ECOLE CENTRALE PARIS

THESE

présentée
pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

par

Christophe BAILLY

Formation doctorale: Acoustique - Energétique

Laboratoire d'accueil: Electricité de France
Direction des Etudes et Recherches
Département Acoustique et Mécanique Vibratoire

Modélisation du rayonnement acoustique des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques

Soutenue le jeudi 31 mars 1994 devant le jury composé de:

Sébastien CANDEL	Examinateur
David CRIGHTON	Examinateur
Gérard FOURNIER	Rapporteur
Patrick HUERRE	Examinateur
Daniel JUVE	Rapporteur
Philippe LAFON	Examinateur
Jean-Laurent PEUBE	Président

1994 - n°19

Ecole Centrale Paris
Grand établissement sous tutelle du Ministère de l'Education Nationale
Grande Voie des Vignes
92295 Châtenay-Malabry Cedex

Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (E.M2.C.)
UPR 288, CNRS et Ecole Centrale Paris
Tél. 33 (1) 41 13 10 31

Christophe BAILLY - Septembre 1994.

"Assurément, la Nature a de bonnes intentions, mais,
comme l'a dit un jour Aristote, elle est incapable de les réaliser"

Oscar Wilde

"Prédire n'est pas expliquer"

René Thom

Avant-propos

Les pages qui suivent rassemblent un travail commencé il y a un peu plus de deux ans à la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. Ce travail n'aurait pu se faire sans Pascal Esposito, que je remercie très sincèrement pour avoir bien voulu m'accueillir dans le Département Acoustique et Mécanique Vibratoire (AMV) qu'il dirige. Nos conversations m'ont toujours été très utiles. J'associe également à ces remerciements Jean-Luc Trollé, chef du groupe Bruit et Vibrations dus aux Ecoulements. Il me semble important de signaler le contexte exceptionnel, tant du point de vue technique et matériel qu'humain, dans lequel j'ai pu effectuer mon travail de thèse.

Deux personnes ont joué un rôle essentiel dans l'encadrement de ce travail. Je remercie très chaleureusement Sébastien Candel, professeur à l'Ecole Centrale Paris, pour m'avoir fait confiance et accepté de diriger cette thèse. Son dynamisme, son encadrement de très grande qualité et sa notoriété dépassant largement le cadre de l'hexagone m'ont beaucoup apporté. Je remercie également très chaleureusement Philippe Lafon, ingénieur-chercheur responsable de l'activité bruits d'écoulements dans le département AMV, pour avoir toujours suivi avec beaucoup d'intérêt et une précieuse disponibilité mon travail. Le soutien technique et moral de ces deux personnes ont été sans faille.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Gérard Fournier, chef de la division acoustique de l'Office National des Etudes et Recherches Aérospatiales, et Daniel Juvé, professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, et à qui je dois une partie de mes connaissances en aéroacoustique, pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant d'être rapporteurs et membres du jury.

Le professeur David Crighton, chef du Département de Mathématiques Appliquées et de Physique Théorique (DAMTP) de l'Université de Cambridge me fait l'honneur d'être membre du jury. J'ai déjà eu, à plusieurs reprises, l'occasion de lui présenter mon travail, et je le remercie très sincèrement.

Je remercie également Patrick Huerre, professeur à l'Ecole Polytechnique, d'avoir accepté de juger ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à Jean-Laurent Peube, professeur à l'université de Poitier, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury.

J'ai eu la chance de bénéficier de l'expérience et du savoir faire de la Direction des Etudes et Recherches en mécanique des fluides numérique. Je remercie tout particulièrement Jean Daniel Mattéi, responsable du développement du code ESTET au Laboratoire National d'Hydraulique.

Il est difficile de traduire en quelques lignes l'ambiance chaleureuse et l'environnement humain du groupe. Je remercie ici très vivement tous les membres de cette équipe. Je tiens à remercier également Walid Béchara et François Bastin, pour ne pas avoir simplement partagé un bureau et l'aéroacoustique durant ce travail.

Table des matières

Introduction

Cette introduction générale présente le contexte dans lequel ce travail a été effectué. Elle définit également le domaine de l'aéroacoustique, ses relations avec la mécanique des fluides, et les grandes idées qui orientent ses développements. Le rayonnement acoustique d'un jet libre est alors pris pour exemple afin d'illustrer un certain nombre de phénomènes physiques à l'origine du bruit rayonné. Enfin, une dernière section précise le plan de ce travail. Cette introduction se veut très générale, pour permettre au lecteur non spécialiste d'avoir rapidement une vue globale du problème.

• EDF et l'aéroacoustique

La Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France a engagé depuis plusieurs années des études concernant le rayonnement acoustique des écoulements turbulents. En effet, le bruit produit par des écoulements subsoniques ou supersoniques, bien que faible en énergie par rapport à l'énergie mécanique du fluide, est à l'origine de problèmes opérationnels sérieux. On observe ainsi des fatigues anormales d'organes de régulation présents dans les centrales, des couplages aéro-élastiques, des instabilités de fonctionnement où l'acoustique joue un rôle important. Le département Acoustique et Mécanique Vibratoire est donc amené à étudier la génération de ces ondes acoustiques, et leur propagation dans des milieux souvent complexes, afin de développer un ensemble d'outils d'analyse et de prévision. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail.

• La mécanique des fluides et l'aéroacoustique

La production et la propagation du son sont décrites par les équations de Navier-Stokes. Cependant, malgré le développement de la simulation numérique des écoulements et les progrès accomplis depuis le début des années 1970, il est actuellement difficile d'effectuer un calcul tridimensionnel direct pour obtenir à la fois le champ turbulent et le champ acoustique. Les types de maillage pour effectuer d'une part le calcul aérodynamique, et d'autre part le calcul acoustique sont relativement différents: schématiquement, on utilise un maillage local et irrégulier pour le champ aérodynamique, un maillage régulier et étendu pour le champ acoustique. De plus, la précision demandée est difficile à obtenir actuellement, puisqu'il faut capturer des signaux acoustiques dont l'amplitude est très faible par rapport au niveau des variables de l'écoulement moyen et du champ turbulent. Citons néanmoins les récents travaux de Colonius, Lele & Moin (1993) qui calculent par simulation directe le rayonnement acoustique d'une couche de mélange bidimensionnelle. Cependant, dans un cadre plus général, le calcul du rayonnement acoustique ne peut se faire qu'indépendamment du calcul de l'écoulement turbulent, source de bruit. Il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses et de procéder à des modélisations pour calculer le champ acoustique. C'est pour une grande part ce à quoi est consacrée l'aéroacoustique, branche de la mécanique des fluides.

• L'analogie acoustique

Les premiers fondements physiques et théoriques de l'acoustique ont lieu pour une grande part vers la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec entre autres Poisson, Stokes, Helmholtz, Kirchoff et Rayleigh. Cependant, il faut attendre Lighthill (1952-1954) pour avoir une formulation de l'analogie acoustique à partir des équations de la mécanique des fluides. Toutes les approches pour la modélisation acoustique sont basées sur une équation d'ondes de type $\mathcal{L}[\rho] = \Lambda$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur de propagation appliquée à la variable acoustique ρ, et Λ un terme source. Pour Lighthill, $\mathcal{L}$ est l'opérateur linéaire de propagation $\mathcal{L}_o$ dans un milieu homogène de célérité c_o :

$$\mathcal{L}_o = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2$$

Lorsque l'on se trouve en dehors du volume source turbulent, $\mathcal{L}_o[\rho] = 0$, i.e. $\partial^2 \rho / \partial t^2$ égale $c_o^2 \nabla^2 \rho$. L'analogie acoustique consiste à identifier le terme source acoustique lorsque précisément ces deux termes ne sont plus égaux. On doit à Lighthill d'avoir déterminé, à partir des équations de la mécanique des fluides, ce terme source pour l'opérateur $\mathcal{L}_o$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{avec } T_{ij} = \rho u_i u_j + \left(p - c_o^2 \rho\right) \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

et d'en avoir déduit la loi dimensionnelle sur la puissance acoustique rayonnée pour les jets libres subsoniques. La théorie de Lighthill présente beaucoup d'intérêts puisque la fonction de Green associée à l'opérateur $\mathcal{L}_o$ est particulièrement simple en espace libre. Cependant, on en voit également tout de suite les inconvénients. Lorsque l'on écrit $\mathcal{L}[\rho] = \Lambda$, on suppose Λ connu. Or, plus l'opérateur de propagation $\mathcal{L}$ est simple, plus le terme Λ contient d'informations, telle que l'interaction entre l'acoustique et l'écoulement moyen. Ainsi, l'expression du terme source Λ nécessite un effort important de modélisation.

Curle (1955), puis Ffowcs Williams et Hawkings (1969) étendent la théorie de Lighthill afin de prendre en compte les effets dûs aux parois rigides fixes ou en mouvement. La première modélisation du terme source est proposée par Proudmann (1952) pour un volume de turbulence isotrope en décroissance. Lilley (1958), Ribner (1964, 1969), Pao et Lowson (1970), Goldstein et Rosenbaum (1973) appliquent la théorie de Lighthill aux cas des jets libres subsoniques. L'extension de l'analogie de Lighthill aux écoulements supersoniques est faite par Ffowcs Williams (1960, 1963).

Bien évidemment, il existe d'autres formulations de l'analogie acoustique. Citons celle de Powell (1964), reprise par Howe (1975), où la formulation du terme source s'exprime à partir de la vitesse et du rotationnel de la vitesse $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho = \rho_o \nabla.\left(\omega \times \mathbf{u} - T.\nabla s\right)$$

Plusieurs excellentes revues de ces différentes formulations issues de l'analogie de Lighthill existent dans la littérature. Parmi elles, citons Doak (1972), Crighton (1975), Goldstein (1976), Ffowcs Williams (1977) et Ribner (1981).

Parallèlement, Phillips (1960), Pao (1971) et Lilley (1972) proposent une analogie acoustique avec un opérateur de propagation plus complexe, où l'interaction faible entre l'écoulement moyen et l'acoustique est prise en compte. Lilley montre qu'il n'est possible d'inclure tous ces effets qu'en utilisant un opérateur différentiel de propagation d'ordre 3 appliqué à la variable $\pi = \ln p$:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)\right\} + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right) = -2\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$
$$+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right) + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}\right) - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)\right\}$$

La littérature n'est pas avare d'études et de discussions sur l'équation de Lilley. En effet, l'opérateur différentiel détermine non seulement la solution acoustique, mais aussi les instabilités de l'écoulement: il existe des ondes d'instabilité, solutions à l'équation homogène. De plus, l'utilisation d'un opérateur de propagation sophistiqué implique une résolution analytique complexe, et souvent partielle.

Enfin, il faut noter une autre approche relativement différente de l'analogie acoustique, développée essentiellement par Tam (1987, 1990, 1993) pour des configurations d'écoulement comme les jets libres. La turbulence est décrite comme une superposition d'ondes instables (voir Tam et Hu, 1989) de l'écoulement pour être finalement représentée à partir d'un modèle stochastique. Ces instabilités étant directement à l'origine du rayonnement acoustique, il est possible d'en déduire le rayonnement dû aux ondes de Mach et à l'interaction turbulence - ondes de choc pour le cas des jets non parfaitement détendus. Bien que cette approche semble difficilement généralisable à un écoulement quelconque, elle permet néanmoins de cerner les phénomènes physiques à l'origine du bruit, en utilisant un développement mathématique élégant.

Dans ce travail, le calcul du champ acoustique rayonné se fait toujours en deux étapes. Dans un premier temps, le calcul du champ aérodynamique est effectué, puis le rayonnement acoustique en est déduit par une technique d'analogie acoustique.

• Le calcul du champ aérodynamique

Pour procéder à l'estimation du rayonnement acoustique, il faut envisager un calcul du champ aérodynamique. De façon générale, on peut distinguer à l'heure actuelle trois grandes voies pour une simulation numérique de la turbulence:

- La simulation directe, où toutes les échelles significatives de la turbulence sont calculées. Cependant, le nombre de points nécessaire dans une direction est proportionnel au rapport $L/\eta \propto Re_L^{3/4}$, où Re_L est le nombre de Reynolds, η l'échelle de Kolmogorov et L l'échelle intégrale de longueur de la turbulence. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le nombre de points $N \propto Re_L^{9/4}$ du maillage atteint rapidement des valeurs élevées et les calculs que l'on peut envisager sont limités par les ressources informatiques actuellement disponibles. La simulation directe peut être effectuée uniquement pour des nombres de Reynolds faibles. Elle est donc avant tout un outil de validation et permet d'obtenir une expérience numérique de référence pour les modèles de turbulence.

- La macro-simulation, où seules les grandes échelles de la turbulence sont calculées alors que les plus petites échelles sont modélisées par introduction d'un filtrage spatial. Les petites échelles sont plus facilement modélisables, leur comportement étant quasi-isotrope. Il est possible maintenant d'effectuer des calculs de ce type avec des écoulements tels que les jets. Néanmoins, ces calculs ne sont pas encore standards, et la mise en œuvre de méthodes de macro-simulation reste encore relativement coûteuse.

- Les modèles de turbulence, construits à partir des équations moyennées de Navier-Stokes. De nouvelles corrélations provenant de la non linéarité convective sont alors à modéliser, en utilisant un certain nombre d'hypothèses sur le champ turbulent.

  Le champ turbulent est finalement décrit par quelques quantités statistiques seulement, mais en contre partie, il est possible d'étudier des géométries complexes. Le plus connu de ces modèles statistiques est le modèle $k - \epsilon$. Ce modèle a été utilisé dans des applications très variées et il est couramment utilisé dans la résolution de problèmes pratiques. De plus, des extensions du modèle $k - \epsilon$ ont été récemment développées pour les écoulements compressibles.

La méthode employée pour le calcul du champ turbulent impose en partie la démarche pour le calcul du champ acoustique. Ainsi, la connaissance des fluctuations turbulentes en temps et en espace permet une résolution temporelle du système des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire, le champ turbulent intervenant dans le terme source associé à ce système (voir seconde partie).

• Rayonnement acoustique d'un jet libre

En s'appuyant sur le cas d'un jet libre, on observe expérimentalement trois mécanismes contribuant au champ acoustique rayonné.

- Un bruit de mélange, directement associé à la turbulence. Ce bruit est caractérisé par un spectre large bande. L'intensité est maximale dans le premier quadrant, i.e. pour $0 \leq \theta \leq 90°$, où θ repère l'angle entre l'observateur et l'axe aval du jet. La puissance acoustique évolue avec la puissance huitième de la vitesse du jet (Lighthill, 1952). Une modification de ce rayonnement intervient lorsque le nombre de Mach de convection des grosses structures turbulentes devient supersonique, i.e. pour un nombre de Mach nominal $M \geq 1.5$. Le champ acoustique rayonné devient beaucoup plus directif, avec un maximum en $\theta = \cos^{-1}(1/M_c)$. La puissance acoustique est alors directement proportionnelle à la puissance mécanique du jet (Ffowcs Williams, 1963).

- Un bruit de choc, dû à l'interaction entre ondes de choc et structures turbulentes convectées par l'écoulement, lorsque le jet n'est pas parfaitement détendu. Ce bruit possède un spectre à large bande, et la puissance varie comme $W \sim \beta^4$ avec $\beta = \sqrt{M_j^2 - 1}$, où M_j désigne le nombre de Mach du jet parfaitement détendu (Harper-Bourne & Fisher, 1973).

- Un bruit de raie, ou "screech tone", associé à un couplage fort entre la turbulence et l'acoustique (Powell, 1953). Ce phénomène fortement instationnaire, sensible à la géométrie de la tuyère et apparaissant plutôt pour des jets froids, domine largement, lorsqu'il est présent, le spectre de l'intensité acoustique. Seule la fréquence du fondamental est estimable (Tam, 1986), et l'intensité est rayonnée pour un angle θ proche de π.

Ces quelques informations montrent la difficulté de proposer un modèle décrivant tous ces phénomènes. De plus, beaucoup d'autres paramètres interviennent dans le problème du rayonnement acoustique: la température, le confinement de l'écoulement,...

• Objectifs de cette étude

La simulation numérique reste encore un domaine peu exploité par l'aéroacoustique. L'objectif de la présente étude est de montrer qu'il est possible d'obtenir des informations pertinentes sur le rayonnement acoustique d'écoulements complexes, en utilisant les outils de simulation que sont les codes numériques d'un centre d'études et de recherches comme celui d'Electricité de France.

On a vu précédement qu'il est nécessaire de découpler le calcul aérodynamique du calcul du champ acoustique rayonné. Le champ moyen sera toujours ici calculé par résolution des équations de Navier-Stokes moyennées, avec un modèle de turbulence $k - \epsilon$. L'intérêt d'utiliser un tel code est double: il permet d'aborder des écoulements relativement complexes, et le comportement du modèle de turbulence est connu.

A partir de ce calcul aérodynamique, deux grandes voies, faisant l'objet des deux parties de ce document, sont développées et étudiées pour le calcul du rayonnement acoustique:

1. Une approche statistique

   On utilise dans cette première partie l'analogie acoustique de Lighthill en donnant un sens statistique au tenseur de Lighthill. Après avoir rappelé la théorie de Lighthill et déduit un certain nombre de résultats sur les jets subsoniques et supersoniques (chapitre 1), on développe deux types de modélisation pour l'estimation du tenseur de Lighthill T_{ij}:

- Dans un premier temps, on cherche à modéliser le bruit de mélange des écoulements à nombre de Mach convectif subsonique (chapitre 2). La modélisation est construite à partir des travaux de Ribner (1964, 1969) et de Goldstein & Rosenbaum (1973).
- On cherche ensuite à modéliser le rayonnement acoustique des ondes de Mach, présentes lorsque le nombre de Mach convectif de l'écoulement est supersonique (chapitre 3). On s'inspire ici des travaux de Ffowcs Williams & Maidanik (1965).

  Une synthèse de ces deux formulations permet d'avoir une vue globale du rayonnement d'un jet libre (chapitre 4).

2. Une approche stochastique

   Après avoir effectué une synthèse critique des équations de propagation de l'aéroacoustique, on se propose d'utiliser les équations d'Euler linéarisées, en calculant les termes sources acoustiques associées à l'équation de propagation (chapitre 5). Le calcul numérique de ces termes sources est fait en utilisant un champ turbulent spatio-temporel synthétique déduit du calcul aérodynamique. Ces termes sources introduits dans les équations d'Euler linéarisées fournissent le champ acoustique, en tenant compte des effets de l'écoulement moyen sur la propagation des ondes sonores (chapitre 6).

Ces deux approches sont semblables dans le sens où l'on essaie de conserver une certaine généralité en utilisant systématiquement une formulation locale des termes sources acoustiques. De même, ces deux démarches font appel à des codes de simulation numérique disponibles. Elles sont fondamentalement différentes dans leur façon de décrire la turbulence, et par conséquent, dans la résolution du problème de production et de propagation du champ acoustique. La validation est toujours réalisée dans le cas des jets circulaires libres issus d'une tuyère convergente-divergente, afin que le jet soit parfaitement détendu dans le cas supersonique. Le cas d'un jet chaud supersonique est étudié dans le cadre de la modélisation des ondes de Mach. Le bruit de choc n'est pas abordé ici, mais a fait l'objet du mémoire de DEA précédant ce travail.

Trois annexes s'ajoutent à ce travail. Une première regroupe un certain nombre de résultats sur la turbulence. Elle contient également la présentation du modèle $k-\epsilon$, et son extension au cas des écoulements turbulents compressibles. Une deuxième s'intéresse à la propagation acoustique d'une source annulaire, ainsi qu'à la présentation du code de propagation utilisé dans cette étude. Enfin, une dernière annexe contient le résumé de la thèse et des publications faites durant ce travail.

Ce travail s'inscrit dans la suite de la thèse de Béchara (1992) sur la modélisation du bruit des écoulements turbulents libres subsoniques. Ainsi, la modélisation statistique du tenseur de Lighthill pour le calcul du bruit de mélange des écoulements pour lesquels le nombre de Mach de convection est subsonique, a été adapté et étendu au cas des écoulements faiblement supersoniques (chapitre 2 de ce travail). La modélisation des ondes de Mach dans le cadre de l'analogie acoustique de Lighthill (1952) et Ffowcs Williams (1963) est originale (chapitre 3, chapitre 4 et annexe A pour les calculs aérodynamiques). L'approche stochastique, également abordée par Béchara *et al.* (1994), est entièrement reformulée avec un apport théorique sur le problème de production et de propagation des ondes sonores en écoulement (chapitre 5). La construction du terme source associé aux équations d'Euler linéarisées est reformulée. En particulier, le champ turbulent synthétique possède maintenant un caractère convectif et une évolution temporelle propre (chapitre 6).

Références

Bailly, C., Béchara, W., Lafon, P. & Candel, S., 1993, "Jet noise predictions using a $k - \epsilon$ turbulence model," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4412.

Bailly, C., Lafon, P. & Candel, S., 1994, "Computation of subsonic and supersonic jet mixing noise using a modified $k - \epsilon$ model for compressible free shear flows," *Acta Acustica*, April, pp. 1-12.

Bailly, C., Lafon, P. & Candel, S., 1994, "Modélisation du rayonnement acoustique des ondes de Mach. Application aux jets libres supersoniques avec prise en compte de la température," *Ambiance acoustique et vibratoire des systèmes de transport spatial, 8-15 février*, Jouy en Josas, France,

Béchara, W., 1992, "Modélisation du bruit d'écoulements turbulents libres," *Ecole Centrale Paris*, 1992-02.

Béchara, W., Lafon, P. & Candel, S., 1993, "Modélisation du bruit des jets turbulents libres et subsoniques à température ambiante," *J. Phys. III France*, Vol. 3, March 1993, pp. 653-674.

Béchara, W., Bailly, C., Lafon, P. & Candel, S., 1994," Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows," *AIAA Journal*, 32(3), pp. 455-463.

Crighton, D., 1975, "Basic principles of aerodynamic noise generation," *Prog. Aerospace Sci.*, Vol. 16(1), pp. 31-96.

Colonius, T., Lele, S.K. & Moin, P., 1993, "Direct computation of the sound layer generated by a two-dimensional shear layer," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4412.

Curle, N., 1955, "The influence of solid boundaries on aerodynamic sound," *Proc.*

Roy. Soc. London, Vol. 2311, 1187, pp. 505-514.

Doak, P.E., 1972, "Analysis of internally generated sound in continuous materials: 2. A critical review of the conceptual adequacy and physical scope of existing theories of aerodynamic noise, with special reference to supersonic jet noise," *J. Sound Vib.*, Vol. 25(2), pp. 263-335.

Ffowcs Williams, J.E., 1960, "Some thoughts on the effects of aircraft motion and eddy convection on the noise from air jets," *University of Southampton*, AASU Report 155.

Ffowcs Williams, J.E., 1963, "The noise from turbulence convected at high speed," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 225, Ser. A, 1061, pp. 469-503.

Ffowcs Williams, J.E. & Maidanik, G., 1965, "The Mach wave field radiated by supersonic turbulent shear flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 21(4), pp. 641-657.

Ffowcs Williams, J.E. & Hawkings, D.L., 1969, "Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion," *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Vol. 264, Ser. A, 1151, pp. 321-342.

Goldstein, M.E. & Rosenbaum, B., 1973, "Effect of anisotropic turbulence on aerodynamic noise," *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 54(3), pp. 630-645.

Goldstein, M.E., 1976, "Aeroacoustics," *McGraw-Hill*, New York.

Harper-Bourne, M. & Fisher, M.J., 1973, "The noise from shock waves in supersonic jets," *Noise Mechanisms*, Brussels, Belgium, AGARD.

Howe, M.S., 1975, "The generation of sound by aerodynamic sources in an inhomogeneous steady flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 67(3), pp. 597-610.

Lighthill, M.J., 1952, "On sound generated aerodynamically - I. General theory," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 211, Ser. A, 1107, pp. 564-587.

Lighthill, M.J., 1954, "On sound generated aerodynamically - II. Turbulence as a source of sound," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 222, Ser. A, 1148, pp. 1-32.

Lilley, G.M., 1958, "On the noise from air jets," *Aeronautical Research Council (Great Britain)*, A.R.C. 20-276.

Lilley, G.M., 1972, "The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region," *Air Force Aero Propulsion Laboratory*, AFAPL-TR-72-53.

Pao, S.P. & Lowson, M.V., 1970, "Some applications of jet noise theory," *8th Aerospace Sciences Meeting*, New-York, N.Y., January 19-21, AIAA-70-233.

Pao, S.P., 1971, "A generalized theory of the noise generation from supersonic shear layers," *J. Sound Vib.*, Vol. 19(4), pp. 401-410.

Phillips, O.M., 1960, "On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 9(1), pp. 1-28.

Powell, A., 1953, "On the noise emanating from a two-dimensional jet above the critical pressure," *Aeronautical Quarterly*, Vol. 4, pp. 103-122.

Powell, A., 1964, "Theory of vortex sound," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 16, pp. 177-195.

Proudman, I., 1952, "The generation of sound by isotropic turbulence," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. A, 214, pp. 119-132.

Ribner, H.S., 1964, "The generation of sound by turbulent jets," *Academic Press*, Vol. VIII, pp. 103-182.

Ribner, H.S., 1969, "Acoustic energy flux from shock-turbulence interaction," *J. Fluid Mech.*, Vol. 35(2), pp. 299-310.

Ribner, H.S., 1981, "Perspectives in jet noise," *AIAA Journal*, Vol. 19(12), pp. 1513-1526.

Tam, C.K.W., 1986, "Proposed relationship between broaband shock associated noise and screech tone," *J. Sound Vib.*, Vol. 110(2), pp. 309-321.

Tam, C.K.W., Seiner, J.M. & Yu, J.C., 1987, "Stochastic model theory of broadband shock associated noise from supersonic jets," *J. Sound Vib.*, Vol. 116(2), pp. 265-302.

Tam, C.K.W. & Hu, F.Q., 1989, "On the three families of instability waves of high-speed jets," *J. Fluid Mech.*, Vol. 201, pp. 447-483.

Tam, C.K.W., 1990, " Broadband shock-associated noise of moderately imperfectly expanded supersonic jets," *J. Sound Vib.*, Vol. 140(1), pp. 55-71.

Tam, C.K.W. & Chen, P., 1993, "Turbulent mixing noise from supersonic jets," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4408.

Partie I

Modélisation statistique et résolution intégrale de l'équation de Lighthill

Nomenclature

c	Célérité du son
C	Facteur de convection
C_{pp}	Fonction d'autocorrélation de la pression
D	Diamètre de la tuyère
f	Fréquence
I	Intensité acoustique
k	Energie cinétique turbulente
$\mathbf{k}, \mathrm{k}$	Vecteur d'onde, et son module
L	Longueur intégrale de la turbulence
M_c	Nombre de Mach de convection $M_c = U_c/c_o$
M	Nombre de Mach nominal $M = U_{jet}/c_j$
p	Pression
S_{pp}	Densité spectrale de puissance de l'intensité acoustique
T_{ij}	Tenseur de Lighthill
t	Temps
u	Vitesse
u_t	Vitesse turbulente
U	Vitesse de l'écoulement moyen
U_c	Vitesse de convection
U_{jet}	Vitesse nominale du jet
W	Puissance acoustique
$\mathbf{x}$	Vecteur repérant la position de l'observateur
$\mathbf{y}$	Vecteur repérant la position du point source courant
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϵ	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente k
ν	Viscosité cinématique
θ	Angle entre l'axe aval de l'écoulement moyen et l'observateur
$\boldsymbol{\eta}$	Vecteur séparant deux points du volume source dans le repère fixe
$\boldsymbol{\xi}$	Vecteur séparant deux points du volume source dans le repère lié à U_c
ρ	Masse volumique
τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses
ω_t	Fréquence angulaire de la turbulence

Indices

o	Valeur associée au milieu ambiant homogène et au repos
1	Composante axiale, direction principale de l'écoulement moyen
2	Composante radiale
$'$	Valeur au point $(\mathbf{y}, t)$
$''$	Valeur au point $(\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau)$
—	Moyenne d'ensemble

L'origine des repères est prise dans le volume source V

Chapitre 1

Théorie de Lighthill

On regroupe dans ce premier chapitre un certain nombre de résultats déduits de l'analogie de Lighthill (1952-1954) pour les écoulements libres. Après avoir établi l'équation de propagation de Lighthill, et sa solution intégrale, on s'intéresse dans les deux paragraphes suivants respectivement au cas d'un écoulement convectif subsonique et supersonique. Enfin dans un dernier paragraphe, on développe la modélisation de la convection dans le cadre de cette analogie.

1.1 Analogie de Lighthill

L'équation de Lighthill[1,2] s'obtient à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ici sous forme conservative:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

où τ_{ij} désigne le tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide newtonien:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

Formons alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(p\delta_{ij} - \tau_{ij})$$

Qui s'écrit encore, en introduisant une célérité de référence c_o:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.3}$$

où T_{ij} est le tenseur de Lighthill:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + \left(p - c_o^2 \rho\right) \delta_{ij} - \tau_{ij} \tag{1.4}$$

L'analogie de Lighthill consiste à remarquer les deux points suivants. D'une part, on considère un milieu homogène au repos de célérité c_o. En l'absence de sources acoustiques, les fluctuations acoustiques de ρ vérifient:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

D'autre part, l'équation gouvernant les fluctuations de ρ dans le fluide réel s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Le rayonnement acoustique d'un volume source turbulent V fini s'interprète d'après l'équation de Lighthill (1.3) comme le champ résultant d'une distribution de forces extérieures $\partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j$ agissant sur le milieu acoustique homogène et au repos. Les écoulements étudiés dans ce travail sont à nombre de Reynolds élevé. Par conséquent, le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est négligeable dans T_{ij} devant $\rho u_i u_j$, tenseur des contraintes de Reynolds. Deux d'hypothèses sont nécessaires pour que le terme source de l'équation de Lighthill puisse s'exprimer indépendamment de ρ:

- la production et la propagation du son se font sans fluctuation d'entropie, autrement dit: $\delta p = c_o^2 \delta \rho$. Cette hypothèse, réaliste pour les écoulements froids, est cependant mise en défaut pour des écoulements chauds par exemple.
- le tenseur de Reynolds $\rho u_i u_j$ est approché par $\rho_o u_i u_j$. On suppose donc la turbulence incompressible. Dans un repère lié aux structures turbulentes convectées, on a $\rho_t/\rho_o \sim M_t^2$. On envisage ainsi des écoulements à faible Mach turbulent dans un tel repère.

Moyennant ces hypothèses[†], l'équation de Lighthill se réduit alors à:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{avec } T_{ij} \simeq \rho_o u_i u_j \tag{1.5}$$

La solution en espace libre s'exprime en utilisant la fonction de Green associée, ici:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_o^2 x} \delta\left(t - \frac{x}{c_o}\right)$$

Et finalement:

[†] Cette approximation du tenseur de Lighthill sera utilisée pour la modélisation proposée au chapitre 2. On montre dans le chapitre 3 une autre approximation de ce terme source pour le cas des ondes de Mach.

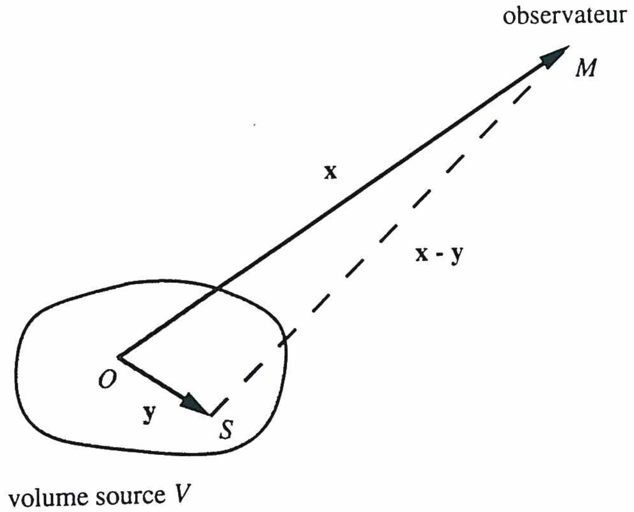


Figure 1.1: Solution en champ lointain à l'équation de Lighthill.

$$\rho(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c_o^2}\int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_o}\right)\frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{1.6}$$

Cette intégrale (1.6) admet la forme équivalente en champ acoustique lointain, i.e. lorsque $x > \lambda_o$, λ_o étant une longueur d'onde acoustique typique:

$$\rho(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c_o^4 x}\frac{x_i x_j}{x^2}\int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2}\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_o}\right) d\mathbf{y} \tag{1.7}$$

En effet, la solution (1.6) s'écrit formellement:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi c_o^2}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x},t) * G(\mathbf{x},t) \\
&= \frac{1}{4\pi c_o^2} T_{ij}(\mathbf{x},t) * \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3 c_o^2}\delta^{(2)}\left(t - \frac{x}{c_o}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3x_i x_j}{c_o x^4} - \frac{\delta_{ij}}{c_o x^2}\right)\delta^{(1)}\left(t - \frac{x}{c_o}\right) + \left(\frac{3x_i x_j}{c_o x^5} - \frac{\delta_{ij}}{c_o x^3}\right)\delta\left(t - \frac{x}{c_o}\right)\right\}
\end{aligned}$$

En ne conservant que le terme en $1/x\lambda_o$, on en déduit (1.7):

$$\rho(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c_o^2} T_{ij}(\mathbf{x},t) * \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3 c_o^2}\delta^{(2)}\left(t - \frac{x}{c_o}\right) + o\left(\frac{1}{x^2 \lambda_o}, \frac{1}{x^3}\right)\right\}$$

1.2 Fonction d'autocorrélation de la pression

Comme les signaux rayonnés par la turbulence ont un caractère aléatoire, il est utile d'écrire la fonction d'autocorrélation normalisée de la pression C_{pp}, qui permet

$$C_{pp}(\mathbf{x},\tau) = \frac{\overline{(p(\mathbf{x},t)-p_o)(p(\mathbf{x},t+\tau)-p_o)}}{\rho_o c_o}$$

A partir de la solution intégrale (1.7) à l'équation de Lighthill, on exprime alors C_{pp}:

$$C_{pp}(\mathbf{x},\tau) = \frac{1}{16\pi^2 c_o^5 \rho_o x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\iint_V \overline{\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2}(\mathbf{y},t)\frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial t^2}(\mathbf{y}',t+\tau)d\mathbf{y}d\mathbf{y}'}$$

Cette expression prend la forme suivante pour une turbulence stationnaire:

$$C_{pp}(\mathbf{x},\tau) = \frac{1}{16\pi^2 c_o^5 \rho_o x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\frac{\partial^4}{\partial \tau^4}\iint_V \overline{T_{ij}(\mathbf{y},t)T_{kl}(\mathbf{y}',t+\tau)}d\mathbf{y}d\mathbf{y}'$$

Enfin, en utilisant à nouveau l'hypothèse de champ géométrique lointain, c'est à dire $\eta = |\mathbf{y}'-\mathbf{y}| < x$, on obtient finalement pour C_{pp}:

$$\begin{aligned} C_{pp}(\mathbf{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\frac{\partial^4}{\partial \tau^4}\iint_V \mathcal{R}_{ijkl}\left(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta},\tau+\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\eta}}{x c_o}\right)d\mathbf{y}d\boldsymbol{\eta} \qquad (1.8) \\ \mathcal{R}_{ijkl} &= \frac{\overline{T_{ij}(\mathbf{y},t)T_{kl}(\mathbf{y}+\boldsymbol{\eta},t+\tau)}}{\rho_o^2} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_{ijkl}$ est le tenseur des vitesses en deux points et en deux instants. A partir de la fonction C_{pp}, il est possible d'obtenir par transformée de Fourier la densité spectrale de puissance, en notant $\mathbf{k}$, le vecteur d'onde acoustique:

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{pp}(\mathbf{x},\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \\ &= \frac{\rho_o\omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{ijkl}\left(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta},\tau+\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\eta}}{x c_o}\right)e^{i\omega\tau}d\tau\right\}e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\eta}}d\mathbf{y}d\boldsymbol{\eta} \qquad (1.9) \end{aligned}$$

avec:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c_o}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

Deux ondes émises au même temps en deux points séparés de $\boldsymbol{\eta}$ dans le volume source V, sont reçues au point $\mathbf{x}$ en deux instants t et $t+\Delta t$ tels que $\Delta t = \mathbf{x}.\boldsymbol{\eta}/x c_o$. Considérons maintenant le cas particulier où $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. Le temps τ intervenant dans le tenseur $\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{y},\mathbf{0},\tau)$ représente plus le temps de passage d'une structure turbulente qu'un temps caractéristique de la turbulence. Cette remarque a conduit plusieurs auteurs[3,4] à introduire un repère lié aux structures turbulentes convectées. On définit ainsi:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} - U_c \tau \mathbf{y_1} \tag{1.10}$$

Implicitement, on fait l'hypothèse d'un écoulement moyen quasi-unidirectionnel suivant $\mathbf{y_1}$, le cas d'un jet par exemple, pour pouvoir définir ainsi une vitesse de convection $U_c\mathbf{y_1}$. En introduisant:

$$R_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = \mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \tau)$$

R_{ijkl} est le tenseur des corrélations vu par un observateur se déplaçant à la vitesse $U_c\tau\mathbf{y_1}$, et mesurant les fluctuations de vitesse, par rapport à un repère fixe, entre deux points séparés de $\boldsymbol{\xi}$ dans le repère mobile. Ainsi, entre deux instants distants de τ, les points mesurés sont distants de $\boldsymbol{\xi} + U_c\tau\mathbf{y_1} = \boldsymbol{\eta}$ dans le repère fixe.

Dans un tel repère, le temps de décroissance τ_o de la turbulence est maximum, et on peut supposer que le temps retardé Δt reste négligeable devant ce temps typique de la turbulence. Cette hypothèse sera utilisée pour les écoulements subsoniques et faiblement supersoniques dans la suite. Une autre façon de dire les choses est de supposer les structures turbulentes, i.e. les sources acoustiques, compactes. En effet:

$$\frac{\Delta t}{\tau_o} \sim \frac{\dfrac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}}{x c_o}}{\dfrac{L}{u}} \sim M_t \sim \frac{L}{\lambda = \dfrac{c_o L}{u}}$$

Il est plus facile d'introduire ce changement de variable dans l'expression (1.9) de la densité spectrale de puissance S_{pp}:

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\rho_o \omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2} \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau \right\} e^{-i\mathbf{k}.(\boldsymbol{\xi} + U_c\tau\mathbf{y_1})} d\mathbf{y}\, d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Soit encore, en notant θ l'angle entre l'axe aval de l'écoulement $\mathbf{y_1}$ et l'observateur $\mathbf{x}$, et M_c le nombre de Mach convectif:

$$\theta = \frac{\mathbf{x}.\mathbf{y_1}}{x} \quad \text{et} \quad M_c = \frac{U_c}{c_o}$$

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\rho_o \omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2} \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V \int_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \tau)\, e^{i\omega\tau(1 - M_c\cos\theta) - i\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi}} d\tau\, d\mathbf{y}\, d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Le calcul de la fonction d'autocorrélation C_{pp} s'en déduit alors par transformée de Fourier, en posant $\tau' = \tau(1 - M_c \cos\theta) - \mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}/x c_o$:

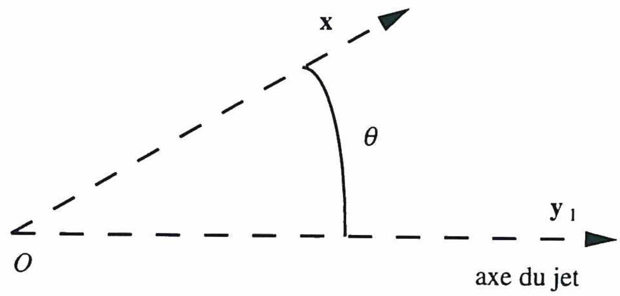


Figure 1.2: coordonnées de l'observateur.

$$
\begin{aligned}
C_{pp}(\mathrm{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\frac{1}{(1-M_c\cos\theta)} \\
&\times \frac{\partial^4}{\partial\tau^4}\int\!\!\int_V R_{ijkl}\left(\mathrm{y},\xi,\frac{\tau+\frac{\mathrm{x}.\xi}{xc_o}}{(1-M_c\cos\theta)}\right)d\mathrm{y}d\xi \\
&= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\frac{1}{(1-M_c\cos\theta)^5} \\
&\times \frac{\partial^4}{\partial t^4}\int\!\!\int_V R_{ijkl}\left(\mathrm{y},\xi,t+\frac{\frac{\mathrm{x}.\xi}{xc_o}}{(1-M_c\cos\theta)}\right)\Bigg|_{t=\tau/(1-M_c\cos\theta)} d\mathrm{y}d\xi \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Avant d'appliquer ces résultats respectivement au cas du jet libre subsonique et supersonique, il est intéressant de remarquer les quelques points suivants:

- Même si le temps retardé apparaissant dans les fonctions C_{pp} et S_{pp} n'est pas négligeable, il est plus judicieux de travailler avec la variable ξ et les expressions (1.12) et (1.13). En effet, dans les formulations (1.8) et (1.9), les effets instationnaires comprennent la durée de vie finie des structures turbulentes, et la convection. Cependant, la convection ne produit pas de rayonnement acoustique en écoulement convectif subsonique, et sa contribution dans (1.8) est globalement nulle. On voit donc l'intérêt de travailler avec (1.13), où les effets instationnaires sont évalués dans le repére lié justement à la convection. L'effet de la convection est de plus clairement mis en évidence[5,6] par l'apparition d'un facteur de convection.

- Le calcul (1.13) de C_{pp} montre qu'à une fréquence f perçue par l'observateur fixe, correspond une fréquence $f\,(1-M_c\cos\theta)$ dans le repère lié à la convection. C'est l'effet Doppler bien connu. De même, le facteur d'amplification $(1-M_c\cos\theta)^5$ est caractéristique d'une distribution de sources quadripolaires.

- Le calcul de la densité spectrale S_{pp} permet d'apporter un certain nombre d'informations sur le transfert entre les fluctuations aérodynamiques et les fluctuations acoustiques. Pour cela, on introduit le tenseur H_{ijkl} de la densité spectrale de la puissance acoustique:

$$H_{ijkl}(\mathbf{y},\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_V \int_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},\tau)\, e^{i\left(\omega\tau-\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi}\right)} d\tau d\boldsymbol{\xi}$$

pour obtenir l'expression suivante de S_{pp}:

$$S_{pp}(\mathbf{x},\omega) = \frac{\pi\rho_o\omega^4}{2c_o^5x^2}\frac{x_ix_jx_kx_l}{x^4}\int_V H_{ijkl}(\mathbf{y},\mathbf{k},\omega(1-M_c\cos\theta))\, d\mathbf{y} \qquad (1.14)$$

Cette expression montre que le *nombre d'onde acoustique* $\mathbf{k}$ est le même que celui de la turbulence source du bruit, puisque l'on retrouve le tenseur H_{ijkl} sélectionné pour cette même valeur $\mathbf{k}$. Seul intervient un décalage entre la fréquence acoustique f et la fréquence turbulente $f(1-M_c\cos\theta)$ liée au référentiel de la structure.

1.3 Cas du jet libre subsonique

On suppose ici que le temps retardé intervenant dans la fonction C_{pp} est négligeable. La loi dimensionnelle de l'intensité acoustique se déduit alors de (1.13):

$$I \sim \frac{\rho_o}{c_o^5x^2}\frac{1}{(1-M_c\cos\theta)^5}\frac{U^4}{(D/U)^4}D^6$$

Soit finalement:

$$I \sim \rho_o\frac{D^2}{x^2}\frac{U^8}{c_o^5}\frac{1}{(1-M_c\cos\theta)^5} \qquad (1.15)$$

La puissance acoustique W se calcule alors immédiatement par intégration:

$$W = \int_0^\pi I(r,\theta)\, 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$$

et:

$$W \sim \rho_o D^2\frac{U^8}{c_o^5}\frac{1+M_c^2}{(1-M_c^2)^4} \qquad (1.16)$$

On retrouve ici la célèbre loi de Lighthill pondérée par un facteur de convection amplificateur. On montre dans le chapitre 2 qu'elle est en accord avec les résultats expérimentaux pour des nombres de Mach convectifs subsoniques.

1.4 Cas du jet libre supersonique

Le cas du jet libre subsonique a permis, en négligeant la contribution du temps retardé dans l'intégrale évaluant C_{pp}, d'obtenir une loi dimensionnelle pour l'intensité acoustique. Cependant, on observe que cette loi présente une singularité lorsque θ prend la valeur $\theta^\star = \cos^{-1}(1/M_c)$. Cette singularité n'a rien de physique, mais provient de l'hypothèse de compacité des sources, mise en défaut lorsque le nombre de Mach convectif M_c est supersonique.

La convection des structures turbulentes, qui n'est pas la cause d'un rayonnement acoustique lorsque M_c est subsonique, le devient dans le cas supersonique. La structure turbulente se comporte alors comme un projectile sur lequel se développe des ondes de Mach. U_c étant la vitesse de convection des structures les plus efficaces, les ondes de Mach forment alors un faisceau directionnel autour de $\theta^\star \simeq \cos^{-1}(c_o/U_c)$.

On note que l'énergie acoustique émise est intense mais finie, et qu'elle ne peut dans tous les cas excéder la somme des énergies des quatre monopiôles composant le tenseur de Lighthill.

Pour pouvoir continuer à utiliser l'analogie de Lighthill, il faut reprendre l'expression des fonctions S_{pp} et C_{pp}, sans faire l'hypothèse de sources compactes. Ainsi, la densité spectrale (1.12) s'écrit pour l'angle $\theta^\star$:

$$S_{pp}(\mathbf{x},\omega) = \frac{\rho_o\omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\iint_V\int_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\, e^{-i\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi}}\, dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}$$

On introduit alors la distribution δ:

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\rho_o\omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V\iint_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\, e^{i(\omega\alpha-\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi})}\delta(\alpha)\, d\alpha dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

Soit encore, par changement de variable en posant $\tau = \alpha - \mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}/x c_o$:

$$\begin{aligned} S_{pp}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\rho_o\omega^4}{32\pi^3 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V\iint_{-\infty}^{\infty} R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\, e^{i\omega\tau}\delta\left(\tau+\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}}{x c_o}\right) d\tau dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

L'expression de C_{pp} se déduit par transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} C_{pp}(\mathbf{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\ &\times \iint_V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial\tau^4}\delta\left(\tau+\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}}{x c_o}\right) R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\, dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant les propriétés[7] de δ:

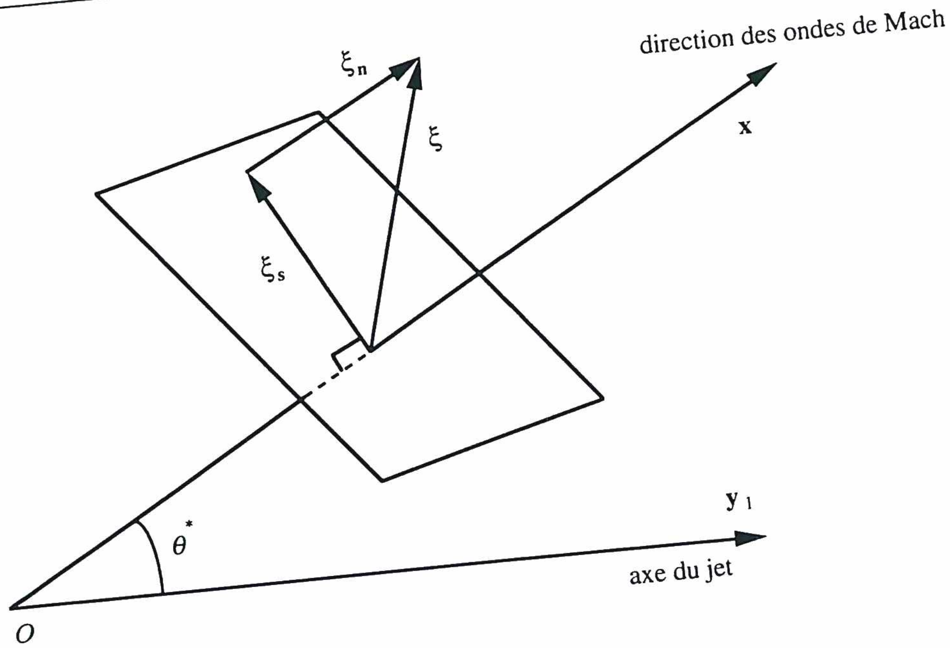


Figure 1.3: Ondes de Mach.

$$
\begin{aligned}
C_{pp}(\mathbf{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\
&\times \iint_V \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau + \frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}}{x c_o}\right)\left(\frac{x_k}{x}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right)^4 R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\, dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}
$$

Le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ est alors décomposé en $\boldsymbol{\xi}_n + \boldsymbol{\xi}_s$, avec $\boldsymbol{\xi}_n$ colinéaire à $\mathbf{x}$ (voir figure 1.3), ici la position particulière de l'observateur en θ^*:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}}{x} &= \xi_n \\
\frac{x_k}{x}\frac{\partial}{\partial \xi_k} &= \frac{\partial}{\partial \xi_n}
\end{aligned}
\right.
$$

L'intégrale précédente, à évaluer uniquement pour les points tels que $\xi_n = -c_o\tau$, s'écrit:

$$
\begin{aligned}
C_{pp}(\mathbf{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \\
&\times \iint_V \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi_n^4} R_{ijkl}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},t)\right]_{\xi_n = -c_o\tau} dt d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}_s
\end{aligned}
$$

On observe que seuls les gradients dans la direction θ^*, du tenseur des corrélations des vitesses, contribuent au rayonnement acoustique en champ lointain. L'analyse dimensionnelle de l'intensité acoustique $I = C_{pp}(\tau = 0)$ s'écrit:

$$
I \sim \frac{\rho_o}{x^2}\frac{1}{D^4} U^4 D^3 D^2 \frac{D}{U}
$$

Soit finalement:

$$I \sim \rho_o \frac{D^2}{x^2} U^3 \tag{1.17}$$

Et la puissance acoustique se déduit immédiatement:

$$W \sim \rho_o D^2 U^3 \tag{1.18}$$

On retrouve ici la loi de Ffowcs Williams[3,8] donnant la puissance acoustique rayonnée directement proportionnelle à la puissance mécanique du jet. L'efficacité acoustique η définie comme le rapport des puissances acoustique et mécanique est constante, et telle que: $0.001 \leq \eta \leq 0.01$.

1.5 Modélisation de la convection

L'analogie de Lighthill (1.8) permet d'exprimer la fonction d'autocorrélation de la pression acoustique par:

$$C_{pp}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2} \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \iint_V \mathcal{R}_{ijkl}\left(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \tau + \frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\eta}}{x c_o}\right) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\eta} \tag{1.19}$$

L'intensité acoustique par unité de volume source, notée $I(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$, se déduit en évaluant C_{pp} en $\tau = 0$. Elle s'écrit alors, en utilisant la distribution δ:

$$I(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = I_o X_{ijkl} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \tau)\, \delta\left(\tau - \frac{\mathbf{x}.\boldsymbol{\eta}}{x c_o}\right) d\boldsymbol{\eta} d\tau \tag{1.20}$$

où:

$$I_o = \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2} \quad \text{et} \quad X_{ijkl} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}$$

On montre dans le paragraphe 1.2 l'intérêt d'introduire un repère lié à la vitesse de convection $U_c \mathbf{y}_1$ des grosses structures turbulentes pour évaluer I. On pose ainsi:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} - U_c \tau \mathbf{y}_1$$

On introduit également une longueur caractéristique de la turbulence λ:

$$\lambda = \alpha U_c \tau$$

formée à partir de τ, échelle de temps typique de la turbulence, et de αU_c, échelle de vitesse de la turbulence. Dans cette expression, α est un paramètre sans dimension, petit devant 1.

En effectuant le changement de variables $(\boldsymbol{\eta}, \tau) \rightarrow (\boldsymbol{\xi}, \lambda)$ dans l'expression de l'intensité I, il vient alors:

$$I(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = I_o X_{ijkl} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} R_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \tau)\, \delta(g(\boldsymbol{\eta}, \lambda))\, d\boldsymbol{\xi} \frac{d\lambda}{\alpha U_c} \tag{1.21}$$

où l'on a posé:

$$g(\xi, \lambda) = \frac{\lambda}{\alpha U_c}(1 - M_c \cos\theta) - \frac{\mathbf{x}.\xi}{x c_o}$$

Pour évaluer l'intégrale (1.21), on utilise alors les propriétés[7] de la fonction δ. On s'intéresse à une intégrale de la forme:

$$\int \phi(\mathbf{x})\,\delta(g(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$$

La fonction $\delta(g)$ est non nulle uniquement pour les points $\mathbf{x}$ tels que $g(\mathbf{x}) = 0$. On note Σ l'hypersurface définie précisement par $g(\mathbf{x}) = 0$. En intégrant suivant la normale $\mathbf{n} = \nabla g / \mid \nabla g \mid$ à Σ, il vient:

$$\int_V \phi(\mathbf{x})\,\delta(g(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int_\Sigma \phi(\mathbf{x}^\star)\frac{ds^\star}{\mid \nabla g(\mathbf{x}^\star)\mid}$$

où $\mathbf{x}^\star$ est un point de Σ. De façon plus générale, on montre (voir Jones[7], p.295):

$$\int_V \phi(\mathbf{x})\,\delta^{(k)}(g(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int_\Sigma \left(\frac{1}{\mid \nabla g(\mathbf{x}^\star)\mid}\frac{\partial}{\partial n}\right)^k \phi(\mathbf{x}^\star)\frac{ds^\star}{\mid \nabla g(\mathbf{x}^\star)\mid}$$

Dans notre cas, on déduit de (1.21):

$$I(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) = I_o X_{ijkl}\frac{1}{\alpha U_c}\int_\Sigma \frac{1}{\mid \nabla g\mid^4}\frac{\partial^4}{\partial n^4}R_{ijkl}(\mathbf{y}, \xi^\star, \lambda^\star)\frac{ds^\star}{\mid \nabla g\mid} \tag{1.22}$$

où les coordonnées $(\xi^\star, \lambda^\star)$ indiquent que le point est pris sur Σ, et:

$$\mid \nabla g \mid = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\alpha U_c}\left[\alpha^2 M_c^2 + (1 - M_c\cos\theta)^2\right]^{1/2}$$

Le calcul peut se développer alors en supposant la turbulence isotrope. Ainsi, le tenseur R_{ijkl} ne dépend plus alors que de la distance $\sqrt{\xi^2 + \lambda^2}$, et on peut en déduire:

$$(\alpha U_c)^4\frac{\partial^4}{\partial n^4}R_{ijkl}(\mathbf{y}, \xi^\star, \lambda^\star) = (\alpha U_c)^4\frac{\partial^4}{\partial \lambda^4}R_{ijkl}(\mathbf{y}, \xi, \lambda = 0) = \frac{\partial^4}{\partial \tau^4}R_{ijkl}(\mathbf{y}, \xi, \tau = 0)$$

L'intensité acoustique I s'écrit finalement d'après (1.22):

$$I(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) = I_o X_{ijkl}\frac{1}{\left[(1 - M_c\cos\theta)^2 + \alpha^2 M_c^2\right]^{5/2}}\int_V \frac{\partial^4}{\partial \tau^4}R_{ijkl}(\mathbf{y}, \xi, 0)\,d\xi \tag{1.23}$$

L'influence de la convection des structures turbulentes par l'écoulement moyen se modélise finalement sur l'intensité acoustique, en multipliant cette dernière par le facteur Doppler C^{-5}, où:

$$C = \left[(1 - M_c\cos\theta)^2 + \alpha^2 M_c^2\right]^{1/2}$$

L'expression de l'intensité acoustique (1.23) est équivalente à celle obtenue à partir de la fonction d'autocorrélation (1.13). On doit historiquement cette analyse à Ffowcs Williams[3].

