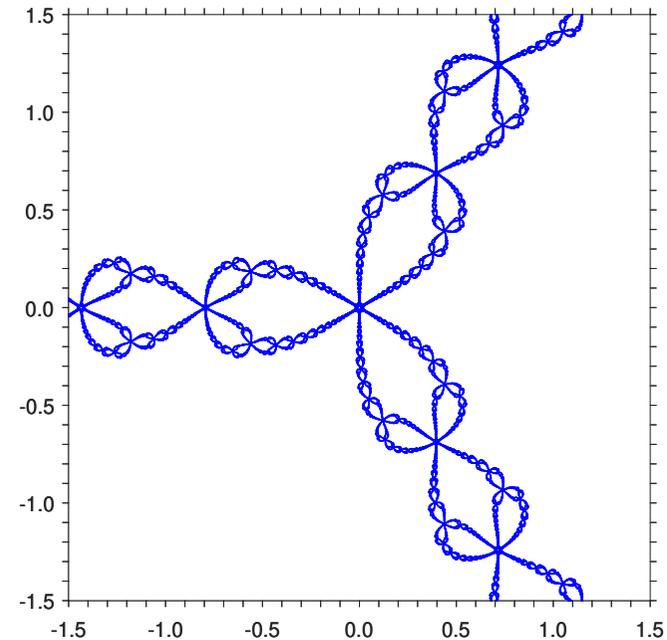
et par suite $\zeta_{n+1} \sim \zeta_0^{2^n}$, avec donc une décroissance très rapide de la perturbation ζ_n vers zéro, au lieu du $|\zeta_n| \sim e^{n\lambda_1} |\zeta_0|$ plus classiquement

● **Algorithme de Newton pour $z^3 - 1 = 0$**

avec comme condition initiale $z_1 = x + iy$, *i.e.* que l'on balaye chaque point du plan complexe et on examine la convergence de l'algorithme de Newton (2) avec cette condition initiale z_1



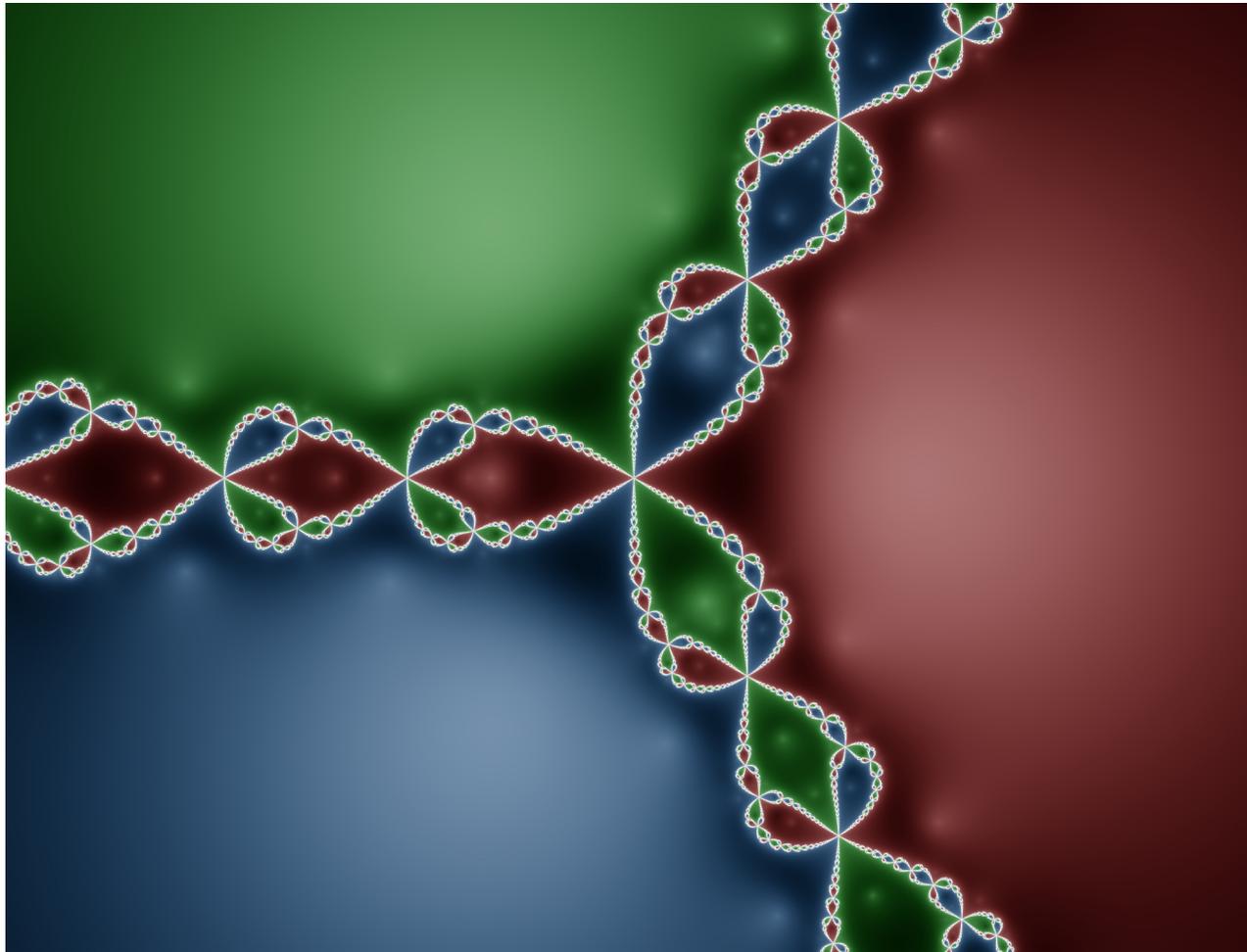
Bassin d'attraction (en couleur) pour les 3 racines +



La fractale de Newton est l'ensemble de Julia \mathcal{J} , les points qui ne convergent pas vers l'une des trois racines, sans pour autant diverger vers l'infini (frontière de l'ensemble de gauche)

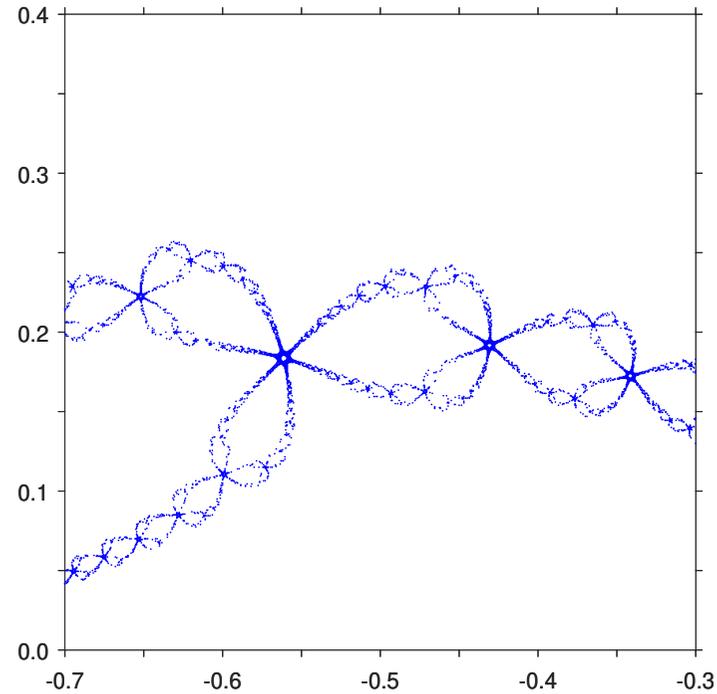
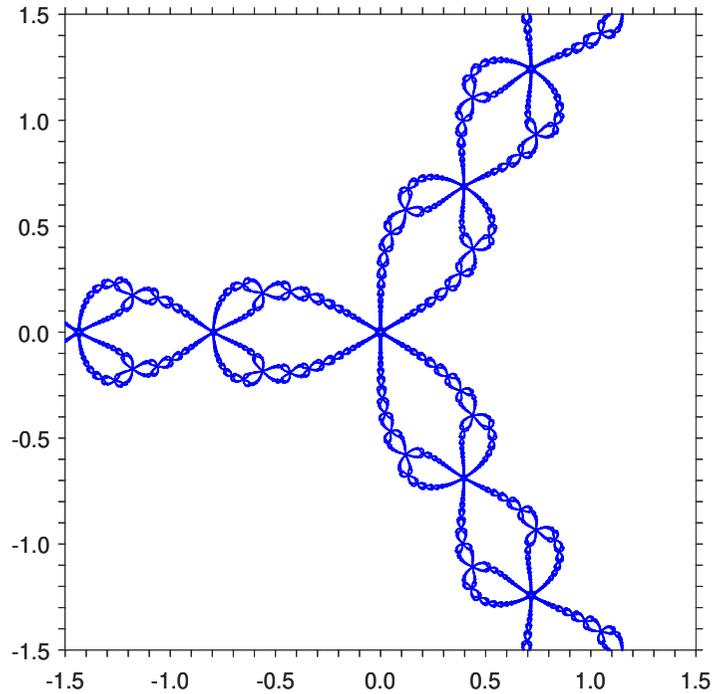
● **Algorithme de Newton pour $z^3 - 1 = 0$**

Vue plus artistique



● **Algorithme de Newton pour $z^3 - 1 = 0$**

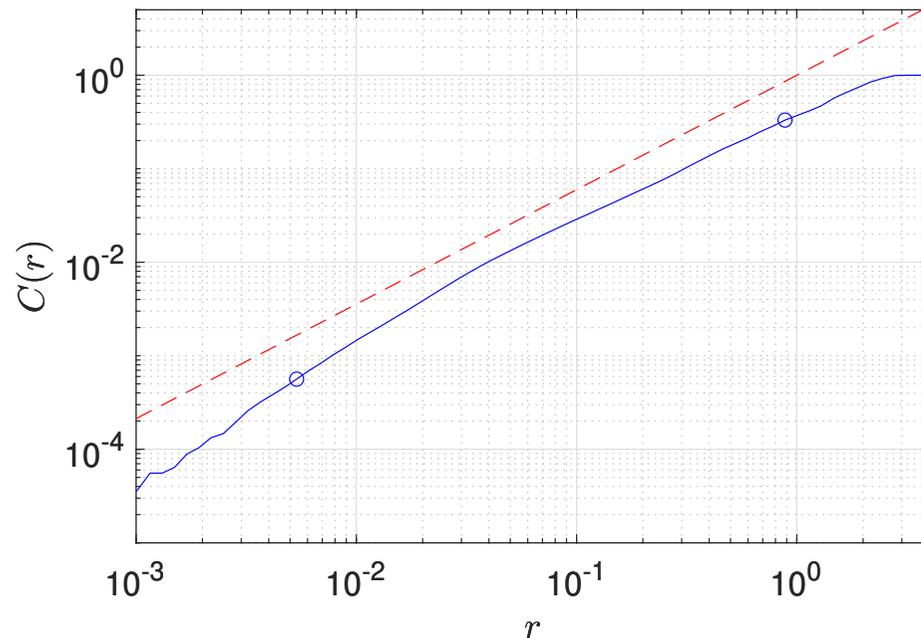
Mise en évidence qualitative de l'aspect autosimilaire de la fractale



● **Algorithme de Newton pour $z^3 - 1 = 0$**

Estimation de la dimension fractale

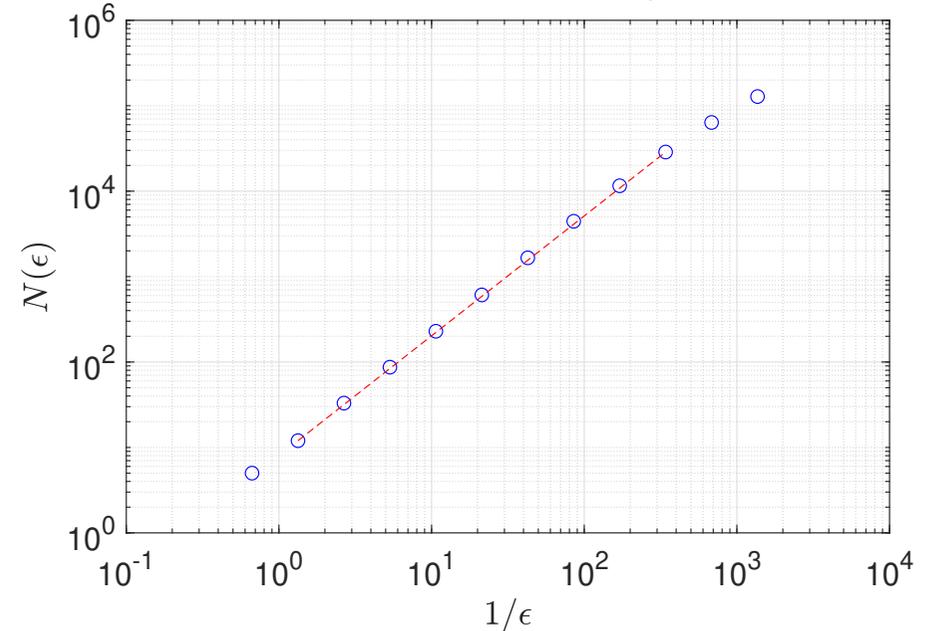
Dimension de corrélation D_2



Sur un carré $[-1.5, 1.5]^2$, avec une grille de 5001×5001 points, fractale décrite avec 192518 points (non homogène)

$D_2 \simeq 1.22$

Dimension de recouvrement D_0



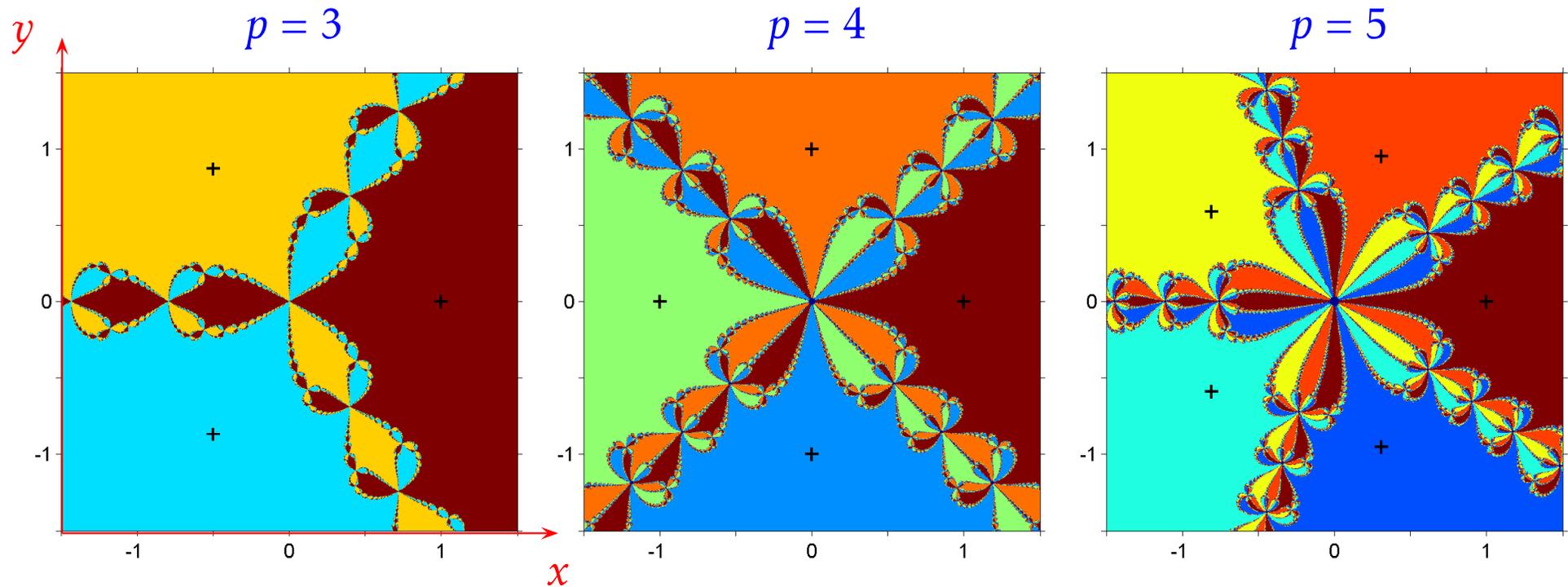
Sur un carré $[-1.5, 1.5]^2$, avec une grille de 6001×6001 points, fractale décrite avec 192518 points; taille domaine $L_0 = 3$, boîtes $L_0/2^k$ avec $k = 1, \dots, 12$

$D_0 \simeq 1.41$

● **Algorithme de Newton pour $z^p - 1 = 0$**

avec comme condition initiale $z_1 = x_1 + iy_1$, *i.e.* un point dans le plan (x, y)

Bassin d'attraction pour les p racines (en couleur) et ensemble de Julia (en noir)



De Newton à Poincaré

À propos de la stabilité du système solaire
et introduction au chaos hamiltonien



Andrei N. Kolmogorov
(1903–1987)

...

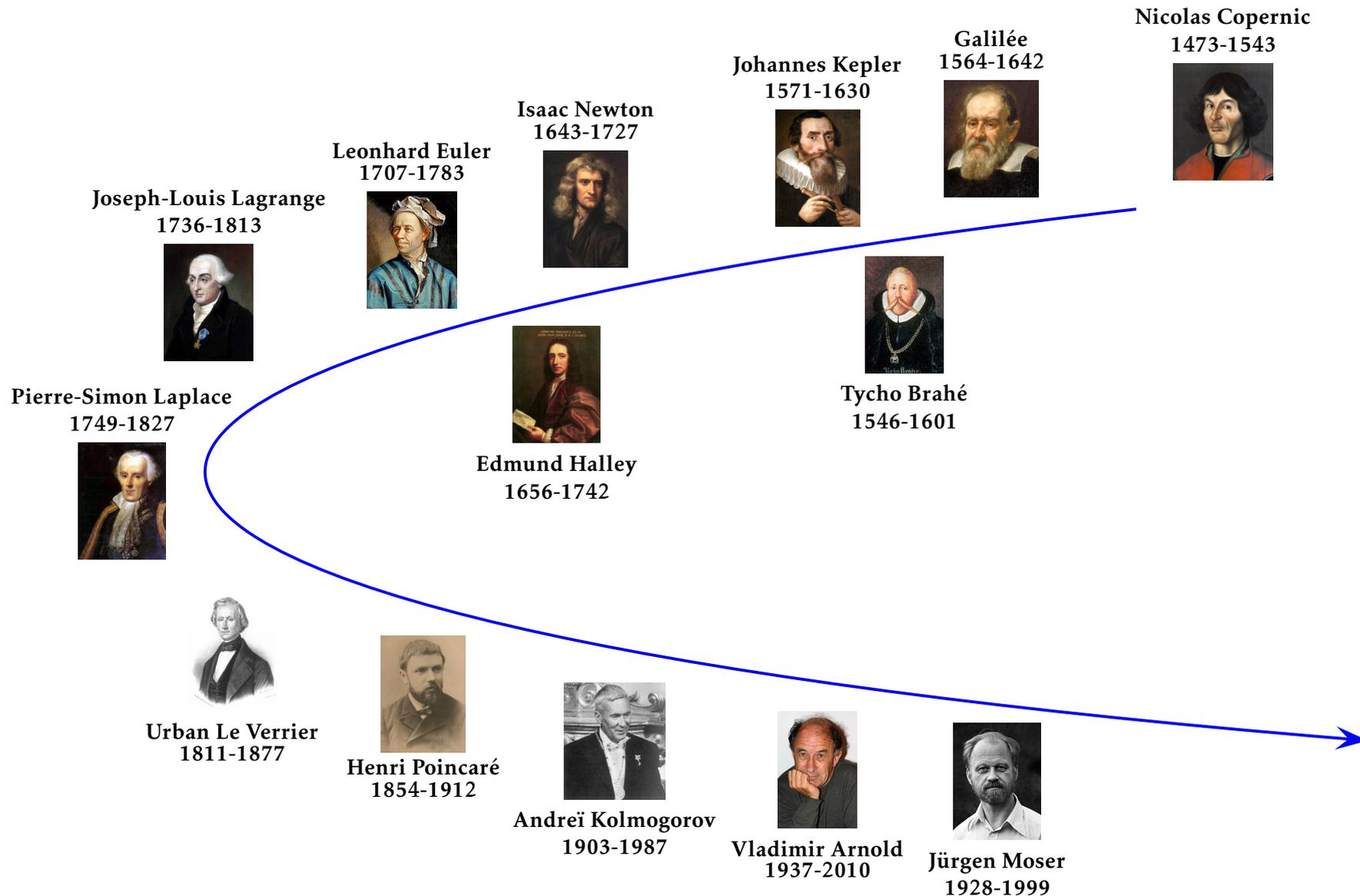
- C’est un sablier. Le sable met en tout huit heures pour descendre jusqu’à la base. Il faut le retourner trois fois pour faire une journée. Mais j’oublie souvent de le faire, et j’ai besoin de mon laquais pour me le rappeler, expliqua le roi Wen.
- Vous avez apparemment un long voyage à faire. Pourquoi vous encomber d’une machine aussi lourde?
- Mais comment ferions-nous pour savoir l’heure?
- Un petit cadran solaire serait autrement plus commode. Ou alors il suffit de regarder la position du soleil pour avoir une idée approximative de l’heure qu’il est.

Le roi et son laquais s’interrogèrent du regard, puis leurs visages se tournèrent simultanément vers Wang Miao, comme s’il était idiot :

- Le soleil? Comment le soleil pourrait-il nous donner l’heure? Nous sommes en pleine ère chaotique!

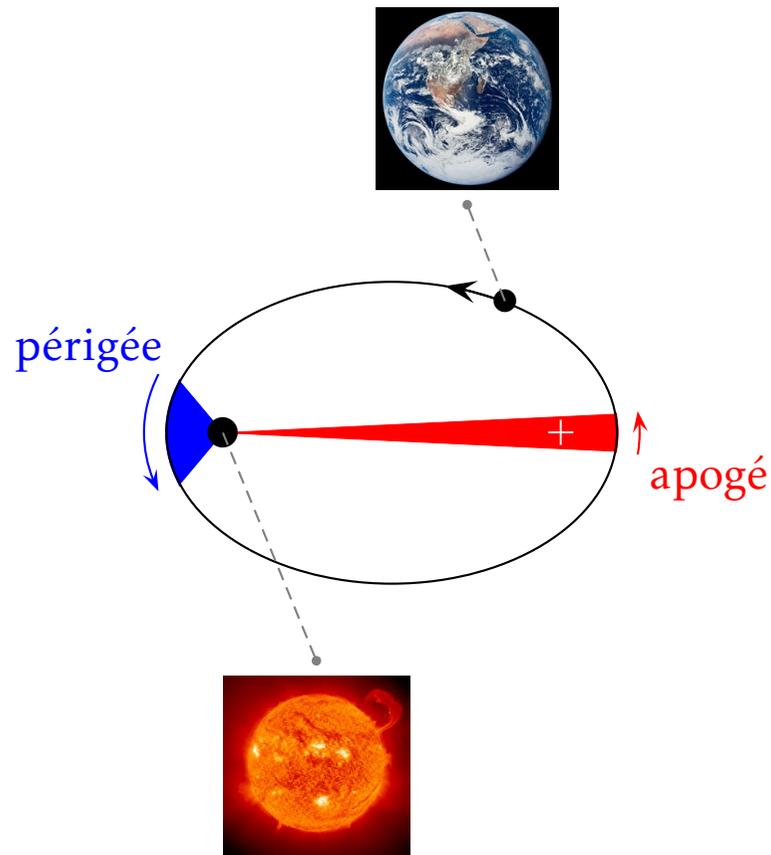
Le problème à trois corps, de Liu Cixin

- **Que peut-on prédire en s'appuyant sur les lois déterministes de la physique?**
Par exemple, qu'en est-il de la stabilité du système solaire ...



● **Johannes Kepler (1571-1630)**

Lois empiriques pour les trajectoires des planètes, basées sur les observations très précises pour l'époque de Tycho Brahé (1546-1601), astronome Danois



Les 3 lois (empiriques) de Kepler :

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers

Les aires sont balayées uniformément (variation de la vitesse le long de la trajectoire)

$$\text{période}^2 / \text{demi-grand axe}^3 = \text{cst}$$

- **Les lois de Kepler vues par Voltaire (1694-1778)**
(*Mélanges de philosophie, de morale et de politique*, tome 3)

Képler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit, au quatrième livre de son épitome, que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, *animus*, mais une âme végétante, agissante, *animam* : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes ; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ami est attiré, et le côté ennemi est repoussé ; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.

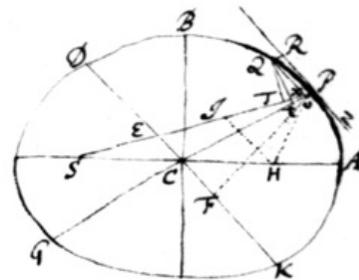
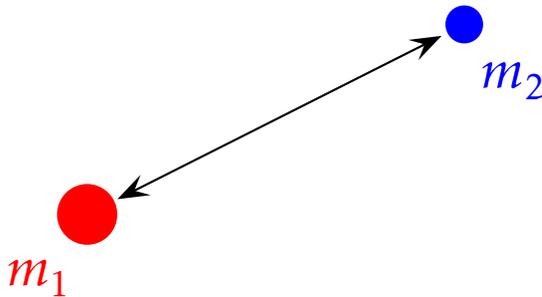
Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe ; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité ; il devina la rotation du soleil sur lui-même plus de quinze ans avant que les yeux de Galilée la reconnussent à l'aide des télescopes.

