N° d'ordre : 2006-09 ANNÉE 2006

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Sébastien BARRÉ

Étude numérique et expérimentale du bruit aérodynamique avec application aux jets ronds subsoniques

Soutenue le 16 mars 2006 devant la Commission d'Examen

JURY

Examinateurs :	M.	Christophe BAILLY
	M.	Christophe BOGEY
	Mme	Geneviève COMTE-BELLOT
	M.	Georges ÉLIAS
	M.	Hadrien LAMBARÉ
	M.	Geoffrey LILLEY (Rapporteur)
	M.	Pierre SAGAUT (Rapporteur)

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509

École Centrale de Lyon

Ce travail s'est déroulé au Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Il a eu lieu dans le cadre du pôle Acoustique et Environnement Induits au Décollage (AEID). Il a été cofinancé par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et par le Centre National de Recherche Scientifique (CNRS).

Je souhaite tout d'abord remercier très chaleureusement Christophe Bogey, chargé de recherche au CNRS, et Christophe Bailly, professeur de l'ECL, pour avoir encadré cette thèse et pour m'avoir accordé leur confiance. Leur enthousiasme et leur grande disponibilité ont grandement encouragé l'avancement de mes travaux.

J'exprime ensuite toute ma gratitude à Geneviève Comte-Bellot, professeur émérite de l'ECL et correspondante de l'Académie des Sciences de Paris, pour ses conseils, ses suggestions, et pour avoir accepté de présider le jury.

J'associe également à ces remerciements Hadrien Lambaré, du Centre National d'Études Spatiales, pour avoir suivi mes travaux et pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Toute ma reconnaissance s'adresse à Pierre Sagaut, professeur de l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI), et à Geoffrey Lilley, professeur émérite de l'université de Southampton, qui m'ont fait l'honneur d'être rapproteurs de ma thèse et membres du jury.

Je remercie aussi Georges Élias, du Département des Simulations Numériques et d'Aéroacoustique (DSNA) de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA), pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie enfin les membres du Centre Acoustique, pour les échanges quotidiens et la bonne humeur qui ont grandement contribué au plaisir que j'ai eu à travailler à leur côté durant trois ans. Merci notamment à Pierre Roland, Pascal Souchotte et Jean-Michel Perrin pour leur aide.

Une pensée particulière est réservée à Olivier Marsden, Vincent Fleury, Julien Berland et Benoît Mazeaud, qui sont devenus pour moi bien plus que des collègues au fil de ces trois années.

Table des matières

Introduction

Les problèmes acoustiques sont devenus des enjeux majeurs dans le monde industriel actuel. Non seulement les niveaux sonores rayonnés constituent un élément non négligeable de la compétitivité d'un produit, mais ils font aussi de plus en plus l'objet de normes et de réglementations visant à restreindre les gênes qu'ils induisent. C'est en particulier le cas dans le domaine des transports. Le bruit des jets en sortie des réacteurs est par exemple l'une des principales sources de nuisances sonores au décollage d'un avion. La prédiction du bruit généré par ces jets constitue donc une préoccupation importante pour les constructeurs aéronautiques. À ces aspects purement environnementaux s'ajoutent des problèmes de résistance des structures mécaniques et de fatigue des matériaux, qui nécessitent parfois des approches acoustiques. Ainsi, dans le domaine aérospatial, le bruit émis au décollage par le jet d'une fusée est tellement intense qu'il devient une contrainte structurelle majeure pour la charge utile. Une meilleure compréhension des phénomènes de génération acoustique dans les jets est alors susceptible de guider le développement de techniques de réduction du bruit émis par le lanceur.

Pour faire face à ces problèmes, de nombreux travaux se sont intéressés au bruit rayonné par les écoulements. Il s'agit de mieux comprendre comment un écoulement produit des ondes acoustiques et de décrire la propagation de ces ondes. Tous ces phénomènes sont pris en compte par les équations de Navier-Stokes. La première grande avancée dans l'identification des sources de bruit en aéroacoustique est due à Lighthill [90]. En combinant les équations de Navier-Stokes, il a obtenu une expression dont le terme de gauche est l'opérateur de propagation dans un milieu homogène au repos et où le terme de droite est assimilé aux sources de bruit. Ce formalisme a l'avantage de se décliner aisément en une formulation intégrale, à l'aide de la fonction de Green en espace libre. Cela a permis notamment d'établir les premières lois dimensionnelles sur le bruit des jets. Bien que l'analogie de Lighthill soit mathématiquement exacte, l'assimilation du membre de droite à des termes sources n'est qu'une approximation. En effet, il contient aussi des effets d'interaction entre les ondes acoustiques et les champs moyens. De nombreuses autres formulations ont été construites pour pallier à cette faiblesse et pour élargir le domaine d'application de l'analogie de Lighthill [69, 71, 111, 113, 52]. Lilley [91] est notamment parvenu à construire un opérateur tenant compte des effets de propagation dans un écoulement moyen stratifié. En dépit de ces améliorations, l'interprétation des termes sources reste délicate et l'analogie de Lighthill ne semble pas permettre d'identifier facilement les phénomènes de génération de bruit, comme le précise Tam [131, 132].

Les approches expérimentales ont permis de poursuivre ces efforts et de mieux comprendre le comportement acoustique des écoulements. Crow & Champagne [39] ont mis en évidence la présence de grandes structures cohérentes dans les jets, auxquelles se superposent des petites structures turbulentes. Ces structures cohérentes jouent un rôle important dans l'émission de bruit en régime supersonique [133], mais leur impact sur le rayonnement acoustique en régime subsonique reste mal cerné. Dahan *et al.* [40, 41] montrent par exemple qu'elles peuvent contribuer notablement au rayonnement acoustique d'un jet chauffé, et les travaux de Bridges & Hussain [27] sur des jets excités indiquent que des appariements de grandes structures dans la couche de cisaillement peuvent générer un bruit non négligeable. La présence de cette source de bruit dans les jets naturels reste cependant à démontrer, en particulier à des nombres de Reynolds et de Mach élevés.

Récemment, Tam *et al.* [135] et Tam & Pastouchenko [136] ont observé que le bruit de mélange des jets supersoniques est constitué de deux contributions indépendantes. La première est rayonnée vers l'aval par les grandes structures et est plutôt basse fréquence. La seconde est générée par les fines structures turbulentes. Elle est omnidirectionnelle et a un spectre large-bande. Ces résultats ont ensuite été généralisés aux jets subsoniques [130, 148]. Les mesures de Fisher *et al.* [53] et de Tanna [141] ont aussi montré que la température avait un impact notable sur le bruit de jet. Lorsque le nombre de Mach est inférieur à 0.7, le bruit rayonné augmente avec la température. Cette hausse s'observe surtout aux basses fréquences, tandis que les hautes fréquences tendent à s'atténuer. En revanche, lorsque le nombre de Mach est supérieur à 0.7, les niveaux acoustiques diminuent avec l'élévation de la température. Cela est dû à une baisse importante des niveaux des hautes fréquences, qui n'est plus compensée par l'amplification des basses fréquences. Ces modifications de comportement acoustique ont été attribuées à l'apparition de sources entropiques de nature dipolaire [53]. Viswanathan [147] remet toutefois en cause l'existence de telles sources, en expliquant l'influence de la température sur le bruit de jet uniquement par un effet du nombre de Reynolds.

Depuis quelques années, l'augmentation de la puissance des calculateurs a permis le développement des approches numériques en aéroacoustique. Celles-ci viennent compléter les mesures, en donnant par exemple accès à des grandeurs difficiles à obtenir expérimentalement. Il existe depuis plus de vingt ans des codes capables de calculer l'évolution aérodynamique de nombreux écoulements. Toutefois, il est délicat d'obtenir le champ acoustique rayonné avec ces solveurs, bien que celui-ci soit inclus dans les équations de Navier-Stokes. En effet, les fluctuations de nature acoustique ont une amplitude bien plus faible que celle des fluctuations aérodynamiques. Par exemple, dans le cas d'un jet à Mach $M = 0.9$, les fluctuations de pression acoustique sont de l'ordre de 100 fois plus petites que celles de la pression aérodynamique. Les fluctuations de vitesse d'origine acoustique sont même environ 3×10^3 plus faibles que celles d'origine aérodynamique. Une erreur de 1 % sur les variables de l'écoulement implique donc des erreurs supérieures à 100 % sur le champ acoustique. Le calcul simultané de l'écoulement et des ondes acoustiques rayonnées nécessite donc une précision extrêmement élevée, ce qui est hors de portée des codes de calcul usuellement utilisés en mécanique des fluides. Pour contourner cette difficulté, des approches numériques hybrides ont été développées. L'idée est de calculer l'écoulement auquel on s'intéresse dans une première étape. Une fois les champs aérodynamiques déterminés, on s'appuie sur une analogie acoustique pour extraire les termes sources correspondants. Dans une seconde étape, on en déduit le champ acoustique rayonné, soit par un calcul d'intégrales, soit par la résolution d'une équation de propagation. Les approches hybrides ont cependant des limites ; les méthodes basées sur une formulation intégrale nécessitent le choix d'un volume source, ce qui peut poser des difficultés lorsque l'écoulement n'est pas borné. De plus, les approches hybrides ne permettent pas toujours de prendre en compte des éventuelles rétroactions entre le champ aérodynamique et le champ acoustique, ce qui est par exemple problématique pour le calcul du bruit d'une cavité placée dans un écoulement [65].

Ces limites ont motivé le développement de techniques numériques spécifiquement dédiées à l'aéroacoustique, ayant pour objectif la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles avec une précision suffisante pour déterminer simultanément les champs aérodynamiques et acoustiques. Cela implique en particulier le recours à des schémas numériques peu dispersifs et peu dissipatifs [19, 128, 138], et la mise au point de conditions aux limites anéchoïques [134]. Colonius *et al.* [33] ont ainsi effectué la simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation – DNS) du bruit rayonné par une couche de mélange. Freund [56] et Freund *et al.* [57] ont également calculé par DNS le bruit rayonné par différents jets. La simulation numérique directe, qui implique de mailler toutes les structures présentes dans l'écoulement, reste cependant limitée aux faibles nombres de Reynolds, pour lesquels la gamme des échelles turbulentes est restreinte. Pour étudier des configurations plus proches des applications industrielles, une autre approche a alors été adoptée. Il s'agit de la simulation numérique des grandes échelles (Large Eddy Simulation – LES), qui consiste à ne mailler que les grosses structures de l'écoulement et à modéliser les effets des fines échelles de la turbulence. Bogey & Bailly [17, 18], Bogey *et al.* [24] et Constantinescu & Lele [35] ont ainsi par exemple calculé le champ acoustique de jets libres subsoniques.

Objectifs de la thèse

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont pour objectif la prédiction du bruit rayonné par des jets ronds subsoniques à haut nombre de Mach et à nombre de Reynolds élevé. De telles configurations sont typiques des jets rencontrés à la sortie des réacteurs des avions.

Pour cela, il sera nécessaire de développer un code 2-D et 3-D permettant le calcul direct du bruit par la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles. Celui-ci devra s'appuyer sur les avancées récentes de l'aéroacoustique numérique, notamment au niveau des schémas de discrétisation [10, 19]. L'un des principaux freins aux calculs directs du bruit des écoulements est le coût numérique élevé des simulations, essentiellement lié au grand nombre de points nécéssaires à une bonne discrétisation de l'écoulement et du champ acoustique. Pour optimiser la taille du maillage, le solveur aura recours aux coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées permet en effet de mieux discrétiser les gradients de vitesse dans les jets circulaires, tout en réduisant le nombre de points du maillage. Il faudra toutefois résoudre le problème du traitement de l'axe, les équations de Navier-Stokes étant singulières à cet endroit. Le code devra aussi prendre en compte la présence de la tuyère dans le domaine de calcul, dont l'influence sur le champ acoustique en régime subsonique n'a pas encore été clairement démontrée. La nécessité d'introduire des perturbations dans l'écoulement est également une source de difficultés pour le calcul direct du bruit de jet [21]. L'un des enjeux de ces travaux est alors la mise au point d'une méthode de génération de la turbulence permettant d'obtenir des conditions de sortie de buse réalistes à haut nombre de Reynolds. Les approches numériques retenues pour résoudre ces difficultés devront être validées sur des cas simples.

Plusieurs calculs de jets seront ensuite effectués. Les simulations devront être comparées à des mesures, pour valider le solveur en tant qu'outil de prédiction. L'approche numérique menée au cours de cette thèse devra alors être complétée par une approche expérimentale, afin de construire une base de données venant combler certaines lacunes dans les mesures de la littérature concernant notamment les champs acoustiques proches. On souhaite également utiliser ces simulations pour mettre en évidence l'importance des conditions initiales dans la simulation numérique du bruit des jets. Il s'agit notamment de montrer l'impact de l'état laminaire ou turbulent de la couche de cisaillement en sortie de buse sur le champ acoustique rayonné.

Organisation du mémoire

Le présent manuscrit s'articule suivant les étapes suivantes. Le premier chapitre présente le développement du solveur 2-D. Les choix des différents schémas numériques et des conditions aux limites de rayonnement sont tout d'abord précisés. Le passage en coordonnées cylindriques est détaillé, avec la comparaison de deux techniques de traitement de l'axe. La version 2-D du code est ensuite validée à l'aide de plusieurs calculs.

Dans le second chapitre, le solveur 2-D est utilisé pour étudier le comportement aérodynamique et acoustique de tourbillons elliptiques. Plusieurs configurations de tourbillons d'excentricités différentes sont calculées. L'objectif est de démontrer la performance du solveur dans une configuration mettant en jeu des phénomènes physiques variés. Il s'agit aussi de dégager de nouveaux éléments sur l'évolution de ces tourbillons.

Le troisième chapitre est consacré au passage en 3-D du solveur et à la présentation de développements spécifiquement dédiés au calcul du bruit de jet. Il détaille le choix du modèle de sous-maille employé pour les calculs LES, puis expose la méthode de génération de la turbulence qui a été mise au point. L'inclusion de la paroi de la buse dans le domaine de calcul et les conditions initiales sont également présentées.

Le quatrième chapitre présente une campagne de mesures effectuée dans la grande soufflerie anéchoïque de l'Ecole Centrale de Lyon. Des mesures aérodynamiques et acoustiques ont été recueillies sur des jets subsoniques et supersoniques. Un intérêt particulier a été accordé aux champs proches acoustiques de ces jets. L'objectif de cette campagne de mesures est de compléter les données de la littérature et de permettre la validation des calculs.

Enfin, des simulations de jets subsoniques à nombre de Mach 0.9 et au nombre de Reynolds 5×10^5 sont exposées dans le cinquième chapitre. Deux jets sont calculés. Le premier est turbulent en sortie de buse, et le second a une couche de cisaillement initialement laminaire. Les résultats aérodynamiques et acoustiques sont comparés à des données expérimentales. L'influence du taux de turbulence en sortie de buse sur le champ acoustique rayonné est ensuite étudiée.

Chapitre 1

Développement d'un solveur des équations de Navier-Stokes 2-D

Ce premier chapitre présente le développement d'un solveur des équations de Navier-Stokes compressibles 2-D, qui sera étendu au 3-D dans le chapitre 3. Deux versions ont été réalisées. La première utilise les coordonnées cartésiennes et s'appuie sur le solveur implémenté par Bogey au cours de sa thèse [14]. De nouveaux schémas numériques et la prise en compte des gradients thermiques y ont cependant été introduits. Sa validation est détaillée dans l'annexe A. La seconde version utilise les coordonnées polaires. Elle a nécessité une approche numérique particulière pour traiter la singularité des équations sur l'axe.

1.1 Équations de Navier–Stokes compressibles en coordonnées cartésiennes

Le calcul direct du bruit d'un écoulement nécessite la résolution des équations de Navier–Stokes sous forme compressible. Celles-ci peuvent s'écrire, en 2-D et en coordonnées cartésiennes, sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}}{\partial x_2} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}}{\partial x_1} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}}{\partial x_2} = 0 \tag{1.1}$$

où (x_1, x_2) correspondent aux coordonnées cartésiennes. Dans la suite on utilisera indistinctement (x_1, x_2) ou (x, y). Le vecteur inconnu $\boldsymbol{U}$ a pour expression :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho e_\mathrm{t} \end{pmatrix}$$

où les variables ρ, u_1, u_2 et e_t représentent respectivement la masse volumique, les deux composantes de la vitesse et l'énergie spécifique interne totale. En assimilant le fluide à un gaz parfait, on a la relation :

$$\rho e_\mathrm{t} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho\left(u_1^2 + u_2^2\right)$$

où p est la pression et γ le rapport des chaleurs spécifiques. Les flux sont décomposés en parties eulériennes $\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$ et $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$, et en parties visqueuses $\boldsymbol{E}_\mathrm{v}$ et $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$:

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ (\rho e_\mathrm{t} + p) u_1 + q_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2^2 + p \\ (\rho e_\mathrm{t} + p) u_2 + q_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{11} \\ \mathcal{T}_{12} \\ u_i \mathcal{T}_{1i} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{21} \\ \mathcal{T}_{22} \\ u_i \mathcal{T}_{2i} \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses $\mathcal{T}_{ij}$ est défini par $\mathcal{T}_{ij} = 2\mu \mathcal{S}_{ij}$, où μ est la viscosité moléculaire dynamique et $\mathcal{S}_{ij}$ est le déviateur du tenseur des déformations :

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$$

Les termes q_i correspondent aux flux de chaleur. Ils s'expriment à l'aide de la loi de Fourier [36] :

$$q_i = -\lambda_\mathrm{th}\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

où λ_th, qui varie avec T, est la conductivité thermique du fluide. Dans les problèmes traités par la suite le nombre de Prandtl σ reste voisin de 0.72, ce qui permet d'écrire :

$$\lambda_\mathrm{th}(T) = \frac{c_p \mu(T)}{\sigma} \approx \frac{c_p \mu(T)}{0.72}$$

avec c_p la chaleur massique spécifique à pression constante. La loi de Sutherland [36] donne finalement :

$$\lambda_{\text{th}}(T) = \frac{c_p \mu_\infty}{0.72} \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1.4}{0.4 + \frac{T}{T_\infty}} \qquad \text{avec } T_\infty = 288 \text{ K et } \mu_\infty = \frac{\nu_\infty P_\infty}{r T_\infty}$$

où $r = 287.06$ J.Kg^{-1}.K^{-1} est la constante pour l'air des gaz parfaits. Dans le cadre de ce travail $\nu_\infty = \nu(T_\infty) = 1.5 \times 10^{-5}$ m^{2}s^{-1} et $P_\infty = 10^5$ Pa.

1.2 Discrétisation spatiale

L'estimation des dérivées spatiales des flux dans les équations de Navier–Stokes requiert une très grande précision pour calculer correctement les fluctuations de pression acoustique, très faibles devant les fluctuations de pression aérodynamique. Une précision suffisante ne peut être obtenue qu'en choisissant soigneusement les schémas numériques utilisés. L'approche retenue, basée sur les différences finies, a été développée par Tam *et al.* [128, 138]. L'idée est d'optimiser les coefficients du schéma pour minimiser les erreurs de dispersion et de dissipation, au prix d'un réduction de l'ordre formel. Les schémas obtenus, dits *Dispersion-Relation-Preserving*, sont particulièrement adaptés au calcul direct du champ acoustique.

Considérons une grandeur u, fonction de la variable x. La dérivée $\partial u/\partial x$ en x_0 peut être estimée par un schéma aux différences finies de coefficients a_j sur $2N+1$ points :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^{N} a_j u(x_0 + j\Delta x) \tag{1.2}$$

où Δx est le pas du maillage. Les a_j vérifient $a_{-j} = -a_j$ pour avoir un schéma non dissipatif. Le nombre d'onde effectif k^* du schéma peut-être calculé en prenant la transformée de Fourier spatiale de (1.2) :

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{j=1}^{N} a_j \sin(jk\Delta x)$$

où k est le nombre d'onde exact.

Classiquement, les coefficients a_j sont choisis de façon à annuler les premiers termes du développement de Taylor, pour obtenir un ordre maximal. Les schémas optimisés sont construits de façon à minimiser l'erreur de dispersion $|k^*\Delta x - k\Delta x|$. Le solveur 2-D en coordonnées cartésiennes développé par Bogey [14] utilise ainsi un schéma optimisé sur 7 points (N=3) d'ordre 4, que nous appellerons FDo7p. Ce schéma a été obtenu par

j	FDo7p	FDo11p
0	0	0
1	0.770882380518	0.872756993962667
2	-0.166705904415	-0.286511173973333
3	0.020843142770	9.032000128000002
4	–	-2.077940582400000
5	–	2.484594688000000

TAB. 1.1: Coefficients a_j des schémas de dérivation spatiale centrés optimisés. Le schéma FDo7p a été obtenu par Tam *et al.* [128, 138] et le schéma FDo11p a été développé par Bogey & Bailly [19]. Les coefficients vérifient $a_{-j} = -a_j$.

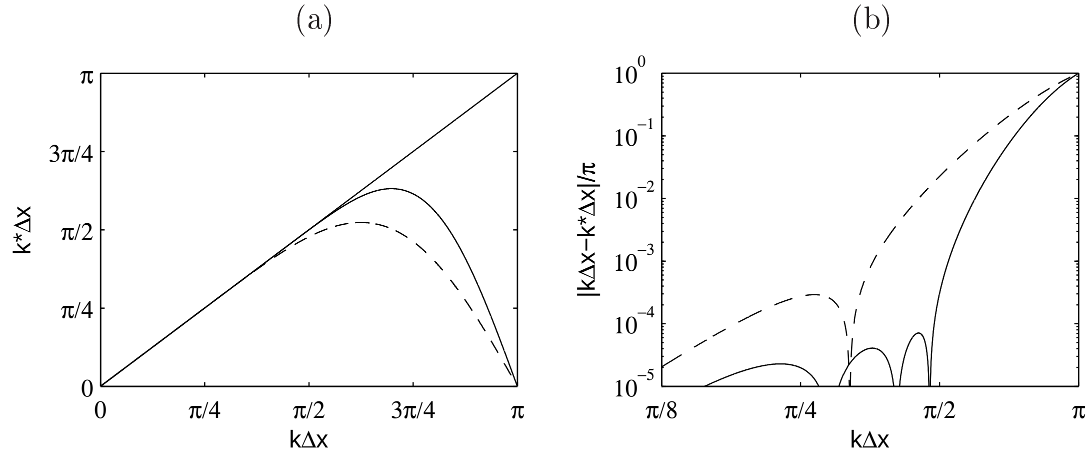


FIG. 1.1: Comparaison des schémas centrés optimisés FDo7p (Tam [128, 138]) et FDo11p (Bogey & Bailly [19]) : – – – – FDo7p ; ——— FDo11p. (a) Nombre d'onde effectif $k^*\Delta x$; (b) erreur de dispersion $|k\Delta x - k^*\Delta x|/\pi$, en fonction de $k\Delta x$.

Tam [128, 138]. Ses coefficients sont reportés dans le tableau 1.1. Un schéma standard sur 7 points est d'ordre 6 mais, à nombre de points identique, le schéma optimisé est moins dispersif pour les ondes discrétisées entre 5 et 10 points par longueur d'onde. Il est toutefois souhaitable de réduire encore la dispersion du schéma. Le schéma FDo7p a alors été remplacé par un schéma optimisé sur 11 points d'ordre 4 (FDo11p) développé par Bogey & Bailly [19]. Ses coefficients sont reportés dans le tableau 1.1. Les nombres d'onde effectifs de ces deux schémas sont comparés sur la figure 1.1(a) et l'erreur de dispersion est représentée sur la figure 1.1(b). Les deux schémas sont très précis pour les basses fréquences, avec un nombre d'onde effectif très proche du nombre d'onde théorique. Cependant, l'erreur de dispersion augmente avec $k\Delta x$ et n'est plus négligeable pour les

j	FDs5p	FDd13	FDd04
-2	1/12	–	–
-1	-2/3	- 3/12	–
0	0	-10/12	-25/12
1	2/3	18/12	48/12
2	-1/12	-6/12	-36/12
3	–	1/12	6/12
4	–	–	- 3/12

TAB. 1.2: Coefficients a_j des schémas standard d'ordre 4.

hautes fréquences. Le schéma FDo11p s'avère alors moins dispersif que le schéma FDo7p et apporte ainsi un gain de précision notable aux hautes fréquences. Il assure même une bonne résolution jusqu'à 4 points par longueur d'onde.

Le schéma FDo11p est appliqué à l'intérieur du domaine de calcul, mais il ne peut être utilisé que s'il y a au moins 5 points de maillage de part et d'autre du point de calcul de la dérivée. Lorsqu'on est à 4 ou 3 points du bord du domaine de calcul, on utilise alors le schéma FDo7p pour calculer la dérivée. De même, lorsqu'on est à 2 points de la frontière on utilise un schéma standard d'ordre 4 sur 5 points (FDs5p, $N = 2$). Notons qu'il est important d'employer autant que possible des schémas centrés, pour minimiser la dissipation numérique. Pour les points situés sur la frontière ou juste à côté, on choisit d'utiliser des schémas décentrés standard d'ordre 4 sur 5 points (respectivement FDd04 et FDd13). Les dérivées utilisant le schéma FDdN$_1$N$_2$ s'expriment alors par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N_1}^{N_2} a_j u(x_0 + j\Delta x)$$

Pour FDd13 on a $N_1 = 1$ et $N_2 = 3$ et pour FDd04 on a $N_1 = 0$ et $N_2 = 4$. Les coefficients des schémas standard sur 5 points sont reportés dans le tableau 1.2.

1.3 Filtrage sélectif

En l'absence de traitement spécifique, des oscillations parasites maille à maille non physiques sont générées et peuvent être amplifiées. Elles sont principalement dues aux erreurs numériques, à un étirement du maillage, aux zones mal discrétisées et à toutes les discontinuités de traitement du domaine de calcul (changement de schémas de dérivation, conditions aux limites). Elles sont aussi créées par les effets non-linéaires, qui produisent des hautes fréquences pour toutes les échelles plus grandes que celle de Kolmogorov. Ce sont des ondes hautes fréquences oscillant sur deux points par longueur d'onde. Il est nécessaire de les éliminer pour la stabilité du calcul. Une méthode possible, proposée par Tam *et al.* [137, 139], est le filtrage de la solution physique avec une viscosité numérique sélective ne dissipant que les oscillations hautes fréquences. Le filtrage peut être de la forme :

$$u^f(x) = u(x) - \sigma_{\mathrm{d}} D_u(x) \tag{1.3}$$

$$\text{avec} \qquad D_u(x) = \sum_{j=-N}^{N} d_j \left(u(x + j\Delta x) - \overline{u}(x + j\Delta x) \right) \tag{1.4}$$

où u est la grandeur à filtrer, $\overline{u}$ sa valeur moyenne, u^f la grandeur filtrée, d_j les coefficients du filtrage et σ_{d} le niveau de filtrage. La fonction d'amortissement du filtre est calculée en prenant la transformée de Fourier spatiale de l'expression (1.4) :

$$D_k(k\Delta x) = d_0 + 2 \sum_{j=1}^{N} d_j \cos(jk\Delta x)$$

Lorsque $D_k(k\Delta x) < 1$ le filtrage atténue les oscillations. Si $D_k(k\Delta x) > 1$ les ondes sont amplifiées.

Les coefficients d_j du filtre vérifient $d_j = d_{-j}$ pour que le filtrage ne soit pas dispersif. Ils sont choisis de façon à dissiper les ondes hautes fréquences mal calculées par les schémas numériques, sans affecter les ondes bien résolues. Le nombre d'onde de coupure à choisir pour le filtre est donc lié à la précision des schémas de discrétisation spatiale utilisés. En 2-D et 3-D, le filtrage doit être appliqué successivement dans chaque direction.

Bogey & Bailly [19] ont repris la démarche de Tam *et al.* pour calculer les coefficients des filtrages sélectifs associés aux schémas centrés optimisés présentés au paragraphe 1.2. Ces coefficients sont reportés dans le tableau 1.3. Le solveur développé par Bogey [14] utilisant le schéma FDo7p de Tam [128, 138], l'amortissement sélectif était assuré par le filtre SF7p. Le solveur implémenté au cours de ce travail emploie le schéma FDo11p de Bogey & Bailly [19] ; il nécessite donc le recours au filtre SF11p. La figure 1.2 compare les fonctions d'amortissement des deux filtres optimisés sur 7 et 11 points. Les deux filtres ont uniquement un effet d'atténuation car $D_k(k\Delta x) < 1$ pour tous les $k\Delta x$. Ils présentent un très faible amortissement aux basses fréquences et un niveau d'atténuation élevé aux hautes fréquences, mais la coupure du filtre SF11p est beaucoup plus rapide que celle de SF7p. Cela assure un filtrage plus sélectif pour le solveur, avec un amortissement notable uniquement au delà de 4 points par longueur d'onde.

j	SF11p ($N = 5$)	SF7p ($N = 3$)	SF5p ($N = 2$)
0	0.2150448841109084	0.283163623424000	0.375
1	-0.1877728835894673	-0.224471811584000	-0.25
2	0.1237559487873421	0.108418188288000	0.0625
3	-5.922757557574387$\times10^{-2}$	-2.552818841600000$\times10^{-2}$	–
4	1.872160915720372$\times10^{-2}$	–	–
5	-2.999540834788787$\times10^{-3}$	–	–

TAB. 1.3: Coefficients d_j des filtres sélectifs centrés optimisés (SF11p et SF7p) et standard d'ordre 4 (SF5p). Ils vérifient $d_{-j} = d_j$.

