Ordre, Chaos, Fractales - ECL S8 ELC F-5
http://acoustique.ec-lyon.fr

TRAVAUX DIRIGÉS #3

Application logistique et Cascade sous-harmonique

On considère l'itération suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{avec} \quad f(x) = ax(1-x) \quad \text{et} \quad 0 < x < 1$$

1. Le maximum de la fonction f devant rester inférieur à 1, montrer que $a < 4$.

2. Pour $a < 1$, montrer par une construction géométrique simple que les trajectoires sont attirées vers l'origine $x = 0$.

3. Pour $1 < a < 4$, montrer que $a = 3$ est la limite entre un équilibre stable et un équilibre instable. Illustrer le calcul par quelques tracés typiques des itérés x_n en fonction de n.

4. Lorsque $a > 3$, on décide de s'intéresser à la deuxième itération $x_{n+2} = f[f(x_n)]$. Tracer la fonction $f^2 = f[f]$ pour les deux valeurs du paramètre $a = 2.707$ et $a = 3.414$, ainsi que l'évolution des itérés en fonction de n. Examiner les possibilités d'équilibre et leur stabilité ; on montrera en particulier que les points fixes de f^2 sont stables pour $3 < a < 1 + \sqrt{6}$. Dans le cas stable, décrire l'apparition d'un cycle de période double (sous-harmonique) en précisant les positions x offertes.

5. Tracer le *diagramme de bifurcation* de l'application, c'est à dire le diagramme qui indique en fonction de la valeur du paramètre a (variant de 0 à 4) les différentes valeurs x_n qui peuvent être atteintes pour $n \to \infty$ (on veillera donc à laisser s'éteindre les transitoires, ce qui peut être long, spécialement près des points de bifurcation). Ce processus est appelé cascade sous-harmonique. Quelques tracés de l'évolution des itérés x_n en fonction de n illustreront les différentes régions (sous-harmoniques, zones chaotiques, fenêtres de périodicité).

6. Nombre de Feigenbaum (approche naïve). Déterminer numériquement les premières valeurs a_i du paramètre correspondant au doublement de la période par bifurcation sous-harmonique, et estimer ainsi la limite :

   $$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i+1} - a_i}$$

   où δ est un nombre universel, le nombre de Faigenbaum, indépendant du choix de la fonction f tant que celle-ci reste unimodale.

7. (plus difficile ; voir par exemple le livre de Strogatz). Pour obtenir une évaluation plus précise, on utilise la suite des points super stables s_i de l'application (i.e. pour lesquels la dérivée première s'annule). En effet on peut montrer que δ est aussi donné par la formule suivante :

   $$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i+1} - s_i}$$

   Estimer δ à partir de la détermination des six premiers points super stables (s_i est la valeur de a pour laquelle l'application possède un cycle d'ordre i super stable).