Képler ajoute dans son même épitome, page 495, que la masse du soleil, la masse de tout l'éther, et la masse des sphères des étoiles fixes, sont parfaitement égales ; et que ce sont les trois symboles de la très-sainte Trinité.

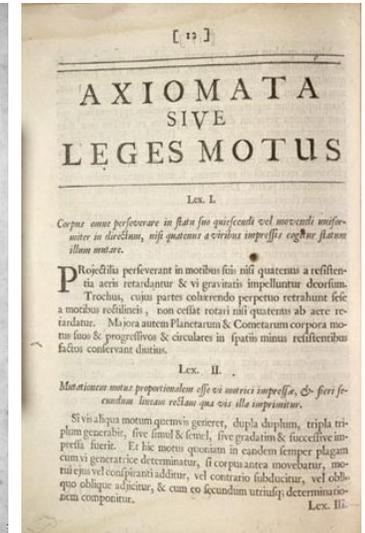
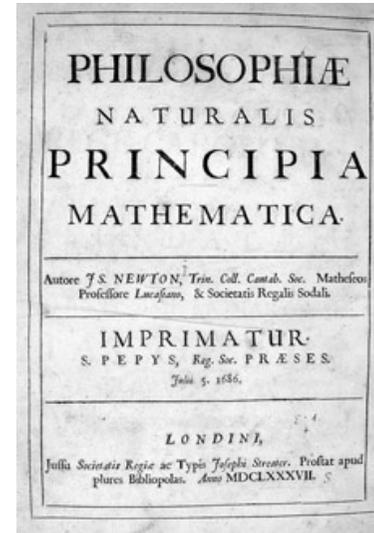
● Isaac Newton (1643-1727)

Loi universelle de la gravitation (1687, Livre III)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad G = \text{cst}$$



(Newton, 1684)



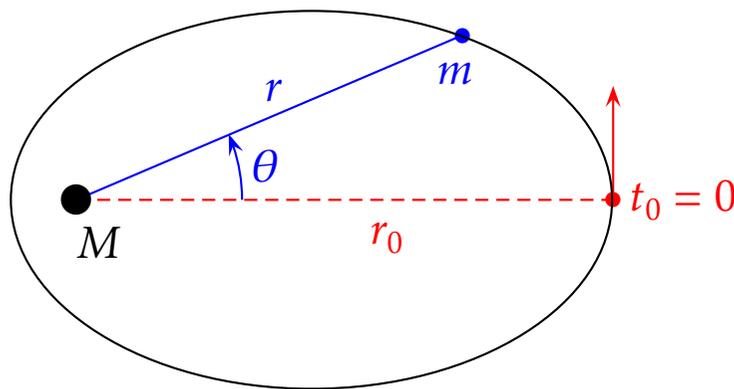
« Principia Mathematica » (1687)
traduit en français par la
marquise du Châtelet (1756)

Cette loi permet d'avoir une vue unifiée des travaux de Galilée sur la chute des corps et des lois empiriques de Kepler en mécanique celeste : le monde est gouverné par quelques lois, s'énonçant simplement, de la mécanique.

« Si j'ai vu plus loin, c'est en montant sur les épaules de géants »

● Isaac Newton énonce également le principe fondamental de la dynamique.

C'est le développement du calcul différentiel, essayé en parallèle par Gottfried Leibniz (1646-1716), qui permet ensuite à Leonhard Euler (1707-1783) de proposer sa formulation actuelle, $ma = F_{\text{ext}}$ (en repère galiléen!)



Particule de masse m soumise à une force centrale créée par une masse M au repos, Euler (1749)

Cela posé, prenant l'élément du temps dt pour constant, le changement instantané du mouvement du Corps fera exprimé par ces trois équations :

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}; \text{ II. } \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \text{ III. } \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

d'où l'on pourra tirer pour chaque temps écoulé t les valeurs x, y, z , & par conséquent l'endroit où le Corps se trouvera. C. Q. F. T.

Otons l'une de ces équations de l'autre, & nous aurons :

$$(2drd\phi + rdd\phi)(\text{tang}\phi + \text{cot}\phi) = 0$$

$$\text{ou bien } 2drd\phi + rdd\phi = 0$$

Multiplions la première par $\text{cot}\phi$ & la seconde par $\text{tang}\phi$, & nous aurons en les ajoutant ensemble :

$$(ddr - rd\phi^2)(\text{cot}\phi + \text{tang}\phi) = -\frac{1}{2}Vdt^2(\text{cot}\phi + \text{tang}\phi)$$

$$\text{ou bien } ddr - rd\phi^2 = -\frac{1}{2}Vdt^2.$$

De sorte que n'ayant plus dans le calcul, ni le sinus, ni le cosinus de l'angle ϕ , le mouvement du Corps proposé fera exprimé par les deux équations suivantes :

$$\text{I. } 2drd\phi + rdd\phi = 0$$

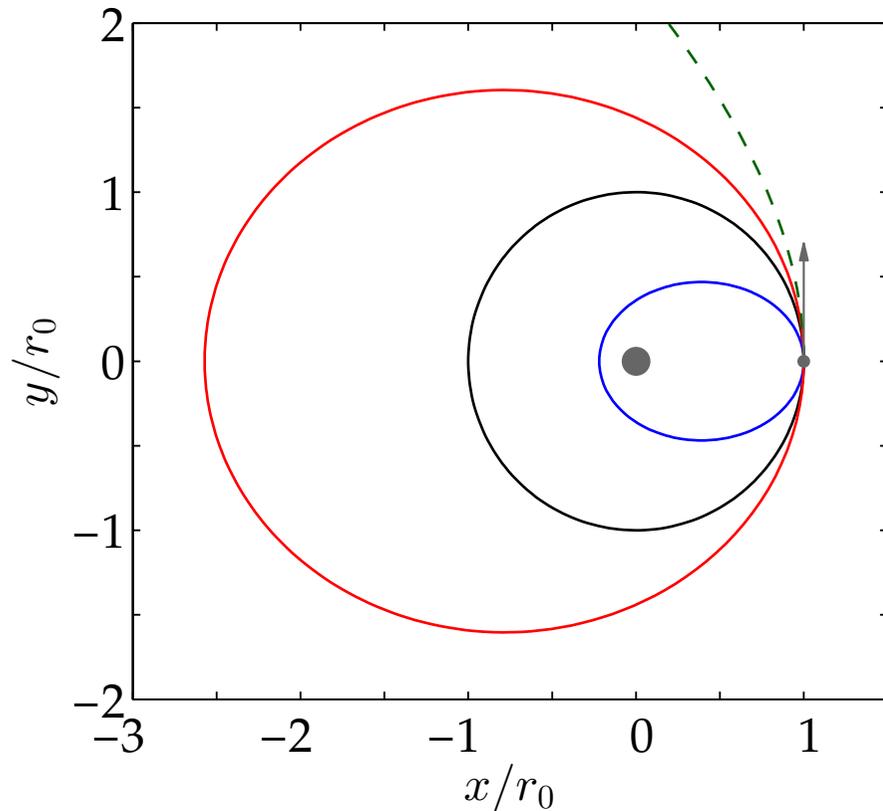
$$\text{II. } ddr - rd\phi^2 = -\frac{1}{2}Vdt^2.$$

dont la première étant multipliée par r aura d'abord pour intégrale.

$$rrd\phi = A dt$$

● **Premières prédictions de trajectoire des planètes**

Le problème à deux corps

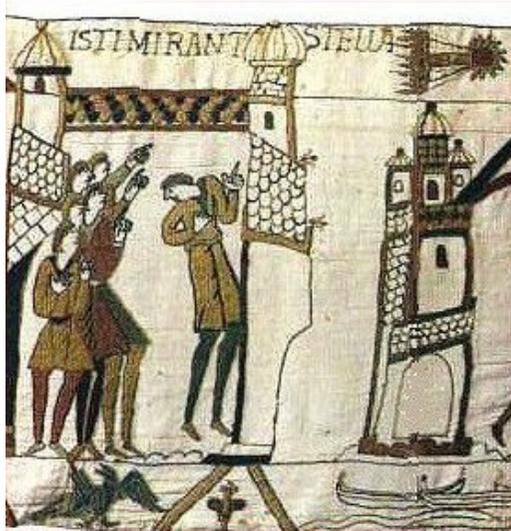


Trajectoires ouvertes ou fermées (coniques)

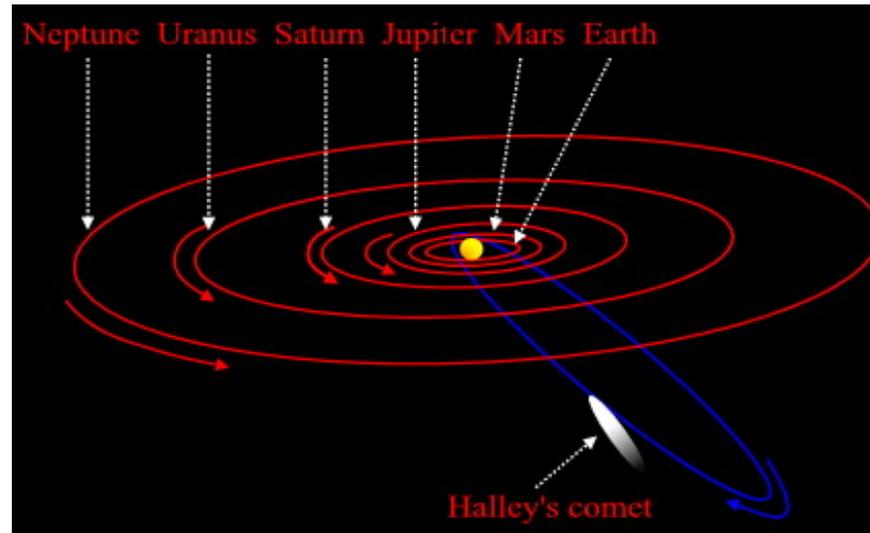
Vitesse de libération (à la surface) de la Terre, $v_c = 11.2 \text{ km.s}^{-1}$

Le problème à deux corps est intégrable (on démontre ainsi les lois de Kepler par exemple) et **stable** : mouvement képlérien

● Comète de Edmund Halley (1656-1742)



Tapissérie de Bayeux (1066)



« Si le retour prévu par nous pour l'année 1758 se réalise, l'impartiale postérité ne se refusera pas à reconnaître que ce fut un Anglais qui l'annonça pour la première fois »

- **Peut-on prédire l'évolution du système solaire dans son ensemble?**

Il faut prendre en compte l'interaction entre les planètes et avec le soleil, tenir compte de la présence de satellites naturels, d'astéroïdes, de l'aplatissement des planètes, des erreurs estimations de la position ou de la masse des planètes, ...

Les travaux de [Lagrange & Laplace](#) prédisent la stabilité du système (c'est-à-dire de pouvoir calculer des trajectoires sur des « temps longs » sans incident : variations bornées et quasi-périodiques des paramètres des trajectoires, pas d'intersection, stabilité perpétuelle) en s'appuyant sur des méthodes perturbatives

Ces calculs seront par la suite remis en cause par [Le Verrier](#) (1840, 1841)

● **Pierre-Simon Laplace (1749-1827)**

« Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

Essai philosophique sur les probabilités (1796)



ESSAI PHILOSOPHIQUE
SUR
LES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences, Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Göttingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, d'Italie, etc.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

M^{me} V^o COURCIER, Impr.-Libr. pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n^o 57.

1816.

déterminisme laplacien

● **Pierre-Simon Laplace (1749-1827)**

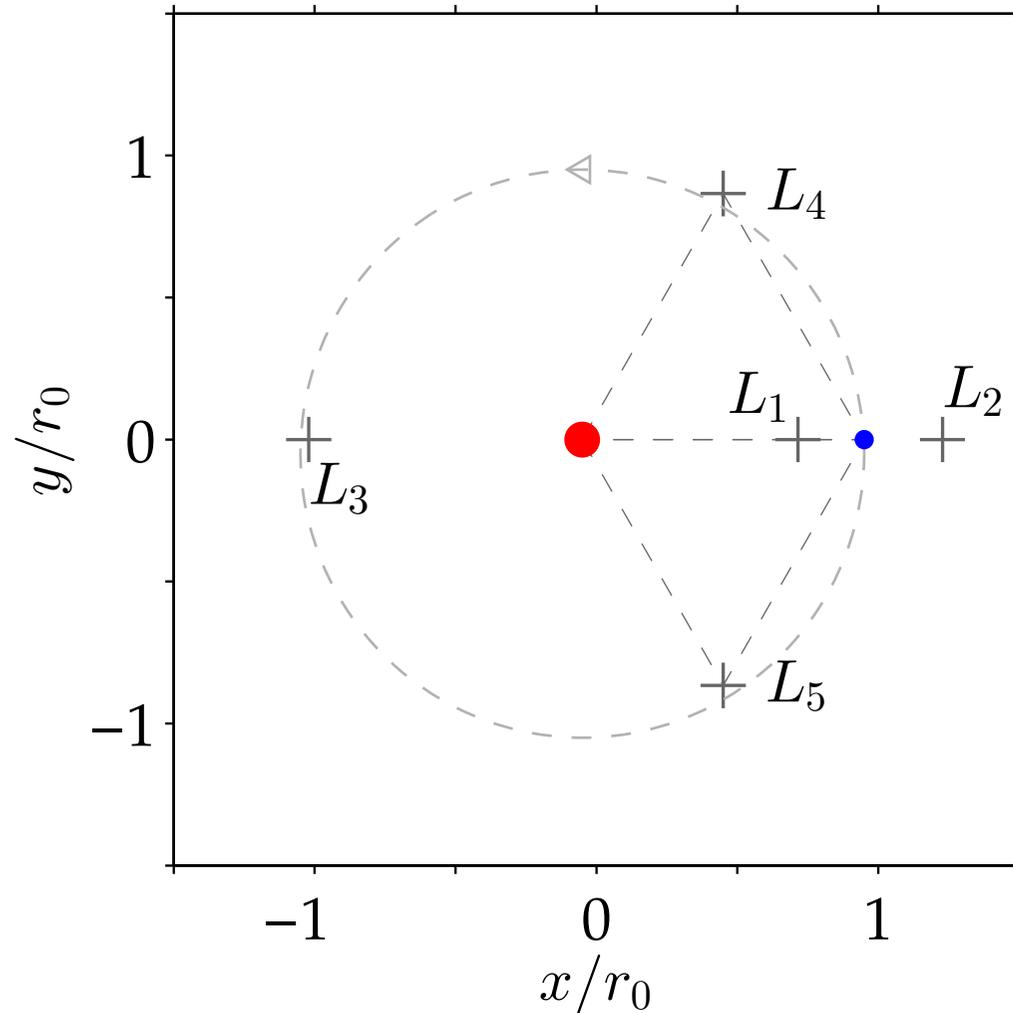
Laplace a été nommé Ministre de l'intérieur par Napoléon en 1799, mais l'expérience ne dura que 6 semaines !

— « A l'intérieur, le ministre Quinette fut remplacé par Laplace, géomètre du premier rang; mais qui ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail, les Consuls s'aperçurent qu'ils s'étaient trompés : Laplace ne saisissait aucune question sous son vrai point de vue. Il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques, et portait enfin l'esprit des infiniment petits dans l'administration. » (*Gourgaud*, t. I, p. 3.)

(*Biographie des contemporains*, par Napoléon)

● **Points de Lagrange (1772)**

Les effets de la gravité se compensent en ces 5 points L_i (points fixes du système)



● Soleil - ● planète

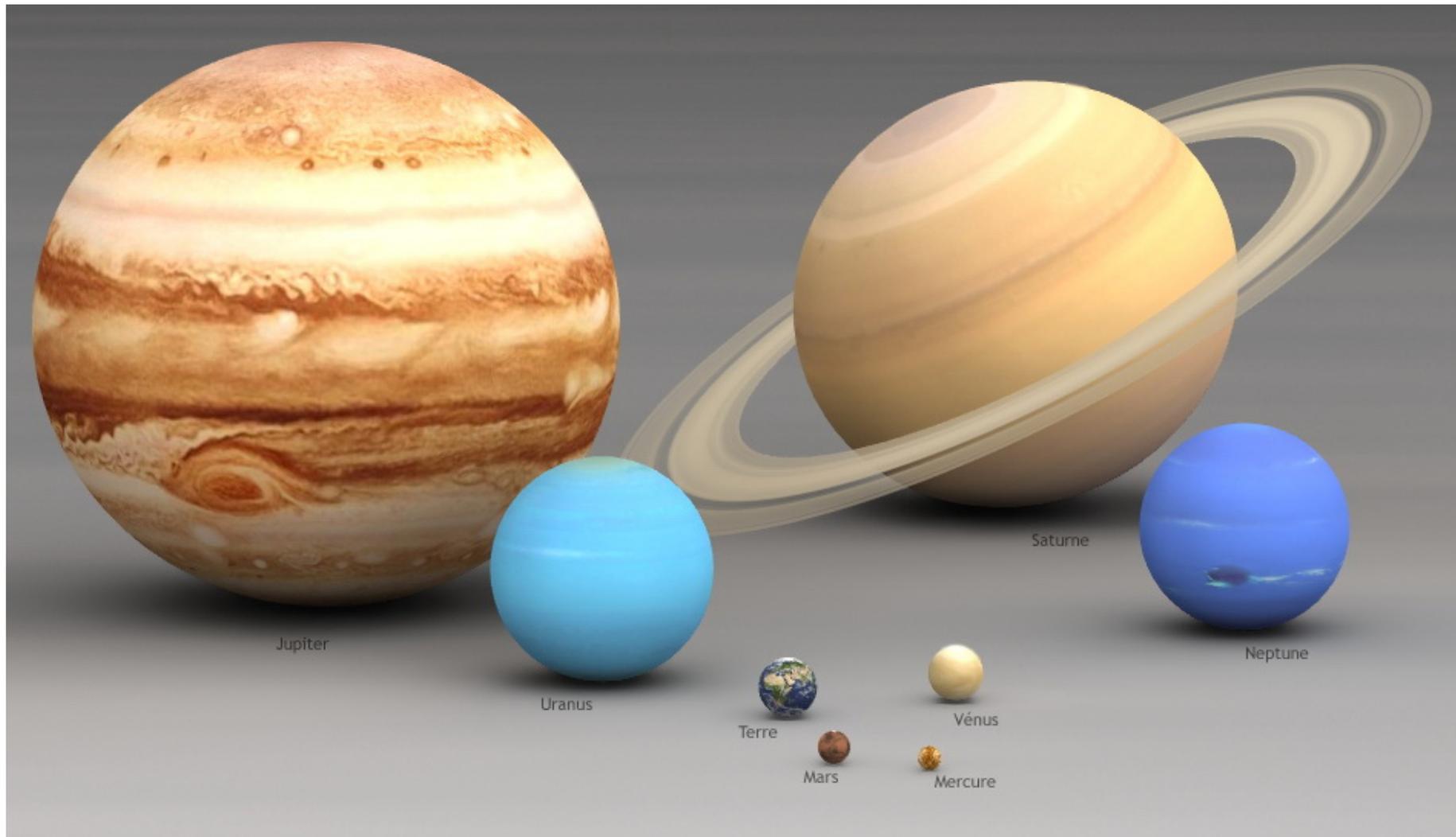
Les trois premiers sont des positions instables (L_1, L_2 et L_3),

et les deux derniers sont stables pour $\mu \leq \mu_c = (1 - \sqrt{1 - 4/27})/2$

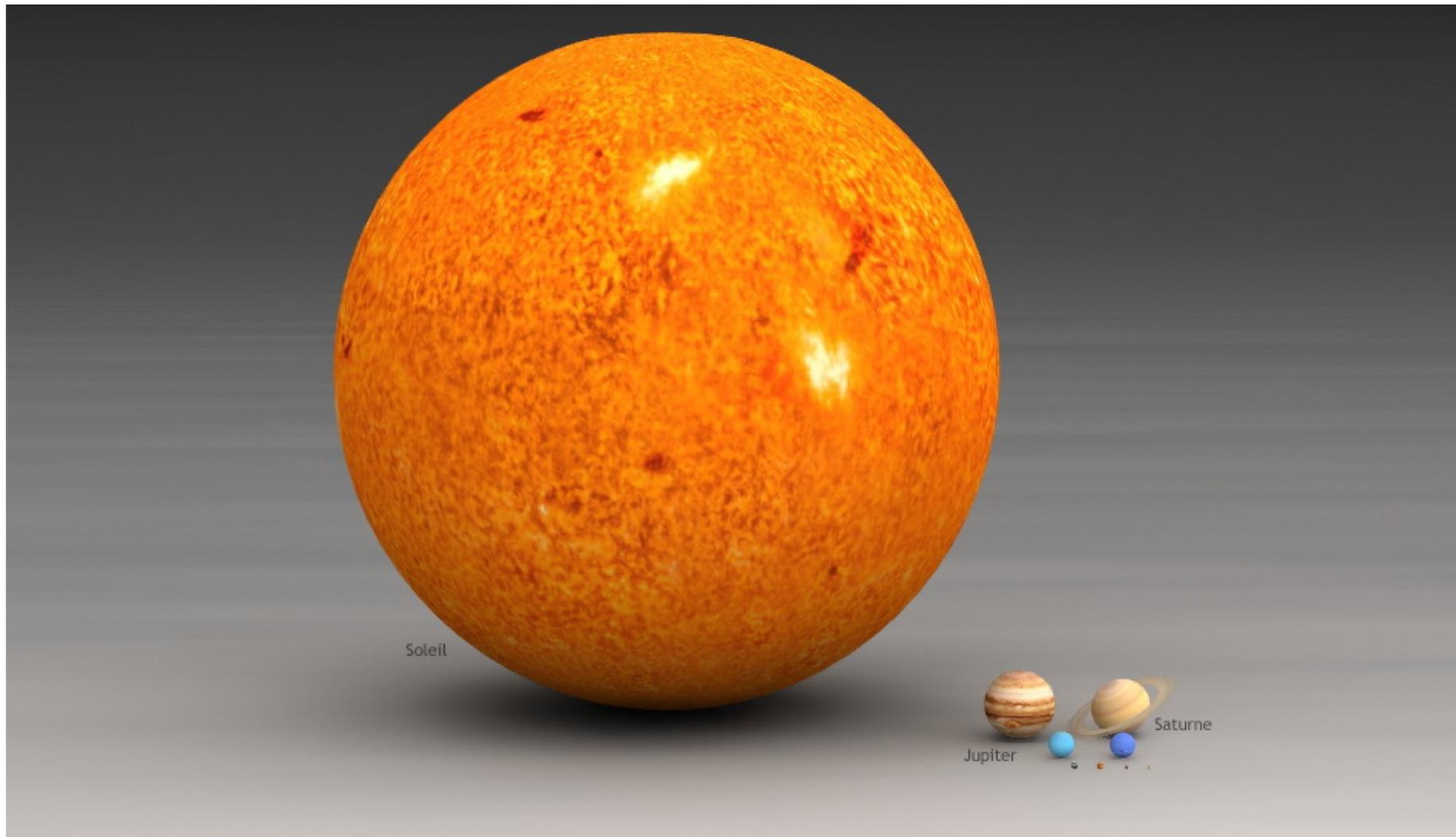
$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Pour le système ● Soleil - ● Jupiter par exemple, $\mu < \mu_c$, L_4 et L_5 sont donc des positions stables

● Taille des planètes du système solaire ...



- Taille des planètes du système solaire ... et du soleil!



● **Points de Lagrange (1772)**

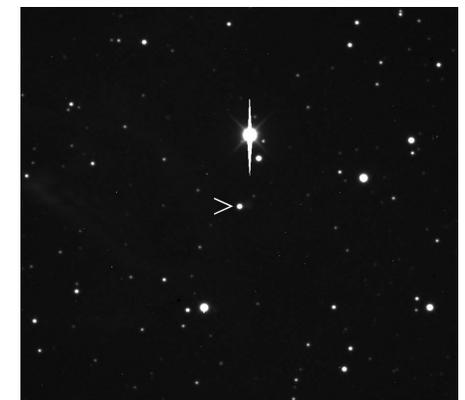
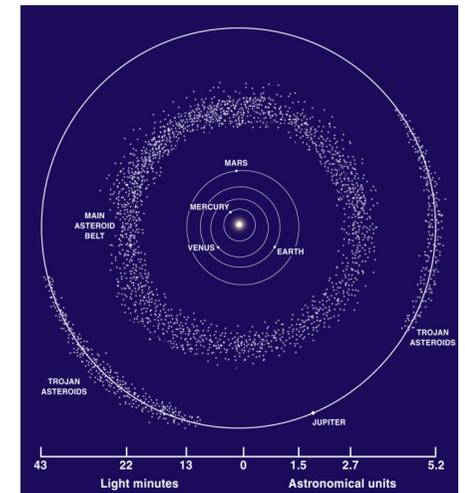
Dans le système Soleil - Jupiter, les points L_4 et L_5 sont stables et abritent les **astéroïdes troyens**

Premier corps observé en 1906 par Max Wolf (observatoire d'Heidelberg) : *Achille*, ~ 100 km, au voisinage de L_4 ; le plus gros connu actuellement : *Hector*, 370 km × 195 km

Environ 2000 astéroïdes troyens recensés (sur probablement plus d'un million de corps de plus de 1 km), majoritairement au voisinage de L_4 .