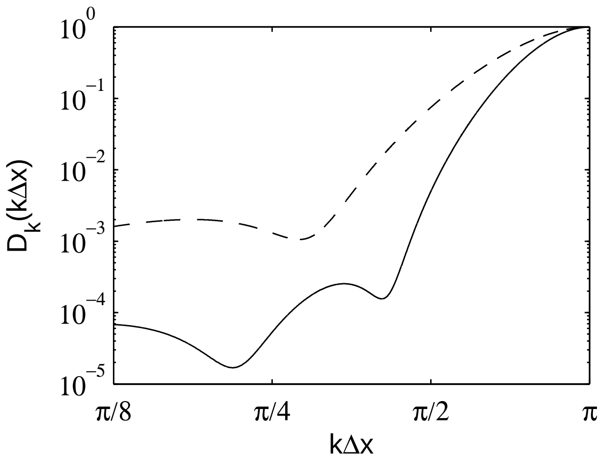


FIG. 1.2: Comparaison des fonctions d'amortissement des filtres sélectifs optimisés SF7p (utilisé dans [14]) et SF11p : – – – – SF7p ; ——— SF11p.

1.4 Discrétisation temporelle

Les équations de Navier–Stokes (1.1) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = \boldsymbol{K}_e + \boldsymbol{K}_v$$

où $\boldsymbol{K}_e$ correspond aux flux eulériens et $\boldsymbol{K}_v$ aux flux visqueux. L'intégration des flux eulériens requiert une très grande précision car ils contiennent l'essentiel des effets de génération et de propagation du bruit. La discrétisation temporelle des flux eulériens est alors effectuée avec un algorithme de Runge-Kutta explicite, dont les coefficients sont choisis pour minimiser les erreurs de dispersion et de dissipation [19, 72]. Pour réduire le temps de calcul, les flux visqueux ne sont intégrés qu'au cours de la dernière étape de l'algorithme de Runge-Kutta. Ainsi, le passage de l'itération n à l'itération $n+1$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{U}^{(0)} & = & \boldsymbol{U}^n \\
\boldsymbol{U}^{(1)} & = & \boldsymbol{U}^n + \alpha_1 \Delta t \boldsymbol{K}_e^n \\
\boldsymbol{U}^{(2)} & = & \boldsymbol{U}^n + \alpha_2 \Delta t \boldsymbol{K}_e^{(1)} \\
\vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{U}^{(j)} & = & \boldsymbol{U}^n + \alpha_j \Delta t \boldsymbol{K}_e^{(j-1)} \\
\vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{U}^{(p)} & = & \boldsymbol{U}^n + \alpha_p \Delta t \boldsymbol{K}_e^{(p-1)} \\
\boldsymbol{U}^{n+1} & = & \boldsymbol{U}^{(p)} + \Delta t \boldsymbol{K}_v^n
\end{array}$$

où les α_j sont les coefficients du schéma, p est le nombre d'étapes, $\boldsymbol{U}^{(j)}$ et $\boldsymbol{K}_e^{(j)}$ sont les valeurs de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{K}_e$ au cours de l'étape j, et $\boldsymbol{U}^n$, $\boldsymbol{K}_e^n$ et $\boldsymbol{K}_v^n$ sont les valeurs de $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{K}_e$ et $\boldsymbol{K}_v$ à l'itération n du calcul.

Nous avons choisi d'utiliser un schéma optimisé d'ordre 2 à 6 étapes (RKo6), développé par Bogey & Bailly [19]. Les coefficients de ces deux schémas sont reportés dans le tableau 1.4.

1.5 Conditions aux limites

Le traitement des frontières du domaine de calcul nécessite un soin particulier. Pour que le champ acoustique soit exploitable, les bords du domaine de calcul ne doivent pas générer de rayonnement parasite susceptible d'interférer avec le bruit calculé. Cela est rendu délicat par la troncature de l'information – on ne connaît la valeur des variables qu'à l'intérieur du domaine – et par la nécessité de décentrer les schémas de discrétisation spatiale au voisinage des bords, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans

j	RKs4 ($p = 4$)	RKo6 ($p = 6$)
1	1/4	0.11797990162882
2	1/3	0.18464696649448
3	1/2	0.24662360430959
4	1	0.33183954273562
5	–	1/2
6	–	1

TAB. 1.4: Coefficients α_j des schémas de Runge-Kutta standard (RKs4) et optimisé (RKo6).

les configurations que nous serons amenés à étudier, deux types de conditions aux limites sont nécessaires : une condition aux limites de rayonnement, qui doit assurer l'absence de réflexion des ondes acoustiques sortantes, et une condition aux limites de sortie de fluide, qui doit aussi permettre l'évacuation d'un écoulement.

1.5.1 Conditions aux limites de rayonnement

Pour que le champ acoustique calculé soit exploitable, les limites du domaine de calcul ne doivent pas réfléchir les ondes acoustiques sortantes. Deux approches sont principalement employées.

La première s'appuie sur les caractéristiques et a été exposée en détails par Thompson [142, 143]. Elle a été adaptée aux équations d'Euler et de Navier-Stokes par Poinsot & Lele [112]. L'idée est de diagonaliser les équations 1-D pour faire apparaître les invariants acoustiques, tourbillonnaire et entropique, avec leurs vitesses de propagation respectives. On peut alors distinguer les invariants entrants des invariants sortants. Pour une condition anéchoïque on fixe à zéro les invariants entrants. Cette approche présente également l'avantage de pouvoir imposer facilement des conditions d'entrée de fluide tout en assurant l'évacuation des ondes sortantes. Cependant, elle reste limitée à des configurations monodimensionnelles et s'avère bien moins performante en 2-D ou 3-D, lorsque les ondes arrivent sous incidence oblique. Des améliorations ont été proposées par Giles [64] mais son approche se heurte à des problèmes de stabilité [32].

La seconde méthode, popularisée par Tam & Web [138], consiste à utiliser une expression en champ lointain des équations d'Euler. Elle a l'avantage de s'appliquer aussi bien en 2-D qu'en 3-D, et s'avère de ce fait plus performante que l'approche basée sur les caractéristiques. C'est cette seconde méthode qui a été retenue. En 2-D, loin des sources de bruit et en présence d'un écoulement moyen uniforme, la forme en champ lointain des équations d'Euler peut s'écrire en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{V_{\mathrm{g}}}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u_1\\ u_2\\ p\end{pmatrix}+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2r}\right)\begin{pmatrix}\rho-\overline{\rho}\\ u_1-\overline{u_1}\\ u_2-\overline{u_2}\\ p-\overline{p}\end{pmatrix}=0$$

où V_{g} est la vitesse de groupe des ondes acoustiques et $\overline{\rho}$, $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$ et $\overline{p}$ sont les valeurs moyennes de ρ, u_1, u_2 et p. L'origine des coordonnées polaires doit être placée au voisinage des sources de bruit. Elle est classiquement prise au centre du domaine. La vitesse de groupe s'exprime par :

$$V_{\mathrm{g}}=\overline{\boldsymbol{u}}.\boldsymbol{e_r}+\sqrt{\overline{c}^2-(\overline{\boldsymbol{u}}.\boldsymbol{e_\theta})^2}\qquad\text{avec}\quad \overline{c}=\sqrt{\frac{\gamma\overline{p}}{\overline{\rho}}}$$

où $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ sont les vecteurs unitaires selon les directions radiales et azimutales respectivement. En 3-D, la forme en champ lointain s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{V_{\mathrm{g}}}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u_1\\ u_2\\ u_3\\ p\end{pmatrix}+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\begin{pmatrix}\rho-\overline{\rho}\\ u_1-\overline{u_1}\\ u_2-\overline{u_2}\\ u_3-\overline{u_3}\\ p-\overline{p}\end{pmatrix}=0\quad\text{avec}\quad V_{\mathrm{g}}=\overline{\boldsymbol{u}}.\boldsymbol{e_r}+\sqrt{\overline{c}^2-(\overline{\boldsymbol{u}}.\boldsymbol{e_\theta})^2-(\overline{\boldsymbol{u}}.\boldsymbol{e_\phi})^2}$$

où $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$ et $\boldsymbol{e_\phi}$ sont les vecteurs unitaires en coordonnées sphériques.

À l'intérieur du domaine de calcul on résoud les équations de Navier-Stokes et aux bords on utilise les équations du champ lointain acoustique, appliquées sur trois points.

1.5.2 Conditions aux limites de sortie de fluide

La sortie d'un écoulement est un problème délicat. En effet, lors de la sortie d'une perturbation, une partie de son énergie est inévitablement renvoyée dans le domaine de calcul. Lorsque la perturbation est de nature acoustique, une réflexion de 1 % de son énergie reste suffisamment faible pour ne pas affecter le champ acoustique. En revanche, lorsque la perturbation est de nature aérodynamique la situation est plus critique. Une fluctuation de pression d'origine aérodynamique est classiquement de 4 ordres de grandeur plus élevée qu'une fluctuation de pression acoustique. Une réflexion de 0.01 % de la pression aérodynamique induit ainsi une erreur de 100 % sur le champ acoustique. La zone de sortie d'un écoulement doit donc être traitée avec précaution pour que le champ acoustique calculé ne soit pas dominé par un rayonnement parasite issu de la troncature de l'écoulement en sortie.

Tam & Dong [134] ont généralisé l'approche de Tam & Webb au cas où des fluctuations de nature acoustique, tourbillonnaire et entropique convectées par un champ moyen quelconque atteignent la frontière du domaine de calcul. En 2-D, les conditions de sortie d'écoulement s'écrivent ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(\rho - \overline{\rho}) = \frac{1}{\overline{c}^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(p - \overline{p})\right)\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(u_1 - \overline{u_1}) = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(u_2 - \overline{u_2}) = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial x_2}\\
&\frac{1}{V_{\mathrm{g}}}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial r} + \frac{p - \overline{p}}{2r} = 0
\end{aligned}
$$

En 3-D, ces conditions deviennent :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(\rho - \overline{\rho}) = \frac{1}{\overline{c}^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(p - \overline{p})\right)\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(u_1 - \overline{u_1}) = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(u_2 - \overline{u_2}) = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}.\nabla(u_3 - \overline{u_3}) = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial x_3}\\
&\frac{1}{V_{\mathrm{g}}}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (p - \overline{p})}{\partial r} + \frac{p - \overline{p}}{r} = 0
\end{aligned}
$$

Des essais ont cependant montré que ces conditions aux limites sont insuffisantes et qu'un rayonnement parasite trop important est émis à la sortie d'un tourbillon. Il est alors nécessaire d'ajouter une zone éponge avant la condition aux limites de sortie de fluide. L'objectif est de dissiper une partie des fluctuations aérodynamiques avant qu'elles n'atteignent le bord du domaine. La démarche retenue a été développée par Bogey & Bailly [16], à partir des travaux de Colonius *et al.* [32]. Le maillage est tout d'abord progressivement étiré dans le sens de l'écoulement, comme l'illustre la figure 1.3. Au fur et à mesure de leur convection, les perturbations aérodynamiques sont ainsi de moins en moins bien résolues, et finissent par être affectées par le filtrage sélectif. Cet étirement peut toutefois générer de fortes oscillations parasites et des perturbations basses fréquences peuvent subsister. En suivant l'idée de Colonius *et al.* [32], un filtrage dissipatif peu sélectif est alors ajouté dans la zone éponge. À chaque itération, le vecteur $\boldsymbol{U}$ est filtré en 2-D de

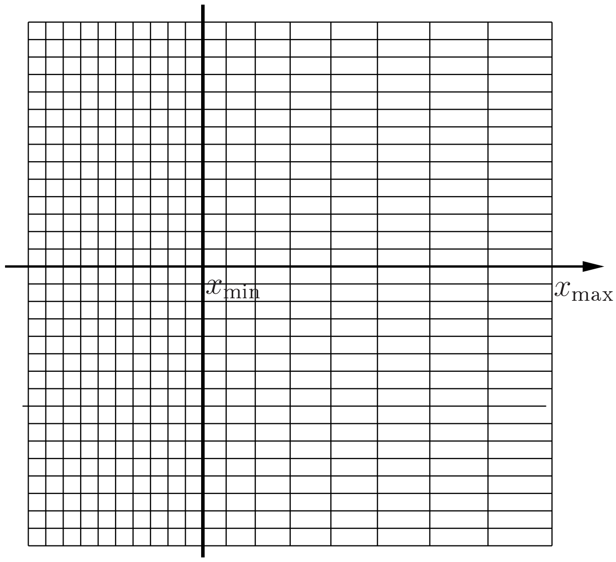


FIG. 1.3: Étirement du maillage au niveau de la zone éponge. $x_{\min}$ et $x_{\max}$ repèrent respectivement le début et la fin de la zone éponge ; la flèche indique le sens de l'écoulement.

la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}^f_{i,j} = \boldsymbol{U}_{i,j} - \alpha \left(\frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^\beta D^{\boldsymbol{U}}_{i,j} \\
&\text{avec } D^{\boldsymbol{U}}_{i,j} = 2d_0 \boldsymbol{U}'_{i,j} + d_1 \left(\boldsymbol{U}'_{i+1,j} + \boldsymbol{U}'_{i-1,j} + \boldsymbol{U}'_{i,j+1} + \boldsymbol{U}'_{i,j-1} \right)
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{U}_{i,j}$ est la valeur de $\boldsymbol{U}$ au point (i, j) du maillage, $\boldsymbol{U}'_{i,j}$ est sa fluctuation par rapport à sa valeur moyenne, $x_{\min}$ est l'abscisse du début de la zone éponge et $x_{\max}$ est l'abcisse de la fin de la zone éponge. Les coefficients du filtre laplacien d_0 et d_1 valent respectivement 0.5 et -0.25. Le terme multiplicatif devant $D^{\boldsymbol{U}}_{i,j}$ assure une évolution continue du niveau de filtrage, qui est nul hors de la zone éponge et qui devient de plus en plus fort lorsqu'on se rapproche du bord du domaine. Pour ne pas avoir de réflexion au début de la zone éponge, il est impératif que cette évolution ne soit pas trop rapide. En pratique les coefficients α et β sont pris à 0.2 et 1.5 respectivement. En 3-D, le filtrage s'écrit :

$$\boldsymbol{U}^f_{i,j,k} = \boldsymbol{U}_{i,j,k} - \alpha \left(\frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^\beta D^{\boldsymbol{U}}_{i,j,k}$$

avec :

$$D^{\boldsymbol{U}}_{i,j,k} = 3d_0 \boldsymbol{U}'_{i,j,k} + d_1 \left(\boldsymbol{U}'_{i+1,j,k} + \boldsymbol{U}'_{i-1,j,k} + \boldsymbol{U}'_{i,j+1,k} + \boldsymbol{U}'_{i,j-1,k} + \boldsymbol{U}'_{i,j,k+1} + \boldsymbol{U}'_{i,j,k-1} \right)$$

1.6 Passage en coordonnées polaires

Les développements numériques présentés dans cette section ont pour objectif l'implémentation d'un code de calcul direct du bruit rayonné par des jets ronds. L'emploi des coordonnées cartésiennes s'avère peu adapté pour mailler des géométries circulaires. On a choisi alors de développer une version du code en coordonnées cylindriques, afin de réduire notablement le nombre de points nécessaire au maillage de jets circulaires, tout en assurant un meilleur suivi des gradients de vitesse dans les couches de cisaillement. Cette partie présente le passage du solveur en coordonnées polaires. Toutes les difficultés dues à l'emploi des coordonnées cylindriques sont détaillées dans ce qui suit. L'ajout de la troisième dimension ne pose pas de problème spécifique à ce système de coordonnées et sera traité dans le chapitre 3.

1.6.1 Équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\boldsymbol{E}_\mathrm{e})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\mathrm{e}}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\boldsymbol{E}_\mathrm{v})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\mathrm{v}}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{e}}{r} - \frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{v}}{r} = 0$$

où (r, θ) correspondent aux variables polaires. Le vecteur $\boldsymbol{U}$ a pour expression :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho e_\mathrm{t} \end{pmatrix}$$

avec u_r et u_θ les deux composantes de la vitesse. L'énergie interne totale s'exprime par :

$$\rho e_\mathrm{t} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho\left(u_r^2 + u_\theta^2\right)$$

Les flux s'écrivent :

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r u_\theta \\ (\rho e_\mathrm{t} + p)u_r + q_r \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_r u_\theta \\ \rho u_\theta^2 + p \\ (\rho e_\mathrm{t} + p)u_\theta + q_\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{rr} \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ u_r\mathcal{T}_{rr} + u_\theta\mathcal{T}_{r\theta} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ \mathcal{T}_{\theta\theta} \\ u_r\mathcal{T}_{r\theta} + u_\theta\mathcal{T}_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho u_\theta^2 + p) \\ \rho u_r u_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathcal{T}_{\theta\theta} \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

q_r et q_θ correspondent aux flux de chaleur. Ils ont pour expression :

$$q_r = -\lambda_{\mathrm{th}} \frac{\partial T}{\partial r} \qquad \text{et} \quad q_\theta = -\lambda_{\mathrm{th}} \frac{\partial T}{r \partial \theta}$$

où λ_{th} est défini à la partie 1.1. Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses $\mathcal{T}$ sont :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) \\
\mathcal{T}_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\
\mathcal{T}_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

L'utilisation d'un système de coordonnées polaires est délicate car elle doit conserver la précision de l'algorithme numérique, notamment au niveau de l'axe. En effet, les équations de Navier-Stokes sous forme polaire (et donc cylindrique) présentent une singularité sur l'axe qu'il faut pouvoir traiter numériquement sans dégrader la précision du solveur.

Plusieurs méthodes ont été développées pour contourner cette difficulté. On peut par exemple utiliser la règle de l'Hopital pour obtenir des équations régulières valables sur l'axe. Une autre approche, adoptée par Freund [58, 57], Constantinescu [35] et Mitchell [104] consiste à repasser en coordonnées cartésiennes au voisinage de l'axe, les équations de Naviers-Stokes étant régulières dans ce système de coordonnées. Ces deux méthodes ne sont toutefois pas satisfaisantes. En effet, les équations obtenues avec la règle de l'Hopital sont des approximations et les erreurs introduites nuisent considérablement à la précision du calcul (voir les récents travaux de Constantinescu & Lele [34]). Quant au passage en coordonnées cartésiennes, le changement d'équations au niveau de l'axe provoque une discontinuité dans la résolution, ce qui génère des ondes parasites, voir Mohseni & Colonius [107] et Constantinescu & Lele [34]. De plus, cette approche impose le choix arbitraire de l'orientation du repère cartésien.

La méthode retenue doit impérativement maintenir la précision de la résolution au niveau de l'axe. Ce point est essentiel car on ne veut pas perdre le bénéfice apporté par les schémas numériques optimisés. Il faut donc veiller à ce que les erreurs dues au traitement de l'axe ne soient pas supérieures aux erreurs numériques générées dans le reste

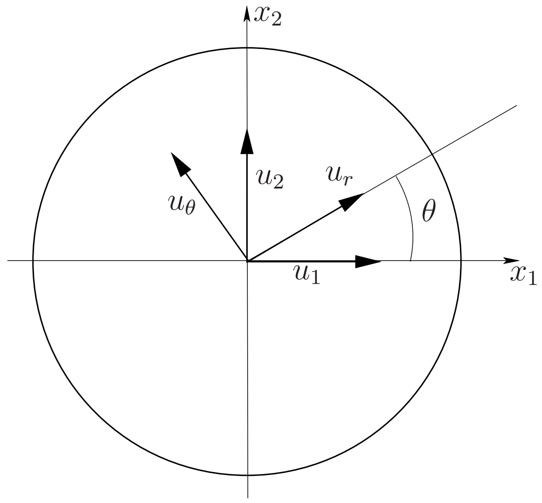


Fig. 1.4: Repères utilisés en coordonnées polaires et cartésiennes.

du domaine. Deux méthodes ont été retenues et étudiées. La première a été proposée par Mohseni & Colonius [107] et la seconde par Constantinescu & Lele [34].

1.6.2 Grandeurs régulières et grandeurs singulières

Cette section introduit une classification des grandeurs physiques en deux catégories, applicable en coordonnées polaires ou cylindriques. Elle sera reprise dans les méthodes de traitement de l'axe exposées par la suite. Nous verrons en effet que la nature de la grandeur influera sur le traitement à lui appliquer au niveau de l'axe.

Toutes les grandeurs physiques de l'écoulement peuvent être regroupées en deux catégories. La première rassemble les grandeurs dites régulières, c'est-à-dire qui ont une valeur unique sur l'axe $r = 0$. C'est par exemple le cas de la masse volumique ρ, de la pression p, de la température T ou bien de l'énergie spécifique interne totale e_t. Une combinaison linéaire et un produit de grandeurs régulières donne également une grandeur régulière.

La seconde catégorie rassemble les grandeurs dites singulières, c'est-à-dire celles qui n'ont pas une valeur unique en $r = 0$. C'est généralement le cas de toutes les grandeurs liées à l'orientation radiale ou azimutale. Il y a par exemple les composantes u_r et u_θ de la vitesse, dont les valeurs en $r = 0$ dépendent de la direction θ considérée. En coordonnées cartésiennes, les deux composantes de la vitesse selon les directions x_1 et x_2 sont notées respectivement u_1 et u_2. D'après la figure 1.4, on a les relations suivantes entre les deux systèmes de coordonnées :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \\
u_2 &= u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta
\end{aligned}
$$

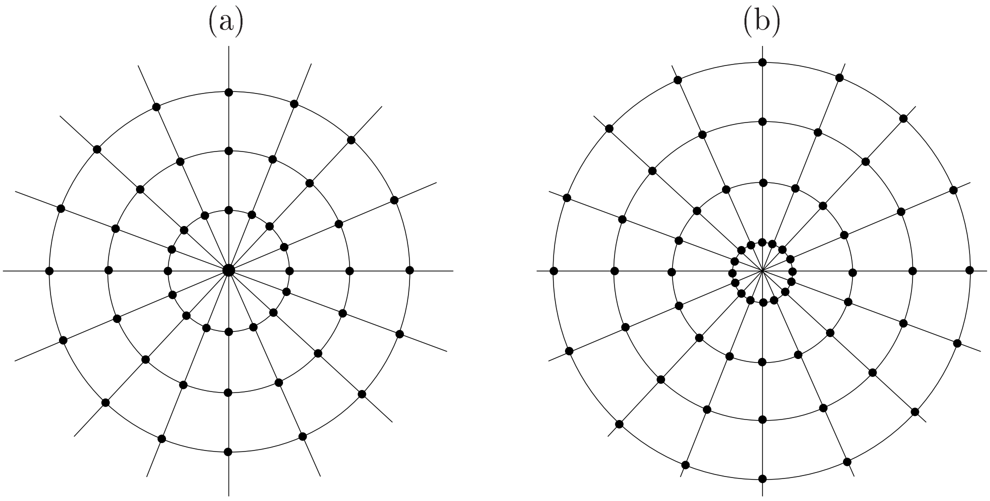


FIG. 1.5: Structures de maillages en coordonnées polaires : (a) maillage radial classique (premier point en $r = 0$) ; (b) maillage proposé par Mohseni & Colonius [107] (premiers points en $r = \Delta r/2$).

Au niveau de l'axe, le fluide a une vitesse donnée. Elle correspond en coordonnées cartésiennes à $(u_1, u_2)_{\text{axe}} = (u_1, u_2)_{x_1=0, x_2=0}$. En coordonnées polaires l'expression de cette vitesse dépend de l'angle θ considéré. Les relations de passage entre les deux systèmes de coordonnées montrent par exemple que si $\theta = 0$ on a $(u_r, u_\theta)_{r=0,\theta=0} = (u_1, u_2)_{\text{axe}}$, tandis que si $\theta = \pi/2$ alors $(u_r, u_\theta)_{r=0,\theta=\pi/2} = (u_2, -u_1)_{\text{axe}}$. Ainsi, bien qu'on soit toujours placé au même point lorsque $r = 0$, les composantes de la vitesse u_r et u_θ varient avec θ. Ce sont donc bien des grandeurs singulières. Pour la même raison, les dérivées radiales et azimutales d'une grandeur régulière sont des grandeurs singulières. Par exemple, $\partial p/\partial r$ dépend de la direction θ suivant laquelle on dérive. En revanche, une combinaison linéaire de grandeurs singulières peut être une grandeur régulière. C'est le cas de la dilatation $\text{div}(\boldsymbol{u}) = \partial(ru_r)/(r\partial r) + \partial u_\theta/(r\partial\theta)$ qui est une grandeur régulière bien qu'elle s'écrive comme une somme de deux grandeurs singulières.

1.6.3 Méthode de Mohseni & Colonius : saut de l'axe

La méthode de Mohseni & Colonius [107] consiste à sauter l'axe $r = 0$ en prenant une grille radiale qui commence en $r = \Delta r/2$ au lieu de $r = 0$, comme le montre la figure 1.5. Dans les deux cas, les points sont espacés radialement de la même distance Δr, mais il n'y a pas de point en $r = 0$ dans le maillage proposé par Mohseni & Colonius. Ainsi, on ne se place jamais à l'endroit de la singularité et la forme standard des équations de Naviers-Stokes en coordonnées polaires peut être utilisée dans tout le domaine. Cette méthode permet de traiter l'ensemble du domaine de calcul sans approximation spécifique

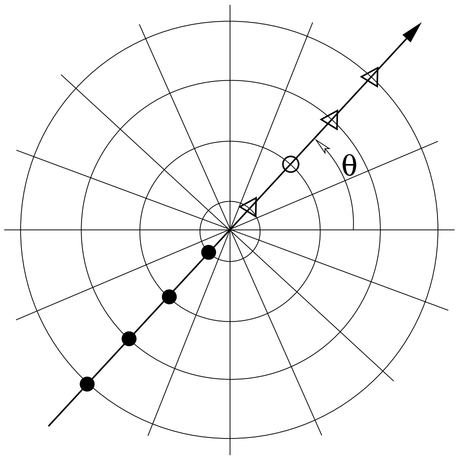


FIG. 1.6: Points intervenants dans le calcul de la dérivée radiale d'une variable en $r = 3\Delta r/2$. $\circ$ point où la dérivée est calculée ; $\triangleleft$ points utilisés se trouvant du même côté de l'axe ; $\bullet$ points utilisés se trouvant de l'autre côté de l'axe.

au niveau de l'axe. On peut notamment conserver les schémas numériques et le filtrage sélectif décrits précédemment.

Il subsite toutefois une difficulté au niveau de la dérivation spatiale et du filtrage sélectif. Les équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires font intervenir des dérivées selon r et selon θ. La dérivation selon θ ne pose aucun problème du fait de la périodicité azimutale du maillage. On est en effet assuré d'avoir toujours assez de points de part et d'autre de l'endroit où on calcule la dérivée pour pouvoir utiliser le schéma numérique sur 11 points partout. La situation est, en revanche, plus complexe pour les dérivées radiales au voisinage du centre. Il n'est pas souhaitable d'utiliser les schémas décentrés aux points voisins de l'axe car ceux-ci sont moins précis que le schéma centré sur 11 points. Il serait très pénalisant de diminuer la qualité de la résolution au coeur du domaine de calcul, dans une zone qui correspondra à l'axe du jet dans la version 3-D du solveur. Ces considérations s'appliquent aussi pour le filtrage sélectif. Mohseni & Colonius proposent alors de prendre un maillage avec un nombre pair de directions θ. De cette façon, chaque point sur une direction θ du maillage a son symétrique par rapport à l'axe, comme c'est le cas dans la figure 1.5(b). Au voisinage du centre on peut alors continuer à utiliser des schémas sur 11 points pour les dérivées radiales et le filtrage sélectif, en passant de l'autre côté de l'axe.

Il est cependant important de faire attention au signe des variables lorsqu'on passe de l'autre côté de l'axe. Considérons par exemple le calcul d'une dérivée radiale au point $(r_0 = 3\Delta r/2, \theta)$. On doit utiliser des valeurs à des points situés sur la direction θ et sur sa symétrique $\theta + \pi$, comme l'illustre la figure 1.6. Le schéma sur 11 points nécessite en effet cinq points de part et d'autre de l'endroit du calcul. Une partie de ceux-ci (six points dans notre exemple) se trouve sur la direction θ et le reste (quatre points ici) est sur la direction $\theta+\pi$. Au lieu de considérer les droites θ et $\theta+\pi$ comme deux directions distinctes associées chacune à des valeurs de r positives, on les assimile à une unique direction θ avec des valeurs de r pouvant aussi être négatives. Ainsi, les points en $\theta+\pi$ et $r>0$ peuvent être considérés comme des points en θ et $r<0$. Il n'y a alors plus de discontinuité au passage de l'axe, les points utilisés faisant désormais toujours partie de la même direction θ.

Prenons la dérivée radiale en (r_0,θ) d'une grandeur régulière, p par exemple. Sa dérivée radiale s'écrit, avec les notations de la partie 1.2 :

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r_0,\theta) = \frac{1}{\Delta r}\sum_{j=-5}^{5} a_j p(r_0 + j\Delta r, \theta)$$

Selon les conventions précédentes, lorsque $r<0$ on utilise le point placé en $|r|$ dans la direction $\theta+\pi$. On peut ainsi écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial r}\left(r_0 = \frac{3}{2}\Delta r, \theta\right) = \frac{1}{\Delta r}\left[\sum_{j=-5}^{-2} a_j p(|r_0 + j\Delta r|, \theta+\pi) + \sum_{j=-1}^{5} a_j p(r_0 + j\Delta r, \theta)\right]$$

La dérivée de rp s'écrit de même :

$$\frac{\partial (rp)}{\partial r}\left(r_0 = \frac{3}{2}\Delta r, \theta\right) = \frac{1}{\Delta r}\left[-\sum_{j=-5}^{-2} a_j |r_0 + j\Delta r|\, p(|r0 + j\Delta r|, \theta+\pi) \right.$$
$$\left. + \sum_{j=-1}^{5} a_j \left(r_0 + j\Delta r\right) p(r_0 + j\Delta r, \theta)\right]$$

Le signe moins devant la contribution des points en $\theta+\pi$ vient des nouvelles conventions qui imposent $r<0$ dans cette zone : rp est négatif de l'autre côté de l'axe. Avec un raisonnement identique, le filtrage de p en $(r_0 = 3\Delta r/2, \theta)$ s'exprime :

$$D_p\left(r_0 = \frac{3}{2}\Delta r, \theta\right) = \sum_{j=-5}^{-2} d_j \left[p(|r_0 + j\Delta r|, \theta+\pi) - \overline{p}(|r_0 + j\Delta r|, \theta+\pi)\right]$$
$$+ \sum_{j=-1}^{5} d_j \left[p(r_0 + j\Delta r, \theta) - \overline{p}(r_0 + j\Delta r, \theta)\right]$$

en reprenant les notations de la partie 1.3.