Références

[1]**Lighthill, M.J.**, 1952, "On sound generated aerodynamically - I. General theory," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 211, Ser. A, 1107, pp. 564-587.

[2]**Lighthill, M.J.**, 1954, "On sound generated aerodynamically - II. Turbulence as a source of sound," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 222, Ser. A, 1148, pp. 1-32.

[3]**Ffowcs Williams, J.E.**, 1963, "The noise from turbulence convected at high speed," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 225, Ser. A, 1061, pp. 469-503.

[4]**Ribner, H.S.**, 1964, "The generation of sound by turbulent jets," *Academic Press*, Vol. VIII, pp. 103-182.

[5]**Crighton, D.**, 1975, "Basic principles of aerodynamic noise generation," *Prog. Aerospace Sci.*, Vol. 16(1), pp. 31-96.

[6]**Goldstein, M.E.**, 1976, "Aeroacoustics," *McGraw-Hill*, New York.

[7]**Jones, D.S.**, 1982, "The theory of generalised functions," Second edition, *Cambridge University Press.*

[8]**Ffowcs Williams, J.E.**, 1960, "Some thoughts on the effects of aircraft motion and eddy convection on the noise from air jets," *University of Southampton*, AASU Report 155.

Chapitre 2

Modélisation du bruit de mélange d'un écoulement libre

On étudie dans ce deuxième chapitre deux modélisations du tenseur R_{ijkl} en se plaçant a priori, dans le cas d'un écoulement subsonique ou faiblement supersonique, mais dans tous les cas *avec un nombre de Mach convectif M_c toujours subsonique*. Les deux premières sections sont consacrées à la construction des modèles, en supposant la turbulence isotrope, puis axisymétrique. On s'intéresse alors à la validation des calculs aérodynamiques, puis enfin à l'étude des résultats acoustiques obtenus par ces deux types de modèles. Ces deux dernières sections font très largement appel aux données expérimentales connues de la littérature.

2.1 Cas d'une turbulence isotrope

On s'inspire ici des idées développées dans deux articles de Ribner[1,2], qui propose une démarche complète pour finalement exprimer l'intensité acoustique rayonnée par unité de volume source en fonction de grandeurs moyennes et statistiques supposées connues de l'écoulement turbulent générateur. Pour cela, on suppose dans cette section que la turbulence est isotrope: cette hypothèse permet alors d'exprimer toutes les corrélations des vitesses d'ordre 2 et 4 à partir d'une seule fonction scalaire f.

Toutes les étapes du calcul sont développées dans la suite, ce qui permet au lecteur de suivre complètement l'élaboration du modèle. De plus, il est ainsi possible en suivant cette trame d'adapter le calcul à d'autres configurations, comme les jets plans par exemple.

On a montré dans le premier chapitre qu'il était possible de négliger le temps retardé apparaissant dans la fonction C_{pp}, quitte à évaluer le tenseur des corrélations des vitesses dans un repère lié aux structures turbulentes convectées par l'écoulement moyen. On retient donc l'expression suivante pour C_{pp}:

$$C_{pp}(\mathbf{x},\tau) = \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}\frac{1}{C^5}\iint_V \left[\frac{\partial^4}{\partial t^4}R_{ijkl}(\mathbf{y},\xi,t)\right]_{t=\frac{\tau}{C}} d\mathbf{y}\,d\xi \qquad (2.1)$$

où C est le facteur de convection donné par (1.23). L'objectif est ici de modéliser le tenseur des corrélations des vitesses R_{ijkl}, pour finalement obtenir une expression locale des sources acoustiques, que l'on pourra évaluer à partir des grandeurs moyennes de l'écoulement et de la turbulence.

Le champ de vitesse est par hypothèse construit comme la somme d'une composante $U\delta_{1i}$ pour l'écoulement moyen unidirectionnel, et d'une composante u_{ti} pour la turbulence: $u_i = U\delta_{1i} + u_{ti}$. Cette décomposition de Reynolds du champ de vitesse est insérée dans le tenseur R_{ijkl}. On observe par ailleurs d'après (2.1) que ce tenseur peut être défini à une constante près $\varphi_{ijkl}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$. On écrit alors:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tk}u''_{tl}} \\ &+ U'U''\left(\delta_{1i}\delta_{1k}\overline{u'_{tj}u''_{tl}} + \delta_{1j}\delta_{1k}\overline{u'_{ti}u''_{tl}} + \delta_{1i}\delta_{1l}\overline{u'_{tj}u''_{tk}} + \delta_{1j}\delta_{1l}\overline{u'_{ti}u''_{tk}}\right) \\ &+ U'\left(\delta_{1i}\overline{u'_{tj}u''_{tk}u''_{tl}} + \delta_{1j}\overline{u'_{ti}u''_{tk}u''_{tl}}\right) + U''\left(\delta_{1k}\overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tl}} + \delta_{1l}\overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tk}}\right) \\ &+ \varphi_{ijkl} \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec:

$$\varphi_{ijkl} = U'^2\delta_{1i}\delta_{1j}\overline{u''_{tk}u''_{tl}} + U''^2\delta_{1k}\delta_{1l}\overline{u'_{ti}u'_{tj}} + U'^2U''^2\delta_{1i}\delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{1l}$$

Tous les termes de l'expression (2.2) ne contribuent pas au rayonnement acoustique. Outre les termes indépendants de τ qui sont regroupés dans la constante φ_{ijkl}, les termes suivants:

$$U'\left(\delta_{1i}\overline{u'_{tj}u''_{tk}u''_{tl}} + \delta_{1j}\overline{u'_{ti}u''_{tk}u''_{tl}}\right) + U''\left(\delta_{1k}\overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tl}} + \delta_{1l}\overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tk}}\right)$$

après intégration n'ont aucune contribution pour une turbulence homogène de façon générale. En supposant que le tenseur des corrélations triples s'écrit comme le produit d'une fonction temporelle par une fonction spatiale, on montre (voir annexe A) que cette dernière est une fonction impaire de ξ.

Finalement, le rayonnement acoustique est obtenu en intégrant dans (2.1) le tenseur $R^\star_{ijkl}$ suivant:

$$\begin{aligned} R^\star_{ijkl} &= \overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tk}u''_{tl}} \\ &+ U'U''\left(\delta_{1i}\delta_{1k}\overline{u'_{tj}u''_{tl}} + \delta_{1j}\delta_{1k}\overline{u'_{ti}u''_{tl}} + \delta_{1i}\delta_{1l}\overline{u'_{tj}u''_{tk}} + \delta_{1j}\delta_{1l}\overline{u'_{ti}u''_{tk}}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

En utilisant la terminologie introduite par Lilley[3], on observe que ce tenseur est la somme de deux termes: le premier, appelé *bruit propre*, ne fait intervenir que des corrélations du champ turbulent, alors que le second, appelé *bruit de cisaillement*, est dû à l'interaction entre l'écoulement moyen et le champ turbulent.

Avant de modéliser les différentes corrélations intervenant dans $R^\star_{ijkl}$, il est judicieux d'exploiter la géométrie particulière pour laquelle on applique ce modèle. En effet, on étudie ici le cas d'un jet libre circulaire, dont on sait le rayonnement acoustique axisymétrique. Par conséquent, bien que l'intégrande dans (2.1) ne soit pas elle-même axisymétrique, la fonction d'autocorrélation est cependant invariante par moyenne sur ϕ:

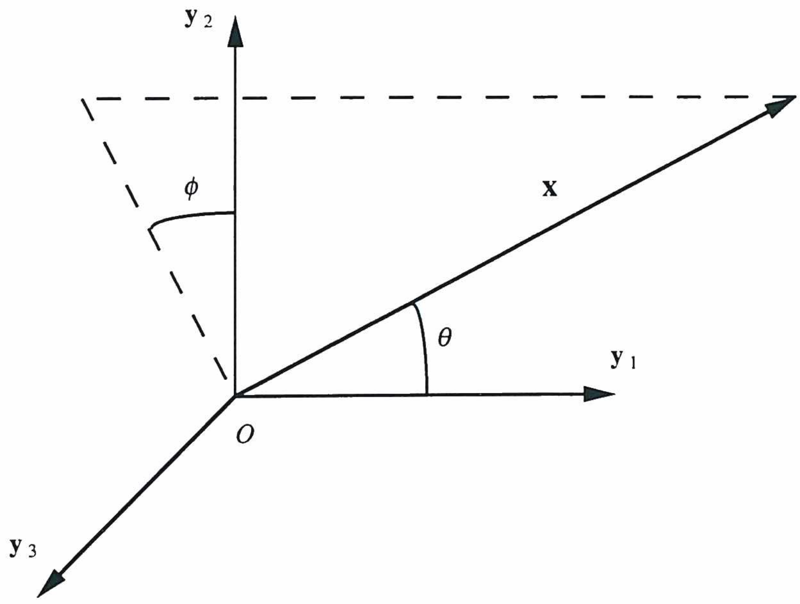


Figure 2.1: Invariance de C_{pp} par rapport à ϕ.

$$\overline{C_{pp}(\mathbf{x},\tau)}^{\phi} = C_{pp}(\mathbf{x},\tau) = C_{ijkl}(\mathbf{x},\tau)\,X_{ijkl}(\mathbf{x})$$

avec:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(\mathbf{x},\tau) &= \frac{\rho_o}{16\pi^2 c_o^5 x^2}\frac{1}{C^5}\iint_V \frac{\partial^4}{\partial t^4}\left[R^\star_{ijkl}(\mathbf{y},\xi,t)\right]_{t=\frac{\tau}{c}} d\mathbf{y}d\xi \\ X_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4}d\phi \end{aligned}$$

Le tenseur X_{ijkl} se calcule facilement en passant en coordonnées sphériques: $x_1 = x\cos\theta$, $x_2 = x\sin\theta\cos\phi$ et $x_3 = x\sin\theta\sin\phi$. Les seuls termes non nuls sont obtenus lorsque les indices $ijkl$ sont égaux en nombre pair:

$$\begin{aligned} X_{1111} &= \cos^4\theta \\ X_{1212} &= X_{1313} = \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta \\ X_{2222} &= X_{3333} = \frac{3}{8}\sin^4\theta \\ X_{2323} &= \frac{1}{8}\sin^4\theta \end{aligned}$$

En tenant compte de cette dernière remarque, le calcul de C_{pp} se résume à estimer les 9 termes C_{ijkl} suivants:

$ijkl$	termes C_{ijkl} identiques	pondération	R^*_{ijkl}
1111		1	$\overline{u'^2_{t1}u''^2_{t1}} + 4U'U''\overline{u'_{t1}u''_{t1}}$
1212	$C_{1212}, C_{1221}, C_{2121}, C_{2112}$	4	$\overline{u'_{t1}u'_{t2}u''_{t1}u''_{t2}} + U'U''\overline{u'_{t2}u''_{t2}}$
1313	$C_{1313}, C_{1331}, C_{3131}, C_{3113}$	4	$\overline{u'_{t1}u'_{t3}u''_{t1}u''_{t3}} + U'U''\overline{u'_{t3}u''_{t3}}$
1122	C_{1122}, C_{2211}	2	$\overline{u'^2_{t1}u''^2_{t2}}$
1133	C_{1133}, C_{3311}	2	$\overline{u'^2_{t1}u''^2_{t3}}$
2222		1	$\overline{u'^2_{t2}u''^2_{t2}}$
2323	...	4	$\overline{u'_{t2}u'_{t3}u''_{t2}u''_{t3}}$
2233	...	2	$\overline{u'^2_{t2}u''^2_{t3}}$
3333		1	$\overline{u'^2_{t3}u''^2_{t3}}$

C_{pp} se réduit donc finalement à:

$$
\begin{aligned}
C_{pp}(\mathbf{x},\tau) &= \int_V \Big[\cos^4\theta C_{1111} + \cos^2\theta\sin^2\theta\,(2C_{1212} + 2C_{1313} + C_{1122} + C_{1133}) \\
&+ \sin^4\theta\left(\frac{3}{8}C_{2222} + \frac{3}{8}C_{3333} + \frac{1}{2}C_{2323} + \frac{1}{4}C_{2233}\right)\Big]\,d\mathbf{y} \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

L'évaluation des corrélations d'ordre 2 et 4 des vitesses se fait en utilisant les trois hypothèses suivantes:

1. La loi de probabilité pour la distribution des vitesses turbulentes, en deux points et à t fixé, est normale. Ainsi, le tenseur des corrélations d'ordre 4 en $\tau = 0$ s'écrit (voir Batchelor[4]):

$$\overline{u'_{ti}u'_{tj}u''_{tk}u''_{tl}} = \overline{u'_{ti}u'_{tj}}\,\overline{u''_{tk}u''_{tl}} + \overline{u'_{ti}u''_{tk}}\,\overline{u'_{tj}u''_{tl}} + \overline{u'_{ti}u''_{tl}}\,\overline{u'_{tj}u''_{tk}}$$

Soit encore en introduisant le tenseur d'ordre 2 des vitesses turbulentes:

$$R_{ijkl} = R_{ij}(\mathbf{y},0,0)\,R_{kl}(\mathbf{y},0,0) + R_{ik}R_{jl} + R_{il}R_{jk}$$

où:

$$R_{ij}(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},\tau) = \overline{u_{ti}(\mathbf{y},t)\,u_{tj}(\mathbf{y}+\boldsymbol{\xi},t+\tau)} = \overline{u'_{ti}u''_{tj}}$$

Seuls les deux derniers termes du développement de R_{ijkl} contribuent au rayonnement acoustique d'après (2.1), le premier étant indépendant de τ. On suppose par la suite que la décomposition du tenseur R_{ijkl} est toujours valide lorsque $\tau \neq 0$. Cette dernière hypothèse n'est en fait nécessaire que pour le calcul de la densité spectrale de puissance S_{pp}, l'intensité acoustique étant donnée précisement par C_{pp} en $\tau = 0$.

2. La turbulence est isotrope, et le tenseur des corrélations d'ordre 2 s'écrit comme le produit d'une fonction temporelle par une fonction spatiale. On sait alors écrire cette dernière (voir annexe A) à partir d'une unique fonctionnelle f:

$$R_{ij}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = e^{-\omega_t^2 \tau^2} \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$$

où:

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = \overline{u_t^2} \left[\left(f + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{2} \frac{df}{d\xi} \frac{\xi_i \xi_j}{\xi} \right]$$

La fonction f choisie est la suivante:

$$f(\xi) = e^{-\frac{\pi \xi^2}{L^2}}$$

où L est l'échelle de longueur intégrale de la turbulence, et $\overline{u_t^2}$ l'énergie cinétique dans une direction quelconque: $\overline{u_t^2} = 2/3k$. On observe d'après (2.1) que la fonction f doit être dérivable en $\tau = 0$ pour pouvoir évaluer l'intensité acoustique I.

3. L'évaluation du produit $U'U''$ se fait par un développement limité autour du point $\mathbf{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{aligned} U'U'' &= U\left(y_2 - \frac{1}{2}\xi_2\right) U\left(y_2 + \frac{1}{2}\xi_2\right) \\ &= U^2(y_2) - \frac{1}{4}\xi_2^2 \left[\frac{\partial U}{\partial y_2}\right]^2 + \ldots \end{aligned}$$

Finalement, on dispose maintenant de tous les éléments permettant d'exprimer la fonction d'autocorrélation (2.1) à partir de grandeurs statistiques de la turbulence. En tenant compte des relations précédentes pour l'expression des tenseurs des corrélations d'ordre 2 et 4, (2.4) permet d'obtenir l'intensité acoustique rayonnée I:

$$I(\mathbf{x}) = \int_V \left[I^{propre}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) + I^{cisaillement}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) \right] d\mathbf{y} \tag{2.5}$$

avec:

$$I^{propre}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\rho_o \overline{u_t^2}^2 L^3}{\pi^2 c_o^5 x^2} \frac{1}{C^5} \omega_t^4 \tag{2.6}$$

$$I^{cisaillement}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \frac{3}{8} \frac{\rho_o \overline{u_t^2} L^5}{\pi^3 c_o^5 x^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y_2} \right)^2 \frac{1}{C^5} \omega_t^4 D^{cisaillement} \tag{2.7}$$

$$D^{cisaillement} = \frac{1}{2} \left(\cos^4 \theta + \cos^2 \theta \right)$$

De cette expression de l'intensité acoustique, on remarque que le bruit propre est isotrope, conséquence directe de la description isotropique de la turbulence dans le repère mobile. La directivité du bruit de cisaillement† est de type dipôle, dont l'axe est aligné sur la direction principale de l'écoulement moyen $\mathbf{y}_1$. Il est important d'observer également le rôle essentiel du facteur de convection C sur la directivité de I, qui s'écrit formellement:

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{C^5}\left[A + B\frac{1}{2}\left(\cos^4\theta + \cos^2\theta\right)\right]$$

Il est difficile de préciser à ce stade l'importance relative des deux composantes de l'intensité acoustique. Un choix possible est de former le rapport R:

$$R = \frac{I^{propre}}{I^{cisaillement}(\theta = 0)} = 2\sqrt{2}\pi\frac{\overline{u_t^2}}{L^2\left(\dfrac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2}$$

Pour un jet libre subsonique[2], $R \simeq 1$. De la même façon que dans le premier chapitre, la connaisance de C_{pp} permet d'en déduire S_{pp}, la densité spectrale de puissance, par transformée de Fourier. Il vient alors:

$$S_{pp}^{propre}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \omega) = \frac{\rho_o \overline{u_t^2}^2 L^3}{128\pi^2\sqrt{\pi}c_o^5 x^2}\frac{\omega^4}{\omega_t}e^{-\dfrac{C^2\omega^2}{8\omega_t^2}} \tag{2.8}$$

$$S_{pp}^{cisaillement}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \omega) = \frac{\rho_o \overline{u_t^2} L^5}{64\pi^3\sqrt{\pi}c_o^5 x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2\frac{\omega^4}{\omega_t}e^{-\dfrac{C^2\omega^2}{4\omega_t^2}} D^{cisaillement} \tag{2.9}$$

2.2 Cas d'une turbulence axisymétrique

On conçoit assez facilement que l'écoulement moyen, porté seulement par $\mathbf{y}_1$, introduit une direction privilégiée pour la turbulence. Davies *et al.*[5] ont mesuré le rapport des longueurs intégrales de corrélation longitudinale L_1 et transversale L_2: $L_1/L_2 \simeq 3$. Cette structure non isotrope de la turbulence a une influence sensible sur l'intensité acoustique rayonnée.

La démarche précédente peut se généraliser au cas d'une turbulence axisymétrique. Goldstein et Rosenbaum[6] en s'appuyant sur la méthodologie de Ribner, ont développé les calculs dans ce cadre.

L'hypothèse d'une turbulence axisymétrique intervient dans la modélisation du tenseur des vitesses d'ordre 2, qui s'exprime alors en coordonnées cartésiennes par:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij} &= \epsilon_{jlm}\frac{\partial q_{im}}{\partial \xi_l} \\
\epsilon_{jlm} &= \frac{1}{2}(j-l)(l-m)(m-j) \\
q_{ij} &= \xi_k\left[\epsilon_{ijk}Q_1 + \epsilon_{i1k}\left(\delta_{1j}Q_2 + \xi_j Q_3\right)\right]
\end{aligned}$$

†Ces directivités sont tracées dans la section suivante, et comparées à celles obtenues avec une description axisymétrique de la turbulence.

$$Q_3 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\xi_1}{\xi_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3}\right) Q_1$$

Les fonctions scalaires Q_1 et Q_2 sont choisies de la même façon que pour une turbulence isotrope: séparation des variables de temps et d'espace, avec finalement pour Q_1 et Q_2:

$$\begin{aligned} Q_1(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},\tau) &= -\frac{1}{2}\overline{u_{t1}^2} f(\mathbf{y},\tau) \exp\left\{-\left(\frac{\xi_1^2}{L_1^2}+\frac{\xi_2^2}{L_2^2}\right)^{1/2}\right\} \\ Q_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},\tau) &= -\left(\overline{u_{t2}^2}-\overline{u_{t1}^2}\right) f(\mathbf{y},\tau) \exp\left\{-\left(\frac{\xi_1^2}{L_1^2}+\frac{\xi_2^2}{L_2^2}\right)^{1/2}\right\} \end{aligned}$$

où:

$$f(\mathbf{y},\tau) = e^{-\omega_t^2\tau^2}$$

L'expression de l'intensité acoustique I s'obtient alors par intégration sur tout le volume source V (voir expression (2.1) et suivantes). Tous calculs faits, on déduit de C_{pp}:

$$I(\mathbf{x}) = \int_V \left[I^{propre}(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) + I^{cisaillement}(\mathbf{x}\mid\mathbf{y})\right] d\mathbf{y} \tag{2.10}$$

avec:

$$I^{propre}(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) = \frac{12}{5\pi}\frac{\rho_o \overline{u_{t1}^2}^2 L_1 L_2^2}{c_o^5 x^2}\frac{1}{C^5}\omega_t^4 D^{propre} \tag{2.11}$$

$$I^{cisaillement}(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) = \frac{24}{\pi}\frac{\rho_o \overline{u_{t1}^2} L_1 L_2^4}{c_o^5 x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2\frac{1}{C^5}\omega_t^4 D^{cisaillement} \tag{2.12}$$

où:

$$\begin{aligned} D^{propre} &= 1 + 2\left(\frac{M}{9} - N\right)\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &\quad + \frac{1}{3}\left[\frac{M^2}{7} + M - \frac{3N}{2}\left(3 - 3N + \frac{3}{2\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{2}\right)\right]\sin^4\theta \\ D^{cisaillement} &= \cos^2\theta\left[\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta^2} - 2N\right)\sin^2\theta\right] \end{aligned}$$

et:

$$\Delta = \frac{L_2}{L_1}, \quad M = \left[\frac{3}{2}\left(\Delta - \frac{1}{\Delta}\right)\right]^2, \quad N = 1 - \frac{\overline{u_{t2}^2}}{\overline{u_{t1}^2}}$$

De même, la densité spectrale de puissance S_{pp} s'établit par transformée de Fourier de C_{pp}:

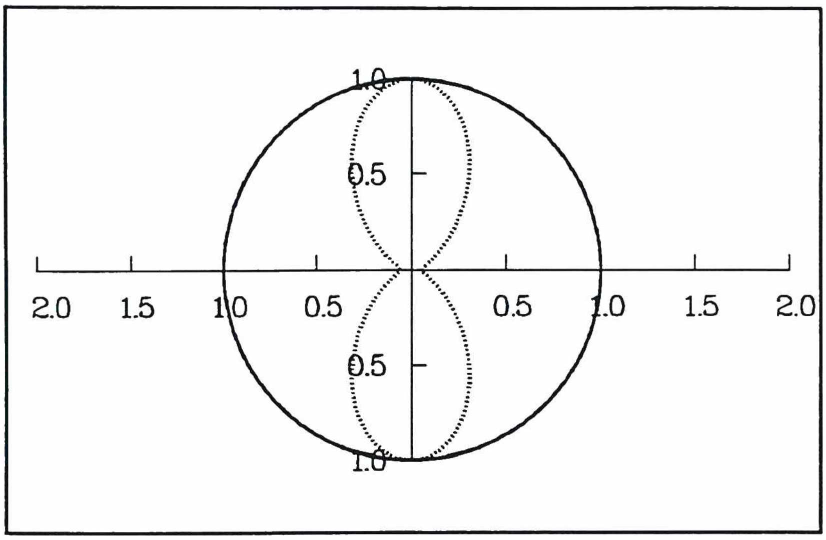


Figure 2.2: Directivité du bruit propre pour le cas d'une turbulence isotrope — et d'une turbulence axisymétrique ········ .

$$S_{pp}^{propre}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_o \overline{u_{t1}^2}^2 L_1 L_2^2}{\pi c_o^5 x^2} \frac{\omega^4}{\omega_t} e^{-\frac{C^2\omega^2}{8\omega_t^2}} D^{propre} \tag{2.13}$$

$$S_{pp}^{cisaillement}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_o \overline{u_{t1}^2} L_1 L_2^4}{\pi c_o^5 x^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_t} e^{-\frac{C^2\omega^2}{4\omega_t^2}} D^{cisaillement} \tag{2.14}$$

La turbulence axisymétrique induit une directivité du bruit propre, de type dipolaire dont l'axe est perpendiculaire à la direction $\mathbf{y_1}$ de l'écoulement moyen. Le bruit de cisaillement est également de même type que celui d'un dipôle, dont l'axe est cette fois-ci aligné sur $\mathbf{y_1}$. Sur les figures 2.2 et 2.3 sont représentées ces deux directivités sous la forme $D(\theta)/D_{max}$ pour une turbulence isotrope et axisymétrique, avec les valeurs suivantes de Δ et N:

$$\Delta = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{3} \qquad N = 1 - \frac{\overline{u_{t2}^2}}{\overline{u_{t1}^2}} = 0.8$$

Par ailleurs, on vérifie que les expressions de l'intensité acoustique I obtenues pour une turbulence axisymétrique redonnent bien celles obtenues pour une turbulence isotrope, en prenant $\Delta = 1$ et $N = 0$.

2.3 Modélisation des grandeurs turbulentes

Le calcul de l'intensité I nécessite la connaissance locale des grandeurs suivantes: ω_t, $\overline{u_{t1}^2}$, $\overline{u_{t2}^2}$, L_1, L_2, U_c et C. Pour estimer toutes ces grandeurs, on dispose de la vitesse

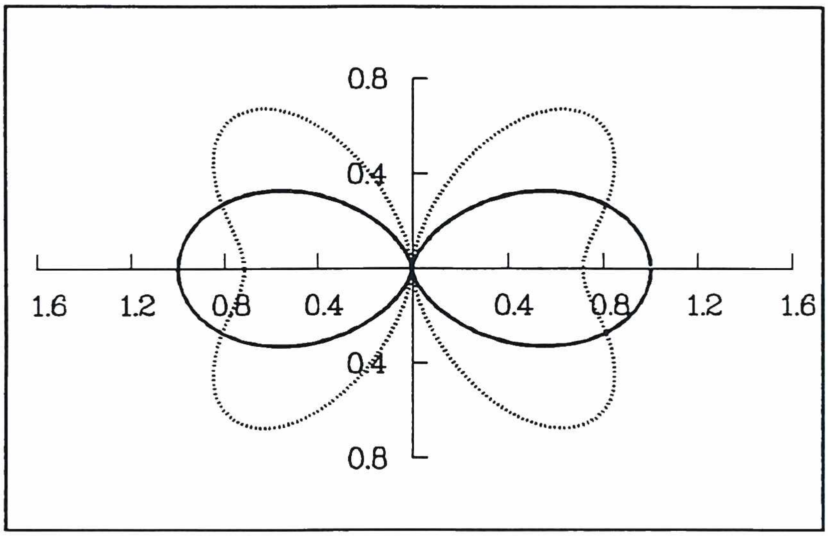


Figure 2.3: Directivité du bruit de cisaillement pour le cas d'une turbulence isotrope — et d'une turbulence axisymétrique ······ .

moyenne U de l'écoulement, de l'énergie cinétique k et de son taux de dissipation ϵ, issus d'un calcul aérodynamique.

- pulsation caractéristique de la turbulence. Elle est modélisée à partir du rapport ϵ/k fournissant l'inverse d'un temps caractéristique:

$$\omega_t = 2\pi\frac{\epsilon}{k}$$

- intensité turbulente longitudinale $\overline{u_{t1}^2}$ et transversale $\overline{u_{t2}^2}$. On utilise le concept de viscosité turbulente qui sert à fermer les équations moyennées de Navier-Stokes (voir Annexe A). Ainsi, $\overline{u_{t1}^2}$ et $\overline{u_{t2}^2}$ se déduisent dans notre cas ($U_i \simeq \delta_{1i}U$ et $\nabla.U \simeq 0$) par:

$$\overline{u_{t1}^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t\frac{\partial\overline{U_1}}{\partial x_1}$$
$$\overline{u_{t2}^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t\frac{\partial\overline{U_2}}{\partial x_2}$$

- longueur de corrélation longitudinale L_1 et transversale L_2. L'information sur l'anisotropie des fluctuations quadratiques de vitesse est plutôt mal estimée par un modèle de turbulence $k-\epsilon$, qui en fait ne calcule que l'évolution de k, i.e. la demi-somme des trois contraintes normales. L'échelle intégrale de longueur L_1 est donnée par:

$$L_1 = \frac{\pi}{2\overline{u_{t1}^2}}\int_0^\infty E(\mathrm{k})\frac{d\mathrm{k}}{\mathrm{k}} \qquad (2.15)$$

Une échelle de longueur est également déduite du rapport $(2/3k)^{3/2}/\epsilon$. On montre dans la section suivante consacrée à la validation des résultats aérodynamiques, que cette échelle est identique à L_1, i.e.

$$L_1 \simeq \frac{(2/3k)^{3/2}}{\epsilon} \tag{2.16}$$

Pour estimer L_1 à partir de (2.15), on utilise un spectre de Von Karman modifié pour tenir compte des structures fines, dont on détermine les constantes à partir de k et ϵ (voir Annexe A).

La longueur de corrélation transversale L_2 pour le cas d'une turbulence axisymétrique est déduite de L_1 par:

$$L_2 = \frac{1}{3} L_1$$

Cette valeur imposée de l'anisotropie est tirée des mesures de Davies *et al.*[5]

- vitesse de convection U_c. La vitesse de convection est souvent prise constante dans tout l'écoulement: $U_c \simeq 0.6$ à $0.7 U_{jet}$. Davies *et al.*[5] ont mesuré le profil radial de cette vitesse de convection dans la zone de mélange d'un jet subsonique, comparé au profil radial de la vitesse axiale. S'inspirant de ces deux résultats, la vitesse de convection est ici calculée par:

$$U_c = 0.67 U_{1axe}$$

Elle est donc constante dans chaque plan perpendiculaire à l'axe du jet, mais varie selon $\mathbf{y}_1$ en fonction de la vitesse axiale moyenne.

- facteur de convection C. Le facteur de convection C établi dans le chapitre précédent (1.23) s'écrit

$$C = \left[(1 - M_c \cos\theta)^2 + \alpha^2 M_c^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

où α est un petit paramètre reliant une longueur caractéristique L à une échelle de vitesse αU_c et une échelle de temps τ de la turbulence: $L \sim \alpha U_c \tau$. L'expression finalement adopté pour α est suggérée par Ribner[1]. Tanna[7] la compare à ces mesures et montre qu'elle décrit assez bien la convection dans le premier quadrant, i.e. $0 \leq \theta \leq 90°$:

$$C = \left[(1 - M_c \cos\theta)^2 + \alpha^2 M_c^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(1 - M_c \cos\theta)^2 + \frac{\omega_t^2 L^2}{\pi c_o^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

2.4 Résultats aérodynamiques

Les calculs aérodynamiques sont effectués avec le code ESTET (Etudes et Simulations Tridimensionnelles d'Ecoulements Turbulents), développé par le Laboratoire National d'Hydraulique de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. La version standard actuelle du code prend seulement en compte la compressibilité du champ moyen de vitesse. On a donc implanté une modélisation de la compressibilité de la turbulence, tirée des travaux de Zeman (voir Annexe A). Les équations finalement résolues[†], et l'algorithme du code sont décrits dans l'annexe A.

La géométrie est cylindro-polaire (résolution sur 3 plans), le maillage est structuré mais non régulier, et comporte $200 \times 3 \times 124 \simeq 75000$ points. Le domaine de calcul s'étend sur $20D$ dans la direction principale de l'écoulement et sur $14D$ dans la direction transversale, où $D = 25 \times 10^{-3}$ m est le diamètre de la tuyère. Sur les figures des pages suivantes, le domaine est symétrisé et seule la partie $[0; 20D] \times [-4D; 4D]$ est représentée.

Quatre types de conditions aux limites sont appliqués sur le domaine de calcul. Sur le diamètre de la tuyère, la vitesse, la température, l'énergie cinétique et la dissipation sont imposées. Sur l'axe de symétrie du jet, des conditions de symétrie sont appliquées sur l'écoulement moyen. L'entrée du domaine est à la pression imposée p_o, à laquelle on soustrait la perte de charge évaluée à chaque itération temporelle. Enfin, la sortie du domaine est libre pour la vitesse, et une condition de Neumann est appliquée sur la pression.

Pour ce chapitre, on présente les six configurations suivantes: $M = 0.56$, 0.86, 1.33, 1.48, 1.67 et 2.0 avec:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_o & = & 25^\circ \text{ C} \\ P_o & = & 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ \gamma & = & 1.4 \end{array} \right.$$

Il s'agit toujours ici de jets froids, $T_{jet}/T_o = 1$, parfaitement détendus. Sur la figure 2.4, on décrit schématiquement la structure du jet. On distingue trois parties dans l'écoulement: une première, appelée zone de mélange, est caractérisée par la présence d'un cône potentiel, lieu où l'écoulement est irrotationnel, une deuxième appelée zone de transition, et enfin une troisième où le jet est dit pleinement développé.

La longueur X_c du cône potentiel varie en fonction du nombre de Mach du jet M. Il est quasiment constant en subsonique, $X_c/D \simeq 4$ à 5, alors qu'il augmente sensiblement en supersonique: $X_c/D \simeq 4.2 + 1.1M^2$ d'après les mesures de Lau *et al.*[8] On note que dans la zone de mélange, ainsi que dans la partie où le jet est pleinement développé, les profils radiaux de vitesse et d'intensité turbulentes sont autosemblables. On pourra consulter Lau *et al.*[8] ou Seiner *et al.*[9] pour des mesures de ces profils, et Hinze[10] pour un développement analytique à partir des équations moyennées de Navier-Stokes.

Sur les figures 2.6 à 2.8 sont représentées pour les trois nombres de Mach $M = 0.86$, 1.33 et 2.0, les cartes d'iso-M, d'iso-k et d'iso-ϵ. On distingue sur ces figures le cône potentiel, région où l'intensité turbulente est quasi-nulle, et la zone de mélange où les

[†]Les calculs sont effectués sur le Cray YMP 4128 d'Electricité de France.

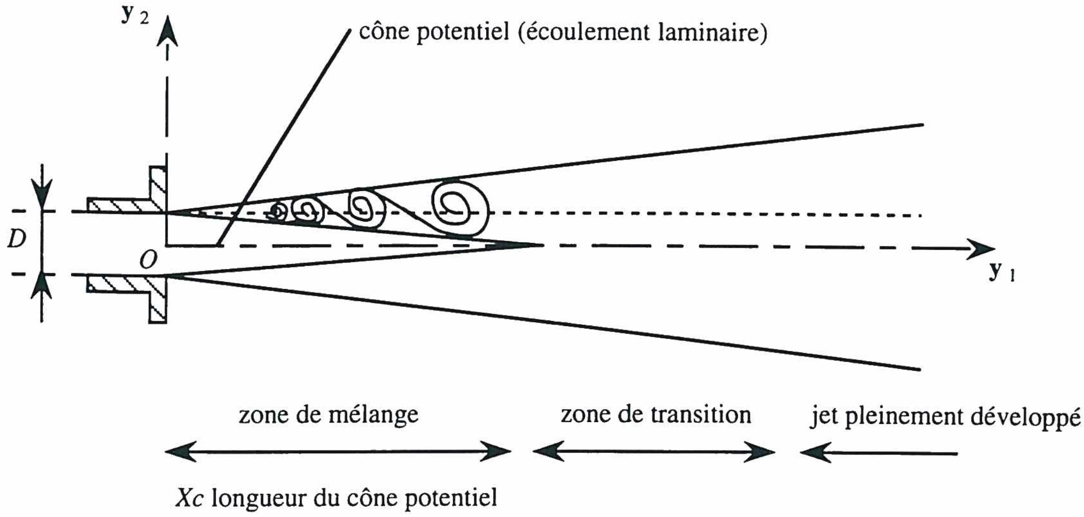


Figure 2.4: Développement d'un jet.

gradients transversaux de la vitesse moyenne induisent une forte production d'énergie cinétique turbulente, et par suite un taux de dissipation de cette énergie élevé.

A titre d'illustration, les équations de Reynolds dans le cas incompressible s'écrivent:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial y_j} = -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial y_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial y_j} - \frac{\partial \overline{u_{ti} u_{tj}}}{\partial y_j}$$

qui se réduit pour un écoulement quasi-unidirectionnel cisaillé, suivant $\mathbf{y_1}$:

$$\overline{U_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial y_2} \simeq -\frac{\partial \overline{u_{t1} u_{t2}}}{\partial y_2}$$

Par ailleurs, le modèle $k - \epsilon$ exprime la contrainte turbulente à partir du concept de viscosité turbulente ν_t par:

$$\overline{u_{t1} u_{t2}} \simeq -\nu_t \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial y_2}$$

La production d'énergie turbulente est donc maximale aux points où les gradients de l'écoulement moyen sont les plus élevés, i.e. dans notre cas les gradients transversaux de la couche de mélange (voir figure 2.5).

L'évolution de la longueur du cône potentiel X_c, définie comme la distance sur laquelle la vitesse axiale reste supérieure à $0.99 \times U_{jet}$, en fonction du nombre de Mach est donné sur la figure 2.9. On a reporté sur ce graphe, outre la loi empirique de Lau *et al.*[8] les résultats numériques obtenus avec un modèle $k - \epsilon$ standard, et un modèle $k - \epsilon$ prenant en compte la dissipation dilatationnelle (voir Annexe A), associée à la partie compressible du champ de vitesse turbulente. On note ainsi l'importance des effets compressibles sur le développement de la zone de mélange, i.e. sur le taux de

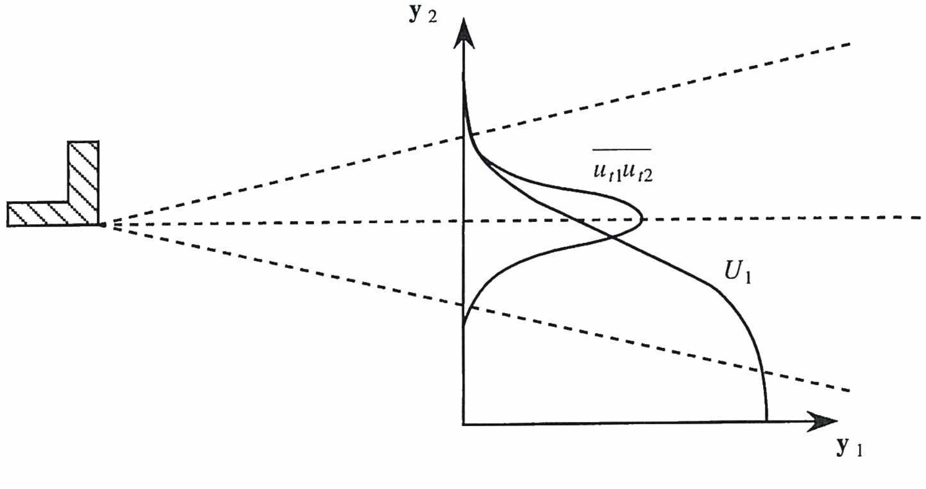


Figure 2.5: Schéma des profils radiaux de vitesse moyenne et d'intensité turbulente.

croissance de l'épaisseur de la couche de cisaillement. Tous les calculs présentés dans cette étude sont effectués avec le modèle $k-\epsilon$ compressible.

Quatre types de validations sont effectuées sur les calculs aérodynamiques, voir les figures 2.10 à 2.12:

1. Profil axial de la vitesse. Le profil axial de la vitesse est comparé aux mesures de Nagamatsu *et al.*[11] pour le cas $M = 0.86$, de Lau *et al.*[8] pour le cas $M = 1.33$ et de Seiner *et al.*[18] pour le cas $M = 2.0$. Le cas le plus défavorable se situe ici pour les nombres de Mach subsoniques, où le cône potentiel est relativement mal estimé: en $M = 0.86$, $X_c \simeq 5.8D$, alors que la valeur expérimentale ne dépasse pas $5D$. Par contre, le cas $M = 2.0$ est très satisfaisant: $X_c = 9.6D$, alors que la valeur fournie par Seiner *et al.* se situe autour de $X_c \simeq 10D$.

2. Profils radiaux de vitesse. On compare ces profils à un profil adimensionnel tiré de Davies *et al.*[5], donné avec les variables réduites suivantes:

$$\frac{U_1}{U_{ref}} = f\left(\frac{y_2 - D/2}{y_1}\right)$$

$U_{ref} = U_{jet}$ dans la zone de mélange, et $U_{ref} = U_{1axe}$ dans la zone où le jet est pleinement développé. Pour le cas $M = 2.0$, on dispose des mesures de Seiner *et al.*[9], données avec les variables:

$$\frac{U_1}{U_{1axe}} = f(\eta) \text{ avec } \eta = \frac{y_2 - y_2(0.5)}{\delta}$$

où $y_2(0.5)$ désigne la distance à laquelle $U_1 = 0.5 \times U_{1axe}$, U_{1axe} étant la vitesse à l'axe du jet en y_1, et δ l'épaisseur de la couche de cisaillement: $\delta = y_2(0.1) - y_2(0.9)$, $y_2(0.1)$ et $y_2(0.9)$ désignant respectivement les distances où $U_1 = 0.1 \times$

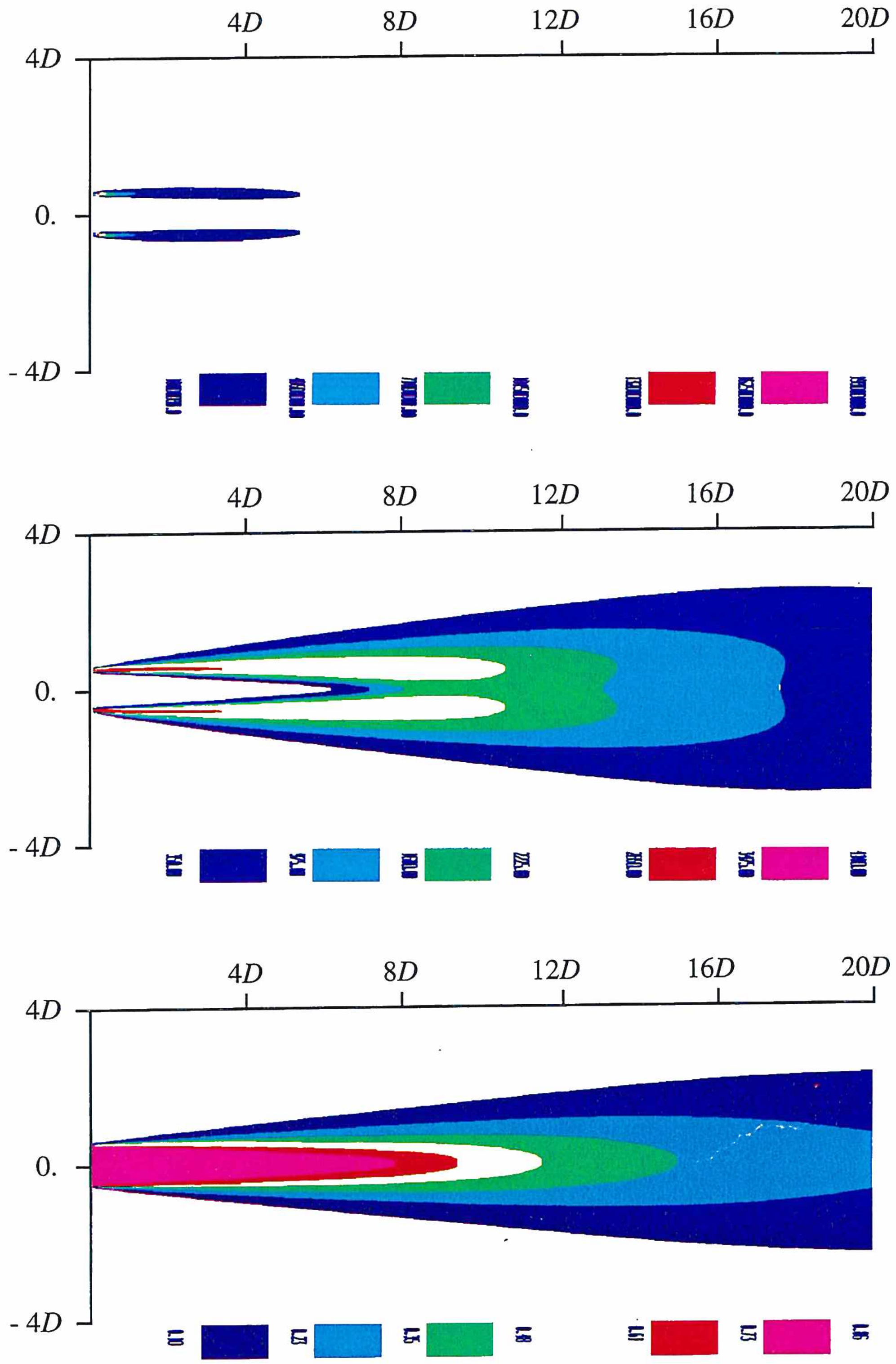


Figure 2.6: Jet $M = 0.86$. De bas en haut: iso-M, iso-k et iso-ϵ.

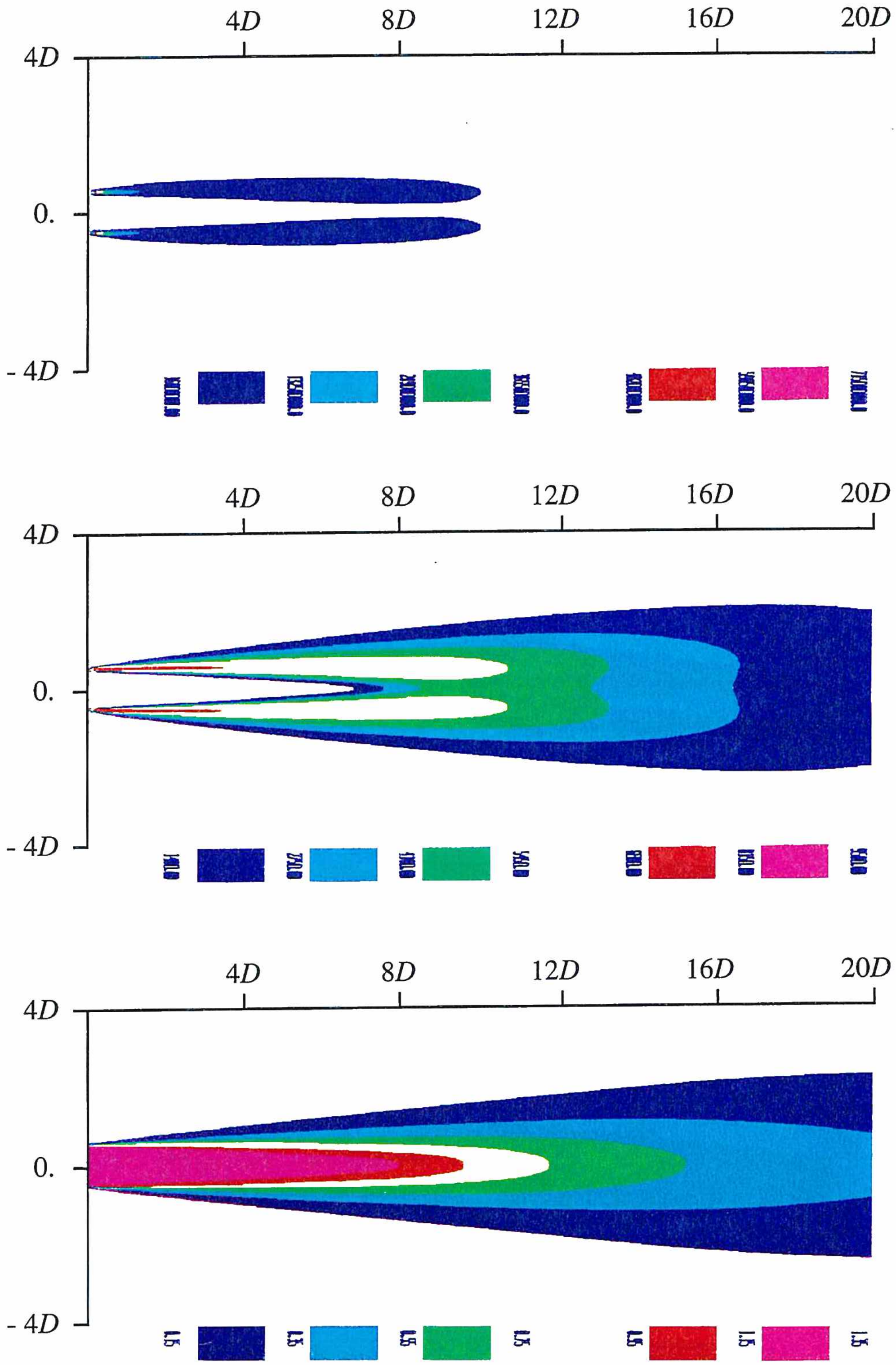


Figure 2.7: Jet $M = 1.33$. De bas en haut: iso-M, iso-k et iso-ϵ.

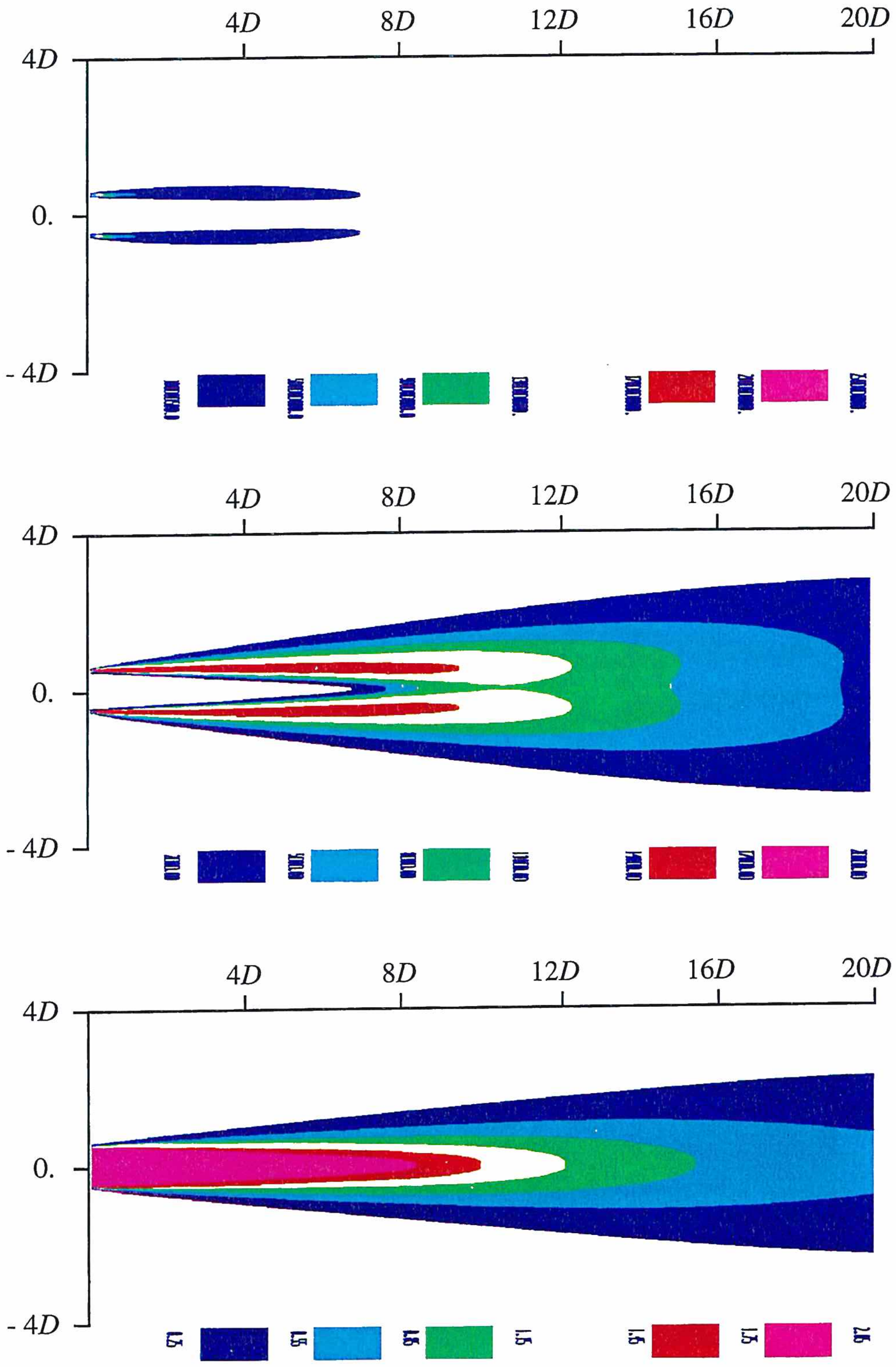


Figure 2.8: Jet $M = 2.0$. De bas en haut: iso-M, iso-k et iso-ϵ.