Les astéroïdes sont nommés selon leur position sur l'orbite commune avec Jupiter : s'ils la précèdent (point L_4), leur nom est choisi parmi les héros grecs de l'Iliade et ils font partie du groupe des « Grecs ». S'ils la suivent (point L_5), ils portent celui d'un héros troyen proprement dit.

Il y a d'autres troyens dans le système solaire



(Kevin Heider, wikipedia)

● **Points de Lagrange**

Importance des points de Lagrange pour les satellites

Gaia, le portulan céleste

Le 19 décembre, une fusée Soyouz doit s'envoler depuis Kourou (Guyane) avec, à son bord, le satellite Gaia, réalisé par Astrium pour l'Agence spatiale européenne (ESA). Objectif de ce « microscope galactique » : cartographier en 3D un milliard d'étoiles de la Voie lactée pour produire l'image la plus détaillée de notre galaxie. Une fois en orbite, l'engin ira se placer sur le point L2 de Lagrange, situé à 1,5 million de kilomètres de notre planète. De ce « promontoire », il utilisera la parallaxe, une technique géométrique qui consiste à viser une étoile deux fois, à six mois d'intervalle, afin d'obtenir une mesure d'angle. A partir de celle-ci, les astronomes calculent la distance entre la Terre et l'étoile et en déduisent ses caractéristiques (âge, masse, température, luminosité). Côté français, le Centre national d'études spatiales (Cnes) est chargé de la majeure partie du traitement des données, ce qui l'amènera à mobiliser une puissance de calcul de 60 000 milliards d'opérations par seconde (6 téraflops). Un véritable défi technologique autant qu'une course contre la montre : « Dans moins de deux ans, on disposera d'un catalogue complet du ciel, » s'enthousiasme François Mignard, de l'observatoire de la Côte d'Azur (Nice). ●

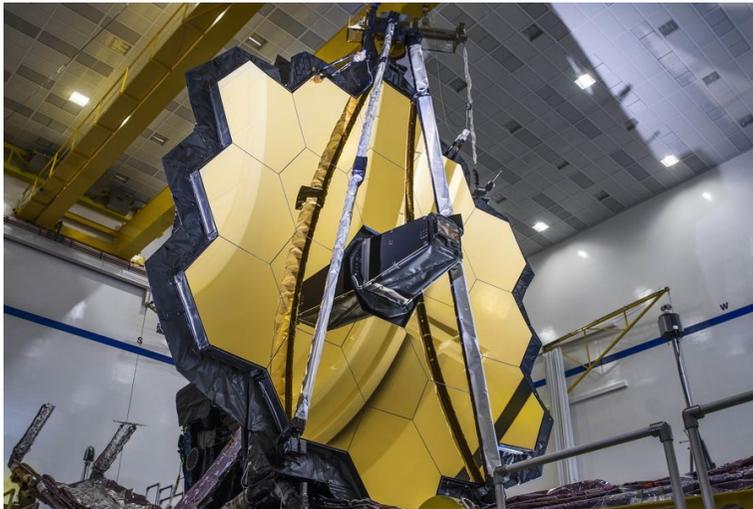


Satellite GAIA (ESA) repositionné (trajectoire corrigée) tous les dix jours environ

L'Express - 18 déc. 2013

● Points de Lagrange

Télescope spatial James Webb (*Le Monde*, janvier 2022)



Presque un mois après son lancement, le télescope spatial James-Webb a atteint son orbite finale, à 1,5 million de kilomètres de la Terre, depuis laquelle il pourra notamment permettre d'observer les premières galaxies de l'Univers, a confirmé la NASA lundi 24 janvier.

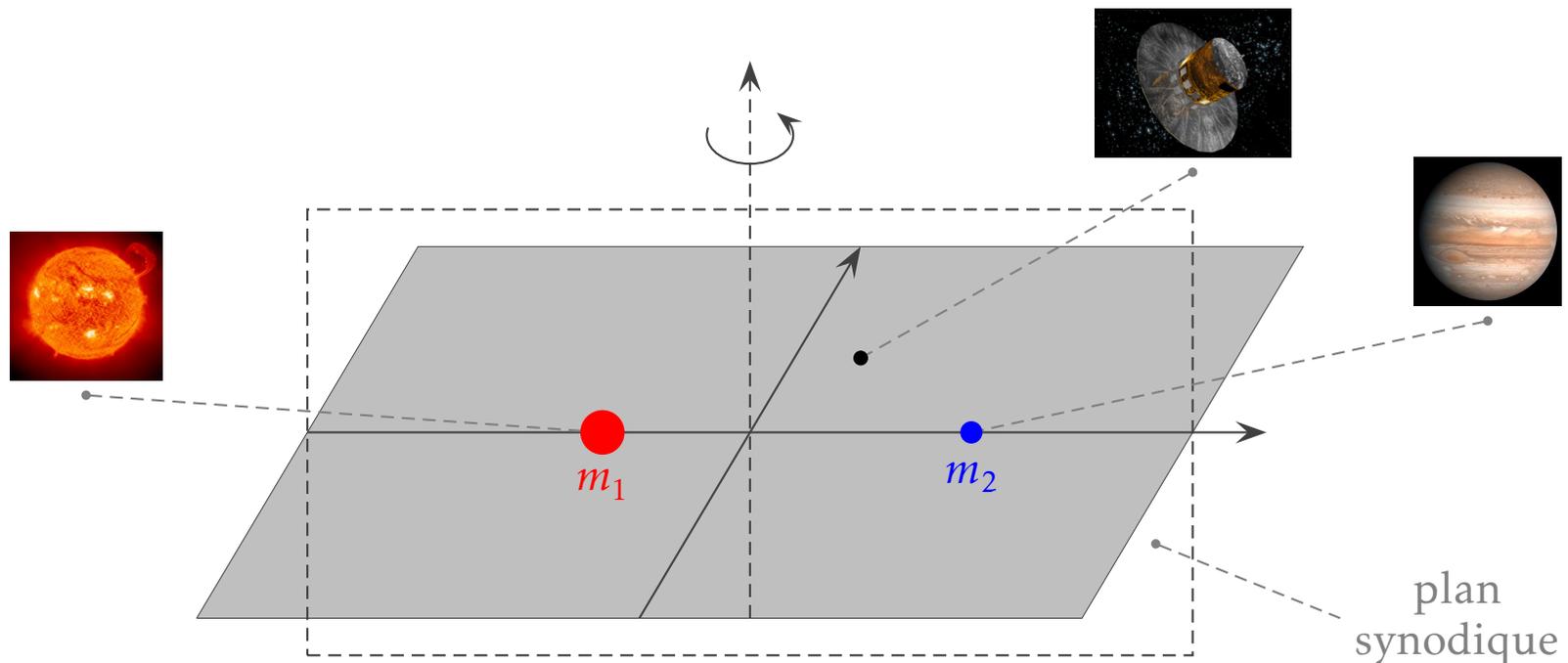
Il a activé ses propulseurs à environ 20 heures afin d'atteindre le point de Lagrange 2 ou « L2 », idéal pour observer le cosmos. « *Bienvenue à la maison, Webb !*, s'est exclamé le patron de l'agence spatiale américaine, Bill Nelson, dans un communiqué. *Nous avons fait un pas de plus vers la mise au jour des mystères de l'Univers. Et j'ai hâte de voir les premières nouvelles images de l'Univers par Webb cet été !* »

A cette orbite minutieusement choisie, la Terre, le Soleil et la Lune se trouveront tous de l'autre côté de son pare-soleil, ce qui lui assurera d'opérer dans l'obscurité et dans un très grand froid, indispensables à l'étude des premiers rayonnements cosmiques par ses capteurs infrarouges.

● **Problème des trois corps restreints**

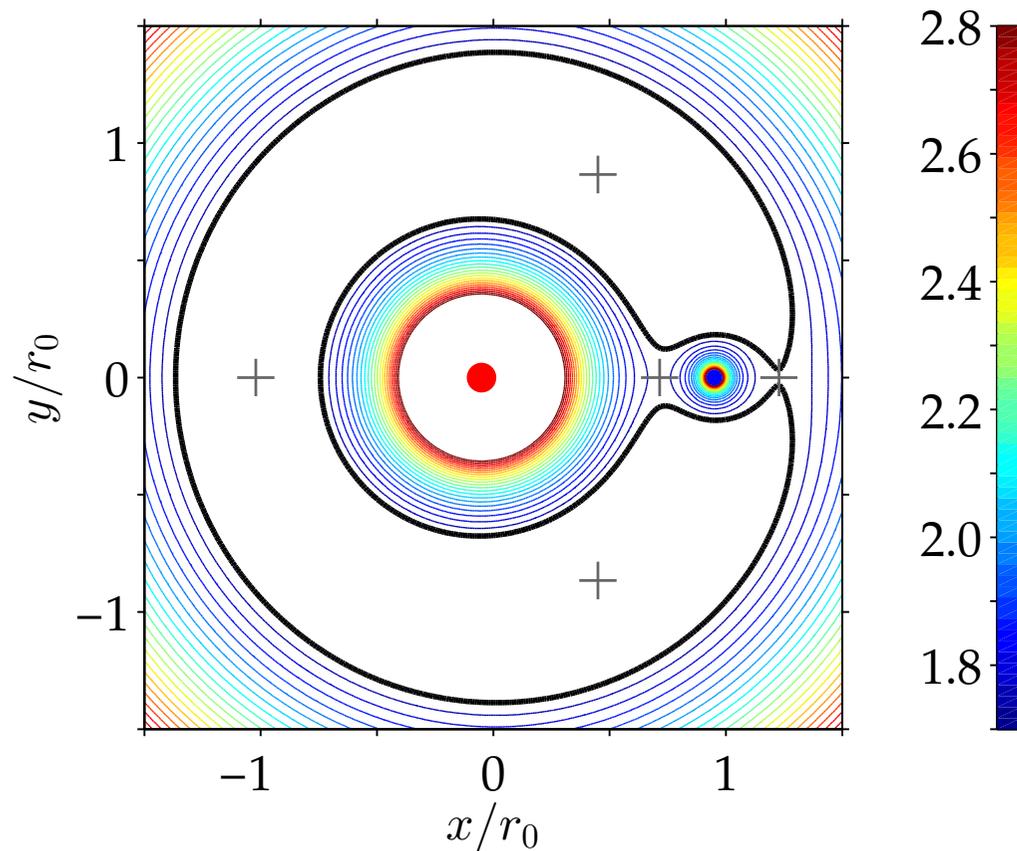
Extension du problème à deux corps dans le cas le plus simple possible, mais qui va quand même s'avérer extraordinairement complexe !

On considère deux corps de masse m_1 et m_2 suivant une trajectoire circulaire (cas particulier du problème à deux corps avec le Soleil et Jupiter par exemple), et on cherche à déterminer le mouvement d'un troisième corps de masse quasi-nulle, un petit satellite par exemple (Carl Gustav Jacobi, 1836)



● **Problème des trois corps restreints**

George W. Hill (1878)



Intégrale première du système (cf. seconde partie sur chaos hamiltonien), qui permet de définir la courbe de Hill (courbe noire), et la région interdite (en blanc) pour la trajectoire du troisième petit corps : problème à trois degrés de liberté

C'est aussi la naissance d'une nouvelle stratégie : on ne cherche plus nécessairement à déterminer explicitement la trajectoire (trop complexe) pour étudier le comportement du système

$\mu = 0.05$ + points de Lagrange

- **Henri Poincaré (1854-1912)**

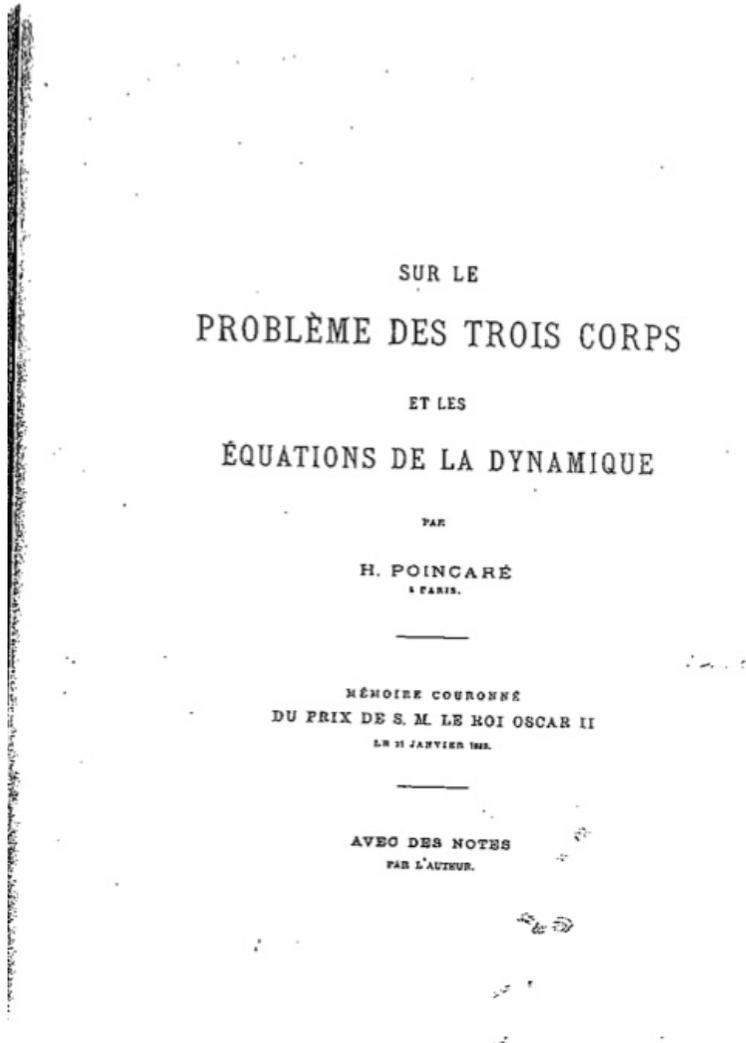
Un des plus grands mathématiciens, élu à l'Académie des Sciences en 1887 et à l'Académie Française en 1908 (à ne pas confondre avec Raymond Poincaré, président de la république de 1913 à 1920!)

1885 – lancement d'un concours de mathématique pour le 60e anniversaire d'Oscar II de Suède et de Norvège, organisé par Gösta Mittag-Leffler (avec aussi Charles Hermite et Karl Weierstrass pour le jury)

Poincaré est lauréat le 21 janvier 1889 avec son manuscrit « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » de 160 pages qui doit être publié dans *Acta Mathematica*

Poincaré démontre le **théorème de récurrence** (presque toute trajectoire repasse une infinité de fois arbitrairement près de sa position initiale), beaucoup d'autres résultats et pense aussi démontrer la **stabilité des trajectoires** suivies par le petit corps à partir des trajectoires périodiques

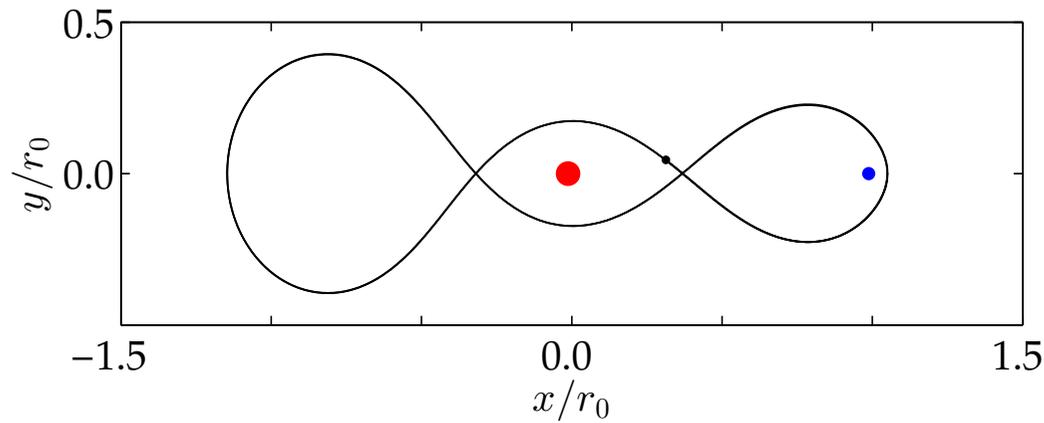
● Henri Poincaré (1854-1912)



Mais une erreur est découverte dans le manuscrit par Lars Phragmen (relecteur) ... et dans la version révisée, Poincaré démontre le contraire sur la stabilité! Ce manuscrit de 270 pages sera finalement publié en 1890 (Poincaré perdra de l'argent avec ce prix à cause des frais d'impression déjà engagés)

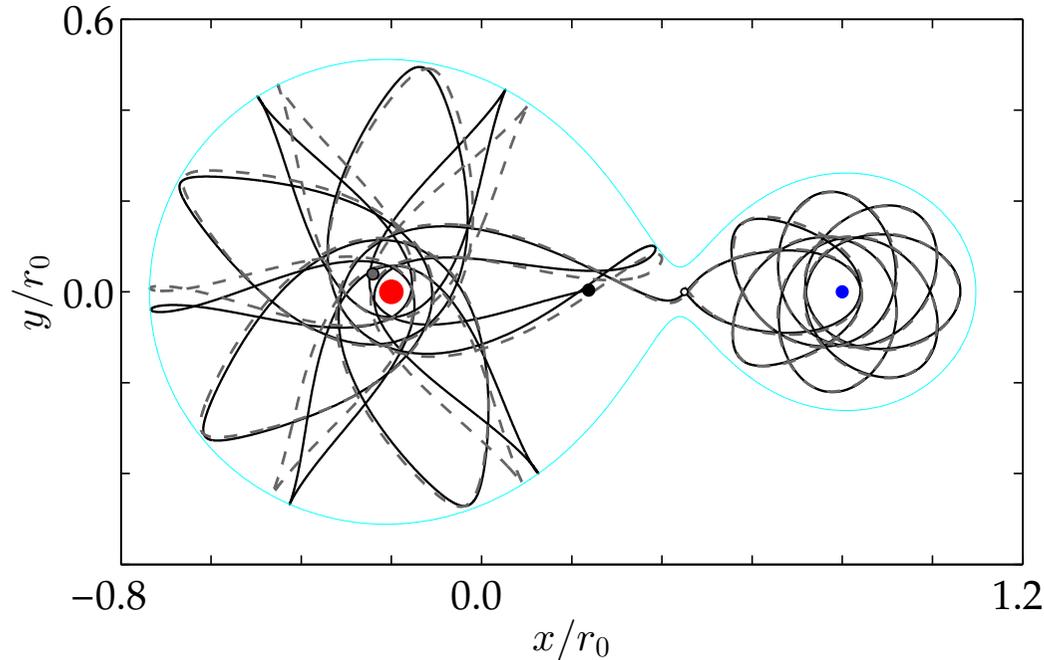
Ce travail a eu une influence considérable, en particulier pour l'étude des **systemes dynamiques chaotiques** et la **sensibilité aux conditions initiales**

● **Problème des trois corps restreints**



Un exemple de trajectoire périodique
du troisième corps ● (Arenstorf, 1963)

$$\mu = 1/82, E = -1.3231$$

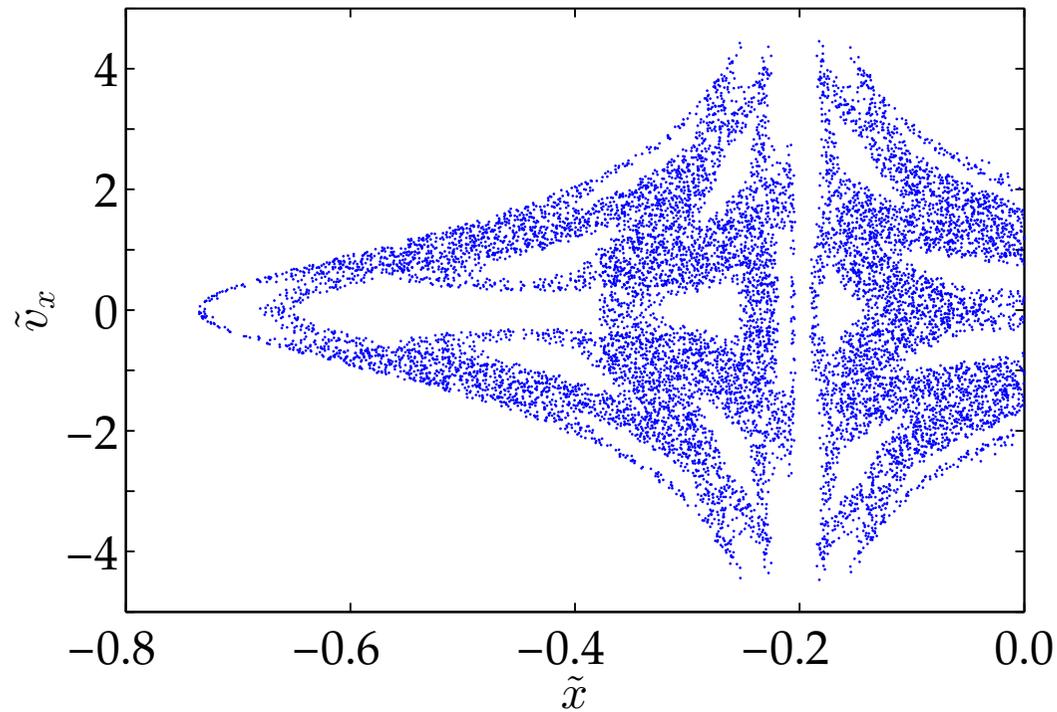


Un exemple de trajectoire chaotique

$$\mu = 0.2, E = -1.9734 \text{ ———}$$

$$E = -1.9731 \text{ - - - -}$$

● **Problème des trois corps restreints**



$$\mu = 0.2$$

section de Poincaré $y = 0, x < 0$

● Sensibilité aux conditions initiales

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la Nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur.

... mais il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible. »

H. Poincaré, Science et méthode (1908)

● Théorème de récurrence de Poincaré

Pour un flot conservatif (préservation du volume dans l'espace des phases, cf. **théorème de Liouville**) dont les trajectoires restent bornées dans l'espace, alors pour presque toute condition initiale du système, la trajectoire repassera arbitrairement près de cette condition au cours du temps une infinité de fois.

L'expression presque toute condition initiale signifie l'ensemble des positions initiales des trajectoires qui ne vérifient pas cette propriété de récurrence est de volume nul. Autrement dit, si on choisit au hasard un point dans l'espace des phases, il y a une probabilité nulle pour que la trajectoire passant par ce point ne vérifie pas le théorème de récurrence.