Intéressons nous maintenant à u_r et u_θ. Ce sont des grandeurs singulières, liées à la direction considérée. Lorsqu'on traverse l'axe, on passe de la direction θ à la direction $\theta+\pi$ et l'orientation des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ change, comme le montre la figure 1.7. Ainsi, lorsqu'on traverse l'axe on doit pondérer les valeurs $u_r(|r|,\theta+\pi)$ et $u_\theta(|r|,\theta+\pi)$ par un

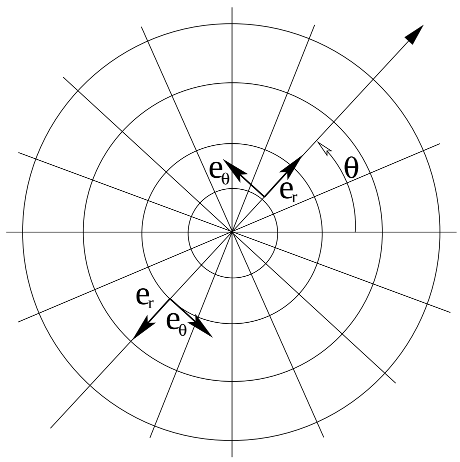


FIG. 1.7: Orientation des vecteurs unitaires polaires lors de la traversée de l'axe.

signe négatif, pour tenir compte du changement de sens des vecteurs du repère. La dérivée radiale de u_r devient donc :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(r_0=\frac{3}{2}\Delta r,\theta\right)=\frac{1}{\Delta r}\left[-\sum_{j=-5}^{-2}a_j u_r(\left|r_0+j\Delta r\right|,\theta+\pi)+\sum_{j=-1}^{5}a_j u_r(r_0+j\Delta r,\theta)\right]$$

De même, le filtrage de u_r selon la direction radiale s'écrit :

$$\begin{aligned}D_{u_r}\left(r_0=\frac{3}{2}\Delta r,\theta\right)=&-\sum_{j=-5}^{-2}d_j\Big[u_r(\left|r_0+j\Delta r\right|,\theta+\pi)-\overline{u_r}(\left|r_0+j\Delta r\right|,\theta+\pi)\Big]\\&+\sum_{j=-1}^{5}d_j\Big[u_r(r_0+j\Delta r,\theta)-\overline{u_r}(r_0+j\Delta r,\theta)\Big]\end{aligned}$$

La variable singulière u_θ est traitée de façon identique.

Lorsqu'on dérive ru_r ou ru_θ, deux éléments sont à prendre en compte : d'une part un signe négatif provenant du fait que $r<0$ de l'autre côté de l'axe, et d'autre part un signe négatif dû au changement d'orientation du repère. Au final on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial ru_r}{\partial r}\left(r_0=\frac{3}{2}\Delta r,\theta\right)=\frac{1}{\Delta r}&\left[\sum_{j=-5}^{-2}a_j\left|r_0+j\Delta r\right|u_r(\left|r_0+j\Delta r\right|,\theta+\pi)\right.\\&\left.+\sum_{j=-1}^{5}a_j\left(r_0+j\Delta r\right)u_r(r_0+j\Delta r,\theta)\right]\end{aligned}$$

De même, pour la dérivée de $u_r u_\theta$:

$$\frac{\partial u_r u_\theta}{\partial r}\left(r_0 = \frac{3}{2}\Delta r, \theta\right) = \frac{1}{\Delta r}\left[\sum_{j=-5}^{-2} a_j u_r(|r_0 + j\Delta r|, \theta + \pi) u_\theta(|r_0 + j\Delta r|, \theta + \pi) + \sum_{j=-1}^{5} a_j u_r(r_0 + j\Delta r, \theta) u_\theta(r_0 + j\Delta r, \theta)\right]$$

Des raisonnements identiques à ceux qui précèdent permettent de calculer toutes les dérivées radiales intervenant dans les équations et de filtrer toutes les variables dans la direction radiale. Les dérivées et le filtrage selon les autres directions s'effectuent de manière classique, sans problème de changement de signe.

Ainsi, la méthode de Mohseni & Colonius consiste essentiellement à considérer un domaine de calcul où l'axe n'est pas maillé. On peut alors utiliser les équations polaires standard, en changeant le signe de certaines grandeurs lors des calculs de dérivées et lors du filtrage sélectif selon la direction radiale.

1.6.4 Méthode de Constantinescu & Lele : développement en séries des variables près de l'axe

La méthode de Constantinescu & Lele [34] s'appuie sur un maillage polaire classique, voir la figure 1.5(a), où l'axe est un point du maillage. Elle utilise des développements en séries des différentes variables pour obtenir des équations exactes et régulières valables uniquement sur l'axe. Les équations polaires standard sont appliquées sur l'ensemble du domaine de calcul à l'exception de l'axe, où on considère les nouvelles équations issues des développements en séries.

En coordonnées polaires les différentes variables peuvent se décomposer en séries. La forme du développement dépend de la régularité de la variable. Les variables régulières - ρ par exemple - s'écrivent de la façon suivante :

$$\rho(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}^{(\rho)} r^{2n}\right)\cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{mn}^{(\rho)} r^{2n}\right)\sin(m\theta)$$

où $\alpha_{mn}^{(\rho)}$ et $\beta_{mn}^{(\rho)}$ sont les coefficients de la série, qui ne dépendent que du temps. La pression p et l'énergie spécifique interne totale e_t se développent de manière analogue. La décomposition des variables singulières - u_r par exemple - s'écrit :

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{+\infty} A_{0n}^{(r)} r^{2n} + \sum_{m=1}^{+\infty} r^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn}^{(r)} r^{2n}\right)\cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} r^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_{mn}^{(r)} r^{2n}\right)\sin(m\theta)$$

où $A^{(r)}_{mn}$ et $B^{(r)}_{mn}$ sont les coefficients de la série, qui ne dépendent que du temps. Les coefficients associés à u_r et u_θ sont liés car $u_\theta = \partial u_r/\partial\theta$. On a ainsi les relations :

$$\begin{aligned} A^{(\theta)}_{i0} &= B^{(r)}_{i0} \quad \forall i \\ B^{(\theta)}_{i0} &= -A^{(r)}_{i0} \quad \forall i \end{aligned}$$

Ces deux expressions seront systématiquement utilisées par la suite pour se ramener autant que possible aux coefficients du développement de u_r.

Pour obtenir des équations régulières valables sur l'axe, on remplace chaque variable par son développement en série dans les équations de Navier-Stokes, puis on prend la limite en $r = 0$. Considérons par exemple le cas de l'équation de conservation de la masse. Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_m - V_m = 0 \quad \text{avec } E_m = \frac{\partial(r\rho u_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho u_\theta)}{r\partial\theta} \text{ (flux eulériens)}$$
$$\text{et } V_m = 0 \text{ (flux visqueux)}$$

Le premier terme des flux eulériens fait intervenir ρu_r. En remplaçant ces deux variables par leurs séries respectives on peut écrire :

$$\begin{aligned} \rho u_r =& \alpha^{(\rho)}_{00}\left(A^{(r)}_{10}\cos\theta + B^{(r)}_{10}\sin\theta\right) \\ &+ \left[\left(\alpha^{(\rho)}_{10}\cos\theta + \beta^{(\rho)}_{10}\sin\theta\right)\left(A^{(r)}_{10}\cos\theta + B^{(r)}_{10}\sin\theta\right)\right. \\ &\quad \left. + \alpha^{(\rho)}_{00}\left(A^{(r)}_{01} + A^{(r)}_{20}\cos 2\theta + B^{(r)}_{20}\sin 2\theta\right)\right] r \\ &+ O(r^2) \end{aligned}$$

Ainsi, en dérivant on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r\rho u_r}{r\partial r} =& \alpha^{(\rho)}_{00}\left(A^{(r)}_{10}\cos\theta + B^{(r)}_{10}\sin\theta\right)\Big/ r \\ &+ 2\left(\alpha^{(\rho)}_{10}\cos\theta + \beta^{(\rho)}_{10}\sin\theta\right)\left(A^{(r)}_{10}\cos\theta + B^{(r)}_{10}\sin\theta\right) \\ &+ 2\alpha^{(\rho)}_{00}\left(A^{(r)}_{01} + A^{(r)}_{20}\cos 2\theta + B^{(r)}_{20}\sin 2\theta\right) \\ &+ O(r) \end{aligned}$$

En procédant de même pour le second terme des flux eulériens :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u_\theta}{r\partial\theta} =&\alpha_{00}^{(\rho)}\left(-B_{10}^{(r)}\sin\theta - A_{10}^{(r)}\cos\theta\right)\Big/r\\ &+\left(-\alpha_{10}^{(\rho)}\sin\theta+\beta_{10}^{(\rho)}\cos\theta\right)\left(B_{10}^{(r)}\cos\theta - A_{10}^{(r)}\sin\theta\right)\\ &+\left(\alpha_{10}^{(\rho)}\cos\theta+\beta_{10}^{(\rho)}\sin\theta\right)\left(-B_{10}^{(r)}\sin\theta - A_{10}^{(r)}\cos\theta\right)\\ &+\alpha_{00}^{(\rho)}\left(-2B_{20}^{(r)}\sin 2\theta - 2A_{20}^{(r)}\cos 2\theta\right)\\ &+O(r)\end{aligned}$$

On remarque que les termes en $1/r$ dans les deux expressions précédentes s'éliminent lorsqu'on les ajoute. Ainsi, en reportant ces expressions dans l'équation de conservation de la masse et en prenant la limite quand r tend vers 0 on obtient finalement :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+2\alpha_{00}^{(\rho)}A_{01}^{(r)}+\alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}+\beta_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)}=0$$

Notons qu'aucune approximation n'a été nécessaire pour aboutir à cette expression. C'est une équation exacte et valable uniquement sur l'axe. Elle fait intervenir certains coefficients des séries, qu'il est nécessaire de calculer pour effectuer l'intégration temporelle. Pour les déterminer on utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_{00}^{(\rho)} =&\rho(r=0)\\ \alpha_{10}^{(\rho)} =&\cos\theta\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta)}-\sin\theta\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\\ \beta_{10}^{(\rho)} =&\sin\theta\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta)}+\cos\theta\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\\ A_{10}^{(r)} =&u_r(0,\theta)\cos\theta-u_r\left(0,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\\ B_{10}^{(r)} =&u_r(0,\theta)\sin\theta+u_r\left(0,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\\ A_{01}^{(r)} =&\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta)}+\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right]\end{aligned}$$

Les équations portant sur la quantité de mouvement et l'énergie s'obtiennent suivant la même démarche. Les calculs de ces équations et de tous les coefficients intervenant sont détaillés dans l'annexe B.

On a ainsi obtenu des équations régulières valables sur l'axe, s'exprimant en fonction des coefficients des séries. Il est important de noter que ces équations sont exactes. Dans tout le domaine de calcul on utilise les équations en coordonnées polaires classiques, sauf en $r = 0$ où on considère les équations sur l'axe qui ne présentent plus de singularité.

L'axe est traité de la façon suivante. À l'itération n, toutes les variables sont connues en tous les points du maillage. On commence alors par déterminer les valeurs des différents coefficients en utilisant les relations de l'annexe B.4 et le schéma de dérivation sur 11 points. On utilise ensuite les équations sur l'axe pour déterminer les valeurs des variables sur l'axe à l'itération $n+1$.

Cette méthode permet de traiter l'ensemble du domaine de calcul avec les schémas numériques sur 11 points. Les dérivées spatiales au voisinage de l'axe sont calculées avec la méthode de traversée de l'axe et de changement de signe des variables exposée dans la partie 1.6.3.

Il subsiste toutefois une difficulté dans le filtrage sélectif des variables sur l'axe. Ce point est rarement abordé dans la littérature. Dans le cas général, il est nécessaire de filtrer les variables dans les deux directions r et θ pour éviter les oscillations parasites non physiques. Sur l'axe, un filtrage selon θ n'a pas de sens, mais il est en revanche crucial de filtrer les variables selon r. La difficulté vient du fait que le filtrage radial impose le choix d'une direction θ suivant laquelle on va appliquer le filtre. En dehors de l'axe, cette direction est imposée mais sur l'axe on peut filtrer radialement selon n'importe quelle direction du maillage. La grandeur filtrée aura alors une valeur légèrement différente selon la direction choisie. Cela pose un problème pour les grandeurs régulières, comme ρ ou p, qui ont une valeur unique sur l'axe. Pour ne pas introduire de direction privilégiée, nous avons choisi de filtrer les grandeurs régulières dans toutes les directions et de faire une moyenne des valeurs obtenues.

Le filtrage des grandeurs singulières u_r et u_θ est plus délicat. D'après la forme des développements en séries de u_r et u_θ, on a sur l'axe :

$$
\begin{aligned}
u_r(0,\theta) &= A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta \\
u_\theta(0,\theta) &= B_{10}^{(r)} \cos\theta - A_{10}^{(r)} \sin\theta
\end{aligned}
$$

où $A_{10}^{(r)}$ et $B_{10}^{(r)}$ ne dépendent que du temps. Ainsi, $u_r(0,\theta)$ et $u_\theta(0,\theta)$ sont liées et varient suivant θ de façon particulière. Après avoir filtré ces variables suivant chaque direction θ, $u_r(0,\theta)$ et $u_\theta(0,\theta)$ ont été légèrement modifiées et elles ne vérifient plus les relations ci-dessus. En particulier, la forme de l'évolution en θ n'est plus conservée. Après un certain nombre d'itérations, la structure des champs $u_r(0,\theta)$ et $u_\theta(0,\theta)$ s'éloigne notablement de sa forme théorique, ce qui est source de fortes oscillations parasites non physiques. Il est donc crucial d'imposer une forme physique au champ de vitesse sur l'axe. Pour les grandeurs singulières $u_r(0,\theta)$ et $u_\theta(0,\theta)$, on choisit de commencer par filtrer radialement dans chaque direction. Le champ de vitesse sur l'axe ne vérifie alors plus la structure azimutale précédente. On calcule ensuite, avec la méthode exposée dans l'annexe B.4, les coefficients $A_{10}^{(r)}$ et $B_{10}^{(r)}$ correspondant à ce champ filtré. Enfin, on redéfinit le champ de vitesse sur l'axe avec les deux relations précédentes, connaissant les coefficients $A_{10}^{(r)}$ et $B_{10}^{(r)}$. On redonne ainsi une structure physique au champ de vitesse tout en appliquant un filtrage radial dans toutes les directions. Les tests effectués montrent que si on ne procède pas ainsi, des oscillations parasites issues de l'axe finissent par faire diverger les calculs quel que soit le niveau de filtrage sélectif. Les oscillations tendent même à être plus fortes quand on augmente le niveau de filtrage, car la structure azimutale du champ de vitesse sur l'axe est détruite plus rapidement. La procédure de filtrage proposée ici conserve cette structure et permet ainsi au filtrage de dissiper efficacement les oscillations parasites.

Le niveau de filtrage nécessaire au voisinage de l'axe peut toutefois être réduit en modifiant la façon de calculer les dérivées radiales. En effet, r vaut pratiquement zéro pour les points voisins de l'axe et de ce fait les dérivées de la forme $\partial(r[\bullet])/(r\partial r)$ sont calculées avec moins de précision que dans le reste du domaine de calcul. C'est encore plus sensible avec la méthode de Mohseni & Colonius, où les points adjacents à l'axe sont en $r = \Delta r/2$ au lieu de $r = \Delta r$ avec la méthode de Constantinescu & Lele. On choisit donc de calculer ces dérivées à partir du développement :

$$\frac{\partial r[\bullet]}{r\partial r} = \frac{[\bullet]}{r} + \frac{\partial[\bullet]}{\partial r}$$

La grandeur à dériver n'est plus multipliée par une quantité proche de zéro ce qui donne une évaluation plus précise des flux. Les tests réalisés montrent que cela diminue notablement les oscillations issues du centre. Cela permet ainsi de réduire le niveau du filtrage sélectif à utiliser.

1.7 Considérations sur le pas de temps

Dans les calculs, le pas de temps Δt est déterminé par la condition de stabilité sur le nombre de CFL. Ce nombre est défini par la relation :

$$\mathrm{CFL} = \frac{u_{c_{\max}}\Delta t}{\Delta_{\min}}$$

où $u_{c_{\max}}$ est la plus grande vitesse de propagation d'une perturbation et $\Delta_{\min}$ est la plus petite distance entre deux points du maillage. Ce nombre doit être inférieur à une certaine valeur pour que les calculs soient stables. Comme la valeurs de $u_{c_{\max}}$ est rarement connue avec précision, on la remplace souvent par c_0 en compressible. Lorsque les vitesses d'écoulement sont faibles devant c_0, cela paraît tout-à-fait justifié. Pour des vitesses plus élevées, cela revient à réduire la valeur maximale admissible pour le CFL. En pratique cette valeur maximale est voisine de 1.

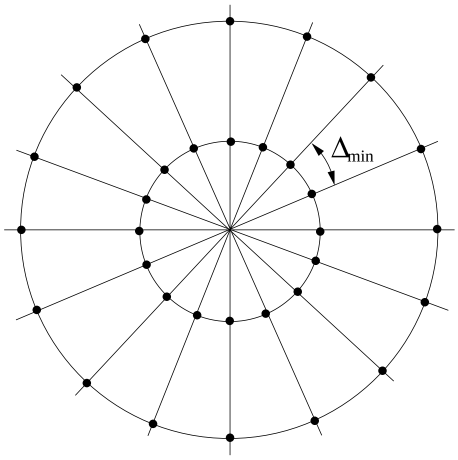


FIG. 1.8: Δ_{min} dans le cas d'un maillage cylindrique.

Le pas de temps s'exprime par :

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}\Delta_{\text{min}}}{c_0}$$

Dans le cas d'un maillage cartésien de pas constant Δ, on a $\Delta_{\text{min}} = \Delta$. Dans le cas d'un maillage cylindrique, Δ_{min} correspond généralement à l'écart azimutal entre deux points voisins de l'axe, comme l'illustre la figure 1.8. Cela sera le cas dans toutes les configurations étudiées en coordonnées polaires ou cylindriques. Avec la méthode de Mohseni & Colonius, les points les plus proches de l'axe sont en $r = \Delta r/2$ (voir la figure 1.5(b)) donc :

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}\Delta r \Delta\theta}{2c_0} \quad \text{avec} \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{n_\theta}$$

où n_θ est le nombre de points selon la direction azimutale. Avec la méthode de Constantinescu & Lele, les points les plus proches de l'axe sont en $r = \Delta r$, d'où :

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}\Delta r \Delta\theta}{c_0}$$

Ainsi, le pas de temps avec la méthode de Mohseni & Colonius est deux fois plus petit que celui utilisé avec la méthode de Constantinescu & Lele.

Par ailleurs, si le maillage cylindrique a un pas radial constant $\Delta r = \Delta$ identique à celui du maillage cartésien, le pas de temps en cylindrique sera plus petit que celui en cartésien, d'un facteur n_θ/π avec la méthode de Mohseni & Colonius et d'un facteur $n_\theta/(2\pi)$ avec celle de Constantinescu & Lele. Par exemple, si $n_\theta = 80$ cela donne respectivement un facteur 25.5 et un facteur 12.7 par rapport au pas de temps cartésien. C'est là le principal inconvénient de l'utilisation des coordonnées cylindriques : le maillage azimutal au niveau de l'axe est si fin que le pas de temps doit être très faible pour assurer la stabilité des calculs. Cela peut même aller jusqu'à compenser le gain de temps dû à l'allègement du maillage lors du passage en coordonnées cylindriques. On aura alors intérêt à prendre n_θ le plus petit possible pour limiter la réduction du pas de temps Δt. L'utilisation des coordonnées cylindriques reste malgré cela préférable car elle permettra de réduire considérablement la mémoire nécessaire aux calcul 3-D effectués par la suite. La limitation en mémoire reste en effet une des principales limites au développement du calcul direct du bruit des écoulements. De plus, ces coordonnées sont bien adaptées pour mailler les gradients de vitesse dans les jets circulaires, dont l'étude est l'objectif de ce travail. Ainsi, la pertinence du recours aux coordonnées cylindriques n'est nullement remise en cause par les contraintes sur le pas de temps, mais il convient de conserver à l'esprit cet inconvénient.

1.8 Validation du solveur en coordonnées polaires

Cette partie a pour objectif de valider le solveur développé en coordonnées polaires, ainsi que de comparer les performances des deux méthodes de traitement de l'axe. Deux configurations sont étudiées : le cas de la propagation d'une impulsion de pression et le cas de deux tourbillons corotatifs.

1.8.1 Impulsion de pression acoustique

On s'intéresse dans un premier temps à la propagation d'une impulsion de pression dans un milieu au repos. Ce problème est résolu en utilisant la méthode de Mohseni & Colonius, ainsi que celle de Constantinescu & Lele, pour la discrétisation de l'axe. Dans les deux cas, le maillage est de $n_r \times n_\theta = 120 \times 80$ et est régulier dans la direction radiale, avec $\Delta r = 1$ m. On prend aussi dans les deux cas CFL $= 2/3$. Il s'est avéré lors des premières simulations que la méthode de Mohseni & Colonius génère plus d'oscillations parasites que la méthode de Constantinescu & Lele. Le niveau de filtrage sélectif doit donc être plus élevé avec celle-ci. On choisit $\sigma_d = 0.03$ avec la méthode du saut de l'axe et $\sigma_d = 0.01$ avec celle du développement en séries. Notons également que le filtrage sélectif est appliqué deux fois plus souvent avec la méthode de Mohseni & Colonius car le pas de temps est deux fois plus petit que celui employé avec la méthode de Constantinescu & Lele.

À $t = 0$ on introduit une impulsion de pression en $(r, \theta) = (19\Delta r, 0)$. Le pulse est identique à celui présenté dans l'annexe A.1. La figure 1.9 présente les champs de pression obtenus avec les deux méthodes de traitement de l'axe. Dans les deux cas, le pulse traverse l'axe sans générer d'ondes parasites ce qui atteste de la précision des deux méthodes.

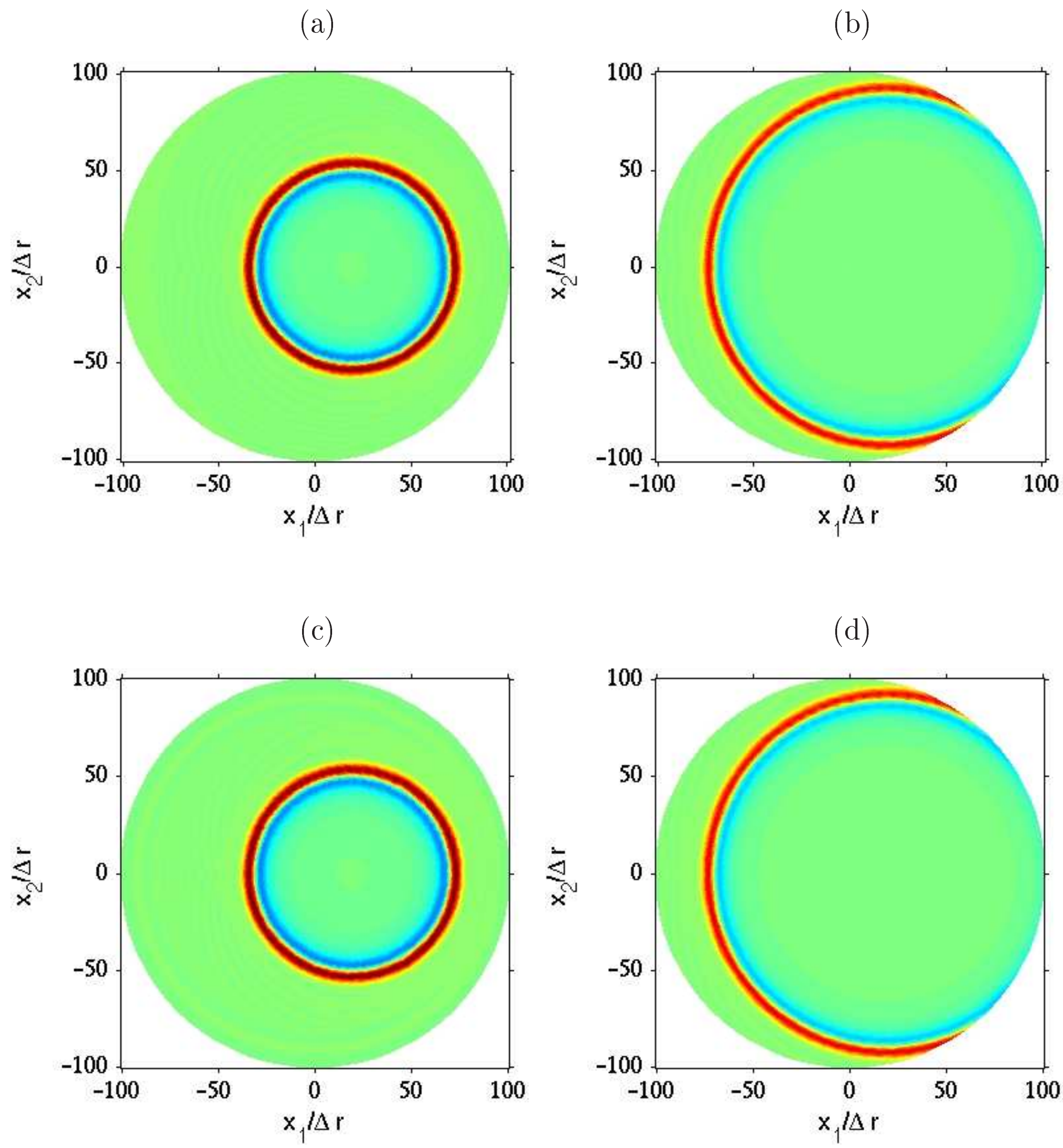


FIG. 1.9: Cas test d'un pulse de pression gaussien : champ de pression à deux instants différents. (a) $t/\Delta t = 2000$ et (b) $t/\Delta t = 3500$ (méthode de Mohseni & Colonius) ; (c) $t/\Delta t = 1000$ et (d) $t/\Delta t = 1750$ (méthode de Constantinescu & Lele).

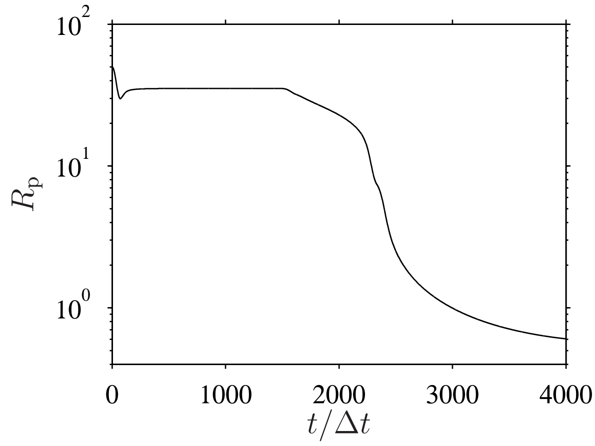


FIG. 1.10: Cas test d'un pulse de pression gaussien : évolution temporelle du résidu avec la méthode de Constantinescu & Lele. L'évolution obtenue avec la méthode de Mohseni & Colonius, non représentée ici, est exactement la même.

L'évolution temporelle du résidu reportée sur la figure 1.10 montre, avec un raisonnement similaire à celui effectué dans l'annexe A.1, que les deux solveurs sont peu dissipatifs et qu'il n'y a pas de réflexion notable au niveau des conditions aux limites.