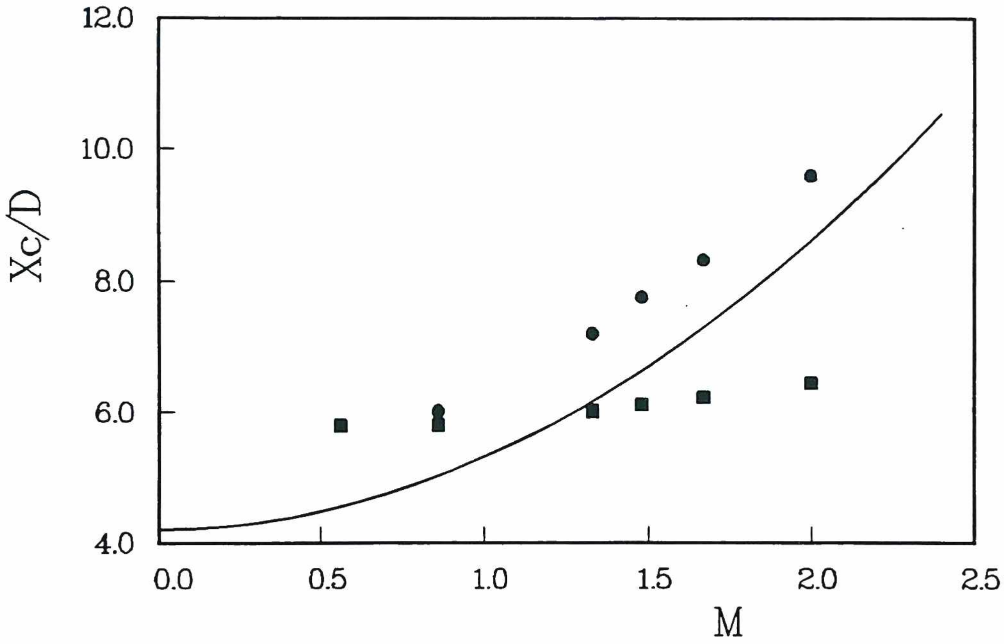


Figure 2.9: Evolution de la longueur du cône potentiel X_c en fonction du nombre de Mach M du jet. Outre la loi empirique de Lau *et al.* —, sont représentés les résultats obtenus avec un $k-\epsilon$ standard ▪, et avec un $k-\epsilon$ compressible •.

U_{1axe} et $U_1 = 0.9 \times U_{1axe}$. La courbe régressée obtenue par les auteurs est la suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{U_1}{U_{1axe}} = \exp\left[-2.773(\eta+0.5)^2\right] & \text{si } \eta > -0.5 \\ \dfrac{U_1}{U_{1axe}} = 1 & \text{si } \eta \leq -0.5 \end{cases}$$

Pour ces deux types de données expérimentales, les calculs numériques sont satisfaisants. Les gradients transversaux de la vitesse moyenne sont bien estimés, et les profils sont autosemblables.

3. Profils radiaux de l'intensité turbulente. On utilise à nouveau pour les cas $M = 0.86$ et $M = 1.33$, la courbe empirique de Davies *et al.*[5]:

$$\frac{I_{t1}}{I_{t1max}} = f\left(\frac{y_2 - D/2}{y_1}\right) \text{ avec } I_{t1} = \sqrt{\overline{u_{t1}^2}}$$

Là encore, les profils sont plutôt bien estimés, le maximum se situant en $y_2 \simeq D/2$, i.e. dans le prolongement des lèvres de la tuyère. Pour le cas $M = 2.0$, les profils de vitesse sont bien autosemblables, mais on ne possède pas de mesures pour un tel nombre de Mach. Par ailleurs, on note que les fluctuations sont de l'ordre de 9% sur l'axe, et de 12% dans la couche de mélange.

4. Longueur de corrélation de la turbulence. On utilise ici les deux relations (2.15) et (2.16) donnant respectivement la longueur intégrale de corrélation, et l'échelle de longueur donnée par le rapport $(2/3k)^{(3/2)}/\epsilon$. Ces deux relations conduisent à une estimation identique de la longueur de corrélation L_1 de la turbulence. Davies *et al.*[5] et Chu[2] ont également mesuré cette longueur pour des jets subsoniques:

   Davies *et al*: $L_1 = 0.13y_1$ pour $0 < y_1 < 6D$
   Chu: $L_1 = 0.0478y_1$

   Le tableau suivant donne les estimations de L_1 obtenues à partir du code ESTET:

$M = \dfrac{U_{jet}}{c_o}$	L_1/y_1 en $y_1 = 4D$
0.56	0.061
0.86	0.061
1.33	0.043
1.48	0.039
1.67	0.035
2.0	0.028

   L'estimation de cette longueur est correcte. On note que les échelles données par (2.15) et (2.16) sont identiques. La diminution quasi-linéaire de la pente α:

$$\alpha = \left[\frac{L_1}{y_1}\right](y_1 = 4D)$$

   est liée à la diminution de l'épaisseur de la couche de cisaillement lorsque le nombre de Mach convectif augmente.

2.5 Résultats acoustiques

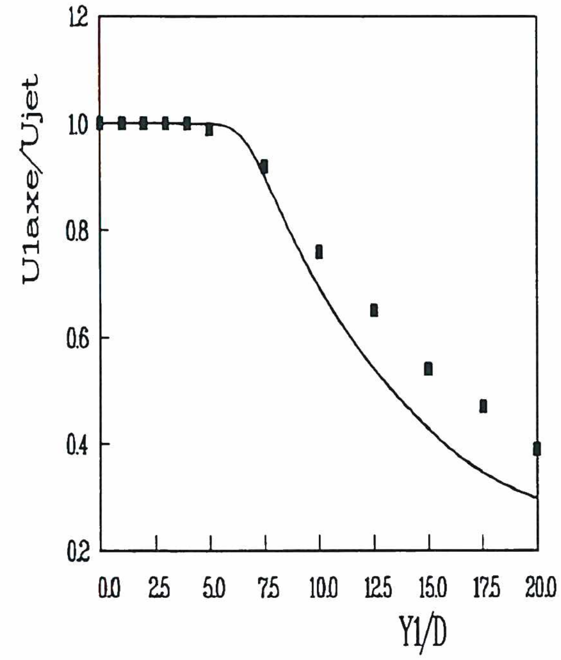
En préambule, il est bon de préciser les références utilisées pour les calculs acoustiques. La puissance acoustique W est obtenue par intégration de l'intensité $I(\mathbf{x})$ sur la sphère de rayon x:

$$W = \int_0^{\pi} I(x,\theta)\, 2\pi x^2 \sin\theta d\theta \tag{2.18}$$

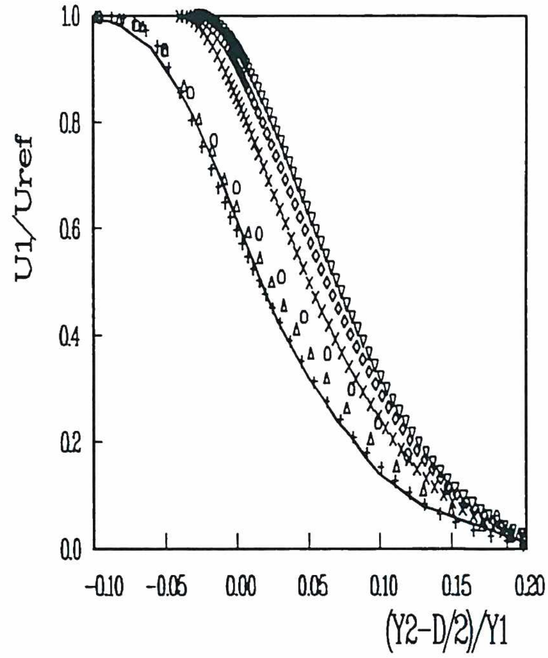
Cette puissance acoustique est alors exprimée en dB, avec comme référence $W_o = 10^{-12}$ W, puis écrite sous une forme indépendante de la géométrie, conformément aux lois dimensionnelles:

$$\tilde{W} = 10\log_{10}\left(\frac{W}{W_o}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \tag{2.19}$$

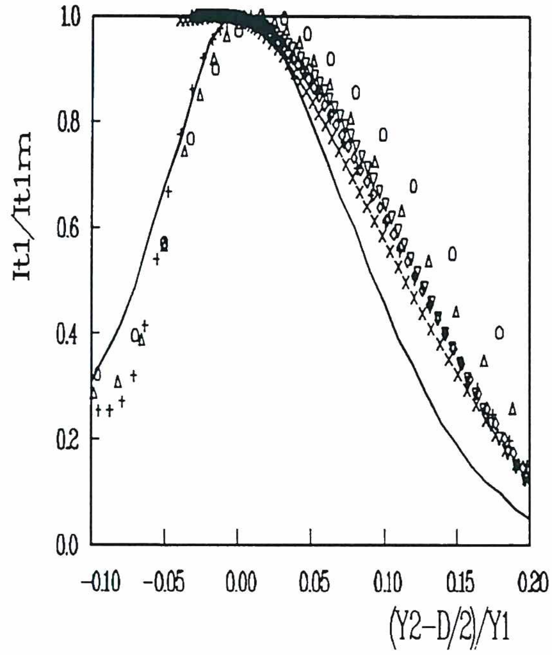
L'intensité acoustique I est elle-même exprimée en dB avec comme référence $I_o = 10^{-12}$ W.m^{-2}, puis écrite sous une forme indépendante de la géométrie:



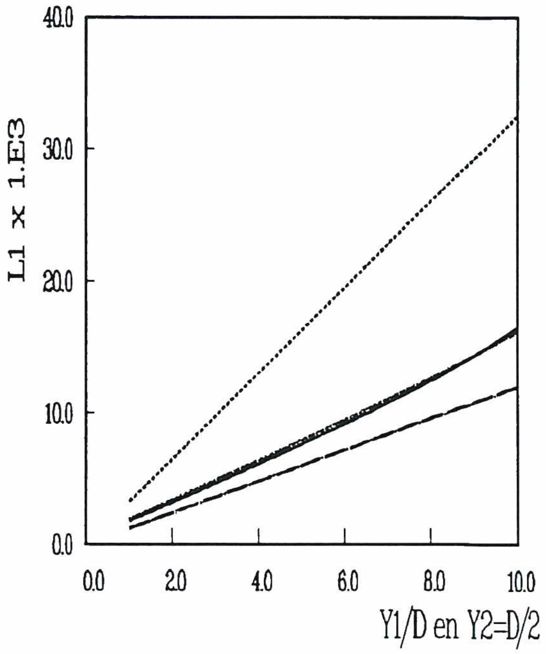
(a) Profil axial de la vitesse: —— Estet, ■ Nagamatsu *et al.*



(b) Profils radiaux de la vitesse: —— Davies *et al.*, Estet: ○ $y_1/D = 1.25$, △ $y_1/D = 2.5$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 12$, ◇ $y_1/D = 15$, ▽ $y_1/D = 18$.

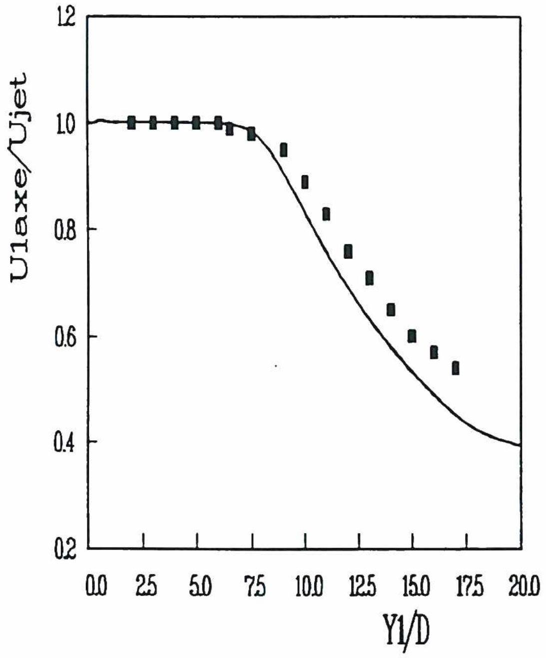


(c) Profils radiaux de l'intensité turbulente: —— Davies *et al.*, Estet: ○ $y_1/D = 1.25$, △ $y_1/D = 2.5$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 12$, ◇ $y_1/D = 15$, ▽ $y_1/D = 18$.

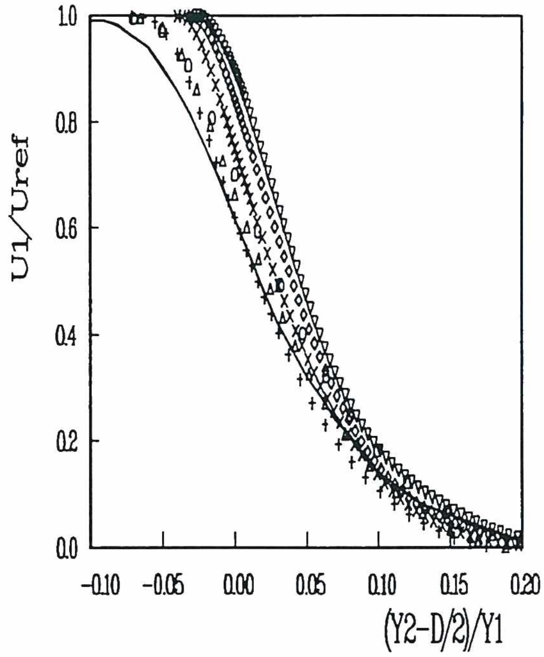


(d) Evolution de la longueur de corrélation de la turbulence —— relations (2.15) et (2.16), ········ Davies *et al.*, — - — Chu.

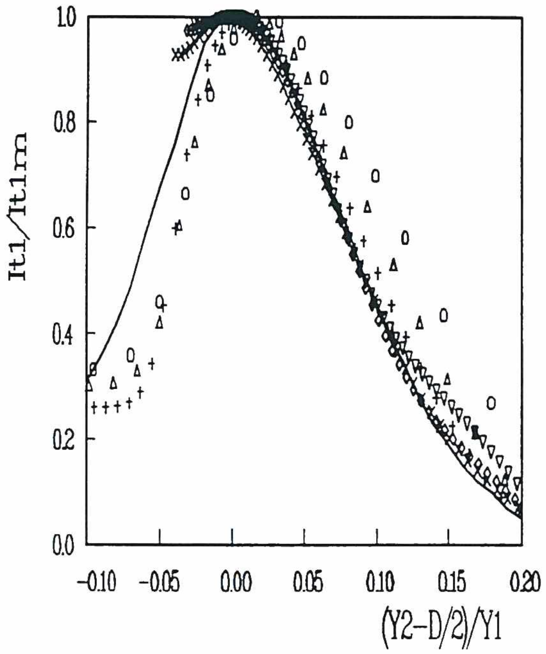
Figure 2.10: Jet $M = 0.86$.



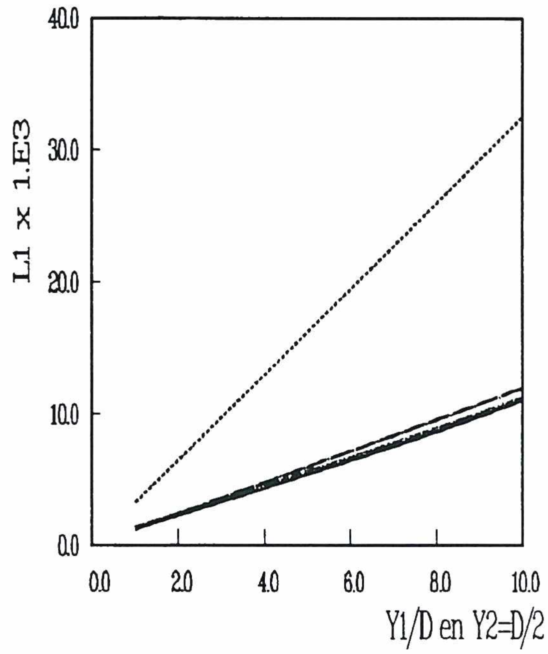
(a) Profil axial de la vitesse: —— Estet, ▪ Lau *et al.*



(b) Profils radiaux de la vitesse: —— Davies *et al.*, Estet: ∘ $y_1/D = 1.25$, △ $y_1/D = 2.5$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 12$, ⋄ $y_1/D = 15$, ▽ $y_1/D = 18$.

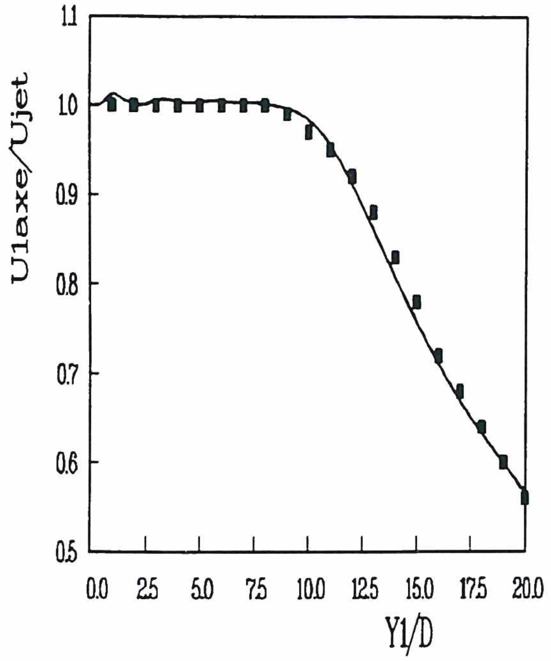


(c) Profils radiaux de l'intensité turbulente: —— Davies *et al.*, Estet: ∘ $y_1/D = 1.25$, △ $y_1/D = 2.5$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 12$, ⋄ $y_1/D = 15$, ▽ $y_1/D = 18$.

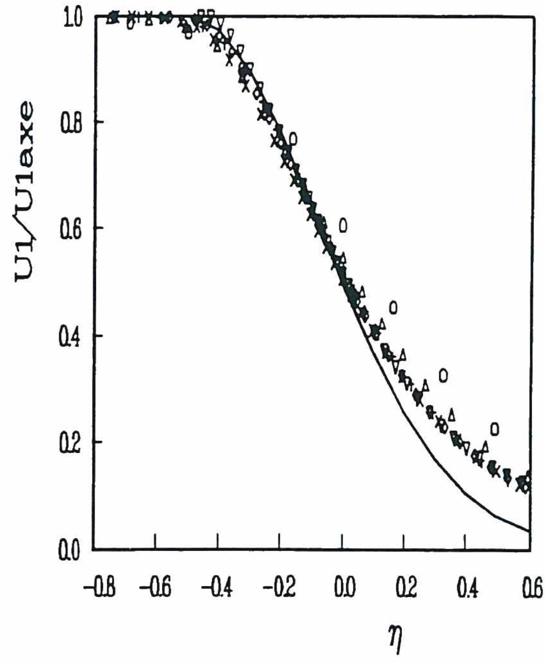


(d) Evolution de la longueur de corrélation de la turbulence —— relations (2.15) et (2.16), ········ Davies *et al.*, — - — Chu.

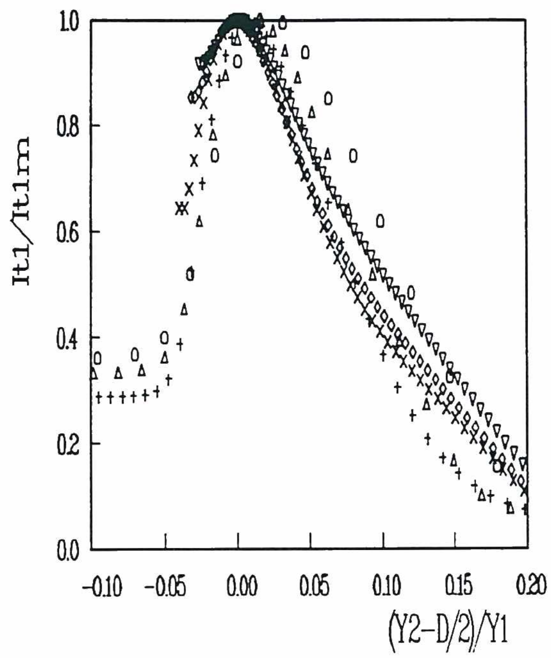
Figure 2.11: Jet $M = 1.33$.



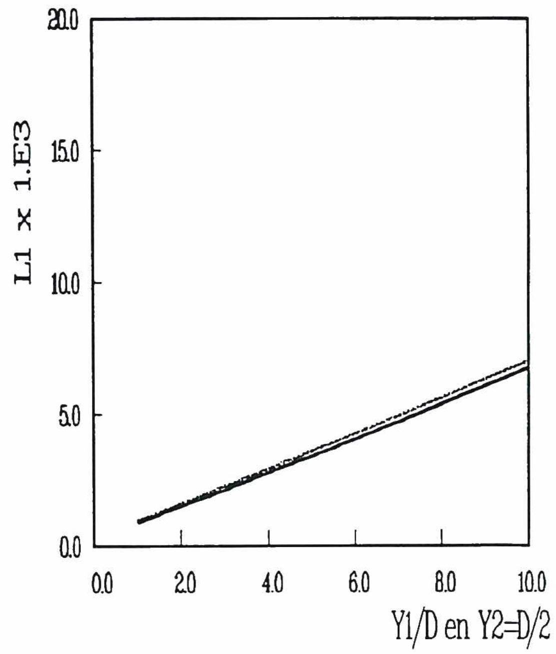
(a) Profil axial de la vitesse: — Estet, ▪ Seiner *et al.*



(b) Profils radiaux de la vitesse: — Seiner *et al.*, Estet: $\circ$ $y_1/D = 1$, $\triangle$ $y_1/D = 3$, $+$ $y_1/D = 5$, $\times$ $y_1/D = 7$, $\diamond$ $y_1/D = 9$, $\triangledown$ $y_1/D = 11$.



(c) Profils radiaux de l'intensité turbulente: Estet: $\circ$ $y_1/D = 1.25$, $\triangle$ $y_1/D = 2.5$, $+$ $y_1/D = 5$, $\times$ $y_1/D = 12$, $\diamond$ $y_1/D = 15$, $\triangledown$ $y_1/D = 18$.



(d) Evolution de la longueur de corrélation de la turbulence — relation (2.15) et ········ relation (2.16).

Figure 2.12: Jet $M = 2.0$.

$$\tilde{I} = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_o}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (2.20)$$

Cette normalisation de W et I sert pour la présentation de tous les résultats acoustiques de ce chapitre. On a retenu les données expérimentales de Lush[12], Tanna[7,13], Yu & Dosanjh[14], Norum & Seiner[15], Seiner *et al.*[9], Yamamoto *et al.*[17], ainsi que les normes S.A.E.[16], utilisées par les constructeurs aéronautiques. Toutes ces mesures sont connues de la littérature. Les conditions expérimentales sont clairement précisées, et pour les cas supersoniques, le jet est toujours parfaitement détendu. On montre néanmoins dans la suite, que ces mesures présentent une certaine dispersion.

La dernière étape des calculs acoustiques consiste à déterminer les deux constantes de calage associées respectivement aux expressions de l'intensité acoustique (2.5) et (2.10). Ces constantes proviennent de l'utilisation d'équivalents pour les grandeurs turbulentes. Le calage est effectué une seule fois, sur l'intensité acoustique. Le point de référence choisi est: $M = 0.86$, $\theta = 90°$. Pour ce point, les mesures de Lush, Tanna et les normes S.A.E. coïncident parfaitement. Finalement, les constantes obtenues sont 6.76×10^{-1} pour (2.5) et 4.68×10^{-2} pour (2.10). Il est important de noter que ces constantes ne sont pas changées dans la suite†, quel que soit le nombre de Mach M et l'angle d'observation θ.

2.5.1 Intensité acoustique

On s'intéresse dans un premier temps à l'intensité acoustique I fonction uniquement de θ à nombre de Mach fixé. Sur les figures 2.13 à 2.18 sont tracées, pour les six configurations, et pour les deux modèles acoustiques étudiés, l'intensité directionnelle $\tilde{I}$. A ces courbes sont ajoutées les données expérimentales citées plus haut.

Pour les deux cas subsoniques $M = 0.56$ et $M = 0.86$, on met en évidence l'importance de la prise en compte de l'anisotropie de la turbulence: pour $M = 0.56$ et $0 \leq \theta \leq 90°$, l'erreur sur l'intensité est de 4.9 dB avec une description isotrope de la turbulence (Ribner), et de 1.2 dB seulement pour une description anisotrope de la turbulence (Goldstein *et al.*). Cette différence augmente avec le nombre de Mach. Pour $M = 0.86$, elle est respectivement de 6.0 dB et de 1.9 dB. On observe dans ce deuxième cas l'apparition des effets de réfraction aux petits angles: ce phénomène, i.e. l'influence de l'écoulement sur la propagation acoustique pour les angles θ proches de l'axe du jet, n'est pas prise en compte dans ce type de modélisation. En effet, l'analogie de Lighthill utilise l'opérateur de propagation d'un milieu homogène et au repos.

L'intensité calculée pour le cas $M = 1.33$ est encore correcte aux phénomènes de réfraction près. On note que les données présentent une certaine dispersion. Les

†Kharavan *et al.*[19] ont présenté en 1992 des calculs similaires sur une modélisation acoustique plus simple. Cependant, les constantes de calage (utilisées sur l'intensité et dans le calcul de la vitesse de convection U_c) sont ajustées pour chaque configuration d'écoulement. Béchara *et al.*[20,21] montrent avec une modélisation quasiment identique à celle que l'on présente ici, que le calage effectué uniquement sur l'intensité acoustique reste encore valide pour estimer le rayonnement de jets coaxiaux subsoniques: il s'agit en particulier de prévoir le minimum acoustique en fonction du rapport $\lambda = U_{secondaire}/U_{primaire}$.

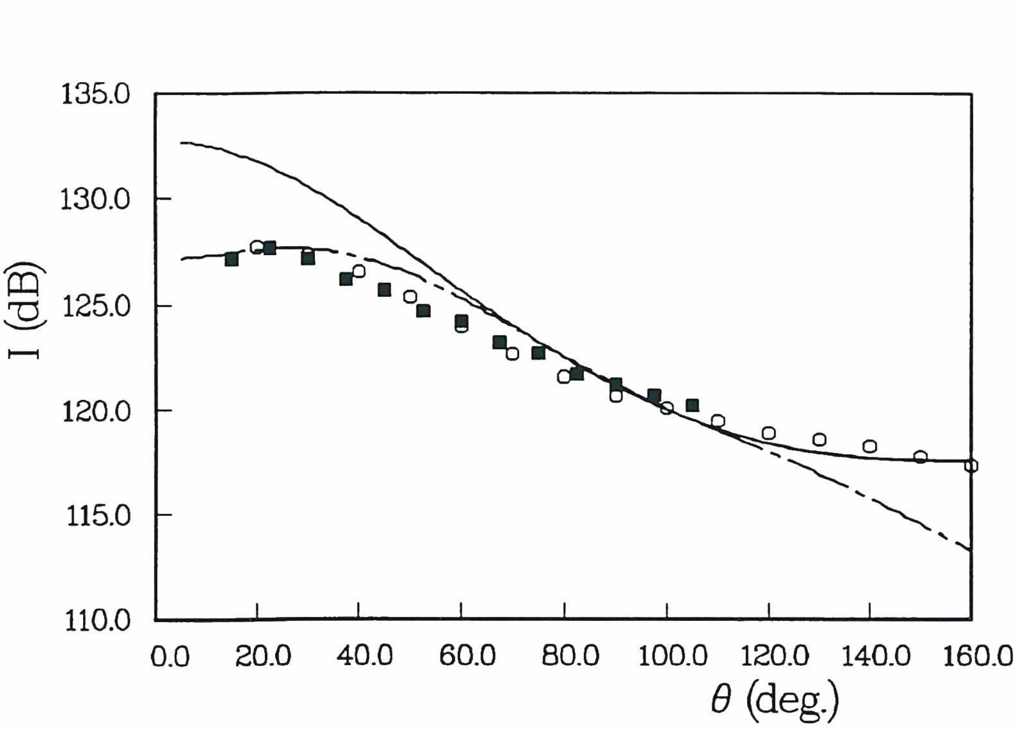


Figure 2.13: Intensité acoustique, $M = 0.56$. — turbulence isotrope, — - — turbulence axisymétrique, ▪: mesures de Lush, o: données S.A.E.

mesures de Tanna montrent que la réfraction est importante: cette évolution est cohérente, l'écoulement étant à vitesse plus elevée. Par ailleurs, elle est dans le prolongement des mesures de Lush à $M = 0.86$. Sur l'intensité acoustique donnée par les normes S.A.E., le phénomène de réfraction est quasi-inexistant.

Le cas $M = 1.48$ est beaucoup plus difficile à commenter, la dispersion des mesures étant relativement importante. Pour le cas $M = 1.67$, et encore plus pour le cas $M = 2.0$, il est intéressant d'observer le comportement des deux modèles acoustiques. En effet, ces modèles ne sont plus appliqués ici dans leur domaine de validité. Le maximum de l'intensité, situé autour de $\theta \simeq 40°$ n'est d'ailleurs pas capté. On montre dans le prochain chapitre une modélisation des *ondes de Mach* à l'origine de ce maximum, qui prédit très correctement l'intensité I. Ces modèles donnent néanmoins une bonne estimation de la puissance acoustique.

2.5.2 Puissance acoustique

La figure 2.19 donne l'évolution de la puissance acoustique en fonction du nombre de Mach $M = U_{jet}/c_o$. Les symboles pleins sont associés aux calculs, et les autres font références aux mesures. Ce calcul de la puissance acoustique est en parfait accord avec les valeurs expérimentales, et ceci même pour les cas $M = 1.67$ et $M = 2.0$. Pour interpréter ces résultats, il est intéressant de se rappeler les deux lois dimensionnelles

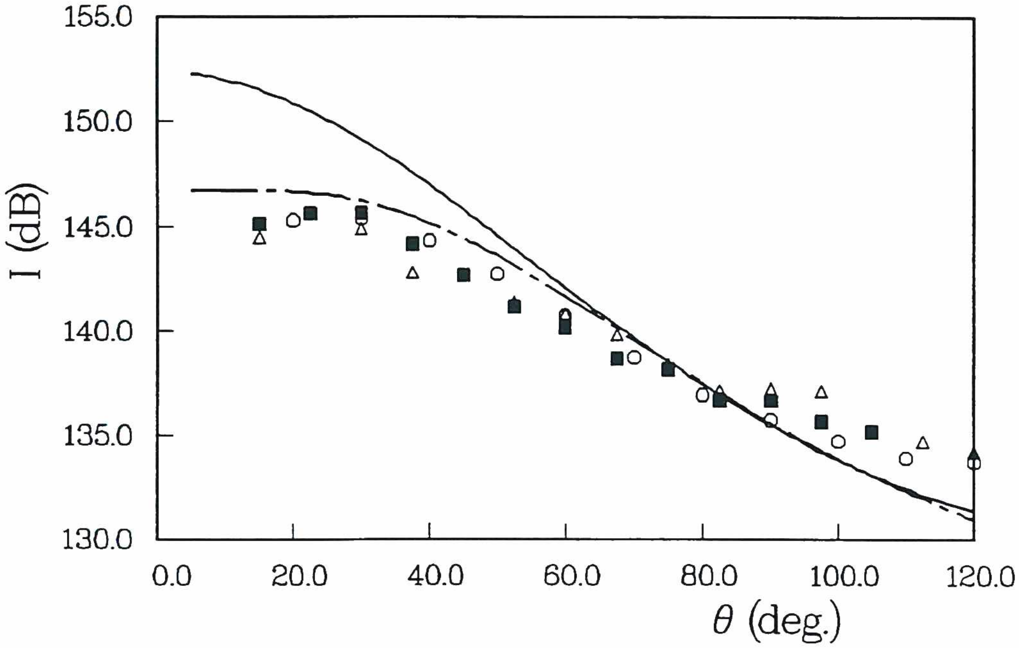


Figure 2.14: Intensité acoustique, $M = 0.86$. — turbulence isotrope, — - — turbulence axisymétrique, ▪ : mesures de Lush, o: données S.A.E., △ : mesures de Tanna ($M = 0.9$).

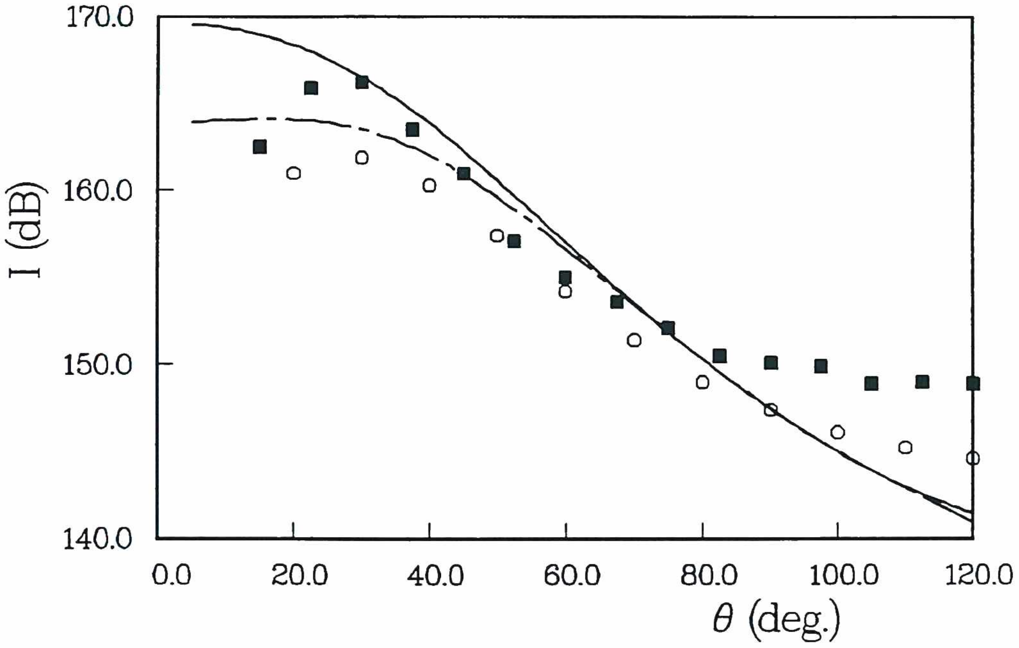


Figure 2.15: Intensité acoustique, $M = 1.33$. — turbulence isotrope, — - — turbulence axisymétrique, ▪ : mesures de Tanna, o: données S.A.E. ($M = 1.26$).

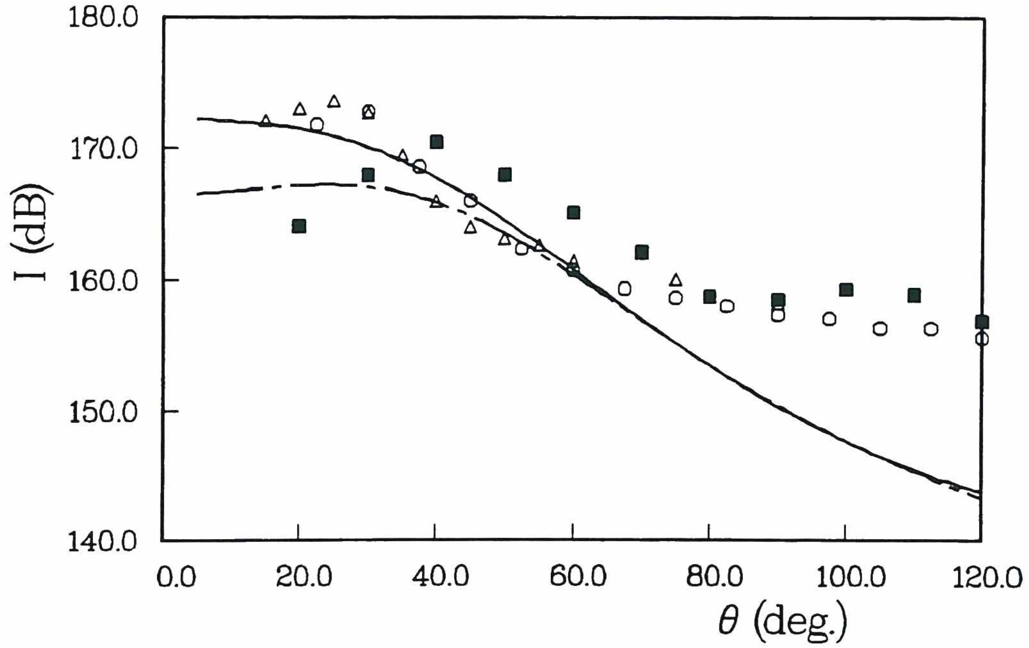


Figure 2.16: Intensité acoustique, $M = 1.48$. — turbulence isotrope, —-— turbulence axisymétrique, ▪: mesures de Yamamoto *et al.*, o: mesures de Norum & Seiner, △: mesures de Seiner *et al.* (1982). Pour ces deux derniers cas, on a $T_{jet}/T_o \neq 1$.

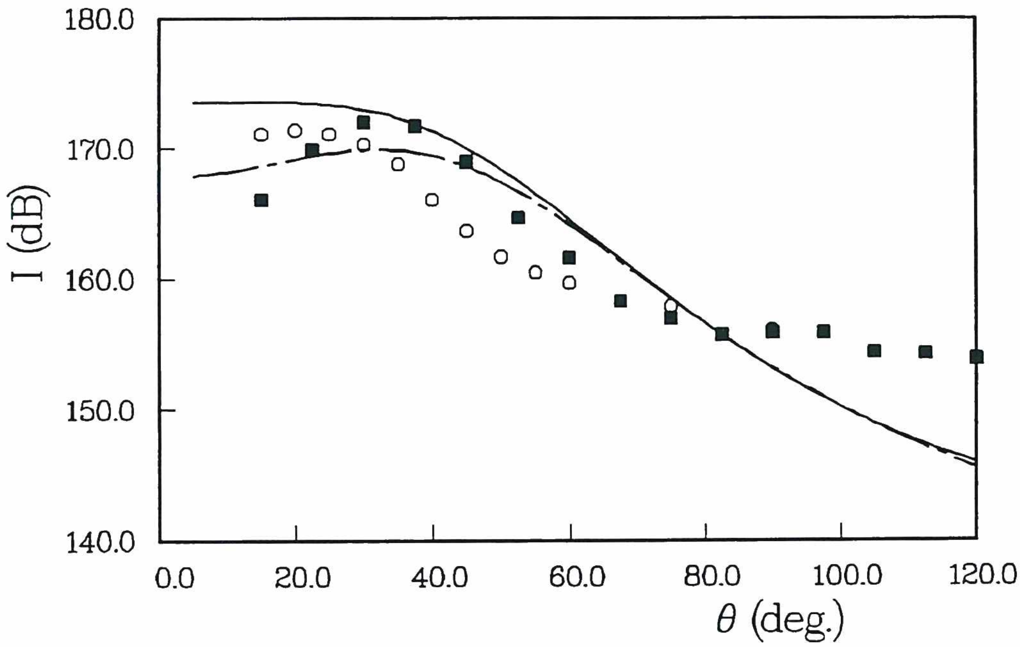


Figure 2.17: Intensité acoustique, $M = 1.67$. — turbulence isotrope, —-— turbulence axisymétrique, ▪: mesures de Tanna ($M = 1.65$), o: mesures de Seiner *et al.*

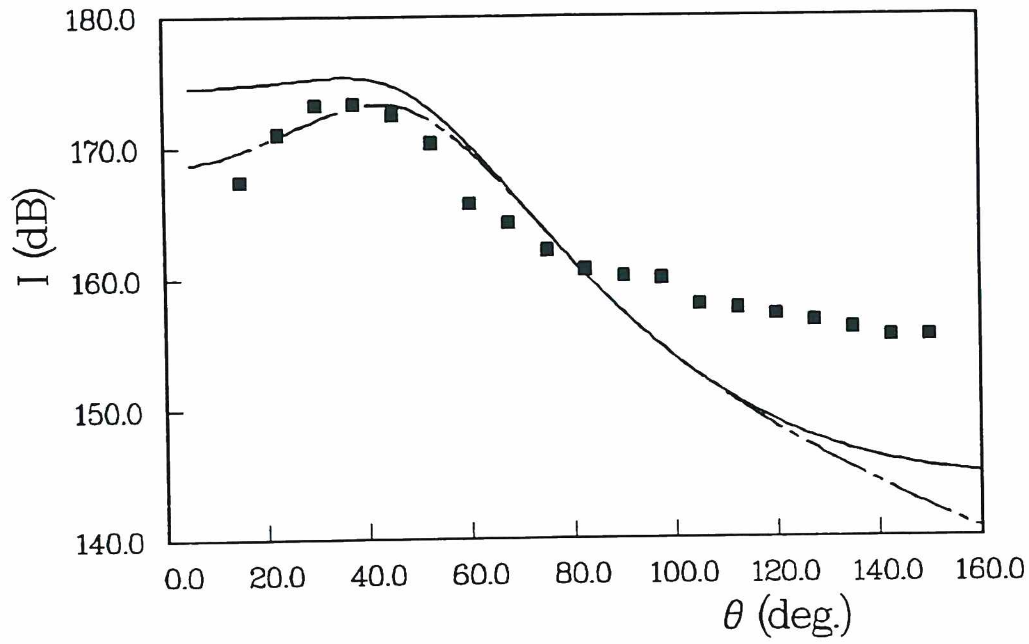


Figure 2.18: Intensité acoustique, $M = 2.0$. — turbulence isotrope, - - - turbulence axisymétrique, ▪ : mesures de Tanna ($M = 1.95$)

établies dans le premier chapitre†:

$$\begin{cases} W = \rho_o D^2 \dfrac{U_{jet}^8}{c_o^5} \dfrac{1+M_c^2}{(1-M_c^2)^4} & \text{si } M_c < 1. \\ \\ W = \rho_o D^2 U_{jet}^3 & \text{si } M_c > 1. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ces lois dimensionnelles sont tracées sur la figure (2.20), après calage avec les résultats de Lush pour $M = 0.56$ pour la loi en U^8 et avec ceux de Tanna pour $M = 2.0$ pour la loi en U^3. On observe ainsi le rôle particulier du facteur de convection dans sa forme complète (2.17), qui diminue continûment la puissance de la loi subsonique de part sa présence à la puissance -5. Il faut retenir de ces figures que l'estimation de la puissance acoustique est correcte. Cependant, pour les cas où $M \geq 1.5$, i.e. $M_c \geq 1.$, cette estimation est sans fondement physique: pour s'en convaincre, outre le fait que le calcul n'est plus valide de par la contribution non négligeable du temps retardé, l'intensité permettant de déduire la puissance acoustique est mal estimée.

2.5.3 Spectres en $\frac{1}{3}$ d'octave

On utilise ici les données expérimentales très complètes et tabulées de Tanna[13] pour comparer les spectres en $\frac{1}{3}$ d'octave à partir des relations (2.8) et (2.9), développées

†On rappelle que pour la loi subsonique, le calcul est effectué avec un facteur de convection simplifié $C = 1 - M_c \cos\theta$.

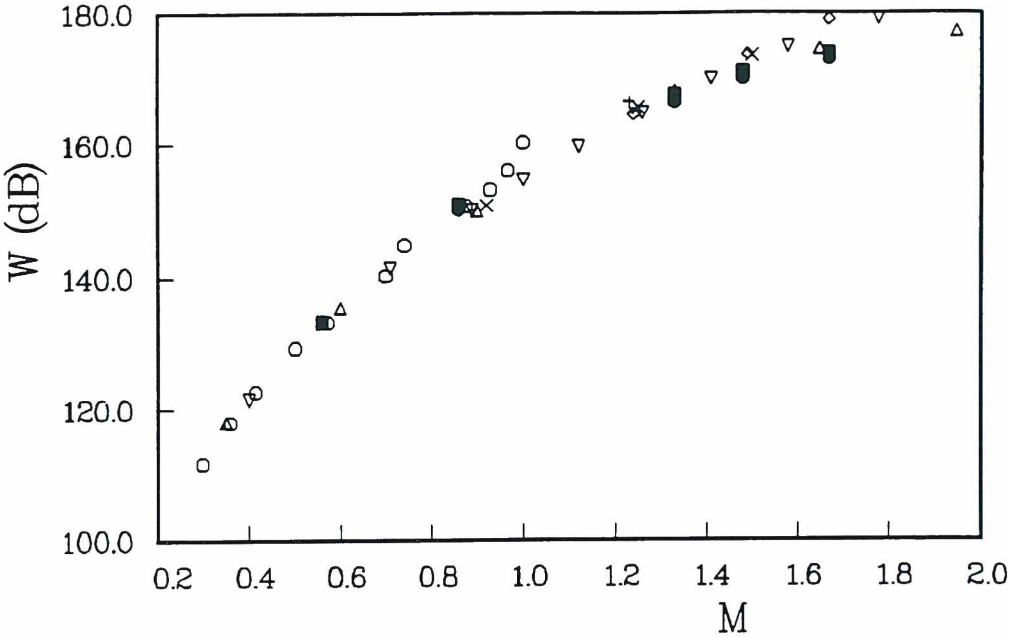


Figure 2.19: Evolution de la puissance acoustique W en fonction du nombre de Mach M. Calculs en symbole plein: ▪ turbulence isotrope, • turbulence axisymétrique. Mesures: ◦ Lush, △ Tanna, + Yu & Dosanjh, × Norum & Seiner, ◇ Seiner *et al.*, ▽ Yamamoto *et al.*, ⊠ données S.A.E.

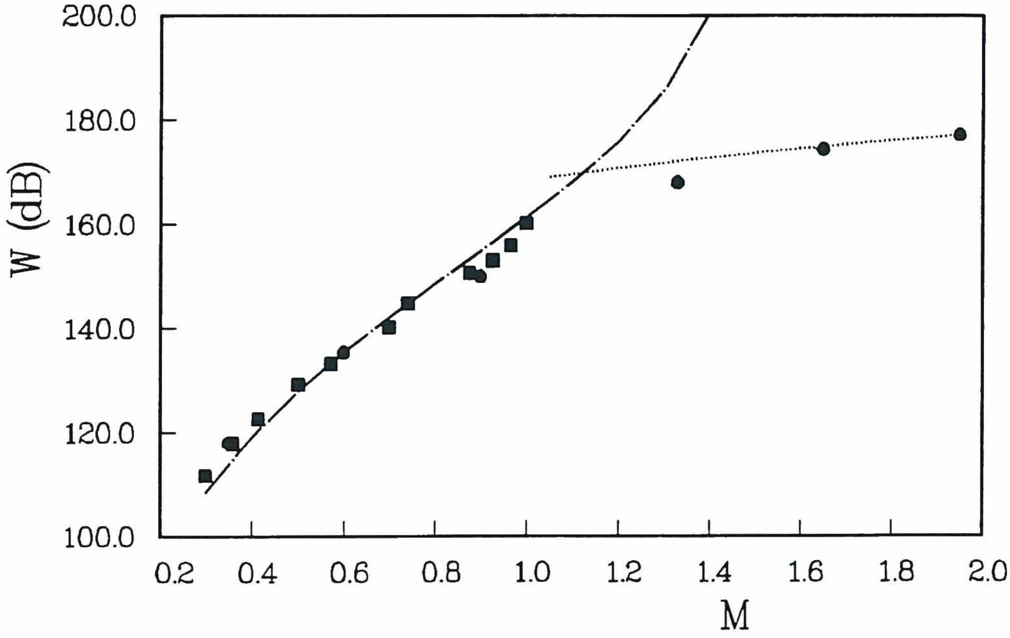


Figure 2.20: Données expérimentales de Lush ▪, et Tanna •, sur lesquelles sont calées les deux lois dimensionnelles (2.21): en subsonique — - — , en supersonique ······ .

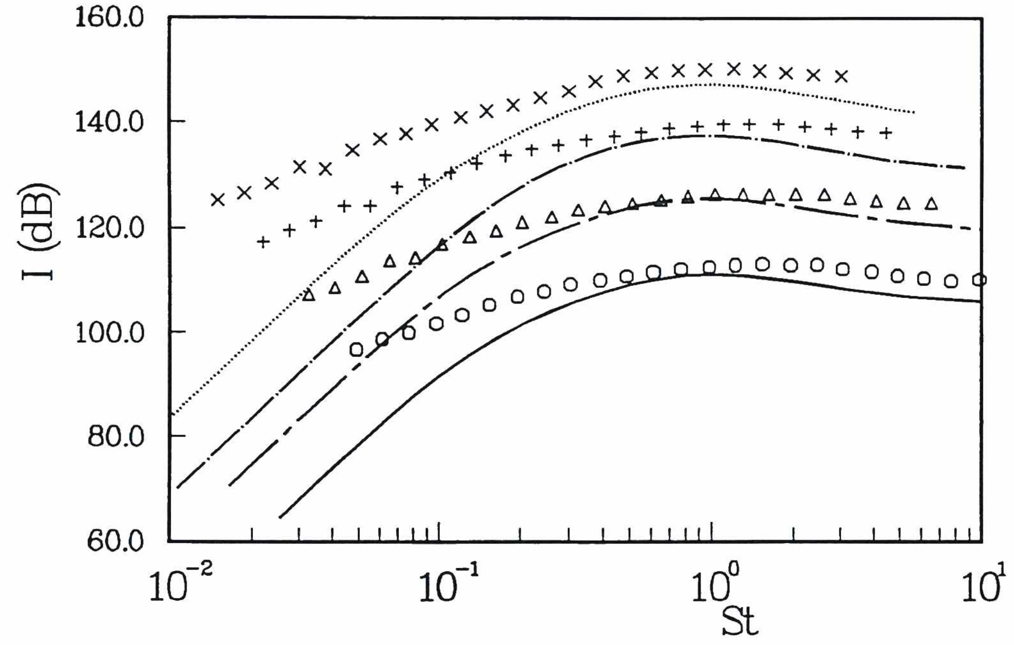


Figure 2.21: Spectre acoustique en tiers d'octave, $\theta = 90°$. Mesures de Tanna: $\circ M = 0.56$, $\triangle\, M = 0.86$, $+M = 1.33$, $\times M = 2.0$. Calculs: — $M = 0.56$, - - — $M = 0.86$, —·— $M = 1.33$, ········ $M = 2.0$.

pour le cas d'une turbulence isotrope à partir du modèle de Ribner. L'intensité I est tracée en $\theta = 90°$ (figure 2.21), en $\theta = 120°$ (figure 2.22) et en $\theta = 15°$ (figure 2.23) pour quatre nombres de Mach $M = 0.56$, 0.86, 1.33, et 2.0 en fonction du nombre de Strouhal S_t:

$$S_t = \frac{fD}{U_{jet}}$$

Pour les angles situés hors du domaine de réfraction, les spectres sont bien estimés par le calcul. On note que ces spectres sont cependant sous-estimés pour les basses fréquences, i.e. lorsque $S_t \leq 0.1$. Pour le cas $\theta = 15°$, les spectres calculés sont translatés par rapport aux mesures de Tanna: là-encore, les phénomènes de réfraction, d'autant plus importants que la fréquence de la source est élevée, ne sont pas modélisés.

2.5.4 Distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques dans le jet

Pour décrire complètement le rayonnement acoustique, les figures 2.24 à 2.26 donnent la distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques pour trois nombres de Mach $M = 0.86$, 1.33, et 2.0. On utilise ici les expressions de la densité spectrale de puissance S_{pp} déduites pour une turbulence axisymétrique, pour finalement exprimer $W_1/W_{1max} = f(y^*, S_t)$ en fonction des variables réduites $y^* = y_1/D$ et:

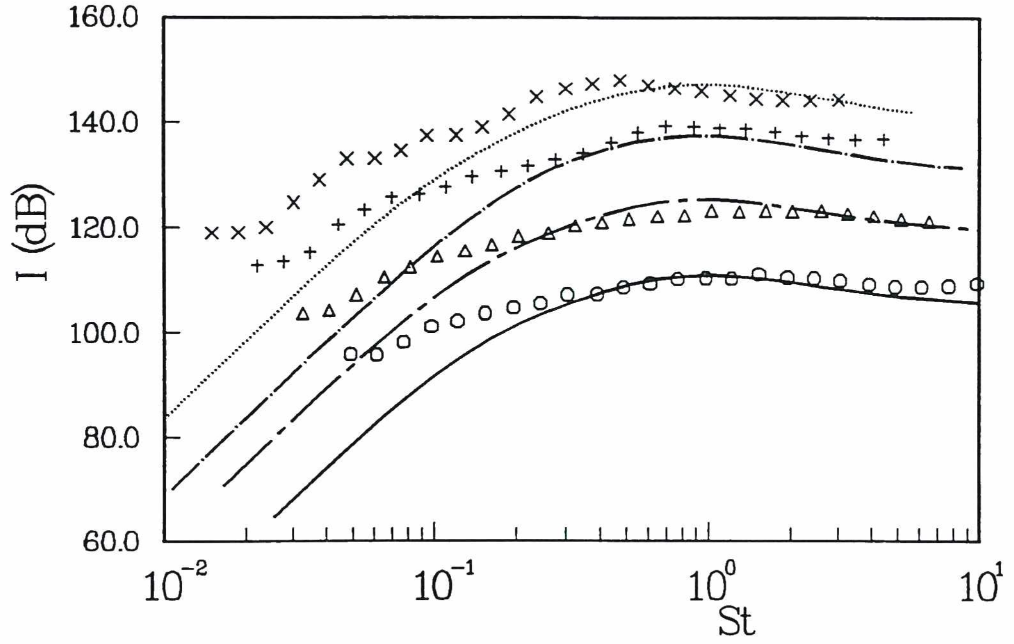


Figure 2.22: Spectre acoustique en tiers d'octave, $\theta = 120°$. Mesures de Tanna: $\circ M = 0.56$, $\triangle\, M = 0.86$, $+M = 1.33$, $\times M = 2.0$. Calculs: — $M = 0.56$, — - — $M = 0.86$, — · — $M = 1.33$, ······· $M = 2.0$.