Extention de la notion de stabilité, voir le **chapitre sur la stabilité**

● Introduction

Le chaos hamiltonien est associé aux systèmes conservatifs, que l'on rencontre entre autres dans les trois grands domaines suivants :

- mécanique céleste
- mélange chaotique (cf. exercice sur les *Blinking vortices*)
- physique des particules

“Hamiltonian mechanics is geometry in phase space”
V.I. Arnold (1978)

● **Hamiltonien**

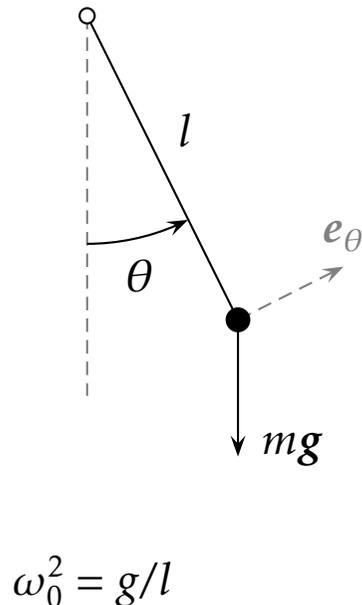
Un système hamiltonien est un système conservatif, dont les équations peuvent se mettre sous la forme suivante,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

où les deux variables canoniques \mathbf{q} et \mathbf{p} sont la **position** et la **quantité de mouvement** en mécanique (la signification est différente dans d'autres domaines d'application), et où $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est le **hamiltonien** pour un système autonome, associé à l'énergie totale. La dynamique d'un système hamiltonien est alors entièrement spécifiée par H

Par convention, un système hamiltonien à n degrés de liberté est un système dont n est la dimension des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} (au lieu des $2n$ conventionnels pour un système dynamique dissipatif). Pour décrire le mouvement de k corps en mécanique céleste, on a ainsi $3k$ degrés de liberté

● **Hamiltonien : oscillateur libre**



À titre d'illustration pour le pendule simple non amorti, voir page 13, on a un système autonome conservatif à un degré de liberté

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) = \text{cst}$$

D'une manière générale pour un mouvement soumis à une force F dérivant d'un potentiel V_P ,

$$m\ddot{\theta} = F(\theta) \quad F(\theta) = -\frac{dV_P}{d\theta}$$

avec pour le cas du pendule (en absorbant le $1/m$ dans V_P), $V_P(\theta) = \omega_0^2 (1 - \cos \theta)$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{dV_P}{d\theta} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} + V_P(\theta) \right] = 0$$

et on définit le hamiltonien comme $H = \dot{\theta}^2/2 + V_P(\theta)$

● **Hamiltonien : oscillateur libre (suite)**

En introduisant les variables canoniques $q = \theta$ (position angulaire) et $p = \dot{\theta}$ (moment angulaire), on a pour l'hamiltonien

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \omega_0^2(1 - \cos q) \simeq \frac{1}{2}p^2 + \omega_0^2 \frac{1}{2}q^2 \quad |q| \ll 1$$

et pour ce système hamiltonien à un degré de liberté, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega_0^2 \sin q \quad \left(= -\frac{\partial V_P(q)}{\partial q} \right) \end{cases}$$

● **Propriété d'un système hamiltonien**

Il est possible de mettre un système hamiltonien sous la forme d'un flot F . On introduit pour cela,

$$\xi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad F = \bar{S} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{O}_n & -\bar{I}_n \\ \bar{I}_n & \bar{O}_n \end{pmatrix}$$

où \bar{O}_n est la matrice nulle de taille $n \times n$, et \bar{I}_n la matrice identité de même taille. La divergence du flot s'écrit,

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\bar{I}_n \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\bar{I}_n \frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0$$

Un flot hamiltonien est donc conservatif (voir transparent 29, conservation du volume dans l'espace des phases). Par conséquent, $\langle \nabla \cdot F \rangle = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0$: la somme des exposants de Lyapunov est nulle

● **Propriété d'un système hamiltonien**

Le **théorème de récurrence de Poincaré** s'applique pour un système hamiltonien, toute trajectoire retourne à une position infiniment voisine de sa position initiale. Il n'y a pas de point d'équilibre asymptotiquement stable ou de cycle limite asymptotiquement stable

Enfin, en notant que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$$

on observe ainsi que $H = \text{cst}$ le long des trajectoires pour un système autonome, soit encore $(\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}})^+ \cdot \nabla H = 0$: **H est une intégrale première du système.** La dynamique du système se développe toujours dans un espace des phases à $2n - 1$ dimensions

● **Forme canonique**

Un système hamiltonien est dit **intégrable** si il possède n constantes du mouvement ou intégrales premières, par exemple $H = \text{cst}$ pour l'énergie totale du système. Il est alors possible de trouver une transformation canonique, c'est-à-dire une transformation qui préserve la forme hamiltonienne, telle que $(p, q) \rightarrow (I, \Theta)$ mais avec $H(p, q) = H(I)$ indépendant de Θ . On a alors

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} \equiv \omega(I)$$

avec Θ_k les variables angulaires et I_k les variables d'action, pour $k = 1, \dots, n$. Ce sont des variables dans l'espace des phases. Une intégration triviale du système précédent conduit à

$$\Theta = \omega(I) + \Theta_0 \quad I = I_0 \quad H(I) = \text{cst}$$

et les trajectoires se développent sur un tore \mathcal{T}^n , à comparer à la dimension $2n - 1$ de l'espace des phases

● **Forme canonique : oscillateur harmonique**

À titre d'illustration, on considère de nouveau pour le pendule simple avec l'approximation des petits angles, voir page 220. C'est un système hamiltonien avec $n = 1$ et une constante qui est l'énergie,

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \omega_0^2 \frac{q^2}{2} \quad \omega_0 = \text{cst}$$

Transformation canonique préservant l'hamiltonien

$$(I, \Theta) \rightarrow (p, q) = (\sqrt{2\omega_0 I} \sin \Theta, \sqrt{(2/\omega_0)I} \cos \Theta)$$

$$H(p, q) = \omega_0 I = H(I)$$

et on vérifie maintenant que

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega_0 \\ \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \end{cases} \quad \Theta = \omega_0 t + \Theta_0 \quad I = I_0 = \text{cst} \quad (\omega_0 I_0 \propto E)$$

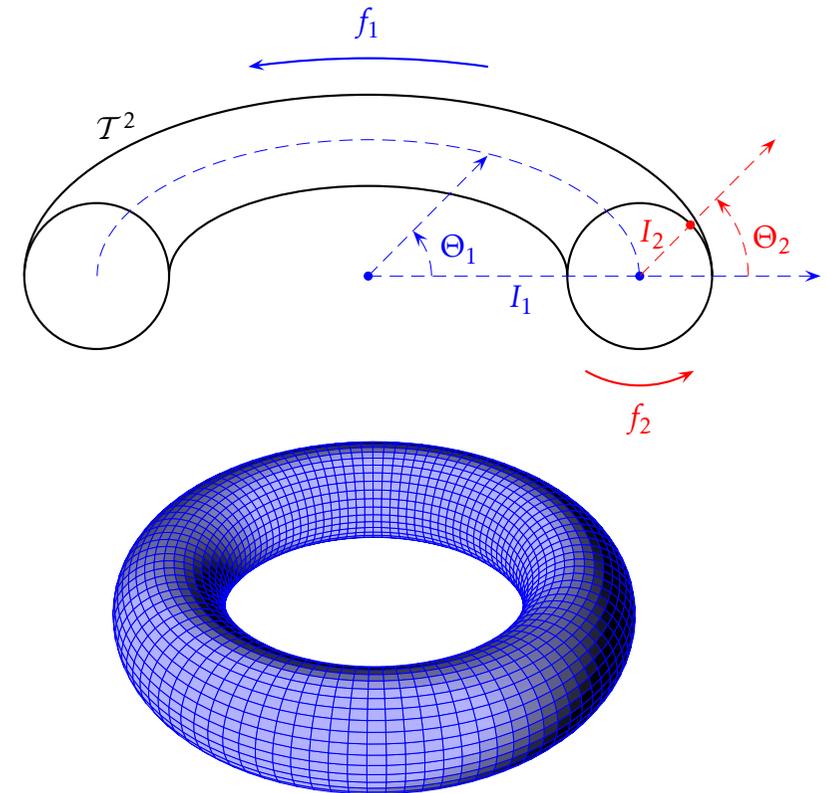
● **Forme canonique (suite)**

Systeme à $n = 2$ degrés de liberté et **intégrable**, $H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$

$$\Theta_1 = \omega_1(I_1)t + \Theta_{01}$$

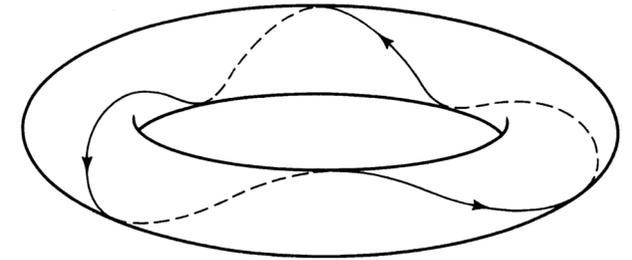
$$\Theta_2 = \omega_2(I_2)t + \Theta_{02}$$

Les trajectoires se développent sur un tore \mathcal{T}^2



● Résonance

Le tore est dit résonant lorsque $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ avec n_1 et n_2 entiers, soit encore si n_2/n_1 est rationnel. Après n_1 tours le long du tore et n_2 rotations autour, la trajectoire se referme sur elle-même, avec une période $T = n_1/f_1 = n_2/f_2$



Ott (1993), fig. 6.5
Cas résonant avec $n_1/n_2 = 1/3$

Pour le cas non résonant, le mouvement est quasipériodique et la trajectoire est dense sur le tore : tous les points du tore seront visités par cette trajectoire

● **Résonance et théorème KAM**

Perturbation des systèmes intégrables : comment se comporte le système soumis à des perturbations (incertitudes positions, influence d'autres astres, ...)?

La réponse est en partie apportée par le célèbre **théorème KAM pour Kolmogorov - Arnold - Moser** (1954-1973), associé à des développements mathématiques complexes. Enoncé caricatural de ce résultat :

Pour un flot hamiltonien intégrable H_0 dans un domaine borné \mathcal{T} soumis à une perturbation $H = H_0 + \Delta H_1$ non linéaire et non intégrable ; si la perturbation est petite et que les fréquences de H_0 sont irrationnelles (incommensurables), alors le mouvement reste confiné sur un tore, à l'exception d'un ensemble de mesure nul de conditions initiales

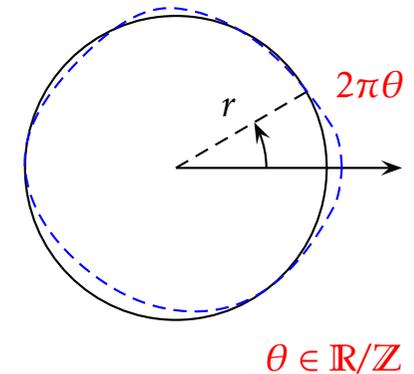
On peut retenir que la plupart des tores irrationnels (c'est-à-dire avec deux fréquences qui ne sont pas dans un rapport rationnel pour un système en deux dimensions) survivent à cette perturbation : persistance de solutions quasi-périodiques

● **Le monde presque périodique de la mécanique céleste**

(E. Ghys, Résonances et petits diviseurs, 2002)

Modèle réduit très simplifié avec une application f_0 du cercle sur lui-même, $(\theta, r) \rightarrow f_0(\theta, r) = (\theta + \alpha, r)$

- $\alpha \in \mathbb{Q}$, nombre fini de points sur le cercle de rayon r , suite (θ_n) périodique
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, suite (θ_n) dense sur le cercle



Application perturbée $(\theta, r) \rightarrow f_\epsilon(\theta, r) = (\theta + \alpha, r + \epsilon u(\theta))$

Pour la suite (θ_n, r_n) , on a

$$\theta_n = \theta + n\alpha \quad r_n = r + \epsilon \sum_{p=0}^{n-1} u(\theta + p\alpha) \quad \text{bornée?}$$

À quelles conditions sur la fonction $v(\theta)$ peut-on trouver une courbe invariante $(\theta, r + \epsilon v(\theta))$?

● **Le monde presque périodique de la mécanique céleste**

$$f_\epsilon(\theta, r + \epsilon v(\theta)) = \underbrace{(\theta + \alpha, r + \epsilon v(\theta) + \epsilon u(\theta))}_{\text{définition de } f_\epsilon} = \underbrace{(\theta + \alpha, r + \epsilon v(\theta + \alpha))}_{\text{invariance}}$$

On doit donc vérifier $u(\theta) = v(\theta + \alpha) - v(\theta)$. En utilisant une représentation en série de Fourier pour les deux fonctions u et v

$$u(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{i2\pi k\theta} \quad v(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}_k e^{i2\pi k\theta}$$

on doit satisfaire $(e^{i2\pi k\alpha} - 1)\hat{v}_k = \hat{u}_k, \forall k \in \mathbb{Z}$

Pour $k = 0$, $\hat{u}_0 = 0$ et \hat{v}_0 arbitraire : la fonction $u(\theta)$ doit-être à moyenne nulle

$$\hat{u}_0 = \int_0^1 u(\theta) d\theta$$

Pour $k \neq 0$, si $e^{i2\pi k\alpha} \neq 1$,

$$\hat{v}_k = \frac{\hat{u}_k}{e^{i2\pi k\alpha} - 1}$$

$e^{i2\pi k\alpha} \neq 1, \forall k \in \mathbb{Z}$, requiert que α soit irrationnel

● **Le monde presque périodique de la mécanique céleste**

Si $\hat{u}_0 = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$v(\theta) = \hat{v}_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\hat{u}_k e^{i2\pi k\theta}}{e^{i2\pi k\alpha} - 1} \quad (3)$$

Convergence de la série? On observe en effet que $e^{i2\pi k\alpha} - 1 \neq 0$, mais que ce terme peut-être aussi petit que l'on le veut. En effet, pour ton nombre irrationnel donné α , il existe une infinité de nombres rationnels p/q vérifiant :

$$|\alpha - p/q| < 1/q^2$$

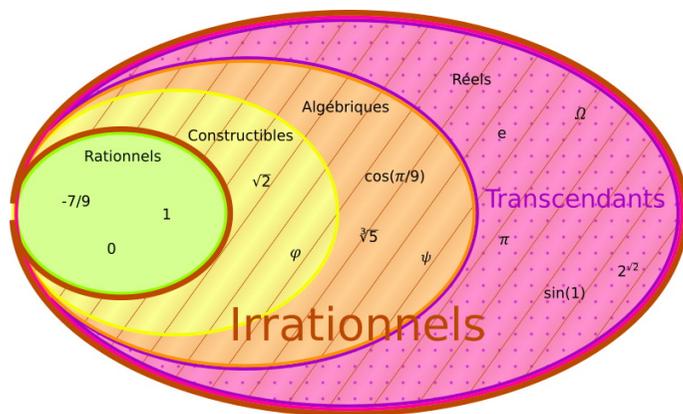
comme les **nombre diophantiens**. Le nombre d'or φ est par exemple un nombre diophantien, on peut montrer que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad |\varphi - p/q| > 1/(\sqrt{5}q^2) \quad \forall p/q \in \mathbb{Q} \quad (q > 0)$$

● **Le monde presque périodique de la mécanique céleste**

Pour démontrer que l'application perturbée est stable, pour toute perturbation u d'intégrale nulle (et pour laquelle on peut définir sa série de Fourier), on doit s'assurer que la série (3) définissant v converge, c'est-à-dire que les coefficients \hat{v}_k décroissent rapidement

Pour α diophantien et ϵ assez petit, on démontre que le mouvement perturbé est toujours stable (exemple trop simple ici, mais formulation du théorème KAM)



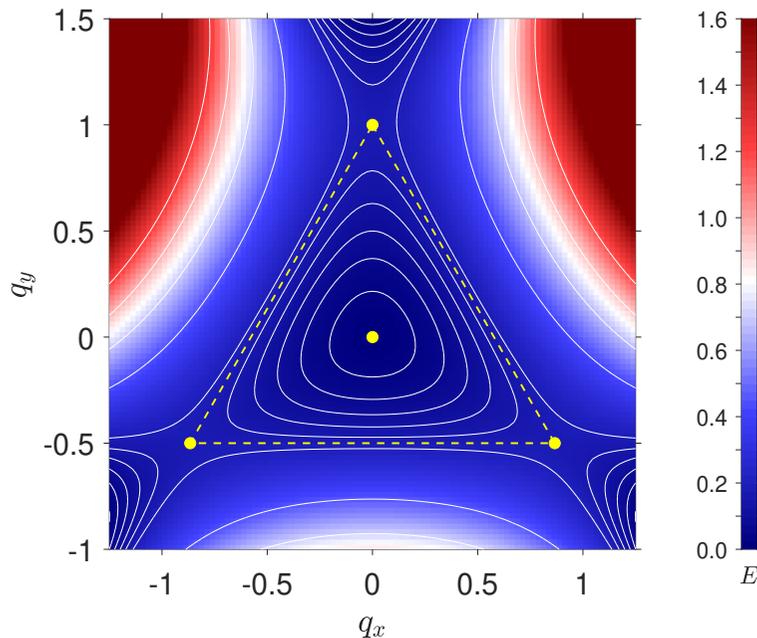
Des nombres presque rationnels ... comme le nombre de Liouville

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \dots$$

● Hénnon - Heiles (1965)

Système construit avec deux oscillateurs pour H_0 et une perturbation H_1 non intégrable comprenant deux termes cubiques

$$H = H_0 + \epsilon H_1 = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega_x^2 q_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 q_y^2 + \epsilon \left(q_x^2 q_y - \frac{1}{3}q_y^3 \right)$$



Potentiel V_P associé à H

$$V_P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\omega_x^2 q_x^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 q_y^2 + \epsilon \left(q_x^2 q_y - \frac{1}{3}q_y^3 \right)$$

Hamiltonien $H = \mathbf{p}^2/2 + V_P(\mathbf{q})$

Trajectoires bornées lorsque $H < E^* = 1/6$, c'est-à-dire à l'intérieur du triangle en tirets

iso- V_P avec $\omega_x = \omega_y = 1$ et $\epsilon = 1$

● **Hénon - Heiles (1965)**

Système de 4 équations à résoudre

$$\begin{cases} \dot{q}_x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{q}_y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial q_x} = -\omega_x^2 q_x - 2\epsilon q_x q_y \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial q_y} = -\omega_y^2 q_y - \epsilon(q_x^2 - q_y^2) \end{cases}$$

Pour un niveau d'énergie donné E , on doit s'assurer que les conditions initiales sont compatibles :

- on choisit souvent $q_{x0} = 0$, et q_{y0} tel que $V_P(q_{x0}, q_{y0}) < E$

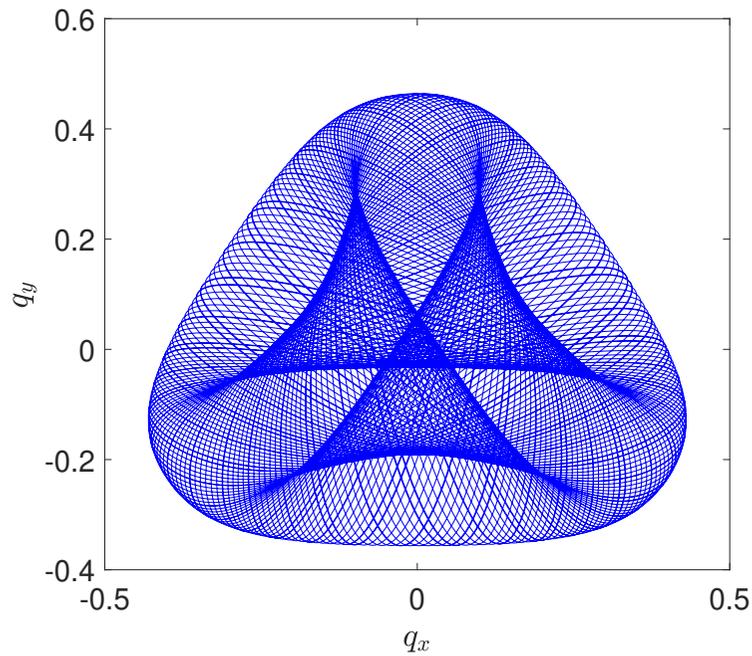
- on choisit ensuite

$$p_{y0} < p_{y0|\max} = \sqrt{2[E - V_P(q_{x0}, q_{y0})]}$$

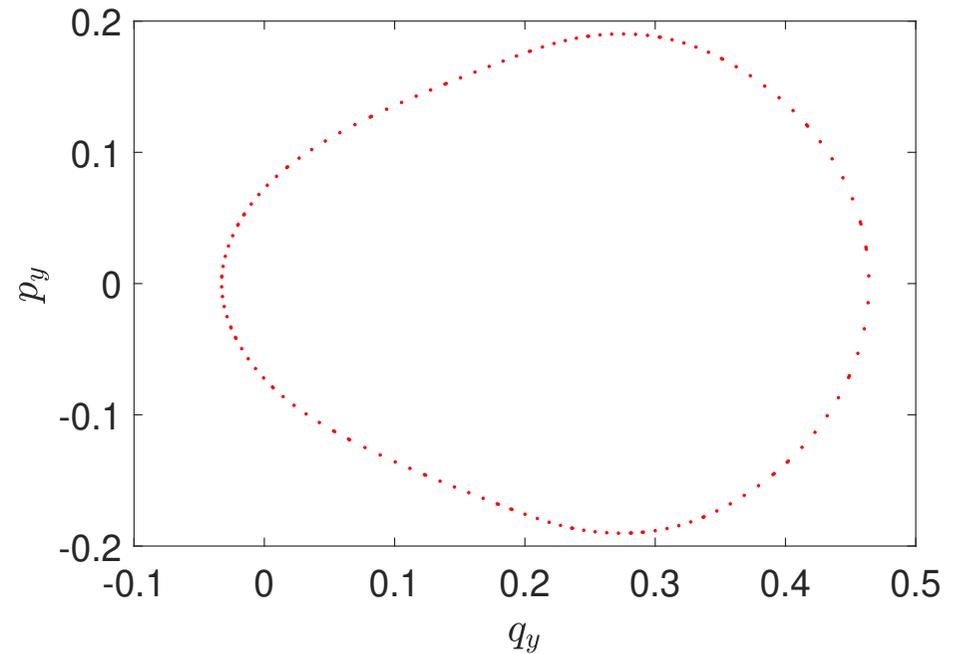
- on détermine finalement p_{x0} pour avoir $H(q_{x0}, q_{y0}, p_{x0}, p_{y0}) = E$

● Hénon - Heiles (1965)

Trajectoire projetée dans le plan (q_x, q_y)
 $\omega_x = \omega_y = 1, \epsilon = 1$

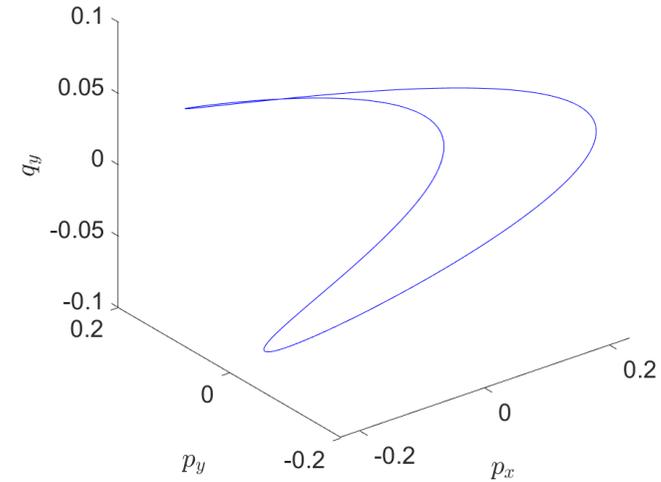
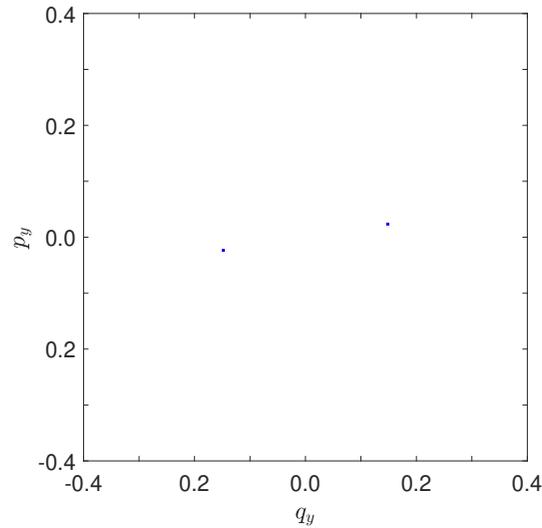


Section de Poincaré $q_x = 0$ et $p_x > 0$
 $E = 1/12$ (erreur $\Delta E < 7.7 \times 10^{-12}$)

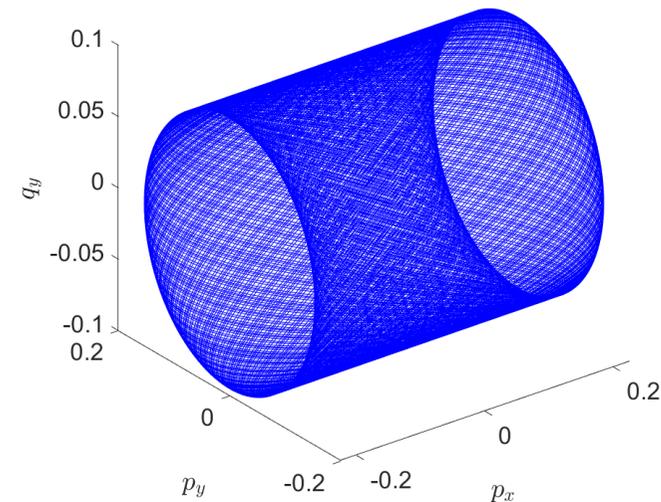
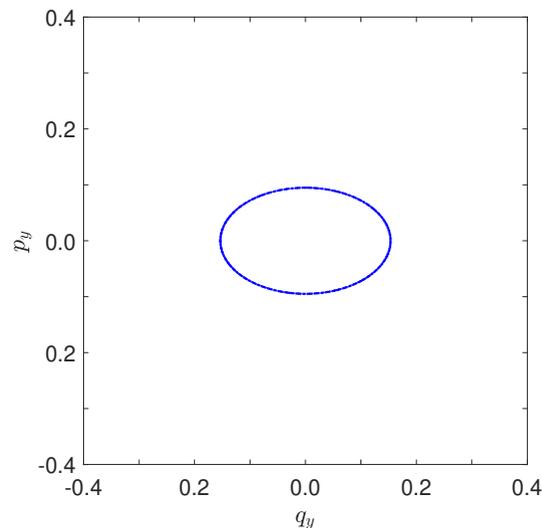


● Hénon - Heiles (1965)