Tam [138] a déterminé la solution théorique de ce problème :

$$p_{th}(r,\theta,t) = p_{ref} + \frac{\epsilon}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \times \cos\left(c_0\xi t\right) J_0\left(\xi r\right)\xi d\xi$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0. La différence entre les champs de pression calculés et les champs de pression théoriques est présentée sur la figure 1.11. Avec les deux méthodes, l'erreur est centrée sur le pulse et non sur l'axe. En particulier, l'erreur observée sur la partie de l'onde qui a traversé l'axe n'est pas supérieure. Lorsque le pulse commence à sortir du domaine de calcul, l'erreur maximale est située au niveau des conditions aux limites. Ces observations montrent que les deux méthodes de traitement de l'axe sont très précises. Les erreurs obtenues ne sont pas liées à l'axe. En revanche, la méthode de Mohseni & Colonius s'avère être la moins précise du fait du haut niveau de filtrage sélectif nécessaire à la stabilité des calculs. La figure 1.12, qui trace le résidu R_p, illustre bien ce point. R_p est proportionnel à l'énergie contenue dans le domaine de calcul et il s'écrit :

$$R_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{1}{n_r \times n_\theta}\sum_{i,j}\left(p_{i,j}-p_0\right)^2}$$

où $p_{i,j}$ est la pression au point (i,j). Sur la figure 1.12, le temps est normalisé par la durée physique du calcul $t_{\max}$ au lieu de Δt, pour tenir compte de la différence entre les pas de temps. Avec la méthode Mohseni & Colonius, le résidu diminue légèrement durant la propagation du pulse, ce qui n'est pas le cas avec celle de Constantinescu &

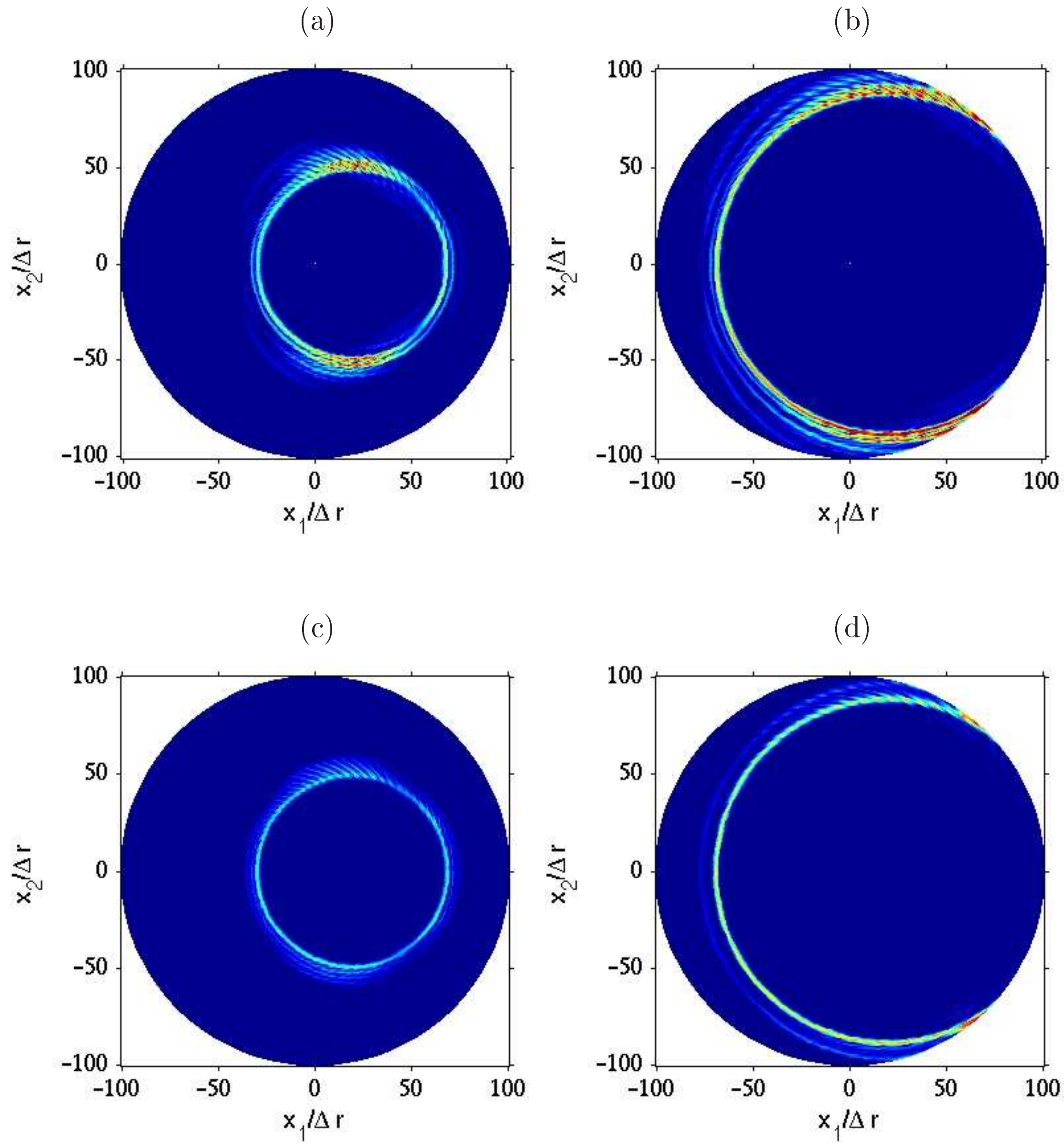


FIG. 1.11: Cas test d'un pulse de pression gaussien : différence entre le champ de pression calculé et le champ de pression théorique. (a) $t/\Delta t = 2000$ et (b) $t/\Delta t = 3500$ (méthode de Mohseni & Colonius) ; (c) $t/\Delta t = 1000$ et (d) $t/\Delta t = 1750$ (méthode de Constantinescu & Lele). Niveaux entre 0.2 Pa et 2 Pa.

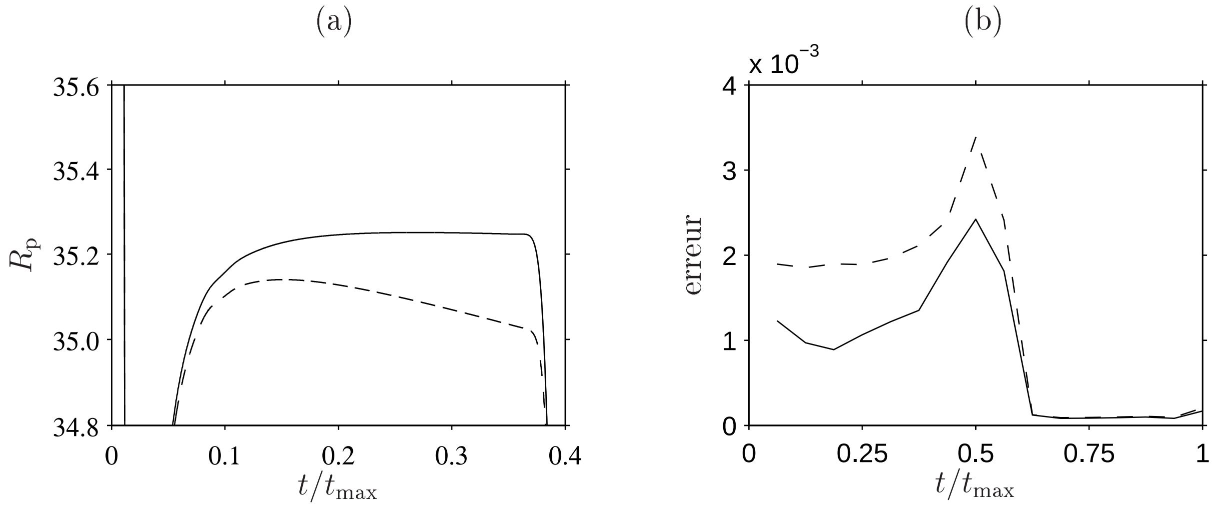


FIG. 1.12: Cas test d'un pulse de pression gaussien. – – – – méthode de Mohseni & Colonius ; ——— méthode de Constantinescu & Lele. $t_{\max}$ est la durée physique du calcul. (a) Détails de l'évolution temporelle du résidu ; (b) évolution temporelle du maximum de l'erreur, normalisée par l'amplitude initiale du pulse.

Lele qui conserve l'énergie constante durant toute la propagation. De plus, tant que le pulse n'est pas sorti du domaine, le maximum de l'erreur est plus grand avec la méthode de Mohseni & Colonius (figure 1.12(b)). Il augmente rapidement lorsque le pulse commence à atteindre les conditions aux limites, puis il chute bruquement à $t = 0.5t_{\max}$ lorsqu'il a été entièrement évacué. On note que dans les deux cas le solveur reste très précis, avec une erreur maximale toujours inférieure à 0.4 %.

Ainsi, les deux méthodes de résolution de l'axe s'avèrent très précises et ne génèrent pas d'erreurs notables. À l'issue de ce cas test la méthode de Constantinescu & Lele paraît être la plus précise, car elle permet d'avoir un niveau de filtrage sélectif bien plus faible que la méthode de Mohseni & Colonius.

1.8.2 Tourbillons corotatifs

On étudie maintenant le cas de deux tourbillons corotatifs. Les calculs ont été effectués avec les deux méthodes de traitement de l'axe. Dans les deux cas on utilise des maillages constitués de $n_r \times n_\theta = 340 \times 80$ points. Les maillages ont un pas angulaire constant dans la direction azimutale, avec $\Delta\theta = 2\pi/n_\theta$. Depuis le centre, le pas radial est tout d'abord constant sur les 30 premiers points, avec $\Delta r = 2 \times 10^{-4}$ m. On applique ensuite un étirement de 0.94 % jusqu'au bord du domaine de calcul. Les deux maillages ne diffèrent donc que par le premier point radial : il se trouve en $r = \Delta r/2$ avec la méthode de Mohseni & Colonius et en $r = 0$ avec celle de Constantinescu & Lele. La figure 1.13

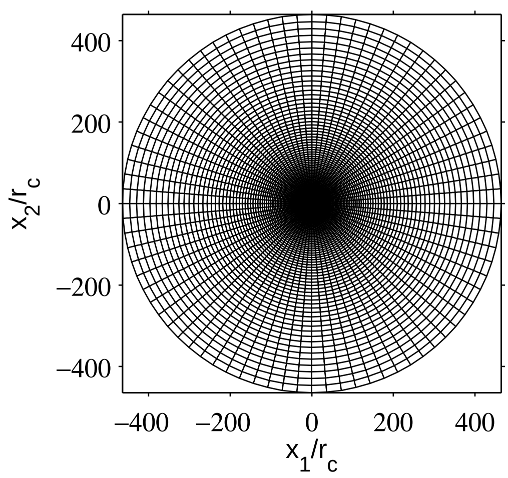


FIG. 1.13: Structure du maillage utilisé pour le cas test des tourbillons corotatifs. On a $r_c = 4\Delta r$.

montre la structure du maillage obtenu. On choisit un CFL de 0.8 dans les deux cas. Les niveaux de filtrage sélectif sont identiques à ceux du cas test précédent. Les tourbillons sont placés au centre du domaine de calcul. Leurs caractéristiques sont identiques à celles prises dans l'annexe A.2. Chaque tourbillon est donc placé à $r_0 = 18\Delta r$ du centre du domaine et a une demi-largeur $r_c = 4\Delta r$. On obtient maintenant $T/\Delta t = 3.2 \times 10^4$ avec la méthode de Mohseni & Colonius et $T/\Delta t = 1.6 \times 10^4$ avec celle de Constantinescu & Lele, ce qui assure une très bonne discrétisation temporelle.

La figure 1.14 montre les champs de vorticité obtenus avec les deux versions du code. Dans les deux cas, l'évolution aérodynamique est analogue à celle observée lors du cas test cartésien (voir l'annexe A.2 pour plus de détails). Le traitement de l'axe ne génère pas d'ondes parasites, même lors de la fusion des tourbillons qui provoque de fortes modifications du champ de vorticité et qui a lieu au niveau de l'axe. Ce point est important car dans les calculs 3-D l'axe cylindrique sera confondu avec l'axe du jet et donc en particulier avec le point de rencontre des couches de cisaillement à la fin du cône potentiel. La structure du champ acoustique rayonné par les tourbillons est également en bon accord avec celle obtenue dans l'annexe A.2, comme l'illustre la figure 1.15.

On remarque néanmoins que la fusion a lieu plus tôt avec la méthode de Mohseni & Colonius. Elle se produit en effet après 1.18×10^5 itérations, au lieu de 2.15×10^5 itérations avec la méthode de Constantinescu & Lele. En appelant Δt_c le pas de temps utilisé lors du cas test cartésien, ces valeurs correspondent respectivement à $4.6 \times 10^3 \Delta t_c$ et $1.7 \times 10^4 \Delta t_c$. Elles sont à comparer au temps de fusion obtenu avec la version cartésienne du solveur, qui était de $3.2 \times 10^4 \Delta t_c$. Ainsi, avec la méthode de Mohseni & Colonius la fusion a lieu sept fois plus tôt qu'en coordonnées cartésiennes. Cela vient du haut niveau de filtrage sélectif

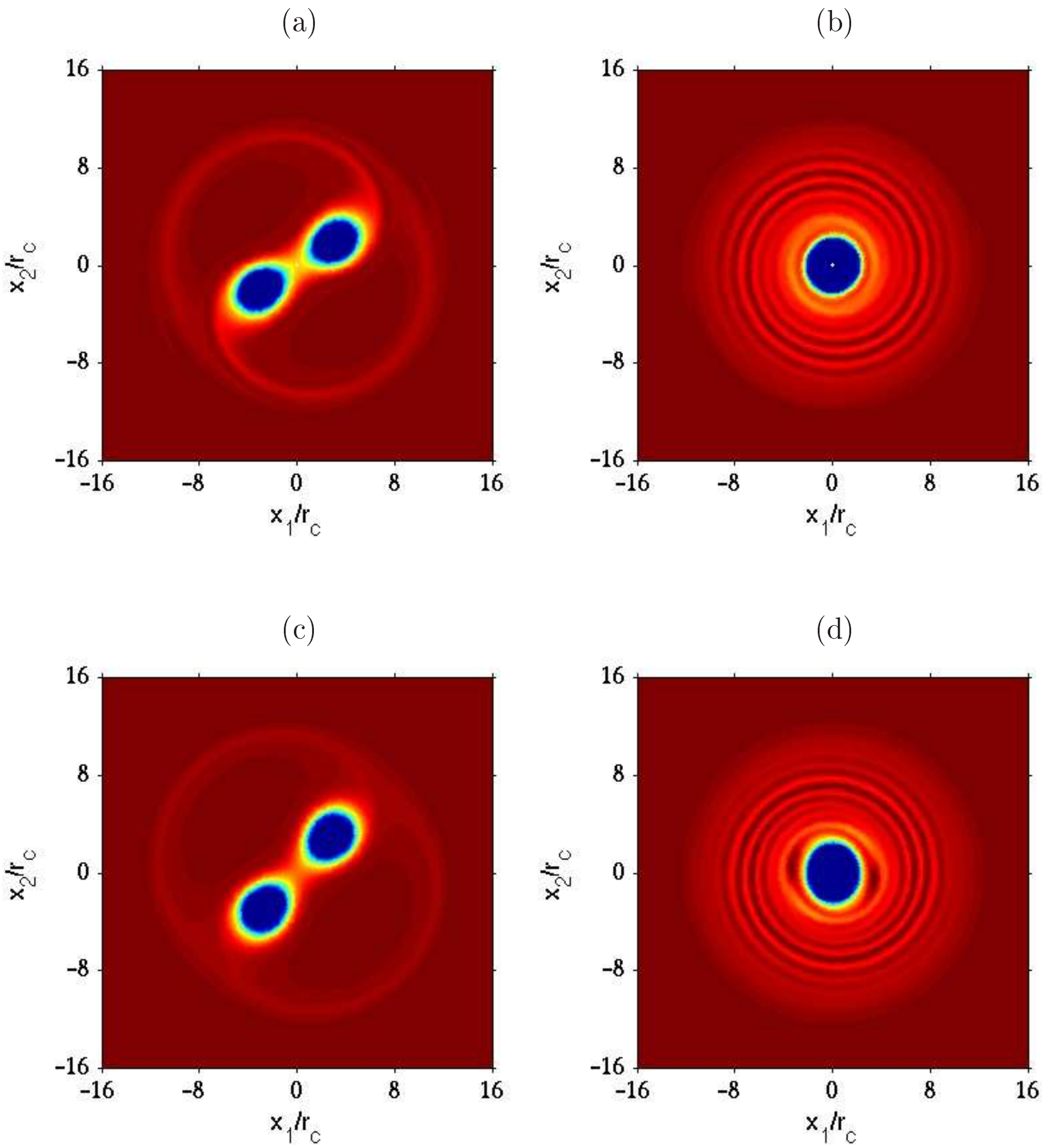


Fig. 1.14: Cas test de deux tourbillons corotatifs : champs de vorticité à deux instants différents obtenus avec les deux versions du solveur en coordonnées polaires. (a) $t/\Delta t = 8.5 \times 10^4$ et (b) $t/\Delta t = 1.5 \times 10^5$ (méthode de Mohseni & Colonius) ; (c) $t/\Delta t = 1.35 \times 10^5$ et (d) $t/\Delta t = 2.33 \times 10^5$ (méthode de Constantinescu & Lele).

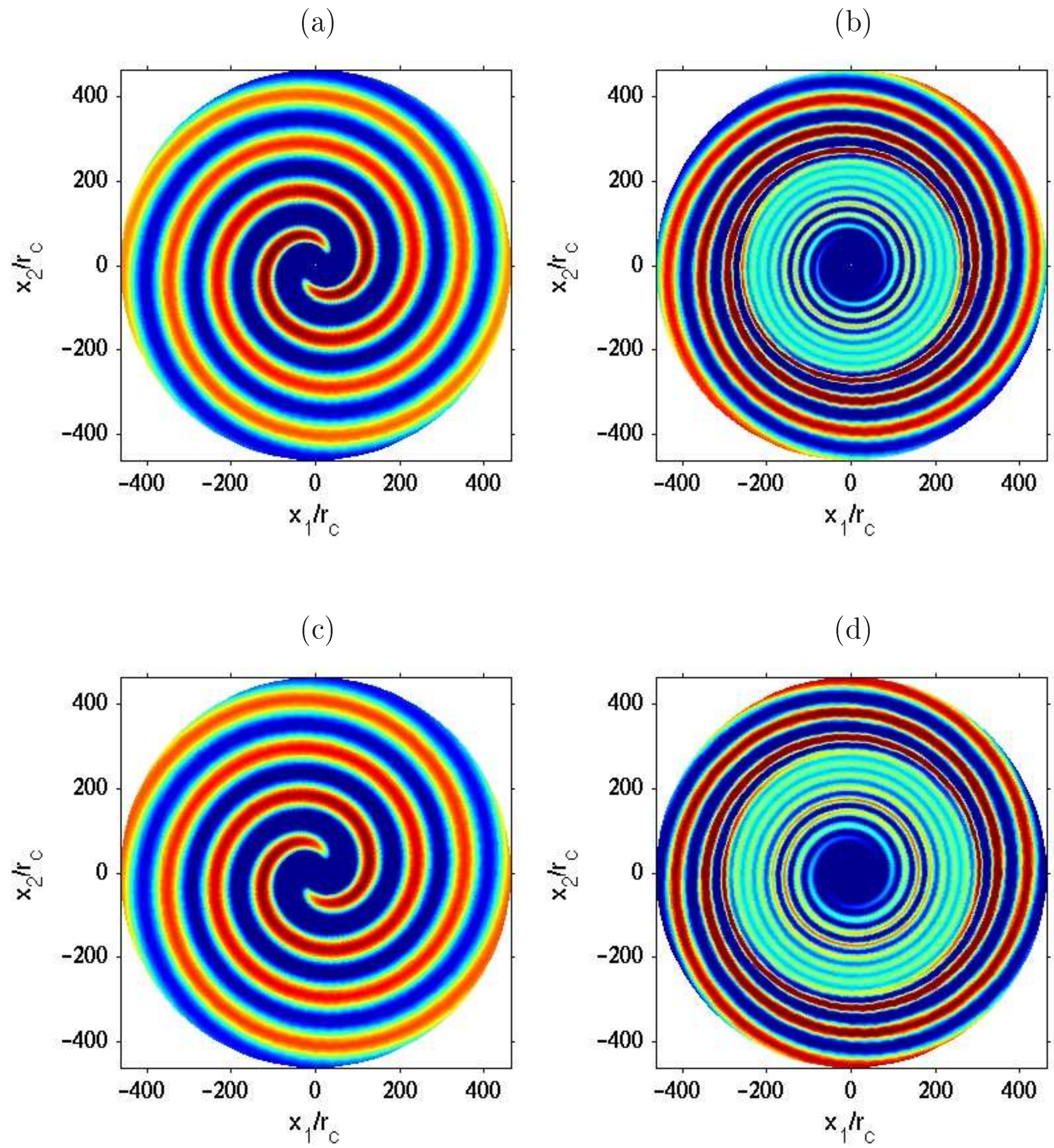


FIG. 1.15: Cas test de deux tourbillons corotatifs : champs de pression à deux instants différents obtenus avec les deux versions du solveur en coordonnées polaires. (a) $t/\Delta t = 8.5 \times 10^4$ et (b) $t/\Delta t = 1.5 \times 10^5$ (méthode de Mohseni & Colonius) ; (c) $t/\Delta t = 1.35 \times 10^5$ et (d) $t/\Delta t = 2.33 \times 10^5$ (méthode de Constantinescu & Lele).

nécessaire à la stabilité du calcul. En revanche, avec la méthode de Constantinescu & Lele la fusion a lieu seulement deux fois plus tôt qu'en coordonnées cartésiennes. Cela est très satisfaisant et confirme que le solveur utilisant cette approche est très peu dissipatif. L'écart avec le cas cartésien vient du fait que même si σ_d est plus faible qu'en cartésien le filtrage est appliqué plus souvent, étant donné le faible pas de temps utilisé. Au final, le filtrage sélectif reste un peu plus fort avec la méthode de Constantinescu & Lele qu'en coordonnées cartésiennes. Ceci est nécessaire car même si cette approche est très précise, elle tend quand même à générer plus d'oscillations parasites qu'en cartésien et requiert donc un filtrage plus élevé.

Comme nous l'avons fait remarquer en cartésien, cet exemple est particulièrement intéressant car il met clairement en évidence la dissipation numérique des différents codes. Le solveur utilisant la méthode de Mohseni & Colonius est ainsi bien plus dissipatif que celui s'appuyant sur la méthode de Constantinescu & Lele. Ce dernier fournit en revanche des résultats très proches de ceux obtenus avec la version cartésienne du solveur.

1.8.3 Bilan sur les méthodes de traitement de l'axe

À l'issue de ces premiers calculs, le solveur en coordonnées cylindriques utilisant la méthode de Constantinescu & Lele s'avère être le plus performant. Il permet en effet de calculer avec précision des écoulements et la propagation d'ondes acoustiques, sans générer d'ondes parasites au niveau de l'axe. Le niveau de filtrage sélectif est également très proche de celui requis en cartésien, ce qui permet d'avoir une très faible dissipation numérique. Ce n'est pas le cas du solveur utilisant la méthode de Mohseni & Colonius, qui nécessite un haut niveau de filtrage et qui enlève ainsi tout le bénéfice des nouveaux schémas. De plus, la méthode de Constantinescu & Lele permet d'utiliser un pas de temps deux fois plus grand qu'avec la méthode de Mohseni & Colonius. Pour une même durée physique de calcul, il faut donc deux fois moins d'itérations avec l'approche de Constantinescu & Lele qu'avec celle de Mohseni & Colonius, alors que les coûts numériques de ces deux méthodes sont similaires. La méthode de Constantinescu & Lele est donc supérieure en tous points à celle de Mohseni & Colonius. C'est donc cette méthode que nous retiendrons pour la suite, lors du passage en 3-D du solveur.

Chapitre 2

Étude par simulation numérique directe de tourbillons elliptiques et de leur bruit rayonné

On s'intéresse dans ce deuxième chapitre au comportement aérodynamique et acoustique de différents tourbillons elliptiques. L'objectif est d'une part de confronter les résultats issus du calcul direct en cartésien à ceux de la littérature, et d'autre part de prolonger les études existantes pour mettre en évidence de nouveaux éléments sur ces tourbillons. En effet, bien que les tourbillons 2-D semblent élémentaires, ils peuvent s'avérer très utiles pour comprendre l'évolution de structures cohérentes dans divers écoulements. Par exemple, les tourbillons elliptiques permettent d'étudier des structures de vorticité rencontrées dans les écoulements géophysiques [101, 102], et de modéliser les effets anisotropiques dans les tourbillons [49, 87].

2.1 État de l'art et objectifs

Les premiers travaux sur les tourbillons elliptiques sont des études analytiques du tourbillon de Kirchhoff (1876), voir Love [93] et Lamb [83]. Ces derniers ont montré que ce tourbillon, formé par une ellipse de vorticité constante ω, tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire constante Ω sans changement de forme. Il est linéairement stable pour des rapports de $\sigma = a/b < 3$, a et b étant respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse, et Dritschel [47] observe numériquement qu'il est non-linéairement stable uniquement dans le domaine de stabilité linéaire ($\sigma < 3$). La stabilité de ce tourbillon a récemment été reliée par Vosbeek *et al.* [151] à la distribution spatiale du taux de contrainte, qui doit être plus faible à l'intérieur du tourbillon qu'à l'extérieur pour assurer la stabilité. Si $\sigma > 3$, le tourbillon est instable et la croissance des instabilités peut affecter très fortement sa forme et conduire à une cassure en deux tourbillons corotatifs ou plus. Les conditions pour lesquelles une telle cassure forme deux tourbillons ont été étudiées par Dritschel [46, 47], à partir de considérations énergétiques. En particulier, ce phénomène s'observe pour des tourbillons elliptiques de rapport initial proche de six. L'évolution temporelle de la vorticité peut également être affectée par un processus d'axisymétrisation. En effet, Melander *et al.* [99] ont montré que des tourbillons présentant de faibles gradients de vorticité aux bords tendent à devenir circulaires, à cause de l'éjection progressive de filaments de vorticité. Ce phénomène a été étudié pour des tourbillons elliptiques stables et pour des tourbillons corotatifs [100]. Dritschel [48] fait toutefois remarquer qu'un état parfaitement circulaire n'est pas atteint lorsque les gradients de vorticité aux bords du tourbillon sont suffisamment forts.

Ainsi, deux phénomènes antagonistes sont susceptibles de se produire en présence d'un tourbillon elliptique instable : la croissance de perturbations instables et l'axisymétrisation du tourbillon. Les instabilités peuvent mener à une cassure du tourbillon, tandis que la filamentation tend à réduire l'excentricité et peut affecter la croissance des perturbations. L'évolution du tourbillon dépend alors du phénomène qui va s'imposer. Le processus dominant s'établit en général lors des premières révolutions. L'évolution du tourbillon lors de cette première phase peut en effet modifier notablement le poids relatif de ces deux phénomènes. Les effets visqueux peuvent en particulier jouer un rôle important lors de l'évolution initiale de tourbillons avec de forts gradients de vorticité, comme le soulignent Melander *et al.* [99]. Une bonne prise en compte de la viscosité est donc indispensable pour calculer convenablement l'évolution du tourbillon de Kirchhoff. Cependant, dans la littérature, la plupart des études numériques de tourbillons elliptiques s'appuient sur des approches pseudo-spectrales (Melander *et al.* [99]) ou sur la méthode des contours dynamiques (Drischel [47, 48] ; Vosbeek *et al.* [151]). Dans les algorithmes pseudospectraux, les effets visqueux sont modélisés par une viscosité artificielle d'ordre quatre, et ils sont même négligés dans la méthode des contours dynamiques. Seuls des écoulements faiblement visqueux peuvent être ainsi étudiés avec ces approches. Elles ne permettent donc pas de calculer avec précision le comportement d'un tourbillon elliptique lorsqu'il y a compétition entre la croissance des instabilités et l'axisymétrisation. Ces approches se restreignent de plus à des écoulements incompressibles ; le bruit rayonné ne peut pas être calculé directement.

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'évolution de tourbillons elliptiques de rapports différents. Le premier est stable et pratiquement circulaire, avec un rapport $\sigma = 1.2$. Le deuxième a un rapport $\sigma = 5$ et son évolution est dominée par l'axisymétrisation. Les autres tourbillons sont de rapport $\sigma = 6$, 12.5 et 25. Ils sont donc fortement instables, et la croissance des perturbations doit y être le processus dominant. On souhaite tout d'abord étudier la compétition entre l'axisymétrisation et la croissance des instabilités. Il s'agit dans ce cas de déterminer les effets de chaque processus sur l'évolution du tourbillon, les conditions pour lesquelles il y a compétition entre eux, le comportement du tourbillon lorsque cela se produit et le domaine de σ dans lequel chaque processus domine l'autre. L'objectif est ensuite de déterminer l'influence du rapport initial sur le bruit rayonné par le tourbillon et les effets de l'axisymétrisation sur l'évolution du champ de pression.

2.2 Maillage et conditions initiales

Le maillage est constitué de 381×381 points et est symétrique suivant les directions x et y. Il est similaire à celui des tourbillons corotatifs présenté dans le chapitre précédent (voir figure A.3). Depuis le centre, le pas de discrétisation est constant et vaut $\Delta_0 = 2 \times 10^{-4}$ m sur les 30 premiers points. Le maillage est ensuite étiré à un taux de 4 % sur les 95 points suivants, afin d'atteindre le champ acoustique lointain. Ce taux est assez faible pour conserver une bonne précision (voir Bogey & Bailly [19]). Finalement, le pas reste constant sur les 65 points restants, où il vaut $\Delta_{\max} = 41.5\Delta_0$, ce qui est assez petit pour permettre la propagation des ondes acoustiques dans les configurations étudiées. On peut noter que le cas $\sigma = 1.2$ a aussi été réalisé avec un maillage deux fois plus fin et a montré qu'un raffinement du maillage ne modifie pas les résultats. L'origine des axes est prise au centre de la grille, qui correspond aussi au centre du tourbillon. Le domaine de calcul s'étend de $-3.7 \times 10^3\Delta_0$ à $3.7 \times 10^3\Delta_0$ dans les deux directions. Dans toutes les configurations, on a pris CFL $= c_0\Delta t/\Delta_0 = 1$.

