

TRAVAUX DIRIGÉS #6

Étude du flot de Rössler

Le flot suivant a été développé par Rössler<sup>1</sup> pour analyser sous une forme simple certaines réactions chimiques ; des variantes de ce système ont aussi été utilisées pour l'étude de comportements irréguliers ou chaotiques en économie :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z \end{cases}$$

Dans ce système,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres pouvant être choisis arbitrairement. Pour certaines valeurs de ceux-ci, par exemple  $a = b = 0.2$  et  $c = 5.7$ , le flot présente un caractère chaotique qu'on se propose d'étudier.

1. Quelles sont les positions d'équilibre possible du système? Analyser leur stabilité linéaire.
2. Intégrer numériquement le système de Rössler et tracer les signaux  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ . Quelle conclusion suggèrent ces tracés?
3. Tracer la projection des trajectoires du flot dans les plans  $(x, y)$  et  $(x, \dot{x})$ .
4. Tant que  $z$  reste petit, on peut remarquer que la trajectoire ressemble à une spirale dans le plan  $(x, y)$ . Développer alors quelques considérations dynamiques simples pour montrer que cela est possible et que  $x(t)$  et  $y(t)$  oscillent en quadrature (par exemple, partir de  $x < c$ , ce qui implique  $\dot{z} < 0$  si  $b$  est suffisamment petit).
5. Former la section de Poincaré obtenue par la coupe des trajectoires tridimensionnelles par le plan  $y + z = 0$ . Pourquoi ce choix est-il particulièrement intéressant? Tracer le graphe représentant la valeur d'un maximum en fonction de sa valeur précédente (carte de premier retour). Quel résultat important obtient-on? Que peut-on en conclure, qualitativement, quant à la dimension fractale de l'attracteur?
6. Illustrer par un tracé tridimensionnel la sensibilité aux conditions initiales ainsi que les étirements et repliements des trajectoires de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ . Estimer la valeur du plus grand exposant de Lyapounov du flot en calculant l'évolution au cours du temps de la distance entre deux points voisins de l'attracteur.
7. Calculer la dérivée de Lie du flot  $d\dot{x}/dx + d\dot{y}/dy + d\dot{z}/dz$ . Déterminer la valeur moyenne de cette quantité sur une trajectoire et conclure quant au caractère dissipatif du flot de Rössler. Relier ce résultat à la remarque concernant la dimension de l'attracteur.

Référence

<sup>1</sup> Rössler, O.E., 1976, Different types of chaos in two simple differential equations, *Zeitschrift für Naturforschung*, Teil A, 31(12), 1664–1670.