$\omega_x = 1$
 $\omega_y = 1/2$
 $(\epsilon = 0)$



$\omega_x = 1$
 $\omega_y = (\sqrt{5} - 1)/2$
 $(\epsilon = 0)$



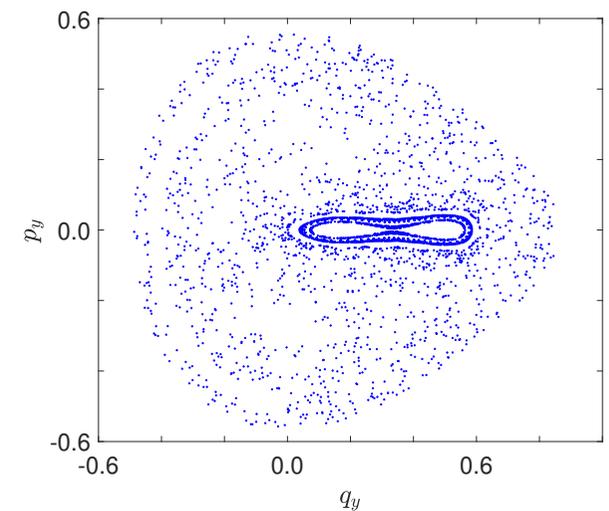
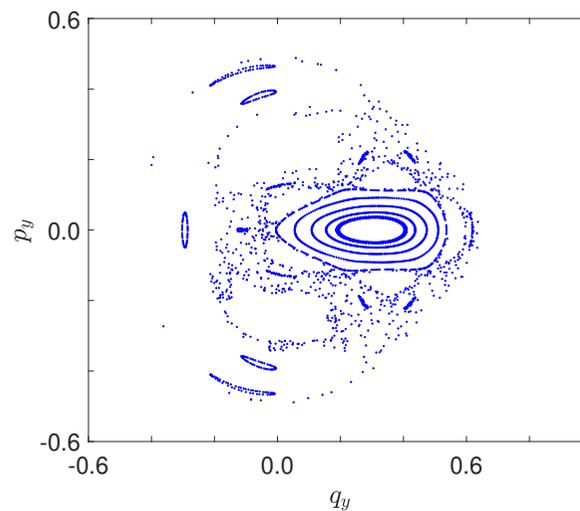
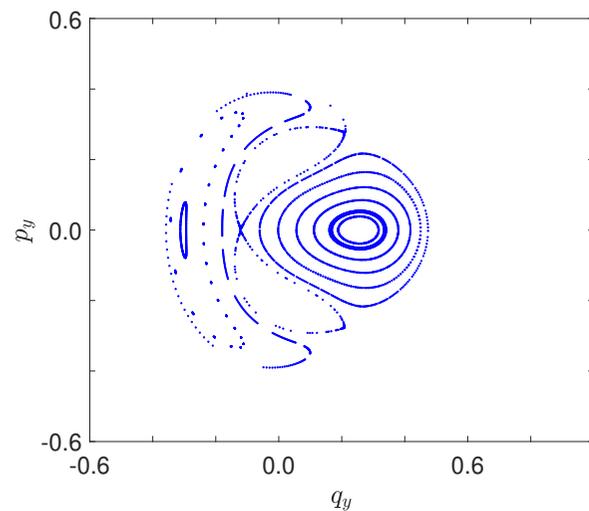
● **Hénon - Heiles (1965)**

Sections de Poincaré dans le plan (p_y, q_y) pour $q_x = 0$ et $\dot{q}_x > 0$

$$\omega_x = \omega_y = 1, \epsilon = 1$$

$E = 1/12, E = 0.12$ et $E = 0.16$ (proche de l'énergie de libération $E = 1/6$)

conditions initiales $q_x = 0.05, -0.3 \leq q_y \leq 0.3, p_y = 0.01$ et p_x avec E

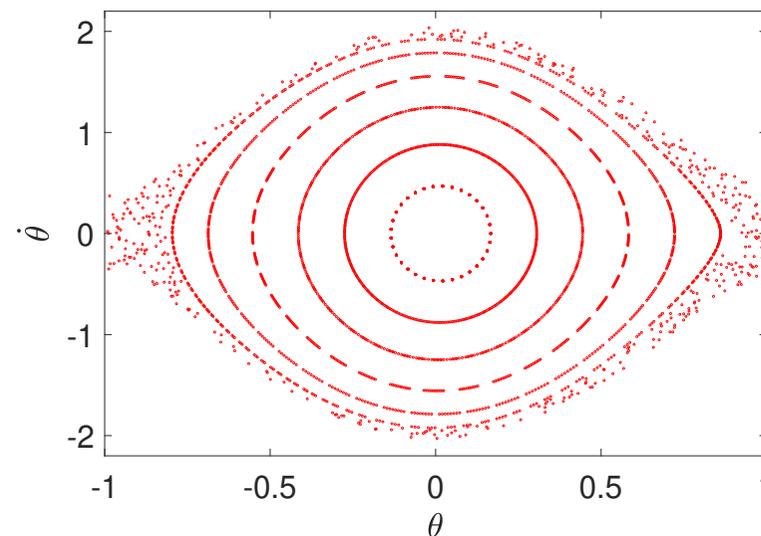
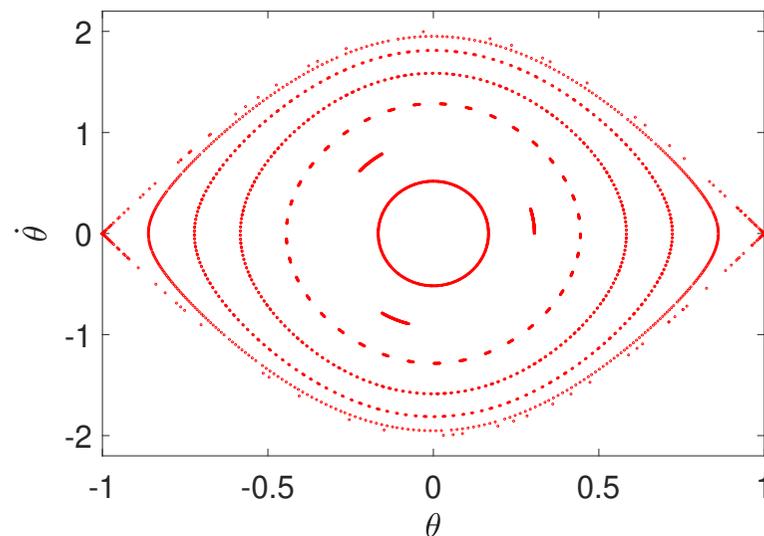


● **Illustration avec l'oscillateur simple perturbé**

On reprend le cas de l'**oscillateur libre** que l'on force avec un terme temporel,

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2 \sin \theta = \epsilon \cos(\omega t)$$

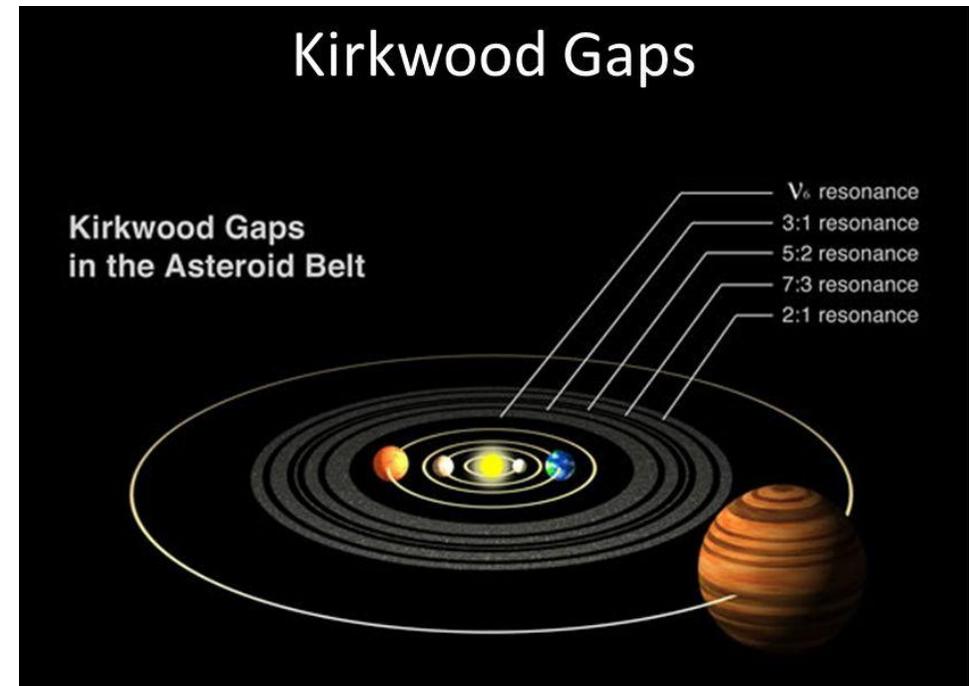
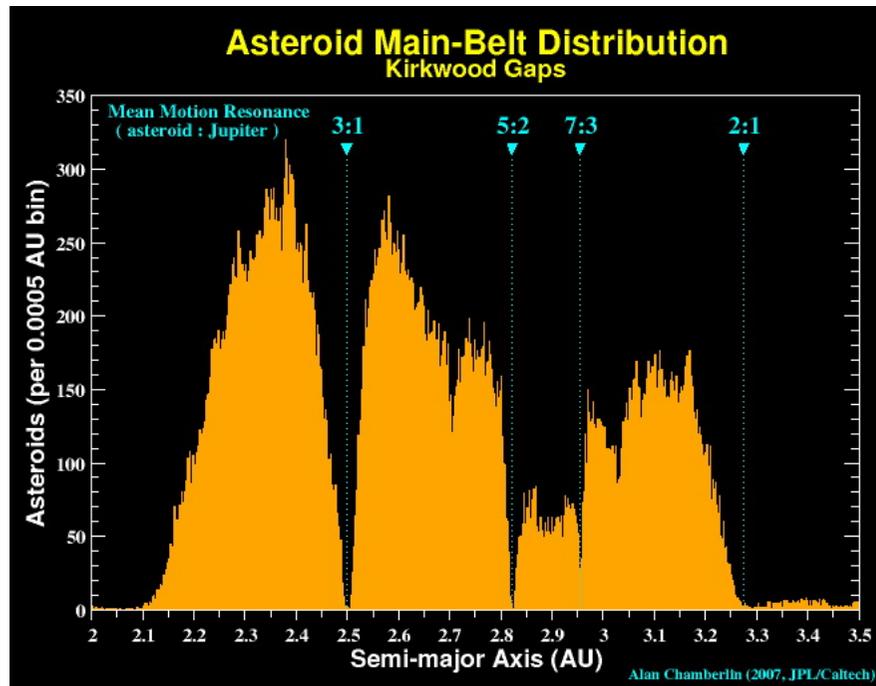
Section de Poincaré tous les $T = 2\pi/\omega$
avec $\omega_0 = 1$, $\omega = \sqrt{2}$, $\epsilon = 0$ versus $\epsilon = 0.05$



On observe que les orbites qui sont proches des points hyperboliques (séparatrices pour l'oscillateur simple) sont déstabilisées

● **Lacunes de Kirkwood (1867)**

Répartition d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, les résonances rationnels avec la période de Jupiter sont vides : gaps de Kirkwood



The distribution of asteroids in the main asteroid belt is not uniform. In particular, there are regions which contain very few asteroids – these are known as the ‘Kirkwood Gaps’. The result of orbital resonances with Jupiter, these gaps have been cleared of asteroids by the planet’s dominant gravitational influence. For an example of the way it works : an asteroid with a semi-major axis of 3.28 AU will complete two orbits of the Sun for every one of Jupiter (it lies in the 2/1 orbital resonance). Once every two orbits, the relative positions between the asteroid and Jupiter will be the same, and the repeated tugs from Jupiter at this point will change the orbital elements of the asteroid. This can create a gap (which is the case here) or a concentration of asteroids at that distance. All asteroids with orbital distances that form a simple ratio with that of Jupiter will be affected by such gravitational perturbations. Key Kirkwood gaps occur at the 2/1, 3/1, 5/2, and 7/3 orbital resonances, while major concentrations of asteroids are found at the 3/2 and 1/1 (Trojan asteroids) orbital resonances.

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/K/Kirkwood+Gaps>

● **Pour conclure (temporairement!) sur la stabilité du système solaire**

Jacques Laskar (Observatoire de Paris, 2023 et nombreux travaux antérieurs)

2009 – Mercure aurait 1% de chance de rentrer en collision avec Vénus dans les 5 milliards d'année à venir (perturbation de la trajectoire avec la présence de Jupiter)

2012 – Simulation directe de 2501 solutions (trajectoires) sur 5 milliards d'années, *i.e.* l'espérance de vie du système solaire, avec les équations générales de la mécanique (relativité générale), et dans 1% des cas, le système solaire interne est déstabilisé (Mercure, Venus, Terre et Mars) ...

2023 – Pourquoi le taux de collision est si faible sur 5 milliards d'années alors que l'exposant de Lyapunov est de l'ordre de 5 millions d'années seulement

Caractérisation expérimentale des systèmes dynamiques et reconstruction dans l'espace des phases



Floris Takens
(1940-2010)

● Motivation

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des systèmes modélisés par des ODE ; l'espace des phases est bien défini (en particulier sa dimension) et la seule difficulté pratique réside dans l'intégration numérique des trajectoires (sensibles aux conditions initiales néanmoins)

En pratique, la situation est souvent très différente. On ne connaît pas de modélisation du système dynamique examiné. On dispose d'un nombre limité de capteurs, voire éventuellement que d'un seul signal expérimental ou numérique $s(n\Delta t)$ avec Δt le pas de temps (et donc $1/\Delta t$ la fréquence d'échantillonnage)

Est-on alors capable à partir de cette simple série temporelle fournie par un capteur de caractériser le système dynamique correspondant, au sens de l'étude du chaos, c'est-à-dire avoir une idée de sa dimension effective et de ses exposants de Lyapunov par exemple ?

● Introduction

La première idée utilisée dans la littérature est de reproduire l'analyse théorique. À partir de la donnée du signal $s(t)$ échantillonné, on cherche à estimer les dérivées successives pour construire un espace des phases classique (x, \dot{x}) par exemple. La dérivée peut être estimée par de simples différences finies

$$\dot{s}(t) \simeq \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Cette approche est cependant très sensible au bruit de mesure (comme toute estimation de dérivées) et limitée aux systèmes de très faible dimension, typiquement 2 ou 3 pour un système soumis à une excitation périodique comme l'**oscillateur de Duffing**

Dans l'approche par différences finies précédente, la seule information nouvelle qu'on ajoute est la connaissance de $x(t + \Delta t)$; d'où l'idée de construire un espace des phases à partir de la suite des échantillons de $x(t)$ sans chercher à évaluer les dérivées

● **Introduction**

À titre d'illustration,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \begin{cases} \theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta} = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \theta/\theta_0 \\ x_2 = -\dot{\theta}/(\omega_0 \theta_0) \end{cases}$$

avec donc un cercle dans l'espace des phases (x_1, x_2)

En ayant accès à simplement $s(t) = x_1(t)$, on peut chercher à reconstruire l'espace des phases en considérant $s(t)$ et $s(t + T_0/4)$

En effet, $s(t + T_0/4) = x_1(t + T_0/4) = \cos(\omega_0 t + \pi/2 + \varphi) = x_2(t)$

La méthode des **temps retardés** pour la reconstruction introduite par Packard *et al.* (1980) et Takens (1981) repose sur cette idée

● **Méthode des temps retardés**

On dispose d'un signal expérimental ou numérique échantillonné $s(n\Delta t)$

On doit alors déterminé un **temps de retard** T (avec $T \neq \Delta T$) et une **dimension de reconstruction** d_E dans l'espace des phases (dimension d'immersion ou de plongement, *embedding dimension*) pour reconstruire un attracteur équivalent (à préciser!)

$$y_1 = \begin{pmatrix} s(t) \\ s(t + T) \\ s(t + 2T) \\ \dots \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} s(t + T) \\ s(t + 2T) \\ s(t + 3T) \\ \dots \end{pmatrix} \quad \dots \quad y_{d_E} = \begin{pmatrix} s(t + (d_E - 1)T) \\ s(t + d_E T) \\ s(t + (d_E + 1)T) \\ \dots \end{pmatrix}$$

● **Méthode des temps retardés**

Choix du temps de retard T . En pratique, il faut que chaque échantillon $s_n = s(t + nT)$ apporte une information nouvelle, ce qui impose de choisir un pas suffisamment grand pour « sortir du bruit ». Cependant, il ne faut pas non plus que T soit trop grand, auquel cas les échantillons seraient complètement décorrés. Il n'y a pas de règle absolue de choix (et une certaine latitude est possible) : on peut simplement choisir T proche du **temps de corrélation T_c** du signal $s(t)$

Coefficient de corrélation $R(\tau)$ d'un signal temporel $s(t)$ stationnaire

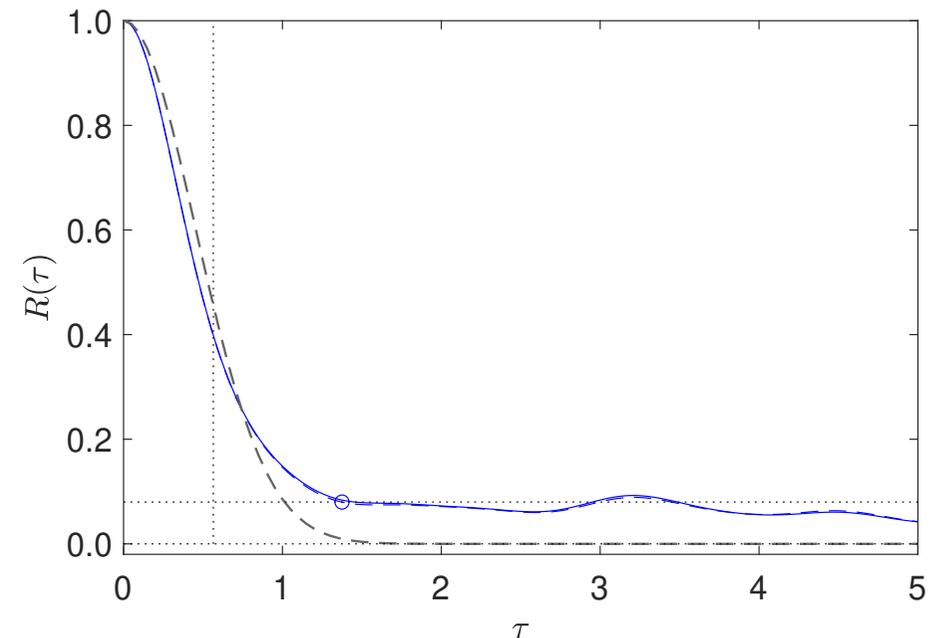
$$R(\tau) = \frac{\overline{s(t_0)s(t_0 + \tau)}}{\overline{s^2}} \qquad T_c = \int_0^\infty R(\tau) d\tau$$

● Méthode des temps retardés

Pour un signal chaotique (ou aléatoire), $R(\tau)$ tend vers zéro à l'infini, contrairement à ce qu'on observe pour un signal périodique. On rappelle aussi que $R(\tau)$ est la transformée de Fourier du spectre de $s(t)$ (théorème de Wiener-Khinchine)

On considère souvent en pratique le premier passage à zéro de $R(\tau)$ ou la comparaison avec un modèle

Attracteur de Lorenz ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$) : coefficient de corrélation $R(\tau)$ pour $s = x_1(t)$



$T_c \simeq 0.56$; on note le comportement singulier lié à Lorenz ici, --- $e^{-(\pi/4)(t/T_c)^2}$

● Dimension de l'espace des phases (I)

La méthode la plus simple consiste à augmenter progressivement la dimension de reconstruction d_E et à contrôler l'évolution des « invariants » du système, essentiellement la dimension fractale de l'attracteur.

Si d_E est trop petite, on peut penser que les « invariants » sont en fait directement liés au (mauvais) choix de d_E et non aux véritables caractéristiques de l'attracteur. A partir d'une valeur suffisante de d_E les invariants ne vont plus dépendre de ce choix, c'est ce qu'on appelle « saturation des invariants ». Cette méthode fonctionne bien, du moins tant que la dimension de l'attracteur n'est pas trop élevée

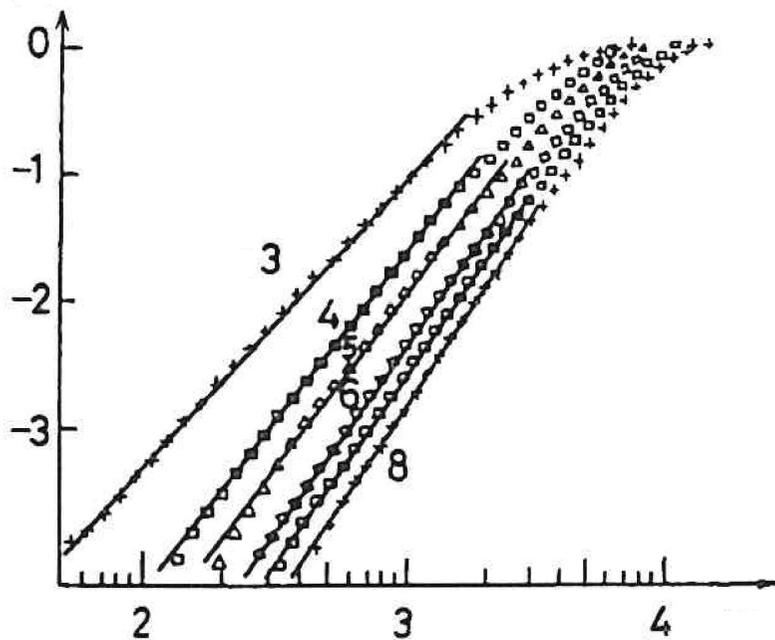
L'exemple qui suit illustre le fonctionnement dans la cas de l'[expérience de convection de Rayleigh-Bénard](#) et contraste le résultat par rapport à un [signal de type bruit blanc](#)

● Dimension de l'espace des phases (I)

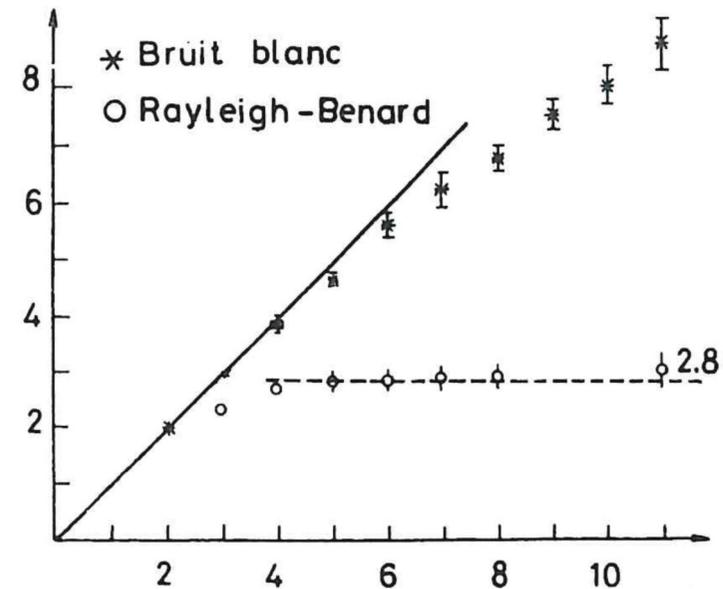
Expérience de Rayleigh-Bénard (Atten *et al.*, 1984)

Évolution de $\ln R(r)$ en fonction de $\ln r$ pour différentes valeurs de la dimension de l'espace des phases d_E de 3 à 8 pour la reconstruction

$R(r) \sim r^{D_2}$ D_2 dimension de corrélation



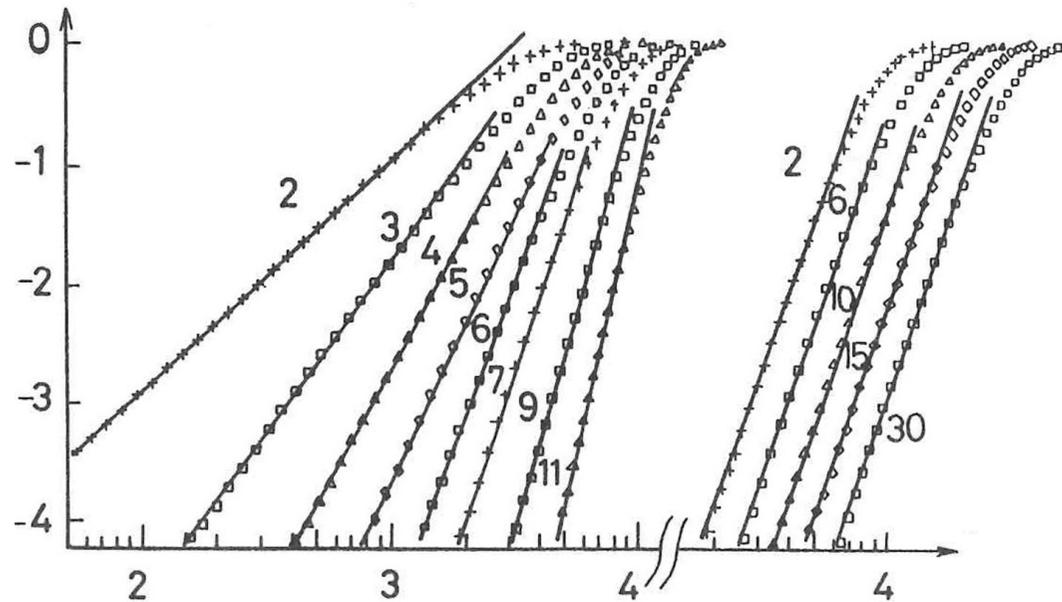
On observe la saturation de $D_2 \simeq 2.8$ lorsque l'on représente D_2 en fonction de d_E



Pour le cas d'un signal aléatoire, D_2 continue de croître linéairement avec d_E : on remplit sans fin l'espace de reconstruction (15×10^3 points, $R(r)$ calculé avec 150 moyennes)

● Dimension de l'espace des phases (I)

Expérience de Rayleigh-Bénard (Atten *et al.*, 1984)



Pour un bruit blanc, évolution de $\ln R(r)$ en fonction de $\ln r$

– pour différentes valeurs de d_E à gauche (pente D_2 reportée sur le transparent précédent, pas de saturation)

– pour d_E fixé, sensibilité au temps de retard T à droite

Le théorème de Takens (1981) donne une condition suffisante pour la dimension de reconstruction, $d_E \geq 2D_0 + 1$, avec D_0 dimension de recouvrement

● **Dimension de l'espace des phases (II)**

Méthode des plus proches faux voisins (*false Nearest Neighbour*)

On note \mathbf{y}_n un vecteur reconstruit dans l'espace des phases supposé de dimension d_w avec la convention :

$$s_n \equiv s(t + (n - 1)T) \quad \mathbf{y}_n = (s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+d_w-1})$$

c'est-à-dire pas l'échantillonnage initial du signal mais celui considéré pour la reconstruction avec la **méthode des temps retardés**

On cherche alors le plus proche voisin en distance de ce point \mathbf{y}_n

$$\tilde{\mathbf{y}}_n = (\tilde{s}_m, \tilde{s}_{m+1}, \dots, \tilde{s}_{m+d_w-1}) \quad R_{d_w}^2 = (\mathbf{y}_n - \tilde{\mathbf{y}}_n)^2$$

On examine alors la distance entre ces deux points lorsque l'on augmente la dimension de reconstruction en passant de d_w à $d_w + 1$ en formant

$$R_{d_w+1}^2 = R_{d_w}^2 + (s_{n+d_w} - \tilde{s}_{m+d_w})^2$$

● **Dimension de l'espace des phases (II)**

Si la distance R_{d_w+1} devient grande devant un certain seuil, \tilde{y}_n est un faux voisin lié à la dimension d_w trop petite utilisée pour la reconstruction de l'attracteur : il y a repliement. Sinon, on peut retenir $d_E = d_w$ pour effectuer la reconstruction

En pratique, on considère les n_b proches voisins de y_n pour tester le passage de d_w à $d_w + 1$, et on doit aussi choisir un seuil pour évaluer la variation entre R_{d_w} et R_{d_w+1}

Il existe des algorithmes performants pour trouver les k plus proches voisins (k -NN), algorithmes aussi utilisés dans les méthodes d'apprentissage automatique

- L'attracteur reconstruit avec l'une de ces deux méthodes possède les mêmes propriétés que l'attracteur original (dimension fractale, exposants de Lyapunov, ...)