Tous les calculs sont initialisés avec le tourbillon de Kirchhoff. L'expression du champ initial de vitesse est donnée dans l'annexe C.1. La pression et la masse volumique sont respectivement initialisées à $p_\infty = 10^5$ Pa et $\rho_\infty = 1.21$ kg.m^{-3}. La vorticité est notée ω et le paramètre de l'ellipse ϵ est défini par $\sigma = (1+\epsilon)/(1-\epsilon)$. Notons que ϵ est relié à l'excentricité e par $e = 2\epsilon^{1/2}/(1+\epsilon)$. Le rayon r_e du cercle associé à l'ellipse vérifie $a = r_\mathrm{e}(1+\epsilon)$ et $b = r_\mathrm{e}(1-\epsilon)$. L'indice 0 indique pour une quantité qu'elle est prise à $t = 0$. La vitesse angulaire initiale du tourbillon est notée Ω_0, et T_0 correspond à la période initiale de rotation du tourbillon. Dans toutes les configurations, on choisit $r_{\mathrm{e}0} = 40\Delta_0$, ce qui assure une bonne discrétisation des tourbillons pour $\sigma \leq 25$. La vorticité initiale vaut $\omega_0 = 0.027/\Delta t$. Les nombres de Reynolds $\mathrm{Re}_{a_0} = a_0 V_{\max}/\nu$ des tourbillons, basés sur a_0 et sur la vitesse maximale dans le tourbillon, vont de 1.1×10^5 pour $\sigma = 1.2$ à 2.8×10^4

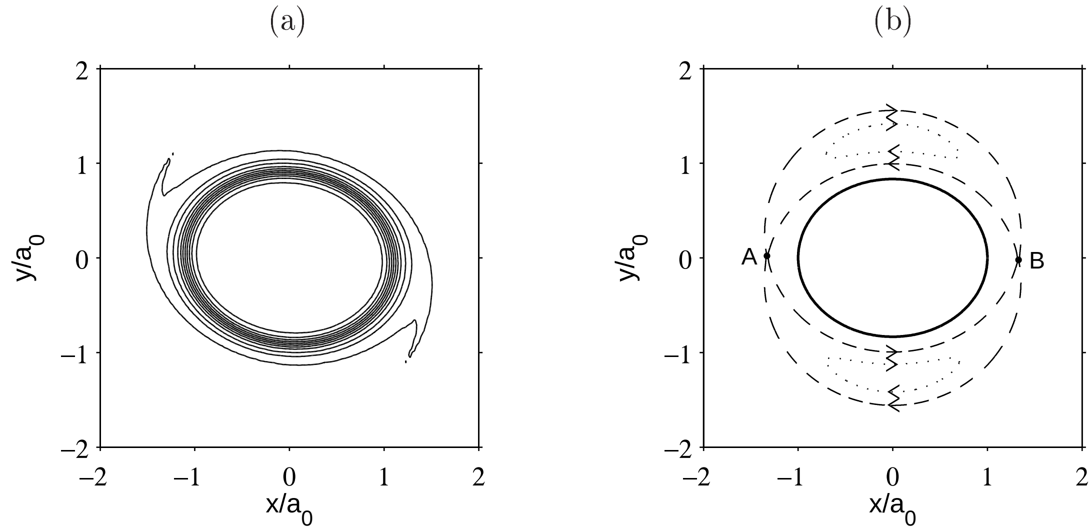


FIG. 2.1: Cas $\sigma_0 = 1.2$. (a) Iso-niveaux de vorticité à $t/T_0 = 16$. Niveaux : 1 %, 5 % et de 10 % à 90 % du maximum de vorticité avec un pas de 10 %. (b) Structure du champ de vitesse induit par le tourbillon de Kirchhoff initial, dans un repère en rotation à la vitesse angulaire Ω_{th}. ——— frontière du tourbillon ; – – – – et $\cdots\cdot$ lignes de courant. Les points A et B sont deux points selle.

pour $\sigma = 25$. Les valeurs intantanées de a et b sont estimées à chaque itération à partir du contour de vorticité de niveau $\omega_{\max}/2$, où $\omega_{\max}$ est le maximum de vorticité dans le tourbillon. Les autres paramètres géométriques de l'ellipse sont alors déduits.

2.3 Tourbillon de rapport initial proche de 1 ($\sigma_0 = 1.2$)

Le cas d'un tourbillon elliptique de rapport voisin de 1 est tout d'abord étudié. Le rapport initial vaut $\sigma_0 = 1.2$, ce qui donne un paramètre de l'ellipse $\epsilon_0 = 0.09 \ll 1$. Dans un premier temps, le comportement aérodynamique du tourbillon est analysé et est confronté aux résultats théoriques de la littérature. Le bruit rayonné est ensuite comparé à une solution analytique de référence obtenue par Howe [70], décrite dans l'annexe C.2.

2.3.1 Évolution aérodynamique

La figure 2.1(a) montre des iso-niveaux de vorticité à $t/T_0 = 16$. On n'observe pas de filamentation notable. Pour mieux comprendre ceci, la figure 2.1(b) représente des lignes de courant induites par le tourbillon initial, dans un repère en rotation à la vitesse angulaire du tourbillon $\Omega_{\mathrm{th}} = \omega(1-\epsilon^2)/4$ (voir l'annexe C.1). La structure des lignes de courant reste par ailleurs identique durant toute l'évolution du tourbillon. Melander *et al.* [99] précisent

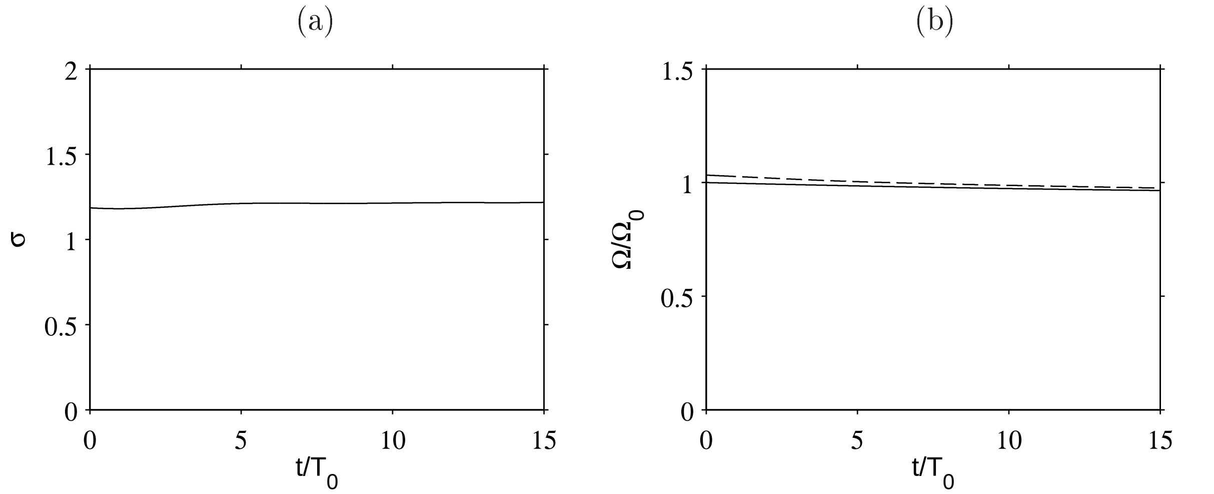


FIG. 2.2: Cas $\sigma_0 = 1.2$. (a) Évolution temporelle de σ. (b) Évolution temporelle : ——— vitesse angulaire calculée Ω/Ω_0, – – – – vitesse angulaire théorique $\Omega_{\mathrm{th}}/\Omega_0$.

que le phénomène d'axisymétrisation se produit quand les deux points selle A et B sont situés à l'intérieur du tourbillon. La vorticité autour de ces points est alors éjectée du tourbillon, et est convectée le long des lignes de courant, amorçant ainsi l'axisymétrisation. Dans le cas du tourbillon de Kirchhoff, les deux points selle sont initialement placés à l'extérieur du tourbillon, comme le montre la figure 2.1(b). La diffusion visqueuse tend à relaxer les gradients de vorticité au bord du tourbillon, mais dans la présente configuration, la vorticité ne s'étale pas suffisamment pour atteindre les points selles et la filamentation ne s'amorce pas. Les tourbillons avec de forts gradients initiaux de vorticité ne semblent pas subir d'axisymétrisation, comme l'a précédemment observé Dritschel [48]. Cela est confirmé par l'évolution temporelle du rapport σ, représentée sur la figure 2.2(a). Ce rapport σ reste constant. Le tourbillon tourne donc sur lui-même, sans changement de forme.

D'après la figure 2.2(b), la vitesse angulaire Ω du tourbillon est constante, et est en bon accord avec la vitesse angulaire théorique d'un tourbillon de Kirchhoff $\Omega_{\mathrm{th}} = \omega(1-\epsilon^2)/4$ donnée par Love [93]. La valeur de Ω_{th} est ici calculée à chaque itération à partir du calcul de ϵ et ω, où ω est estimée par la moyenne intégrale de la vorticité à l'intérieur du contour de niveau $\omega_{\max}/2$. Durant toute l'évolution du tourbillon, il y a un faible étalement de la vorticité aux bords du tourbillon sous l'effet de la viscosité. L'aire du tourbillon augmente alors légèrement, impliquant une lente diminution de la vorticité totale et donc de Ω_{th}.

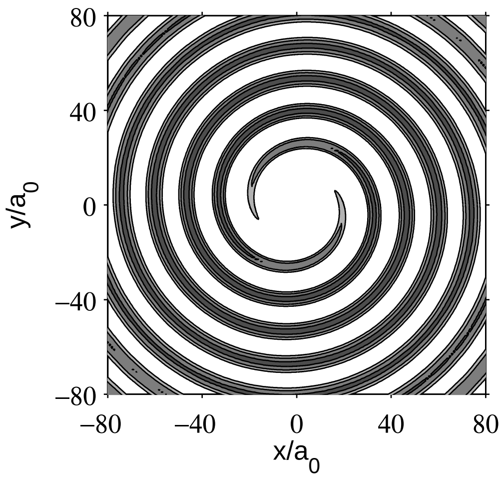


FIG. 2.3: Cas $\sigma_0 = 1.2$. Champ de pression à $t/T_0 = 16$. Contours de niveaux : $p_\infty - 10$ Pa, p_∞ et $p_\infty + 10$ Pa.

2.3.2 Rayonnement acoustique

Le champ acoustique du tourbillon a ensuite été étudié. La figure 2.3 montre que celui-ci rayonne comme un quadripole tournant. Le profil de pression le long de la ligne $x = y$, $x \geq 0$ à $t/T_0 = 16$ est représenté sur la figure 2.4(a). Au voisinage du tourbillon, le champ acoustique proche domine la pression, mais sa contribution décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne pour laisser place au champ acoustique lointain. Le résultat issu du calcul est comparé au résultat donné par la formule analytique (C.8) détaillée dans l'annexe C.2. Cette formule analytique a été obtenue par Howe [70], et donne le champ acoustique lointain généré par des tourbillons de Kirchhoff avec $\epsilon \ll 1$, pour lesquels les effets visqueux sont négligés. En considérant uniquement le premier ordre en ϵ, Howe a aussi montré que le niveau de bruit est proportionnel à ϵ et que la fréquence du rayonnement ne dépend pas du rapport σ. Une formule analytique plus générale (C.9), prenant en compte le mouvement réel du tourbillon dans la fréquence du bruit rayonné, est donnée dans l'annexe C.2. Elle s'applique lorsque la forme du tourbillon elliptique évolue dans le temps, et utilise les vraies valeurs des différents paramètres aux temps retardés. Notons que ces expressions analytiques ne fournissent pas le champ acoustique proche. Sur la figure 2.4(a), le champ acoustique lointain domine la pression pour $d/a_0 \geq 80$, et le résultat du calcul tend vers celui de la formule analytique, avec un bon accord en fréquence et en niveau. La comparaison des signaux temporels de pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 56$ sur la figure 2.4(b) confirme ce bon accord.

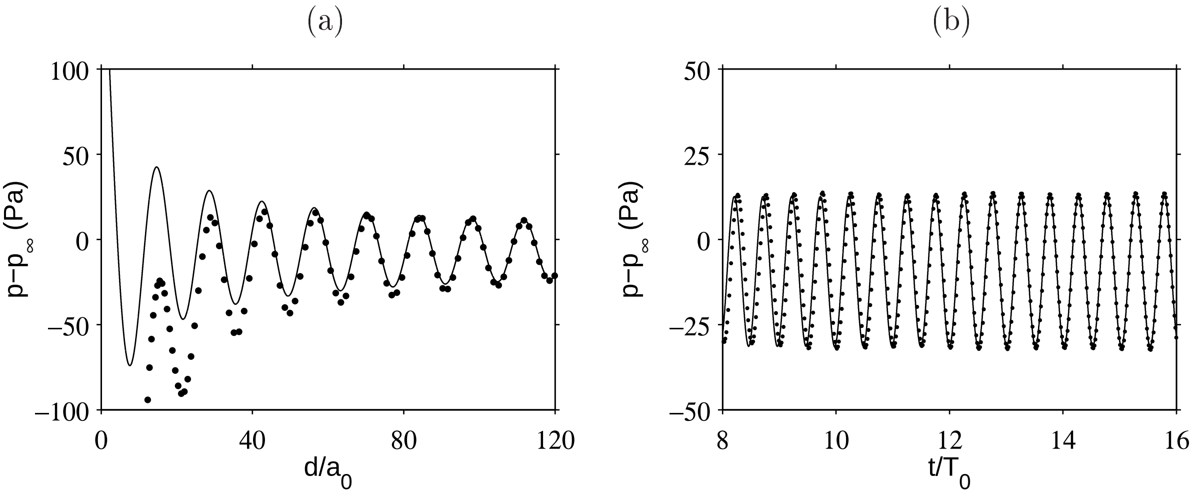


FIG. 2.4: Cas $\sigma_0 = 1.2$. Comparaison du rayonnement acoustique calculé avec la solution analytique (C.8) : ——— solution analytique ; • calcul (d est la distance depuis le centre du tourbillon). (a) Profil de pression le long de la ligne $x = y$, $x > 0$ à $t = 16T_0$. (b) Évolution temporelle de la pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 56$.

2.4 Tourbillon de rapport initial modéré ($\sigma_0 = 5$)

On s'intéresse maintenant à un tourbillon elliptique de rapport modéré $\sigma_0 = 5$. Il est initialement instable, et le paramètre de l'ellipse est $\epsilon_0 = 0.67$. La dynamique du tourbillon doit donc être maintenant affectée par la croissance des instabilités et par le processus d'axisymétrisation. De plus, la formule analytique du bruit rayonné (C.8) n'est plus appropriée car la valeur de ϵ n'est plus négligeable.

2.4.1 Stabilité du tourbillon de Kirchhoff

Avant d'étudier le comportement du tourbillon, il est utile de synthétiser les résultats connus sur la stabilité du tourbillon de Kirchhoff. La stabilité linéaire de ce tourbillon a d'abord été étudiée par Love [93]. En notant δn un petit déplacement de la frontière du tourbillon, il a montré par une analyse linéaire que les fonctions propres de δn sont de la forme $\delta n \sim \exp\left[\mathrm{i}(m(\theta - \beta) - \gamma t)\right]$, où m est le nombre d'onde azimutal, θ est l'angle polaire, β est un coefficient de phase et $\gamma = \gamma_\mathrm{r} + \mathrm{i}\gamma_\mathrm{i}$ est la pulsation complexe. La valeur de γ_r donne donc la fréquence du mode et celle de γ_i son taux de croissance. D'après Dritschel [47], la relation de dispersion des modes est donnée par $4\gamma^2/\omega^2 = (2m\lambda_1 - 1)^2 - \lambda_2^2$ où $\lambda_1 = \sigma/(1+\sigma)^2$ et $\lambda_2 = (\sigma-1)^m/(\sigma+1)^m$. La figure 2.5 représente la pulsation complexe des modes azimutaux $m = 3$, 4, 5 et 6. Les modes $m = 1$ et 2 ne sont pas représentés car le mode $m = 1$ est toujours stable et le mode $m = 2$ est le mode neutre, avec $\gamma_{m=2} = 0$

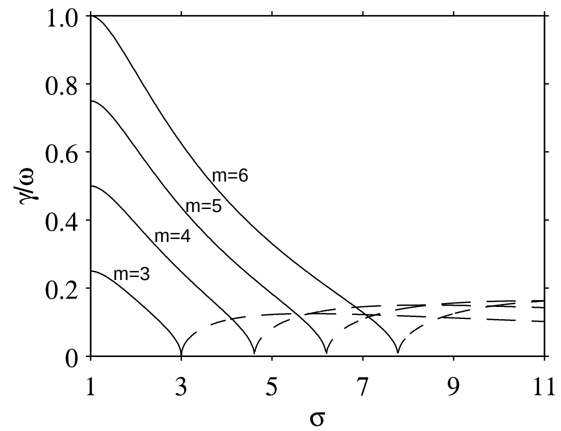


FIG. 2.5: Stabilité linéaire des modes $m = 3$, 4, 5 et 6 du tourbillon de Kirchhoff. $\gamma = \gamma_r + \mathrm{i}\gamma_i$ est la pulsation complexe d'un mode et m est le nombre d'onde azimutal. ——— fréquence γ_r ; – – – – taux de croissance γ_i.

quel que soit le rapport de l'ellipse. Lorsque $m \geq 3$, γ est réel en dessous d'un rapport critique σ_{mc}. Le mode m est alors linéairement stable. Au dessus du rapport critique σ_{mc}, γ est imaginaire pur et le mode m est linéairement instable. Dans le cas $m = 3$, on obtient $\sigma_{3c} = 3$, et pour $m > 3$ on observe que $\sigma_{mc} > \sigma_{3c}$. Ainsi le tourbillon est toujours linéairement stable pour $\sigma < 3$. Pour un tourbillon avec un rapport plus grand, il existe toujours au moins un mode instable.

La stabilité non-linéaire des tourbillons elliptiques a été étudiée numériquement par Dritschel [47]. Lorsque $\sigma < 3$, le tourbillon est non-linéairement stable car on est dans le domaine de stabilité linéaire. Lorsque $3 < \sigma < 4.61$, *i.e.* si seul le mode $m = 3$ est linéairement instable, seules les perturbations impaires (combinaisons linéaires de mode m impairs) sont instables. Il n'y aura alors pas de croissance d'instabilité si les perturbations initiales sont paires, une perturbation paire ne pouvant générer que des modes pairs par effets non linéaires. Tous les modes pairs étant linéairement stables pour $3 < \sigma < 4.61$, ils ne seront donc pas amplifiés. Finalement, lorsque $\sigma > 4.61$, il y a toujours au moins un mode pair et un mode impair linéairement instables, $m = 3$ et $m = 4$ par exemple. Le tourbillon est alors non-linéairement instable, car quelle que soit la perturbation initiale un mode sera amplifié en raison des effets non linéaires.

2.4.2 Évolution aérodynamique

L'évolution aérodynamique du tourbillon est maintenant étudiée. Le champ de vorticité calculé est représenté sur la figure 2.6. Le processus de filamentation s'amorce après une révolution. Le rapport σ décroît alors comme l'illustrent les figures 2.6(c) et 2.6(d).

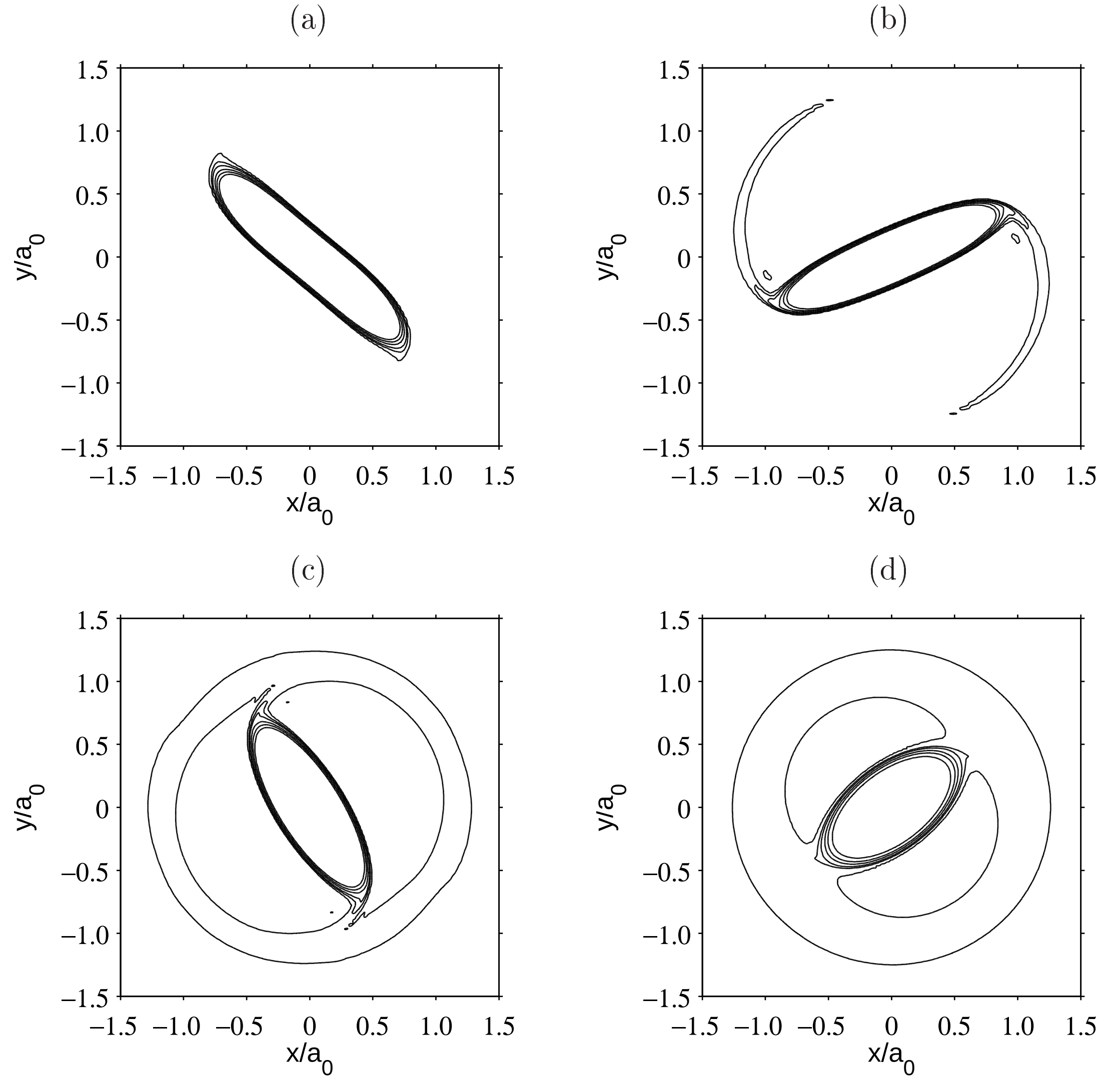


FIG. 2.6: Cas $\sigma_0 = 5$. Iso-niveaux de vorticité à différents instants : (a) $t/T_0 = 0.91$; (b) $t/T_0 = 1.6$; (c) $t/T_0 = 4.0$; (d) $t/T_0 = 11$. Niveaux : 2 %, 10 % et de 20 % à 80 % du maximum de vorticité, avec un pas de 20 %.

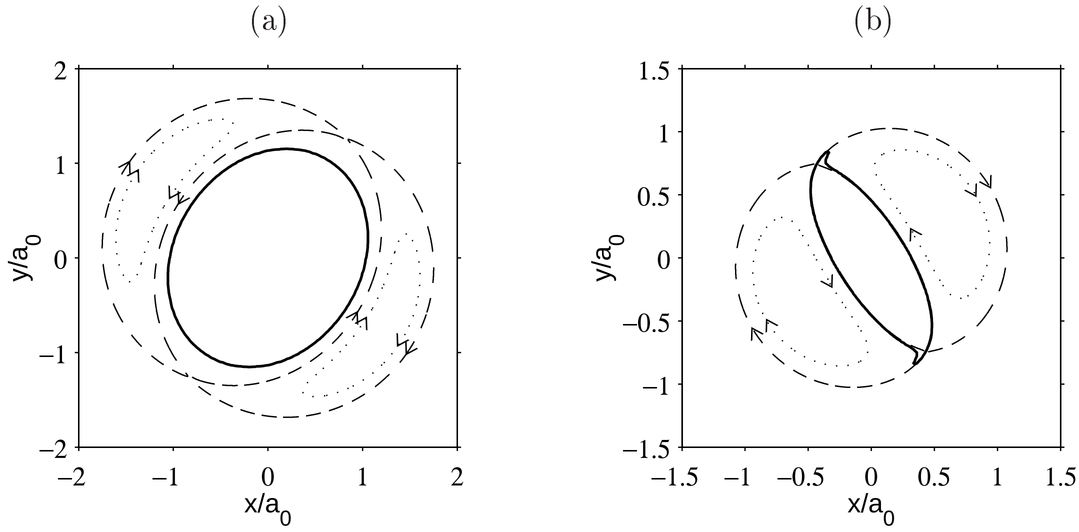


FIG. 2.7: Structure du champ de vitesse induit par le tourbillon, dans un repère en rotation avec celui-ci. ——— contour de vorticité de niveau $0.1 \times \omega_{\max}$; – – – – et · · · · lignes de courant. (a) Cas $\sigma_0 = 1.2$ à $t/T_0 = 12.6$. (b) Cas $\sigma_0 = 5$ à $t/T_0 = 4.0$.

La figure 2.7 montre les lignes de courant induites par le tourbillon dans les cas $\sigma_0 = 1.2$ et $\sigma_0 = 5$, à deux instants du calcul. On a vu précédemment que les points selle sont initialement éloignés du tourbillon dans le cas $\sigma_0 = 1.2$. Pour $\sigma_0 = 5$, la position initiale de ceux-ci s'est rapprochée du tourbillon, comme le montre la figure 2.7(b). Ils sont alors suffisamment proches du bord du tourbillon pour que la vorticité les atteigne sous l'effet de la viscosité ; la filamentation commence alors.

L'évolution temporelle du rapport σ est représentée sur la figure 2.8. On distingue deux phases dans l'évolution du tourbillon. La première va de $t = 0$ à $t = 2T_0$ environ. Le tourbillon initial y est non-linéairement instable ($\sigma_0 > \sigma_{4c}$), et l'amplitude des perturbations augmente. On observe aussi par exemple sur la figure 2.6(a) que le tourbillon n'est plus parfaitement elliptique. Dans le même temps, la filamentation s'amorce, comme l'illustrent les figures 2.6(a) et 2.6(b). Cela provoque alors la diminution du rapport, qui devient inférieur à la valeur seuil de σ_{4c}. En dessous de ce seuil, seules les perturbations impaires sont instables. Les champs initiaux – et donc les perturbations – étant pairs, le tourbillon devient ainsi stable pour $\sigma < \sigma_{4c}$. Cette première phase illustre les effets antagonistes de l'axisymétrisation et de la croissance des instabilités : l'éjection de vorticité stabilise le tourbillon tandis que la croissance des instabilités tend à le casser. Ici cette croissance est lente par rapport à la période de rotation du tourbillon, et l'axisymétrisation s'impose donc. À partir de $t = 2T_0$, durant la seconde phase d'évolution, le tourbillon conserve une forme elliptique et éjecte de la vorticité. Le rapport σ décroît

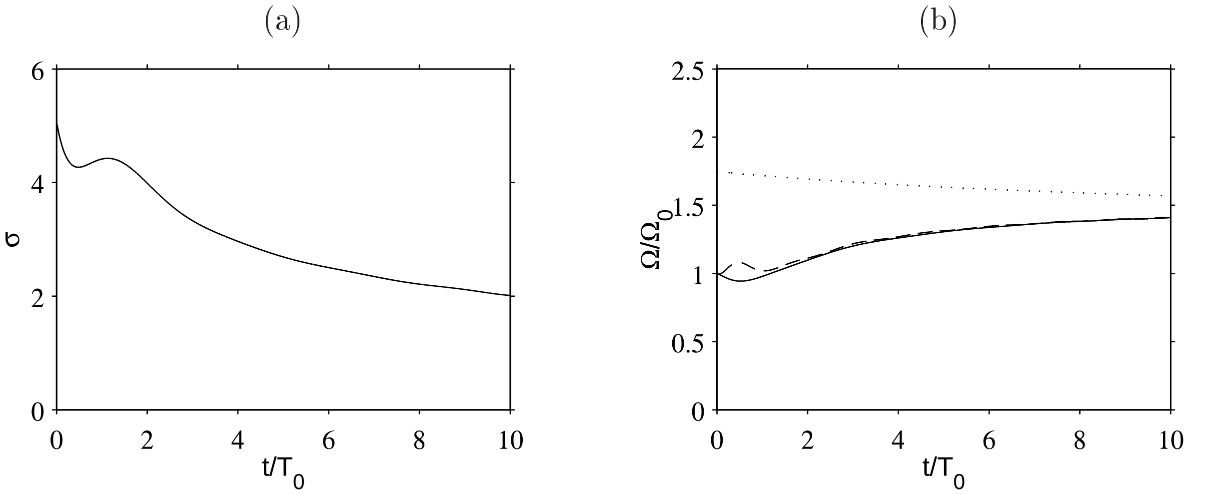


FIG. 2.8: Cas $\sigma_0 = 5$. (a) Évolution temporelle de σ. (b)Évolution temporelle : ——— vitesse angulaire calculée Ω/Ω_0, – – – – vitesse angulaire théorique pour le tourbillon de Kirchhoff $\Omega_{\text{th}}/\Omega_0 = \omega(1-\epsilon^2)/(4\Omega_0)$, $\cdots\cdot$ vitesse angulaire approchée $\Omega_{\text{app}}/\Omega_0 = \omega/(4\Omega_0)$.

progressivement, ce qui provoque une augmentation de la vitesse de rotation, comme on le constate sur la figure 2.8(b). Cela montre clairement que l'évolution du rapport affecte notablement le comportement du tourbillon. La vitesse angulaire calculée Ω est en bon accord avec la vitesse théorique $\Omega_{\text{th}}/\Omega_0 = \omega(1-\epsilon^2)/4$ donnée par Lamb [83] pour le tourbillon de Kirchhoff. On observe également un écart important entre la vitesse théorique et la vitesse approchée $\omega/4$ utilisée par Howe [70] dans la formule analytique (C.8), ce qui montre que ϵ n'est pas négligeable. Les variations du niveau de vorticité ω dans le tourbillon sont directement données par l'évolution de la vitesse angulaire approchée $\omega/4$ reportée sur la figure 2.8(b). La vorticité dans le tourbillon décroît donc avec le temps t ; cela est dû essentiellement à la filamentation qui provoque un échappement de vorticité. La vitesse théorique $\Omega_{\text{th}}/\Omega_0 = \omega(1-\epsilon^2)/4$ étant proportionnelle à ω, une décroissance de la vorticité dans le tourbillon implique une réduction de sa vitesse angulaire. La filamentation tend donc à diminuer la vitesse de rotation du tourbillon via la valeur de ω. L'axisymétrisation provoque aussi une diminution du rapport σ et, par conséquent, du paramètre ϵ. L'expression de Ω_{th} montre que cela implique une accélération de la rotation. Ainsi, la filamentation a deux effets opposés. La vitesse angulaire effective augmentant avec le temps t (voir la figure 2.8(b)), le second effet est dominant et les variations de la vitesse angulaire du tourbillon sont principalement dues à la décroissance du rapport σ, et non à la diminution du niveau de vorticité dans le tourbillon.