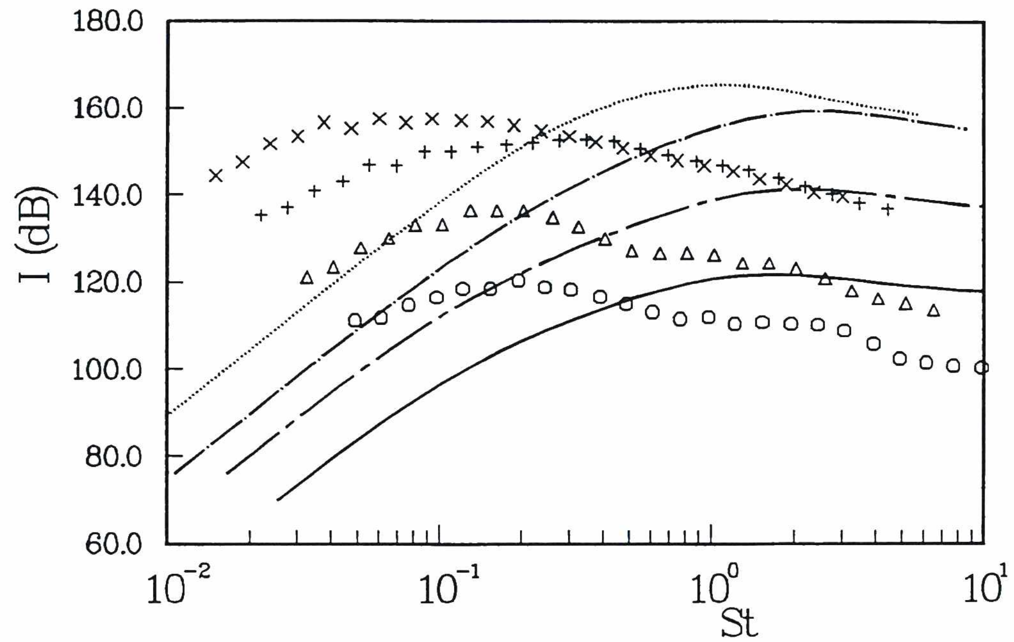


Figure 2.23: Spectre acoustique en tiers d'octave, $\theta = 15°$. Mesures de Tanna: $\circ M = 0.56$, $\triangle\, M = 0.86$, $+M = 1.33$, $\times M = 2.0$. Calculs: — $M = 0.56$, — - — $M = 0.86$, — · — $M = 1.33$, ······· $M = 2.0$.

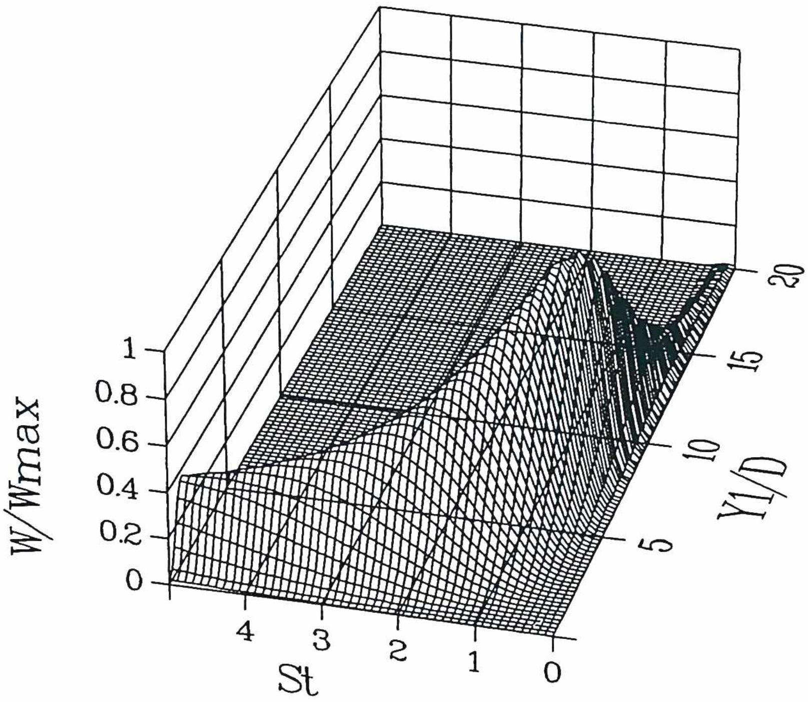


Figure 2.24: Distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques $W_1/W_{1max} = f(y^\star, S_t)$, pour $M = 0.86$.

$$S_t = \frac{k}{\epsilon}\frac{D}{U_{jet}}$$

Cette dernière quantité définit la fréquence adimensionnelle de la source. La puissance acoustique par unité de longueur du jet W_1 est obtenue par intégration sur la section transversale du jet:

$$W_1\left(y_1\right) = \int\!\!\int_\Sigma W\left(\mathrm{y}\right) dy_2 dy_3$$

On observe sur ces cartes que les sources acoustiques sont plutôt situées dans la zone de transition, i.e. en aval du cône potentiel. Les sources hautes fréquences sont localisées dans la zone de mélange, près de la tuyère, alors que les sources basses fréquences sont situées en aval de la zone de transition. Qualitativement, on note que ce sont les sources basses fréquences, i.e. les bas nombres d'onde de la turbulence, qui assurent une grande partie du rayonnement acoustique. Le maximum W_{1max} est localisé en $y_1^\star = 7.2$ pour $M = 0.86$, en $y_1^\star = 8.4$ pour $M = 1.33$, et en $y_1^\star = 12.3$ pour $M = 2.0$.

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, on a construit deux modèles de sources acoustiques

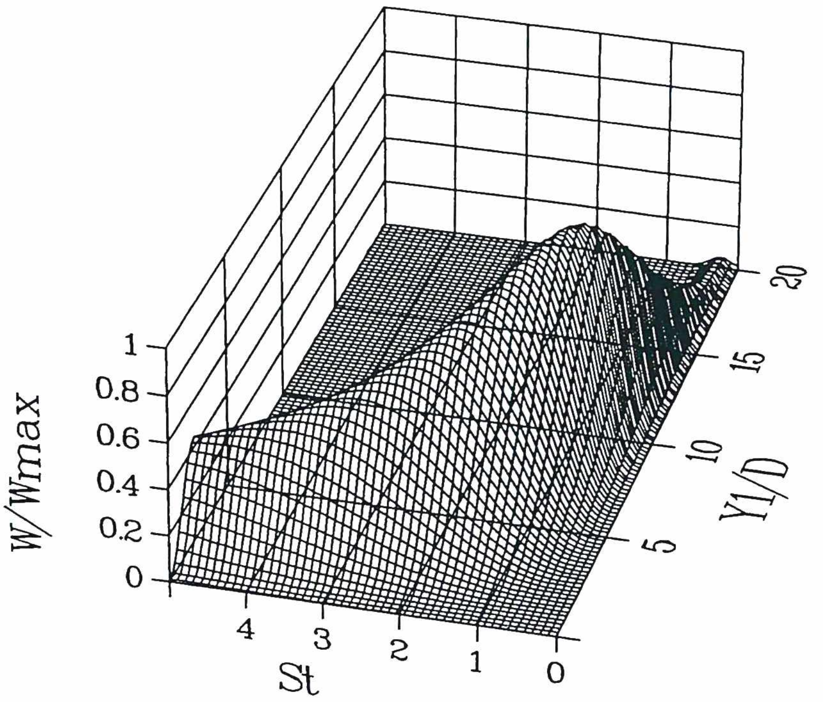


Figure 2.25: Distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques $W_1/W_{1max} = f(y^\star, S_t)$, pour $M = 1.33$.

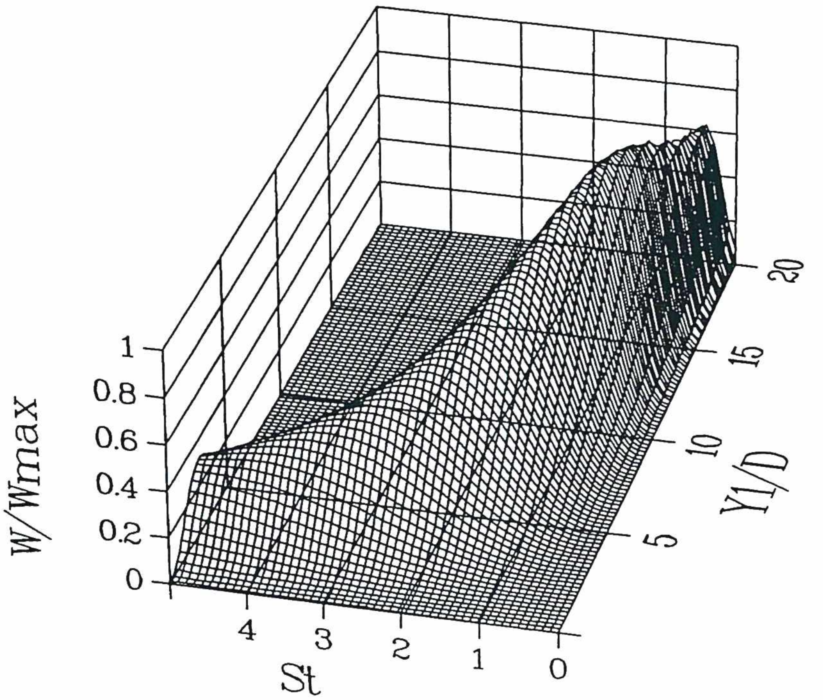


Figure 2.26: Distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques $W_1/W_{1max} = f(y^\star, S_t)$, pour $M = 2.0$.

basés sur l'analogie de Lighthill, afin d'évaluer le bruit de mélange des écoulements turbulents libres parfaitement détendus pour le cas supersonique. La contribution du temps retardé est toujours négligée dans le tenseur des corrélations des vitesses, quitte à passer dans un repère convectif attaché aux structures turbulentes. Dans un tel repère, l'anisotropie de la turbulence est prise en compte pour le modèle de Goldstein & Rosenbaum, et dans le cas particulier d'une turbulence isotrope, ce modèle se réduit à celui de Ribner, qui est à l'origine de ce type d'approximations pour le tenseur de Lighthill T_{ij}.

Cette formulation reste locale, et permet donc par intégration sur tout le volume source d'estimer le rayonnement acoustique. Les grandeurs locales nécessaires sont déduites d'un calcul aérodynamique $k-\epsilon$ compressible. Enfin, on note que la convection des sources acoustiques est modélisée au travers d'un facteur de convection, alors que *la réfraction*, i.e. l'interaction faible entre les ondes acoustiques et l'écoulement moyen n'est pas prise en compte.

Les calculs aérodynamiques, ainsi que les calculs acoustiques sont comparés à des mesures de la littérature faisant généralement référence. La modélisation permet finalement d'obtenir une image très complète du rayonnement acoustique: intensité, puissance, spectre, et distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques. L'intensité acoustique est bien estimée dans le premier quadrant, i.e. pour $0 \leq \theta \leq 90°$, et pour des nombres de Mach $M \leq 1.5$: dans ce cadre, l'erreur entre calculs et mesures est en fait dimensionnée par l'amplitude de la réfraction, de l'ordre de 5 dB à $M = 1.33$. Pour un nombre de Mach plus élevé, l'apparition des ondes de Mach, qui marquent fortement l'intensité, n'est pas modélisée: l'approximation du tenseur de Lighthill T_{ij} par $\rho_o u_i u_j$ n'est plus adéquate. La puissance acoustique déduite par intégration de l'intensité est en parfait accord avec les données expérimentales. On remarque en particulier le rôle du facteur de convection dans l'évolution de la puissance acoustique rayonnée en fonction du nombre de Mach. Les spectres acoustiques sont également bien calculés, à l'exception des petits angles où là encore, la réfraction joue un rôle important sur le contenu spectral du rayonnement acoustique. La distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques montre que les sources basses fréquences sont en aval du cône potentiel du jet, et qu'elles contribuent pour une grande part au rayonnement acoustique.

Références

[1]**Ribner, H.S.**, 1964, "The generation of sound by turbulent jets," *Academic Press*, Vol. VIII, pp. 103-182.

[2]**Ribner, H.S.**, 1969, "Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise," *J. Fluid Mech.*, Vol. 38(1), pp. 1-24.

[3]**Lilley, G.M.**, 1958, "On the noise from air jets," *Aeronautical Research Council*

(Great Britain), A.R.C. 20-276.

[4]**Batchelor, G.K.**, 1953, "The theory of homogeneous turbulence," *Cambridge University Press.*

[5]**Davies, P.O.A.L., Fisher, M.J. & Barratt, M.J.**, 1963, "The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet," *J. Fluid Mech.*, Vol. 15(3), pp. 337-367.

[6]**Goldstein, M.E. & Rosenbaum, B.**, 1973, "Effect of anisotropic turbulence on aerodynamic noise," *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 54(3), pp. 630-645.

[7]**Tanna, H.K.**, 1977, "An experimental study of jet noise, Part I: turbulent mixing noise," *J. Sound Vib.*, Vol. 50(3), pp. 405-428.

[8]**Lau, J.C., Morris, P.J. & Fisher, M.J.**, 1979, "Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter," *J. Fluid Mech.*, Vol. 93(1), pp. 1-27.

[9]**Seiner, J.M., McLaughlin, D.K. & Liu, C.H.**, 1982, "Supersonic jet noise generated by large-scale instabilities," *NASA*, Technical paper, 2072.

[10]**Hinze, J.O.**, 1975, "Turbulence, second edition," *McGraw-Hill*, New York.

[11]**Nagamatsu, H.T., Sheer, J. & Gill, M.S.**, 1970, "Flow and acoustic characteristics of subsonic and supersonic jets from convergent nozzle," *3rd Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Los Angeles, California, AIAA-70-802.

[12]**Lush, P.A.**, 1971, "Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory," *J. Fluid Mech.*, Vol. 46(3), pp. 477-500.

[13]**Tanna, H.K., Dean, P.D. & Burrin, R.H.**, 1976, "The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol.III Turbulent mixing noise data," *Air Force Aero-Propulsion Laboratory*, AFAPL-TR-76-65.

[14]**Yu, J.C. & Dosanjh, D.S.**, 1971, "Noise field of a supersonic Mach 1.5 cold model jet," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, pp. 1400-1410.

[15]**Norum, T.D. & Seiner, J.M.**, 1982, "Measurements of mean static pressure and far field acoustics of shock containing supersonic jets," *NASA*, TM-84521.

[16]**S.A.E.**, 1985, "Gas turbine exhaust noise prediction," *ARP 876C.*

[17]**Seiner, J., Ponton, M.K., Jansen, B.J. & Lagen, N.T.**, 1992, "The effects of temperature on supersonic jet noise emission," *DGLR/AIAA 14th Aeroacoustic Conference*, Eurogress Center Aachen, 11-14 May, AIAA-92-02-046.

[18]**Yamamoto, K.** *et al.*, 1984, "Experimental investigation of shock-cell noise reduction for single-stream nozzles in simulated flight. Comprehensive data report. Vol. 1 : Test nozzles and acoustic data," *NASA*, CR-168234.

[19]**Khavaran, A., Krejsa, E.A. & Kim, C.M.**, 1992, "Computation of supersonic jet mixing noise from an axisymmetric CD nozzle using $k-\epsilon$ turbulence model," *30st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, NV, AIAA-92-0500.

[20]**Béchara, W., Lafon, P. & Candel, S.**, 1992, "Application of a $k-\epsilon$ model to the prediction of noise for simple and coaxial free jets," *J. Acoust. Soc. Am.*, Submitted for publication.

[21]**Béchara, W., Lafon, P. & Candel, S.M.**, 1993, "Modélisation du bruit des jets turbulents libres et subsoniques à température ambiante," *J. Phys. III France*, Vol. 3, pp. 653-674.

Chapitre 3

Modélisation du rayonnement acoustique des ondes de Mach

Dans ce troisième chapitre, on s'intéresse plus particulièrement au bruit rayonné par la turbulence d'un écoulement libre supersonique. L'objectif est ici de calculer la directivité très marquée de l'intensité observée pour des écoulements à nombre de Mach convectif supersonique. Le modèle développé s'inspire des travaux de Ffowcs Williams & Maidanik[1]: il s'agit d'exprimer dans le cadre de l'analogie de Lighthill, la double divergence du tenseur T_{ij} lorsque $1-M_c \cos\theta$ s'annulle, i.e. lorsqu'il y a émission d'ondes de Mach dans la direction θ. Ces ondes de Mach sont la conséquence du passage dans la couche de mélange de structures turbulentes, convectées par l'écoulement à vitesse supersonique. Dans ce cas, l'évolution temporelle interne de ces structures n'a plus réellement d'importance.

Plusieurs auteurs se sont intéressés au rayonnement acoustique des ondes de Mach[†]. Phillips[4] est l'un des premiers à traiter spécifiquement le rayonnement d'une couche de mélange supersonique bidimensionnelle. Phillips introduit pour cela une autre analogie[‡] que celle de Lighthill. Cependant, l'utilisation d'un opérateur de propagation sophistiqué pose de nombreux problèmes pour la modélisation du terme source, et pour l'expression de la fonction de Green. A partir des travaux de Phillips, Laufer[5] étudie expérimentalement le rayonnement acoustique d'une couche limite en écoulement supersonique. Ffowcs Williams[6] analyse la convection d'une turbulence en écoulement supersonique dans le cadre de l'analogie de Lighthill. Ffowcs Williams & Maidanik[1] proposent une expression du terme source $\partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j$ lorsque $1 - M_c \cos\theta$ s'annulle. Citons également Ribner[7] qui décrit très sommairement une couche de mélange à partir d'une fonction de courant ψ de la forme: $\psi = w/\mathrm{k}\sqrt{2} \cos kx \cos \mathrm{k}y$, la pression étant calculée par les équations d'Euler: il est difficile cependant d'en déduire le rayonnement

[†]Les travaux les plus récents sont dus à Tam & Chen[2] (1993): ils se situent hors du cadre de l'analogie de Lighthill (voir introduction). Ces auteurs s'intéressent aux trois familles d'instabilité que possède un écoulement supersonique cisaillé. Oertel[3] (1982) avait antérieurement mis en évidence par vélocimétrie laser les trois vitesses privilégiées pour la propagation d'instabilités.

[‡]L'équation de propagation de Phillips est présentée dans la deuxième partie (chapitre 5) de ce travail.

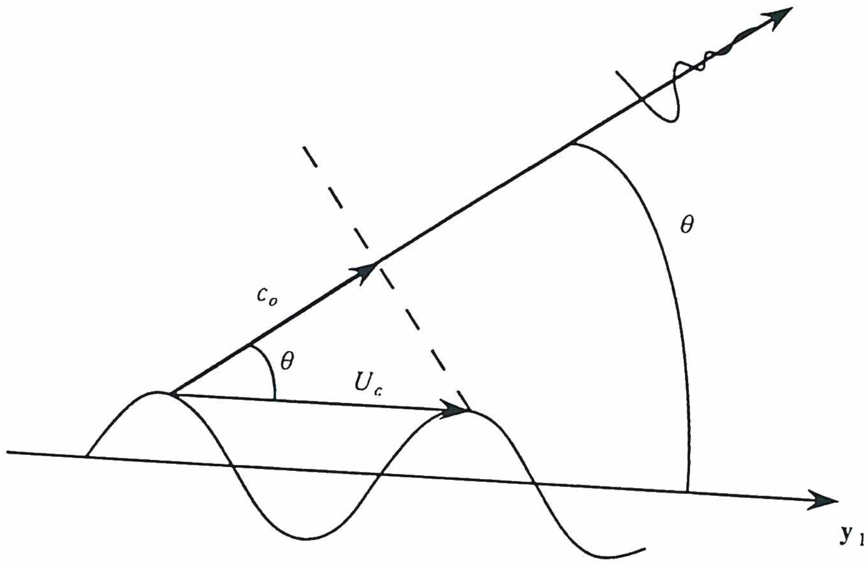


Figure 3.1: Ondes de Mach.

acoustique d'un jet.

Dans un premier paragraphe, on établit une expression du terme source $\partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j$ lorsqu'il y a émission d'ondes de Mach. Un second paragraphe présente plus particulièrement les calculs aérodynamiques effectués pour deux jets libres circulaires à $M = 2.0$, mais avec dans un cas $T_t = 537$ K et dans l'autre, $T_t = 1370$ K, où T_t désigne la température totale du jet. Enfin, un dernier paragraphe présente les résultats acoustiques, et la mise en évidence de l'influence de la température sur la directivité.

3.1 Développement autour de l'équation des ondes de Lighthill

On rappelle tout d'abord deux solutions intégrales de l'équation de Lighthill obtenues dans le premier chapitre (relations 1.6 et 1.7), équivalentes en champ acoustique lointain:

$$(\rho - \rho_o)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_o^2} \int_V \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} T_{ij}\left(\mathbf{y}, t - \frac{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid}{c_o}\right) \frac{d\mathbf{y}}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid} \tag{3.1}$$

$$(\rho - \rho_o)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_o^4} \int_V n_i n_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}\left(\mathbf{y}, t - \frac{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid}{c_o}\right) \frac{d\mathbf{y}}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid} \tag{3.2}$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ désigne le vecteur repérant la position de l'observateur, et $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire associé. On introduit alors la notation de Proudman[8], où les indices répétés nn n'impliquent plus de sommation. Ainsi:

$$n_i n_j T_{ij} = \mathbf{n}.\mathbf{T}.\mathbf{n} = T_{nn}$$

La relation (3.2) peut alors s'écrire comme:

$$(\rho - \rho_o)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_o^4} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{nn} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|}{c_o} \right) \frac{d\mathbf{y}}{|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|} \tag{3.3}$$

De même, en appliquant partiellement cette condition à (3.1), il vient:

$$(\rho - \rho_o)(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c_o^3} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t \partial y_i} T_{ni} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|}{c_o} \right) \frac{d\mathbf{y}}{|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|} \tag{3.4}$$

L'argument de cette dernière intégrale peut se développer, en utilisant l'équation de la quantité de mouvement sous forme conservative:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_o} \frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial t \partial y_i} &= \frac{1}{c_o} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial (\rho u_n u_i + p\delta_{ni} - \tau_{ni})}{\partial y_i} - c_o^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_n} \right\} \\ &= \frac{1}{c_o} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\partial (\rho u_n)}{\partial t} - c_o^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_n} \right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour le champ acoustique lointain, les deux expressions suivantes sont équivalentes:

$$-\frac{1}{c_o} \frac{\partial (\rho u_n)}{\partial t} \sim \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial y_i}$$

On remarque alors dans l'expression du champ acoustique lointain, seuls les gradients dans la direction de l'observateur $\mathbf{r}$ contribuent au rayonnement (voir paragraphe 1.4):

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial y_i} \sim \frac{\partial (\rho u_n)}{\partial y_n}$$

On retient finalement l'expression suivante pour (3.5), expression équivalente dans le sens où elle conduit à un champ acoustique lointain identique:

$$\frac{1}{c_o} \frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial t \partial y_i} \sim \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial (\rho u_n)}{\partial y_n} - c_o \frac{\partial \rho}{\partial y_n} \right\} \tag{3.6}$$

On introduit alors la décomposition de Reynolds du champ de vitesse en une composante moyenne $\mathbf{U}$ et une composante turbulente $\mathbf{u_t}$. Ainsi, $u_i = U_i + u_{ti}$, et:

$$\frac{1}{c_o} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y_i} T_{ni} = (U_n - c_o) \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial y_n} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial U_n}{\partial y_n} + \frac{\partial^2 (\rho u_{tn})}{\partial t \partial y_n}$$

Par ailleurs, la relation $1 - M_c \cos\theta = 0$ est supposée vérifiée. Une analyse d'ordre de grandeur des trois termes, en prenant une échelle de longueur L, et en introduisant deux échelles de vitesse U et ϵU pour la vitesse moyenne et la vitesse turbulente respectivement, ϵ étant un paramètre petit devant 1, conduit à:

$$\begin{aligned}
(U_n - c_o)\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial y_n} &\sim \epsilon \rho \frac{U^2}{L^2} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial U_n}{\partial y_n} &\sim \rho \frac{U^2}{L^2} \\
\frac{\partial^2 (\rho u_{tn})}{\partial t \partial y_n} &\sim \epsilon \rho \frac{U^2}{L^2}
\end{aligned}$$

où $U_n - c_o \sim \epsilon U$. En ne conservant alors que le terme d'ordre 0 en ϵ, et en utilisant l'hypothèse d'isotropie locale, i.e. $\partial P/\partial t = c^2 \partial \rho/\partial t$, il vient finalement pour l'expression du champ acoustique lointain:

$$(\rho - \rho_o)(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c_o^2}\int_V n_i n_j \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial U_i}{\partial y_j}\right]\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_o}\right)\frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{3.7}$$

Cette expression (3.7) va nous permettre de calculer l'intensité acoustique I associée aux ondes de Mach. L'objectif étant ici d'appliquer cette modélisation au cas d'un jet libre circulaire, on fait l'hypothèse d'un champ moyen localement unidirectionnel cisaillé: la vitesse moyenne se réduit à une composante U portée par $\mathbf{y}_1$, direction axiale, la direction radiale étant repérée par $\mathbf{y}_2$. D'autre part, on suppose que sur le volume source de corrélation (de la taille de la structure turbulente) où l'intégration est effectuée, la vitesse moyenne U, ainsi que la célérité locale du son c sont constantes. Ces deux hypothèses sont réalistes, puisque les écoulements étudiés ici sont parfaitement détendus, i.e. sans onde de choc. Alors:

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi^2 c_o \rho_o x^2}\int\!\!\int_V n_1^2 n_2^2 \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial y_2}\right]^2 (\mathbf{y})\, \overline{\frac{\partial p'}{\partial t}\frac{\partial p''}{\partial t}}\, d\mathbf{y} d\eta \tag{3.8}$$

où ' indique que l'on évalue la grandeur au point $\mathbf{y}$ et au temps $t- |\mathbf{x} - \mathbf{y}| / c_o$, et " indique que l'on évalue la grandeur au point $\mathbf{y} + \eta$ et au temps $t- |\mathbf{x} - \mathbf{y} - \eta| / c_o$. De plus, on a $n_1 = \cos\theta$ et $n_2 = \sin\theta$. L'intégrale sur le volume de corrélation de:

$$\int_V \overline{\frac{\partial p'}{\partial t}\frac{\partial p''}{\partial t}}\, d\eta$$

a été estimée par Ffowcs Williams[6]. Elle fait intervenir le produit de la moyenne quadratique de $\partial p/\partial t$ par le volume de corrélation $c_o \tau \xi_s$, où τ est un temps caractéristique de la turbulence, et ξ_s l'aire de corrélation dans la direction perpendiculaire à θ:

$$\int_V \overline{\frac{\partial p'}{\partial t}\frac{\partial p''}{\partial t}}\, d\eta = \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2} c_o \tau \xi_s$$

Ainsi, l'intensité acoustique (3.8) s'écrit encore:

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{16\pi^2 \rho_o x^2}\int_V \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial y_2}\right]^2 \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2} \tau \xi_s d\mathbf{y} \tag{3.9}$$

L'influence de la convection des sources sur le rayonnement acoustique n'est pas prise en compte dans la formulation (3.9). On a montré dans un cadre général (section 1.5 du premier chapitre), que la modélisation se faisait par l'intermédiaire d'un facteur de convection multiplicatif. On introduit directement ici ce facteur:

$$D\left(M_c,\theta\right)=\frac{\alpha^2M_c^2}{\left[\left(1-M_c\cos\theta\right)^2+\alpha^2M_c^2\right]^{5/2}}$$

$D\left(M_c,\theta\right)=1$ lorsque $1-M_c\cos\theta=0$, i.e. lorsque l'on se positionne dans la direction θ d'émission des ondes de Mach. Dans les autres directions, on retrouve par nature une source quadripôlaire moins efficace, dont l'intensité est modulée par un facteur de convection. Pour aboutir à une expression de l'intensité acoustique I, il reste à préciser ξ_s, aire de corrélation de la turbulence dans le plan normal à la direction θ, lorsque $1-M_c\cos\theta=0$. On utilise ici deux relations empiriques, tirées des mesures de Kistler & Chen[9], Laufer[5], et Favre *et al.*[10] sur des couches limites supersoniques, à savoir:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overline{\left(\dfrac{\partial p}{\partial t}\right)^2} & \simeq & \dfrac{1}{2}\dfrac{c_o^2M_c^2}{\delta_1^2}\overline{p_o^2}\\[3ex] \xi_s & \simeq & \dfrac{\delta_1^2}{\cos\theta}=\delta_1^2M_c\end{array}\right. \tag{3.10}$$

où δ_1 désigne l'épaisseur de déplacement de la couche limite. L'étirement des tourbillions est proportionnel à δ_1^2, soit $\delta_1^2/\cos\theta$ dans la direction θ de l'observateur, qui s'écrit encore $\delta_1^2M_c$ pour les ondes de Mach. La pression p_o est ici la pression statique de référence. Finalement, l'intensité en champ acoustique lointain d'un écoulement localement unidirectionnel cisaillé est donné par:

$$I\left(\mathrm{x}\right)=\frac{c_o^2p_o^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{32\pi^2\rho_ox^2}\int_V D\left(M_c,\theta\right)\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial y_2}\right]^2M_c^3\tau dy \tag{3.11}$$

En se référant à la démarche du chapitre 2, on voit que la formulation (3.11) fournit une expression locale du terme source acoustique, où toutes les grandeurs sont estimables à partir d'un calcul aérodynamique avec un modèle de turbulence de type $k-\epsilon$. On rappelle en particulier qu'un temps typique de la turbulence est donné par le rapport k/ϵ. La vitesse de convection est toujours calculée par le produit $0.67U_{1axe}$.

3.2 Calcul aérodynamique d'un jet libre chaud à Mach 2

Les calculs aérodynamiques ont fait l'objet de la section 2.4 du deuxième chapitre. Cependant, on présente ici un cas d'écoulement supplémentaire: il s'agit d'un jet libre chaud à $M=2.0$. Les résultats aérodynamiques qui suivent sont comparés en particulier au cas du jet froid à $M=2.0$ déjà traité. Le tableau suivant précise les conditions nominales des deux écoulements:

$M = 2.0$	T_t(K)	T_{jet}(K)	γ	U_{jet}/c_o	T_{jet}/T_o
jet froid	537	298	1.4	2.0	1.0
jet chaud	1370	761	1.36	3.3	2.5

La figure 3.2 présente les cartes d'iso-M, d'iso-k et d'iso-ϵ du jet chaud. La structure du jet est globalement très semblable à celle du jet froid. Cependant, on observe que la longueur du cône potentiel X_c diminue avec l'augmentation de la température nominale du jet T_{jet}. Cette diminution est également mesurée par Seiner *et al.*[12] Les niveaux de turbulence sont sensiblements identiques: 9% sur l'axe et 12% dans la couche de mélange pour le jet froid, 8% et 11% respectivement pour le jet chaud.

Plus précisement, la figure 3.3 donne avec les mêmes notations que dans la section 2.4, le profil axial de la vitesse, ainsi que les profils radiaux de la vitesse et de l'intensité turbulente. Lorsque les données sont disponibles, ces courbes sont comparées aux données expérimentales de Seiner *et al.*[11,12] Le profil axial de la vitesse est bien estimé. On observe cependant des oscillations de la vitesse en sortie de la tuyère, déjà présentes dans le calcul du jet froid. Ces oscillations proviennent certainement des conditions aux limites amonts, non compatibles avec l'écoulement (voir chapitre 2, section 2.4). La similitude des profils radiaux de vitesse et d'intensité turbulente dans la zone de mélange et dans la zone où le jet est pleinement développé est bien vérifiée. On renvoie le lecteur à la section 2.4 pour les commentaires et définitions des variables réduites.

3.3 Résultats acoustiques

Les conventions pour le calcul de la puissance et de l'intensité acoustique sont les mêmes que celles de la section 2.5. L'utilisation de groupements adimensionnels pour évaluer les grandeurs turbulentes intervenant dans (3.8) implique une constante multiplicative sur I dans l'expression (3.11). Cette constante β est déterminée une seule fois, en utilisant les données expérimentales pour un jet froid à $M = 2.0$, $\theta = 38°$. L'angle choisi correspond au maximum de l'intensité pour ce cas. Numériquement, cette constante prend la valeur $\beta = 1.38 \times 10^{-2}$. Les données utilisées par la suite sont essentiellement celles de Tanna[13,14] et de Seiner *et al.*[12]

3.3.1 Intensité acoustique

La figure 3.4 représente l'intensité acoustique calculée, ainsi que les mesures de Seiner *et al.* et de Tanna pour le cas du jet froid à $M = 2.0$. La directivité très marquée est relativement bien décrite par le modèle. La modélisation ne prenant en compte ici que le rayonnement acoustique des ondes de Mach, la courbe s'éloigne des mesures lorsque θ s'éloigne du faisceau centré sur $\theta^\star \simeq \cos^{-1}(1/M_c)$. Néanmoins, cette estimation partielle du diagramme de directivité suffit pour calculer correctement la puissance acoustique rayonnée.

La figure 3.5 donne le diagramme de directivité des deux jets, chaud et froid, comparé aux mesures de Seiner *et al.* On observe ainsi l'influence de la température, prise

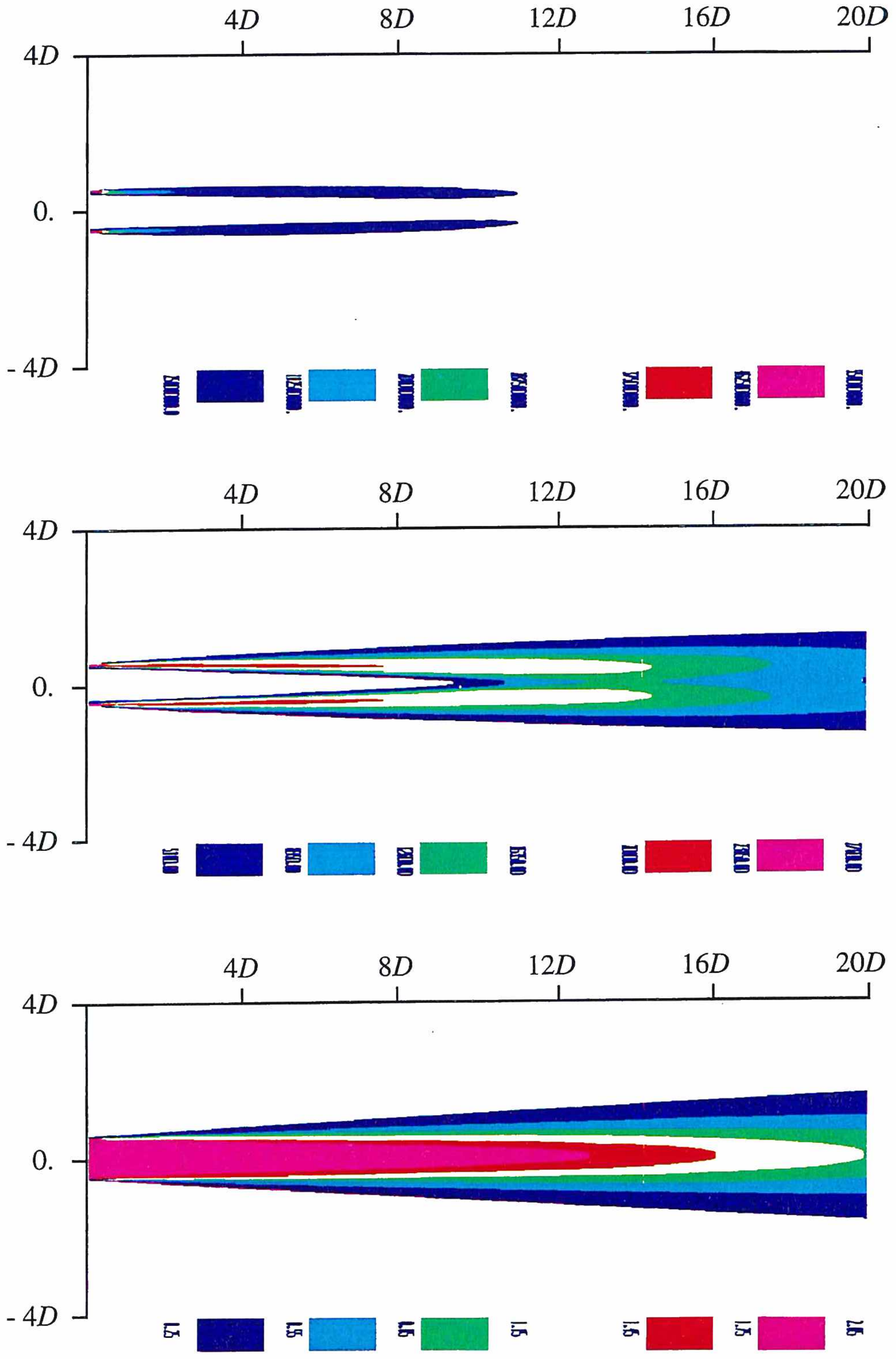
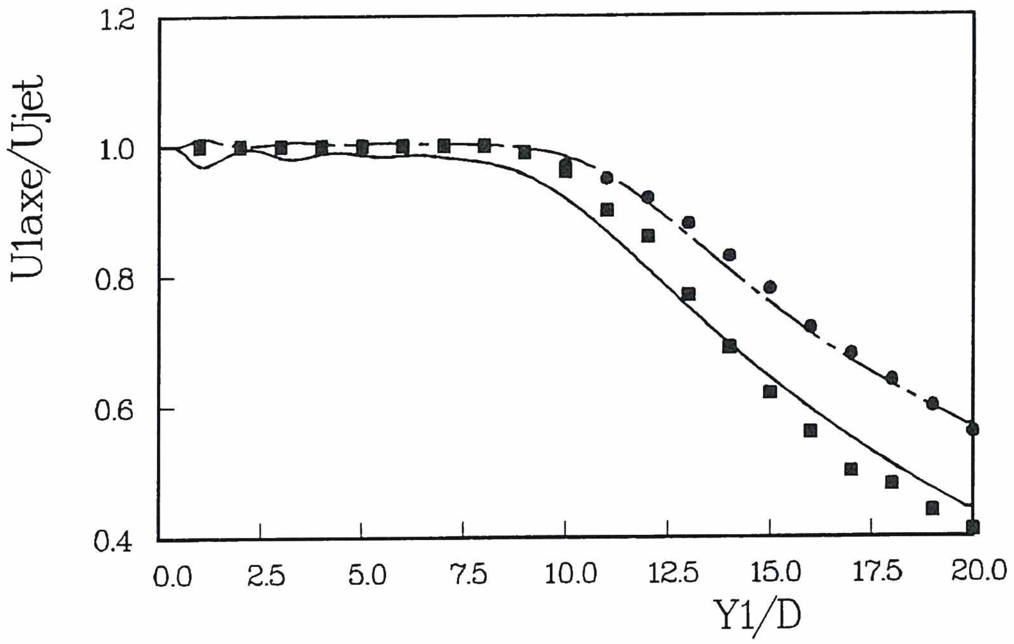
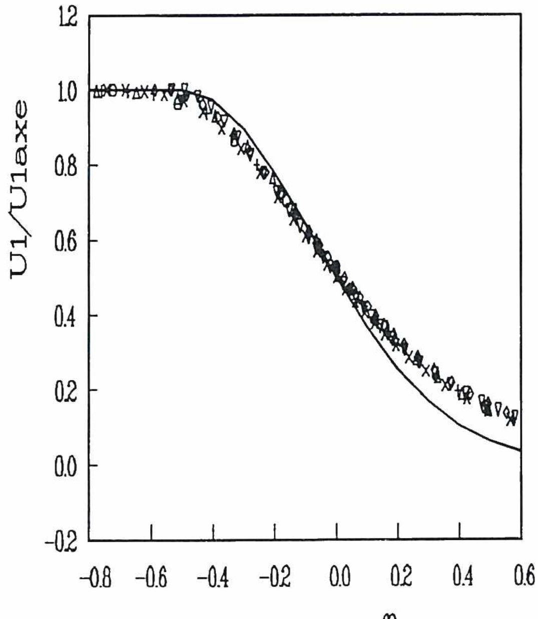


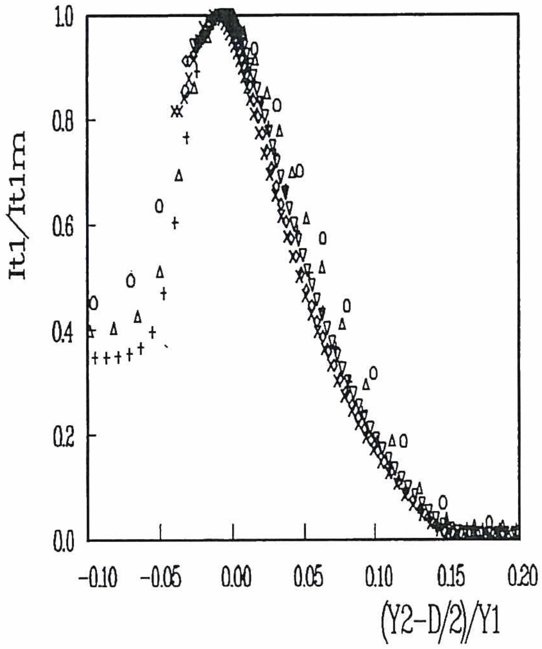
Figure 3.2: Jet $M = 2.0$, $T_t = 1370$K. De bas en haut: iso-M, iso-k et iso-ϵ.



(a) Profil axial de la vitesse. Calculs: —-— $T_{jet}/T_o = 1$, — $T_{jet}/T_o = 2.5$. Mesures de Seiner *et al.* • $T_{jet}/T_o = 1$, ▪ $T_{jet}/T_o = 2.5$.



(b) Profils radiaux de la vitesse. — Seiner *et al.*, Estet: ○ $y_1/D = 1$, △ $y_1/D = 3$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 7$, ◇ $y_1/D = 9$, ▽ $y_1/D = 11$.



(c) Profils radiaux de l'intensité turbulente. Estet: ○ $y_1/D = 1.25$, △ $y_1/D = 2.5$, + $y_1/D = 5$, × $y_1/D = 12$, ◇ $y_1/D = 15$, ▽ $y_1/D = 18$.

Figure 3.3: Jet $M = 2.0$, $T_t = 1370$K.

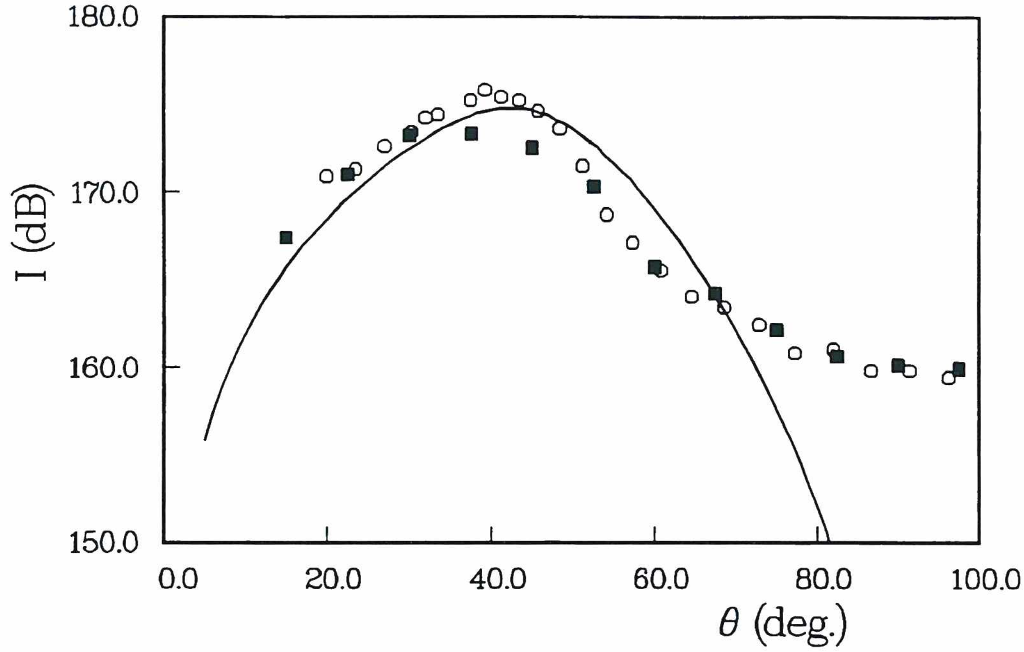


Figure 3.4: Jet $M = 2.0$, $T_{jet}/T_o = 1$: intensité acoustique. — modèle, ▪ mesures de Tanna ($M = 1.95$), ∘ mesures de Seiner *et al.*

en compte dans (3.11) par l'intermédiaire du facteur c^4. Le niveau acoustique est sensiblement identique, alors que la directivité est modifiée. Le tableau suivant synthétise les résultats expérimentaux, et ceux obtenus avec le modèle:

$M = 2.0, T_t = 537$K		modèle	Seiner *et al.*	Tanna
	$\theta_{max}(°)$	44.0	39.2	37.5
	I_{max}(dB)	174.7	175.8	173.8
$M = 2.0, T_t = 1370$K				
	$\theta_{max}(°)$	59.0	51.5	
	I_{max}(dB)	175.7	177.8	

La figure 3.6 présente l'intensité acoustique obtenue pour $M = 1.67$ dans le cas du jet supersonique étudié dans le deuxième chapitre. La directivité marquée se retrouve sur le modèle, mais celui-ci sous-estime le niveau sonore. Les ondes de Mach ne représentent certainement qu'une partie du rayonnement acoustique pour ce cas intermédiaire.

3.3.2 Puissance acoustique

On s'intéresse maintenant (figure 3.7) à l'évolution de la puissance acoustique en fonction du rapport U_{jet}/c_o. Il se pose un problème de normalisation pour le jet chaud.

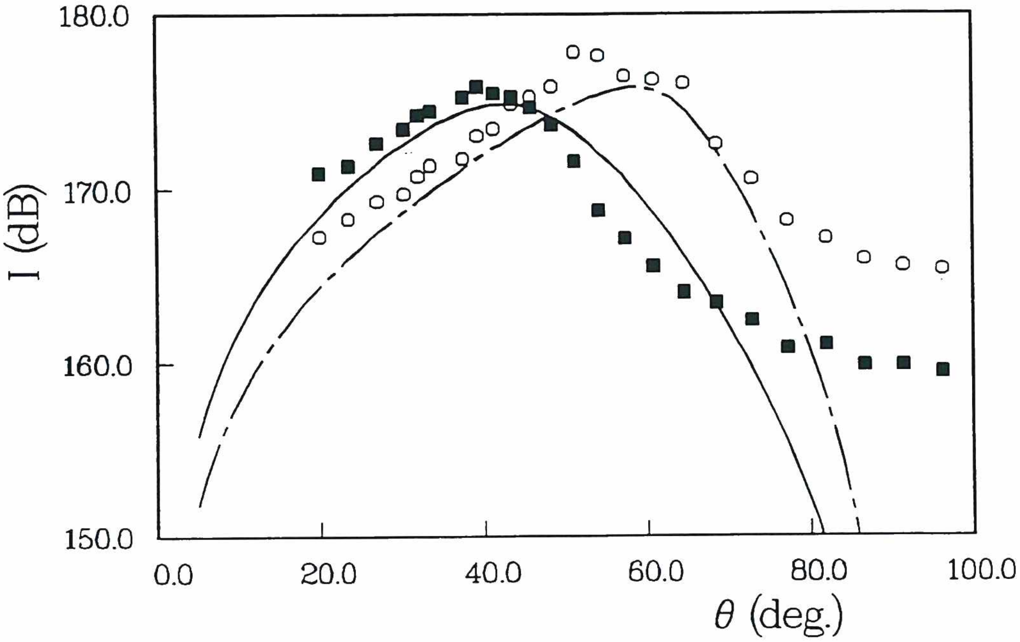


Figure 3.5: Jets $M = 2.0$: intensité acoustique. Modèle: — $T_{jet}/T_o = 1$, —-— $T_{jet}/T_o = 2.5$. Mesures de Seiner *et al.* ■ $T_{jet}/T_o = 1$, ○ $T_{jet}/T_o = 2.5$.

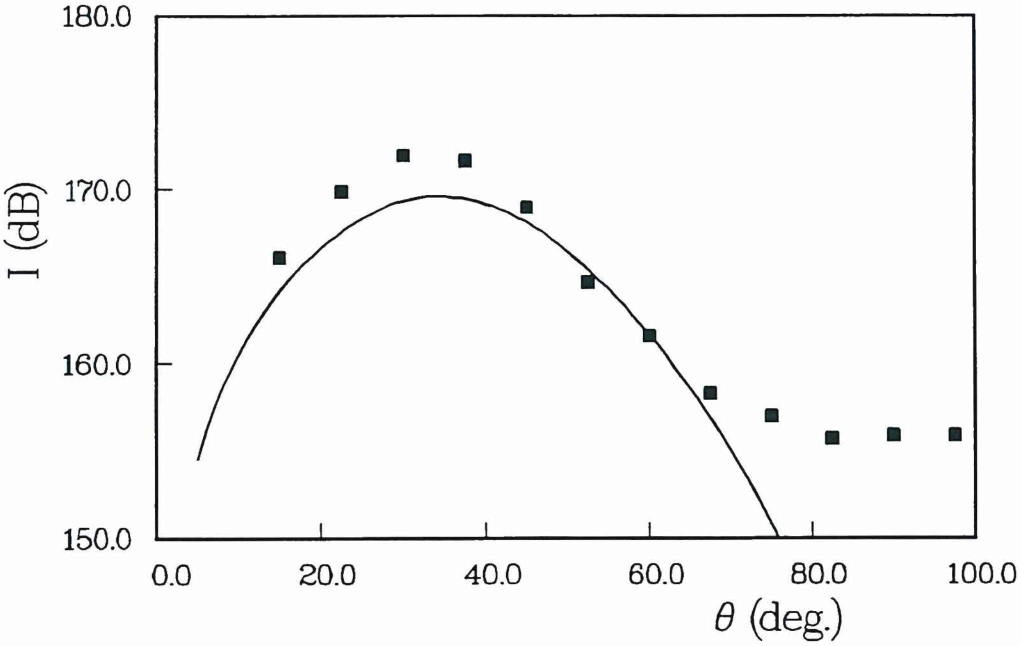


Figure 3.6: Jet $M = 1.67$, $T_{jet}/T_o = 1$: intensité acoustique. — modèle, ■ mesures de Tanna *et al.* ($M = 1.65$).

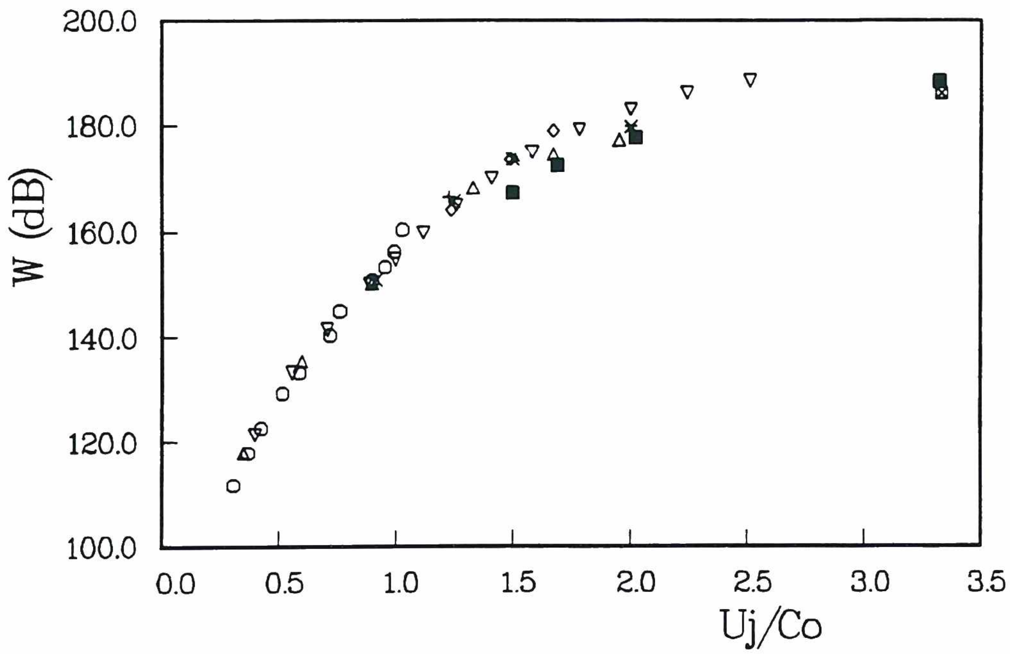


Figure 3.7: Evolution de la puissance acoustique W en fonction du rapport U_{jet}/c_o. Modèle ▪, mesures: ○ Lush, △ Tanna, + Yu & Dosanjh, × Norum & Seiner, ◇ Seiner *et al.* (1982), ▽ données S.A.E., ⋆ Seiner *et al.* $T_{jet}/T_o = 1$, ⊠ Seiner *et al.* $T_{jet}/T_o = 2.5$.

