

TRAVAUX DIRIGÉS #9

Attracteur de Hénon (partie 3) : contrôle

L'attracteur d'Hénon¹ est un exemple de modèle de section de Poincaré, et on renvoie à l'exercice #2 et aux éléments de correction donnés depuis, [S8-chaos-slides.pdf](#)

On décide de contrôler un des deux points fixes instables s_{\pm}^* , que l'on note génériquement $s^* = (x^*, y^*)$, dans la section de Poincaré par l'intermédiaire de la dissipation :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n - k(x_n - x^*) \end{cases} \quad (1)$$

où $k \in \mathbb{R}$. Cela correspondrait à contrôler un cycle de l'attracteur 3D associé à cette section de Poincaré. A partir d'un point initial choisi dans le bassin d'attraction, avec $k = 0$ (Hénon non modifié), on itère classiquement jusqu'à passer dans le voisinage du point fixe que l'on souhaite contrôler, à savoir s_+^* ou s_-^* . On pilote alors le paramètre k pour conserver le point fixe choisi stable au moyen d'une boucle linéaire (1). Dans cette approche intuitive, le paramètre k doit être choisi pour imposer que les valeurs propres de la matrice jacobienne soient dans le cercle unité. On s'intéresse au contrôle du point $s_+^* = (x_+^*, y_+^*)$ dans un premier temps.

1. Vérifier que s_+^* est toujours un point fixe du système (1). Calculer le jacobien associé.
2. Quelle contrainte doit satisfaire k pour que le système reste dissipatif.
3. Traduire que les valeurs propres du jacobien doivent rester dans le cercle unité, et en déduire au final que $2ax_+^* + b - 1 < k < b + 1$ pour avoir contraction des aires et stabilité.
4. Mettre en œuvre le contrôle autour de s_+^* . Choisir plusieurs valeurs de k afin de mettre en évidence plusieurs types d'approches du point fixe (valeurs propres réelles ou complexes conjuguées).
5. Après avoir contrôlé le point s_+^* , arrêter le contrôle ($k = 0$) et laisser le système à nouveau évoluer librement. Estimer le temps que met le système pour reprendre son régime chaotique. Peut-on lier ce temps à une caractéristique de l'attracteur ?
6. Que pensez-vous du contrôle autour du point s_-^* ?

Référence

¹ M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, Commun. Math. Phys., 50 (1976) 69-77.