Contrôle du chaos



Edward Ott (1941 –), Univ. of Maryland

● Philosophie

De façon *a priori* surprenante, il est relativement aisé de ramener un système au comportement chaotique vers un système au comportement régulier, à l'aide de **faibles variations d'un paramètre de contrôle** (et donc sans dépenser beaucoup d'énergie)

Ceci n'est possible qu'à cause des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques, c'est-à-dire la **sensibilité aux conditions initiales** et le caractère « récurrent » de l'attracteur dont tous les points sont visités irrégulièrement au cours du temps

La première étape est l'identification d'orbites périodiques instables qui sont noyées dans l'attracteur chaotique. L'objectif est ensuite de stabiliser cette trajectoire en pilotant un des paramètres de contrôle du système autour de sa valeur nominale

● Approche intuitive illustrée avec l'attracteur de Lozi (1978)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad a = 1.7, b = 0.5$$

Matrice jacobienne $\bar{\mathbf{J}}$

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sgn}(x_n) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \det \bar{\mathbf{J}} = b$$

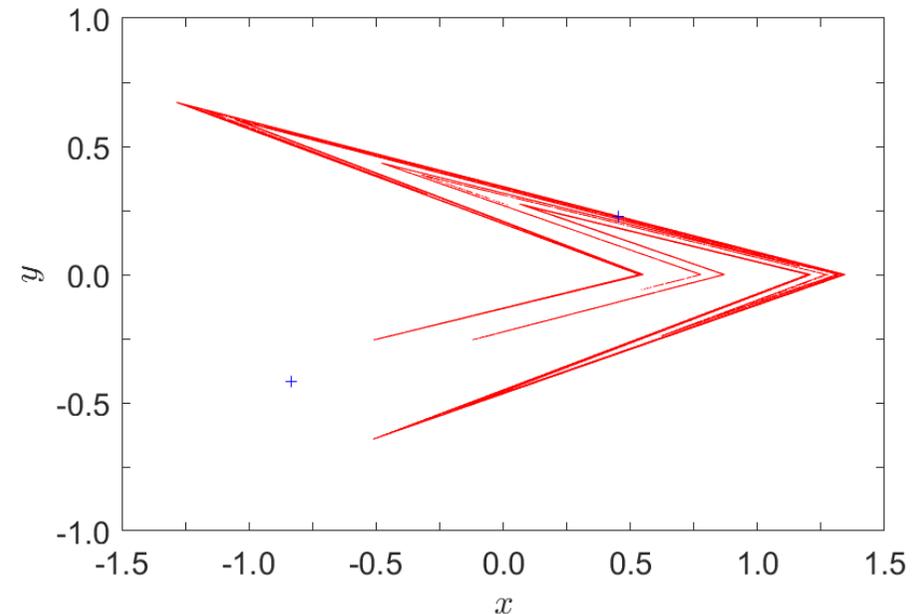
Deux points fixes \mathbf{x}_{\pm}^*

$$x_{\pm}^* = \frac{\pm 1}{a \mp (b-1)} \quad y_{\pm}^* = \frac{\pm b}{a \mp (b-1)}$$

Pour le point fixe $\mathbf{x}_+^* = (x_+^*, y_+^*)$, valeurs propres

$$s_{1,2} = \frac{-a}{2} \operatorname{sgn}(x_+^*) \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \operatorname{sgn}^2(x_+^*) + 4b}$$

avec $s_1 s_2 = \det \bar{\mathbf{J}} = -b$ et $|s_2| > 1$, \mathbf{x}_+^* instable



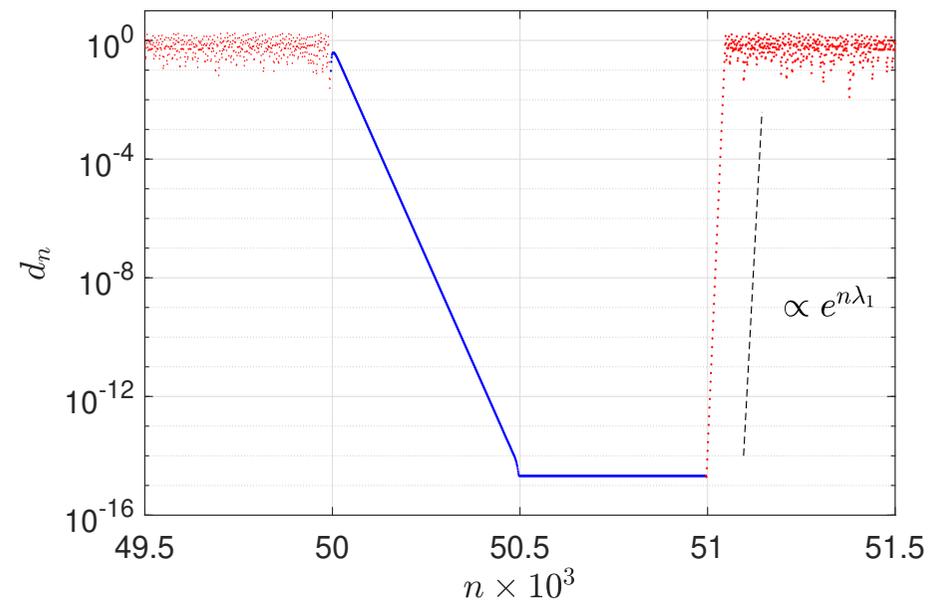
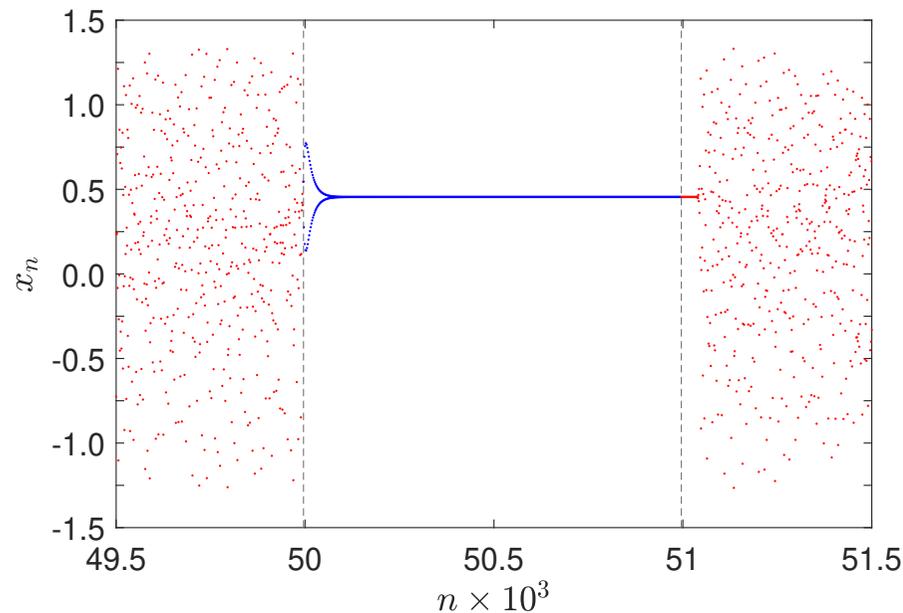
Attracteur plus simple que celui d'Hénon, « produit de segments de droites par un ensemble de Cantor »

● Approche intuitive avec l'attracteur de Lozi

Loi de contrôle que l'on applique lorsque l'on passe au voisinage du point fixe à stabiliser \mathbf{x}_+^*

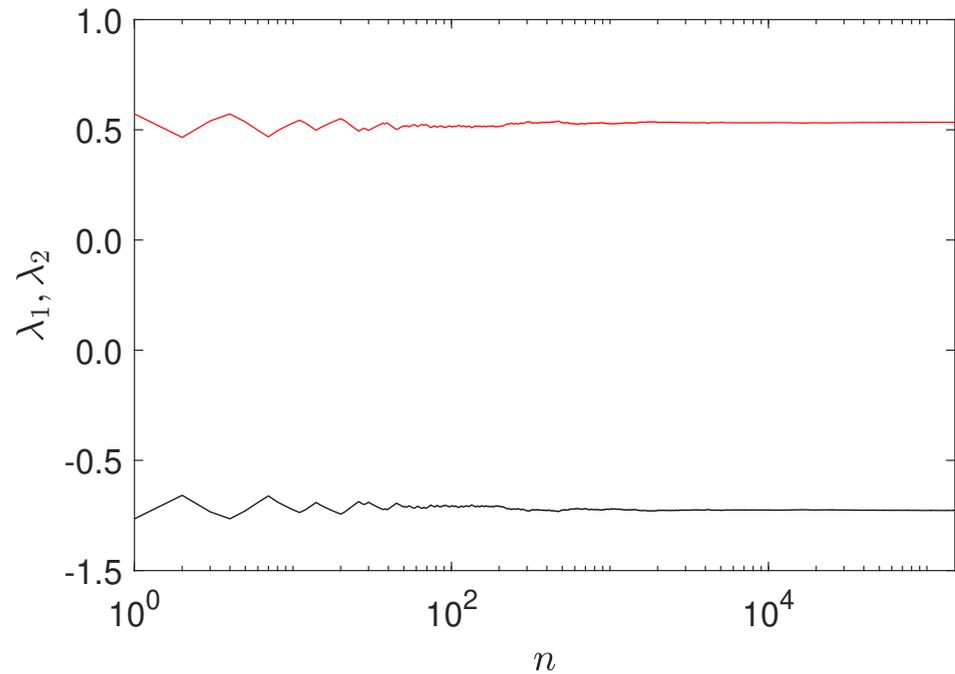
$$f = \begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| \\ y_{n+1} = bx_n - k(x_n - x_+^*) \end{cases}$$

en choisissant k pour avoir un système dissipatif ($|\det \bar{J}| < 1$) et stable $|s_{1,2}| < 1$.
 On note $d_n^2 = (x_n - x_+^*)^2$, signal contrôlé en bleu ($k = 1.215$)



● Approche intuitive avec l'attracteur de Lozi

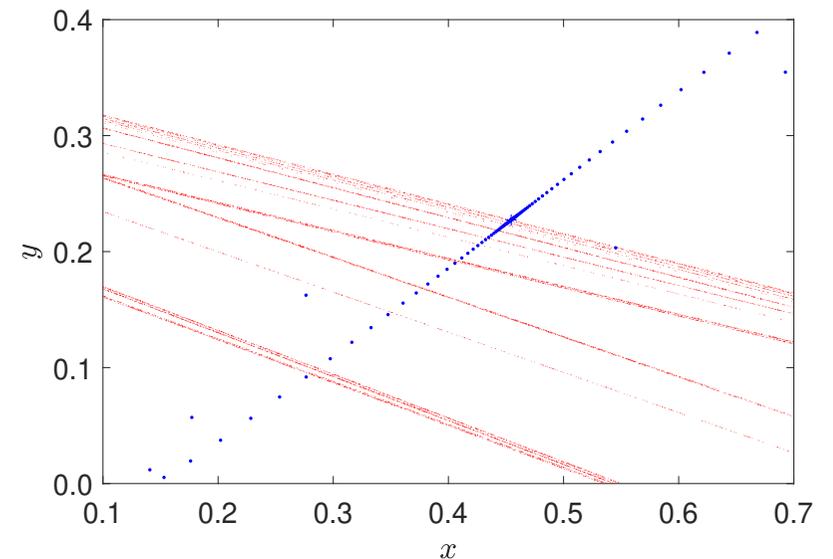
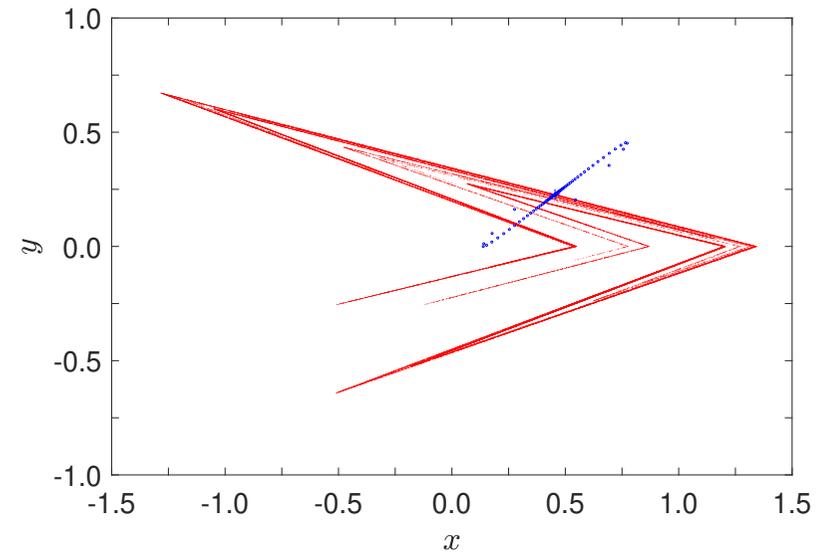
Exposants de Liapunov



$$\lambda_1 \simeq 0.53 \quad \lambda_2 \simeq -1.27$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \ln |\langle \text{tr} \bar{J} \rangle| = \ln b$$

$$D_{YK} \simeq 1.44$$



● **Ott, Grebogi & Yorke (1990)**

On souhaite contrôler le système dynamique $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, p)$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (pour simplifier ici), $p \in \mathbb{R}$ est un paramètre de contrôle et p_0 est la valeur nominale de ce paramètre. On considère une section de Poincaré $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$, et on a identifié un point fixe $\mathbf{x}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ dans cette section

On cherche à déterminer la valeur du paramètre p autour de sa valeur de référence p_0 pour imposer à la trajectoire de toujours restée proche du point fixe \mathbf{x}_0 dans la section de Poincaré, point fixe nécessairement instable pour un attracteur étrange. On note p_n cette valeur associée à l'itération \mathbf{x}_n

Par **linéarisation autour du point fixe $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(p_n)$** dans la section de Poincaré,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= f(\mathbf{x}_n) \\ &\simeq f(\mathbf{x}_0(p_n)) + \bar{\bar{J}}[\mathbf{x}_0(p_n)](\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0(p_n)) \\ &\simeq \mathbf{x}_0(p_n) + \bar{\bar{J}}[\mathbf{x}_0(p_n)](\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0(p_n)) \end{aligned}$$

où $\bar{\bar{J}} = \partial f / \partial \mathbf{x}$ est toujours la matrice jacobienne. On supposera par ailleurs que $\bar{\bar{J}}[\mathbf{x}_0(p_n)] \simeq \bar{\bar{J}}[\mathbf{x}_0(p_0)] = \bar{\bar{J}}_0$

● **Ott, Grebogi & Yorke (1990)**

Linéarisation de $\mathbf{x}_0(p_n)$ autour de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(p_0)$

$$\mathbf{x}_0(p_n) \simeq \mathbf{x}_0 + (p_n - p_0) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial p} \right|_{p=p_0} = \mathbf{x}_0 + \delta p_n \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial p} \right|_{p=p_0} \quad \delta p_n \equiv p_n - p_0$$

On retient au final

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_0 + \delta p_n \mathbf{g} + \bar{J}_0(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 - \delta p_n \mathbf{g})$$

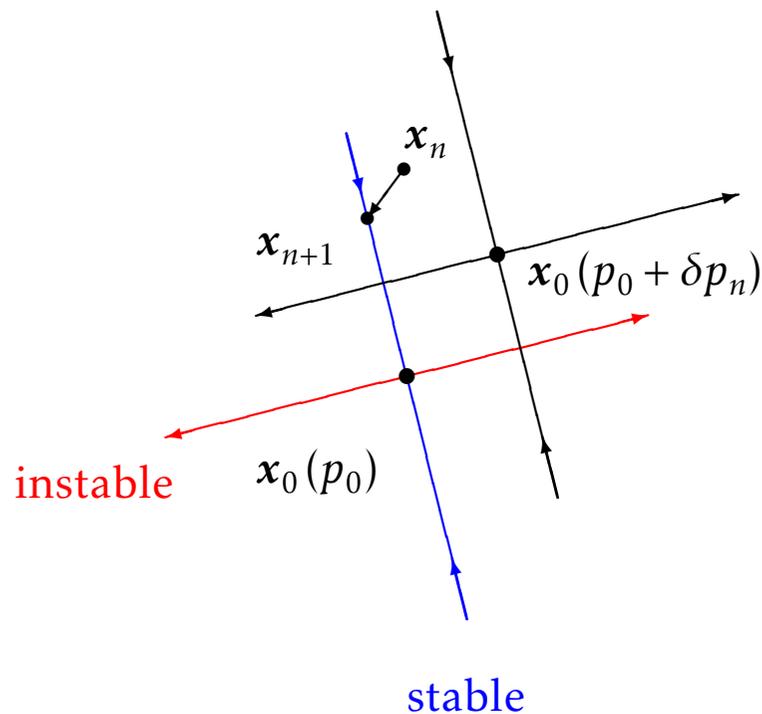
soit encore en posant $\zeta_n \equiv \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$ pour le vecteur erreur dans la section de Poincaré

$$\zeta_{n+1} = \delta p_n \mathbf{g} + \bar{J}_0(\zeta_n - \delta p_n \mathbf{g})$$

Il reste à reformuler cette loi de contrôle pour avoir une expression explicite de δp_n à imposer au système, lors du passage de l'orbite dans la section de Poincaré

● Ott, Grebogi & Yorke (1990)

Schéma dans la section de Poincaré



Attention, e_s et e_u ne sont généralement pas orthogonaux!

Vecteur erreur $\zeta_{n+1} = \alpha_s e_s + \alpha_u e_u$

(e_s, e_u) vecteurs propres de \bar{J} dans les directions **stable** et **instable**

On cherche à annuler la composante de ce vecteur seulement dans la direction instable e_u en choisissant judicieusement δp_{n+1}

Comment perturber le paramètre p à l'itération n pour avoir ζ_{n+1} aligné avec la direction stable?

● **Ott, Grebogi & Yorke (1990)**

On introduit les deux vecteurs contravariants (f_s, f_u) , associés aux deux vecteurs propres (e_s, e_u) , et définis par

$$\bar{J} = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s \quad f_u \cdot e_s = f_s \cdot e_u = 0 \quad f_u \cdot e_u = f_s \cdot e_s = 1$$

On souhaite que le vecteur $\zeta_{n+1} = \alpha_s e_s + \alpha_u e_u$ soit orienté dans la direction stable associée au point fixe x_0 , en cherchant donc à annuler α_u en considérant le produit scalaire $\zeta_{n+1} \cdot f_u = \alpha_u$. On a alors,

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1} \cdot f_u &= 0 \\ \delta p_n g \cdot f_u + [\lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s] (\zeta_n - \delta p_n g) \cdot f_u &= 0 \\ \delta p_n g_i f_{ui} + [\lambda_u e_{ui} f_{uj} + \lambda_s e_{si} f_{sj}] (\zeta_{nj} - \delta p_n g_j) f_{ui} &= 0 \\ \delta p_n g \cdot f_u + \lambda_u f_u \cdot \zeta_n - \lambda_u \delta p_n f_u \cdot g &= 0 \end{aligned}$$

Loi de contrôle (OGY90) $\delta p_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{\zeta_n \cdot f_u}{g \cdot f_u}$

● **Ott, Grebogi & Yorke (1990)**

Il est possible de développer une formulation beaucoup plus simple pour les systèmes fortement dissipatifs (Rossler, Lorenz). En effet, la section de Poincaré se présente alors comme une courbe $y_n = h(x_n)$ autour du point fixe x_0 . En considérant les courbes de premier retour $x_{n+1} = f(x_n)$, on peut écrire

$$x_n \simeq x_0 + \left. \frac{dx}{dp} \right|_{p_0} (p - p_0) \quad \text{soit encore} \quad \zeta_n = \left. \frac{dx}{dp} \right|_{p_0} \delta p_n$$

Connaissant l'écart entre le point x_n et le point fixe x_0 , on en déduit la perturbation à appliquer au paramètre p pour ramener x_n en x_0 . La loi de contrôle est alors simplement donnée par :

$$\delta p_n = \frac{\zeta_n}{g} \quad \text{avec} \quad g = \left. \frac{dx}{dp} \right|_{p_0}$$

● **Nitsche & Dressler (1992)**

Linéarisation plus générale en suivant le même objectif, ζ_{n+1} doit être aligné sur la direction stable au point fixe \mathbf{x}_0 dans la section de Poincaré. Formulation plus générale en considérant f comme une fonction de deux variables pour la linéarisation,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, p_n) &= f(\mathbf{x}_0 + \zeta_n, p_0 + \delta p_n) \\ &\simeq f(\mathbf{x}_0, p_0) + \bar{\mathbf{J}} \zeta_n + \mathbf{b} \delta p_n \\ \zeta_{n+1} \equiv \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_0 &= \bar{\mathbf{J}} \zeta_n + \mathbf{b} \delta p_n \end{aligned} \tag{4}$$

La condition $\zeta_{n+1} \cdot \mathbf{f}_u = 0$ se traduit alors par

$$\begin{aligned} (\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s) \zeta_n \cdot \mathbf{f}_u + \delta p_n \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_u &= 0 \\ \lambda_u \zeta_n \cdot \mathbf{f}_u + \delta p_n \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_u &= 0 \end{aligned}$$

Loi de contrôle $\delta p_n = -\lambda_u \frac{\zeta_n \cdot \mathbf{f}_u}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_u}$

● Stabilisation par placement des pôles

- technique très générale pour la commande des systèmes dynamiques
- application aux systèmes non linéaires chaotiques :
Romeiras, Grebogi, Ott & Dayawansa (1992)

En partant de la linéarisation générale précédente (4), $\zeta_{n+1} = \bar{J}\zeta_n + b\delta p_n$, on considère classiquement en automatique une **boucle linéaire** $\delta p_n = -k^+\zeta_n$, ce qui permet de formuler une loi de contrôle de la forme

$$\zeta_{n+1} = (\bar{J} - bk^+)\zeta_n$$

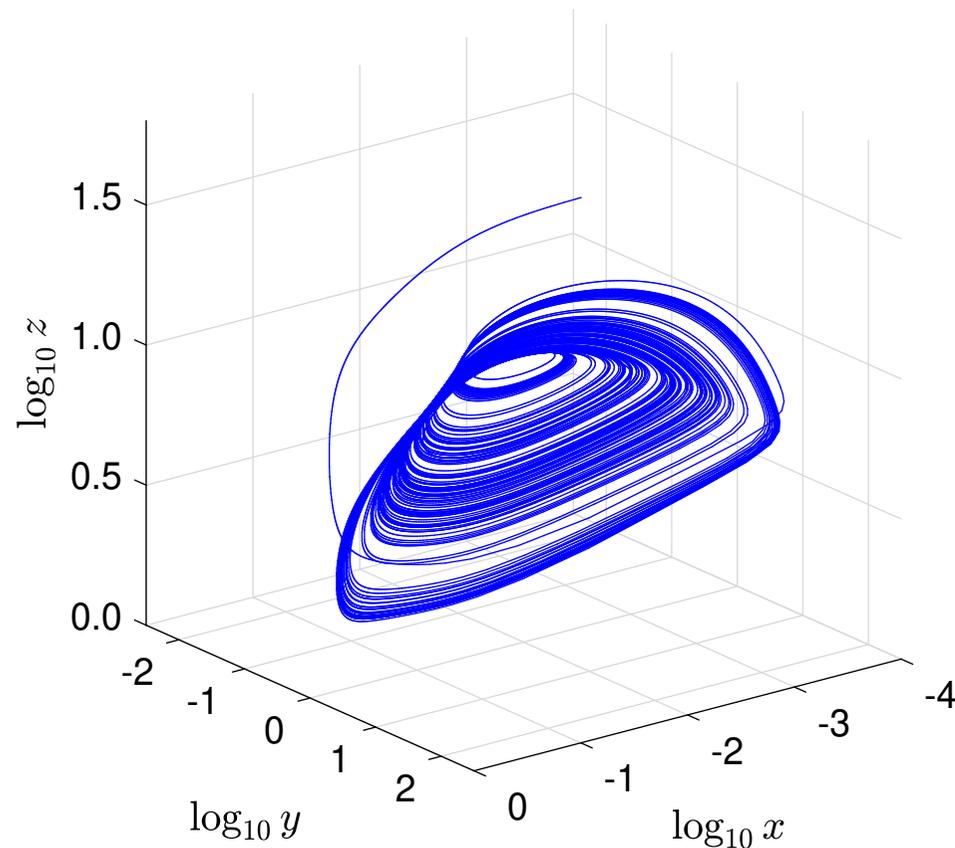
On doit alors résoudre un problème de contrôle « classique », à savoir comment choisir le vecteur k pour avoir toutes les valeurs propres de $\bar{J} - bk^+$ dans le cercle unité, et avoir ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$ (en pratique, placement des pôles avec la formulation d'Ackermann)

μ_i valeurs propres de $\bar{J} - bk^+$, si $|\mu_i| \geq 1$, alors $\mu_i \rightarrow 1/\mu_i$
(on impose $\mu_i = 0$ avec OGY90, condition plus forte)

Quelques exemples de contrôle de systèmes chaotiques

● **Modèle de Peng, Petrov & Showalter (1991)**

Modélisation d'une réaction chimique d'autocatalyse sous forme canonique avec x , y et z des concentrations.