En effet, la loi dimensionnelle s'écrit alors†:

$$W \sim \frac{\rho_j^2}{\rho_o} D^2 U_{jet}^3$$

D'après cette expression, la puissance est proportionnelle au carré de la masse volumique ρ_j. Ceci explique que le niveau de l'intensité ne soit pas plus élevé pour le cas du jet chaud, l'augmentation de vitesse étant compensée en grande partie par la diminution de la masse volumique. La normalisation de W s'écrit alors:

$$\tilde{W} = 10\log_{10}\left(\frac{W}{W_o}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) - 10\log_{10}\left(\frac{\rho_j^2}{\rho_o^2}\right) \qquad (3.12)$$

La figure 3.8 reprend les estimations du modèle en y incluant les deux lois dimensionnelles établies dans le premier chapitre. Ces deux figures montrent un très bon accord entre les valeurs expérimentales et les calculs. Par ailleurs, la loi dimensionnelle donne également une bonne estimation de la puissance acoustique en $U_{jet}/c_o = 3.3$. Il est cependant difficile de conclure sur la validité de cette loi, puisque l'on ne dispose que de très peu de points expérimentaux pour des vitesses si élevées.

†Cette loi se déduit simplement en conservant ρ_j lorsque l'on introduit le tenseur $\mathcal{R}_{ijkl}$ (voir expression 1.8) pour l'analyse dimensionnelle.

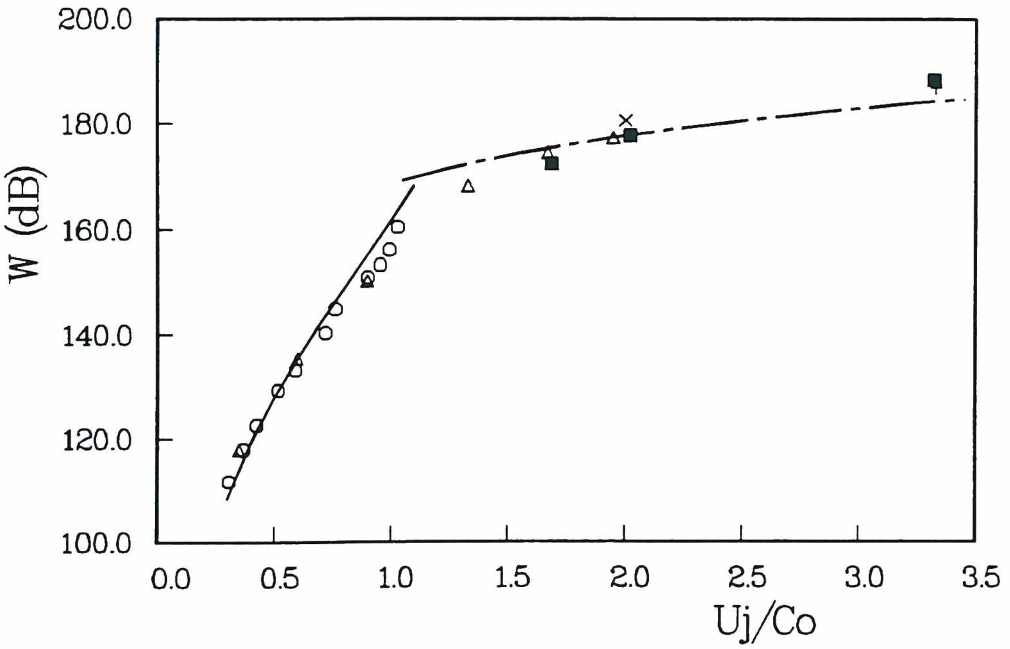


Figure 3.8: Puissance acoustique: lois dimensionnelles. ▪ : modèle, mesures: ○ Lush, △ Tanna, Seiner *et al.* × $T_{jet}/T_o = 1$, + $T_{jet}/T_o = 2.5$. —— loi dimensionnelle subsonique et — - — loi dimensionnelle supersonique (voir expression 2.21).

3.4 Conclusion

On montre dans le cadre de l'analogie de Lighthill qu'il est possible d'estimer le terme source $\partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j$ lorsque $1 - M_c \cos\theta$ s'annulle, i.e. lorsqu'il y a émission d'ondes de Mach. Ces ondes de Mach sont la conséquence directe de la convection des structures turbulentes à vitesse supersonique.

La directivité très marquée des ondes de Mach est retrouvée par le modèle. On visualise de plus l'influence de la température sur le diagramme de directivité. Enfin, l'évolution de la puissance acoustique est conforme aux mesures et à la loi dimensionnelle.

Finalement, il est possible en restant dans le cadre de l'analogie de Lighthill, d'obtenir un certain nombre d'informations pertinentes sur les écoulements turbulentes libres à nombre de Mach convectif supersonique †.

†Un modèle du spectre acoustique des ondes de Mach est proposé dans un article à paraître. Voir l'annexe C, Bailly *et al.* (1994)

Références

[1]**Ffowcs Williams, J.E. & Maidanik, G.**, 1965, "The Mach wave field radiated by supersonic turbulent shear flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 21(4), pp. 641-657.

[2]**Tam, C.K.W. & Chen, P.**, 1993, "Turbulent mixing noise from supersonic jets," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4408.

[3]**Oertel, H.**, 1982, "Coherent structures producing Machwaves inside and outside of the supersonic jet," *Structure of complex turbulent shear flow, IUTAM Symposium*, Marseille.

[4]**Phillips, O.M.**, 1960, "On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 9(1), pp. 1-28.

[5]**Laufer, J.**, 1962, "Sound radiation from a turbulent boundary layer," *CNRS*, Report 108.

[6]**Ffowcs Williams, J.E.**, 1963, "The noise from turbulence convected at high speed," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 225, Ser. A, 1061, pp. 469-503.

[7]**Ribner, H.S.**, 1969, "Eddy mach wave noise from a simplified model of a supersonic mixing layer," *Toronto University, Institute for Aerospace Studies*, UTIAS Technical Note 146.

[8]**Proudman, I.**, 1952, "The generation of sound by isotropic turbulence," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. A, 214, pp. 119-132.

[9]**Kistler, A.L. & Chen, W.S.**, 1962, "The fluctuating pressure field in a supersonic turbulent boundary layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 16(1), pp. 41-64.

[10]**Favre, A.J., Gaviglio, J.J. & Dumas, R.J.**, 1958, "Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 3(4), pp. 344-356.

[11]**Seiner, J.M., McLaughlin, D.K. & Liu, C.H.**, 1982, "Supersonic jet noise generated by large-scale instabilities," *NASA*, Technical paper, 2072.

[12]**Seiner, J., Ponton, M.K., Jansen, B.J. & Lagen, N.T.**, 1992, "The effects of temperature on supersonic jet noise emission," *DGLR/AIAA 14th Aeroacoustic Conference*, Eurogress Center Aachen, 11-14 May, AIAA-92-02-046.

[13]**Tanna, H.K., Dean, P.D. & Burrin, R.H.**, 1976, "The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol.III Turbulent mixing noise data," *Air Force Aero-Propulsion Laboratory*, AFAPL-TR-76-65.

[14]**Tanna, H.K.**, 1977, "An experimental study of jet noise, Part I: turbulent mixing noise," *J. Sound Vib.*, Vol. 50(3), pp. 405-428.

Chapitre 4

Modèle hybride

On se propose de faire la synthèse des résultats des deux chapitres précédents. On vient de présenter deux types de modèles, permettant d'estimer le rayonnement acoustique du bruit de mélange, respectivement pour des écoulements convectifs subsoniques et supersoniques. On se propose d'appliquer dans l'état ces deux formulations pour finalement estimer le rayonnement acoustique d'un jet libre subsonique ou supersonique. La première partie précise la construction de ce modèle hybride. La seconde présente les résultats acoustiques obtenus.

4.1 Construction

Dans le tableau suivant, on rappelle quelques caractéristiques du rayonnement acoustique d'un jet, lorsque le nombre de Mach de convection M_c est soit subsonique, soit supersonique:

	écoulement convectif subsonique, i.e. $0 \leq M \leq 1.5$	écoulement convectif supersonique, i.e. $M \geq 1.5$
forme du rayonnement	bruit quadripolaire: propre + cisaillement	ondes de Mach (composante dominante)
loi dimensionnelle	$W \sim \frac{\rho_{jet}^2}{\rho_o} D^2 \frac{U_{jet}^8}{c_o^5} \frac{1+M_c^2}{(1-M_c^2)^4}$	$W \sim \frac{\rho_{jet}^2}{\rho_o} D^2 U_{jet}^3$
modèle hybride	voir chapitre 2 expression (2.10)	voir chapitre 3 expression (3.11)

Suivant la vitesse de convection locale, l'un ou l'autre des modèles est appliqué. Ces modèles ne sont pas modifiés: en particulier, la constante respective de calage est conservée telle qu'elle est calculée auparavant.

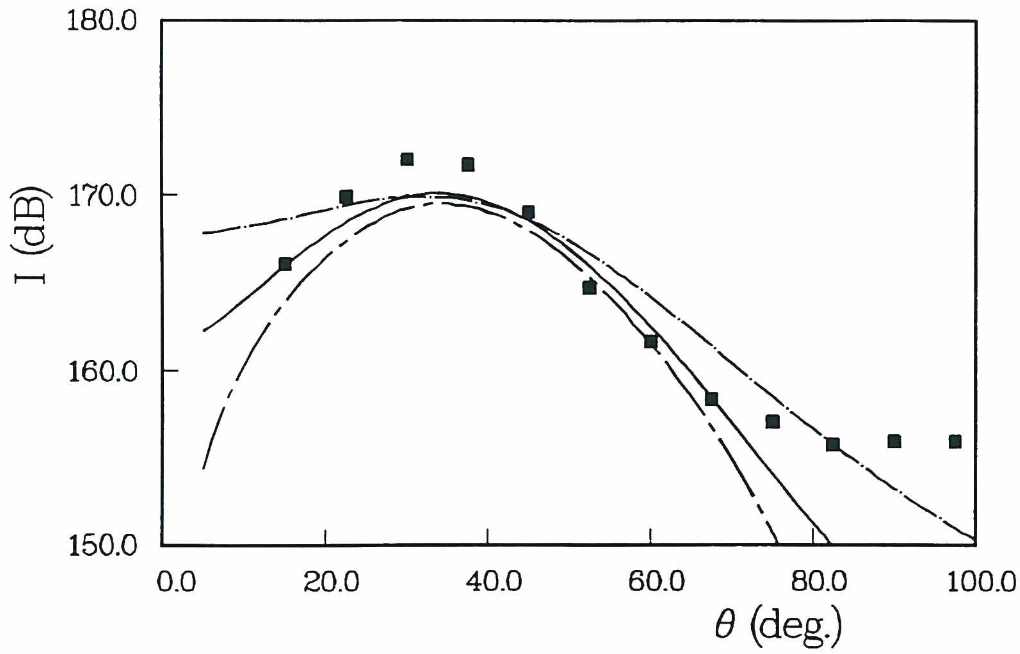


Figure 4.1: Intensité acoustique, $M = 1.67$. — modèle hybride, --- ondes de Mach, —·— bruit turbulence axisymétrique, ▪ mesures de Tanna.

4.2 Résultats acoustiques

On présente l'évolution en fonction du nombre de Mach nominal M du jet, le diagramme de directivité, la puissance acoustique et l'efficacité η de ce rayonnement.

4.2.1 Intensité acoustique

Les résultats nouveaux sont obtenus pour $M \geq 1.5$. En effet, pour un nombre de Mach convectif subsonique, le modèle hybride coincide avec l'expression (2.10) de l'intensité acoustique.

Sur les figures 4.1 et 4.2 sont tracées les diagrammes de directivité pour les deux cas $M = 1.67$ et $M = 2.0$. Pour le cas $M = 1.67$, l'intensité est mieux élaborée avec le modèle hybride, qui somme en fait la contribution du bruit de mélange quadripolaire, et la contribution due aux ondes de Mach. Pour le cas $M = 2.0$, le modèle hybride n'apporte quasiment pas d'amélioration: les ondes de Mach dominent donc le rayonnement acoustique pour $M \geq 2$.

4.2.2 Puissance acoustique

La figure 4.3 donne l'évolution de la puissance acoustique en fonction du rapport U_{jet}/c_o. On passe continuement d'une loi en U_{jet}^8 pour $M \leq 1$, à une loi en U_{jet}^8 modifiée par un facteur de convection pour $M \leq 1$, jusqu'à une loi en U_{jet}^3 pour $M \geq 2$, où le rayonnement est alors assuré par les ondes de Mach.

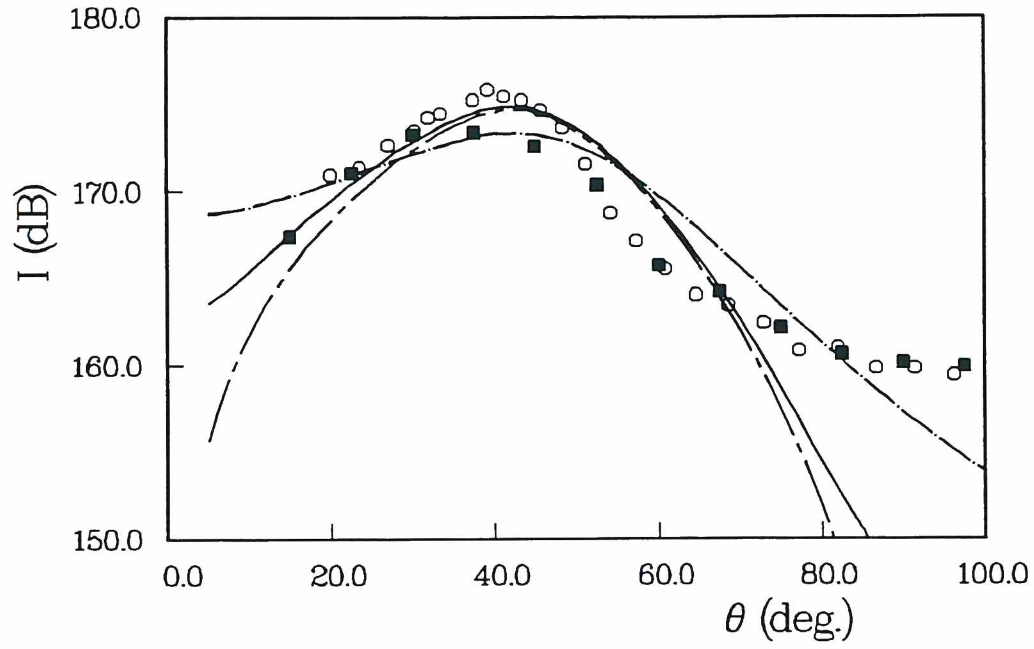


Figure 4.2: Intensité acoustique, $M = 2.0$. — modèle hybride, - - - ondes de Mach, —·— bruit turbulence axisymétrique. Mesures: ▪ Tanna, ∘ Seiner *et al.*

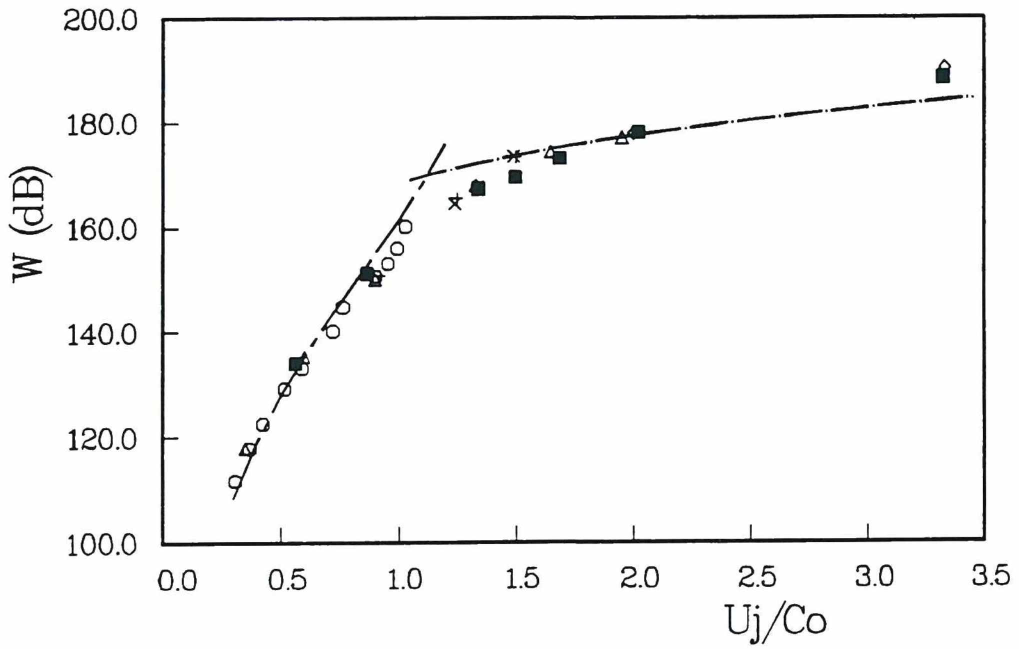


Figure 4.3: Evolution de la puissance acoustique. ▪ modèle hybride. Mesures: ∘ Lush, △ Tanna, + Norum & Seiner, ◇ Seiner *et al.* (1992). Lois dimensionnelles - - - subsonique et —·— supersonique.

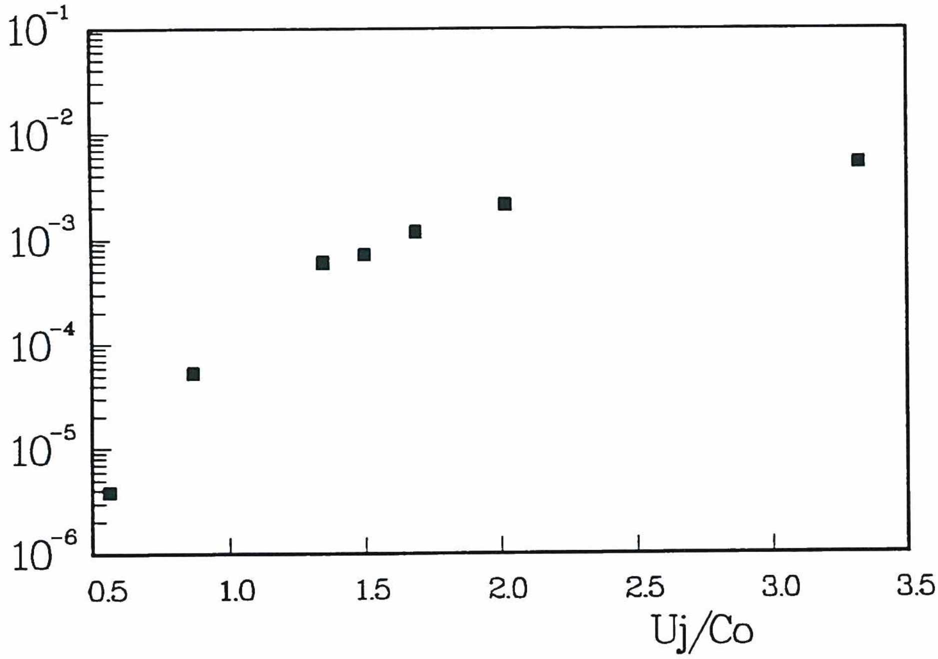


Figure 4.4: Evolution du rendement acoustique η.

4.2.3 Efficacité acoustique

La figure 4.4 présente l'évolution de η en fonction du rapport U_{jet}/c_o. On rappelle que η, efficacité ou rendement acoustique est défini comme le rapport de la puissance acoustique rayonnée sur la puissance mécanique du jet W_m:

$$W_m = \frac{\pi D^2}{4}\rho_{jet}U_{jet}^3$$

Ce rendement croit en régime subsonique, pour atteindre finalement une valeur asymptotique $\eta \simeq 0.5\%$ en régime supersonique, i.e. plus précisement pour $M \geq 3$.

	écoulement convectif subsonique, i.e. $0 \leq M \leq 1.5$	écoulement convectif supersonique, i.e. $M \geq 1.5$
loi dimensionnelle	$W \sim \frac{\rho_{jet}^2}{\rho_o} D^2 \frac{U_{jet}^8}{c_o^5} \frac{1+M_c^2}{(1-M_c^2)^4}$	$W \sim \frac{\rho_{jet}^2}{\rho_o} D^2 U_{jet}^3$
efficacité	$\eta \sim \frac{\rho_{jet}}{\rho_o} \left(\frac{U_{jet}}{c_o}\right)^5 \frac{1+M_c^2}{(1-M_c^2)^4}$	$\eta \sim \frac{\rho_{jet}}{\rho_o}$

4.3 Conclusion

Ce chapitre de synthèse propose une vue globale du rayonnement acoustique des jets libres subsoniques et supersoniques. Un modèle hybride est constitué à partir des modèles élaborés pour le bruit de mélange et pour le rayonnement des ondes de Mach. Il est intéressant en particulier d'observer numériquement l'évolution du rendement acoustique η en fonction du rapport U_{jet}/c_o.

Synthèse à propos de l'approche statistique

Après avoir établi l'analogie de Lighthill pour des écoulements turbulents subsoniques et supersoniques, on a finalement développé deux types de modélisation pour des nombres de Mach de convection subsoniques ou supersoniques.

Le premier cas utilise une modélisation déjà étudiée dans la littérature, mais que l'on a adapté et mis en oeuvre sur des écoulements de jet tels que $M \leq 1.5$. Cette approche permet ainsi d'obtenir le diagramme de directivité, la puissance acoustique, les spectres, ainsi que la distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques.

Le second cas, i.e. celui d'un écoulement à nombre de Mach convectif supersonique, correspond au rayonnement acoustique des ondes de Mach dues aux structures turbulentes convectées à vitesse supersonique. *La modélisation et la mise en oeuvre sont originales*: on obtient le diagramme de directivité et la puissance acoustique. Ce modèle permet également de prendre en compte l'influence de la température sur le rayonnement acoustique.

Ces deux modélisations aboutissent toujours à l'intégration d'un terme source local sur tout le volume source turbulent. Les grandeurs caractérisant l'écoulement moyen et le champ turbulent, grandeurs intervenant dans la formulation locale du terme source, sont déduits d'un calcul aérodynamique $k - \epsilon$ compressible.

Finalement, cette approche fournit une image assez complète du rayonnement acoustique des jets turbulents libres subsoniques et supersoniques.

Les limitations de la modélisation concernent essentiellement les deux points suivants. En premier lieu, le modèle est fondé sur l'*analogie de Lighthill*, qui nécessite la fonction de Green adéquate. De plus, la *réfraction des ondes sonores par l'écoulement moyen* n'est pas prise en compte. En second lieu, l'utilisation d'un calcul aérodynamique $k - \epsilon$ ne permet pas d'avoir une description détaillée des caractéristiques de la turbulence.

Partie II

Résolution des équations d'Euler linéarisées pour le calcul du champ acoustique

Nomenclature

c	Célérité du son
c_p	Chaleur spécifique à pression constante
c_v	Chaleur spécifique à volume constant
D	Diamètre de la tuyère
I	Intensité acoustique
k	Energie cinétique turbulente
k	Nombre d'onde
L	Longueur intégrale de la turbulence
M_c	Nombre de Mach de convection $M_c = U_c/c_o$
M	Nombre de Mach nominal $M = U_{jet}/c_j$
p	Pression
t	Temps
u	Vitesse
u_t	Vitesse turbulente
U	Vitesse de l'écoulement moyen
U_c	Vitesse de convection
U_{jet}	Vitesse nominale du jet
s	Entropie
W	Puissance acoustique
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϵ	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente k
γ	Rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = c_p/c_v$
λ_c	Conductivité thermique
ν	Viscosité cinématique
θ	Angle entre l'axe aval de l'écoulement moyen et l'observateur
ρ	Masse volumique
τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses

Indices

o	Valeur associée au milieu ambiant homogène et au repos
1	Composante axiale, direction principale de l'écoulement moyen
2	Composante radiale

Introduction

Il est difficile d'étendre l'approche présentée dans la première partie à des géométries complexes. En effet, l'analogie acoustique de Lighthill ne permet pas la prise en compte des effets de réfraction. De plus, il est nécessaire de connaître la fonction de Green associée à l'équation de propagation de Lighthill. Cette partie présente une approche plus générale permettant d'aborder des écoulements complexes.

Pour le calcul du champ acoustique rayonné, on s'intéresse donc dans cette seconde partie à la résolution numérique des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire. Dans cette approche, qui se situe toujours dans le cadre d'une analogie acoustique, le calcul du champ aérodynamique, source de bruit, est découplé du calcul du champ acoustique induit.

L'intérêt de calculer le champ acoustique par résolution des équations d'Euler est croissant depuis quelques années. Citons Maestrello *et al.*, Tam *et al.*, Chen *et al.*, Freund *et al.* qui s'intéressent à la résolution des équations d'Euler linéarisées avec un terme source élémentaire. Berman *et al.* s'intéressent à la résolution de l'équation de Lilley. Enfin, Hardin *et al.* étudient une démarche plus complexe pour le calcul du champ acoustique. Les validations de ces différentes approches sont cependant très limitées pour le moment.

Dans le cinquième chapitre, on fait une synthèse d'un certain nombre d'équations des ondes de l'aéroacoustique. Les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire font ensuite l'objet d'une étude particulière. On identifie les termes sources et l'équation de propagation associés à ce système. On précise également dans ce chapitre l'interaction entre les modes acoustique et tourbillonnaire.

Le sixième chapitre est consacré à la modélisation stochastique des termes sources précédemment identifiés. On utilise pour cela un champ turbulent synthétique spatio-temporel. On présente alors l'application de ce modèle, baptisé modèle SNGR pour *Stochastic Noise Generation and Radiation*, au cas des jets turbulents libres.

Berman, C., 1974, "Noise from non uniform turbulent flows," *12th Aerospace and Science Meeting, January 30 - February 1*, Washington, D.C., AIAA-74-2.

Berman, C., 1979, "The generation and propagation of sound in turbulent jets," *AIAA 5th Aeroacoustics Conference*, Seattle, Washington, 12-14 March, AIAA-79-0573.

Berman, C. & Ramos, J., 1989, "Simultaneous computation of jet turbulence and noise," *12th Aeroacoustics Conference*, San Antonio, TX, April 10-12, AIAA-89-1091.

Berman, C., *et al.*, 1993, "Jet turbulence noise computations," *15th AIAA Aeroacoustics Conference*, Long Beach, CA, October 25-27, AIAA-93-4365.

Chen, C.L. & Liu, Y., 1993, "Analysis of numerical approaches for acoustics equations," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4324.

Freund, J.B., Lele, S.K. & Moin, P., 1993, "Matching of near/far-field equation sets for direct computations of aerodynamic sound," *AIAA 15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, CA, October 25-27, AIAA-93-4326.

Hardin, J.C. & Pope, D.S., 1992, "Sound generation by a stenosis in a pipe," *AIAA Journal*, Vol. 30(2), pp. 312-317.

Hardin, J.C. & Pope, D.S., 1993, "Sound generation by flow over a two-dimensional cavity," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4327.

Maestrello, L., Bayliss, A. & Turkel, E., 1981, "On the interaction of a sound pulse with the shear layer of an axisymmetric jet," *J. Sound Vib.*, Vol. 74(2), pp. 281-301.

Tam, C.K.W. & Webb, J.C., 1993, "Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics," *J. Comput. Phys.*, Vol. 107, pp. 262-281.

Tam, C.K.W. & Shen, H., 1993, "Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high order finite difference schemes," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, C.A., 25-27 October, AIAA-93-4325.

Chapitre 5

Equations des ondes pour l'aéroacoustique

Dans ce chapitre, on s'intéresse, toujours dans le cadre d'une analogie acoustique, à une équation de propagation en écoulement. L'opérateur de propagation prend ainsi en compte l'influence de l'écoulement moyen sur le champ acoustique, i.e. les effets de convection et de réfraction des ondes sonores. Dans ce cadre, il faut préciser d'une part l'expression d'un tel opérateur, et d'autre part, les termes sources à l'origine du champ acoustique rayonné.

Dans une première section, on effectue une revue des équations connues de l'aéroacoustique. On remarque en particulier qu'un opérateur prenant en compte les effets de l'écoulement moyen sur la propagation contient nécessairement les instabilités aérodynamiques associées à cette écoulement moyen. Une deuxième section précise alors la distinction entre le champ aérodynamique et le champ acoustique. On note que ces champs, sauf cas très particulier, sont couplés. Dans une troisième section, on s'intéresse alors aux équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire. On présente deux formulations équivalentes de ce système, et l'équation de propagation associée. Le terme source est alors précisé. Enfin, une dernière section revient sur l'analogie de Lighthill, en montrant qu'il est possible d'extraire le terme source associé à une équation d'ondes convectées.

Dans ce chapitre, on essaie de montrer qu'il est possible de calculer le champ acoustique rayonné par résolution des équations d'Euler linéarisées. On montre que l'équation de propagation déduite est cohérente avec les analogies acoustiques proposées dans la littérature. On souligne également la difficulté de séparer les effets d'interaction de l'écoulement moyen sur la propagation, de la production du son elle-même. Sauf cas particulier, la solution d'un tel problème contient le champ sonore, mais également les instabilités linéaires associées à l'écoulement moyen.

5.1 Revue des équations de propagation de l'aéroacoustique

Dans cette première section, on évoque successivement les équations de propagation de Lighthill (1952), Phillips (1960) et Lilley (1972). Ces trois équations de propagation sont dans leur forme initiale des reformulations exactes des équations de la mécanique des fluides.

5.1.1 Equation de Lighthill (1952)

Pour obtenir l'équation de Lighthill[1,2], on écrit tout d'abord les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\rho u_j\right)}{\partial x_j}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\rho u_i u_j+p \delta_{ij}-\tau_{ij}\right)}{\partial x_j}=0 \end{array}\right.$$

On forme alors la combinaison classique suivante de ces deux équations:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u_j\right)}{\partial x_j}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u_i u_j+p \delta_{ij}-\tau_{ij}\right)}{\partial x_j}\right\}=0$$

Cette expression s'écrit encore en introduisant une célérité de référence c_o, e.g. la célérité dans le milieu homogène et au repos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i}=\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{avec } T_{ij}=\rho u_i u_j+\left(p-c_o^2 \rho\right) \delta_{ij}-\tau_{ij} \tag{5.1}$$

On a déjà présenté dans le premier chapitre l'analogie acoustique associée à cette équation. On retient de cette analogie, que l'on peut tenir compte de la convection des sources, mais pas de l'influence de l'écoulement moyen sur la propagation: l'opérateur de propagation est ici celui associé à un milieu homogène et au repos. Les termes sources contiennent non seulement la production du son par la turbulence, mais aussi toutes les interactions entre l'écoulement aérodynamique et les ondes acoustiques: effets de réfraction, de diffraction de l'acoustique par la turbulence. Or, on a montré dans la première partie que tous ces effets ne peuvent être modélisés. Pour prendre en compte l'interaction du champ aérodynamique et des ondes acoustiques, il est nécessaire que ces effets soient inclus dans l'opérateur de propagation.

5.1.2 Equation de Phillips (1960)

Dans un article sur le rayonnement acoustique des écoulements cisaillés supersoniques bidimensionnels[3], Phillips reformule l'analogie acoustique, en introduisant a priori l'opérateur de propagation pour un milieu en mouvement. Pour cela, on introduit la variable $\pi=\ln p$, logarithme de la pression. On considère par ailleurs un gaz parfait, ainsi $c^2=\gamma e^{\pi}/\rho$. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors:

- pour la conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \pi}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{5.2}$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques. d/dt est l'opérateur différentiel de dérivation en suivant le mouvement:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- pour la conservation de la masse, en utilisant la relation de Gibbs pour un gaz parfait:

$$ds = c_v \left[\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho}\right]$$

$$\frac{1}{\gamma \rho}\frac{dp}{dt} - \frac{1}{\gamma c_v}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

soit encore, en introduisant la variable π:

$$\frac{d\pi}{dt} - \frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt} + \gamma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{5.3}$$

L'équation de propagation peut être formée par combinaison des expressions (5.2) et (5.3):

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d\pi}{dt} - \frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt} + \gamma \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right\} - \gamma \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{du_i}{dt} + \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \pi}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right\} = 0$$

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2 \frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right) = \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right) \tag{5.4}$$

On obtient ainsi l'équation des ondes de Phillips. Cette équation, comme l'équation de Lighthill (5.1) est une reformulation exacte des équations de la mécanique des fluides. On néglige dans la suite le terme de variation d'entropie, ainsi que le terme lié à la viscosité, pour obtenir:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2 \frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right) = \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{5.5}$$

Cette hypothèse, bien que très usitée en aéroacoustique, n'est pas toujours facile à justifier. On peut cependant remarquer que les deux termes négligés sont liés à la conductivité thermique par l'équation de conservation de l'énergie:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)$$

On suppose donc dans la suite que l'écoulement est froid, avec un nombre de Reynolds grand pour pouvoir négliger le rôle des contraintes visqueuses. On simplifie alors le membre de gauche de (5.5), en ne prenant en compte que les effets de l'écoulement moyen, i.e. l'influence de la vitesse et de la température moyennes sur les ondes acoustiques, et en négligeant donc la convection et la réfraction des ondes acoustiques par la turbulence. En considérant un écoulement moyen unidirectionnel cisaillé bidimensionnel: $u_i = U(x_2)\delta_{1i} + u'_i$, où la pression moyenne π_o est supposée uniforme, l'équation de Phillips prend la forme suivante:

$$\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right) = 2\gamma\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{dU}{dx_2} + \left\{\gamma\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \gamma\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}\right\} \tag{5.6}$$

où D/Dt désigne l'opérateur de dérivation en suivant l'écoulement moyen. Dans notre cas:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}$$

L'expression du terme source est la somme d'une interaction entre l'écoulement moyen et la turbulence, que l'on a appelé bruit de cisaillement dans la première partie, et d'une interaction de la turbulence avec elle-même, appelée bruit propre. Phillips n'a retenu que le bruit de cisaillement comme terme source, alors que Pao[4], reprenant l'article de Phillips, conserve les deux termes.

L'équation de Phillips (5.5) présente l'intérêt d'avoir fait disparaître la densité ρ du terme source. Cependant, comme le remarquent Lilley[5] et Doak[6], l'interaction de l'écoulement moyen avec le champ acoustique, i.e. la réfraction des ondes par l'écoulement moyen, n'est pas complètement décrite par l'opérateur différentiel. Il est intéressant de reproduire le raisonnement sur un cas simple. Les équations d'Euler s'écrivent avec les mêmes hypothèses d'après (5.2) et (5.3):

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\pi}{dt} + \gamma\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{c^2}{\gamma}\dfrac{\partial \pi}{\partial x_i} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ces équations linéarisées autour du même écoulement moyen gouvernent les fluctuations acoustiques de pression et vitesse en dehors du volume source:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \pi'}{\partial t} + U\dfrac{\partial \pi'}{\partial x_1} + \gamma\dfrac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u'_i}{\partial t} + U\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_1} + u'_2\dfrac{d(U\delta_{1i})}{dx_2} + \dfrac{c_o^2}{\gamma}\dfrac{\partial \pi'}{\partial x_i} = 0 \end{array}\right. \tag{5.7}$$

On obtient alors classiquement l'équation de propagation en formant:

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial \pi'}{\partial t} + U\frac{\partial \pi'}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}\right\} - \gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + u'_2\frac{d(U\delta_{1i})}{dx_2} + \frac{c_o^2}{\gamma}\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right\} = 0$$

Soit encore, après simplification:

$$\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right) - 2\gamma\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} = 0 \tag{5.8}$$

Le terme linéaire en fluctuation de vitesse apparaissant dans l'équation de Phillips (5.6) contient une composante acoustique, qui doit donc a priori faire partir de l'opérateur de propagation, comme le montre l'équation de propagation (5.8) déduite des équations d'Euler linéarisées.

De cet exemple, on retient que l'opérateur de propagation proposé par Phillips ne contient pas tous les effets d'interaction de l'écoulement moyen et des ondes acoustiques. Il est alors intéressant de se poser la question suivante: peut-on construire une équation de propagation à partir de ces équations d'Euler linéarisées, où les fluctuations de vitesse n'apparaissent plus, à l'image de ce qui se passe lorsque le milieu est au repos ? La réponse est oui, à condition d'envisager un opérateur différentiel de propagation du troisième ordre. Reprenons l'exemple précédent, en appliquant à nouveau l'opérateur D/Dt à l'équation (5.8):

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right)\right\} - 2\gamma\frac{D}{Dt}\left\{\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\right\} = 0$$

Or, en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction 2 du système (5.7):

$$-2\gamma\frac{D}{Dt}\left\{\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\right\} = 2\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_2}\right)$$

l'opérateur de propagation pour un écoulement unidirectionnel cisaillé bidimensionnel est finalement donné par:

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}\right)\right\} + 2\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{5.9}$$

On doit à Lilley cette démarche. Dans la section suivante, nous reprenons ce raisonnement dans un cadre plus général pour aboutir à l'équation de propagation, qui dans sa forme initiale est toujours une reformulation exacte des équations de la mécanique des fluides.

5.1.3 Equation de Lilley (1972)

Nous venons de voir qu'il était intéressant d'obtenir une équation de propagation pour la variable π avec un opérateur différentiel du troisième ordre. Appliquons alors l'opérateur d/dt à l'équation de Phillips (5.4), en s'inspirant de ce qui vient d'être fait avec les équations d'Euler linéarisées:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)\right\} = 2\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)\right\}$$

En utilisant la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) &= 2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{du_j}{dt}\right) - 2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= -2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2 \frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right) + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\right) - 2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

combinée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.2), on obtient finalement l'équation de propagation de Lilley[5]:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)\right\} + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right) &= -2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
+2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\right) &+ \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{c_v}\frac{ds}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

L'équation (5.10) est issue d'une reformulation exacte des équations de la mécanique des fluides pour un gaz parfait. Elle se simplifie avec les hypothèses introduites dans la section précédente, à savoir: la création et la propagation se font sans fluctuation d'entropie. De plus, la contribution des contraintes visqueuses est négligeable. L'équation de Lilley s'écrit alors:

$$
\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)\right\} + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right) = -2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tag{5.11}
$$

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos de cette analyse:

- On a montré, au moins pour le cas d'un écoulement bidimensionnel cisaillé, que l'opérateur différentiel de propagation des ondes acoustiques dans un tel milieu est du troisième ordre.

- La fonction de Green de l'équation de Lilley (5.11) n'est pas connue. De nombreux auteurs ce sont intéressés à cette équation. Il existe seulement des développements asymptotiques hautes et basses fréquences de solutions de cette équation (voir Goldstein [7], chapitre 6).

- L'opérateur de propagation de l'équation de Lilley contient non seulement les fluctuations de pression acoustique, mais également les fluctuations de pression liées aux instabilités aérodynamiques de l'écoulement. Pour les applications classiques de l'aéroacoustique (bruit des jets, ...), on linéarise cette équation en considérant un écoulement moyen unidirectionnel cisaillé $U(x_2)\,\delta_{1i}$. Sans terme source, et en supposant la pression moyenne π_o uniforme, on déduit alors:

$$
\frac{D}{Dt}\left\{\frac{D^2\pi'}{Dt^2} - c_o^2\frac{\partial^2\pi'}{\partial x_i \partial x_i}\right\} + 2c_o^2\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial^2\pi'}{\partial x_1\partial x_2} = 0
$$

On s'intéresse à la recherche de solutions de la forme:

$$\pi\left(\mathbf{x},t\right)=\mathcal{R}e\left[\hat{\pi}\left(x_2\right)e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}-\omega t)}\right]$$

La recherche de telles solutions revient finalement à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\hat{\pi}$:

$$\mathcal{L}\left(k,\omega\right)\left[\hat{\pi}\right]=0 \tag{5.12}$$

avec:

$$\mathcal{L}\left(k,\omega\right)=i\left(\omega-\mathbf{k}.\mathbf{U}\right)\left[-\left(\omega-\mathbf{k}.\mathbf{U}\right)^2-c_o^2\left(-k_1^2+\frac{d^2}{dx_2^2}\right)\right]-2ik_1c_o^2\frac{dU}{dx_2}\frac{d}{dx_2}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ correspond à la forme compressible de l'opérateur de Rayleigh† qui avec d'autres hypothèses, détermine les instabilités aérodynamiques linéaires de l'écoulement moyen. A titre d'illustration, simplifions encore nos hypothèses en supposant la vitesse moyenne U uniforme. L'équation (5.12) possède des solutions non triviales si $\omega=\mathbf{k}.\mathbf{U}$, relation de dispersion qui caractérise des fluctuations simplements convectées par l'écoulement moyen, ou alors, si:

$$\frac{d^2\hat{\pi}}{dx_2^2}+\left[\left(\omega-\mathbf{k}.\mathbf{U}\right)^2+c_o^2\right]\hat{\pi}=0$$

Cette seconde solution caractérise les ondes acoustiques. Par exemple, en utilisant la condition aux limites $\hat{\pi}\left(x_2\right)=0$, on obtient pour $\hat{\pi}$ les modes antisymétriques ou modes sinueux:

$$\hat{\pi}\left(x_2\right)=A\sin\left[\sqrt{\left(\omega-\mathbf{k}.\mathbf{U}\right)^2+c_o^2x_2}\right]$$

† A partir de l'équation de Navier-Stokes, on déduit pour la vorticité l'équation suivante:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla\omega=\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nu\nabla^2\omega+\omega.\nabla\mathbf{u}-\omega\nabla.\mathbf{u}$$

On linéarise cette équation autour d'un écoulement moyen unidirectionnel cisaillé $U\left(x_2\right)\delta_{1i}$. On cherche alors l'équation sur les fluctuations du champ de vitesse, supposé à divergence nulle, en introduisant une fonction de courant ψ, de la forme $\psi=\phi(x_2)e^{i(kx_1-\omega t)}$. En supposant les perturbations isentropiques, on déduit alors l'équation de Rayleigh (1880):

$$\left\{\left(U-\frac{\omega}{k}\right)\left[\frac{d^2}{dy_2^2}-k^2\right]-\frac{d^2U}{dx_2^2}\right\}\phi=0$$

En conclusion, on retient de cette section qu'il est difficile de proposer une analogie acoustique satisfaisante lorsque le milieu n'est plus homogène et au repos. Pour reprendre Goldstein[7], il n'est pas sûr qu'il soit physiquement réaliste de séparer les effets d'interaction de l'écoulement moyen et du champ acoustique, de la production du son. Pour le cas relativement simple d'un écoulement bidimensionnel cisaillé, l'opérateur différentiel de propagation est du troisième ordre. Cette équation ne possède pas de fonction de Green connue, et une approche numérique directe de cette équation pour le calcul du champ acoustique est délicate. On se propose, dans la prochaine section, de préciser la définition du champ aérodynamique et du champ acoustique, avant d'aborder l'étude des équations d'Euler linéarisées pour le calcul du champ acoustique.

5.2 Champ aérodynamique et champ acoustique

Il est intéressant d'examiner les relations qui existent entre les champs aérodynamique et acoustique dans les équations de la mécanique des fluides. La question que l'on se pose est la suivante: peut-on distinguer les fluctuations acoustiques des autres fluctuations, i.e. peut-on dinstinguer le son du pseudo-son ? Les équations de la mécanique contiennent trois types ou modes de fluctuations. Le mode entropique est caractérisé par des fluctuations de masse volumique convectées par l'écoulement moyen, sans perturbation sur la pression et la vitesse. Le mode tourbillonnaire est caractérisé par des fluctuations de vitesse sans perturbation de la masse volumique et de la pression. Le troisième et dernier mode est acoustique. Ces trois modes, sauf cas très particulier, sont couplés. Chu et Kovasznay[8] étudient ces trois modes possibles de fluctuations, en décrivant les six interactions qui résultent du couplage de ces modes et les échanges d'énergie associés. Ribner[9] dans sa théorie de la dilatation propose une définition de la pression acoustique à partir de l'analogie acoustique de Lighthill. Crow[10] présente une synthèse du problème fondée sur l'équation de Lighthill. Enfin, Howe[11] et Yates[12] montrent le rôle particulier que joue l'enthalpie et proposent une approche similaire pour distinguer les fluctuations acoustiques des fluctuations aérodynamiques. La suite de cette section fait référence pour une bonne part à ces deux derniers auteurs.

Comme précédemment, on supposera toujours que *les fluctuations sont isentropiques.* Pour introduire la partie acoustique des fluctuations de pression, il est intéressant de retenir de la théorie de la dilatation de Ribner l'idée suivante: le son ne peut être produit et propagé qu'en présence de dilatations locales du fluide. L'équation de conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla.\mathbf{u} = 0 \tag{5.13}$$

En utilisant l'expression de l'enthalpie h pour un gaz parfait:

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp$$

et en se rappelant l'hypothèse $ds = 0$:

$$dh = \frac{1}{\rho}dp = \frac{c^2}{\rho}d\rho$$

l'équation (5.13) prend la forme suivante:

$$\nabla.\mathbf{u} = -\frac{1}{c^2}\frac{dh}{dt} \tag{5.14}$$

Ainsi, les fluctuations locales d'enthalpie sont compensées par des fluctuations locales du taux de dilatation du fluide. Pour avoir production et propagation d'ondes acoustiques, il est nécessaire d'avoir un taux de dilatation locale $\nabla.\mathbf{u}$ non nul et instationnaire. On introduit alors le potentiel acoustique ϕ par l'équation de Poisson suivante:

$$\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{u} \tag{5.15}$$

On définit la vitesse acoustique par $\mathbf{u_d} = \nabla\phi$. L'équation (5.15) permet donc d'extraire la partie acoustique $\mathbf{u_d}$ du champ de vitesse associée aux variations temporelles du taux de dilatation locale†. La composante non acoustique du champ de vitesse $\mathbf{u_s} = \mathbf{u} - \mathbf{u_d}$ comprend l'écoulement moyen, compressible ou incompressible, et toute la partie rotationnelle de l'écoulement, stationnaire ou instationnaire. On a donc:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{u} &= \nabla\times\mathbf{u_s} \\ \overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u_s}} \\ \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{u_s} &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

On observe dans cette définition que le champ $\mathbf{u_s}$ n'est pas à divergence nulle, puisqu'il contient la partie compressible du champ moyen de vitesse. La composante acoustique est en fait la composante compressible du champ fluctuant. On se propose maintenant d'introduire cette définition cinématique de l'acoustique dans les équations d'Euler. On précisera la contribution des termes visqueux de l'équation de Navier-Stokes par la suite.

5.2.1 Equations d'Euler

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = -\nabla h \tag{5.17}$$

On considère alors la précédente décomposition du champ de vitesse:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_d} + \mathbf{u_s} = \nabla\phi + \mathbf{u_s} \tag{5.18}$$

†Colonius *et al.*[13] (1993) utilisent la variable $\theta = \nabla.\mathbf{u}$ comme variable acoustique pour un calcul par simulation directe.

où:

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{u}\\ \omega &= \nabla\times\mathbf{u} = \nabla\times\mathbf{u_s}\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité vectorielle:

$$\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + (\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u}$$

et l'opérateur de dérivation suivant $\mathbf{u_s}$:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u_s}.\nabla$$

il vient alors pour l'équation d'Euler:

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{u_s}}{Dt} + \nabla\left(h + \frac{\tilde{D}\phi}{Dt} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}\right) = -\omega\times\nabla\phi \tag{5.19}$$

Le second membre de l'équation représente le terme essentiel de couplage entre les modes acoustique et tourbillonnaire. Le champ $\mathbf{u_s}$ a un comportement semblable à un champ incompressible soumis à une "accélération de Coriolis" $-\omega\times\nabla\phi$. On note:

$$\mathcal{H} = h + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\tilde{D}\phi}{Dt} = H + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} \tag{5.20}$$

H est l'enthalpie totale, et $\mathcal{H}$ est l'*enthalpie de Bernoulli*, constante pour un écoulement irrotationnel. En effet, lorsque $\mathbf{u_s} = \mathbf{0}$, (5.19) se réduit alors à:

$$\nabla\mathcal{H} = 0 \text{ avec } \mathcal{H} = h + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

L'équation de propagation vérifiée par ϕ se forme en injectant la définition de $\mathcal{H}$ dans (5.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{D}\phi}{Dt} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}\right) - c^2\nabla^2\phi = \frac{d\mathcal{H}}{dt} + c^2\nabla.\mathbf{u_s}$$

On simplifie cette expression en conservant uniquement les termes linéaires en ϕ, i.e. en supposant $|\nabla\phi| \ll |\mathbf{u_s}|$. De plus, on note que $\nabla.\mathbf{u_s}$ est indépendant du temps de par sa définition (5.16). On aboutit finalement à:

$$\frac{\tilde{D}^2\phi}{Dt^2} - c^2\nabla^2\phi = \frac{\tilde{D}\mathcal{H}}{Dt} - \overline{\frac{1}{c^2}\frac{\tilde{D}\mathcal{H}}{Dt}} \tag{5.21}$$

De ces développements, il faut retenir que dans un cas général, les modes acoustique et tourbillonnaire sont couplés. La fluctuation de pression δp, composée d'une partie acoustique et d'un pseudo-son ou pression aérodynamique, s'exprime par:

$$\delta p = -\rho\frac{\tilde{D}\phi}{Dt} + \rho\delta\mathcal{H} \tag{5.22}$$

5.2.2 Equations de Navier-Stokes

On s'intéresse maintenant à l'équation de Navier-Stokes, pour écrire une équation de conservation de l'énergie E du champ aérodynamique. L'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = -\nabla h + \nu\left[\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla\left(\nabla.\mathbf{u}\right)\right] \tag{5.23}$$

On suppose ici l'écoulement aérodynamique incompressible. En insérant la décomposition du champ de vitesse précédemment introduite (5.18), on obtient une équation analogue à (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u_s}}{\partial t} + \mathbf{u_s}.\nabla\mathbf{u_s} + \nabla\mathcal{H} &= -\omega\times\nabla\phi + \nu\nabla^2\mathbf{u_s} \\ \nabla.\mathbf{u_s} &= 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

On se propose alors d'écrire une équation intégrale de conservation de l'énergie cinétique E du champ aérodynamique:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\mathbf{u_s}^2}{2}dv = \int_V \mathbf{u_s}.\frac{\partial \mathbf{u_s}}{\partial t}dv$$

En injectant l'équation de Navier-Stokes (5.24), et en utilisant la relation $\nabla.\mathbf{u_s} = 0$, il vient alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_V \nabla.\left[-\frac{\mathbf{u_s}^2}{2}\mathbf{u_s} - \mathcal{H}\mathbf{u_s} + \nu\nabla\left(\frac{\mathbf{u_s}^2}{2}\right)\right]dv \\ &- \int_V\left[\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mathbf{u_s}.\left(\omega\times\nabla\phi\right)\right]dv \end{aligned}$$

Le théorème de la divergence appliqué au premier terme, transforme cette intégrale de volume en une intégrale de surface, nulle en supposant le champ aérodynamique $\mathbf{u_s}$ également nul sur les frontières du volume de contrôle V. L'équation de conservation de E s'écrit finalement:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nu\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dv - \int_V \mathbf{u_s}.\left(\omega\times\nabla\phi\right)dv \tag{5.25}$$

Dans cette équation, le premier terme représente la dissipation ϵ de l'énergie cinétique par effets visqueux. Le second représente un terme de transfert entre le mode acoustique et le mode tourbillonnaire. Ce sont les deux seuls mécanismes responsables de la variation de E. Le terme d'interaction acoustique - vorticité s'écrit encore:

$$-\nabla\phi.\left(\mathbf{u_s}\times\omega\right)$$

Pour avoir un rayonnement acoustique possible, il faut d'une part que la vorticité ω soit non nulle, et d'autre part, que l'accélération $\mathbf{u_s}\times\omega$ soit aussi non nulle. C'est à ces seules conditions qu'un champ aérodynamique échange une partie de son énergie E en un rayonnement acoustique.

5.2.3 Equations d'Euler linéarisées

On exploite maintenant ces idées pour l'étude des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire $\mathbf{u_o}$. On suppose l'écoulement aérodynamique *incompressible*, ce qui est le cas généralement lorsque l'on construit par exemple un champ turbulent stochastique pour un nombre de Mach des fluctuations faible. Cette hypothèse permet de décomposer alors le champ de vitesse en $\mathbf{u} = \mathbf{u_o} + \mathbf{u}'$, avec:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u_s} + \mathbf{u_d} \\ \nabla.\mathbf{u_s} &= \nabla.(\nabla \times \Psi) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u_d} &= \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \\ \omega &= \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u_s} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Cette décomposition est unique si le problème aux limites est bien posé, ce qui est le cas puisque le champ de vitesse aérodynamique est nul aux limites. L'objectif est ici de préciser les conditions pour que ces deux modes soient découplés, l'excitation du mode tourbillonnaire ne pouvant alors venir que des conditions initiales, aux limites, ou encore de termes sources.

Les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire localement isentropique s'écrivent:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u_o}.\nabla p + \mathbf{u}.\nabla p_o + \gamma p_o \nabla.\mathbf{u} + \gamma p \nabla.\mathbf{u_o} = 0 \\ &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u_o}.\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u_o} + \frac{1}{\rho_o}\nabla p - \frac{p}{\rho_o^2 c_o^2}\nabla p_o = \mathbf{S} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Le terme source de vitesse est décomposé de la même manière que le champ de vitesse, et s'écrit alors:

$$\mathbf{S} = \nabla \phi_s + \nabla \times \Psi_s = \mathbf{S_s} + \mathbf{S_d}$$

On se propose tout d'abord de former l'équation de transport associée au mode tourbillonnaire, et l'équation de propagation associée au système (5.27). Le problème est un peu différent de ce qui a été fait plus haut dans le sens où la partie moyenne de l'écoulement n'est plus incluse dans $\mathbf{u_s}$. Pour développer les calculs, on se place en deux dimensions, et on suppose *les champs moyens de pression et de vitesse uniformes.* Le découplage entre les deux modes n'est possible que dans ces conditions. Même la simple hypothèse d'un écoulement moyen unidirectionnel cisaillé produit des termes de couplages entre les modes acoustique et tourbillonnaire.

