Travaux dirigés #8

Attracteur de Lorenz

On s'intéresse au flot le plus célèbre du chaos déterministe, proposé par Lorenz[1,2]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

avec les valeurs suivantes des paramètres $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$. Dans un cadre plus général, on considère que r est le paramètre de contrôle du système.

1. Quelles sont les positions d'équilibre possibles du système ? Analyser leur stabilité linéaire.

2. Intégrer numériquement le flot de Lorenz et tracer les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Quelle conclusion suggèrent ces tracés ?

3. Former la section de Poincaré obtenue par la coupe des trajectoires tridimensionnelles par la surface $xy - bz = 0$. Pourquoi ce choix est-il particulièrement intéressant ? Tracer le graphe représentant la valeur d'un maximum en fonction de sa valeur précédente (carte de premier retour). Quel résultat important obtient-on ? Que peut-on en conclure, qualitativement, quant à la dimension fractale de l'attracteur ?

4. Examiner la section de Poincaré définie à partir du plan $z = r - 1$, et commenter.

5. Calculer la dérivée de Lie du flot $d\dot{x}/dx + d\dot{y}/dy + d\dot{z}/dz$. Relier ce résultat à la remarque concernant la dimension de l'attracteur.

6. Illustrer par un tracé tridimensionnel la sensibilité aux conditions initiales ainsi que les étirements et repliements des trajectoires de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Estimer le spectre des exposants de Lyapunov avec l'algorithme de Benettin (cf. transparents du cours).

7. Considérer le cas $r = 100.5$. Que peut-on dire du comportement du système dans ce cas ?

Références

[1] Lorenz, E.N., 1963, Deterministic nonperiodic Flow, *Journal of the atmospheric sciences*, **20**, 130–141.

[2] Motter, A.E. & Campbell, D.K., Chaos at fifty, *Physics Today*, **66**(5), 27–33. See also **67**(3), 9–10.