

TRAVAUX DIRIGÉS #2

Attracteur de Hénon (partie 1)

L'attracteur de Hénon¹ est défini à partir de l'application f du plan suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (1)$$

où a et b sont deux paramètres numériques. Dans la suite, on prendra $b = 0.3$.

1. Choisir quelques valeurs de a entre -0.1225 et 0.3675 et tracer la suite des itérés $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ à partir de la position initiale $x_0 = y_0 = 0$. Justifier le choix de la borne $a = -0.1225$ en recherchant les points fixes de l'application.
2. Choisir maintenant des valeurs de a comprises entre 0.3675 et 1.06. Quelles observations peut-on faire? Justifier le choix de la borne $a = 0.3675$ en étudiant la stabilité linéaire des points fixes de l'application.
3. Etudier les points fixes de l'application $f \circ f$ (période 2) et examiner numériquement leur stabilité.
4. Tracer le diagramme de bifurcation de l'application, c'est-à-dire l'évolution en fonction du paramètre a des valeurs x_n obtenues après un nombre *suffisant* d'itérations, pour que les points se situent sur l'attracteur de l'application (on pourra faire varier a de 0.2 à 1.4 avec un pas assez fin). Quels types de comportements observe-t-on (on illustrera par quelques tracés significatifs)?
5. On choisit maintenant et pour toute la suite $a = 1.3$ et $b = 0.35$; Tracer l'attracteur correspondant (il s'agit d'un attracteur étrange; il est nécessaire de considérer un très grand nombre de points pour bien visualiser sa structure).

Attracteur de Hénon (partie 2)

1. On choisit pour toute la suite $a = 1.4$ et $b = 0.3$ pour le système (1). Tracer l'attracteur étrange correspondant (quelques zooms seront utiles).
2. Déterminer une valeur approchée de la dimension fractale de cet attracteur (dimension de corrélation ou dimension ponctuelle; attention : à nouveau il faut considérer un grand nombre de points pour évaluer correctement cette dimension).
3. Déterminer les deux exposants de Lyapunov de l'attracteur (méthode simple et utilisation de la contraction des aires; ou mieux approche rigoureuse); calculer sa dimension de Lyapunov et la comparer à la valeur déterminée précédemment.
4. Déterminer le bassin d'attraction de l'application de Hénon. Pour cela, on étudiera pour un quadrillage assez fin de conditions initiales la position par rapport à l'attracteur d'un itéré (x_n, y_n) pour n suffisamment grand (si les itérés ne partent pas à l'infini, on considère que la position initiale appartient au bassin d'attraction).

Référence

¹ M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, Commun. Math. Phys., 50 (1976) 69-77.