L'équation de transport pour ω s'obtient en prenant le rotationnel de l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u_o}.\nabla \omega = \nabla \times (\nabla \times \Psi_s)$$

et l'équation de propagation associée à (5.27) s'écrit:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \mathbf{u_o}.\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) - \gamma p_o \mathbf{u_o}.\nabla\left(\nabla^2\phi\right) - c_o^2\nabla^2 p = -\gamma p_o \nabla^2 \phi_s$$

Les deux équations précédentes relatives respectivement à la vorticité, et au potentiel scalaire acoustique, sont totalement découplées. Il n'y a pas de transfert d'énergie entre les deux modes, et la présence d'une vorticité non nulle est due dans ce cas:

- soit au champ de vitesse initial (ou encore des conditions aux limites),
- soit à la partie rotationnelle du terme source de vitesse $\mathbf{S}$, qui excite le mode rotationnel.

5.3 Equations d'Euler linéarisées pour l'aéroacoustique

5.3.1 Deux formulations pour les équations d'Euler

Le système des équations d'Euler s'écrit avec les variables primitives:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} + \gamma p\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.28}$$

La linéarisation autour d'un écoulement moyen stationnaire $(\mathbf{u_o}, p_o, \rho_o)$, en supposant toutes les fluctuations autour de cet écoulement isentropiques, s'écrit alors (c'est le système 5.27):

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial p'}{\partial t} + u_{jo}\dfrac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\dfrac{\partial p_o}{\partial x_j} + \gamma p_o\dfrac{\partial u_j'}{\partial x_j} + \gamma p'\dfrac{\partial u_{jo}}{\partial x_j} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_i'}{\partial t} + u_{jo}\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j'\dfrac{\partial u_{io}}{\partial x_j} + \dfrac{1}{\rho_o}\dfrac{\partial p'}{\partial x_i} - \dfrac{p'}{\rho_o^2 c_o^2}\dfrac{\partial p_o}{\partial x_i} & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.29}$$

où on a utilisé les deux relations:

$$p' = c_o^2\rho' \text{ et } c_o^2 = \frac{\gamma p_o}{\rho_o}$$

Il est possible de reformuler les deux systèmes (5.28) et (5.29) avec les variables $(\mathbf{u}, \pi, c)$. Ainsi, le système des équations d'Euler s'écrit encore:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d\pi}{dt}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}+c^2 u_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{c^2}\right) & = & 0\\[2ex] \dfrac{du_i}{dt}+\dfrac{c^2}{\gamma}\dfrac{\partial\pi}{\partial x_i} & = & 0\\[2ex] (\gamma-1)\dfrac{d\pi}{dt}+\gamma c^2 u_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{c^2}\right) & = & 0\end{array}\right. \tag{5.30}$$

De même, le système des équations d'Euler linéarisées analogue à (5.29) s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial\pi'}{\partial t}+u_{jo}\dfrac{\partial\pi'}{\partial x_j}+u'_j\dfrac{\partial\pi_o}{\partial x_j}+\gamma\dfrac{\partial u'_j}{\partial x_j} & = & 0\\[2ex] \dfrac{\partial u'_i}{\partial t}+u_{jo}\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j}+u'_j\dfrac{\partial u_{io}}{\partial x_j}+\dfrac{c_o^2}{\gamma}\dfrac{\partial\pi'}{\partial x_i}+\dfrac{c'^2}{\gamma}\dfrac{\partial\pi_o}{\partial x_i} & = & 0\end{array}\right. \tag{5.31}$$

Les deux systèmes (5.29) et (5.31) sont équivalents. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire pour π:

$$\pi=\pi_o+\pi'=\ln(p_o+p')\simeq\ln p_o+\frac{p'}{p_o}$$

et pour la célérité c:

$$c^2=c_o^2+c'^2=\gamma\frac{p_o+p'}{\rho_o+\rho'}\simeq c_o^2\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p'}{p_o}\right)$$

5.3.2 Equation des ondes associée

Dans cette section, on introduit la décomposition suivante des variables $(\mathbf{u},\pi,c)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbf{u} & = & \mathbf{u_o}+\mathbf{u}'=\mathbf{u_o}+\mathbf{u_t}+\mathbf{u_a}\\[2ex] \pi & = & \pi_o+\pi'=\pi_o+\pi_t+\pi_a\\[2ex] c^2 & = & c_o^2+c'^2=c_o^2+c_t^2+c_a^2\end{array}\right. \tag{5.32}$$

Cette décomposition fait référence à la section précédente, où on identifie des fluctuations de pression en champ proche ou fluctuations hydrodynamiques, à l'origine du pseudo-son, et des fluctuations acoustiques. Ainsi, en un point situé au voisinage de la région source, on observe des fluctuations de pression $\pi'=\pi_t+\pi_a$ alors qu'en un point situé en champ lointain, on ne perçoit que les fluctuations acoustiques $\pi'=\pi_a$. On suppose que le champ hydrodynamique est d'un ordre de grandeur plus élevé que l'acoustique.

L'objectif est ici d'introduire cette décomposition dans l'équation de propagation associée aux équations d'Euler (5.31), puis de linéariser ce système. On rappelle que l'équation des ondes déduite des équations d'Euler s'obtient par la combinaison:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d\pi}{dt}+\gamma\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right\}-\gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{du_i}{dt}+\frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\right\}=0$$

soit finalement:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\right)=\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{5.33}$$

On s'intéresse dans un premier temps au terme suivant:

$$\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\gamma\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}=2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}+\gamma\left\{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}-\overline{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}}\right\}+2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{ja}}{\partial x_i}$$

Dans cette approximation, on ne conserve que les termes linéaires en fluctuations acoustiques ou turbulentes, et les termes quadratiques en fluctuations turbulentes. Les termes *non linéaires en fluctuations acoustiques* sont négligés. On introduit alors l'opérateur de dérivation suivant l'écoulement moyen:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_{jo}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

et le terme S:

$$S=2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}+\gamma\left\{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}-\overline{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}}\right\}$$

En reprenant le développement de l'équation (5.33), on écrit:

$$\frac{D^2\pi}{Dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\right)-2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{ja}}{\partial x_i}=S+\frac{D^2\pi}{Dt^2}-\frac{d^2\pi}{dt^2}+\overline{\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial\pi}{\partial x_i}\right)} \tag{5.34}$$

Cette expression prend alors la forme suivante, en introduisant la décomposition du logarithme de la pression, dans un premier temps dans le second membre:

$$\begin{aligned}\frac{D^2\pi}{Dt^2}-\frac{d^2\pi}{dt^2}&=-\frac{D}{Dt}\left(u_{ia}\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}\right)-u_{ja}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{io}\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}\right)\\&-\left\{\frac{D}{Dt}\left(u_{it}\frac{\partial(\pi_o+\pi_t)}{\partial x_i}\right)+u_{jt}\frac{\partial^2\pi_t}{\partial x_j\partial t}+u_{jt}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{io}\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}+u_{it}\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}+u_{io}\frac{\partial\pi_t}{\partial x_i}\right)\right\}\end{aligned}$$

Finalement, l'équation (5.34) s'écrit explicitement:

$$\begin{aligned}&\frac{D^2\pi'}{Dt^2}+\frac{D}{Dt}\left(u_i'\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}\right)+u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{io}\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial\pi'}{\partial x_i}+c'^2\frac{\partial\pi_o}{\partial x_i}\right)-2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\\&=\gamma\left\{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}-\overline{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}}\right\}\end{aligned}$$

$$
-\left\{\frac{D}{Dt}\left(u_{it}\frac{\partial \pi_t}{\partial x_i}\right)+u_{jt}\frac{\partial^2 \pi_t}{\partial x_j \partial t}+u_{jt}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{it}\frac{\partial \pi_o}{\partial x_i}+u_{io}\frac{\partial \pi_t}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_t^2\frac{\partial \pi_t}{\partial x_i}\right)\right\}
$$

$$
+\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)-\frac{D^2\pi_o}{Dt^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi_o}{\partial x_i}\right)
$$

Cette équation s'écrit schématiquement: [1] = [2] + [3] + [4]. Détaillons ces 4 termes:

- [1] est l'opérateur de propagation associé aux équations d'Euler (5.31) linéarisées autour de l'écoulement moyen stationnaire $(\mathbf{u_o}, \pi_o, c_o)$ et appliqué au champ fluctuant $(\mathbf{u}', \pi', c')$.

- [2] est interprété comme un terme source pour l'aéroacoustique. La composante continue assure que le terme source soit à moyenne nulle, puisqu'il est quadratique en fluctuations.

- [3] représente une partie de la diffusion et de la diffraction du champ turbulent en interaction avec avec lui même, et avec l'écoulement moyen. Ce terme est négligeable moyennant les hypothèses suivantes: tout d'abord, on suppose les gradients moyens de la pression négligeables. Cette hypothèse est réaliste pour le cas des écoulements libres que nous traitons par la suite. De plus, en effectuant une analyse d'ordre de grandeur des termes à gauche de l'équation de propagation:

$$
\begin{aligned}
u_t &\sim \epsilon U_o \\
\pi_t &\sim \frac{\delta p}{p_o} \sim \frac{c_o^2 \delta \rho}{p_o} \sim \frac{\rho_o}{p_o}\epsilon^2 U_o^2
\end{aligned}
$$

  On observe que l'on a conservé dans le terme source, les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 en fluctuations. Par conséquent, [3] sera toujours négligé par la suite.

- [4] est un terme continu, assurant la moyenne nulle du terme [2], non linéaire en fluctuations turbulentes.

Finalement, l'équation de propagation précédente se réduit à:

$$
\frac{D^2\pi'}{Dt^2}+\frac{D}{Dt}\left(u_i'\frac{\partial \pi_o}{\partial x_i}\right)+u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{io}\frac{\partial \pi_o}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_o^2\frac{\partial \pi'}{\partial x_i}+c'^2\frac{\partial \pi_o}{\partial x_i}\right)-2\gamma\frac{\partial u_{io}}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}
$$

$$
=\gamma\left\{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}-\overline{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}}\right\} \tag{5.35}
$$

5.3.3 Equations finalement résolues pour le calcul du champ acoustique

On donne ici l'expression finalement retenue du terme source pour le système des équations d'Euler linéarisées associé à l'équation de propagation (5.35). Le terme source S:

$$\gamma \left\{ \frac{\partial u_{it}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{jt}}{\partial x_i}} \right\}$$

s'écrit encore, en supposant le champ turbulent à divergence nulle $\nabla.\mathbf{u_t} = 0$:

$$S = -\gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -u_{jt} \frac{\partial u_{it}}{\partial x_j} - \overline{u_{jt} \frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}} \right\}$$

On déduit alors les deux systèmes suivants:

- Système formulé avec les variables $(\mathbf{u}, \pi, c)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \pi'}{\partial t} + u_{jo} \dfrac{\partial \pi'}{\partial x_j} + u'_j \dfrac{\partial \pi_o}{\partial x_j} + \gamma \dfrac{\partial u'_j}{\partial x_j} & = & 0 \\ \dfrac{\partial u'_i}{\partial t} + u_{jo} \dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \dfrac{\partial u_{io}}{\partial x_j} + \dfrac{c_o^2}{\gamma} \dfrac{\partial \pi'}{\partial x_i} + \dfrac{c'^2}{\gamma} \dfrac{\partial \pi_o}{\partial x_i} & = & S_i \end{array} \right. \tag{5.36}$$

- Système formulé avec les variables $(\mathbf{u}, p, \rho)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial p'}{\partial t} + u_{jo} \dfrac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \dfrac{\partial p_o}{\partial x_j} + \gamma p_o \dfrac{\partial u'_j}{\partial x_j} + \gamma p' \dfrac{\partial u_{jo}}{\partial x_j} & = & 0 \\ \dfrac{\partial u'_i}{\partial t} + u_{jo} \dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \dfrac{\partial u_{io}}{\partial x_j} + \dfrac{1}{\rho_o} \dfrac{\partial p'}{\partial x_i} - \dfrac{p'}{\rho_o^2 c_o^2} \dfrac{\partial p_o}{\partial x_i} & = & S_i \end{array} \right. \tag{5.37}$$

avec pour S_i l'expression suivante, identique dans les deux cas:

$$S_i = - \left\{ u_{jt} \frac{\partial u_{it}}{\partial x_j} - \overline{u_{jt} \frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}} \right\}$$

5.4 Retour sur l'équation des ondes de Lighthill

Dans cette dernière section, on s'intéresse de nouveau à l'équation des ondes de Lighthill (5.1) avec pour objectif de retrouver l'expression du terme source retenu dans la section précédente, et de préciser le rôle du terme de bruit de cisaillement[14], considéré comme terme source dans l'équation de Lighthill.

Dans la suite, on considère un écoulement moyen unidirectionnel cisaillé, où la pression et la masse volumique moyennes sont supposées uniformes. De plus, les contraintes visqueuses peuvent être négligées sans restreindre notre propos, notre attention se portant sur l'opérateur de propagation. L'équation des ondes de Lighthill s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 (\rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \nabla^2 p - c_o^2 \nabla^2 \rho$$

Soit encore:

$$\frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2 (\rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - c_o^2 \rho\right)$$

En injectant la décomposition du champ de vitesse $u_i = U(x_2)\,\delta_{1i} + u_i'$ dans le tenseur de Reynolds, il vient:

$$\frac{\partial^2 (\rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = U^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \left(\rho u_j' U\right)}{\partial x_1 \partial x_j} + \rho \frac{\partial^2 \left(u_i' u_j'\right)}{\partial x_i \partial x_j} + u_i' u_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}$$

Développons les deux termes suivants de cette expression, en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité pour le champ $\mathbf{u}'$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \left(u_i' u_j'\right)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2u_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \\
&\simeq \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
2u_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} &= 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left[U \frac{\partial \left(\rho u_j'\right)}{\partial x_1}\right] \\
&= 2\rho \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + 2u_2' \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + 2U u_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_1} + 2\rho U \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \\
&\simeq 2\rho \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + 2u_2' \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + 2U u_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_1}
\end{aligned}$$

Dans ces simplifications, nous avons utilisé l'hypothèse d'un champ turbulent incompressible: $\nabla.\mathbf{u}' = 0$. Reprenons alors l'écriture de l'équation de propagation de Lighthill:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p &= \rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2\rho \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + U^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - c_o^2 \rho\right) \\
&\quad + 2u_2' \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + 2U u_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_1} + u_i' u_j' \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\simeq \overline{\rho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2\overline{\rho} \frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + U^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - c_o^2 \rho\right)
\end{aligned}$$

En notant l'opérateur de dérivation en suivant l'écoulement moyen D/Dt:

$$\frac{D^2}{Dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t} + U^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

l'expression précédente s'écrit encore:

$$\frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p \simeq \overline{\rho}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2\overline{\rho}\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} - \frac{D^2\rho}{Dt^2} + 2U\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial t} + 2U^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} + \frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Il est encore possible de simplifier cette expression en tenant compte de l'équation de conservation de la masse:

$$2U\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial t} + 2U^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} = 2U\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + U\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right] = -2U\overline{\rho}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \simeq 0$$

Finalement, l'équation de propagation des ondes de Lighthill prend la forme suivante:

$$\frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p \simeq \overline{\rho}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2\overline{\rho}\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} - \frac{D^2\rho}{Dt^2} + \frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (5.38)$$

ou encore:

$$\frac{1}{c_o^2}\frac{D^2\rho}{Dt^2} - 2\overline{\rho}\frac{dU}{dx_2}\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} - \nabla^2 p \simeq \overline{\rho}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \qquad (5.39)$$

Cette dernière équation est à comparer à (5.6), dérivée de l'équation des ondes de Phillips. On reconnait à gauche l'opérateur de propagation, que l'on forme par linéarisation des équations d'Euler autour de l'écoulement moyen stationnaire considéré. L'approximation de plus bas ordre qui puisse être faite pour l'expression du terme source, dans le cadre d'une analogie acoustique, conduit finalement à (5.39).

Références

[1]**Lighthill, M.J.**, 1952, "On sound generated aerodynamically - I. General theory," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 211, Ser. A, 1107, pp. 564-587.

[2]**Lighthill, M.J.**, 1954, "On sound generated aerodynamically - II. Turbulence as a source of sound," *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 222, Ser. A, 1148, pp. 1-32.

[3]**Phillips, O.M.**, 1960, "On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 9(1), pp. 1-28.

[4]**Pao, S.P.**, 1971, "A generalized theory on the noise generation from supersonic shear layers," *J. Sound Vib.*, Vol. 19(4), pp. 401-410.

[5]**Lilley, G.M.**, 1972, "The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region," *Air Force Aero Propulsion Laboratory*, AFAPL-TR-72-53.

[6]**Doak, P.E.**, 1972, "Analysis of internally generated sound in continuous materials: 2. A critical review of the conceptual adequacy and physical scope of existing theories of aerodynamic noise, with special reference to supersonic jet noise," *J. Sound Vib.*, Vol. 25(2), pp. 263-335.

[7]**Goldstein, M.E.**, 1976, "Aeroacoustics," *McGraw-Hill*, New York.

[8]**Chu, B.T. & Kovasznay, L.G.S.**, 1958, "Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas," *J. Fluid Mech.*, Vol. 3(5), pp. 494-514.

[9]**Ribner, H.S.**, 1964, "The generation of sound by turbulent jets," *Academic Press*, Vol. VIII, pp. 103-182.

[10]**Crow, S.C.**, 1970, "Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem," *Studies in Applied Math.*, Vol. 49(1), pp. 21-44.

[11]**Howe, M.S.**, 1975, "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute," *J. Fluid Mech.*, Vol. 71(4), pp. 625-673.

[12]**Yates, J.E.**, 1978, "Application of the Bernoulli enthalpy concept to the study of vortex noise and jet impingement noise," *NASA*, Report 2987.

[13]**Colonius, T, Lele, S.K. & Moin, P.**. 1993, "Direct computation of the sound generated by a two-dimensional shear layer," *15th Aeroacoustics Conference*, Long Beach, CA, October 25-27, AIAA-93-4328.

[14]**Ribner, H.S.**, 1977, "On the role of the shear term in jet noise," *J. Sound Vib.*, Vol. 52(1), pp. 121-132.

Chapitre 6

Modèle SNGR - Application au cas d'un jet libre subsonique

Ce chapitre est consacré d'une part à la construction d'un champ turbulent spatio-temporel permettant de calculer le terme source S_i du système (5.37) identifié au chapitre précédent pour les équations d'Euler linéarisées, et d'autre part à appliquer cette démarche au cas d'un jet libre subsonique déjà étudié dans la première partie.

Pour ce chapitre, on suppose que les caractéristiques locales de l'écoulement moyen stationnaire sont connues. La vitesse, la pression, la température, la masse volumique, ainsi que l'énergie cinétique turbulente k et son taux de dissipation ϵ sont déterminés au moyen d'un calcul prélable. Ces grandeurs sont ensuite utilisées pour synthétiser un champ turbulent spatio-temporel et dans un second temps comme paramètres d'entrée pour le calcul de propagation.

6.1 Champ turbulent spatial synthétique

Pour synthétiser un champ turbulent spatial, on se propose d'utiliser sa représentation dans l'espace de Fourier[†]. Le champ turbulent tridimensionnel $\mathbf{u}$ est décrit par la représentation de Fourier suivante[‡]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d\mathbf{k} = \int \left[\tilde{u}(\mathbf{k})\, e^{i\psi(\mathbf{k})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k})\right] e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

Le champ de vitesse $\mathbf{u}$ étant réel, on a:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int \left\{\tilde{u}(\mathbf{k})\, e^{i[\mathbf{k}.\mathbf{x}+\psi(\mathbf{k})]} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}) + \tilde{u}(\mathbf{k})\, e^{-i[\mathbf{k}.\mathbf{x}+\psi(\mathbf{k})]} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k})\right\} d\mathbf{k}$$

Cette relation est alors discrétisée en N *modes de Fourier aléatoires* sur un demi-espace spectral:

[†] Cette représentation est utilisée entre autres par Kraichnan[1], Drummond[2] *et al.* pour étudier la diffusion de particules par un champ turbulent, et par Karweit[3] *et al.* pour étudier la propagation d'une onde acoustique dans un milieu turbulent.

[‡] Pour alléger les notations, le champ n'est plus désigné par $\mathbf{u}_t$, mais seulement par $\mathbf{u}$.

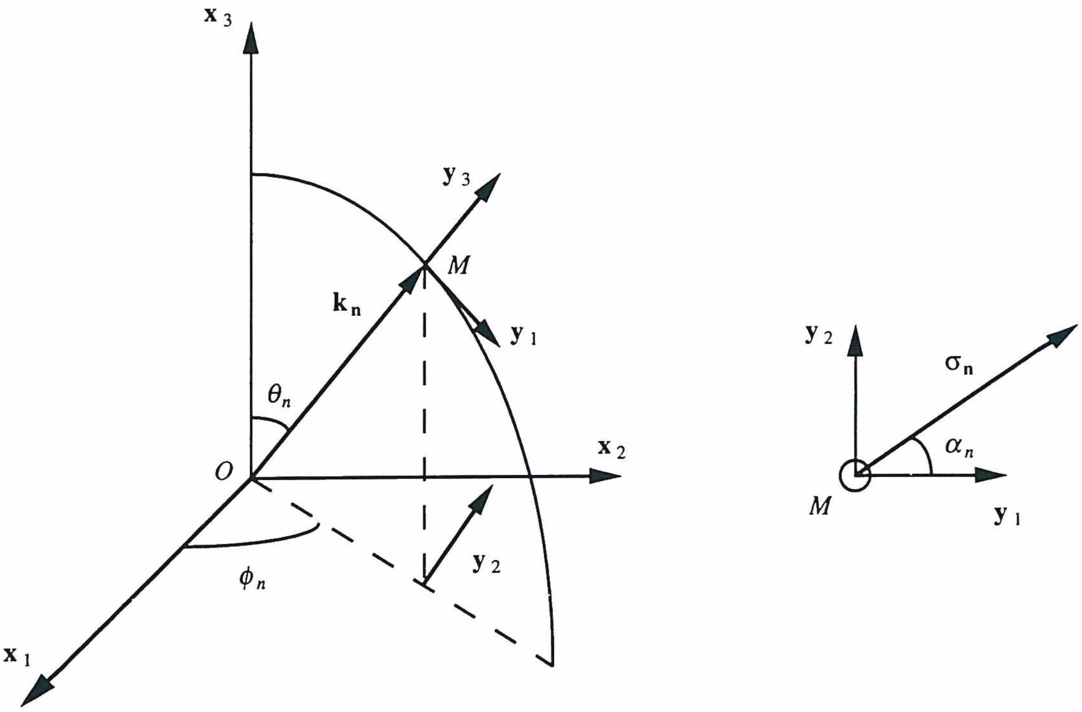


Figure 6.1: Notations adoptées.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n \cos(\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n)\, \boldsymbol{\sigma}_n \tag{6.1}$$

où $\tilde{u}_n$, ψ_n, $\mathbf{k_n}$, et $\boldsymbol{\sigma}_n$ sont respectivement le module de la vitesse dans l'espace de Fourier, la phase de cette quantité, le nombre d'onde et le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\tilde{\mathbf{u}}_n$, associés au mode n. En imposant à ce champ turbulent d'être incompressible, on obtient immédiatement:

$$\nabla.\mathbf{u} = -2 \sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n \sin(\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n)\, \mathbf{k_n}.\boldsymbol{\sigma}_n = 0$$

Autrement dit, la direction du vecteur unitaire $\boldsymbol{\sigma}_n$ portant le mode n dans l'espace physique doit être perpendiculaire au vecteur d'onde $\mathbf{k_n}$. En tenant compte de cette contrainte, on adopte alors les notations de la figure 6.1. Les coordonnées des vecteurs $\mathbf{k_n}$ et $\boldsymbol{\sigma}_n$ sont ainsi données par:

$$\mathbf{k_n} = \mathrm{k}_n \left| \begin{array}{l} \sin\theta_n \cos\phi_n \\ \sin\theta_n \sin\phi_n \\ \cos\theta_n \end{array} \right. \qquad \boldsymbol{\sigma}_n = \left| \begin{array}{l} \cos\alpha_n \sin\theta_n \cos\phi_n - \sin\alpha_n \sin\phi_n \\ \cos\alpha_n \sin\theta_n \sin\phi_n + \sin\alpha_n \cos\phi_n \\ -\cos\alpha_n \cos\theta_n \end{array} \right.$$

L'isotropie s'obtient en ne donnant aucune direction privilégiée au vecteur $\mathbf{k_n}$ sur la sphère de rayon k_n. D'autre part, on ne considère ici qu'un demi-espace spectral d'après

(6.1). L'equiprobabilité est assurée en égalant $dS/2\pi \mathrm{k}_n^2$ à $p(\mathbf{k_n})d\mathbf{k_n}$. Les densités de probabilité des variables aléatoires θ et ϕ doivent donc vérifier:

$$\frac{\mathrm{k}\sin\theta d\phi \mathrm{k} d\theta}{2\pi \mathrm{k}^2} = p(\theta)\, d\theta p(\phi)\, d\phi$$

Finalement, l'isotropie du champ peut être obtenue avec le choix suivant des lois de probabilité:

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta \qquad p(\phi) = \frac{1}{\pi} \qquad p(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Enfin, en choisissant ψ uniforme entre 0 et 2π, on assure un champ homogène, i.e. aucune dépendance par rapport à l'origine du repère[†]. On a ainsi construit avec ces choix un champ *isotrope et homogène*. Calculons alors l'énergie cinétique de ce champ de vitesse. En désignant par — l'espérance mathématique:

$$\frac{1}{2}\overline{\mathbf{u^2}} = 2\sum_n \sum_m \tilde{u}_n \tilde{u}_m \overline{[\cos(\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n)\cos(\mathbf{k_m}.\mathbf{x} + \psi_m)\,\boldsymbol{\sigma}_n.\boldsymbol{\sigma}_m]}$$

En remarquant l'*indépendance des N modes*, on effectue en effet N réalisations indépendantes pour les variables α, θ, ϕ et ψ, la double somme se réduit simplement à:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{\mathbf{u^2}} &= 2\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{[\cos^2(\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n)]} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2
\end{aligned}$$

Le spectre $E(\mathrm{k})$ de l'énergie turbulente est supposé connu. Il est donné par l'expression de Von Kármán modifiée, pour tenir compte de l'influence des échelles dissipatives (voir Annexe A). Finalement, par discrétisation de ce spectre:

$$\tilde{u}_n = \sqrt{E(\mathrm{k}_n)\Delta \mathrm{k}_n} \tag{6.2}$$

Numériquement, le spectre est discrétisé de la manière suivante, connaissant k_{min}, k_{max} et le nombre de modes N:

$$\begin{aligned}
d\mathrm{k}_l &= \frac{\ln \mathrm{k}_{max} - \ln \mathrm{k}_{min}}{N-1} \\
\mathrm{k}_n &= \exp[\ln \mathrm{k}_{min} + (n-1)\, d\mathrm{k}_l] \text{ pour } n = 1, \ldots, N \\
d\mathrm{k}_n &= \mathrm{k}_{min}[\exp(nd\mathrm{k}_l) - \exp((n-1)\, d\mathrm{k}_l)] \text{ pour } n = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

[†]On essaie de distinguer sans alourdir les notations, la variable aléatoire x suivant une loi de probabilité $p(x)$ de ses N réalisations x_n.

On privilégie de cette manière la discrétisation des grosses structures, i.e. des petits nombres d'onde. La figure 6.2 donne la représentation d'une réalisation du champ turbulent. Ce champ *synthétique isotrope* possède les propriétés suivantes:

- Les moments d'ordre 1 et 2 sont donnés par:

$$\begin{aligned}\overline{u_i} &= 0\\ \overline{u_i u_j} &= \frac{2}{3}k\delta_{ij}\end{aligned}$$

  L'évolution de l'erreur en fonction du nombre de réalisations N_r est tracée sur les figures 6.3 et 6.4. On observe que cette erreur décroit en $1/\sqrt{N_r}$ et suit bien le théorème central limite. De plus, on note que le champ ainsi obtenu est gaussien. Le facteur de dissymétrie S_i est nul:

$$S_i = \frac{\overline{u_i^3}}{\overline{u_i^2}^{3/2}} = 0$$

  et le facteur d'applatissement T_i vaut 3:

$$T_i = \frac{\overline{u_i^4}}{\overline{u_i^2}^2} = 3$$

  Ces deux quantités sont tracées sur les figures 6.5 et 6.6, en fonction du nombre de réalisations N_r.

- Les fonctions de corrélation longitudinale f et transversale g dont l'expression théorique est connue dans le cas d'une turbulence isotrope (voir annexe A):

$$\begin{aligned}f(r) &= \frac{2}{\overline{u^2}}\int_0^\infty \left(\frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^3r^3} - \frac{\cos(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^2r^2}\right)E(\mathrm{k})d\mathrm{k}\\ g(r) &= \frac{1}{\overline{u^2}}\int_0^\infty \left(\frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}r} - \frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^3r^3} + \frac{\cos(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^2r^2}\right)E(\mathrm{k})d\mathrm{k}\end{aligned}$$

  sont calculées pour le champ isotrope synthétique, et estimées à partir des deux relations suivantes (voir figures 6.7 et 6.8), de Kármán et Howarth:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{11}(r,0,0) &= \overline{u^2}f(r) = \overline{u_1(0,0,0)u_1(r,0,0)}\\ \mathcal{R}_{11}(0,r,0) &= \overline{u^2}g(r) = \overline{u_1(0,0,0)u_1(0,r,0)}\end{aligned}$$

Finalement, toutes ces estimations montrent que le champ synthétique construit à partir d'un spectre de l'énergie turbulente, est bien statistiquement isotrope.

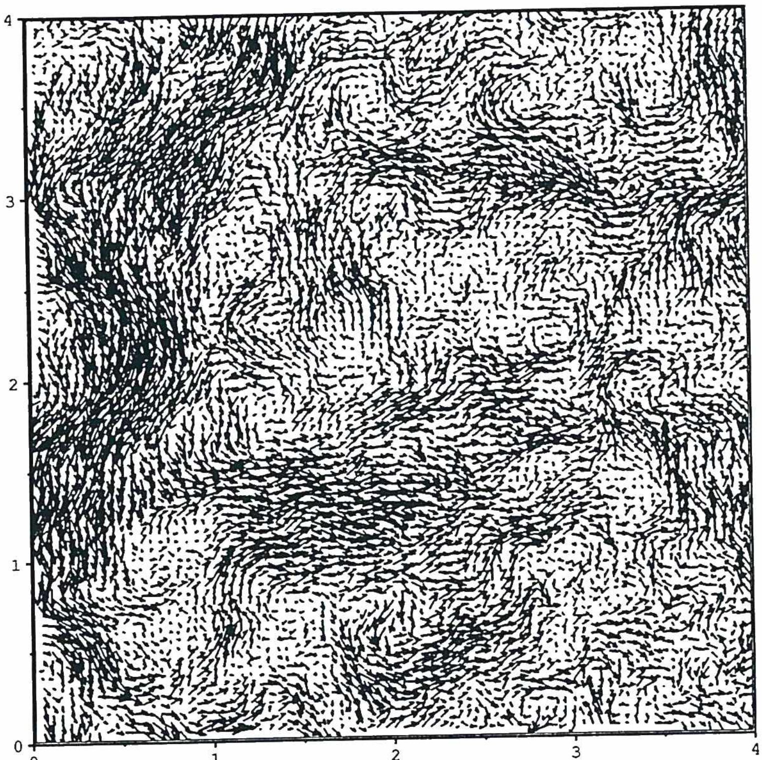


Figure 6.2: Une réalisation du champ turbulent isotrope avec $N = 200$ modes, $k = 900$ $m^2.s^{-2}$ et $\epsilon = 1.5 \times 10^6$ $m^2.s^{-3}$. La taille du domaine représenté égale 4 fois la longueur intégrale de corrélation.

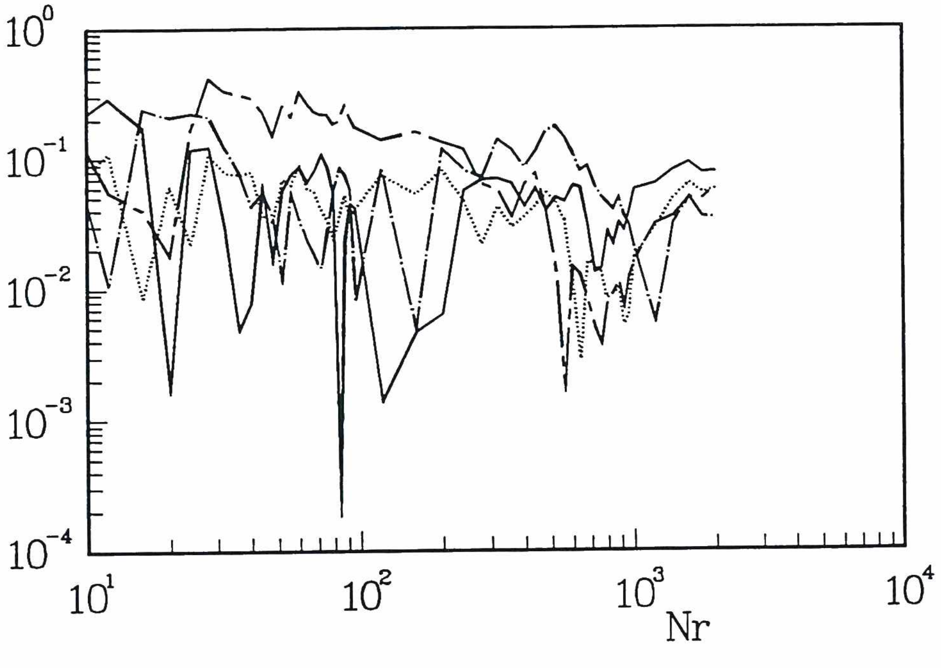


Figure 6.3: Evolution de l'erreur sur $\overline{u_i^2}$: —— $\overline{u_1^2}$, — - — $\overline{u_2^2}$, —·— $\overline{u_3^2}$, ········ k.

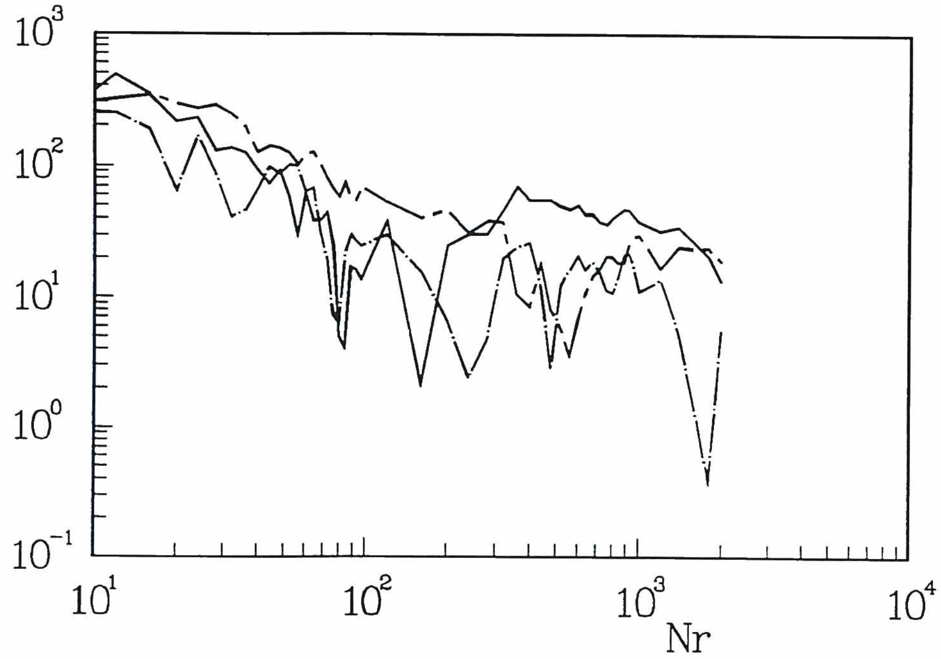


Figure 6.4: Evolution de l'erreur sur $\overline{u_i u_j}$: — $\overline{u_1 u_2}$, - - - $\overline{u_1 u_3}$, — · — $\overline{u_2 u_3}$.

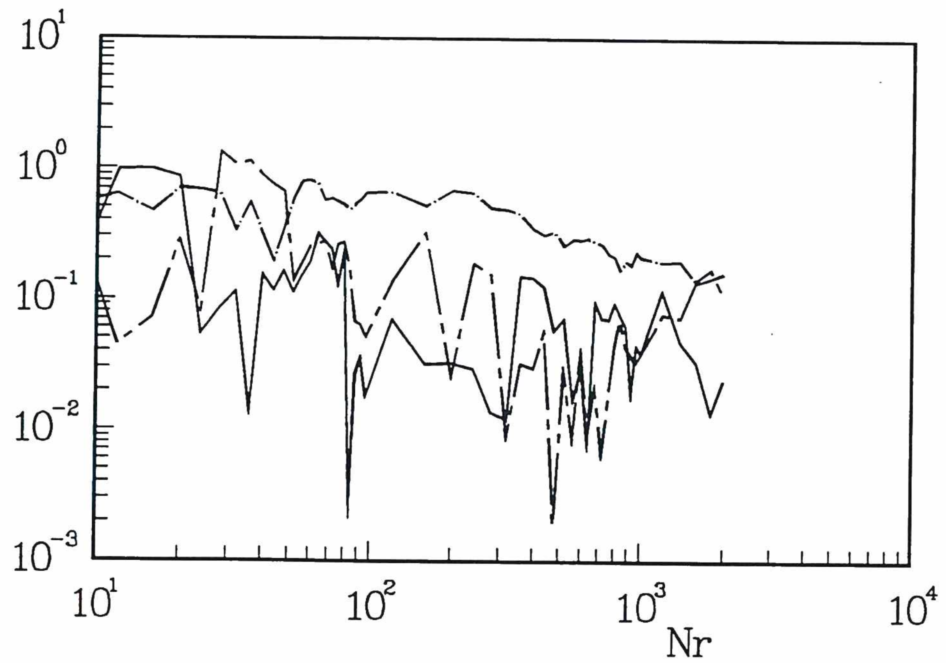


Figure 6.5: Calcul du facteur de dissymétrie S_i: — S_1, - - - S_2, — · — S_3.

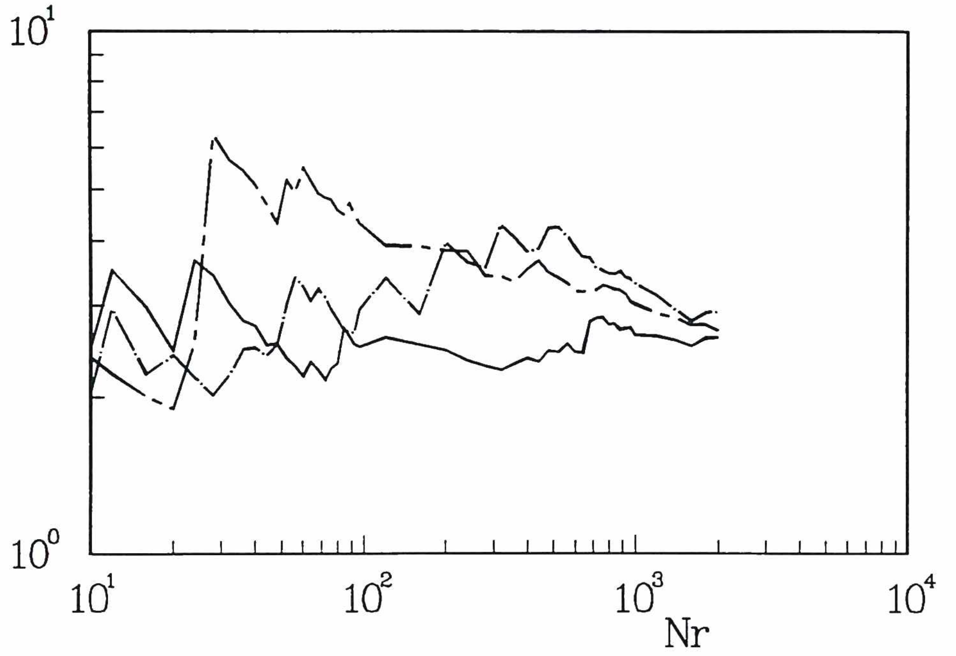


Figure 6.6: Calcul du facteur d'applatissement T_i: — T_1, –·– T_2, —·— T_3.

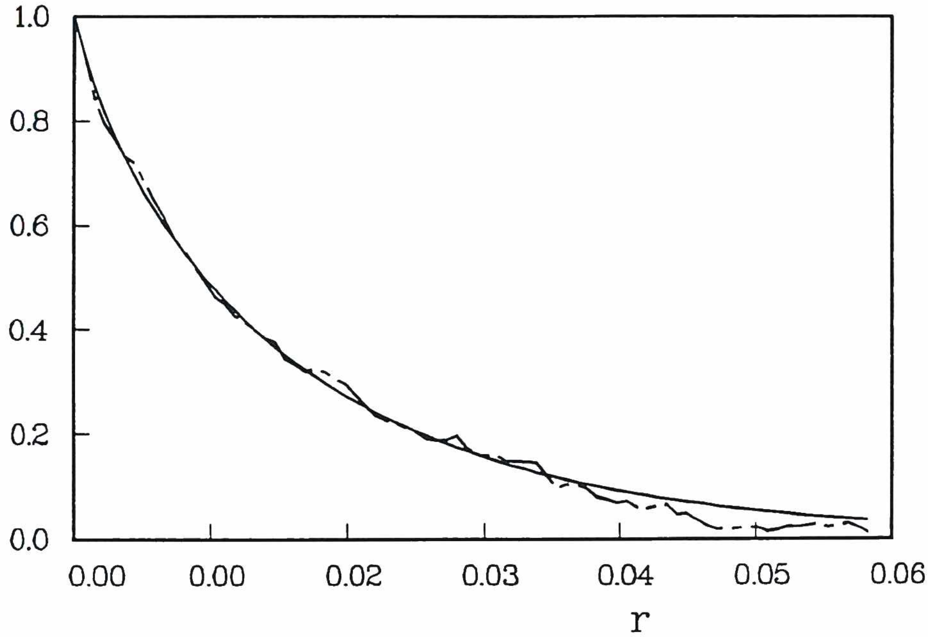


Figure 6.7: Calcul de la fonction de corrélation longitudinale f. — analytique, –·– simulation.

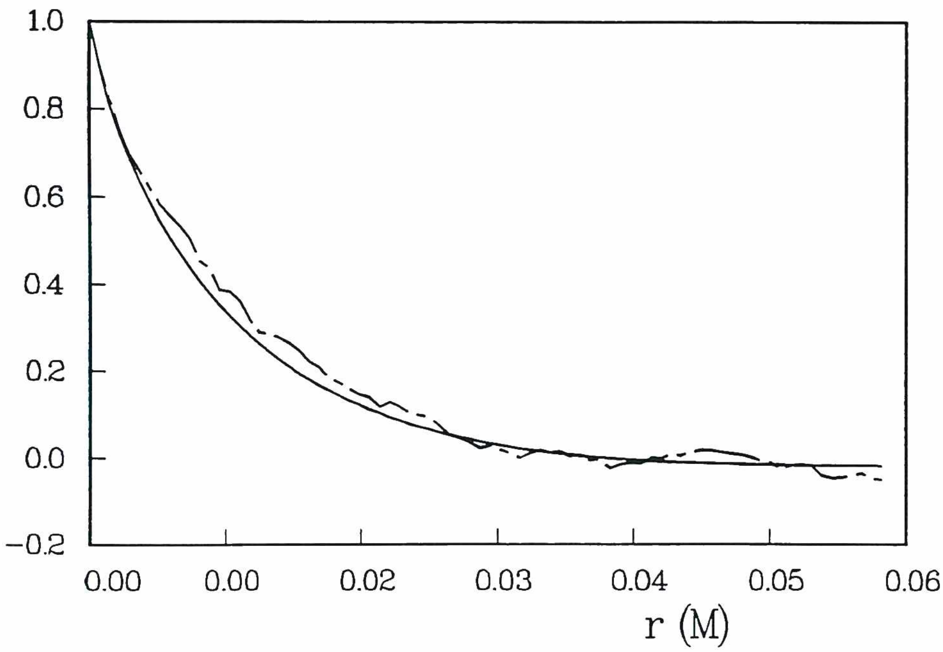


Figure 6.8: Calcul de la fonction de corrélation transversale g. — analytique, — - — simulation.

6.2 Champ turbulent spatio-temporel synthétique

On souhaite maintenant donner une évolution temporelle à ce champ. Deux éléments sont à prendre en compte:

- La convection du champ turbulent par l'écoulement moyen,
- L'évolution temporelle propre de la turbulence, dont on ne connait ici qu'une fréquence caractéristique.

6.2.1 Convection du champ turbulent

Le champ turbulent isotrope précédent est convecté par l'écoulement moyen à la vitesse $\mathbf{U_c}$. Il vérifie donc l'équation de transport:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U_c}.\nabla \mathbf{u} = 0$$

Soit encore, en utilisant l'expression (6.1) du champ turbulent:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 2 \sum_{n=1}^{N} \mathbf{U_c}.\mathbf{k_n} \tilde{u}_n \sin\left(\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n\right) \boldsymbol{\sigma}_n$$

Le champ $\mathbf{u}$ ainsi déduit s'écrit:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 2\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n \cos\left[\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{x} - t\mathbf{U_c}\right) + \psi_n\right]\boldsymbol{\sigma}_n \tag{6.3}$$

Il est intéressant de calculer le tenseur R_{ij} des corrélations des vitesses d'ordre 2:

$$R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{r},t,\tau) = \overline{\left[u_i(\mathbf{x},t)\, u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)\right]}$$

En remplaçant $\mathbf{u}$ par son expression (6.3), il vient alors pour la fonction d'autocorrélation, en remarquant à nouveau que les N modes sont indépendants:

$$\begin{aligned} &R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{r},t,\tau) = \\ &\quad 4\delta_{ij}\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{\{\cos\left[\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{x} - t\mathbf{U_c}\right) + \psi_n\right] \cos\left[\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{x}+\mathbf{r} - (t+\tau)\mathbf{U_c}\right) + \psi_n\right]\sigma_{ni}\sigma_{nj}\}} \\ &\quad 2\delta_{ij}\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{\{\cos\left[\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c}\right)\right]\sigma_{ni}\sigma_{nj}\}} \\ &\quad + \overline{\{\cos\left[2\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{x} - \tau\mathbf{U_c}\right) + \mathbf{k_n}.\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c}\right) + 2\psi_n\right]\sigma_{ni}\sigma_{nj}\}} \end{aligned}$$

Soit finalement:

$$R_{ij}(\mathbf{r},\tau) = 2\delta_{ij}\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{\{\cos\left[\mathbf{k_n}.\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c}\right)\right]\sigma_{ni}\sigma_{nj}\}} \tag{6.4}$$

On note que ce champ est *homogène*, la fonction R_{ij} ne dépendant que du couple $(\mathbf{r},\tau)$ séparant en espace et en temps les deux points du tenseur des corrélations†. On a de plus les deux relations suivantes:

1. $R_{ij}(\mathbf{r},\tau) = R_{ij}(-\mathbf{r},-\tau)$. Le tenseur des corrélations des vitesses est impair.
2. $R_{ij}(\mathbf{r},\tau) = R_{ij}(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c}, 0)$. Cette relation découle de l'hypothèse d'une turbulence gelée (hypothèse de Taylor) pour l'introduction de la convection.

Pour illustrer cette dernière propriété, les fonctions de corrélations longitudinale $f(\mathbf{r},\tau)$ et transversale $g(\mathbf{r},\tau)$ sont tracées (voir figures 6.9 et 6.10) pour $N_r = 1024$ réalisations spatio-temporelles du champ turbulent, et $N = 200$ modes.

6.2.2 Evolution temporelle propre de la turbulence

Cette dernière étape doit donner au champ turbulent une fréquence caractéristique propre, a priori pour chacun des N modes‡. En introduisant une nouvelle suite de

†L'homogénéïté du champ de vitesse est obtenu par la variable aléatoire ψ.

‡Dans un premier temps, voir Béchara[4] *et al.*, le champ turbulent ne possédant pas le caractère convectif, l'évolution temporelle était obtenue par convolution de N_r réalisations spatiales indépendantes (bruit blanc) par un filtre h à phase linéaire:

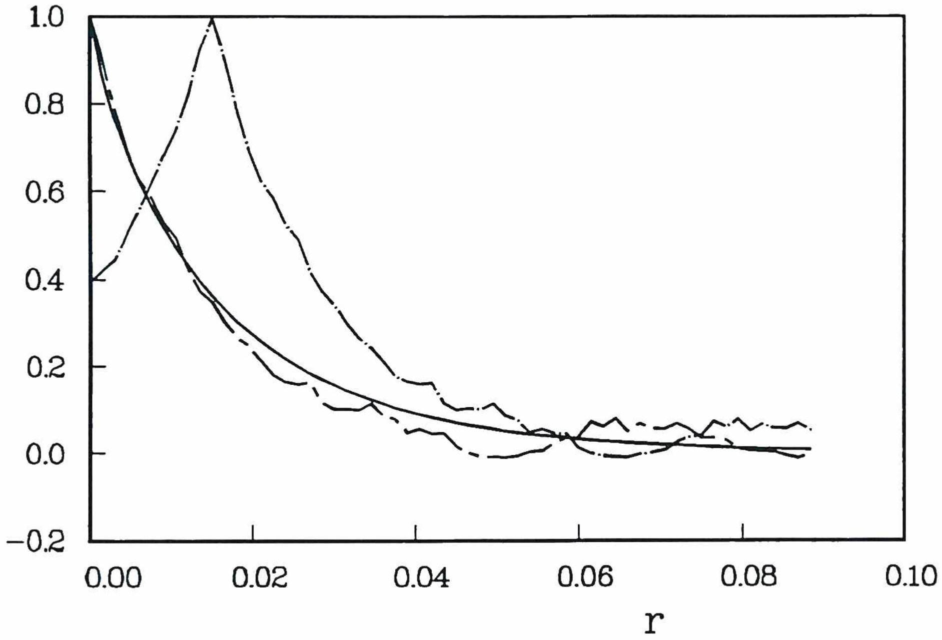


Figure 6.9: Mise en évidence de la convection sur la fonction de corrélation longitudinale f. On observe ici l'égalité $f(\mathbf{r},\tau) = f(\mathbf{r}-\mathbf{U_c}\tau,0)$ avec $U_c\tau = 90 \times 60 \times 2.8 \times 10^{-6} = 1.5 \times 10^{-2}$m. — $f(\mathbf{r},0)$ analytique, —-— $f(\mathbf{r},0)$ et —-— $f(\mathbf{r},\tau)$ simulées.

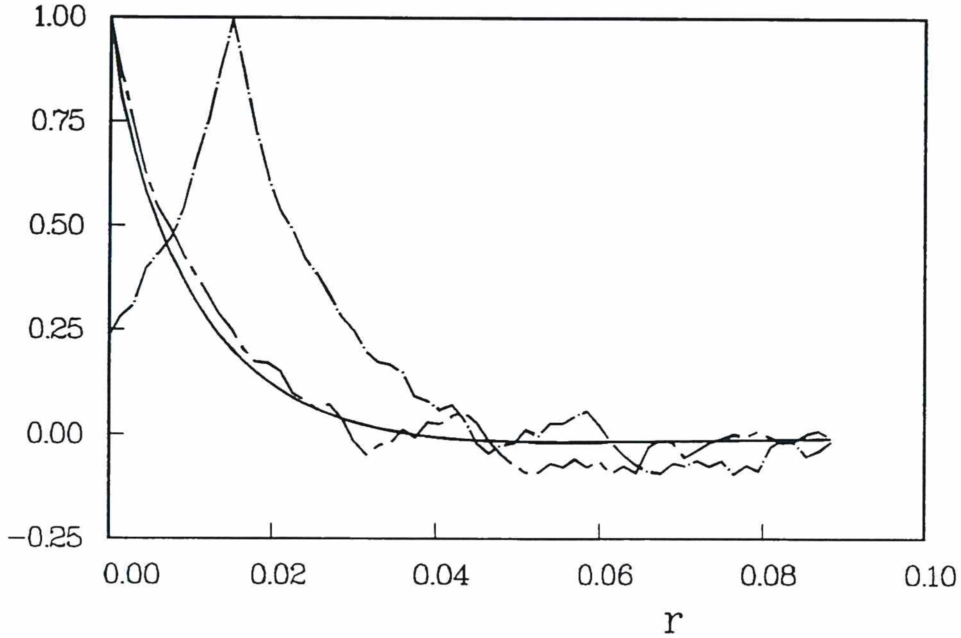


Figure 6.10: Mise en évidence de la convection sur la fonction de corrélation transversale g. On observe ici l'égalité $g(\mathbf{r},\tau) = g(\mathbf{r}-\mathbf{U_c}\tau,0)$ avec $U_c\tau = 90 \times 60 \times 2.8 \times 10^{-6} = 1.5 \times 10^{-2}$m. — $g(\mathbf{r},0)$ analytique, —-— $g(\mathbf{r},0)$ et —-— $g(\mathbf{r},\tau)$ simulées.

variables aléatoires $(\omega_n)_{n=1,\dots,N}$, le champ turbulent $\mathbf{u}$ s'exprime par la somme[††]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 2\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n \cos\left[\mathbf{k_n}.(\mathbf{x} - t\mathbf{U_c}) + \psi_n + \omega_n t\right] \boldsymbol{\sigma}_n \tag{6.5}$$

On choisit de prendre pour ω une loi de probabilité gaussienne $g(\omega)$ de variance $\omega_o = 2\pi k/\epsilon$, ou ω_o est la fréquence angulaire de la turbulence:

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega_o\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\omega_o^2}\right)$$

Evaluons alors dans ce nouveau cadre la fonction de corrélation des vitesses R_{ij}. Par un calcul similaire à (6.4), on déduit:

$$R_{ij}(\mathbf{r},\tau) = 2\delta_{ij}\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{\{\cos\left[\mathbf{k_n}.(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c}) + \omega_n\tau\right]\sigma_{ni}\sigma_{nj}\}} \tag{6.6}$$

Le champ turbulent est toujours homogène, mais on n'est plus dans la situation d'un champ turbulent gelé. On introduit alors la fonction C, trace du tenseur des corrélations R_{ij}.

$$C(\mathbf{r},\tau) = \delta_{ij} R_{ij}(\mathbf{r},\tau)$$

On se propose maintenant d'effectuer la moyenne statistique sur ω_n, afin de pouvoir comparer l'expression obtenue à celle du champ turbulent simplement gelé. Les calculs étant identiques sur les trois composantes non nulles du tenseur R_{ij}, le calcul est finalement mené sur la fonction C, somme de ces trois composantes. Tout calcul fait:

$$\begin{aligned} \overline{C(\mathbf{r},\tau)}^{\omega_n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\mathbf{r},\tau)\, g(\omega_n)\, d\omega_n \\ &= \exp\left(\frac{-\tau^2\omega_o^2}{2}\right) 2\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n^2 \overline{\cos\left[\mathbf{k_n}.(\mathbf{r} - \tau\mathbf{U_c})\right]}^{\alpha_n,\theta_n,\phi_n} \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = u * h \text{ avec } \mid h(\omega) \mid = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

Il n'est plus possible d'utiliser ici une telle approche, qui détruirait le caractère convectif du champ turbulent.

