Ordre, chaos, fractales - ECL S8 ELC F-5
http://acoustique.ec-lyon.fr

TRAVAUX DIRIGÉS #1
(On traitera au choix un des trois exercices suivants)

Pendule forcé

On considère un pendule pesant amorti, qui est forcé sinusoïdalement[1] pour vérifier :

$$\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + \sin\theta = a\cos(\omega t)$$

où a est l'amplitude du forçage et ω la fréquence angulaire, en utilisant les notations du cours pour les autres variables.

1. Écrire un script sous Matlab (ou équivalent) pour intégrer cette équation. Tracer les trajectoires dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta})$ pour $\omega = 2/3$, $\eta = 0.5$ et $0.5 \leq a \leq 3$. On considèrera en particulier les deux valeurs $a = 1.07$ et $a = 1.15$.

2. Effectuer une analyse stroboscopique (section de Poincaré) du système à la période $T = 2\pi/\omega$ et observer l'attracteur correspondant aux deux valeurs de a mentionnées précédemment.

3. Lorsque l'amplitude a du forçage augmente, on observe des plages de paramètres où l'attracteur est périodique et d'autres où il est chaotique. Tracer le diagramme de bifurcation correspondant en faisant varier lentement a de façon régulière, et porter en abscisse la valeur de a et en ordonnée les valeurs atteintes par θ (ou $\dot{\theta}$) partant de conditions initiales déterminées, et en éliminant le régime transitoire.

Oscillateur de van der Pol

On s'intéresse à l'équation de van der Pol,[2] écrite sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\epsilon - \theta^2\right)\frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

1. Analyser la stabilité linéaire du point d'équilibre. Utiliser le théorême de Hopf pour montrer qu'un cycle limite existe pour $\epsilon > 0$.

2. Tracer quelques portraits de phase de l'équation de van der Pol pour les deux valeurs $\epsilon = 0.2$ et $\epsilon = 2$. On prendra plusieurs conditions initiales en cherchant à mettre en évidence la convergence vers le cycle limite.

3. Pour des valeurs croissantes du paramètre ϵ, tracer l'allure de $\theta(t)$. Pour chaque valeur de ϵ calculer et tracer la densité spectrale de puissance du signal. Analyser l'enrichissement en harmoniques lorsque ϵ croît.

4. Caractériser l'évolution de la taille du cycle limite en fonction de ϵ. Montrer numériquement que la taille du cycle limite varie comme $\sqrt{\epsilon}$, lorsque ϵ reste très petit devant 1.

Attention à bien laisser au transitoire un temps suffisant pour s'éteindre (ce temps augmente fortement quand ϵ diminue) pour ces 2 dernières questions.

Modèle proies-prédateurs de May

Lire le texte de May[3](fichier pdf à télécharger), où x désigne la population des proies et y la population des prédateurs.

1. Commenter le modèle proposé.

2. Développer les différentes étapes du calcul (points d'équilibre et stabilité ; on fixera les paramètres bd/a et $c/(af)$ à 0.1 et 1 respectivement et on fera évoluer e/a).

3. Résoudre numériquement le système pour mettre en évidence un cycle limite pour une valeur de e/a convenablement choisie.

4. Effectuer enfin une étude paramétrique en fonction de e/a afin d'examiner les possibilités de position d'équilibre stable et de cycle limite. Caractériser l'évolution de x en fonction du temps pour différentes valeurs de e/a (dans la zone instable) et analyser les densités spectrales de puissance associées. Trouver un ensemble invariant simple pour lequel on peut appliquer le théorème de Poincaré-Bendixon.

Références

[1] P. Manneville, 2004, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique.

[2] B. van der Pol, LXXXVIII. On "relaxation-oscillations" Philosophical Magazine Series 7, **2** (1926) 978-992.

[3] R.M. May, Stability and complexity in model ecosystems, Princeton University Press, Princeton, 1973.