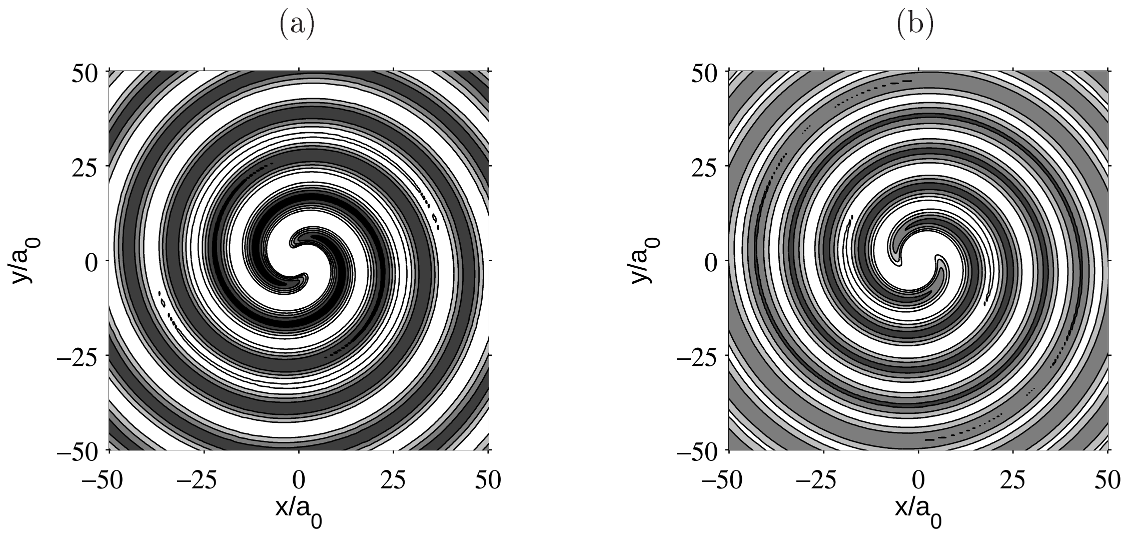


FIG. 2.9: Cas $\sigma_0 = 5$. Champ de pression à $t/T_0 = 4.0$ (a) et $t/T_0 = 11$ (b). Contours de niveaux : $p_\infty - 40$ Pa, $p_\infty - 20$ Pa, p_∞, $p_\infty + 20$ Pa et $p_\infty + 40$ Pa.

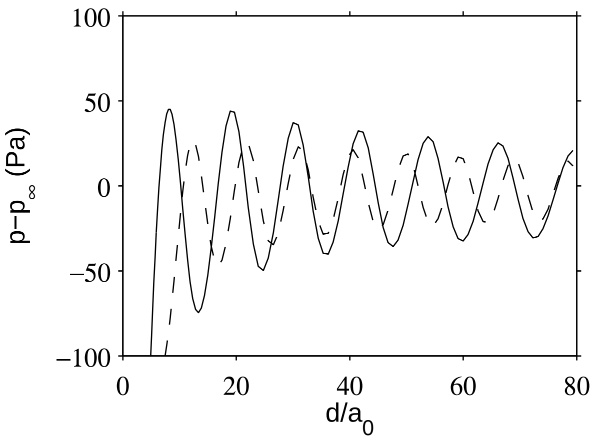


FIG. 2.10: Cas $\sigma_0 = 5$. Profils de pression le long de la droite $x = y$, $x > 0$ à deux instants différents : ——— $t = 4T_0$; - - - - $t = 11T_0$ (d est la distance depuis le centre du tourbillon).

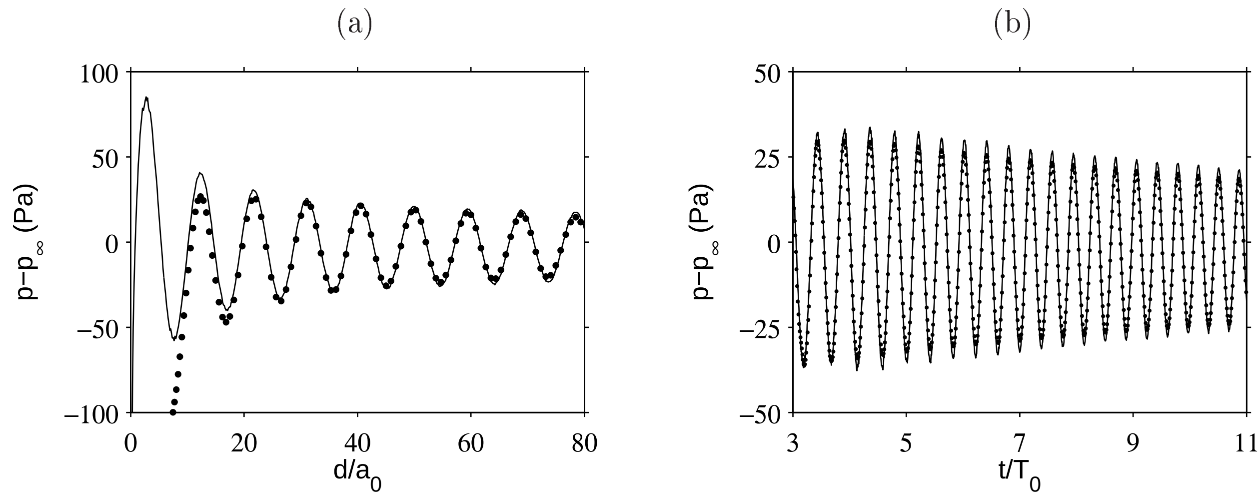


FIG. 2.11: Cas $\sigma_0 = 5$. (a) Profils de pression à $t = 11T_0$ le long de la droite $x = y$, $x > 0$. (b) Évolution temporelle de la pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 37$. ——— solution analytique (C.9) ; • calcul (d est la distance depuis le centre du tourbillon).

2.4.3 Rayonnement acoustique

On s'intéresse maintenant au champ acoustique du tourbillon. Des cartographies du champ de pression à $t = 4T_0$ et $t = 11T_0$ sont données sur la figure 2.9. Les profils de pression le long de la droite $x = y$, $x > 0$ sont représentés à ces deux instants sur la figure 2.10. On remarque que le phénomène d'axisymétrisation affecte notablement le champ sonore : la fréquence du bruit augmente avec le temps, conformément à l'augmentation de la vitesse de rotation, et le niveau de bruit diminue. Par la suite, le champ acoustique calculé est comparé avec les résultats issus de la formule analytique (C.9). Cette dernière prend en compte l'évolution du tourbillon, et plus particulièrement les variations de la vitesse angulaire dans la modélisation de la fréquence du bruit, alors que le tourbillon est supposé tourner à une vitesse constante dans la formule (C.8). La figure 2.11(a) représente les profils de pression à $t = 11T_0$ le long de la droite $x = y, x > 0$. L'écart entre les solutions calculées et analytiques au voisinage du tourbillon est dû au fait que la formule (C.9) ne prend pas en compte le champ de pression proche. Au delà de $d = 25a_0$, le champ lointain est dominant et il y a alors un bon accord entre le calcul et la solution analytique. Le signal de pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 37$ est représenté sur la figure 2.11(b). On observe clairement la décroissance du niveau de bruit sous l'effet de l'axisymétrisation, et les résultats numériques et analytiques sont, là encore, en très bon accord. Cela montre que la fréquence du bruit est bien prédite par la formule (C.9) et que le niveau du bruit rayonné est, conformément à la solution analytique, proportionnel à ϵ même lorsque celui-ci n'est pas petit devant un. Ces comparaisons laissent à penser que l'expression (C.9) peut être employée sur une grande gamme de rapports σ, ce que ne laissait pas supposer l'approximation au premier ordre en ϵ.

2.5 Tourbillons de rapports initiaux élevés ($\sigma_0 \geq 6$)

Des tourbillons de rapports élevés $\sigma_0 \geq 6$ sont maintenant étudiés. Le tourbillon de Kirchhoff est alors linéairement et non-linéairement instable et toutes les perturbations sont amplifiées. Dans ce cas, la croissance des perturbations est le phénomène dominant, ce qui induit de fortes déformations du tourbillon. On s'intéresse tout d'abord au cas $\sigma_0 = 6$. Les tourbillons avec $\sigma_0 = 12.5$ et $\sigma_0 = 25$ seront ensuite étudiés. Les champs acoustiques pour ces configurations ne seront pas analysés car l'évolution aérodynamique de ces tourbillons est tellement rapide que le transitoire numérique associé aux conditions initiales se superpose au bruit rayonné.

2.5.1 Cas $\sigma_0 = 6$

Deux phases peuvent être distinguées dans l'évolution du champ de vorticité pour le cas $\sigma_0 = 6$. Lors de la première, une perturbation paire croît et provoque la cassure du tourbillon en deux tourbillons corotatifs, comme l'illustre la figure 2.12. La séparation en deux tourbillons s'effectue en moins d'une demi-révolution. La croissance des instabilités est en effet trop rapide pour être contrariée par l'axisymétrisation. Cependant, la configuration constituée des deux tourbillons corotatifs est également instable et ceux-ci fusionnent pour former un nouveau tourbillon elliptique de rapport plus grand que $\sigma_{4c} \approx 4.61$, comme le montre la figure 2.13. Ce nouveau tourbillon est donc instable et deux tourbillons corotatifs sont de nouveau formés. L'évolution temporelle du rapport σ lorsque le tourbillon retrouve un état elliptique est représentée sur la figure 2.13. On remarque que σ diminue tout d'abord jusqu'à 4.8. Cette décroissance peut être attribuée à la filamentation, que l'on peut par exemple observer sur la figure 2.12(e). Le rapport reste ensuite constant, au dessus du seuil σ_{4c}. Plusieurs cycles ellipse/tourbillons corotatifs/ellipse se produisent. La possibilité de tels cycles entre deux états instables a été mentionnée par Dritschel [46, 47]. En négligeant les effets visqueux, celui-ci a notamment montré par des considérations énergétiques que cela se produit d'autant plus facilement que le rapport initial est proche de six. La seconde phase dans l'évolution du tourbillon commence vers $t \approx 5.5T_0$. Le tourbillon elliptique se casse définitivement et deux tourbillons corotatifs stables sont formés, comme l'illustre la figure 2.14. On n'observe alors plus qu'une atténuation des gradients de vitesse sous l'effet de la viscosité, voir les figures

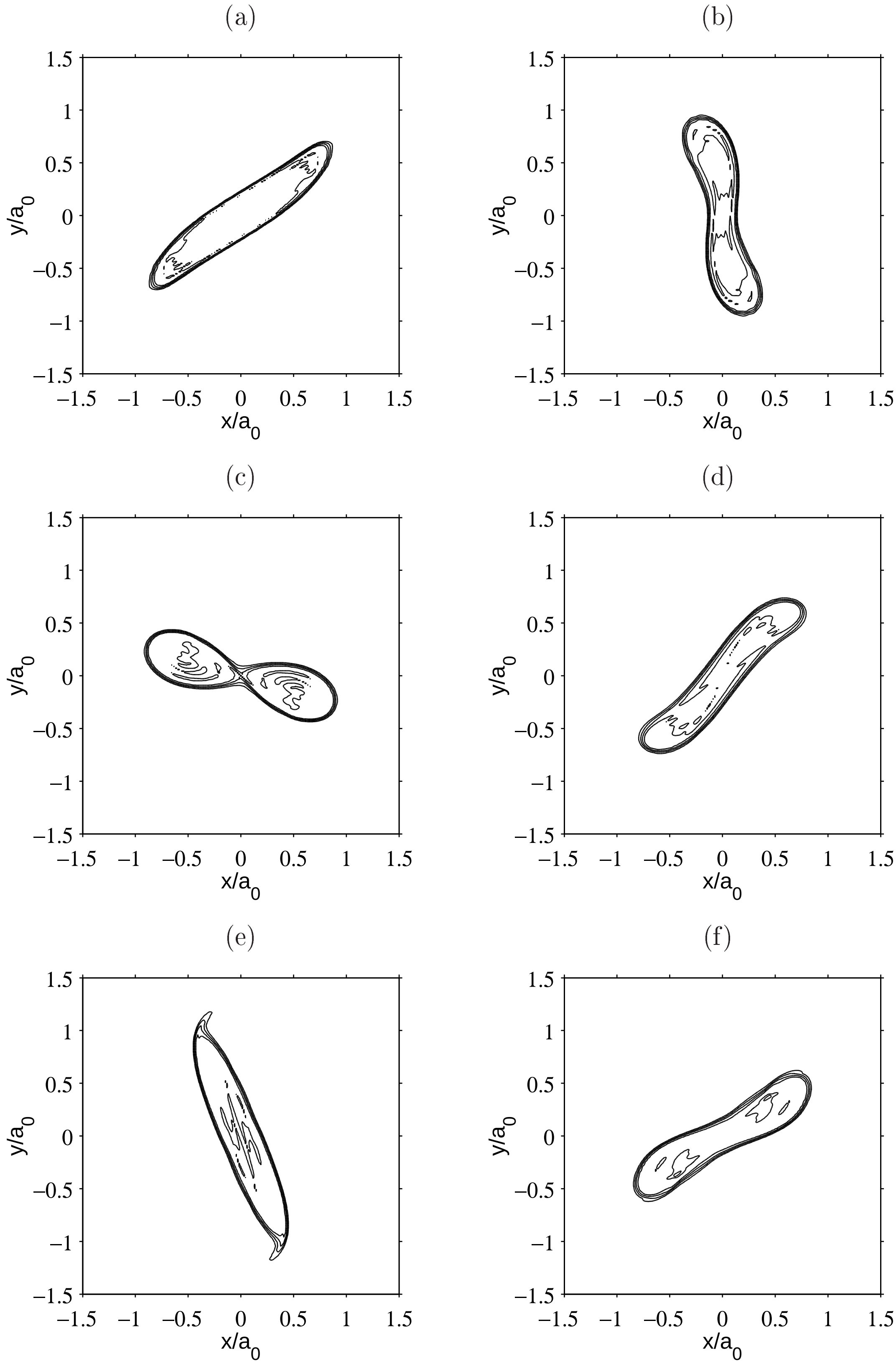


FIG. 2.12: Cas $\sigma_0 = 6$. Iso-niveaux de vorticité à différents instants. (a) $t/T_0 = 0.096$; (b) $t/T_0 = 0.29$; (c) $t/T_0 = 0.48$; (d) $t/T_0 = 0.67$; (e) $t/T_0 = 0.87$; (f) $t/T_0 = 1.2$. Niveaux : 20 %, 40 %, 60 % et 80 % du maximum de vorticité.

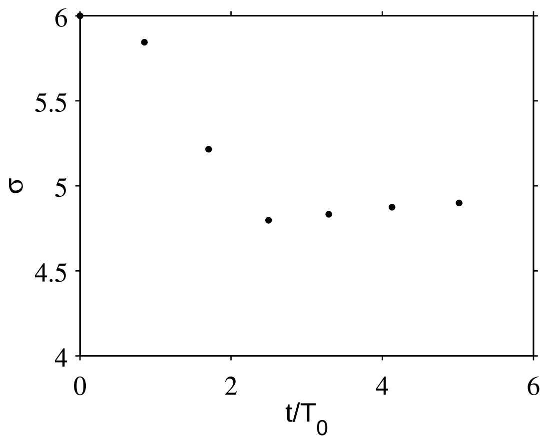


FIG. 2.13: Cas $\sigma_0 = 6$. Évolution temporelle de σ, calculée à chaque fois que le tourbillon retrouve une forme elliptique durant les cycles ellipse - tourbillons corotatifs - ellipse.

2.14(c) et 2.14(d).

Le signal de pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 36$ est représenté sur la figure 2.15. Jusqu'à $t = 9T_0$ le bruit rayonné est généré durant la première phase d'évolution. Le champ acoustique y est étonnamment peu affecté par les cycles ellipse/tourbillons corotatifs/ellipse, bien que le champ de vorticité subisse d'importantes modifications. Vers $t = 9T_0$, le niveau et la fréquence du bruit diminuent subitement avec la rupture définitive du tourbillon elliptique. La fréquence est alors la moitié de celle calculée durant la première phase et le niveau de bruit devient environ deux fois plus faible.

2.5.2 Cas $\sigma_0 = 12.5$ et $\sigma_0 = 25$

Dans le cas $\sigma_0 = 12.5$, le tourbillon initial est fortement instable, et il se casse très rapidement, comme le montrent les champs de vorticité de la figure 2.16. Deux tourbillons corotatifs sont alors formés, en moins d'une demi-révolution ; Vosbeek *et al.* [151] observent le même phénomène. Dans le cas $\sigma_0 = 25$, le tourbillon initial est très fin et il se casse encore plus tôt, en un quart de tour, produisant quatre tourbillons alignés (voir la figure 2.17). Les deux tourbillons intérieurs fusionnent, ce qui aboutit à une configuration constituée de trois tourbillons alignés, comme reporté sur la figure 2.17(e). Finalement, ces trois tourbillons fusionnent à leur tour pour former un tourbillon elliptique stable de faible rapport σ. Ces résultats diffèrent de ceux de Vosbeek *et al.* [151] qui obtiennent un état final composé de deux tourbillons corotatifs. Il faut toutefois rappeler que Vosbeek *et al.* [151] utilisent la méthode des contours dynamiques et qu'ils ne résolvent qu'une approximation des équations de Navier-Stokes.

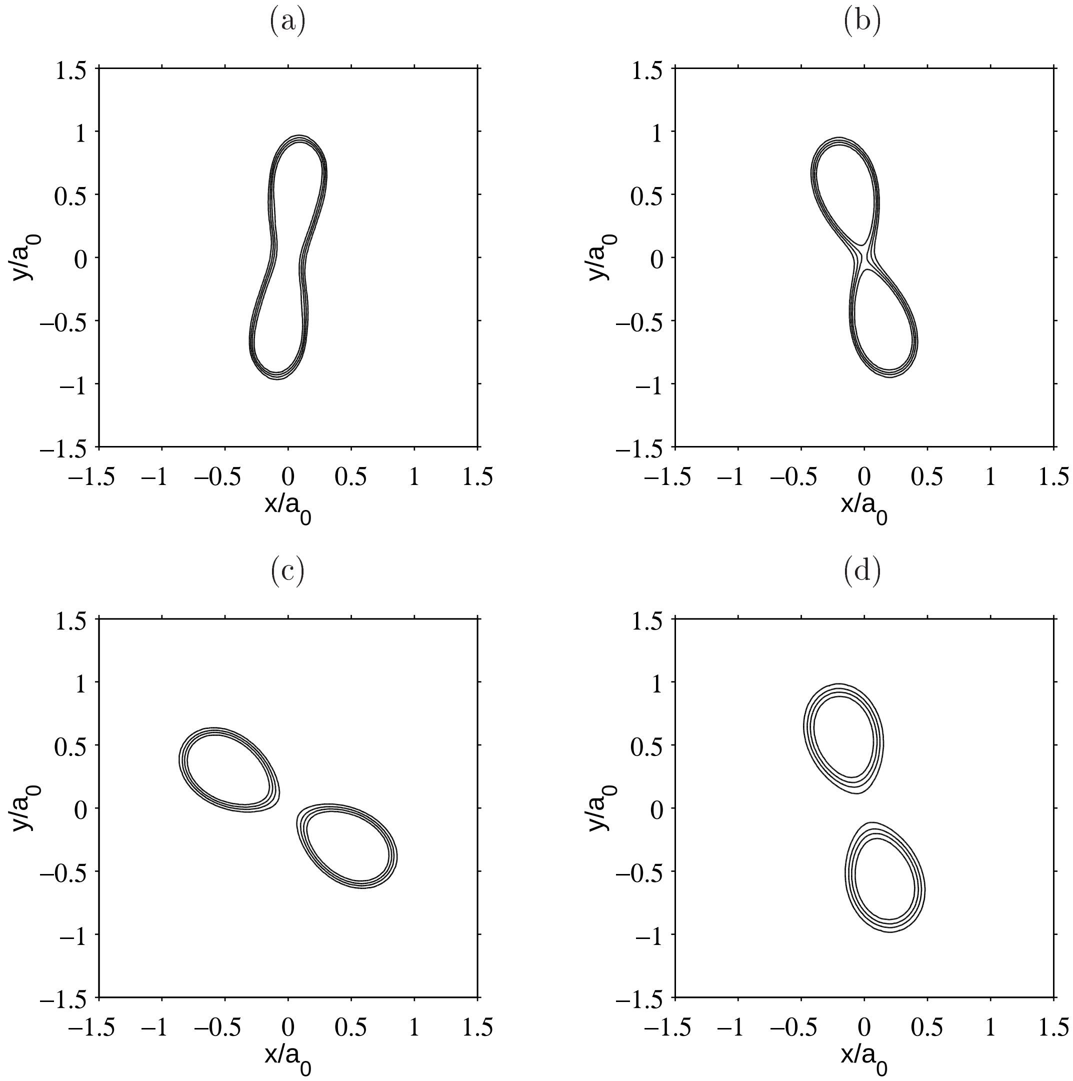


Fig. 2.14: Cas $\sigma_0 = 6$. Iso-niveaux de vorticité à différents instants. (a) $t/T_0 = 2.9$; (b) $t/T_0 = 5.8$; (c) $t/T_0 = 8.7$; (d) $t/T_0 = 19$. Niveaux : 20 %, 40 %, 60 % et 80 % du maximum de vorticité.

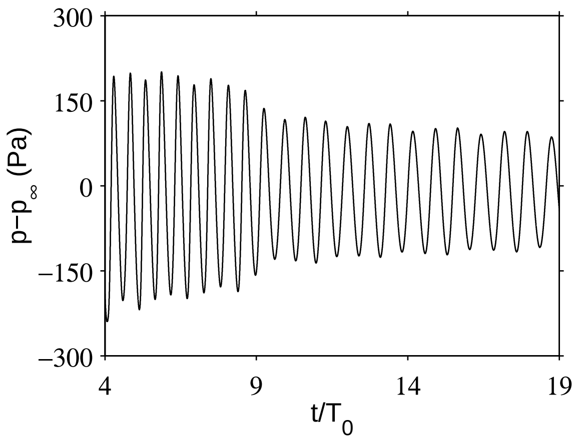


FIG. 2.15: Cas $\sigma_0 = 6$. Signal de pression au point $x/a_0 = y/a_0 = 36$.

2.6 Conclusion

Les champs acoustiques et aérodynamiques de tourbillons elliptiques de différents rapports σ ont été calculés. L'évolution des tourbillons s'avère fortement liée à la valeur du rapport initial σ_0. Celle-ci gouverne en effet les poids relatifs du processus d'axisymétrisation et de la croissance des instabilités.

Lorsque σ_0 est proche de 1, le tourbillon tourne à vitesse angulaire constante sans changement de forme et produit un bruit harmonique constant. Lorsque σ_0 a une valeur modérée ($2 < \sigma_0 < 6$), l'axisymétrisation est le principal mécanisme d'évolution. La filamentation provoque une diminution du rapport, ce qui stabilise le tourbillon en stoppant la croissance des instabilités, et augmente la vitesse de rotation. Le niveau du bruit rayonné diminue donc et la fréquence augmente. Pour des rapports σ_0 plus grands que 6, la croissance des instabilités est le phénomène dominant et l'axisymétrisation ne se produit pas assez rapidement pour stabiliser le tourbillon. Celui-ci se casse alors en plusieurs tourbillons, d'autant plus nombreux que σ_0 est grand. Pour $\sigma_0 = 6$, on observe plusieurs passages entre un état elliptique et une configuration constituée de deux tourbillons corotatifs. Le champ acoustique rayonné est cependant peu affecté par cette évolution. On a montré de plus que le bruit émis est principalement modifié par les variations du rapport, plutôt que par celles du niveau de vorticité dans le tourbillon. Le paramètre ϵ est ainsi le paramètre clef pour décrire le champ acoustique émis par un tourbillon elliptique. Le champ lointain de pression s'est de plus avéré être en bon accord avec la formule analytique (C.9) développée dans l'annexe C.2.

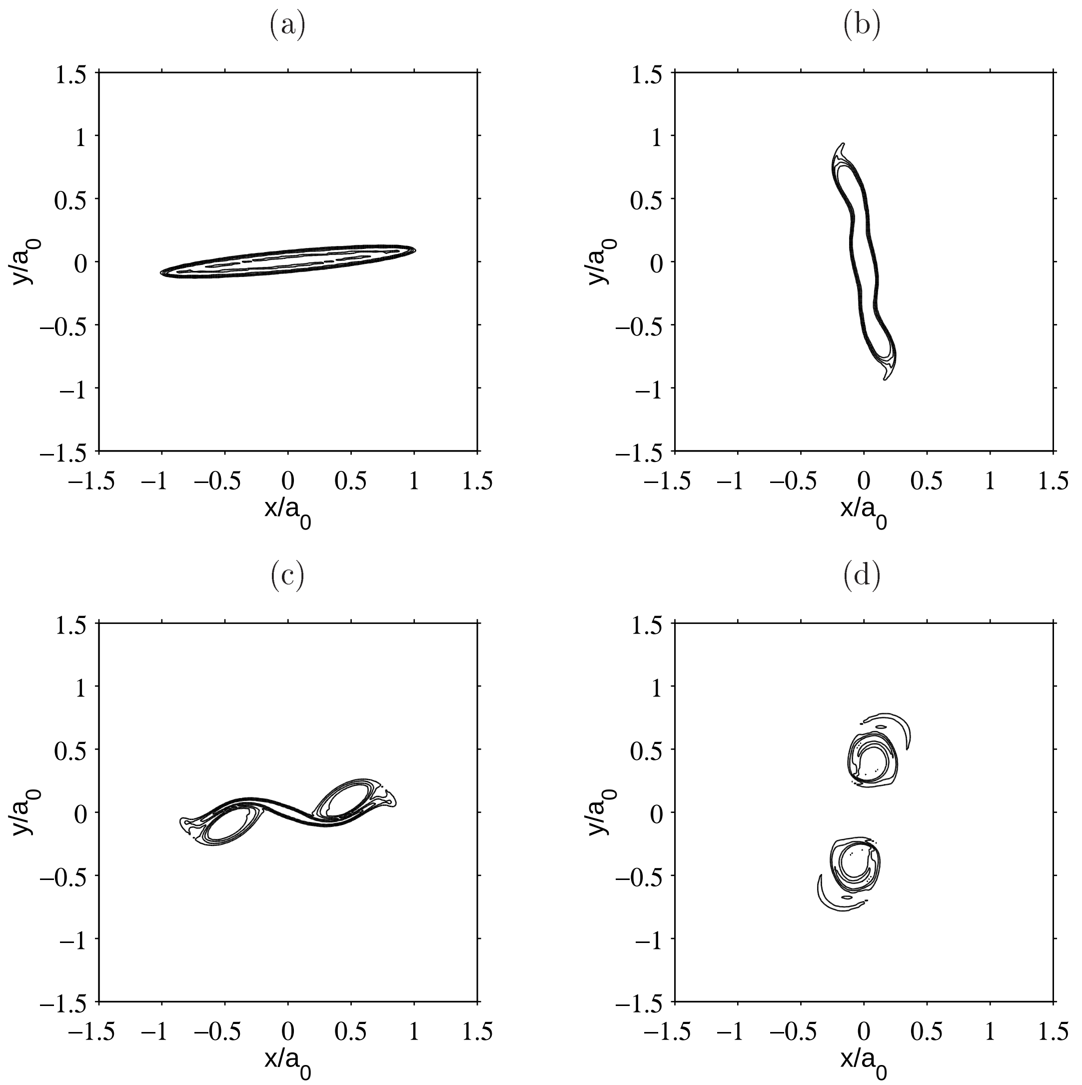


FIG. 2.16: Cas $\sigma_0 = 12.5$. Iso-niveaux de vorticité à différents instants. (a) $t/T_0 = 0.015$; (b) $t/T_0 = 0.28$; (c) $t/T_0 = 0.54$; (d) $t/T_0 = 0.80$. Niveaux : 20 %, 40 %, 60 % et 80 % du maximum de vorticité.

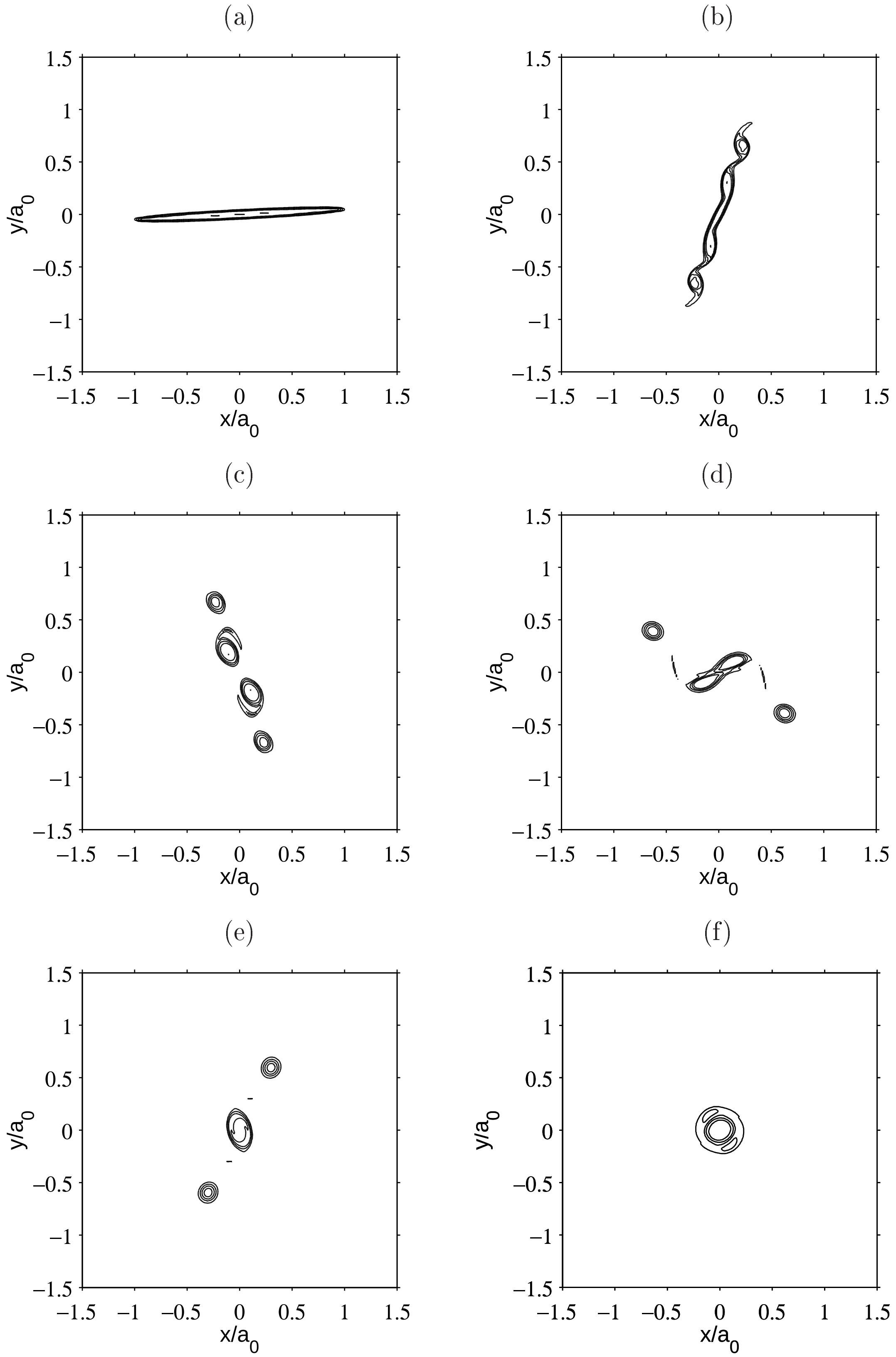


FIG. 2.17: Cas $\sigma_0 = 25$. Iso-niveaux de vorticité à différents instants. (a) $t/T_0 = 8.1 \times 10^{-3}$; (b) $t/T_0 = 0.20$; (c) $t/T_0 = 0.32$; (d) $t/T_0 = 0.46$; (e) $t/T_0 = 0.81$; (f) $t/T_0 = 1.13$. Niveaux : 20 %, 40 %, 60 % et 80 % du maximum de vorticité.