[††]Plus généralement, la méthode pour construire la simulation d'un processus homogène multidimensionnel consiste à écrire[5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sigma\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{N} \cos\left[\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \omega_n t + \psi_n\right] \boldsymbol{\sigma}_n$$

où $(\mathbf{k},\omega)$ est un couple de variables aléatoires conjointement distribuées avec la loi de probabilité $p(\mathbf{k},\omega)$. Le couple $(\mathbf{k_n},\omega_n)$ est indépendant de $(\mathbf{k_m},\omega_m)$ pour $n \neq m$, et ψ suit une loi uniforme $p(\psi) = 1/2\pi$ pour assurer l'homogénéïté du champ. La difficulté réside dans la connaissance de la fonction $p(\mathbf{k},\omega)$. On connait quelques expressions de p pour le cas de la turbulence atmosphérique ou encore pour celui d'une couche limite turbulente.

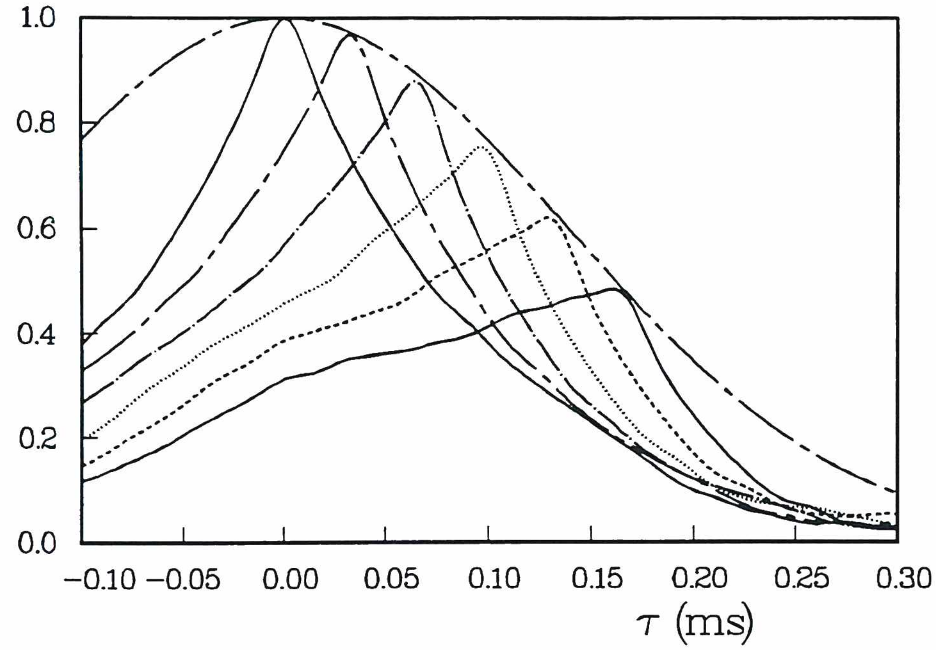


Figure 6.11: Fonction $f(\mathbf{r},\tau)$. La moyenne statistique est faite sur 64 réalisations spatio-temporelles. — $f(0,\tau)$, – – — $f(r_1,\tau)$, —·— $f(r_2,\tau)$, ······ $f(r_3,\tau)$, ········ $f(r_4,\tau)$, — $f(r_5,\tau)$. – – — enveloppe exponentielle.

La fonction de corrélation longitudinale $f(\mathbf{r},\tau)$ est tracée sur la figure 6.11 avec les mêmes paramètres que ceux utilisés dans les figures précédentes, la moyenne statistique étant obtenue pour 64 réalisations du champ spatio-temporel.

Dans la suite, on choisit de centrer la loi de probabilité de ω sur la fréquence angulaire de la turbulence ω_o:

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega_o\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\omega_o^2}\right) \tag{6.8}$$

La fonction C prend avec cette nouvelle loi la forme suivante:

$$C(\mathbf{r},\tau) = \exp\left(\frac{-\tau^2\omega_o^2}{2}\right) 2\sum_{n=1}^{N} \overline{\tilde{u}_n^2 \cos\left[\mathbf{k_n}.(\mathbf{r}-\tau\mathbf{U_c})+\tau\omega_o\right]}$$

6.3 Application au cas du jet libre

On dispose maintenant de tous les outils pour effectuer le calcul du champ acoustique par résolution des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen quelconque stationnaire. En particulier, après avoir déterminé le champ aérodynamique avec un modèle de turbulence $k-\epsilon$, on est capable de construire un champ turbulent synthétique possédant un certain nombre de propriétés mises en évidence dans les deux

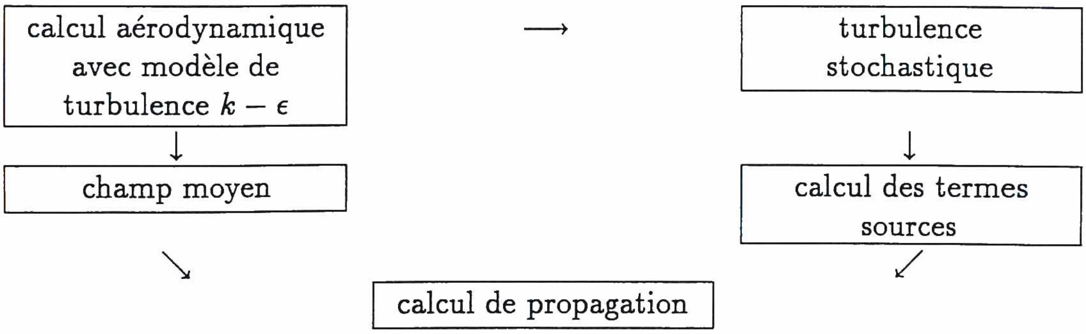


Figure 6.12: modèle SNGR.

premières sections de ce chapitre. La démarche que nous allons suivre est résumée par le schéma de la figure 6.12.

La suite de ce chapitre est consacrée d'une part à préciser le maillage retenu pour effectuer la propagation et le calcul numérique du terme source sur ce domaine, et d'autre part, à la présentation des résultats acoustiques obtenus.

6.3.1 Domaine de calcul

On s'intéresse par la suite à une configuration de jet libre à $M = 0.86$, déjà étudiée au chapitre 2 de ce travail. Le domaine de calcul sur lequel s'effectue la propagation est différent de celui sur lequel a été mené le calcul du champ aérodynamique. Il s'agit ici d'un maillage régulier, avec des conditions aux limites absorbantes sur toutes les frontières à l'exception de l'axe de symétrie. *Le calcul de propagation est axisymétrique*, les ressources informatiques actuelles (essentiellement la mémoire) ne permettant pas d'effectuer un calcul tridimensionnel complet, sauf cas exceptionnel. On renvoie le lecteur à l'annexe B pour une illustration de ce type de propagation. On y trouvera également une description du code EOLE, développé par la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, résolvant les équations d'Euler linéarisées.

La première étape consiste donc à projeter le champ aérodynamique calculé au chapitre 2 sur le maillage "acoustique". Le pas de maillage choisi est $\Delta x = 1.5 \times 10^{-3}$ m, avec un pas de temps correspondant de $\Delta t = 2.8 \times 10^{-6}$ s. Ce pas spatial permet de capter le champ acoustique rayonné jusqu'à un nombre de Strouhal $S_t \simeq 2.8$, le diamètre de la tuyère correspond aux données expérimentales de Lush: $D = 2.5 \times 10^{-2}$ m. Le solveur étant d'ordre élevé en espace, il suffit de 6 à 7 points par longueur d'onde pour représenter très correctement le signal acoustique. Pour le calcul de la directivité, la pression est enregistrée sur un arc de cercle de rayon $R \simeq 33D$ centré sur le plan de sortie de la tuyère. A cette distance, le champ acoustique capté correspond au champ acoustique lointain à l'exception des points situés près de l'axe du jet. Le domaine de calcul est finalement constitué d'une grille de 555×701 points. La partie absorbante du maillage en sortie du domaine (voir figure 6.13) fait l'objet d'une des sections suivantes.

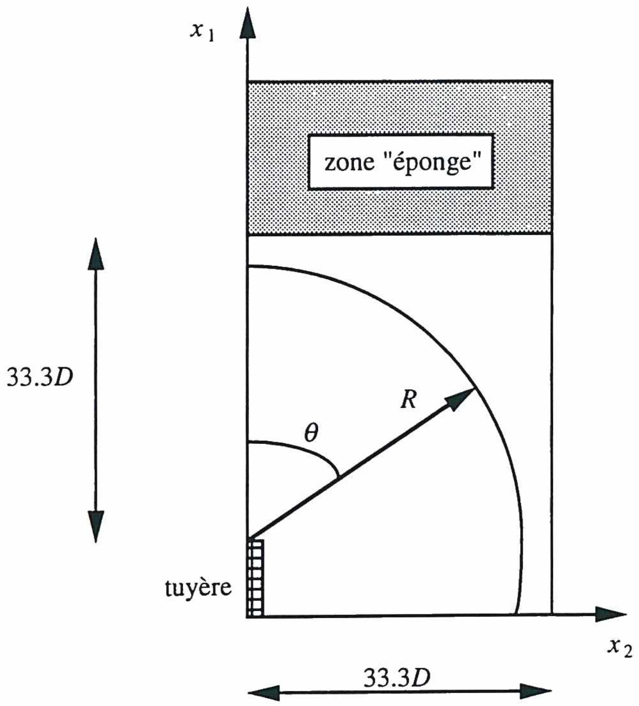


Figure 6.13: Domaine de calcul pour la propagation.

6.3.2 Calcul du terme source

La première étape pour le calcul consiste à identifier le domaine source turbulent. On retient ici comme domaine les points du maillage pour lesquels l'énergie cinétique k est telle que $k > \beta k_{max}$, avec $\beta = 0.3$. Sur ce domaine, on effectue une réalisation spatio-temporelle du champ turbulent (6.5), c'est à dire que l'on effectue le tirage des variables aléatoires α, ϕ, θ, ψ et ω pour les N composantes du champ.

Le domaine source turbulent est alors discrétisé en sous-domaines sur lesquels les caractéristiques de l'écoulement moyen et de la turbulence sont constantes. La taille de ces sous-domaines est donnée par la longueur de corrélation de la turbulence $L \simeq (2/3k)^{3/2}/\epsilon$. Sur chaque sous-domaine est déterminé un spectre de Von Kármán permettant de calculer l'énergie des N modes $\tilde{u}_n$, ainsi qu'une fréquence angulaire de la turbulence $\omega_o = 2\pi\epsilon/k$ permettant de centrer[†] les ω_n autour de ω_o (6.8).

Enfin, il est impossible d'utiliser la décroissance naturelle du champ turbulent, en particulier dans la direction de l'écoulement moyen: il faudrait pour cela prendre en compte un maillage hors de portée des ressources informatiques actuelles. On interprète donc les sous-domaines identifiés dans le volume source turbulent comme des grosses structures turbulentes. Sur chacun de ces sous-domaines, on applique une fonction de forme, ici la fonction de corrélation spatiale déjà utilisée lors de la modélisation statistique du tenseur de Lighthill (voir chapitre 2):

[†]On rappelle que si X suit une loi normale, Y suit une loi gaussienne de moyenne m et de variance σ par le changement de variable: $y = \sigma x + m$.

$$\exp\left(-\pi\frac{r^2}{L^2}\right)$$

Dans cette expression, r représente la distance depuis le centre du sous-domaine, et L la longueur de corrélation. On évite ainsi une discontinuité sur les frontières du volume source turbulent.

Le terme source **S** associé aux équations d'Euler (5.37) peut alors être calculé sur ce domaine turbulent:

$$S_i = -\left\{u_{jt}\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j} - \overline{u_{jt}\frac{\partial u_{it}}{\partial x_j}}\right\}$$

La dérivée du champ intervenant dans S_i est évaluée analytiquement à partir de (6.5). Enfin, il faut tenir compte des fréquences de coupure en temps et en espace imposées respectivement par Δt et Δx. Les modes supérieurs ne sont pas pris en compte pour le calcul du terme source.

6.3.3 Conditions aux limites en sortie du domaine

Trois types de conditions aux limites sont utilisés dans le calcul de la propagation (cf. figure 6.13). Des conditions de symétrie sont appliquées en $x_2 = 0$, axe de symétrie du jet. Sur deux des trois frontières restantes, les conditions aux limites doivent assurer la libre sortie des ondes acoustiques: les équations caractéristiques permettent de traiter sans difficulté ce problème.

La troisième condition aux limites est beaucoup plus délicate. En effet, la résolution des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire quelconque fournit deux types de solutions (chapitre 5): une solution acoustique, et des instabilités convectives. Ainsi, deux types de fluctuations, acoustiques et aérodynamiques, se propageant respectivement aux vitesses $U_c + c_o$ et U_c, sont à traiter en sortie du domaine de propagation. A titre d'illustration, on donne sur la figure 6.14 le signal acoustique reçu par un capteur, proche de l'axe du jet, en fonction du temps. Après une première phase transitoire où le signal de pression est nul, on distingue le passage de l'onde acoustique se propageant à la vitesse $U_c + c_o$, puis des ondes instables de plus forte amplitude, convectées par l'écoulement moyen.

La solution employée ici consiste à prolonger le maillage par une zone dite "éponge", et absorbant ces deux types d'onde. Pour cela, on utilise un maillage irrégulier, avec un pas de maillage géométrique, et on ajoute à la résolution des équations d'Euler linéarisées une étape de diffusion, le coefficient de diffusion croissant lui-même avec le pas du maillage. La raison géométrique du pas doit rester raisonnable pour ne pas créer de reflexion des ondes acoustiques par une variation importante de l'impédance acoustique.

6.3.4 Résultats acoustiques

Pour le calcul de la directivité, on utilise les conventions déjà employées aux chapitres 2 et 3 de la première partie. La figure 6.15 donne les iso-valeurs positives de la

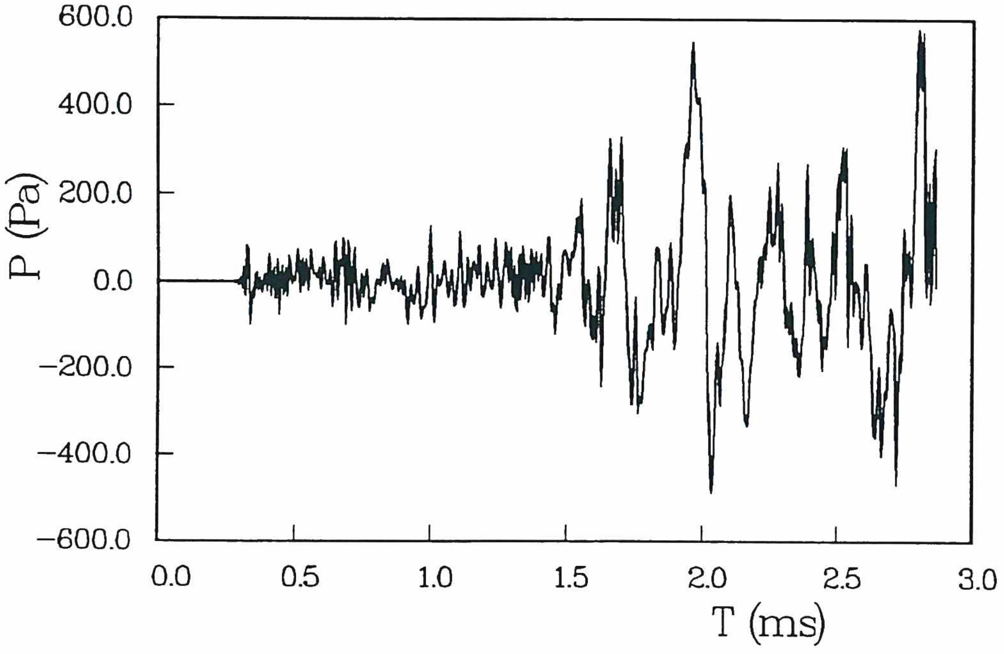


Figure 6.14: Signal de pression reçu par un micro situé proche de l'axe du jet en sortie du domaine physique.

pression pour le dernier pas de temps du calcul de propagation. On distingue assez nettement la présence d'instabilités convectées par l'écoulement moyen près de l'axe du jet. Le domaine source est situé entre $5D$ et $10D$ en aval de la tuyère, comme le montrent les fronts d'onde de la pression acoustique. On observe également que ces fronts d'onde proviennent de sources différentes, ils se croisent, pour finalement donner un champ acoustique relativement complexe.

La figure 6.16 donne le signal acoustique reçu par un micro situé sur l'arc de cercle $R \simeq 33D$ et pour $\theta = 90°$, en fonction du temps. On observe cette fois après une phase transitoire où le signal de pression est nul, les fluctuations acoustiques. Ce signal est à comparer à celui de la figure 6.14. On note en particulier, l'ordre de grandeur des fluctuations acoustiques par rapport aux fluctuations aérodynamiques. Une partie du champ turbulent introduit comme terme source dans les équations d'Euler linéarisées ne produit pas de bruit. Ce problème a déjà été évoqué au chapitre 5.

Le calcul de la directivité est effectué, d'une part, par évaluation de la moyenne quadratique de la pression, et d'autre part, par évaluation de la moyenne du vecteur intensité acoustique $\mathbf{I} = p\mathbf{u}$. La figure 6.17 montre ces deux quantités, ainsi que les données expérimentales de Lush[6] et Tanna[7]. On note tout d'abord que ces deux estimations de l'intensité acoustique coïncident. Cependant, la directivité n'est certainement pas encore indépendante de la distance d'observation x. En particulier, l'arc de cercle de rayon R est centré, pour le calcul de l'intensité acoustique, dans le plan de sortie de la tuyère, et non dans le domaine source. La distance $R \simeq 33D$ n'est pas grande

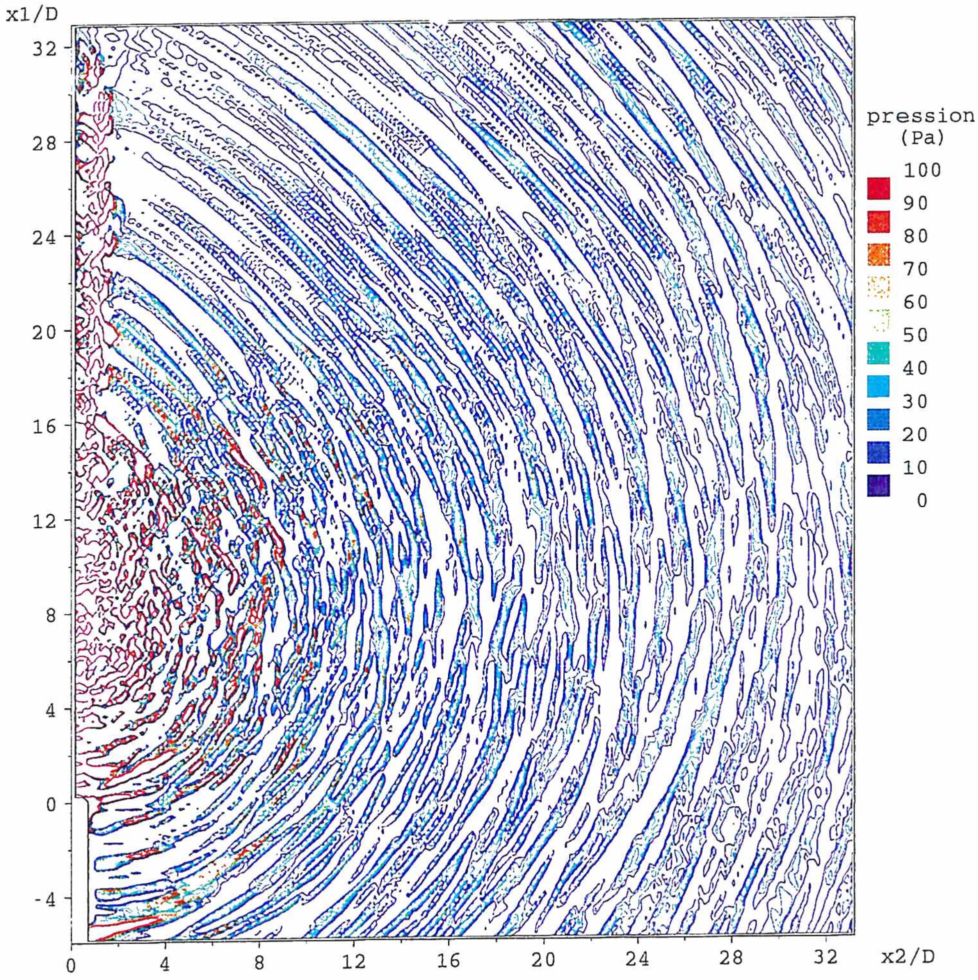


Figure 6.15: Iso-valeurs positives de la pression au dernier pas de temps du calcul de la propagation. La tuyère se situe en bas à gauche, x_1 est l'axe du jet (voir figure 6.13). On distingue les instabilités, convectées par l'écoulement moyen sur le bord droit de la figure, et les fronts d'onde acoustique centrés sur le domaine source.

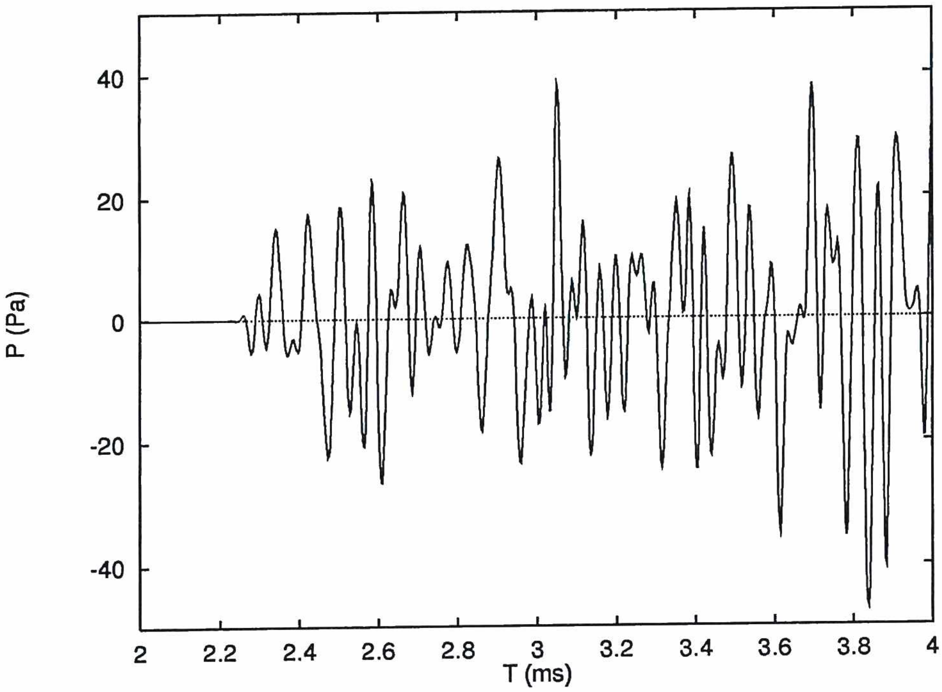


Figure 6.16: Signal de pression en $R \simeq 33D$, et $\theta = 90°$.

devant la distance entre le plan de sortie de la tuyère et le domaine source (de l'ordre de $5D$). A titre d'exemple, on donne ci-dessous les trois critères, donnés par Fuchs[8] pour être en champ lointain:

- être en champ acoustique lointain:

$$\frac{x}{\lambda} > 1$$

- être en champ géométrique lointain:

$$\frac{x}{L_{source}} > 1$$

- avoir la directivité indépendante de x:

$$\frac{x}{L_{source}} > \frac{L_{source}}{\lambda}$$

où x désigne la distance entre le domaine source et l'observateur, λ une longueur d'onde acoustique caractéristique et L_{source} la distance du domaine source. Dans notre cas, en prenant pour fréquence de la source $f \simeq 3000$ Hz, pour longueur du domaine source $L_{source} \simeq 5D$ et pour distance d'observation $x \simeq 33D$, les trois critères précédents sont juste vérifiés.

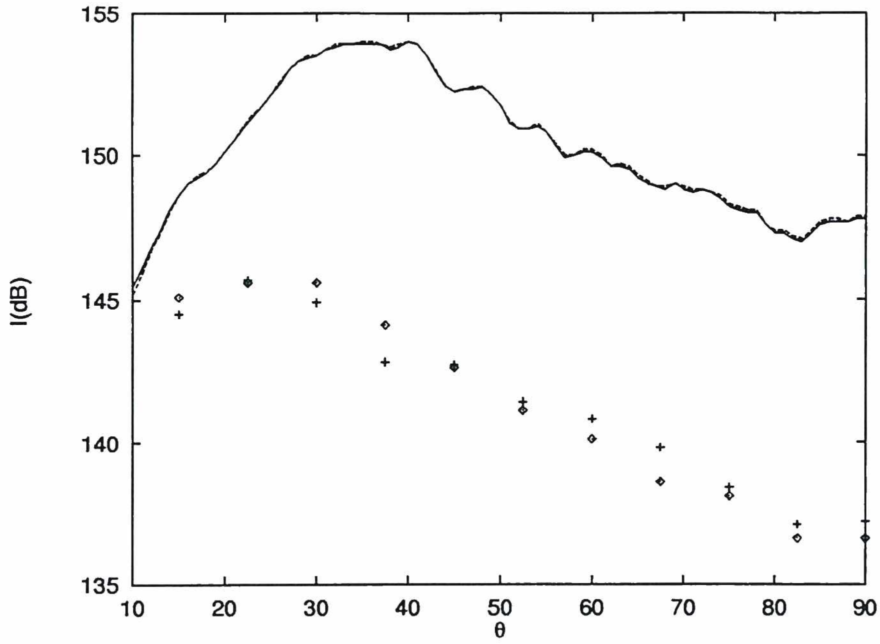


Figure 6.17: Intensité acoustique. — **I**, ········ moyenne quadratique de la pression. Mesures: ◇ Lush, + Tanna.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ce calcul. En premier lieu, l'introduction de la convection dans le champ turbulent (6.5) a permis de marquer la directivité. Un calcul de propagation effectué avec un champ turbulent ne possédant pas de caractère convectif, c'est à dire un champ de la forme:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 2\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_n \cos\left[\mathbf{k_n}.\mathbf{x} + \psi_n + \omega_n t\right] \boldsymbol{\sigma}_n$$

aboutit à une directivité isotrope.

Par ailleurs, on note pour les petits angles d'observation θ une diminution du niveau sonore, cette diminution étant liée à la réfraction des ondes sonores.

On observe globalement une surestimation du niveau acoustique. Une des causes de cette différence provient de la résolution axisymétrique de la propagation, qui ne peut prendre en compte que des sources annulaires (voir annexe B). Il faut donc s'attendre dans ce calcul à un renforcement du niveau sonore calculé par rapport aux mesures sans toutefois une grande modification de la directivité. En effet, les sources acoustiques étant ici proches de l'axe, les phénomènes de diffraction observés en annexe ne sont pas présents.

D'autre part, on ne possède avec ce calcul qu'une réalisation du champ acoustique associée au champ turbulent stochastique. Il faudrait, pour obtenir le champ acoustique, effectuer plusieurs réalisations de ce type. Cependant, deux paramètres viennent nuancer cette dernière remarque: l'intensité est déjà une grandeur moyennée dans le temps, et le nombre de modes N relativement élevé, $N = 300$ pour ce calcul, per-

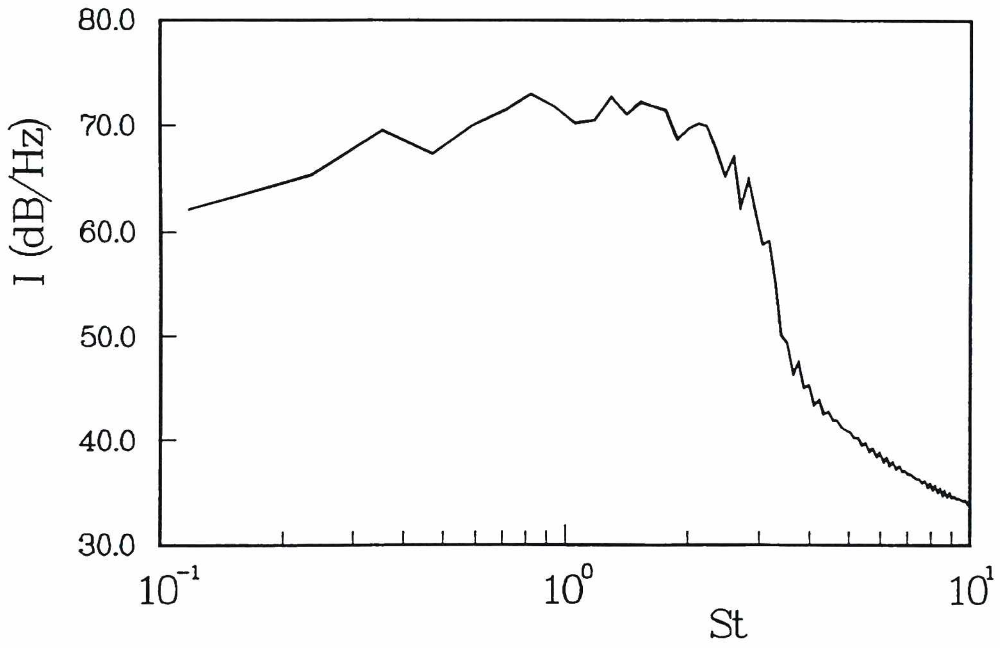


Figure 6.18: Spectre acoustique en bandes fines pour l'angle $\theta = 90°$.

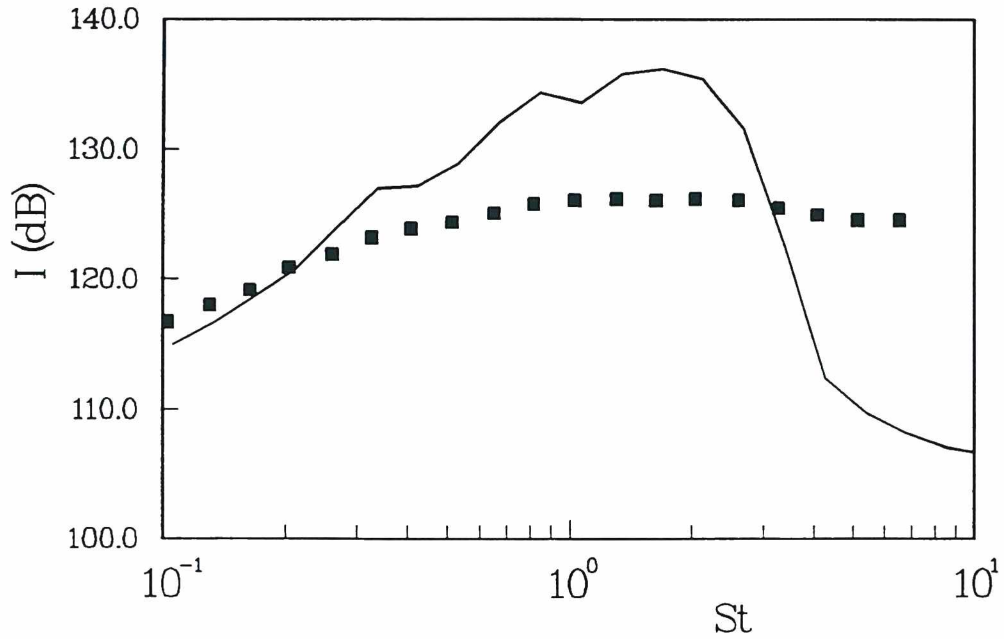


Figure 6.19: Spectre acoustique tracé en tiers-d'octave pour l'angle $\theta = 90°$. ■ mesures de Tanna.

met d'effectuer une certaine moyenne statistique du champ turbulent avant l'étape de propagation.

Le spectre acoustique a été calculé à partir des enregistrements de pression sur l'arc de cercle $R \simeq 33D$. On donne le spectre en bandes fines sur la figure 6.18 pour l'angle $\theta = 90°$. Un calcul du spectre en $\frac{1}{3}$ d'octaves, après normalisation par rapport à la configuration de Tanna est également calculé et représenté figure 6.19. On note que le contenu spectral est moins étendu que celui mesuré par Tanna. Là encore, il faut remarquer qu'on ne possède a priori que le spectre d'une seule réalisation acoustique associée au champ stochastique turbulent. D'autre part, le maillage utilisé ne permet pas de représenter le contenu à haute fréquence.

Références

[1]**Kraichnan, R.H.**, 1970, "Diffusion by a random velocity field," *Phys. Fluids*, Vol. 13(1), pp. 22-31.

[2]**Drummond, I.T. & Münch, W.**, 1990, "Turbulent stretching of line and surface elements," *J. Fluid Mech.*, Vol. 215, pp. 45-59.

[3]**Karweit, M., Blanc-Benon, P., Juvé, D. & Comte-Bellot, G.**, 1991, "Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 89(1), pp. 52-62.

[4]**Béchara, W., Bailly, C., Lafon, P. & Candel, S.**, 1994, "Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows," *AIAA Journal*, Vol. 32(4), pp. 455-463.

[5]**Shinozuka, M.**, 1971, "Simulation of multivariate and multidimensional random processes," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 49(1), pp. 357-367.

[6]**Lush, P.A.**, 1971, "Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory," *J. Fluid Mech.*, Vol. 46(3), pp. 477-500.

[7]**Tanna, H.K., Dean, P.D. & Burrin, R.H.**, 1976, "The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol.III Turbulent mixing noise data," *Air Force Aero-Propulsion Laboratory*, AFAPL-TR-76-65.

[8]**Fuchs, H.V.**, 1978, "On the application of acoustic mirror, telescope and polar correlation techniques to jet noise source location," *J. Sound Vib.*, Vol. 58(1), pp. 117-126.

Synthèse à propos de l'approche stochastique

Dans cette seconde approche, on s'est intéressé à une autre analogie que celle de Lighthill, pour d'une part, prendre en compte les effets de l'écoulement moyen sur la propagation, et d'autre part, pouvoir aborder dans une étape ultérieure des écoulements plus complexes que les jets libres.

Cette approche utilise un certain nombre d'outils numériques. Ainsi, on effectue successivement:

- un calcul aérodynamique avec un modèle $k - \epsilon$ pour le calcul du champ moyen,
- la modélisation d'un champ turbulent spatio-temporel stochastique, et le calcul d'un terme source pour l'acoustique,
- la résolution des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire.

On s'est attaché successivement à améliorer notre connaissance du système des équations d'Euler linéarisées, à définir un terme source associé à cette analogie et cohérent avec la littérature sur ce sujet. Enfin, l'effort a aussi porté sur la simulation stochastique d'un champ turbulent de fluctuations de vitesse, avec l'introduction de la convection et de l'évolution temporelle propre.

Les difficultés rencontrées pour l'obtention et l'interprétation sont multiples. Notons le caractère axisymétrique de la propagation, et la description globale du champ turbulent constituant le volume source du jet. Néanmoins, les résultats acoustiques obtenus sont encourageants.

Conclusions et perspectives

Deux approches sont développées dans ce travail pour le calcul du rayonnement acoustique des écoulements turbulents. Elles ont permis de donner deux points de vue complémentaires sur le problème de la production de bruit par la turbulence, et d'utiliser un certain nombre d'outils numériques.

Dans une première partie, on se place dans le cadre de l'analogie de Lighthill. La résolution de la propagation se fait par une méthode intégrale. La modélisation de la turbulence, et par conséquent du terme source, est statistique. On est amené à distinguer deux cas dans cette modélisation. *Lorsque le nombre de Mach de convection est subsonique*, le rayonnement est donné par une distribution fictive de quadripôles compacts menant à deux types de termes sources: un terme de bruit propre et un terme de bruit de cisaillement. On dispose finalement à partir de cette approche de l'intensité et de la puissance acoustique, du spectre fréquentiel en fonction de l'angle d'observation, et de la distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques. *Lorsque le nombre de Mach de convection devient supersonique*, la physique est changée et le rayonnement acoustique est dominé par les ondes de Mach, dues à la convection supersonique des structures turbulentes par l'écoulement moyen. A l'issue de cette modélisation, on dispose de la puissance et de l'intensité acoustique.

Une synthèse de ces deux modèles permet d'avoir une vue globale du rayonnement acoustique d'un jet libre. On dispose en particulier de l'évolution de l'efficacité acoustique en fonction du rapport U_{jet}/c_o, compris entre 0.35 et 3.3. Le calcul du champ aérodynamique, source du bruit, est effectué par résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées, avec un modèle de turbulence $k-\epsilon$ développé pour des écoulements turbulents compressibles. La validation est réalisée pour le cas de jets libres circulaires froids subsoniques et supersoniques parfaitement détendus, avec un nombre de Mach nominal M tel que $0.35 \leq M \leq 2.0$. Le cas d'un jet chaud à $M = 2.0$ est également étudié: on met en évidence l'influence de la température sur l'intensité acoustique, ce paramètre étant pris en compte dans la modélisation du rayonnement des ondes de Mach.

Dans une seconde partie, on calcule le champ acoustique par résolution directe des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire. Cet écoulement moyen est déterminé dans un premier temps, et permet de construire un champ turbulent spatio-temporel stochastique. Plusieurs difficultés doivent être résolues. Il faut déterminer le terme source associé à cette analogie acoustique, et donner au champ turbulent synthétique un certain nombre de propriétés. Le schéma ci-dessous résume la mise en place des différentes étapes pour finalement aboutir au champ acoustique:

calcul aérodynamique avec modèle de turbulence $k - \epsilon$	$\longrightarrow$	turbulence stochastique
$\downarrow$		$\downarrow$
champ moyen		calcul des termes sources
$\searrow$		$\swarrow$
	calcul de propagation	

Les résultats acoustiques obtenus sont encourageants, mais ne permettent pas pour le moment de prédire toutes les caractéristiques du champ acoustique rayonné. On obtient en effet des signaux acoustiques et un champ sonore qualitativement acceptables, ainsi qu'une directivité réaliste. Cependant, le niveau sonore est globalement surestimé, et le contenu spectral du champ est moins étendu que celui qui est généralement mesuré. La représentation locale du champ turbulent à l'aide de ces méthodes stochastiques est maintenant bien maitrisée, mais l'organisation générale en tant que terme source doit encore faire l'objet d'efforts de recherches.

Ces deux approches sont semblables dans le sens où l'on utilise systématiquement les grandeurs locales de l'écoulement pour le calcul des termes sources acoustiques. Elles sont fondamentalement différentes dans leur façon de décrire la turbulence, de produire et de propager le champ acoustique. En particulier, dans la seconde approche développée, la propagation tient compte des effets de l'écoulement moyen sur la propagation des ondes sonores: réfraction et convection des ondes acoustiques.

Les résultats obtenus par les deux méthodes ont été comparés à des valeurs expérimentales disponibles dans la littérature. Ces comparaisons sont généralement encourageantes, et confirment l'intérêt des développements réalisés et les possibilités d'application pour l'estimation des charges acoustiques. Sur un plan pratique, les développements réalisés ici sont déjà utilisés pour la prévision aéroacoustique dans des sytèmes industriels. On peut en effet, sans attendre une formulation définitive, procéder à des calculs d'intérêt technologique. Il suffit pour cela d'accepter d'utiliser une constante d'ajustement. Les améliorations ultérieures devraient permettre une consolidation progressive de la modélisation utilisée.

Ce travail est original de par son apport, d'une part, dans la modélisation statistique des écoulements à nombre de Mach de convection supersonique (chapitres 3 & 4, ainsi que l'annexe A pour les calculs aérodynamiques), et d'autre part, dans la construction d'une turbulence stochastique acceptable, ainsi que dans l'étude de l'analogie acoustique associée aux équations d'Euler linéarisées (chapitres 5 & 6). On montre ainsi qu'il est possible, à partir d'un calcul aérodynamique $k - \epsilon$ compressible, et de modélisations aéroacoustiques adaptées, de développer des méthodes de prévision de bruit qui étendent le champ des applications couvert par des approches plus classiques.

Les perspectives à donner à ce travail peuvent s'articuler autour des trois axes suivants:

- En premier lieu, il est naturel de poursuivre la validation et l'extention de ces approches pour d'autres problèmes. Ainsi, l'étude du rayonnement acoustique de jets coaxiaux avec un jet primaire supersonique chaud, configuration rencontrée par les motoristes en aéronautique, peut être menée en utilisant la modélisation statistique développée dans la première partie de ce travail. Il s'agit, à géométrie fixée, de donner la vitesse du jet secondaire correspondant au minimum d'émission acoustique.

  De même, le problème du bruit de mélange d'un jet supersonique non parfaitement détendu peut être abordé par ces méthodes.

  Enfin, il est possible de proposer un modèle composite intégrant le bruit de mélange et le bruit de choc (voir références du mémoire de DEA & des travaux de Tam en introduction).

- Un deuxième axe de recherche devrait s'intéresser au développement d'un code de propagation tridimensionnelle. L'évolution des ressources informatiques, et le développement récent de schémas numériques d'ordre élevé et peu dispersif vont dans ce sens.

- Enfin, une des motivations de ce travail est l'application de ces méthodes dans des situations industrielles pour la prévision aéroacoustique. Il est donc nécessaire de poursuivre les applications et la mise en forme de ces méthodes pour assurer le transfert de ces outils numériques vers l'industrie.

Annexe A

Turbulence - Modèle $k - \epsilon$

On se propose dans cette annexe de rassembler un certain nombre d'idées sur la turbulence[1−3]. Une première partie précise la définition de grandeurs utilisées dans cette étude. Une deuxième présente les équations du modèle $k-\epsilon$ pour des écoulements compressibles. Enfin, une dernière partie décrit brièvement le code ESTET, utilisé pour le calcul numérique du champ aérodynamique.

A.1 Définition de quelques grandeurs utilisées

A.1.1 Quelques définitions

La turbulence est dite stationnaire lorsque la densité de probabilité de la vitesse turbulente est indépendante du temps. En d'autres termes, nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{[u_i(t)u_j(t+\tau)]} = 0$$

La turbulence est dite homogène lorsque la densité de probabilité de la vitesse est indépendante du point d'observation. Le tenseur des corrélations des vitesses en deux points vérifie:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r})\right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\overline{[u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})]} = 0$$

On suppose par la suite que la turbulence est toujours localement homogène. Une turbulence homogène est dite isotrope lorsque la densité de probabilité des vitesses est indépendante de toute translation, de toute rotation par rapport à un axe et de toute symétrie par rapport à un plan. On démontre alors que le champ turbulent $\mathbf{u}$ vérifie en particulier:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \frac{2}{3}k\delta_{ij} \\ \overline{u_i u_j u_k} &= 0 \end{aligned}$$

Le tenseur des corrélations des vitesses en deux points s'exprime alors à l'aide de deux fonctions scalaires f et g telles que:

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \left[\frac{f-g}{r^2} r_i r_j + g\delta_{ij}\right] \overline{u^2} \tag{A.1}$$

Ces fonctions f et g s'interprètent simplement physiquement. On déduit de l'expression précédente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11}(r,0,0) &= \overline{u^2} f(r) = \overline{u_1(0,0,0)u_1(r,0,0)} \\ \mathcal{R}_{11}(0,r,0) &= \overline{u^2} g(r) = \overline{u_1(0,0,0)u_1(0,r,0)} \end{aligned}$$

Si de plus on suppose le champ de vitesse incompressible $\nabla.\mathbf{u} = 0$, le tenseur ne dépend alors que de la fonction scalaire f. En effet dans ce cas $g = f + r/2f'$, et:

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \left[-\frac{1}{2r} f' r_i r_j + \left(f + \frac{r}{2} f'\right) \delta_{ij}\right] \overline{u^2}$$

Nous introduisons également le tenseur des corrélations triples en deux points $\mathcal{T}_{ij,k}$:

$$\mathcal{T}_{ij,k}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}+\mathbf{r})}$$

Ce tenseur s'exprime en fonction d'une seule fonction scalaire h pour une turbulence homogène isotrope incompressible:

$$\mathcal{T}_{ij,k}(r) = \left[(h - rh') \frac{r_i r_j r_k}{2r^3} - \frac{h}{2} \delta_{ik} \frac{r_j}{r} + \frac{1}{4r} \frac{d}{dr}(r^2 h) \left(\delta_{ij} \frac{r_k}{r} + \delta_{kj} \frac{r_i}{r}\right)\right] \left(\overline{u^2}\right)^{3/2} \tag{A.2}$$

De plus, $\mathcal{T}_{ij,k}$ est alors une fonction impaire de r.

Une turbulence homogène est dite axisymétrique lorsque la densité de probabilité est indépendante de toute rotation autour d'un axe α. Le tenseur des corrélations des vitesses s'exprime alors pour une turbulence incompressible à l'aide de deux fonctions scalaires Q_1 et Q_2 telles que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij} &= \epsilon_{jlm} \frac{\partial q_{im}}{\partial \xi_l} \\ \epsilon_{jlm} &= \frac{1}{2}(j-l)(l-m)(m-j) \\ q_{ij} &= \xi_k \left[\epsilon_{ijk} Q_1 + \epsilon_{i1k}\left(\delta_{1j} Q_2 + \xi_j Q_3\right)\right] \\ Q_3 &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\xi_1}{\xi_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3}\right) Q_1 \end{aligned}$$

Une interprétation simple des fonctions Q_1 et Q_2 est beaucoup moins facile à donner. L'expression de $\mathcal{R}_{11}$ par exemple donne après simplification:

$$\mathcal{R}_{11} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma^2 Q_1\right) \text{ avec } \sigma = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}$$

Notons que l'isotropie se retrouve en prenant $Q_2 = 0$, et $Q_1 = Q_1(\xi)$.

A.1.2 Equation de Lin - Spectre d'énergie cinétique

La turbulence est ici homogène et isotrope. Il est alors possible d'écrire l'équation gouvernant le spectre de l'énergie cinétique $E(\mathrm{k})$ (en fait l'équation gouvernant les corrélations doubles dans le domaine spectral):

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i} = \int_0^\infty E(\mathrm{k}) d\mathrm{k}$$

Cette équation proposée historiquement par Lin (1947) est la suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\mathrm{k}, t) = T(\mathrm{k}, t) - 2\nu \mathrm{k}^2 E(\mathrm{k}, t) \tag{A.3}$$

La fonction T, non linéaire par rapport à E, s'exprime directement en fonction de la fonction scalaire h, liée aux corrélations triples en deux points (A.2). Le second terme linéaire est lié aux corrélations doubles de vitesse, ν désignant la viscosité cinématique du fluide considéré. En intégrant cette expression sur tous les nombres d'onde:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty E(\mathrm{k}, t) d\mathrm{k} = \int_0^\infty T(\mathrm{k}, t) d\mathrm{k} - 2\nu \int_0^\infty \mathrm{k}^2 E(\mathrm{k}, t) d\mathrm{k}$$

En l'absence de sources, la variation d'énergie cinétique égale l'énergie cinétique dissipée par viscosité, autrement dit:

$$\int_0^\infty T(\mathrm{k}, t) d\mathrm{k} = 0$$

Le terme T est en fait caractéristique des échanges d'énergie cinétique entre les différentes structures turbulentes: il traduit l'interaction de structures de tailles différentes. Pour fermer (A.3) afin d'obtenir l'expression du spectre de l'énergie cinétique turbulente E, il faut modéliser ce terme de transfert.

Un certain nombre de modèles existent dans la littérature, la plus simple étant de supposer $T(\mathrm{k}, t) = 0$. Cette dernière hypothèse est très simpliste, puisqu'elle suppose que toutes les structures de nombre d'onde identique décroissent indépendamment des autres, par le seul fait de la viscosité: pas de cascade d'énergie dans cette configuration. Von Kármán (1948) propose l'expression suivante pour E:

$$E(\mathrm{k}) = \alpha \frac{\overline{u^2}}{\mathrm{k}_e} \frac{(\mathrm{k}/\mathrm{k}_e)^4}{\left[1 + (\mathrm{k}/\mathrm{k}_e)^2\right]^{17/6}} \tag{A.4}$$

Cette expression varie comme $\mathrm{k}^{-5/3}$ (analyse dimensionnelle de Kolmogorov, 1941) pour de grands nombres d'onde dans le domaine inertiel. Le défaut de cette expression est de ne pas faire converger tous les moments de E, en particulier, celui d'ordre 2 qui nous donne le taux de dissipation ϵ de cette énergie:

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty \mathrm{k}^2 E(\mathrm{k},t) d\mathrm{k}$$

Une autre fermeture possible (obtenue en introduisant ϵ dans la modélisation de T), conduit à l'expression:

$$E(\mathrm{k}) = \alpha \frac{\overline{u^2}}{\mathrm{k}_e} \frac{(\mathrm{k}/\mathrm{k}_e)^4}{\left[1+(\mathrm{k}/\mathrm{k}_e)^2\right]^{17/6}} \exp\left[-2\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}_\eta}\right)^2\right] \tag{A.5}$$

où $\mathrm{k}_\eta = \left(\epsilon/\nu^3\right)^{1/4}$ désigne le nombre d'onde de Kolmogorov qui caractéristique les structures turbulentes les plus fines de l'écoulement, i.e. celles qui assurent la dissipation visqueuse.

Plusieurs auteurs suggèrent cette expression[2], en particulier Saffman (1963) et Pao (1967). Notons que cette forme possède la propriété de faire converger tous les moments de E. On adopte cette dernière expression pour le spectre d'énergie cinétique d'une turbulence homogène isotrope.

Il existe une autre famille de fermetures construite à partir de l'hypothèse de quasi-normalité. Dans ce cas la fermeture du problème s'effectue sur l'équation gouvernant les corrélations triples. L'hypothèse de quasi-normalité consiste à supposer que la densité de probabilité de la variable aléatoire $u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r}) = u_i'u_j''$ est gaussienne, et par conséquent:

$$\overline{u_i'u_j'u_k''u_l''} = \overline{u_i'u_j'}\,\overline{u_k''u_l''} + \overline{u_i'u_k''}\,\overline{u_j'u_l''} + \overline{u_i'u_l''}\,\overline{u_j'u_k''}$$

Cette hypothèse de normalité implique également que les corrélations triples sont nulles. L'hypothèse de quasi-normalité consiste alors à supposer que l'égalité précédente est respectée sans pour autant que les corrélations triples soient nulles, d'où son nom.

Détermination du spectre de Von Kármán modifié à partir de la connaissance de k et ϵ

L'utilisation d'un code $k-\epsilon$ pour les calculs aérodynamiques nous donne l'énergie cinétique k et son taux de dissipation ϵ. Il est alors possible d'en déduire un spectre d'énergie cinétique associé. Pour cela, nous utilisons les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} k &= \int_0^\infty E(\mathrm{k},t) d\mathrm{k} \\ \epsilon &= 2\nu \int_0^\infty \mathrm{k}^2 E(\mathrm{k},t) d\mathrm{k} \end{aligned}$$

L'expression du spectre (A.5) comporte deux constantes à déterminer: k_e et α. Numériquement, le problème est bien conditionné: bien qu'il y ait a priori couplage, pratiquement α est imposé par k et k_e par ϵ. La résolution se fait d'autant plus rapidement que l'on donne comme valeur initiale à α la solution analytique du problème approché construit en utilisant l'expression (A.4) du spectre de Von Kármán:

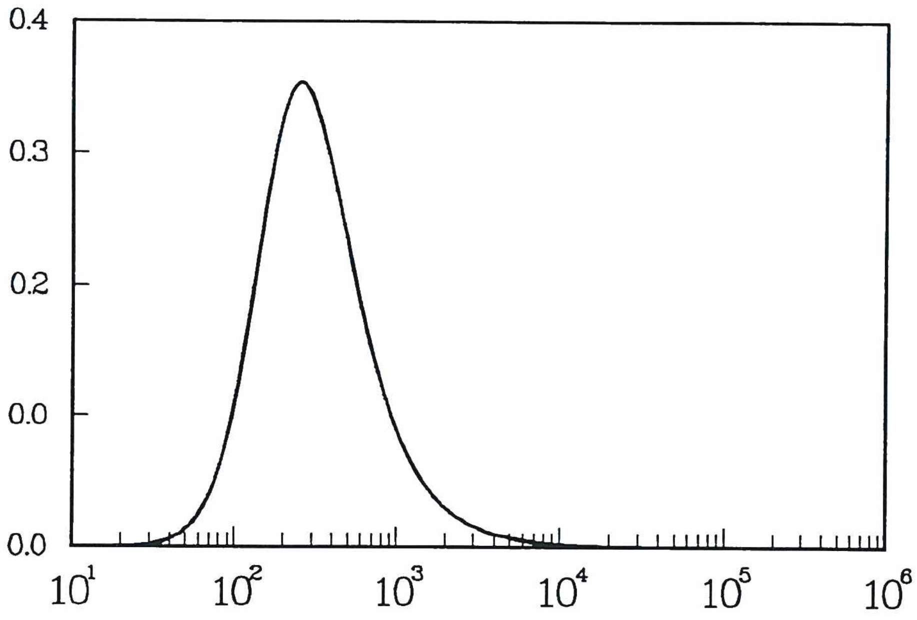


Figure A.1: Spectre $E(\mathrm{k})$ de l'énergie cinétique turbulente k. —relation (A.4), ······ relation (A.5): courbes confondues.

$$\alpha = \frac{55}{9\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

A titre d'illustration, on reproduit sur la figure A.1 le tracé respectif de $E(\mathrm{k})$ et de $2\nu \mathrm{k}^2 E(\mathrm{k})$. Notons que le spectre $E(\mathrm{k})$ donné par (A.4) est maximum pour $K_{max} = \sqrt{(12/5)}\mathrm{k}_e \simeq 1.55\mathrm{k}_e$. Le nombre d'onde k_e est donc caractéristique des structures turbulentes les plus énergétiques. On remarque également sur le tracé de la dissipation (figure A.2) l'influence de la modification apportée au spectre de Von Kármán (A.5).

