Ordre, Chaos, Fractales - ECL S8 ELC F-5
http://acoustique.ec-lyon.fr

Travaux dirigés #4

Fractales de Newton

Un des algorithmes les plus efficaces pour approcher numériquement une racine $z^\star$ de l'équation $f(z)=0$ est celui proposé par Isaac Newton (1669) et Joseph Raphson (1690). Sous sa forme moderne, cette méthode consiste à construire la suite :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{1}$$

qui converge quadratiquement vers $f(z^\star)=0$ lorsque z_0 est choisie dans le voisinage de $z^\star$ avec $f'(z^\star)\neq 0$, f étant une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$. Cet algorithme a ensuite été appliqué pour rechercher des racines z complexes de polynômes. [1] On s'intéresse ici à l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}$ associé à la suite (z_n), qui est défini comme l'ensemble des points $z_0 = x_0 + iy_0$ du plan pour lesquels la suite (z_n) définie par (1) reste bornée lorsque $n\to\infty$. Lorsque la fonction f est un polynôme de degré p, cet ensemble est constituté des p bassins d'attraction associés aux p racines complexes $z_p^\star$, et de l'ensemble de Julia proprement dit $\mathcal{J}$ contenant les points z_0 pour lesquelles la suite (1) ne converge pas vers l'une des p racines, tout en restant bornée. On peut montrer que tout point de $\mathcal{J}$ contient dans son voisinage un point de chaque bassin d'attraction associé à toutes les racines $z_p^\star$. Un exemple de représentation est donné avec la figure 1 pour le polynôme $f(z)=z^3-1$.

1. Tracer séparément l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}$ et la fractale de Newton $\mathcal{J}$ pour quelques polynômes, par exemple : $f(z)=z^4-1$, $f(z)=z^5-1$, $f(z)=z^3-3^2$, $f(z)=z^6-iz-1$, $f(z)=z^8+15z^4-16$, ...

   Deux remarques : il faut une discrétisation spatiale assez fine pour pouvoir tracer correctement la fractale de Newton, et on peut enrichir « artistiquement » les figures des bassins d'attraction en introduisant une troisième dimension associée à la rapidité de la convergence.

2. Mettre en évidence le caractère fractal (dimension, autosimilarité, ...)

3. Il existe des variantes à l'algorithme de Newton (1). On peut citer par exemple :

   - méthode de Newton relaxée :

   $$z_{n+1} = z_n - h\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \qquad 0<h\leq 1 \tag{2}$$

   - super-Newton :

   $$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f^2(z)f''(z)}{2f'^3(z)} \tag{3}$$

   - méthode de Halley (1694) :

   $$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n) - f(z)f''(z)/(2f'(z))} \tag{4}$$

[1] D'une manière plus générale, pour rechercher une racine de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$ avec $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^n$, on construit l'algorithme de Newton-Raphson suivant : $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ où $\boldsymbol{J}$ est la matrice jacobienne associée à $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} = \left\{\begin{array}{l} f(x,y) \\ g(x,y)\end{array}\right. \qquad \boldsymbol{J}^{-1} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} g_y & -f_y \\ -g_x & f_x\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \frac{1}{f_x g_y - g_x f_y}\left\{\begin{array}{l} g_y f - f_y g \\ f_x g - g_x f\end{array}\right.$$

Le cas d'une fonction complexe $f+ig$ de variable complexe $z=x+iy$ est un cas particulier, qui peut s'écrire comme (1) en se rappelant les relations de Cauchy-Riemann $\partial_x f = \partial_y g$ et $\partial_y f = -\partial_x g$.

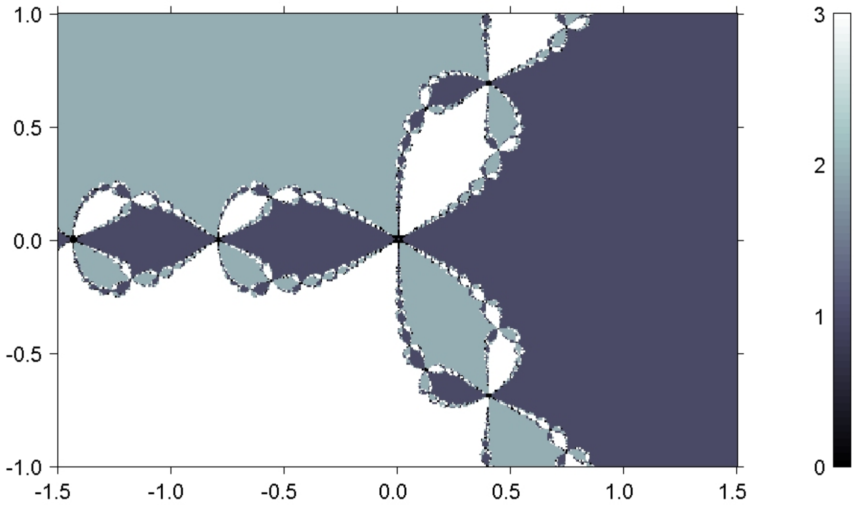

FIGURE 1 – Bassin d'attraction de Newton pour $f(z) = z^3 - 1$. Les points appartenant respectivement aux bassins d'attractation des trois racines $z^\star = 1$, $-0.5 + i\sqrt{3}/2$ et $-0.5 - i\sqrt{3}/2$ sont indicés 1, 2 et 3 en niveau de couleur. La fractale de Newton proprement dite est l'ensemble des points pour lesquels la suite (1) reste bornée, et qui n'appartiennent à aucun des bassins d'attraction associés aux racines de $f(z) = 0$. Ces points sont associès à la valeur 0 sur cette figure.

Examiner ces trois méthodes en traçant les bassins d'attractions pour un exemple de polynôme. Commenter ces méthodes d'un point de vue numérique (convergence, généralisation à d'autres fonctions que des polynômes, ...).

Références

[1] Hubbard, J., Schleicher, D. & Sutherland, S., 2001, « How to find all roots of complex polynomials by Newton's method », *Inventiones Mathematicae*, 146.

[2] Kneisi, K., 2001, « Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method », *Chaos*, 11(2), 359-370.