

TRAVAUX DIRIGÉS #8

Attracteur de Lorenz

On s'intéresse au flot le plus célèbre du chaos déterministe, proposé par Lorenz^{1,2}

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

avec les valeurs suivantes des paramètres $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$. Dans un cadre plus général, on considère que r est le paramètre de contrôle du système.

1. Quelles sont les positions d'équilibre possibles du système? Analyser leur stabilité linéaire.
2. Intégrer numériquement le flot de Lorenz et tracer les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Quelle conclusion suggèrent ces tracés?
3. Former la section de Poincaré obtenue par la coupe des trajectoires tridimensionnelles par la surface $xy - bz = 0$. Pourquoi ce choix est-il particulièrement intéressant? Tracer le graphe représentant la valeur d'un maximum en fonction de sa valeur précédente (carte de premier retour). Quel résultat important obtient-on? Que peut-on en conclure, qualitativement, quant à la dimension fractale de l'attracteur?
4. Examiner la section de Poincaré définie à partir du plan $z = r - 1$, et commenter.
5. Calculer la dérivée de Lie du flot $d\dot{x}/dx + d\dot{y}/dy + d\dot{z}/dz$. Relier ce résultat à la remarque concernant la dimension de l'attracteur.
6. Illustrer par un tracé tridimensionnel la sensibilité aux conditions initiales ainsi que les étirements et repliements des trajectoires de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Estimer le spectre des exposants de Lyapunov avec l'algorithme de Benettin (cf. transparents du cours).
7. Considérer le cas $r = 100.5$. Que peut-on dire du comportement du système dans ce cas?

Références

¹ Lorenz, E.N., 1963, Deterministic nonperiodic Flow, *Journal of the atmospheric sciences*, **20**, 130–141.

² Motter, A.E. & Campbell, D.K., Chaos at fifty, *Physics Today*, **66**(5), 27–33. See also **67**(3), 9–10.