Nous avons défini l'expression du tenseur des corrélations des vitesses en deux points (A.1) à l'aide de deux fonctions scalaires f et g. Pour une turbulence homogène isotrope, ces fonctions sont liées au spectre d'énergie cinétique E par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{2}{\overline{u^2}} \int_0^\infty \left(\frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^3 r^3} - \frac{\cos(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^2 r^2} \right) E(\mathrm{k}) d\mathrm{k} \\
g(r) &= \frac{1}{\overline{u^2}} \int_0^\infty \left(\frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}r} - \frac{\sin(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^3 r^3} + \frac{\cos(\mathrm{k}r)}{\mathrm{k}^2 r^2} \right) E(\mathrm{k}) d\mathrm{k}
\end{aligned}$$

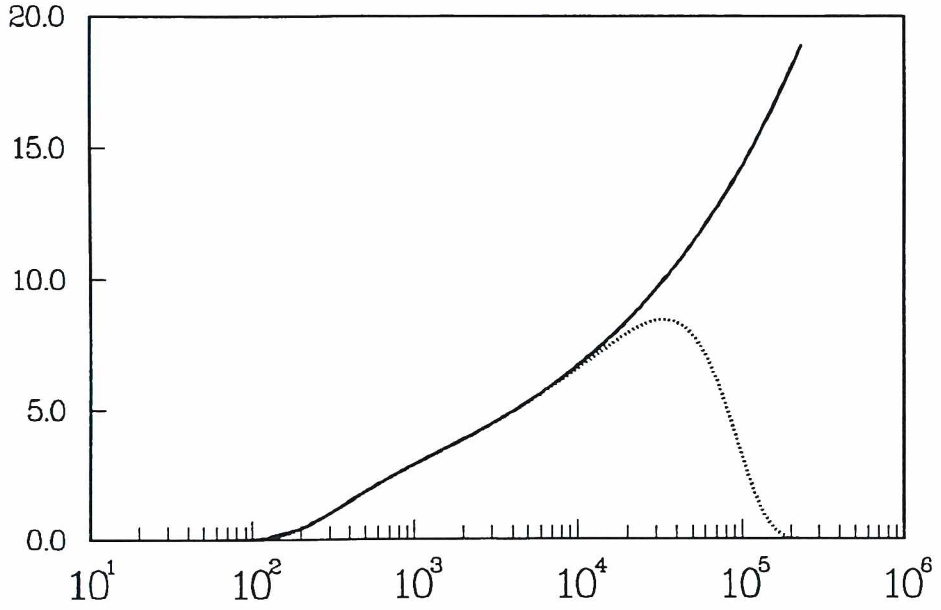


Figure A.2: Spectre $2\nu k^2 E(k)$ de la dissipation ϵ. — relation (A.4), ······ relation (A.5).

A.2 Equations du modèle $k-\epsilon$

L'objet de cette seconde partie est d'introduire le modèle $k-\epsilon$. On rappelle tout d'abord les équations de la mécanique des fluides, puis on présente le modèle dans le cadre d'un écoulement incompressible. Le cas compressible est alors étudié. Finalement, les équations à résoudre dans le cas d'un écoulement compressible axisymétrique sont explicitées en coordonnées cylindriques.

A.2.1 Equations de la mécanique des fluides

On rappelle ici une formulation des équations de la mécanique des fluides pour les écoulements compressibles:

- équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

- équation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

où le tenseur des contraintes P_{ij} pour un fluide newtonien s'exprime par une relation linéaire et isotrope entre les contraintes visqueuses et les taux de déformation:

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses, μ la viscosité dynamique du fluide et κ la viscosité en volume, nulle pour un fluide newtonien.

- équation de conservation de l'enthalpie:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_j\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial t} + u_j\frac{\partial p}{\partial x_j} + \Phi$$

où λ désigne le coefficient de conductivité thermique, c_p la chaleur spécifique à pression constante et Φ la fonction de dissipation des contraintes visqueuses:

$$\Phi = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Le flux de chaleur $\mathbf{q}$ est lié au gradient de température par la loi de Fourier $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$ et pour un gaz parfait $dh = c_p dT$.

A.2.2 Cas d'un écoulement incompressible

On suppose dans cette partie l'écoulement incompressible $\nabla.\mathbf{u} = 0$. On introduit alors la décomposition de Reynolds (1894), chaque variable ϕ est décomposée en $\phi = \overline{\phi} + \phi'$, où $-$ désigne la moyenne d'ensemble[†]. On aboutit ainsi pour les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie aux équations de Reynolds:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right) &= -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j x_j} - \rho\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j} \qquad \text{(A.6)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{h}}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial \overline{h}}{\partial x_j} - \rho\overline{u_j'h'}\right) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \qquad \text{(A.7)} \\ &+ \left\{\overline{u_j'\frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{\Phi}\right\}\end{aligned}$$

Le traitement statistique du terme convectif non linéaire des équations de Navier-Stokes (A.6) nécessite la modélisation d'une nouvelle fonction, ici le tenseur des contraintes de Reynolds $-\rho\overline{u_i'u_j'}$. La fermeture de l'équation d'énergie (A.7) est abordée au paragaphe suivant pour simplifier l'exposé.

[†]Cette moyenne s'identifie à la moyenne temporelle pour un processus stationnaire ergodique.

Il existe un grand nombre de modèles statistiques de la turbulence. On distingue généralement parmi ces modèles ceux à un point, parce qu'ils font intervenir des corrélations et grandeurs moyennes toujours exprimées au même point dans l'espace et le temps. A nouveau, on distingue deux grandes catégories dans ces modèles statistiques à un point. Ceux basés sur le concept de *viscosité turbulente* introduit par Boussinesq (1877), et ceux basés sur le calcul des moments d'ordre deux (modèle $R_{ij} - \epsilon$, ...). Dans cette première catégorie se trouve le populaire modèle $k-\epsilon$, développé par Jones et Launder[4] (1972), et repris par Launder et Spalding[5] (1974).

Le concept de viscosité turbulente consiste à lier le tenseur de Reynolds aux gradients de l'écoulement moyen par une expression linéaire, analogue à celle utilisée pour l'expression des contraintes visqueuses d'un fluide newtonien:

$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \tag{A.8}$$

où k désigne l'énergie cinétique turbulente, jouant ici le rôle d'une pression ($\overline{p_t} = 2/3\rho k$). La difficulté est ici de modéliser la viscosité turbulente ν_t, produit d'une échelle caractéristique de vitesse par une échelle caractéristique de longueur. Contrairement à la viscosité moléculaire, elle n'est pas intrinsèque au fluide mais dépend fortement de l'écoulement.

Le modèle $k - \epsilon$ s'établit en écrivant une équation de transport pour k et pour la dissipation visqueuse ϵ, donnée par:

$$\epsilon = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

L'obtention et la fermeture de ces deux équations de transport nécessitent un ensemble d'hypothèses et de modélisations qui ne sont pas reproduites ici. Le système à résoudre s'écrit finalement:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mathbf{P} - \epsilon \\
\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} \left(C_{\epsilon 1} \mathbf{P} - C_{\epsilon 2} \epsilon \right)
\end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{P}$, donné par:

$$\mathbf{P} = -\rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

s'exprime en utilisant le concept de viscosité turbulente (A.8). On note par ailleurs que cette puissance (production d'énergie turbulente) n'est irréversible que dans cette hypothèse. La viscosité turbulente se construit à partir de l'échelle de vitesse $\sqrt{k}$ et de l'échelle de longueur $k^{3/2}/\epsilon$:

$$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Enfin, les constantes empiriques sont celles données par Launder et Spalding[5]:

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

A.2.3 Cas d'un écoulement compressible

Une première idée pour étendre l'approche précédente aux écoulements compressibles consiste à généraliser la décomposition en champ moyen et champ fluctuant à la masse volumique. On s'aperçoit rapidement que le nombre de nouvelles corrélations à modéliser pour assurer la fermeture du système devient relativement important. Plusieurs auteurs, dont Favre[6] (1965) proposent d'introduire une moyenne d'ensemble pondérée par la masse volumique. A l'exception de la pression et de la densité, toute variable ϕ se décompose alors comme:

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}} + \phi''$$

On observe ainsi que les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont similaires à celles du cas incompressible. Elles s'écrivent respectivement:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho}\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}} - \overline{\rho u_i'' u_j''}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{h}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{h}\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j'' h''}\right) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \tilde{u}_j\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \\ &+ \left\{\overline{u}_j\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{\Phi}\right\}\end{aligned} \tag{A.9}$$

avec pour expression du tenseur des contraintes visqueuses:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

Par analogie avec le cas incompressible, on utilise de même le concept de viscosité turbulente pour exprimer le tenseur des contraintes de Reynolds $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$:

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\delta_{ij} \tag{A.10}$$

où l'énergie cinétique k est donnée par:

$$k = \frac{1}{2}\widetilde{u_i'' u_i''} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\overline{\rho}}$$

Pour des nombres de Reynolds élevés, la dissipation ϵ de l'énergie cinétique peut s'exprimer comme la somme de deux contributions: $\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d$. En effet:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \overline{\frac{1}{\overline{\rho}}\tau_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} = \epsilon_s + \epsilon_d + \epsilon_{Refaible} \\
\epsilon_s &= \nu\overline{\omega_i'\omega_i'} \\
\epsilon_d &= \frac{4}{3}\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} = \frac{4}{3}\nu\overline{d'^2}
\end{aligned}$$

ϵ_s est la dissipation solénoidale associée à la partie incompressible du champ de vitesse ($2\omega = \nabla \times \mathbf{u}$). L'évolution de cette dissipation est donnée par l'équation de transport standard de la dissipation présentée au paragraphe précédent. La seconde dissipation[7-10], dite dilatationnelle, résulte de la compressibilité du champ turbulent de vitesse. On utilise ici une modélisation proposée par Zeman[11] (1990) pour exprimer cette seconde dissipation:

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_d = \epsilon_s\left[1 + c_d f\left(M_t\right)\right] \text{ avec } M_t = \frac{\sqrt{2k}}{c} \text{ et } c_d = 0.75$$

où la fonction f est donnée par:

$$\begin{cases}
f(M_t) = 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{M_t - 0,1}{0,6}\right)^2\right] & \text{si } M_t > 0,1 \\
f(M_t) = 0 & \text{si } M_t \leq 0,1
\end{cases}$$

Finalement, le système des deux équations de transport pour k et ϵ prend la forme suivante dans le cas d'une turbulence compressible:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\rho}k\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{\rho}k\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \mathbf{P} + \mathbf{G} - \overline{\rho}\epsilon \qquad \text{(A.11)} \\
\frac{\partial\left(\overline{\rho}\epsilon_s\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{\rho}\epsilon_s\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j}\right] + \frac{\epsilon_s}{k}\left[C_{\epsilon 1}\left(\mathbf{P} + \mathbf{G}\right) - C_{\epsilon 2}\overline{\rho}\epsilon_s\right]
\end{aligned}$$

Le terme de production $\mathbf{P}$ s'exprime avec la fermeture sur les contraintes turbulentes (A.10):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} = -\overline{\rho u_i''u_j''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} &= \left[\mu_t\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\delta_{ij}\right]\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} \\
&= \mu_t\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right) \\
&= \mu_t 2\left(\tilde{s}_{ij}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{s}$ est le tenseur des déformations, et μ_t désigne la viscosité turbulente dynamique, donnée par:

$$\mu_t = \overline{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon_s}$$

Deux termes supplémentaires, un terme de production et un terme de corrélation pression-dilatation, apparaissent en écoulement compressible dans l'équation de transport de k (A.9). Le terme de production $\mathbf{G}$ est calculé d'après Jones[12]:

$$\mathbf{G} = \frac{\overline{\rho' u''_i}}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \qquad \text{avec} \qquad 0.7 \leq \sigma_t \leq 1.$$

alors que le terme de corrélation pression-dilatation $\overline{p'd'}$ n'est pas modélisé. σ_t désigne le nombre de Prandt turbulent. Le terme $\overline{\rho u''_j h''}$ intervenant dans l'équation de conservation de l'enthalpie (A.7) est de la même façon calculé par:

$$-\overline{\rho u''_j h''} \approx \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}$$

Les trois derniers termes (entre crochets) de l'équation de conservation de l'enthalpie ne sont pas pris en compte dans la résolution numérique.

A.2.4 Quelques remarques à ne pas perdre de vue

Bien que le modèle $k - \epsilon$ permette d'aborder un certain nombre d'écoulements complexes en donnant des résultats acceptables (voir par exemple la revue de Rodi[13], 1986), il présente de part sa construction un certain nombre de points faibles et de difficultés de modélisation, en particulier dans le cas compressible (voir Ha Minh[14], Vandromme[15]). Notons:

- L'utilisation du concept de viscosité turbulente pour la fermeture des contraintes de Reynolds, mis en défaut pour un certain nombre de configurations d'écoulement (jets pariétaux, ...). Par cette fermeture, on donne aux contraintes turbulentes, provenant de la non linéarité convective, un caractère diffusif qu'elles n'ont pas généralement. De plus, la viscosité turbulente, proportionnelle au rapport k^2/ϵ, est sur-estimée dans les zones de fort cisaillement (couche limite, couche de mélange). On est ainsi amené à une modélisation particulière pour les couches limites: modèles à bas nombre de Reynolds.

- La représentation des trois contraintes normales par leur demi-somme k, qui implique une évolution identique de ces trois contraintes, même si a priori l'anisotropie est contenue dans la modélisation. Cette représentation devient non satisfaisante dans les zones d'écoulement où une évolution de ces trois contraintes est différente, voir le cas d'un jet plan par exemple.

A.2.5 Equations du modèle $k-\epsilon$ en coordonnées cylindriques

Les équations du modèle $k - \epsilon$ pour un écoulement compressible sont ici explicitées en coordonnées cylindriques. Pour toute la suite, on suppose l'écoulement moyen axisymétrique: $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}_r \mathbf{u_r} + \tilde{u}_z \mathbf{u_z}$. Une méthode simple pour exprimer les équations de

Navier-Stokes en coordonnées cylindriques consiste à exprimer ces équations vectoriellement, à partir d'opérateurs différentiels dont on connaît a priori l'expression en coordonnées cylindriques.

- équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla . (\overline{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0$$

soit encore en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{\rho} \tilde{u}_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_z)}{\partial z} = 0$$

- équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla . \boldsymbol{\tau}$$

soit encore

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \nabla . \boldsymbol{\tau}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla . \boldsymbol{\tau} &= \nabla . \left[\mu \left(\nabla \mathbf{u} +^t \nabla \mathbf{u} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla . \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \\ &= \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla . \mathbf{u}) \\ &= -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{4}{3} \mu \nabla (\nabla . \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Il vient alors pour l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement, en posant $\mu_e = \mu + \mu_t$:

$$\overline{\rho} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} \right) - \tilde{\mathbf{u}} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}) \right] = -\nabla \left(\overline{p} + \frac{2}{3} \overline{\rho} k \right) + \frac{\mu_e}{\mu} \nabla . \overline{\boldsymbol{\tau}}$$

soit finalement en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_z)}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{p} + \frac{2}{3} \overline{\rho} k \right) \\ &\quad + \frac{\mu_e}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{\tau}_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} \right] \\ \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_z)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{\rho} \tilde{u}_r \tilde{u}_z)}{\partial r} + \frac{\partial (\overline{\rho} \tilde{u}_z \tilde{u}_z)}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{p} + \frac{2}{3} \overline{\rho} k \right) \\ &\quad + \frac{\mu_e}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{\tau}_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\overline{\tau} &= \left(\nabla\tilde{\mathbf{u}} + {}^t\nabla\tilde{\mathbf{u}}\right) - \frac{2}{3}(\nabla.\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix} 2\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\nabla.\tilde{\mathbf{u}} & 0 & \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} \\ 0 & 2\frac{\tilde{u}_r}{r} - \frac{2}{3}\nabla.\mathbf{u} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} & 0 & 2\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla.\tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{h}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\tilde{h}\tilde{\mathbf{u}}\right) = \nabla.\left[\left(\frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)\nabla\tilde{h}\right] + \frac{\partial\overline{p}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}}.\nabla\overline{p}$$

soit encore avec l'énergie interne $e = h - p/\rho$:

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{e}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\tilde{e}\tilde{\mathbf{u}}\right) = \nabla.\left[\frac{\mu_t}{\sigma_t}\nabla\left(\tilde{e} - \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right)\right] + \nabla.\left(\lambda\nabla\tilde{T}\right)$$

- équations du modèle $k - \epsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\rho}k\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}k\tilde{\mathbf{u}}\right) &= \nabla.\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\nabla k\right] + \mathbf{P} + \mathbf{G} - \overline{\rho}\epsilon \\
\frac{\partial\left(\overline{\rho}\epsilon_s\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\epsilon_s\tilde{\mathbf{u}}\right) &= \nabla.\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\nabla\epsilon_s\right] + \frac{\epsilon_s}{k}\left[C_{\epsilon 1}\left(\mathbf{P} + \mathbf{G}\right) - C_{\epsilon 2}\overline{\rho}\epsilon_s\right]
\end{aligned}$$

avec pour expression des termes **P** et **G**:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= 2\mu_t\left(\tilde{s}_{ij}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right) \\
&= 2\mu_t\left(\tilde{s}_{rr}^2 + \tilde{s}_{zz}^2 + \tilde{s}_{\theta\theta}^2 + 2\tilde{s}_{rz}^2\right) - \frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right) \\
&= 2\mu_t\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{u}_r}{r}\right)^2\right] + \mu_t\left(\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial r}\right)^2 \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right) \\
\mathbf{G} &= -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mu_t}{\sigma_t}\nabla\overline{\rho}.\nabla\overline{p}
\end{aligned}$$

Le système s'écrit finalement sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{t}} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{z}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\mathbf{G}\right)}{\partial r} = \mathbf{S}$$

en décomposant les flux $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ en une partie eulérienne et une partie visqueuse $\mathbf{F} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_v}$ et $\mathbf{G} = \mathbf{G_e} + \mathbf{G_v}$, avec:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\tilde{u}_r \\ \overline{\rho}\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}\tilde{e} \\ \overline{\rho}k \\ \overline{\rho}\epsilon \end{pmatrix} \quad \mathbf{F_e} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}\tilde{u}_r\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}\tilde{u}_z\tilde{u}_z + \overline{p} + \frac{2}{3}\overline{\rho}k \\ \overline{\rho}\tilde{e}\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}k\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}\epsilon\tilde{u}_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{G_e} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\tilde{u}_r \\ \overline{\rho}\tilde{u}_r\tilde{u}_r + \overline{p} + \frac{2}{3}\overline{\rho}k \\ \overline{\rho}\tilde{u}_r\tilde{u}_z \\ \overline{\rho}\tilde{e}\tilde{u}_r \\ \overline{\rho}k\tilde{u}_r \\ \overline{\rho}\epsilon\tilde{u}_r \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_e\left(\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial r}\right) \\ -\mu_e\left[\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{u}_r}{r}\right)\right] \\ -\frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{e} - \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right) - \lambda\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z} \\ -\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial z} \\ -\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_e\left[\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\frac{\tilde{u}_r}{r} - \frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}\right] \\ -\mu_e\left(\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial r}\right) \\ -\frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial}{\partial r}\left(\tilde{e} - \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}\right) - \lambda\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r} \\ -\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial r} \\ -\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r}\left[\overline{p} + \frac{2}{3}\overline{\rho}k\right] - \mu_t\frac{1}{r}\left[\frac{4}{3}\frac{\tilde{u}_r}{r} - \frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}\right] \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{P} + \mathbf{G} - \overline{\rho}\epsilon \\ \frac{\epsilon_s}{k}\left[C_{\epsilon 1}\left(\mathbf{P} + \mathbf{G}\right) - C_{\epsilon 2}\overline{\rho}\epsilon_s\right] \end{pmatrix}$$

A.3 Le code ESTET

Le code ESTET, Etudes et Simulations Tridimensionnelles d'Ecoulements Turbulents, est développé par le Laboratoire National d'Hydraulique de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France[16–17].

L'algorithme employé est basé sur la méthode de projection pour la discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes, introduite par Chorin et Temam (1967). La méthode des caractéristiques est utilisée pour l'étape de convection. L'étape de diffusion et celle de pression-continuité sont résolues par une méthode implicite. Le maillage est structuré mais non régulier.

Tous les calculs sont effectués avec une version axisymétrique du code ESTET, et les équations résolues sont celles du modèle $k-\epsilon$ pour une turbulence compressible présentées dans la partie précédente.

Références

[1]**Batchelor, G.K.**, 1953, "The theory of homogeneous turbulence," *Cambridge University Press.*

[2]**Hinze, J.O.**, 1975, "Turbulence, second edition," *McGraw-Hill*, New York.

[3]**Lesieur, M.**, 1990, "Turbulence in fluids - Stochastic and numerical modelling," *Kluwer Academic Publishers.*

[4]**Jones, W.P. & Launder, B.E.**, 1972, "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301-314.

[5]**Launder, B.E. & Spalding, D.B.**, 1974, "The numerical computation of turbulent flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3(2), pp. 269-289.

[6]**Favre, A.**, 1965, "Statistical equations of turbulent gases," *Journal of Mechanics*, Vol. 4(3), pp. 361-390.

[7]**Blaisdell, G.A. & Zeman, O.**, 1992, "Investigation of the dilatational dissipation in compressible homogeneous shear flow," *Center for Turbulence Research, Stanford.*

[8]**Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M.Y. & Kreiss, H.O.**, 1991, "The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 227, pp. 473-493.

[9]**Zeman, O.**, 1990,"Compressible turbulent flows: modeling and similarity considerations," *Center for Turbulence Research*, Annual Research Briefs.

[10]**Zeman, O. & Blaisdell, G.A.**, 1991, "New physics and models for compressible turbulent flows," *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, pp. 445-454.

[11]**Zeman, O.**, 1990, "Dilatation-dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layers," *Phys. Fluids A*, Vol. 2(2), pp. 178-188.

[12]**Jones, W.P.**, 1979, "Prediction methods for turbulent flows," *Von Kàrmàn Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 1979-2.

[13]**Rodi, W.**, 1984, "Turbulence models and their application in hydraulics - A state of the art review," *IAHR.*

[14]**Ha Minh, H.**, 1991, "Physique et modélisation de la turbulence en écoulements de fluides," *Ecole de printemps de Mécanique des Fluides Numérique*, Aussois, France.

[15]**Vandromme, D**, 1993, "Turbulence modeling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers," in *von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture Series 1993-02.

[16]**Mattei, J.D. & Simonin, O.**, 1992, "Logiciel ESTET. Manuel théorique de la version 3.1: tome I, modélisations physiques," *Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches*, HE-44/92.38.

[17]**Marty, G., Mattei, J.D. et al.**, 1993, "Recueil de fiches de validation du code ESTET, version 3.1," *Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches*, HE-44/92.35.

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) &= \rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})\right] \\ &= -\nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla.\boldsymbol{\tau} &= \nabla.\left[\mu\left(\nabla\mathbf{u} +^t \nabla\mathbf{u}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla.\mathbf{u}\right)\mathbf{I}\right] \\ &= \mu\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mu\nabla\left(\nabla.\mathbf{u}\right) \\ &= -\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \frac{4}{3}\mu\nabla\left(\nabla.\mathbf{u}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(\rho h\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho h\mathbf{u}\right) = -\nabla.\mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla p + \Phi$$

$$\Phi = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{x_j} = \mu\left[2s_{ij}^2 - \frac{2}{3}\left(\nabla.\mathbf{u}\right)^2\right]$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T \qquad dh = c_p dT \qquad p = \rho r T$$

Tableau A.1: Equations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p}+\frac{2}{3}\overline{\rho}k\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\mu_t\right)\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{h}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}\tilde{h}\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\lambda}{c_p}+\frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial \overline{p}}{\partial t}+\tilde{u}_j\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\rho}k\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}k\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+\mathbf{P}+\mathbf{G}-\overline{\rho}\epsilon\\ \frac{\partial\left(\overline{\rho}\epsilon_s\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}\epsilon_s\tilde{u}_j\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon_s}{\partial x_j}\right]+\frac{\epsilon_s}{k}\left[C_{\epsilon 1}\left(\mathbf{P}+\mathbf{G}\right)-C_{\epsilon 2}\overline{\rho}\epsilon_s\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \left[\mu_t\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)-\frac{2}{3}\overline{\rho}k\delta_{ij}\right]\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\\ &= \mu_t 2\left(\tilde{s}_{ij}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\mu_t\nabla.\tilde{\mathbf{u}}+\overline{\rho}k\right)\left(\nabla.\tilde{\mathbf{u}}\right)\\ \mathbf{G} &= -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \qquad \text{avec} \qquad 0.7\leq\sigma_t\leq 1.\end{aligned}$$

$$\mu_t=\overline{\rho}C_\mu\frac{k^2}{\epsilon_s}$$

$$C_\mu=0.09 \qquad C_{\epsilon 1}=1.44 \qquad C_{\epsilon 2}=1.92 \qquad \sigma_k=1.0 \qquad \sigma_\epsilon=1.3$$

$$\epsilon=\epsilon_s+\epsilon_d=\epsilon_s\left[1+c_d f\left(M_t\right)\right] \text{ avec } M_t=\frac{\sqrt{2k}}{c} \text{ et } c_d=0.75$$

$$\begin{cases} f(M_t)=1-\exp\left[-\left(\frac{M_t-0{,}1}{0{,}6}\right)^2\right] & \text{si } M_t>0{,}1\\ f(M_t)=0 & \text{si } M_t\leq 0{,}1\end{cases}$$

Tableau A.2: Equations du modèle $k-\epsilon$ dans le cas compressible

Annexe B

Propagation axisymétrique

Dans cette annexe, on consacre la première partie à l'étude du rayonnement d'une source annulaire et la seconde à une brève description du code EOLE, résolvant les équations d'Euler linéarisées dans le cas d'une propagation axisymétrique.

B.1 Rayonnement d'une source annulaire

L'objectif est ici de montrer le biais introduit sur la solution numérique par un calcul de propagation axisymétrique (fluctuations orthoradiales interdites) plutôt qu'un calcul tridimensionnel complet. En effet, le rayonnement acoustique d'une source ponctuelle est vu comme le rayonnement d'une source annulaire dans le cas d'une propagation axisymétrique.

B.1.1 Solution analytique

Pour un milieu homogène et au repos (p_o, ρ_o), de célérité c_o, les équations d'Euler linéarisées se réduisent à:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = Q \text{ soit encore } \dfrac{\partial p}{\partial t} + \gamma p_o \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = c_o^2 Q \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_o} \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

où Q représente le débit masse de fluide par unité de volume et par unité de temps d'une source ponctuelle. L'équation de propagation se déduit alors classiquement:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\gamma$$

avec pour une source harmonique:

$$-\gamma = c_o^2 \frac{\partial Q}{\partial t} = i\omega c_o^2 Q_o e^{i\omega t}$$

La solution intégrale de cette équation s'obtient à partir de la fonction de Green associée:

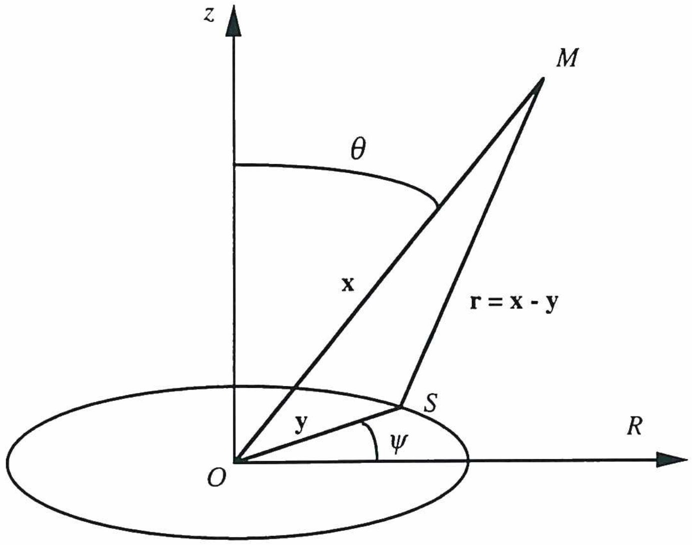


Figure B.1: Notations.

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi}\iint \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_o}\right)\gamma(\mathbf{y},\tau)\frac{d\mathbf{y}}{r}d\tau \\
&= \frac{i\omega Q_o e^{i\omega t}}{4\pi}\int_V e^{-ikr}\frac{d\mathbf{y}}{r}
\end{aligned}
$$

où on a posé $k = \omega\ c_o$ et $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. On s'intéresse alors au champ rayonné par une source annulaire située dans le plan $z = 0$, de rayon σ, assimilée à une distribution de sources ponctuelles. La figure B.1 indique les notations utilisées.

Les coordonnées cartésiennes des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont donnés par:

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\cos\psi \\ R\sin\psi \end{bmatrix} \text{ avec } r =\mid \mathbf{x}-\mathbf{y} \mid= \sqrt{r^2 - 2rR\sin\theta\cos\psi + R^2}
$$

La solution acoustique est alors donnée par l'expression suivante:

$$
p(\mathbf{x},t) = \frac{i\omega Q_o e^{i\omega t}}{4\pi}\int_V \frac{e^{-ik\sqrt{r^2-2rR\sin\theta\cos\psi+R^2}}}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta\cos\psi+R^2}}\delta(R-\sigma)\delta(z)\,R\,dR\,d\psi\,dz \tag{B.1}
$$

$$
= \frac{i\omega Q_o \sigma e^{i\omega t}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{r^2-2r\sigma\sin\theta\cos\psi+\sigma^2}}}{\sqrt{r^2-2r\sigma\sin\theta\cos\psi+\sigma^2}}d\psi \tag{B.2}
$$

- Solution exacte en $\theta = 0$. Le profil de pression axial est donné après simplification par l'expression:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega Q_o \sigma e^{i\omega t}}{2} \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+\sigma^2}}}{\sqrt{r^2+\sigma^2}}\, d\psi$$

- Solution en champ acoustique lointain, i.e. pour $r > \sigma$. L'expression en champ acoustique lointain s'obtient par développement limité de (B.2) en conservant la variation de phase uniquement au numérateur. On obtient ainsi:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega Q_o}{4\pi} \frac{\sigma}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_0^{2\pi} e^{ik\sigma \sin\theta \cos\psi}\, d\psi$$

Soit encore, en notant J_o la fonction de Bessel d'ordre 0:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega Q_o}{4\pi} \frac{\sigma}{r} e^{i(\omega t - kr)} 2\pi J_o(k\sigma \sin\theta)$$

La pression acoustique en champ lointain est donc donnée par:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{i\omega Q_o}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} 2\pi\sigma J_o(k\sigma \sin\theta) \tag{B.3}$$

Dans cette expression (B.3), on reconnait le produit de trois facteurs: le premier représente le rayonnement acoustique d'une source ponctuelle, le deuxième la surface de cette source, et le troisième le facteur de directivité.

On se propose de calculer l'angle correspondant à la fin du premier lobe. La pression p s'annule lorsque $J_o(k\sigma \sin\theta) = 0$, i.e. pour $k\sigma \sin\theta = \mu_o$, où μ_o désigne le premier zéro de J_o. L'angle correspondant au pied du premier lobe est donc donné par:

$$\sin\theta = \frac{\mu_o}{k\sigma} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\lambda}{\sigma}$$

On note que la directivité est d'autant meilleure que θ est petit, i.e. $\lambda < \sigma$: c'est le cas d'une source non compacte.

B.1.2 Solution numérique obtenue par le code EOLE

On s'intéresse maintenant à la solution numérique du champ acoustique rayonné en propagation axisymétrique par une source ponctuelle, i.e. par une source annulaire pour une propagation tridimensionnelle. Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage régulier de 300×300 points, avec un pas $\Delta = 2.5 \times 10^{-3}$ m. La source harmonique a pour fréquence $f = 5000$ Hz. Cette source est localisée dans le plan $z = 0$, avec $\sigma = 0.07$ m. Le pas de temps est fixé à 7.2×10^{-6} s.

Les figures B.2 et B.3 donnent respectivement le champ de pression calculé numériquement par EOLE, et la solution analytique donnée par l'expression (B.2). Plus

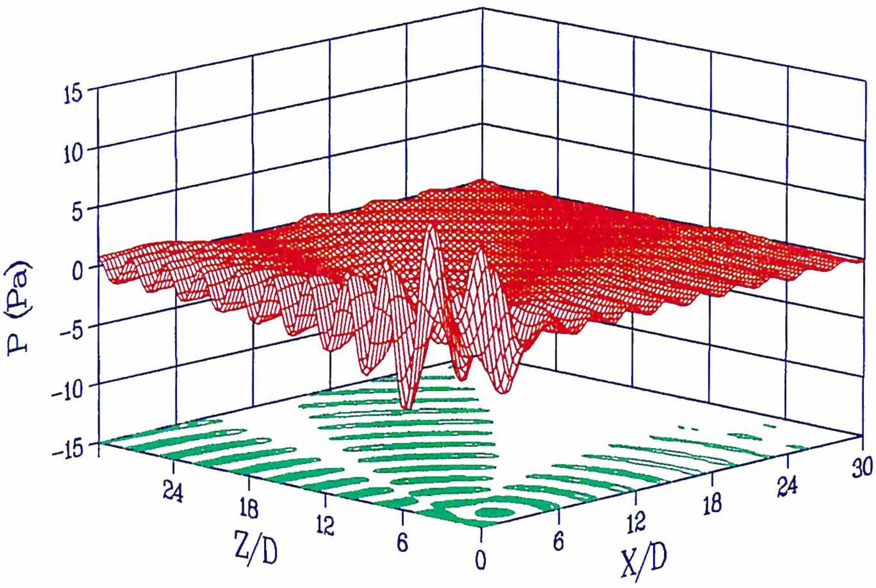


Figure B.2: Rayonnement acoustique d'une source annulaire: champ de pression calculé par EOLE.

précisément, la figure B.4 donne la pression obtenue sur l'arc de cercle de rayon $r = 0.75$ m. Ce profil de pression est comparé au profil théorique donné par B.3. Les figures B.5 et B.6 comparent pour les deux profils axiaux $r = \sigma$ et $r = 0$, la solution analytique, la solution en champ acoustique lointain et celle obtenue par le code EOLE. Toutes ces comparaisons entre la solution analytique et la solution obtenue par résolution des équations d'Euler sont satisfaisantes. On note ainsi l'influence sur la directivité d'une propagation axisymétrique: celle-ci dépend de la fréquence de la source et de sa position par rapport à l'axe de symétrie.

B.2 Présentation du code EOLE

Le code EOLE† résout dans le domaine temporel les équations d'Euler linéarisées, système hyperbolique du premier ordre sur les variables pression et vitesse acoustique. La géométrie est soit bidimensionnelle, soit axisymétrique, et le maillage est structuré mais peut être non régulier. Le solveur monodimensionnel est construit à partir d'une formulation faible du problème (de type éléments finis), et la résolution bidimensionnelle est effectué de façon fractionnée suivant les deux axes du maillage. La méthode employé présente un certain nombre d'avantages pour l'acoustique: le schéma numérique est d'ordre élevé, donc très peu dissipatif et de plus peu dispersif.

†développé au département Acoustique et Mécanique Vibratoire de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France.

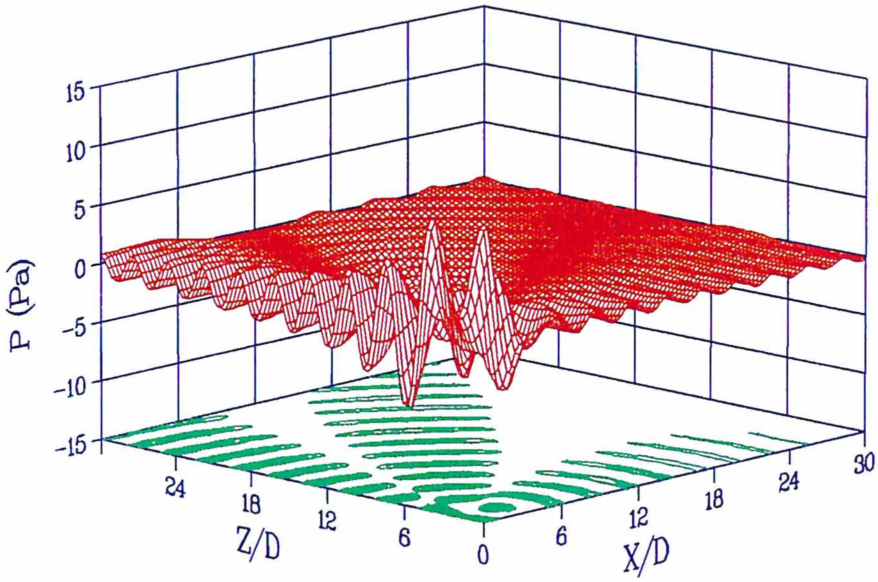


Figure B.3: Rayonnement acoustique d'une source annulaire: champ de pression analytique.

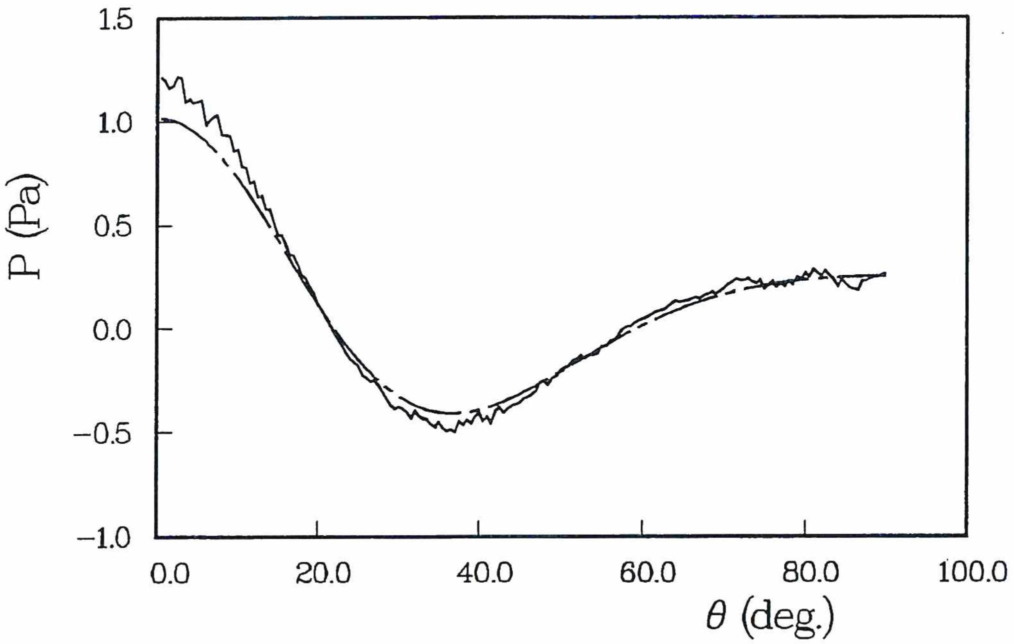


Figure B.4: Rayonnement acoustique d'une source annulaire: profil de pression sur un arc de cercle en champ acoustique lointain. — Eole calcul axisymétrique, - - - solution analytique en champ lointain.

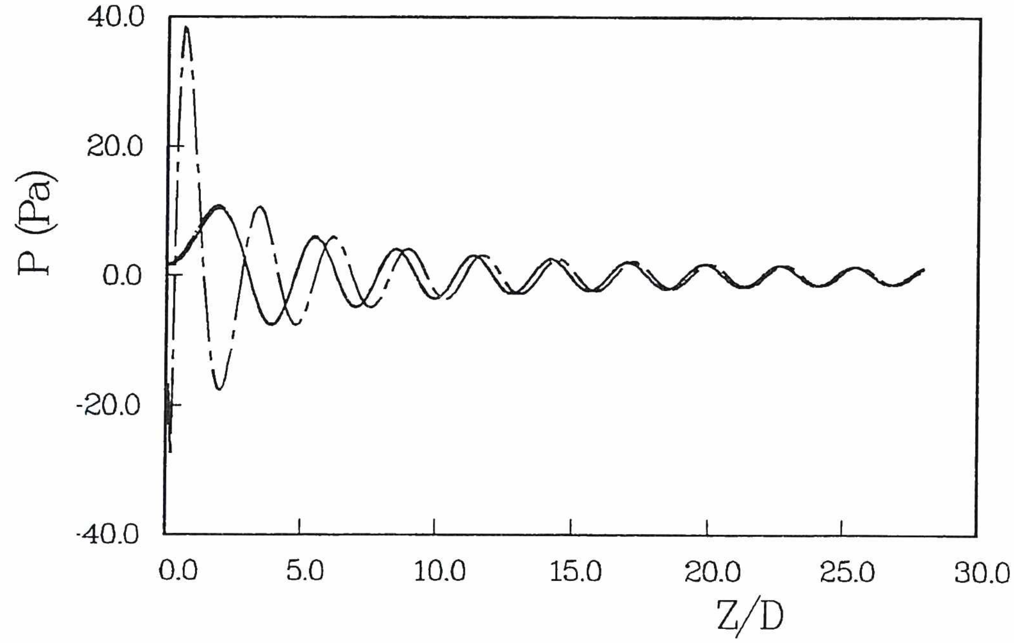


Figure B.5: Rayonnement acoustique d'une source annulaire: profil axial de la pression en $r = 0$. — Eole calcul axisymétrique, - - - solution analytique en champ lointain, — · — solution analytique.

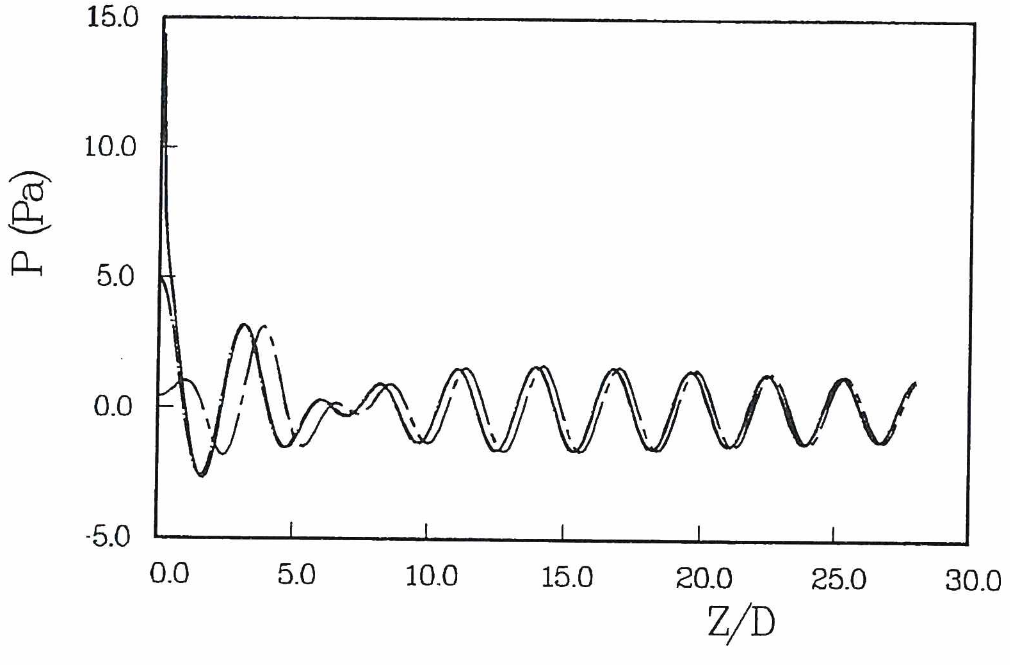


Figure B.6: Rayonnement acoustique d'une source annulaire: profil axial de la pression en $r = \sigma$, rayon de la source annulaire. — Eole calcul axisymétrique, - - - solution analytique en champ lointain, — · — solution analytique.

Dans le cas d'une propagation axisymétrique, la linéarisation des équations d'Euler se fait autour d'un écoulement moyen axisymétrique stationnaire, et suppose de plus que la propagation soit elle-même axisymétrique, i.e. fluctuations orthoradiales interdites. Le système des *équations d'Euler non linéarisées* s'écrit dans ces conditions:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial p}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial u_z}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array}\right.$$

Ce système d'équations, alors linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire $\left(\overline{\mathbf{U}}, \overline{P}\right)$, peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{A_r}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{A_z}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{C} = 0$$

où $\mathbf{w}$ est le vecteur inconnu, alors que les matrices $\mathbf{A_r}$, $\mathbf{A_z}$, $\mathbf{B}$ ainsi que le vecteur $\mathbf{C}$ décrivent la physique du problème. Les éléments précédents ont pour forme explicite respectivement, en supposant que les fluctuations de pression sont isentropiques, et en utilisant la relation des gaz parfaits:

$$\overline{c^2} = \frac{\gamma\overline{P}}{\overline{\rho}} \text{ et } p = \overline{c^2}\rho$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p \\ u_r \\ u_z \end{bmatrix} \mathbf{A_r} = \begin{bmatrix} \overline{U_r} & \gamma\overline{P} & 0 \\ \frac{1}{\overline{\rho}} & \overline{U_r} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{U_r} \end{bmatrix} \mathbf{A_z} = \begin{bmatrix} \overline{U_z} & 0 & \gamma\overline{P} \\ 0 & \overline{U_z} & 0 \\ \frac{1}{\overline{\rho}} & 0 & \overline{U_z} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma\frac{\overline{U_r}}{r} & \gamma\frac{\overline{P}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} u_r\dfrac{\partial\overline{P}}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial\overline{P}}{\partial z} + \gamma p\left(\dfrac{\partial\overline{U_r}}{\partial r} + \dfrac{\partial\overline{U_z}}{\partial z}\right) \\ u_r\dfrac{\partial\overline{U_r}}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial\overline{U_r}}{\partial z} - \dfrac{p}{\overline{\rho}^2\overline{c^2}}\dfrac{\partial\overline{P}}{\partial r} \\ u_r\dfrac{\partial\overline{U_z}}{\partial z} + u_z\dfrac{\partial\overline{U_z}}{\partial z} - \dfrac{p}{\overline{\rho}^2\overline{c^2}}\dfrac{\partial\overline{P}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

On note que le cas axisymétrique diffère du cas bidimensionnel par la présence de la matrice $\mathbf{B}$, nulle pour ce dernier cas.

Références

Esposito, P., 1987, "A new numerical method for wave propagation in a complex flow," *5th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent*

Flow, Montral, July.

Guivarch, M., 1993, "Propagation acoustique en écoulement complexe," *13ème colloque d'aéro- et d'hydro-acoustique de la SFA, 9-13 juin*, Ecole Centrale de Lyon, Ecully, France.

Lafon, P., 1989, "Propagation acoustique bidimensionnelle. Deux applications du code EOLE," *Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France*, HP 54/89.010.

Lafon, P., 1989, "Un calcul de l'influence de la température et de la vitesse de rejet sur le bruit rayonné par les cheminées," *Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France*, HP-63/89.109.

Annexe C

Résumé - Publications

Résumé

Ce travail est consacré à la modélisation du bruit rayonné par des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques. L'objectif est de développer, à l'image de ce qui est fait en mécanique des fluides numérique, des méthodes applicables à des configurations industrielles.

Dans une première partie, on s'intéresse à une modélisation statistique associée à une résolution intégrale de l'équation de Lighthill. On développe deux approches pour des écoulements turbulents libres possédant un nombre de Mach convectif soit subsonique, soit supersonique. Dans le premier cas, on calcule le bruit de mélange de la turbulence. Ce modèle fournit l'intensité et la puissance acoustique, le spectre en fonction de l'angle d'observation, ainsi que la distribution spatio-fréquentielle des sources acoustiques. Dans le second cas, on calcule le rayonnement des ondes de Mach dues à la convection supersonique des structures turbulentes par l'écoulement moyen. De cette modélisation, on dispose finalement de la puissance acoustique et de l'intensité directionnelle. Une synthèse de ces deux modèles permet d'avoir une vue globale du rayonnement acoustique d'un jet libre.

Le calcul du champ aérodynamique moyen est effectué par résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées, avec un modèle de turbulence $k - \epsilon$ développé pour des écoulements turbulents compressibles. La validation est réalisée pour le cas de jets libres circulaires froids subsoniques et supersoniques parfaitement détendus, avec un nombre de Mach nominal M tel que $0.35 \leq M \leq 2$. Le cas d'un jet chaud à $M = 2$ et $T_{jet}/T_o = 2.5$ est également étudié. Les comparaisons effectuées avec des données expérimentales de la littérature sont très satisfaisantes.

Dans une seconde partie, on utilise les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen stationnaire pour calculer le rayonnement acoustique. Les termes sources acoustiques sont identifiés par analogie avec les équations de l'aéroacoustique. Le champ moyen est déterminé par résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées, alors que l'on utilise un champ spatio-temporel synthétique pour la turbulence. Le système formé par les équations d'Euler linéarisées et leurs termes sources, déduit du champ turbulent stochastique précédent, est résolu numériquement

On applique alors cette démarche au cas d'un jet libre subsonique. Les comparaisons avec les données expérimentales sont très encourageantes.

Ces deux approches sont semblables dans le sens où l'on utilise systématiquement les grandeurs locales de l'écoulement pour le calcul du champ acoustique. Elles sont fondamentalement différentes dans leur façon de décrire la turbulence, de produire et de propager le champ acoustique. En particulier, dans la seconde approche développée, on tient compte des effets de l'écoulement moyen sur la propagation des ondes sonores.

Sur un plan pratique, les développements réalisés ici sont déjà utilisés pour la prévision aéroacoustique dans des systèmes industriels.

Abstract

This work deals with the modelling of the acoustic field radiated by free turbulent subsonic and supersonic flows. The aim of this study is finally to develop methods applicable to industrial configurations, as in numerical fluid mechanics.

First, one uses a statistical model coupled with an integrale resolution of the Lighthill's equation. Two different approaches has been developed for free turbulent flow either with subsonic or supersonic convection Mach number. In the first approach, one calculates the turbulent mixing noise. This model produces the acoustic intensity and power, spectra and space-frequency distribution of acoustic sources. In the second approach, one calculates the Mach wave radiation due to the supersonic convection of turbulent large eddies. This model gives the acoustic power and directivity. A synthesis of these two models allows a complete description of the free jet acoustic radiation. Computation of the aerodynamic fluid is performed with a compressible $k - \epsilon$ turbulence model. This approach is applied to subsonic and perfectly expanded supersonic cold round free jets, such as $0.35 \leq M \leq 2$. The case of a $M = 2$ and $T_{jet}/T_o = 2.5$ hot supersonic jet is also treated. Comparisons with available experimental data show a very good agreement.

In a second part, the linearized Euler equations around a stationary mean flow are used to compute the acoustic field. Acoustic source terms are identified by analogy with aeroacoustic wave equations. The mean flow is calculated by solving averaged Navier-Stokes equations while the turbulent field is synthetized. The system formed by the Euler's equations and their source terms deduced from the stochastic turbulent field, is numerically solved. This method is finally applied to the case of a subsonic jet. Comparisons with experimental data are very encouraging.

These two methods are similar in a sense that one systematically uses local mean flow data for acoustic prediction. However, they are basically different in the way they describe turbulence and the acoustic field propagates. Thus, the second approach takes into account the mean flow effects on the acoustic waves propagation.

In practice, these developments are already used for acoustic prediction of industrial systems.

Publications parues dans des revues avec comité de lecture:

- **Béchara, W., Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994," Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **32(3)**, March, pp. 455-463.
- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994, "Computation of subsonic and supersonic jet mixing noise using a modified $k-\epsilon$ model for compressible free shear flows," *Acta Acustica*, **2(2)**, April, pp. 101-112.
- **Béchara, W., Lafon, P., Bailly, C., Candel, S.**, 1992, "Application of a $k-\epsilon$ model to the prediction of noise for simple and coaxial free jets," *Journal of the Acoustical Society of America*, accepted for publication.
- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994, "Calculations of eddy Mach wave acoustic radiation using a statistical model and a compressible turbulence closure," *Journal of Fluid Mechanics*, submitted for publication.

Conférences avec acte:

- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1993, "Modélisation du rayonnement acoustique des ondes de Mach dans les jets supersoniques parfaitement détendus," *13ème colloque d'aéro- et d'hydro-acoustique de la SFA*, 9-13 juin, Ecole Centrale de Lyon.
- **Bailly, C., Béchara, W., Lafon, P., Candel, S.**, 1993, "Jet noise predictions using a $k-\epsilon$ turbulence model," *15th Aeroacoustics Conference*, AIAA-93-4412, October 25-27, Long Beach, C.A.
- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994, "Modélisation du rayonnement acoustique des ondes de Mach. Application aux jets libres supersoniques avec prise en compte de la température," *Ambiance acoustique et vibratoire des systèmes de transport spatial*, CNES - ONERA, 8-15 Février, Jouy-en-Josas.
- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994, "Une approche stochastique pour la modélisation du bruit des écoulements turbulents," *3ème congrès français d'acoustique, SFA*, 2-6 Mai, Toulouse.
- **Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.**, 1994, "Stochastic approach to noise modelling for free turbulent flows," *Flow acoustics: a new technology audit*, Ffowcs Williams & Comte-Bellot, 11-13 Juillet, Ecole Centrale de Lyon.