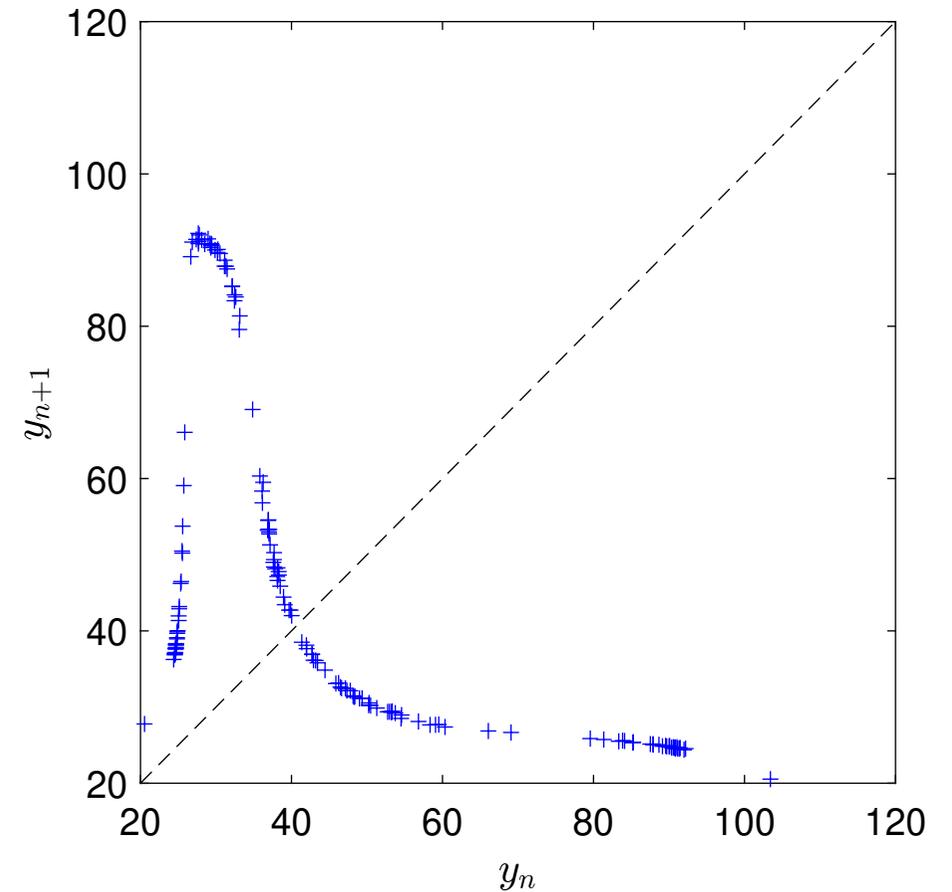
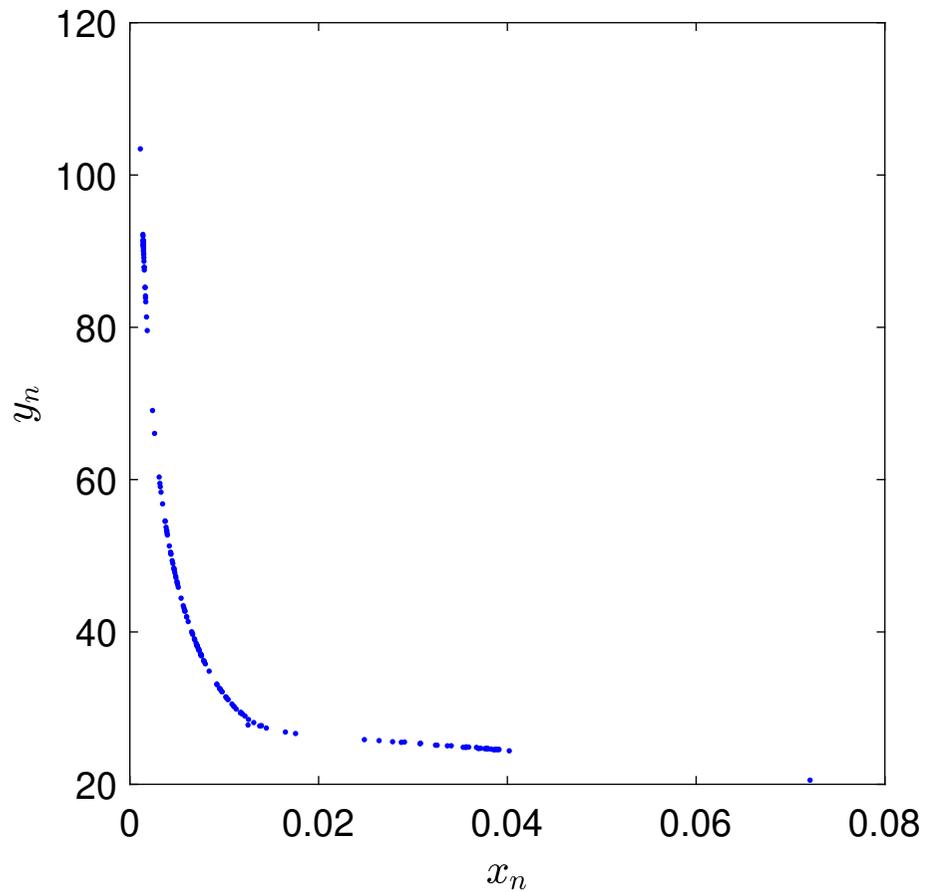


$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(\kappa + z) - x - xy^2 \\ \sigma \dot{y} = x + xy^2 - y \\ \delta \dot{z} = y - z \end{cases}$$

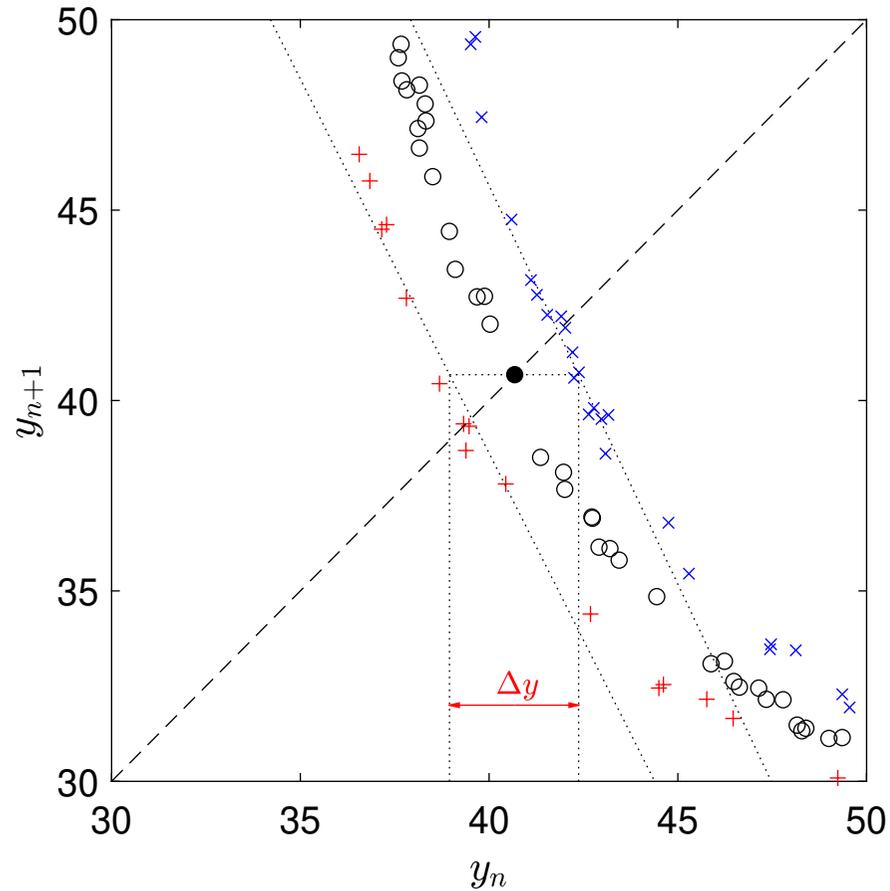
$$\begin{aligned} \kappa = 65 \quad \sigma = 5 \times 10^{-3} \quad \delta = 2 \times 10^{-2} \\ \mu = 0.154 \end{aligned}$$

On considère μ comme paramètre de contrôle (concentration d'un des réactifs précurseurs, maintenu constant dans l'expérience sans contrôle)

- **Section de Poincaré et carte de premier retour**
pour $z = 15$ et $\dot{z} > 0$, et pour y respectivement



- **Carte de premier retour pour y autour du point fixe**
(associée à la section de Poincaré $z = 15$ & $\dot{z} > 0$)



× $\mu = 0.1536$

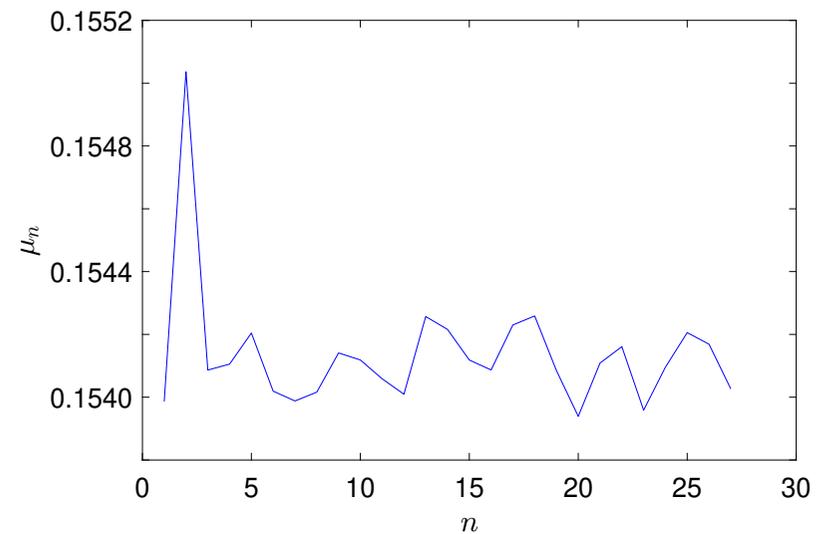
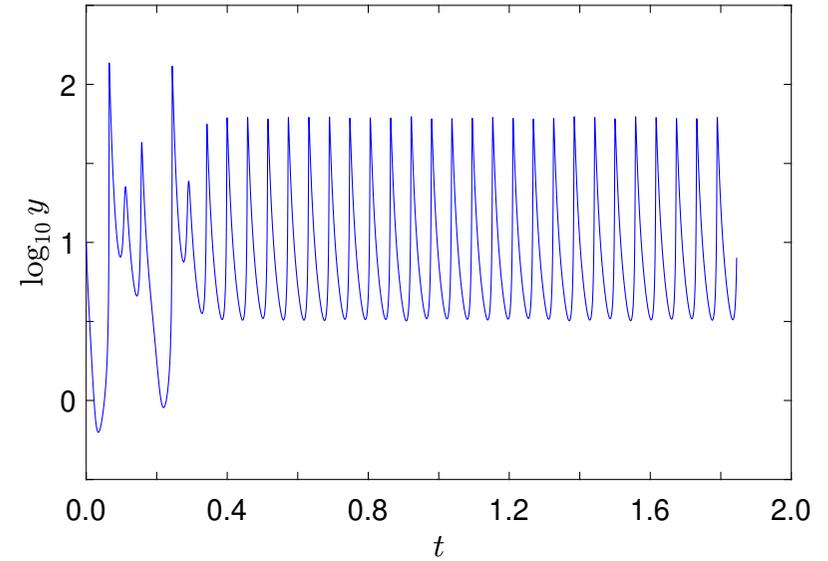
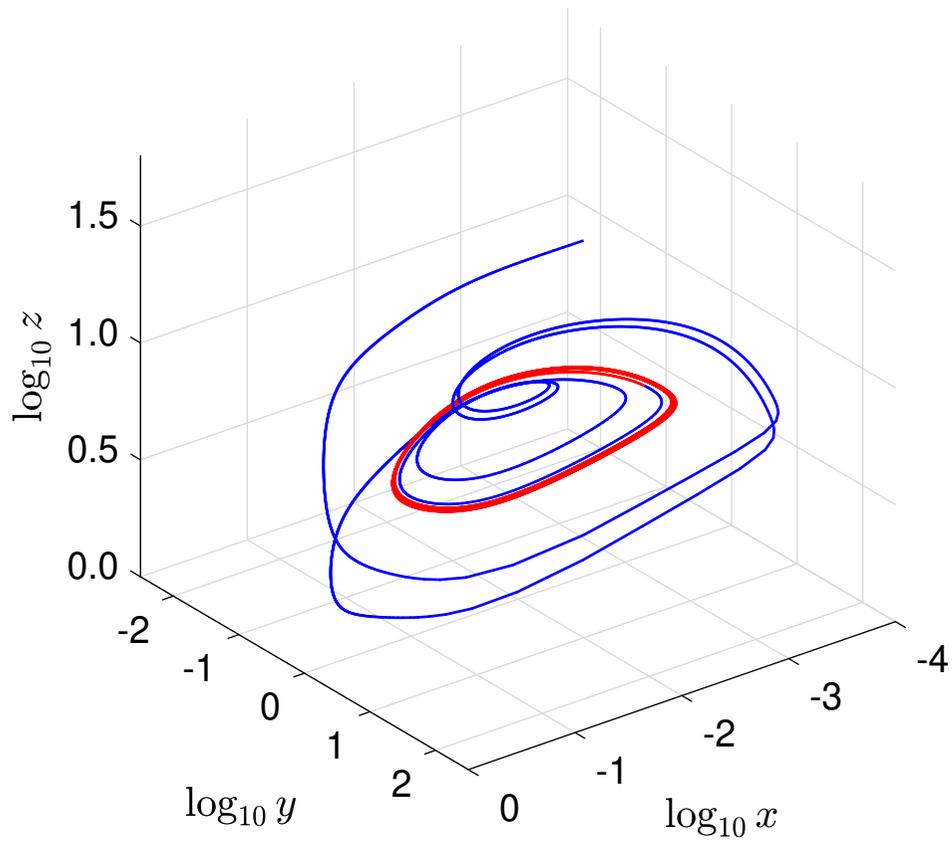
○ $\mu = 0.154$

+ $\mu = 0.1544$

● point fixe $y_0 \approx 40.6790$

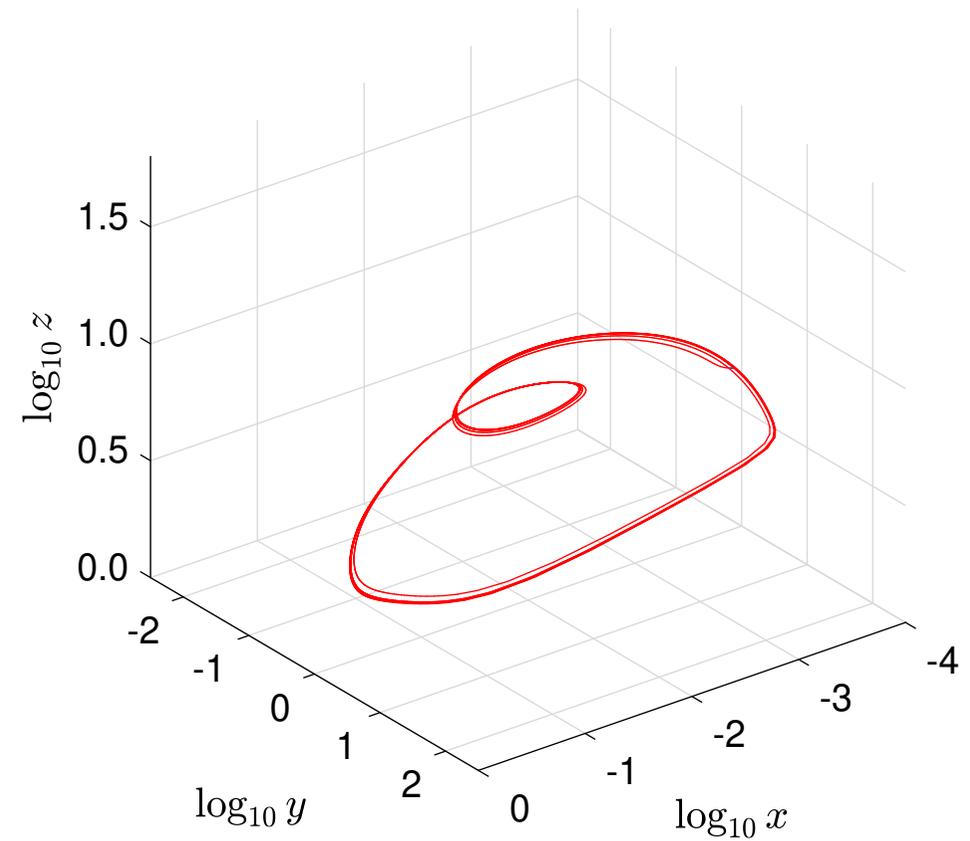
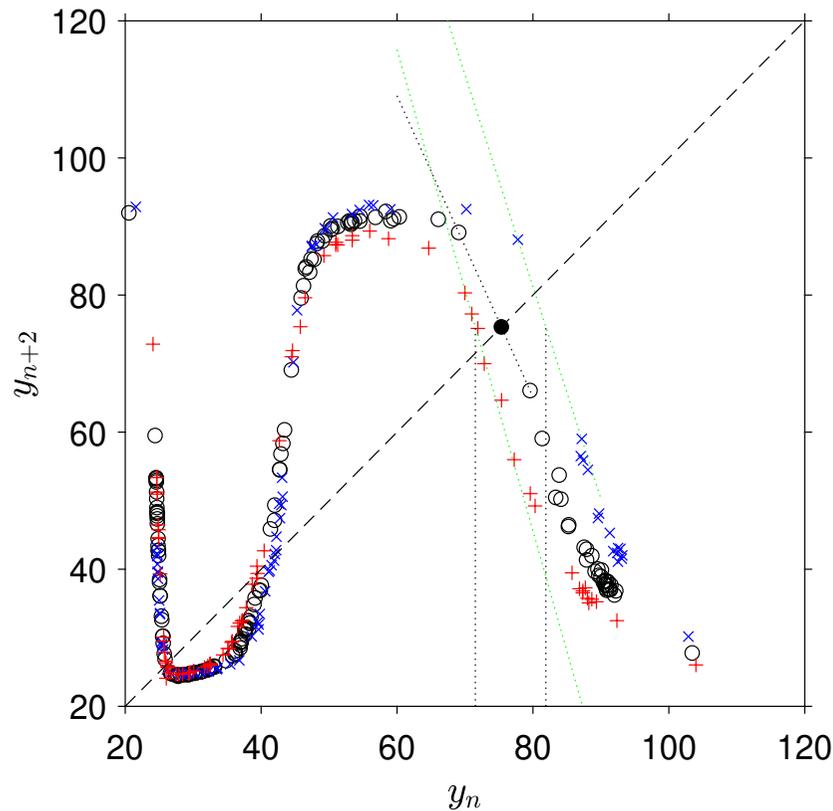
gain $g \approx \frac{\Delta y}{\Delta \mu}$

● Contrôle d'un cycle d'ordre un



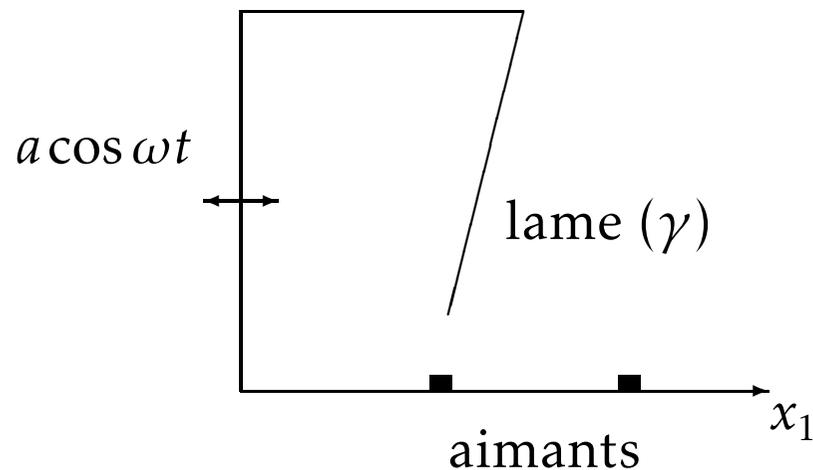
● **Contrôle d'un cycle d'ordre deux**

Même stratégie appliquée pour la carte de 2e retour de la section de Poincaré, accès à un nouveau point fixe $y_0 \approx 75.35$ (en plus de ceux du 1er retour)



● **Pendule de Moon (Duffing-Holmes)**

Moon & Holmes (1979), Moon (1980)



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + 0.5x_1(1 - x_1^2) - a \cos(\omega x_3) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