Chapitre 3

Mise au point d'un solveur 3-D pour les jets initialement turbulents

Afin d'effectuer des simulations directes de jets turbulents en régime subsonique et à grand nombre de Reynolds, une version 3-D du solveur en coordonnées cylindriques présenté dans le chapitre 1 a été mise au point. Des développements spécifiques au cas des jets ont dû être réalisés. Ils sont présentés dans ce chapitre.

Dans un premier temps, les équations filtrées de la Simulation des Grandes Echelles et la modélisation des échelles non résolues sont présentées. Dans un second temps, l'ajout de la troisième dimension dans le code en coordonnées polaires décrit au paragraphe 1.6 est détaillé. Nous aborderons ensuite la modélisation de la tuyère du jet et la méthode de génération de la turbulence en sortie de buse, qui sont des points importants pour le calcul direct du bruit de jet. Enfin, les conditions d'entrée de fluide, les conditions initiales et la mise en place d'un rappel des grandeurs aux limites du domaine seront exposées.

3.1 Simulation des Grandes Echelles

Tous les calculs présentés dans les deux premiers chapitres sont des Simulations Numériques Directes, ou *Direct Numerical Simulation* (DNS). Dans un tel calcul, toutes les échelles constituant le spectre de l'énergie turbulente sont convenablement résolues. En DNS, il faut donc mailler aussi bien les grandes échelles, de taille proche de l'échelle intégrale L_f, que les petites structures qui dissipent l'énergie turbulente et qui ont une taille allant jusqu'à l'échelle de Kolmogorov l_η. Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope [6] on a :

$$\frac{L_\mathrm{f}}{l_\eta} \sim \mathrm{Re}_{L_\mathrm{f}}^{3/4} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Re}_{L_\mathrm{f}} = \frac{u' L_\mathrm{f}}{\nu}$$

où u' est l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse dans l'écoulement et ϵ est la dissipation. Ainsi, le nombre de points du maillage nécessaire au calcul de l'écoulement complet varie comme $\mathrm{Re}_{L_\mathrm{f}}^{9/4}$. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, le nombre de points requis reste modéré et la DNS est envisageable. Colonius *et al.* [33] ont par exemple étudié le bruit d'une couche de mélange 2-D à faible nombre de Reynolds, avec $\mathrm{Re}_{\delta_\omega} = \Delta U \delta_\omega / \nu = 250$ où ΔU est la différence de vitesse entre les deux écoulements et δ_ω est l'épaisseur de vorticité. Mitchell *et al.* [105, 106] ont aussi calculé le champ acoustique rayonné par un jet axisymétrique ($\mathrm{Re}_D = U_\mathrm{j} D/\nu = 5 \times 10^3$), et Freund *et al.* [55, 57] ont simulé des jets 3-D à Mach 0.9 ($\mathrm{Re}_D = 3.6 \times 10^3$) et 1.92 ($\mathrm{Re}_D = 2 \times 10^3$), tandis que Colonius *et al.* [31] et Gloerfelt *et al.* [66] se sont intéressés au bruit émis par une cavité 2-D placée dans un écoulement.

En revanche, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le calcul devient très rapidement prohibitif, typiquement au delà de $\mathrm{Re}_D = 10^4$ dans le cas des jets. Comme on s'intéressera par la suite à des nombres de Reynolds supérieurs à cette valeur, la simulation de l'écoulement seul est déjà problématique. Cette difficulté est ensuite accentuée par le fait qu'on souhaite aussi mailler une partie du champ acoustique. On ne pourra donc pas effectuer une DNS pour calculer de tels jets, la mémoire requise ne permettant pas de calculer toutes les structures turbulentes présentes. Une autre approche numérique doit être utilisée, la Simulation des Grandes Échelles (SGE), dite aussi *Large Eddy Simulation* (LES), qui utilise un maillage ne discrétisant pas les plus petites échelles de l'écoulement.

3.1.1 Équations de Navier-Stokes filtrées

Lorsque le maillage n'est pas assez fin, il existe une échelle Δ en dessous de laquelle les structures turbulentes ne sont pas discrétisées. L'approche LES consiste à ne calculer que les grosses structures de l'écoulement (de taille plus grande que Δ) et à modéliser l'influence des échelles non résolues (de taille inférieure à Δ). Cela suppose le plus souvent que l'écoulement est essentiellement caractérisé par ces grandes échelles, et que les petites structures ont un comportement quasi-universel.

La sous-discrétisation agit comme un filtrage spatial passe-bas sur les équations de Navier-Stokes. Une grandeur filtrée $\overline{f}$ s'écrit alors :

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{x}) G_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

où G_Δ est le noyau du filtre et D est le domaine de calcul. On utilisera également par la suite le filtrage de Favre de f [6], qui se définit par :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}$$

où ρ est la masse volumique. La partie non résolue de f, au sens de Favre, a pour expression $f'' = f - \tilde{f}$. Notons que la discrétisation du domaine de calcul implique une perte irréversible d'informations, qui traduit le fait qu'on ne peut reconstruire les champs complets en connaissant uniquement les champs filtrés. En supposant que le filtrage est linéaire et qu'il commute avec les opérations de dérivations spatiales et temporelles, les équations filtrées de conservation de la masse et de quantité de mouvement s'écrivent, sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} + \overline{p}\mathcal{I} - \widehat{\mathcal{T}}\right) = \mathrm{div}\left(\mathbb{T} + \overline{\mathcal{T}} - \widehat{\mathcal{T}}\right)$$

où $\mathbf{V}$ est le vecteur vitesse, $\mathcal{I}$ est le tenseur identité et :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T} = 2\mu(T)\mathcal{S} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\mathbf{V} + \mathrm{grad}\Big(\mathbf{V}\Big)^{\mathrm{t}} - \frac{2}{3}\mathcal{I}\mathrm{div}\mathbf{V}\right]\\
&\widehat{\mathcal{T}} = 2\mu(\widetilde{T})\widehat{\mathcal{S}} \quad \text{avec} \quad \widehat{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\widetilde{\mathbf{V}} + \mathrm{grad}\left(\widetilde{\mathbf{V}}\right)^{\mathrm{t}} - \frac{2}{3}\mathcal{I}\mathrm{div}\widetilde{\mathbf{V}}\right]\\
&\mathbb{T} = \overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} - \overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}}
\end{aligned}$$

Le terme $\mathbb{T}$ est appelé tenseur des échelles de sous-maille. Il contient les effets des échelles non résolues et ne peut être déduit des champs résolus. Il doit donc être modélisé. Il peut se décomposer en trois termes :

$$\mathbb{T} = \underbrace{\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} - \overline{\rho}\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}}}}_{\mathcal{L}} \underbrace{-\overline{\rho}\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{V}''} - \overline{\rho}\big(\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{V}''}\big)^{\mathrm{t}}}_{\mathcal{C}} \underbrace{-\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}'' \otimes \mathbf{V}''}}_{\mathcal{R}}$$

Le tenseur $\mathcal{L}$ est appelé tenseur de Léonard. Il traduit le fait que le filtrage n'est pas idempotent. Il est souvent négligé car il est petit, mais il peut être calculé à partir des champs résolus. $\mathcal{C}$ est le tenseur des termes croisés et correspond aux interactions entre les échelles de sous-maille et les échelles résolues. $\mathcal{R}$ est le tenseur de Reynolds associé aux échelles non résolues ; c'est une inconnue du problème.

Il reste maintenant à écrire une équation sur l'énergie. En ajoutant l'équation filtrée de l'énergie interne à celle de transport de l'énergie cinétique [152], on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}}}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(\overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}} + \overline{p})\widetilde{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{q}} + \mathbf{Q} - \widehat{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}}\right] =& \widetilde{\mathbf{V}} \cdot \mathrm{div}\mathbb{T} + \overline{\rho\epsilon} + \overline{\rho\pi}\\
&+ \mathrm{div}\left(\overline{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}}\right) - \mathrm{div}\left(\overline{\mathbf{q}} - \widehat{\mathbf{q}}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}} &= \frac{\overline{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}^2\\
\mathbf{q} &= -\frac{c_{\mathrm{p}}\mu(T)}{\sigma}\mathrm{grad}T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{q}} &= -\frac{c_\mathrm{p}\mu(\widetilde{T})}{\sigma}\mathrm{grad}\widetilde{T} \\
\mathbf{Q} &= \frac{\overline{p\mathbf{V}} - \overline{p}\widetilde{\mathbf{V}}}{\gamma - 1} \\
\overline{\rho}\widehat{\epsilon} &= \overline{\mathcal{T} : \mathrm{grad}\mathbf{V}} - \overline{\mathcal{T}} : \mathrm{grad}\widetilde{\mathbf{V}} \\
\overline{\rho}\widehat{\pi} &= \overline{p}\mathrm{div}\widetilde{\mathbf{V}} - \overline{p\mathrm{div}\mathbf{V}}
\end{aligned}
$$

La grandeur $\widehat{e}_\mathrm{t}$ est l'énergie totale du champ résolu, $\mathbf{Q}$ est le vecteur de corrélation pression-vitesse de sous-maille, $\overline{\rho}\widehat{\epsilon}$ correspond à la dissipation turbulente de sous-maille et $\overline{\rho}\widehat{\pi}$ est la corrélation pression-dilatation de sous-maille. Ces trois derniers termes ne peuvent pas être calculés directement à partir des échelles résolues. Ils doivent dont être modélisés. On note la présence de deux termes, $\mathrm{div}(\overline{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} - \widehat{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}})$ et $\mathrm{div}(\overline{\mathbf{q}} - \widehat{\mathbf{q}})$, liés à la substitution de $\overline{\mathcal{T}}$ par $\widehat{\mathcal{T}}$ et à celle de $\overline{\mathbf{q}}$ par $\widehat{\mathbf{q}}$. Ils sont usuellement négligés, comme le précisent Erlebacher *et al.* [51], et il en est de même pour le terme $\mathrm{div}(\overline{\mathcal{T}} - \widehat{\mathcal{T}})$ de l'équation de quantité de mouvement.

Ainsi, le filtrage des équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes devant être modélisés : $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\rho}\widehat{\epsilon}$ et $\overline{\rho}\widehat{\pi}$. Il est extrêmement coûteux numériquement de prendre en compte tous ces termes, même de façon très approximative. Très souvent, on les néglige tous à l'exception du terme $\mathcal{R}$ dans le tenseur de sous-maille, qui est prépondérant. On est alors amené à résoudre un problème de fermeture consistant à approcher ce terme par une fonction faisant intervenir uniquement les échelles résolues, calculées explicitement. Notons que le choix du modèle de sous-maille est un point important. De nombreux travaux de la littérature ont en effet montré que cela avait un impact sur le bruit calculé [1, 23, 110, 120, 121, 162].

3.1.2 Nombre d'onde de coupure en LES

Le rôle du modèle de sous-maille est de prendre en compte les effets des échelles de sous-maille. À haut nombre de Reynolds, l'énergie cinétique de l'écoulement est principalement contenue dans les grandes structures, de taille voisine de L_f. Ces structures sont donc spécifiques à chaque écoulement. Leur énergie est transmise aux petites échelles, qui vont la dissiper sous l'effet de la viscosité. Ce transfert d'énergie est réalisé par les structures de tailles intermédiaires, situées dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente. Cette zone est d'autant plus étendue que le nombre de Reynolds est grand, car les effets convectifs non-linéaires dominent alors nettement les effets visqueux. Les structures de la zone inertielle ont un comportement universel, qui ne varie pas suivant les types d'écoulements, rendant alors possible leur modélisation. La coupure du filtre de la LES doit donc plutôt être placée dans la zone inertielle, pour que les grandes échelles caractéristiques de l'écoulement puissent être calculées, et pour que l'influence des échelles non résolues puisse être prise en compte par un modèle de la cascade d'énergie. Le rôle du modèle de sous-maille est ainsi d'assurer ce transfert d'énergie à la place des échelles de la zone inertielle qui ont été tronquées par le filtre de la LES.

Les points qui précèdent montrent qu'il est important de connaître la position de la coupure du filtre de la LES, dans la mesure où elle influe sur le modèle de sous-maille. Cette coupure du filtre a lieu à la taille des plus petites structures bien résolues, Δ. Elle est donc fortement liée aux schémas numériques utilisés, voir par exemple les travaux de Ghosal [62] et Chow & Moin [30]. On a montré aussi dans la partie 1.2 que les schémas de discrétisation spatiale ne sont précis que pour des nombres d'onde inférieurs à une certaine valeur. Au dessus de cette valeur, les structures turbulentes seront mal calculées et l'erreur commise peut même s'avérer plus grande que la valeur du tenseur de sous-maille, comme le soulignent Kravchenko & Moin [82]. Il est donc indispensable de les éliminer du calcul. L'intérêt de l'utilisation d'un filtrage sélectif (voir le paragraphe 1.3) se trouve alors renforcé. En effet, une coupure du filtre sélectif placée dans la gamme des nombres d'onde bien calculés par les schémas permet de dissiper la plus grande partie des structures mal résolues. Seules les structures bien résolues seront alors conservées dans le calcul.

Stefano & Vasilyev [124] montrent que la forme du filtre est également un point important dans la modélisation du tenseur de sous-maille. Le noyau du filtre de la LES est en effet présent implicitement dans des équations filtrées. Domaradski & Adams [44] entre autres sont parvenus à écrire le tenseur de sous-maille en distinguant explicitement les échelles bien résolues et celles qui sont affectées par la forme du filtre. Ils font apparaître un terme supplémentaire lié aux caractéristiques du filtre. Ce terme s'annule pour un filtre passe-bas idéal ; on aura donc intérêt à avoir une coupure la plus raide possible, pour minimiser les effets de la forme du filtre sur la modélisation.

3.1.3 Modélisation du tenseur de sous-maille

Nous avons vu que la résolution des équations de la LES implique de proposer une fermeture pour le tenseur de sous-maille $\mathbb{T} \approx -\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}'' \otimes \mathbf{V}''}$. De nombreuses modélisations de ce terme peuvent être envisagées. Sagaut [115] distingue notamment les approches structurelles, qui consistent à estimer au mieux $\mathbb{T}$ à partir des champs résolus, et les approches fonctionnelles, qui cherchent à modéliser directement l'action des échelles de sous-maille sans passer par une évaluation du tenseur $\mathbb{T}$. De très nombreux modèles sont détaillés dans la littérature. Les principaux sont présentés dans ce qui suit.

Modèles basés sur une viscosité turbulente

La plupart des modèles détaillés dans la littérature s'appuient sur la généralisation de l'hypothèse de Boussinesq, qui relie le tenseur de sous-maille aux gradients de la vitesse filtrée [6], à l'aide d'une viscosité turbulente $\nu_{\mathrm{t}} = \mu_{\mathrm{t}}/\overline{\rho}$:

$$\mathbb{T} = 2\mu_{\mathrm{t}}\widehat{\mathcal{S}} - \frac{2}{3}\overline{\rho}\widetilde{k}_{\mathrm{sgs}}\mathcal{I} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho}\widetilde{k}_{\mathrm{sgs}} = \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}'' \cdot \mathbf{V}''}$$

où k_{sgs} est l'énergie cinétique de sous-maille. Le terme k_{sgs} peut faire l'objet d'une modélisation [88], mais il est souvent négligé, comme le font remarquer Erlebacher *et al.* [51]. En 1963, Smagorinsky [123] a construit un des premiers (et des plus populaires) modèle pour ν_{t} :

$$\nu_{\mathrm{t}} = (C_{\mathrm{s}}\Delta)^2 \sqrt{2\widehat{\mathcal{S}} : \widehat{\mathcal{S}}}$$

où C_{s} est la constante de Smagorinsky. Elle peut être estimée si on suppose que la coupure du filtre se trouve dans la zone inertielle. Avec cette hypothèse, la viscosité turbulente doit dissiper l'énergie des grosses structures au fur et à mesure que celle-ci est transmise aux petites échelles. Cela implique que $C_{\mathrm{s}} \approx 0.18$ pour une turbulence homogène isotrope, bien que l'on choisisse généralement une valeur plus faible. Le modèle de Smagorinsky induit cependant une dissipation excessive dans les régions laminaires de l'écoulement, car il présuppose la présence de turbulence dès qu'il y a des gradients de vitesse non nuls, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Cela conduit notamment à une mauvaise transition vers la turbulence, comme le montrent Vreman *et al.* [153] avec un calcul d'une couche de mélange.

Pour remédier à ce problème, des formulation dynamiques du modèle de Smagorinsky ont été construites. L'idée est de faire varier C_{s} en espace et en temps, pour adapter la dissipation à l'état local de la turbulence. Germano *et al.* [60] ont par exemple développé un modèle dynamique en incompressible, qui permet une bonne prise en compte de la transition vers la turbulence et de la présence de parois. Il a ensuite été généralisé aux écoulements compressibles par Moin *et al.* [108]. Ces modèles s'avèrent toutefois extrêmement coûteux numériquement [23, 145]. De plus, le coefficient C_{s} est le plus souvent maintenu positif en pratique pour des raisons de stabilité, ce qui interdit toute remontée d'énergie des petites structures vers les échelles résolues (*backscattering*), ou alors il est moyenné dans un plan ou une direction homogène de l'écoulement [63].

Les modèles de viscosité turbulente posent de plus d'autres difficultés. Ils alignent en effet le tenseur de sous-maille $\mathbb{T}$ avec le tenseur des effets visqueux $\mathcal{T}$. Tout se passe alors comme si on avait un fluide de viscosité $\nu + \nu_t$ au lieu de ν. On constate donc que ces modèles augmentent artificiellement la viscosité réelle du fluide et que cela touche, par construction, toutes les échelles du calcul. Le nombre de Reynolds effectif de l'écoulement est ainsi modifié [22, 45], ce qui peut avoir des conséquences notables lors du calcul direct du bruit rayonné par un jet [23]. Liu *et al.* [92] ont également montré expérimentalement que le tenseur de sous-maille n'est que faiblement corrélé avec $\mathcal{S}$, ce qui remet en cause l'hypothèse d'une viscosité turbulente instantanée.

Modèle de Bardina et modèles mixtes

Bardina *et al.* [7] ont développé un modèle de sous-maille qui ne repose pas sur une viscosité turbulente. En supposant l'invariance entre les plus petites échelles résolues et les plus grandes échelles de sous-maille, ils proposent l'expression suivante :

$$\mathbb{T} = \rho \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{V}}} - \overline{\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{V}}} \right)$$

où $\mathbb{T}$ inclut aussi le tenseur de Leonard et le tenseur des termes croisés. Ce modèle présente l'inconvénient de ne pas être assez dissipatif. Il conduit à une accumulation de l'énergie aux plus petites structures calculées et rencontre donc des problèmes de stabilité. Bardina *et al.* [7] reconnaissent de plus que ce modèle surestime le *backscattering*, ce qu'observent également Vreman *et al.* [153].

Une viscosité turbulente a été ajoutée par la suite à ce modèle, formant ainsi un modèle dit « mixte » :

$$\mathbb{T} = \rho \left(\overline{\overline{\mathbf{V}}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{V}}} - \overline{\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{V}}} \right) + 2\mu_t \widehat{\mathcal{S}} - \frac{2}{3} \overline{\rho} \widetilde{k}_{\text{sgs}} \mathcal{I}$$

On combine alors le bon comportement du modèle de Bardina pour décrire le tenseur de sous-maille et la dissipation des modèles de viscosité turbulente. Il existe de nombreuses variantes de modèles mixtes [116, 154], et elles donnent de bons résultats lorsque ν_t est évalué dynamiquement. Ces modèles ont toutefois aussi tendance à réduire le nombre de Reynolds de l'écoulement.

Modèles basés sur la déconvolution

Les modèles de similarité ont pour objectif de reconstruire le champ non filtré à partir des variables filtrées, jusqu'à l'échelle de coupure du maillage. Pour cela, Geurts [61] détermine l'opérateur de déconvolution associé au filtrage, par approximation polynomiale. Les champs filtrés peuvent également être déconvolués à l'aide de la méthode de Van Crittert, comme l'expliquent Stolz & Adams [125]. Notons que ces approches ont l'avantage de ne pas introduire de modélisation physique. Elles s'appuient uniquement sur la forme du filtre. Le filtrage inverse ne peut cependant pas être réalisé exactement. La déconvolution revient alors à appliquer un filtre très sélectif, comme le soulignent Mathew *et al.* [98]. On a en effet vu précédemment qu'un filtre très sélectif minimise l'impact de la forme de la coupure, ce que fait aussi la déconvolution. Une fois le champ non filtré recontruit, le tenseur de sous-maille est calculé par une succession de filtrages [44].

LES implicite

La Simulation des Grandes Échelles implicite utilise la dissipation numérique des schémas de discrétisation, pour modéliser les effets des échelles non résolues. Les schémas numériques génèrent en effet une dissipation artificielle. L'approche implicite considère que cette viscosité d'origine numérique modélise la dissipation due aux échelles non résolues. Dans ce cas, le tenseur de sous-maille n'a pas besoin d'être calculé. Historiquement, cette approche a été adoptée dans des configurations supersoniques, qui utilisent des schémas fortement dissipatifs pour capturer les chocs [25].

La LES implicite s'avère cependant trop dissipative, car la viscosité numérique des schémas utilisés est souvent élevée et peu sélective. Elle tend donc à réduire le nombre de Reynolds effectif de l'écoulement, comme les modèles de viscosité turbulente. De plus, les effets de la dissipation ne sont pas maitrisés.

LES basée sur un filtrage sélectif explicite

Pour prendre en compte les échelles non résolues en LES, il faut modéliser la cascade d'énergie, qui n'est plus entièrement assurée du fait de la coupure de la zone inertielle. Il faut ainsi dissiper l'énergie des grandes échelles au fur et à mesure qu'elle est transmise aux petites échelles. Ce rôle peut être assuré par un filtre sélectif d'ordre élevé. Le filtrage sélectif présenté dans la partie 1.3 élimine les oscillations hautes fréquences mal résolues par le maillage, sans affecter les structures résolues. Ainsi, le filtre va dissiper le flux d'énergie transféré des grandes échelles aux petites échelles mal résolues.

Cette approche présente plusieurs avantages. Elle est tout d'abord peu coûteuse en temps de calcul car le filtrage sélectif est de toute façon employé pour assurer la stabilité des simulations. La dissipation est ensuite très sélective et ne modifie pas les grandes échelles [22]. Cela permet de préserver le nombre de Reynolds de l'écoulement [23], ce qui est un point important pour le calcul direct du bruit de jet à nombre de Reynolds élevé. L'utilisation d'un filtrage sélectif apparaît donc préférable à celle d'un modèle reposant sur une viscosité turbulente, même avec une formulation dynamique, à celle d'un modèle mixte ou à celle d'une approche implicite. Nous adopterons donc cette méthode par la suite. Elle a été appliquée avec succès à la simulation de nombreuses configurations [98, 114, 146]. En particulier, elle s'est avérée très performante pour le calcul direct du bruit de jets [14, 15, 17, 18, 20, 21, 24] et du bruit rayonné par une cavité placée dans un écoulement [65, 67, 68]. Il faut toutefois noter que cette approche ne permet pas la prise en compte du *backscattering*, car elle est par construction purement dissipative.

Les équations que nous serons amenés à résoudre s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}\right) = 0 \\
&\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} + \overline{p}\mathcal{I} - \widehat{\mathcal{T}}\right) = 0 \\
&\frac{\partial \overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}}}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(\overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}} + \overline{p})\widetilde{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{q}} - \widehat{\mathcal{T}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}}\right] = 0
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{T}} = 2\mu(\widetilde{T})\widehat{\mathcal{S}} \\
&\widehat{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\widetilde{\mathbf{V}} + \mathrm{grad}\left(\widetilde{\mathbf{V}}\right)^{\mathrm{t}} - \frac{2}{3}\mathcal{I}\mathrm{div}\widetilde{\mathbf{V}}\right] \\
&\overline{\rho}\widehat{e}_{\mathrm{t}} = \frac{\overline{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}}^2 \\
&\widehat{\mathbf{q}} = -\frac{c_{\mathrm{p}}\mu(\widetilde{T})}{\sigma}\mathrm{grad}\widetilde{T}
\end{aligned}$$

où $\widehat{e}_{\mathrm{t}}$ est l'énergie totale du champ résolu. Ces expressions sont donc identiques à celles des équations non filtrées dans lesquelles on remplace ρ, $\mathbf{V}$, p et T par $\overline{\rho}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$, $\overline{p}$ et $\widetilde{T}$ respectivement. Pour des raisons de simplicité, on ne précisera plus dans la suite que les grandeurs calculées sont des grandeurs filtrées, et on ne fera plus apparaître les $^{-}$ et $^{\sim}$ au dessus des variables.

3.2 Équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Le passage en 3-D du solveur décrit dans le chapitre 1 nécessite l'inclusion de la dimension axiale x dans le solveur en coordonnées polaires. Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (x, r, θ) s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mathrm{e}}}{\partial \theta} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mathrm{v}}}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}}{r} - \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}}{r} = 0$$

où le vecteur $\boldsymbol{U}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho e_\mathrm{t} \end{pmatrix}$$

avec u_x, u_r et u_θ les trois composantes de la vitesse. L'énergie interne totale a pour expression :

$$\rho e_\mathrm{t} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho\left(u_x^2 + u_r^2 + u_\theta^2\right)$$

Les flux se mettent sous la forme :

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p \\ \rho u_x u_r \\ \rho u_x u_\theta \\ (\rho e_\mathrm{t} + p)u_x + q_x \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{xx} \\ \mathcal{T}_{xr} \\ \mathcal{T}_{x\theta} \\ u_x\mathcal{T}_{xx} + u_r\mathcal{T}_{xr} + u_\theta\mathcal{T}_{x\theta} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r u_\theta \\ (\rho e_\mathrm{t} + p)u_r + q_r \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{xr} \\ \mathcal{T}_{rr} \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ u_x\mathcal{T}_{xr} + u_r\mathcal{T}_{rr} + u_\theta\mathcal{T}_{r\theta} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_x u_\theta \\ \rho u_r u_\theta \\ \rho u_\theta^2 + p \\ (\rho e_\mathrm{t} + p)u_\theta + q_\theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{G}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{x\theta} \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ \mathcal{T}_{\theta\theta} \\ u_x\mathcal{T}_{x\theta} + u_r\mathcal{T}_{r\theta} + u_\theta\mathcal{T}_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

et :

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\rho u_\theta^2 + p) \\ \rho u_r u_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathcal{T}_{\theta\theta} \\ \mathcal{T}_{r\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où q_x, q_r et q_θ sont les termes de transfert thermique. Ils s'écrivent :

$$q_x = -\lambda_\mathrm{th}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_r = -\lambda_\mathrm{th}\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta = -\lambda_\mathrm{th}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

où λ_{th} est défini à la partie 1.1. Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses $\mathcal{T}$ sont :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{xx} &= 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}\right)\\
\mathcal{T}_{xr} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}\right)\\
\mathcal{T}_{x\theta} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{r\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right)\\
\mathcal{T}_{rr} &= 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}\right)\\
\mathcal{T}_{r\theta} &= \mu\left(\frac{\partial u_r}{r\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)\\
\mathcal{T}_{\theta\theta} &= 2\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}\right)
\end{aligned}$$

Ces équations sont résolues dans tout le domaine de calcul, à l'exception de l'axe $r = 0$ où elles sont singulières. La méthode de Constantinescu & Lele [34], présentée dans la partie 1.6.4, permet d'obtenir de nouvelles équations, régulières et exactes, valables sur l'axe. La partie 1.6.4 et l'annexe B.1 détaillent la démarche nécessaire à l'obtention de ces équations dans le cas 2-D. L'extention de ces résultats au cas 3-D ne présente pas de difficulté particulière, hormis des développements analytiques considérablement alourdis. La démarche correspondante est reportée dans l'annexe B.2, et les équations sur l'axe en coordonnées cylindriques sont récapitulées dans l'annexe B.6.

