Travaux dirigés #9

Mélange chaotique : les tourbillons *clignotants*

On considère l'écoulement bidimensionnel de fluide incompressible induit par deux tourbillons ponctuels corotatifs et de même intensité Γ. Les tourbillons s'allument et s'éteignent alternativement avec une période $2T$, voir la figure 1. Plus précisément, pour $2kT \leq t \leq (2k+1)T$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots$, le tourbillon placé en $(a, 0)$ est allumé tandis que le tourbillon en $(-a, 0)$ est éteint. La situation est inversée pour $(2k+1)T \leq t \leq 2(k+1)T$. Lorsque $T = 0$ les deux tourbillons sont allumés simultanément en permanence.

L'écoulement induit par un tourbillon unique s'exprime facilement à l'aide de coordonnées polaires centrées sur le tourbillon considéré par $v_r = 0$ et $v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$. Les tourbillons font donc tourner les particules du fluide sur des cercles concentriques, d'un angle $\Delta\theta$, alternativement autour de chaque centre (noter qu'il n'y a aucune intégration numérique à réaliser !).

Si on observe la position d'une particule aux temps $t_k = 2kT$, on réalise une section de Poincaré de l'écoulement, classique pour un système soumis a une excitation périodique (stroboscopie). La carte bidimensionnelle qui en résulte dépend du paramètre de contrôle $\beta = \Gamma T/(2\pi a^2)$. On se propose d'étudier l'écoulement pour des valeurs croissantes du paramètre de perturbation β à partir de l'état stationnaire $\beta = 0$.

1. Rappeler pourquoi l'écoulement correspondant à $\beta = 0$ est hamiltonien et intégrable.

2. Tracer les trajectoires des particules fluides pour des valeurs croissantes de β (par exemple $\beta = 0.01, 0.15, 0.25, 0.35$ et 0.5). On pourra considérer une vingtaine de conditions initiales différentes pour un nombre suffisant d'itérations. Commenter les tracés dans une perspective d'efficacité de mélange.

3. Pour mieux illustrer les propriétés de mélange de l'écoulement, on considère une « tache » de particules (un grand nombre de particules situées dans un cercle de faible rayon) et on observe la position de ces particules après quelques iterations (typiquement 20). Étudier la dispersion de la tache en fonction de la valeur de β (par exemple 0.1, 0.5, 1) et de différentes positions initiales de la tache. Quelques exemples sont donnés sur la figure 2

4. Pour quantifier l'aspect plus ou moins chaotique de l'écoulement, estimer l'évolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de β, pour une dizaine de valeurs comprises entre 0.1 et 2 (on considèrera des particules très voisines situées initialement au voisinage du centre d'un tourbillon).

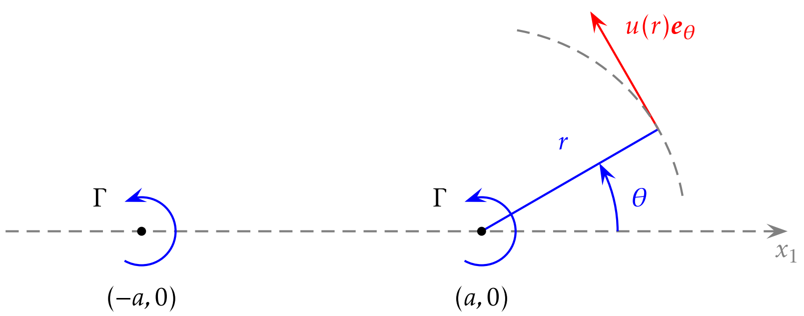
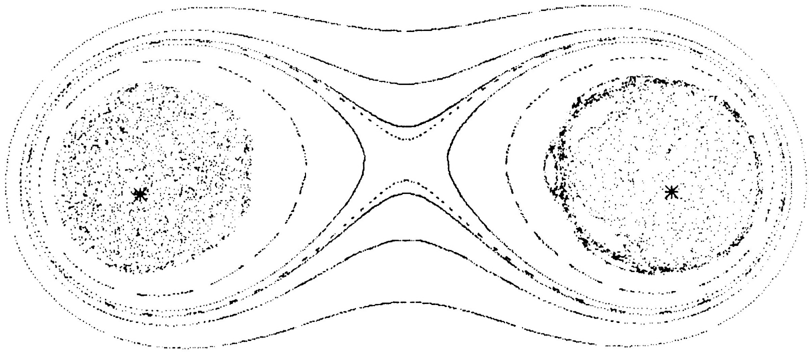
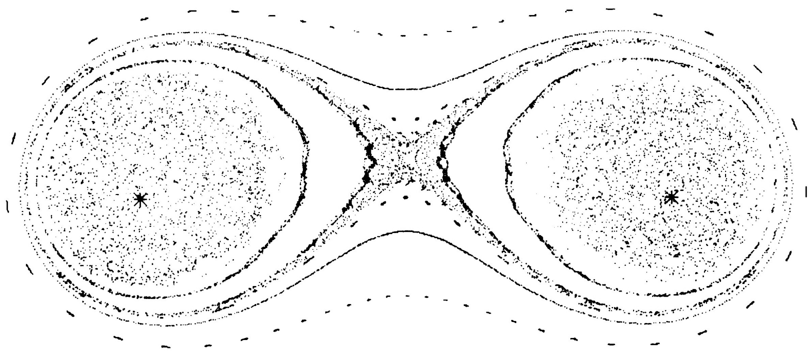


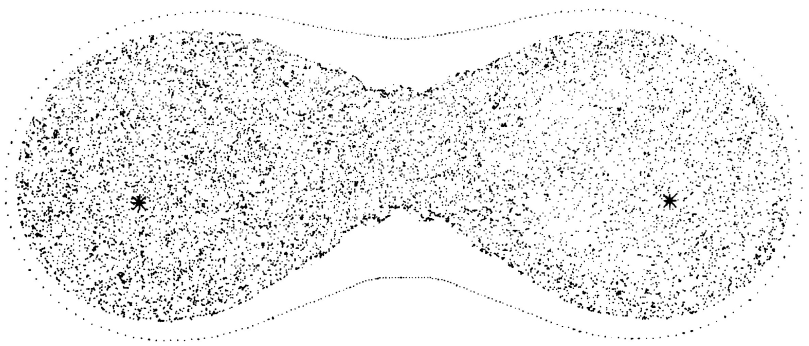
Figure 1 – Schéma des tourbillons clignotants



(*c*)



(*d*)



(*e*)

Figure 2 – Dispersion de particules, (c) $\beta = 0.25$, (d) $\beta = 0.3$ et (e) $\beta = 0.4$ (Doherty & Ottino, 1988)

Référence

[1] Aref, H., 1984, Stirring by chaotic advection, *J. Fluid Mech.*, **143**, 1-21.