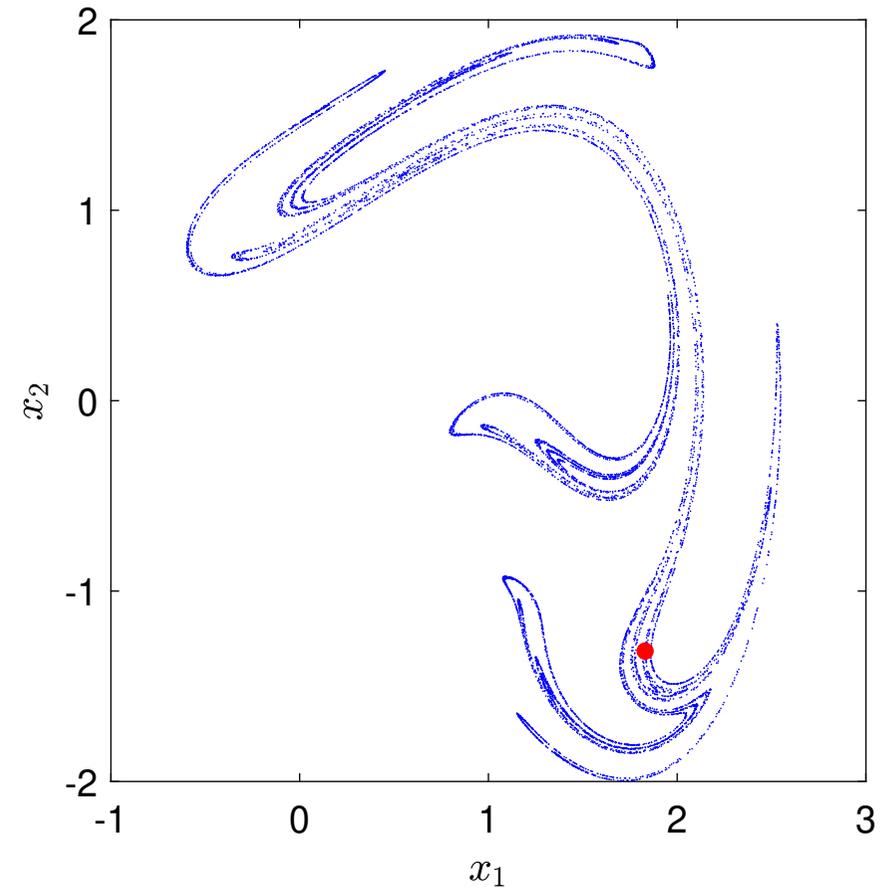
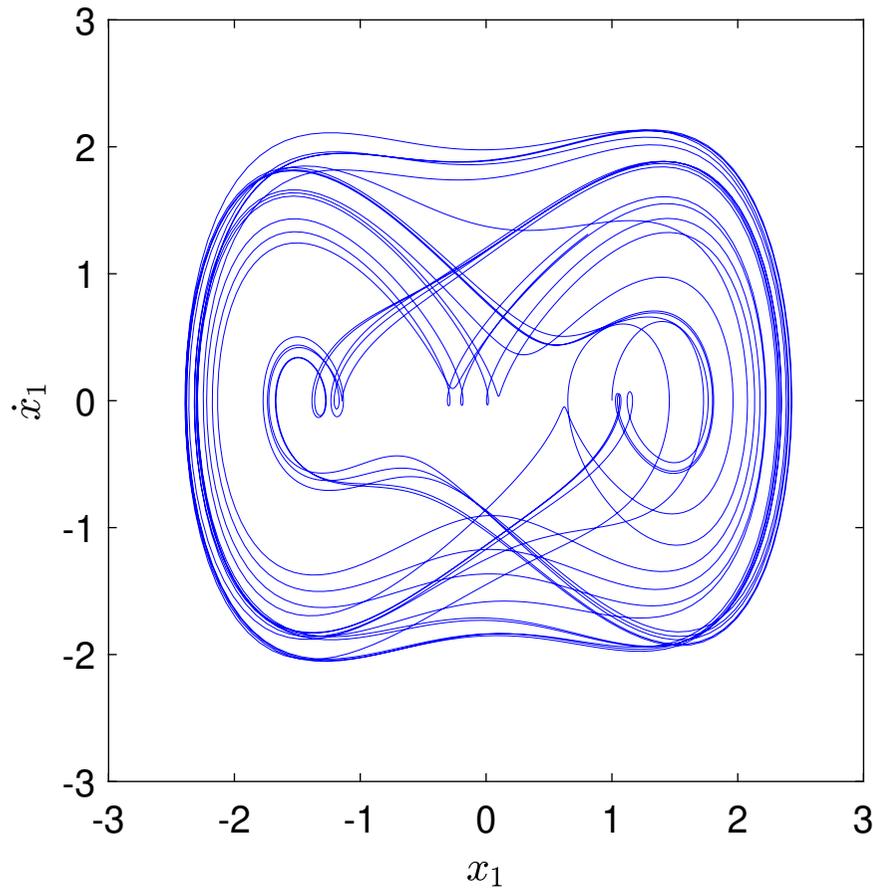
$$a = 0.9 \quad \omega = 2\pi/10 \quad \gamma = 0.08$$

- **Section de Poincaré** : $\varphi = \omega x_3 = 0$ modulo 2π , avec x_3 croissant
- On souhaite contrôler le système en pilotant l'amplitude a de l'excitation autour de sa valeur nominale a_0

Autre paramètre de contrôle possible : la fréquence angulaire ω

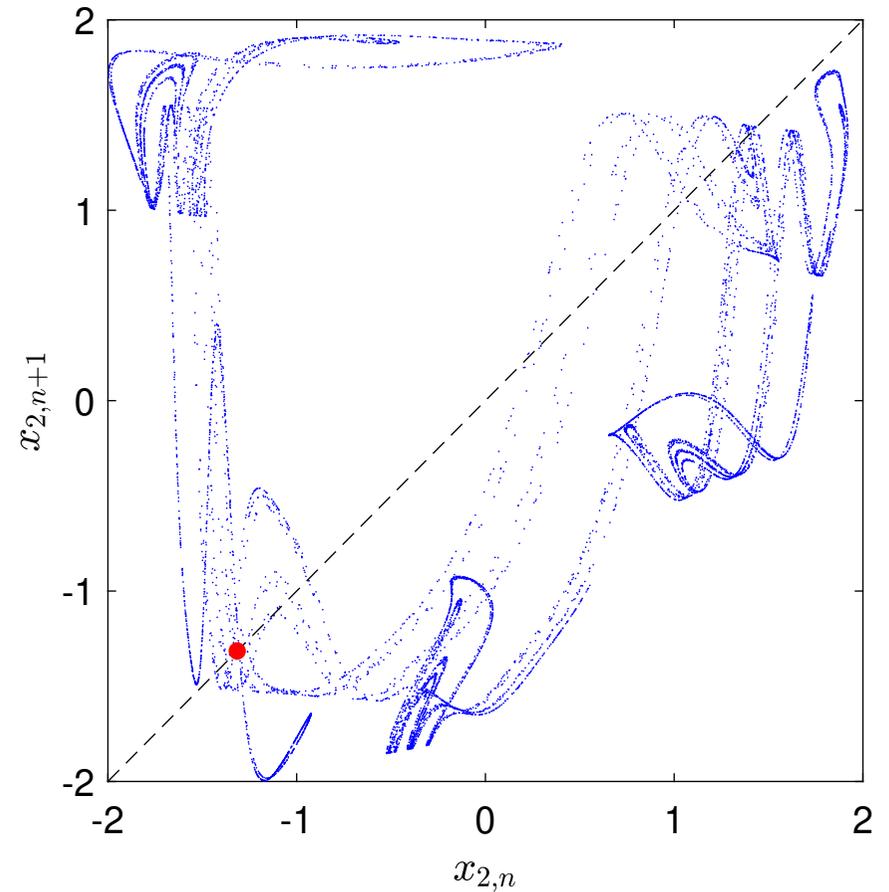
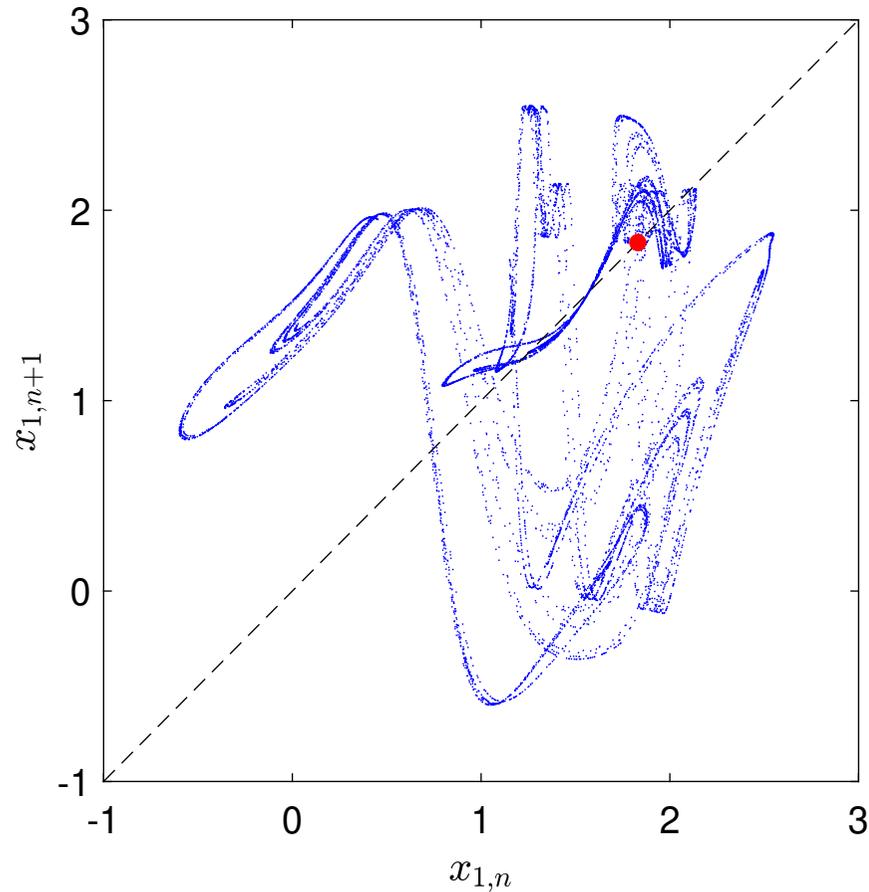
● **Pendule de Moon (Duffing-Holmes)**

Évolution des trajectoires dans le plan de phase ($x_1, \dot{x}_1 = x_2$) à gauche et section de Poincaré à droite, ● point fixe



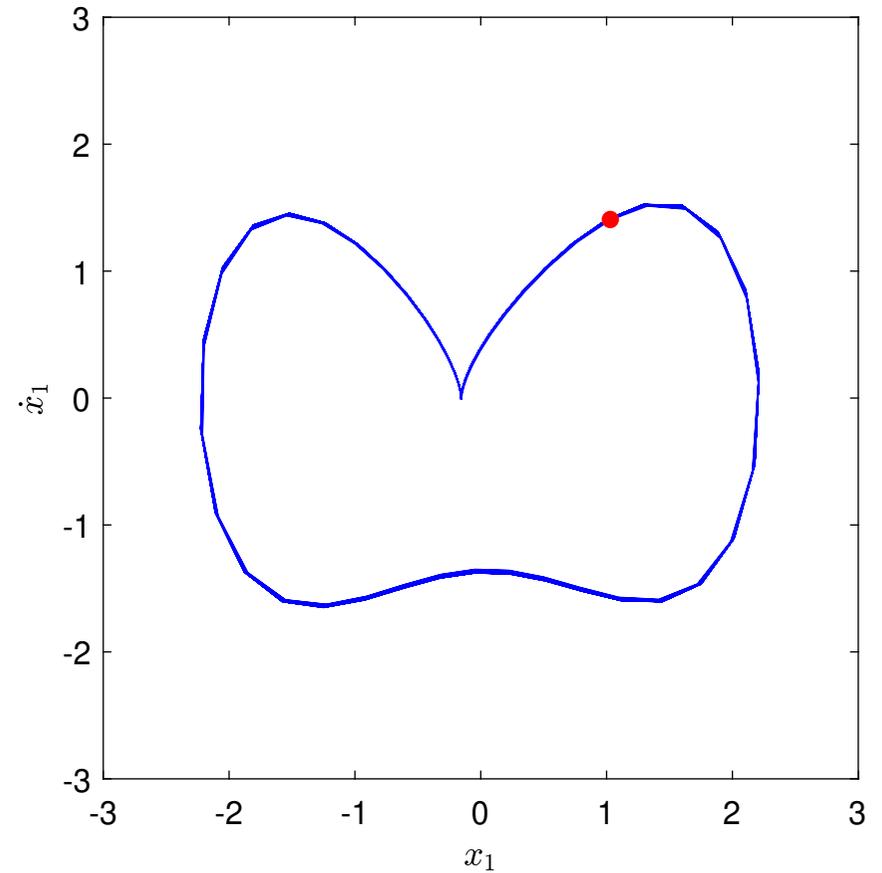
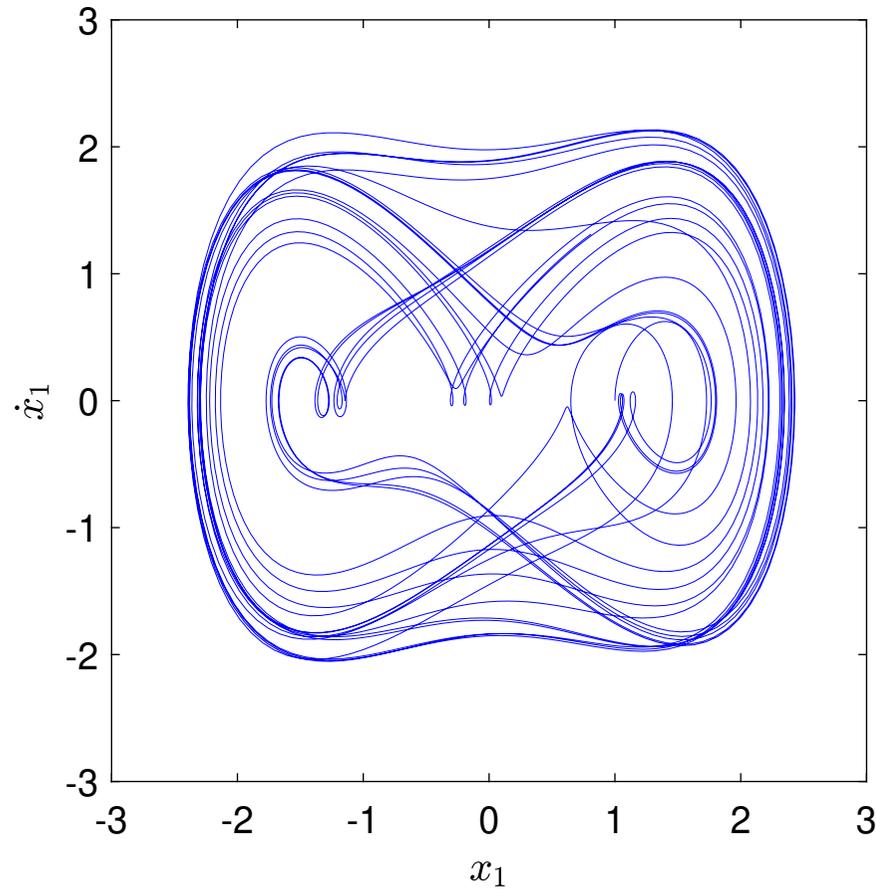
● **Pendule de Moon (Duffing-Holmes)**

Cartes de premier retour associé à la section de Poincaré pour x_1 et x_2

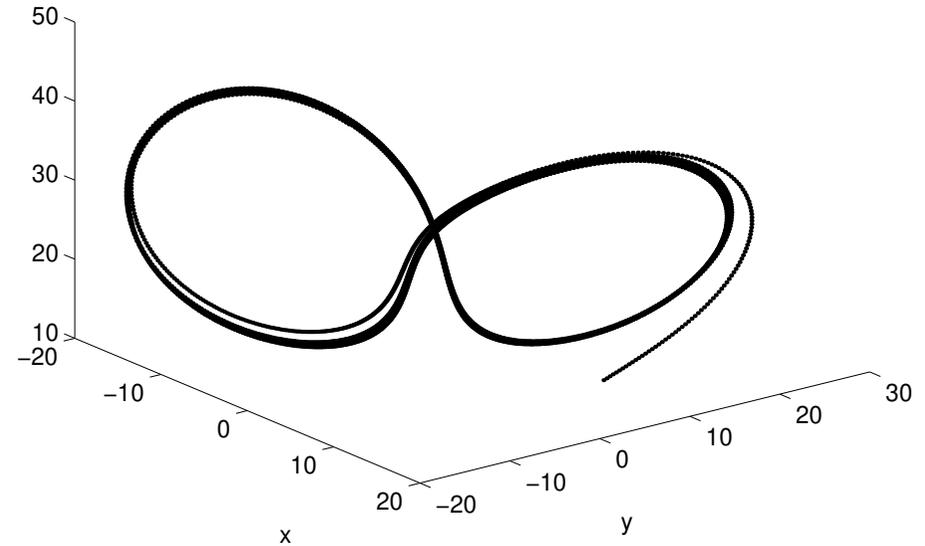
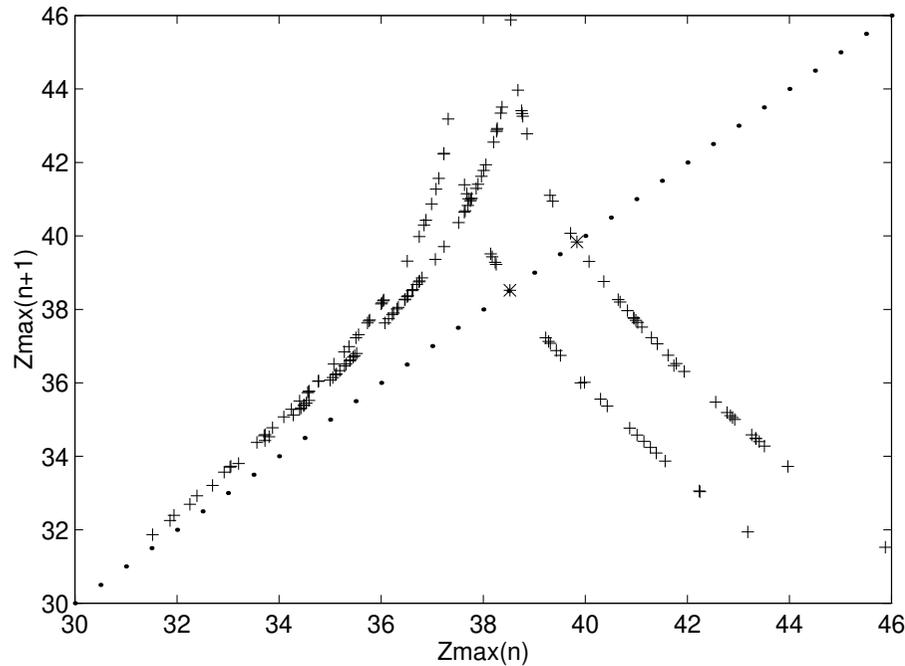


● **Pendule de Moon (Duffing-Holmes)**

Sans contrôle et avec contrôle



● Contrôle avec OGY90 sur le paramètre r



section de Poincaré

$$xy - bz = 0 \text{ pour } z = z_{\max}$$

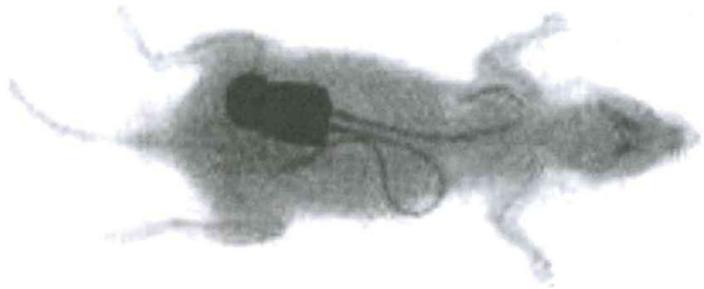
point fixe $z_{\max}^* \simeq 39.8$, $r = 27$ et $r = 28$

contrôle cycle d'ordre 1

Bailly, C. & Comte Bellot, G., 1997, Contrôle des systèmes chaotiques : quelques exemples de simulation, *Algorithmes de contrôle*, GDR de Mécanique des fluides active, 1-5.

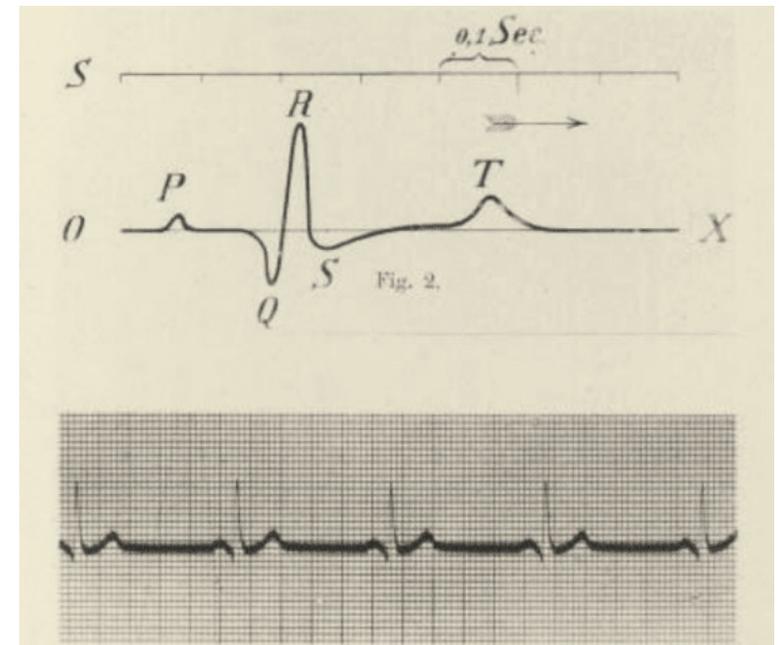
● **Arythmie cardiaque**

L'arythmie cardiaque est-elle chaotique ?



Radiographie aux rayons X d'un rat équipé d'un émetteur radio et de deux électrodes pour enregistrer par télémétrie un électrocardiogramme (Letellier, 2006, fig. 7-13)

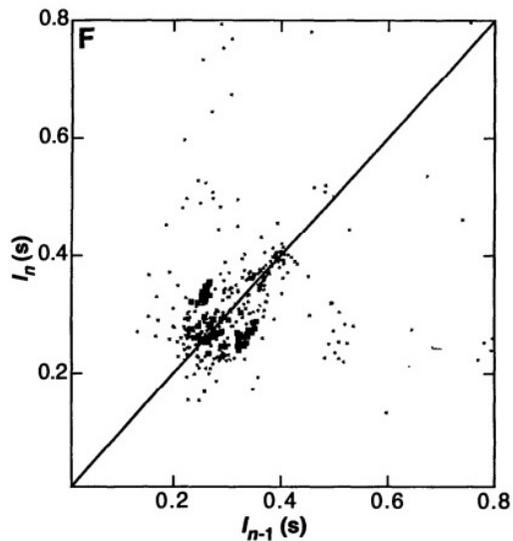
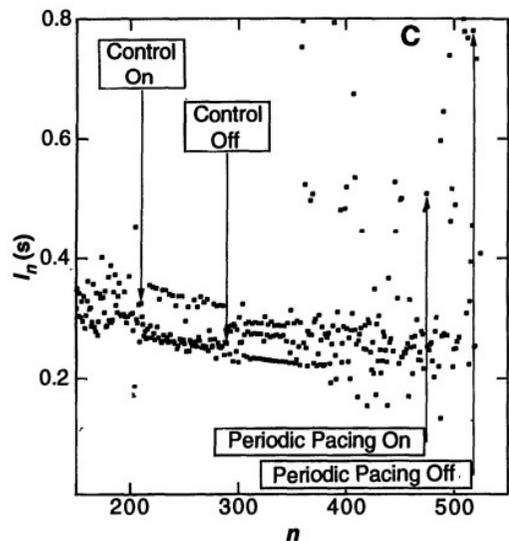
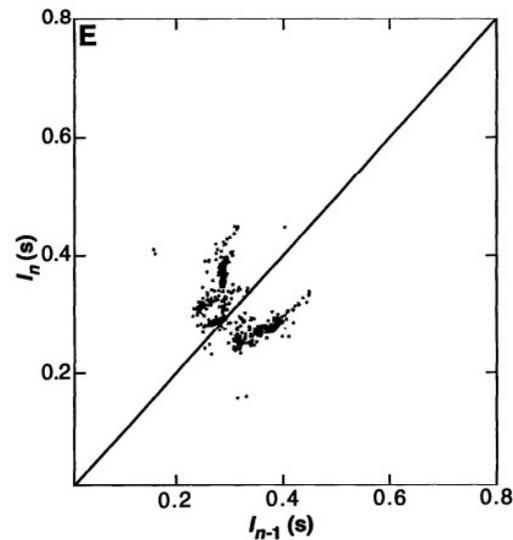
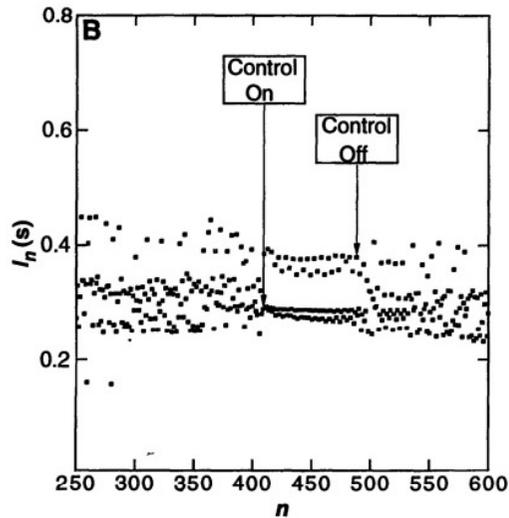
Premier électrocardiogramme mesuré par Willem Einthoven en 1903 (prix Nobel de médecine en 1924) d'un homme : séquence PQRST d'un battement cardiaque, qui va définir les intervalles RR



<https://litfl.com/willem-einthoven/>

● Arythmie cardiaque

Premiers travaux sur des lapins par Garfinkel *et al.* (1992)



Contrôle avec OGY90 (variante)

- I_n (s) intervalle RR numéro n
- reconstruction d'une section de Poincaré par la méthode des temps retardés, identification de points fixes $I_n = I_{n+1}$ correspondant à des trajectoires instables
- identification des paramètres de contrôle, et application : perte de contrôle de temps en temps (bruit, incertitudes), mais le système reprend la main rapidement
- aucun effet avec contrôle par stimulation périodique (voir la figure C)

● **Quelques remarques en conclusion**

On montre que des systèmes dynamiques déterministes, mais non linéaires et chaotiques, peuvent être contrôlés et deviennent prévisibles. On ne supprime pas le chaos, on conserve les paramètres nominaux pour la stabilisation et le contrôle n'est pas continu (peu d'énergie, certaine robustesse au bruit)

En médecine, travaux autour du contrôle du chaos à partir de signaux électriques du cerveau (Schaff *et al.*, 1994); contrôle de systèmes mécaniques; autres applications connexes avec la synchronisation de deux systèmes chaotiques (cryptage), et la modification des exposants de Liapunov

Parmi les difficultés de mise en œuvre, on note la reconstruction à la volée (en temps réel) de l'attracteur pour sa caractérisation, l'identification des paramètres de contrôle et la robustesse au bruit du processus complet (identification, algorithme, actuateurs)

Conclusion

● ... de la complexité du monde! (figure tirée de Strogatz, page 10)