3.3 Modélisation de conditions turbulentes en sortie de buse pour un jet rond

Zaman [157] a montré expérimentalement que l'état de la couche limite en sortie de buse varie notablement avec le nombre de Reynolds. D'après la figure 3.1, lorsque $\mathrm{Re}_D = U_\mathrm{j} D/\nu$ augmente, le taux de fluctuation u'_x/U_j varie de 0.2 à plus de 10 %, tandis que l'épaisseur de quantité de mouvement en sortie de buse δ_θ diminue fortement. Ainsi, pour $\mathrm{Re}_D < 10^5$, le jet est laminaire en sortie de buse, et pour $\mathrm{Re}_D > 5 \times 10^5$ le jet est turbulent. Le développement de la couche de cisaillement du jet est, de plus, fortement affecté par l'état de la couche limite en sortie de buse comme l'illustrent Husain & Hussain [73] avec la figure 3.2. On y constate que la couche de cisaillement se développe plus lentement lorsque le jet est initialement laminaire, mais que la transition turbulente s'effectue avec des niveaux de fluctuations plus élevés. En revanche, après la fin

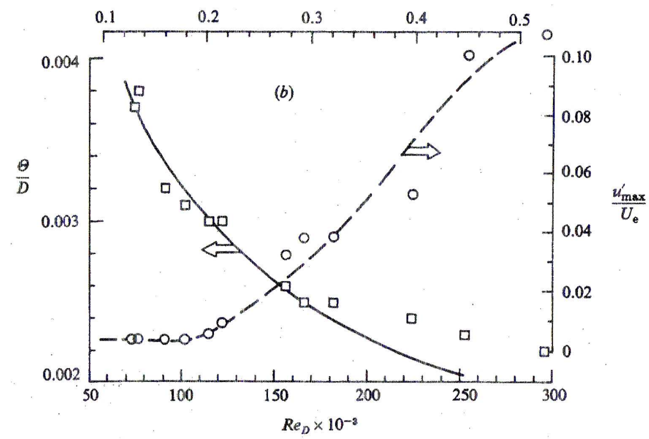


FIG. 3.1: D'après Zaman [157] : évolution des propriétés de la couche limite en sortie de buse en fonction du nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = U_\mathrm{j} D/\nu$. ——— épaisseur de quantité de mouvement (axe de gauche). – – – – taux de fluctuations de la vitesse axiale (axe de droite).

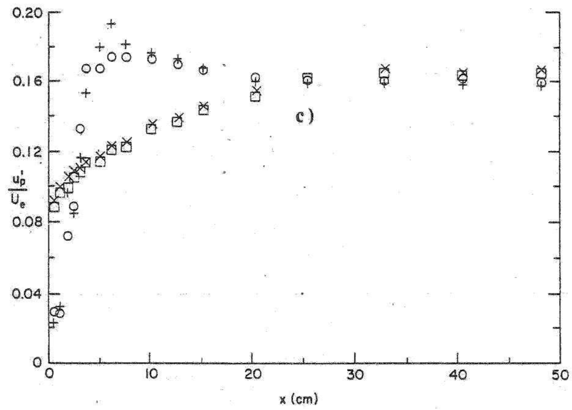


FIG. 3.2: D'après Husain & Hussain [73] : évolution du taux de fluctuations de la vitesse axiale dans la couche de cisaillement de jets à Mach $M_\mathrm{j} = 0.09$ et à nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 2.6 \times 10^5$. +, ∘ jets initialement laminaires ; ×, □ jets initialement turbulents.

du cône potentiel, l'évolution du jet n'est plus sensible aux conditions de sortie de buse. Ces résultats expérimentaux montrent que l'état de la couche limite en sortie de tuyère, et plus particulièrement le taux de turbulence, influent fortement sur le développement du jet. Hussain & Zedan [74, 75] confirment l'effet notable du taux de turbulence et celui de l'épaisseur de quantité de mouvement sur l'évolution de la couche de cisaillement. Ce dernier semble toutefois jouer un rôle moins important.

Ainsi, pour avoir une simulation fidèle aux mesures, il est nécessaire d'assurer un niveau de turbulence en sortie de buse conforme au nombre de Reynolds de la configuration calculée. Afin de générer un taux de fluctuations réaliste en sortie de buse, il faut donc introduire artificiellement des perturbations dans la couche limite. On peut cependant noter que plusieurs travaux de la littérature [2, 3, 4, 42, 43, 122] n'utilisent pas d'excitation. De ce fait, les taux de turbulence en sortie de buse ne sont pas spécifiés, et on peut s'attendre à ce qu'ils soient trop faibles.

Les méthodes de génération de turbulence les plus couramment employées reposent sur une excitation de la couche de cisaillement du jet en sortie de buse. Bogey & Bailly [18, 21, 23] et Lew *et al.* [89] utilisent par exemple une somme de modes construits sur des tourbillons annulaires de forme arbitraire et à divergence nulle. Freund [56] adopte une démarche similaire. Bodony & Lele [11, 12, 13] et Keiderling *et al.* [79] s'appuient sur les modes les plus instables associés au profil de vitesse moyenne en sortie de buse. Ces modes sont déterminés par une analyse linéaire. Gavelle *et al.* [59] ajoutent pour leur part un bruit blanc aux composantes de la vitesse dans la couche de cisaillement. Constantinescu & Lele [35] emploient une excitation harmonique de la vitesse radiale en sortie de buse, combinée avec une excitation annulaire aléatoire de la vitesse azimutale. Andersson *et al.* [1] ont enfin utilisé une turbulence synthétique générée à partir de modes de Fourier.

Ces approches, fondées sur l'excitation du jet dans la couche de cisaillement ou au voisinage de la sortie de buse, présentent plusieurs inconvénients. Tout d'abord, un traitement non physique est appliqué dans une zone importante du jet, qui contribue notablement au rayonnement acoustique. Il y a donc le risque d'influer sur les sources acoustiques se trouvant dans la couche de cisaillement. De plus, le niveau de l'excitation doit rester faible pour ne pas générer de bruit parasite susceptible de perturber le champ acoustique du jet. On ne peut donc pas obtenir des niveaux élevés de turbulence en sortie de buse, ce qui est problématique lorsqu'on s'intéresse à des jets à haut nombre de Reynolds. Enfin, ces méthodes impliquent un choix arbitraire de la forme des perturbations introduites, ce qui peut affecter le bruit rayonné. Bogey & Bailly [21] ont par exemple montré que le bruit latéral émis est plus élevé lorsque l'excitation est fortement corrélée azimutalement. Ce résultat a aussi été observé expérimentalement par Zaman [156], et numériquement par

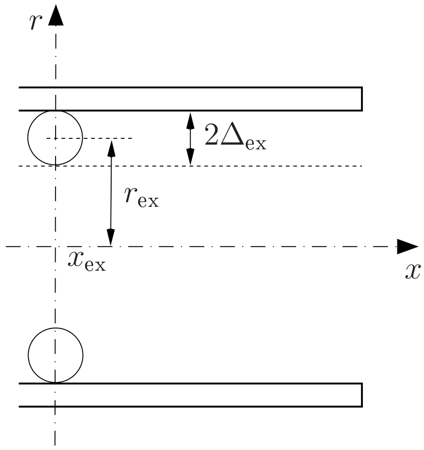


FIG. 3.3: Schéma et notations de la structure des perturbations introduites en entrée de buse dans le plan (x, r).

Morris *et al.* [110], qui comparent deux méthodes d'excitation, l'une basée sur les premiers modes tournants du jet, et l'autre imposant un spectre de vitesse azimutale large-bande. Pour s'affranchir de ce choix arbitraire, Freund *et al.* [57] introduisent alors dans la couche de cisaillement des perturbations issues du calcul d'un jet turbulent périodique selon la direction axiale. Cette méthode est toutefois très coûteuse car deux calculs doivent être effectués. De plus, l'introduction des fluctuations génère très souvent du bruit parasite, qui doit être impérativement neutralisé à l'aide d'une zone éponge spécifique.

À l'issue des observations précédentes, on souhaite construire une méthode de génération de turbulence qui n'implique pas de traitement non physique au voisinage de la sortie de buse, qui mette en jeu des perturbations initiales de très faible amplitude et qui ne nécessite pas le choix arbitraire de la forme des fluctuations en sortie de buse. On choisit alors d'inclure la buse dans le domaine de calcul. Elle est assimilée à un tube infiniment rigide de diamètre constant. Des perturbations de faible amplitude U_{ex} sont alors introduites dans le champ de vitesse, au voisinage de l'entrée de buse, loin de la sortie, typiquement au moins cinq diamètres en amont du jet. Il n'y a ainsi aucune excitation non physique au voisinage de la sortie de buse ou dans la couche de cisaillement. Leur forme est définie par (voir aussi la figure 3.3) :

$$u'_x(x,r,\theta) = U_{\text{ex}}\alpha(x,r,\theta) \times u^{\text{t}}_x(x,r,\theta)$$
$$u'_r(x,r,\theta) = U_{\text{ex}}\alpha(x,r,\theta) \times u^{\text{t}}_r(x,r,\theta)$$

où $(u^{\text{t}}_x, u^{\text{t}}_r)$ est le champ de vitesse associé à un tourbillon annulaire de rayon r_{ex}, placé en

$x = x_{\rm ex}$ et de largeur $\Delta_{\rm ex}$:

$$u_x^{\rm t}(x,r,\theta) = 2\frac{r_{\rm ex}}{r}(r - r_{\rm ex})\Delta_{\rm ex}\exp\left(-\ln 2\frac{(x-x_{\rm ex})^2+(r-r_{\rm ex})^2}{\Delta_{\rm ex}^2}\right)$$
$$u_r^{\rm t}(x,r,\theta) = -2\frac{r_{\rm ex}}{r}(x - x_{\rm ex})\Delta_{\rm ex}\exp\left(-\ln 2\frac{(x-x_{\rm ex})^2+(r-r_{\rm ex})^2}{\Delta_{\rm ex}^2}\right)$$

À chaque itération et pour chaque position (x, r, θ), l'amplitude α est choisie aléatoirement dans l'intervalle $[-1; 1]$. Le niveau $U_{\rm ex}$ de l'excitation est pris très petit (inférieur à 1 % de la vitesse du jet) pour générer le moins possible de bruit artificiel susceptible de se propager jusqu'à la sortie de buse et de se superposer au champ acoustique du jet.

Les perturbations, initialement de très faible amplitude, vont être convectées le long de la tuyère et être naturellement amplifiées par la couche limite. En sortie de buse, un niveau élevé de fluctuations est alors obtenu. Au cours de leur convection, les fluctuations turbulentes de vitesse sont structurées par l'écoulement. Ainsi, suffisamment en aval de l'entrée de buse, la forme des fluctuations est déterminée par la physique de la couche limite et n'est plus affectée par la forme des perturbations initiales. La turbulence en sortie de buse n'est alors plus biaisée par le choix arbitraire de la forme de l'excitation. Il est important de noter que l'objectif de cette approche n'est pas de calculer parfaitement le développement d'une couche limite turbulente dans la tuyère. C'est en effet difficilement réalisable à cause des limitations de puissance des calculateurs, qui nous contraignent à mettre moins de dix points dans l'épaisseur de la couche limite. On souhaite uniquement reproduire à moindre coût le comportement d'une couche limite turbulente, pour avoir en sortie de buse une turbulence aussi physique que possible sans générer significativement de bruit parasite.

3.4 Modélisation de la tuyère

Le rôle de la tuyère sur le bruit rayonné par un jet fait encore débat dans la littérature. En effet, si comme le précise Tam [129] il est maintenant reconnu que la buse joue un rôle clef dans l'émission du screech en régime supersonique, son rôle en régime subsonique est toujours discuté. Bridge & Hussain [28] ont cependant montré expérimentalement que la forme de la buse peut influer sur le bruit rayonné par un jet subsonique excité à bas nombre de Reynolds. Sous l'effet de l'excitation, des appariements de tourbillons se produisent dans la couche de cisaillement. Bridge & Hussain expliquent alors qu'il y a apparition d'un bruit dipolaire supplémentaire, induit par la présence d'une paroi au voisinage des appariements. Ce mécanisme n'est pas le seul à être susceptible de générer du bruit supplémentaire. Par une approche analytique, Crighton [37] explique que le passage

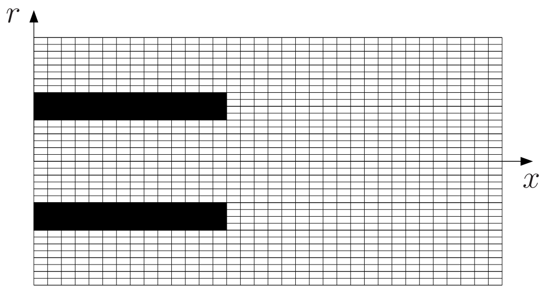


FIG. 3.4: Structure du maillage au niveau de la sortie de buse dans le plan (x, r).

des instabilités dans la couche limite au niveau des lèvres de la buse rayonne également un bruit de nature dipolaire. Il n'a cependant jamais été démontré expérimentalement que ces composantes de bruit sont présentes dans des jets subsoniques non-excités à haut nombre de Reynolds.

Nous avons tout de même choisi de prendre en compte la buse dans le domaine de calcul. D'une part, cela permet de tenir compte des éventuelles interactions entre le champ acoustique et la tuyère. D'autre part, la buse joue un rôle essentiel dans la méthode d'excitation du jet exposée dans la partie 3.3. Notons qu'ici l'objectif n'est pas de modéliser la géométrie exacte d'une tuyère. Il s'agit principalement de rendre compte de la présence d'une paroi au voisinage de la couche de cisaillement et d'inclure dans le domaine de calcul les couches limites à l'intérieur de la tuyère.

La structure cylindrique du maillage nous amène à assimiler la buse à un tube circulaire de diamètre intérieur identique à celui du jet. La figure 3.4 illustre la structure du maillage au niveau de la sortie de buse. La paroi est supposée rigide et adiabatique. On a donc sur la paroi :

$$\begin{aligned}
&u_x = u_r = u_\theta = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \\
&\frac{\partial T}{\partial n} = 0
\end{aligned}$$

où n est la direction normale à la paroi. L'équation de quantité de mouvement n'est donc plus utile sur la paroi car la vitesse y est nulle. Sur les faces internes et externes de la buse, les équations de conservation de la masse et de l'énergie deviennent respectivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial (\rho e_{\mathrm{t}})}{\partial t} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} - \mu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 \right] = 0
\end{aligned}$$

Sur la face radiale de la buse on a de même :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial (\rho e_{\mathrm{t}})}{\partial t} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial r q_r}{r \partial r} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} - \mu \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

Les expressions de q_r et q_θ sont détaillées dans la partie 3.2. D'après ces résultats, les équations au niveau des coins de la buse deviennent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial (\rho e_{\mathrm{t}})}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Ainsi, les propriétés des coins sont influencées par l'écoulement uniquement via le flux thermique azimutal. Les points de maillage placés aux coins sont alors presque totalement indépendants du reste du domaine de calcul, la conduction thermique étant très lente par rapport aux autres phénomènes physiques se produisant dans les jets étudiés.

Les schémas centrés sur 11 points ne peuvent plus être utilisés au voisinage des parois, car on ne dispose pas de cinq points de part et d'autre de l'endroit considéré. Il est alors nécessaire de décentrer les schémas. Le choix de ces derniers doit être effectué avec soin. Il est en effet délicat d'assurer un calcul convenable des phénomènes physiques se produisant au sein de la couche limite, car les limitations des ressources informatiques obligent à ne mailler que très grossièrement cette région. Il faut prendre garde à ce que les nombres d'onde de coupure des schémas ne soient pas trop proches des nombres d'onde des structures dans cette zone. Dans le cas contraire, les structures dans la couche limite pourraient être dissipées par la viscosité numérique. On a choisi d'utiliser les schémas décentrés optimisés sur 7 points développés par Berland [10]. Les schémas aux différences finies sont formellement d'ordre quatre et les filtres sélectifs sont d'ordre deux, mais ils permettent de conserver un nombre d'onde de coupure élevé et de ne pas dissiper les structures qui se développeront dans la couche limite.

La méthode de génération de turbulence exposée dans la partie 3.3 nécessite l'introduction de perturbations en amont de la sortie de buse, typiquement au moins cinq diamètres avant la fin de la tuyère. Pour minimiser le nombre de points de maillage, le domaine de calcul est constitué de deux maillages qui se recouvrent partiellement, comme l'illustre la figure 3.5. Le premier bloc (maillage interne) correspond à l'intérieur de la buse et permet le calcul du développement de la couche limite. Le second bloc (maillage principal) inclut les lèvres de la tuyère, le jet et le champ acoustique. Sur la figure, les deux traits pointillés délimitent la zone de recouvrement des deux maillages. Cette zone

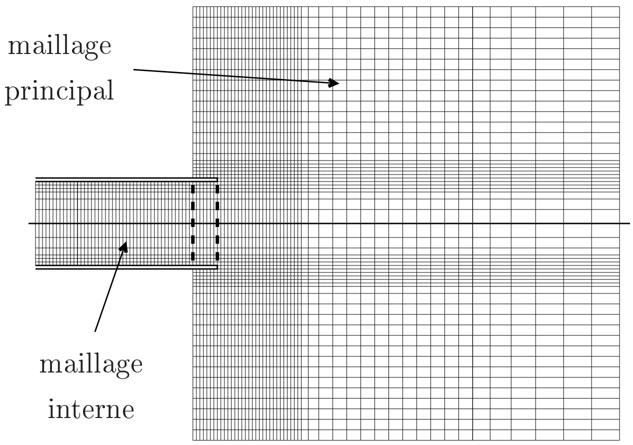


FIG. 3.5: Structure du domaine de calcul (coupe dans le plan (x, r)).

permet d'assurer le passage des informations d'un bloc à l'autre. Le maillage est raffiné radialement et axialement au voisinage de la paroi, pour discrétiser le mieux possible les gradients et les structures situées dans la couche limite ou dans la couche de cisaillement en sortie de buse.

3.5 Rappel sur les variables, conditions d'entrée de fluide et conditions initiales

Les équations employées pour les conditions aux limites, présentées dans la partie 1.5, ne font intervenir que des grandeurs fluctuantes. Aucune information sur les conditions à l'infini n'est donc utilisée. Cela peut entraîner une dérive des valeurs moyennes aux bords du domaine de calcul. Il est alors nécessaire d'effectuer un rappel des grandeurs aux conditions aux limites vers leurs valeurs à l'infini. Pour cela, après avoir appliqué les conditions aux limites, on impose une force de rappel de la forme :

$$f^{\mathrm{r}} = f - \alpha_{\mathrm{r}} \left(f - f_\infty \right)$$

où f est la grandeur considérée, f^{r} est sa valeur après le rappel, f_∞ est sa valeur à l'infini et α_{r} est le coefficient du rappel. Il est compris entre 0 et 1. Cette force est appliquée sur la pression et sur la masse volumique, au niveau des conditions aux limites de non-réflexion. Le coefficient α_{r} doit être choisi avec précaution. S'il est trop faible, le rappel ne parviendra pas à compenser la dérive des valeurs moyennes. S'il est trop fort, on tend à imposer les valeurs de p et ρ sur les bords, et à créer ainsi des conditions aux limites réfléchissantes, ce qui rend le champ acoustique inexploitable. Nous avons choisi de prendre $\alpha_{\mathrm{r}} = 0.001$, qui assure un bon compromis.

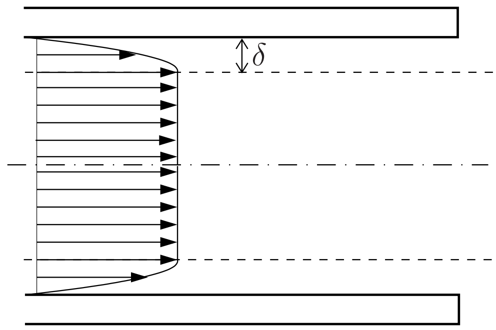


FIG. 3.6: Profil de vitesse en entrée de buse (coupe dans le plan (x, r)).

Un traitement particulier doit également être effectué au niveau de l'entrée du fluide, à gauche du domaine de calcul (voir la figure 3.5). La condition d'entrée de fluide doit permettre à la fois l'entrée de l'écoulement et la sortie des perturbations qui le remontent à l'intérieur de la buse. Deux méthodes ont été testées. La première s'appuie sur les caractéristiques [112, 142, 143] (voir la partie 1.5.1). La seconde consiste à appliquer successivement les conditions de rayonnement de Tam & Web [138] exposées à la partie 1.5.1, puis un rappel vers les profils moyens de vitesse, de pression et de masse volumique que l'on souhaite imposer. Ces deux approches donnant des résultats comparables, nous avons finalement choisi de conserver la seconde pour des raisons de simplicité de mise en œuvre. Le rappel de vitesse en entrée de buse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_x^{\mathrm{r}} &= u_x - \alpha_{\mathrm{r}} \left(u_x - U_x^{\mathrm{prof}} \right) \\ u_r^{\mathrm{r}} &= (1 - \alpha_{\mathrm{r}}) u_r \\ u_\theta^{\mathrm{r}} &= (1 - \alpha_{\mathrm{r}}) u_\theta \end{aligned}$$

où U_x^{prof} est le profil de vitesse de l'écoulement en entrée de buse. La couche limite est choisie laminaire en entrée du domaine. On utilise par simplicité un développement polynomial de la solution de Blasius :

$$\begin{aligned} U_x^{\mathrm{prof}}(r_{\mathrm{w}}) &= U_{\mathrm{j}} \frac{r_{\mathrm{w}}}{\delta} \left[2 - 2 \left(\frac{r_{\mathrm{w}}}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{r_{\mathrm{w}}}{\delta} \right)^3 \right] \quad \text{si } r_{\mathrm{w}} < \delta \\ U_x^{\mathrm{prof}}(r_{\mathrm{w}}) &= U_{\mathrm{j}} \quad \text{si } r_{\mathrm{w}} \geq \delta \end{aligned}$$

où r_{w} est la distance par rapport à la paroi, U_{j} est la vitesse du jet et δ est l'épaisseur de la couche limite (voir la figure 3.6).

Le profil précédent est utilisé pour initialiser le champ de vitesse. À $t = 0$ on prend

$u_r^{\mathrm{i}} = 0$, $u_\theta^{\mathrm{i}} = 0$ et :

$$
\begin{aligned}
&u_x^{\mathrm{i}} = U_x^{\mathrm{prof}}(r_{\mathrm{w}}) \quad \text{si } r < \frac{D}{2} \\
&u_x^{\mathrm{i}} = 0 \quad \text{si } r \geq \frac{D}{2}
\end{aligned}
$$

L'exposant i indique que l'on considère la valeur de la variable à $t = 0$. La température à la paroi est initialisée par :

$$
T_{\mathrm{paroi}} = T(x, r = \frac{D}{2}, \theta, t = 0) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\mathrm{j}}^2\right) T_{\mathrm{j}}
$$

où M_{j} et T_{j} sont le nombre de Mach et la température statique du jet respectivement. On déduit alors le champ de température à l'aide de la relation de Crocco-Busemann :

$$
\begin{aligned}
&T^{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{j}} \left[\frac{T_{\mathrm{paroi}}}{T_{\mathrm{j}}} - \frac{u_x^{\mathrm{i}}}{U_{\mathrm{j}}} \left(\frac{T_{\mathrm{paroi}}}{T_{\mathrm{j}}} - 1 \right) + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{U_{\mathrm{j}}}{c_{\mathrm{j}}^2} \cdot \frac{u_x^{\mathrm{i}}}{U_{\mathrm{j}}} \left(1 - \frac{u_x^{\mathrm{i}}}{U_{\mathrm{j}}} \right) \right] \quad \text{si } r \leq \frac{D}{2} \\
&T^{\mathrm{i}} = T_\infty \quad \text{si } r > \frac{D}{2}
\end{aligned}
$$

où T_∞ est la température ambiante et $c_{\mathrm{j}} = (\gamma r T_{\mathrm{j}})^{-1/2}$ est la vitesse du son dans le jet. La pression est initialisée à $P_\infty = 10^5$ Pa et la masse volumique initiale est déterminée par l'équation d'état :

$$
\rho^{\mathrm{i}} = \frac{\gamma P_\infty}{c_p (\gamma - 1) T^{\mathrm{i}}}
$$

avec $c_p = 1003.4$ J.Kg^{-1}.K^{-1} la chaleur massique spécifique à pression constante.

Chapitre 4

Étude expérimentale des champs acoustiques proches et lointains de jets subsoniques et supersoniques

Ce chapitre présente les résultats d'une campagne de mesures qui a été effectuée avec Fleury à l'Ecole Centrale de Lyon, afin de caractériser les champs acoustiques proches et lointains de jets à hauts nombres de Reynolds et à nombres de Mach compris entre 0.6 et 1.6. L'objectif est tout d'abord de construire une base de données permettant la validation des calculs directs de bruit de jets. Les coûts de calcul élevés de ces simulations obligent en effet souvent à ne mailler que le champ acoustique proche. Dans ces simulations, le bruit rayonné en champ lointain peut être extrapolé à l'aide d'une méthode hybride, mais cela se révèle souvent délicat à mettre en oeuvre, et les résultats obtenus avec des méthodes intégrales s'avèrent être sensibles à la position de la surface d'intégration [26]. Il est donc utile de disposer à la fois de données acoustiques en champ lointain pour vérifier la qualité du calcul hybride, et de mesures de pression en champ proche venant compléter celles de la littérature [76, 144, 155, 158], afin de valider le calcul direct. Les données recueillies nous permettront également d'étudier certaines caractéristiques du rayonnement acoustique des jets, et en particulier la loi dimensionnelle suivie par la fréquence du maximum des spectres de bruit en champ lointain dans la direction aval, qui fait encore l'objet de débats dans la littérature [20, 94, 141, 161]. Dans un premier temps, les configurations étudiées seront présentées. Des mesures de vitesse axiale moyenne effectuées au tube de Pitot seront ensuite exposées, suivies des mesures acoustiques en champ proche. Enfin, les données recueillies en champ lointain seront étudiées.

M_{j}	nature du chauffage	T_∞ (K)	T_{j} (K)	P_{j} (bar)	U_{j} (m.s^{-1})	Re$_D$
0.90	jet compensé	281	281	0.992	302	8.0×10^5

Tab. 4.1: Paramètres aérodynamiques du jet étudié lors des mesures au tube de Pitot.

4.1 Configurations étudiées

La campagne de mesures a été réalisée dans la grande soufflerie anéchoïque du Centre Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon [127], de dimension $10.3\times8\times7.6$ m^3 et de fréquence de coupure $f_{\mathrm{c}} = 100$ Hz. Elle a été conçue pour l'étude de jets continus subsoniques et supersoniques [163]. L'écoulement est généré par un compresseur de puissance 350 kW fournissant un débit maximal $Q = 1$ kg.s^{-1}. À la sortie du compresseur, le fluide traverse un sécheur de puissance 10 kW, suivi par un caisson de résistances chauffantes de puissance maximale 72 kW, permettant de faire varier la température de l'écoulement.

Les jets étudiés ont un diamètre $D = 3.8\times10^{-2}$ m. On s'est intéressé à des nombres de Mach $M_{\mathrm{j}} = U_{\mathrm{j}}/c_{\mathrm{j}}$ compris entre 0.60 et 1.6, où U_{j} et c_{j} sont respectivement la vitesse du jet et la vitesse du son en sortie de buse. Les jets sont compensés en température avec $T_{\mathrm{j}} = T_\infty$, où T_{j} et T_∞ sont respectivement la température du jet en sortie de buse et la température ambiante, à l'exception du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 1.6$ pour lequel le caisson de résistances chauffantes n'étant pas assez puissant pour assurer la compensation en température on a $T_{\mathrm{j}}/T_\infty = 0.81$. Les nombres de Reynolds Re$_D = U_{\mathrm{j}}D/\nu$ des jets considérés sont compris entre 5.3×10^5 et 2.0×10^6. D'après les travaux de Zaman [157] présentés sur la figure 3.1, on peut donc s'attendre à ce que ces jets soient turbulents dès la sortie de buse.

4.2 Mesures au tube de Pitot du champ de vitesse axiale moyenne

Dans un premier temps, le champ moyen de vitesse axiale u_{x_0} d'un jet à nombre de Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$ et à nombre de Reynolds Re$_D = 8.0 \times 10^5$ a été mesuré au tube de Pitot, afin de valider l'écoulement avant de considérer les champs sonores. Les paramètres aérodynamiques de la configuration étudiée sont précisés dans le tableau 4.1. La figure 4.1 montre une photo du dispositif expérimental. Les profils radiaux de u_{x_0} ont été mesurés en $x/D = 0.5$, de $x/D = 1$ à $x/D = 9$ tous les $\Delta x/D = 1$, et de $x/D = 10$ à $x/D = 40$ tous les $\Delta x/D = 5$. Chaque mesure a été moyennée sur 35 échantillons.

La cartographie du champ moyen de vitesse axiale est reportée sur la figure 4.2, et la

FIG. 4.1: Dispositif expérimental lors des mesures au tube de Pitot.

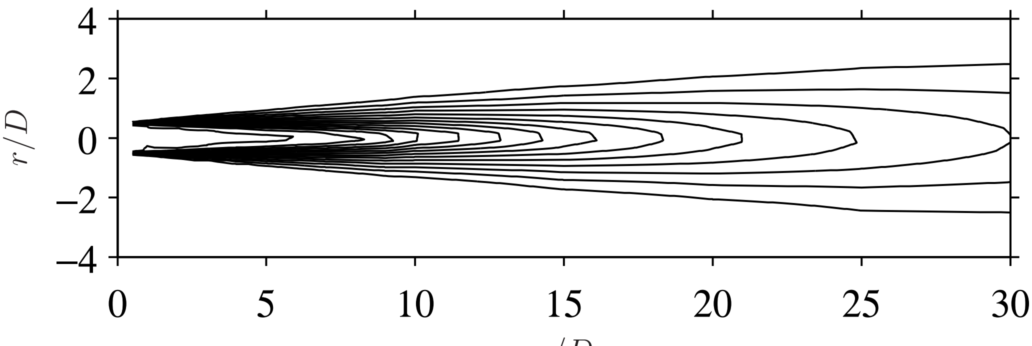


FIG. 4.2: Iso-niveaux du champ moyen de vitesse axiale u_{x_0}, pour un jet à nombre de Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$. Niveaux : de 40 m.s^{-1} à 300 m.s^{-1} avec un pas de 20 m.s^{-1}.

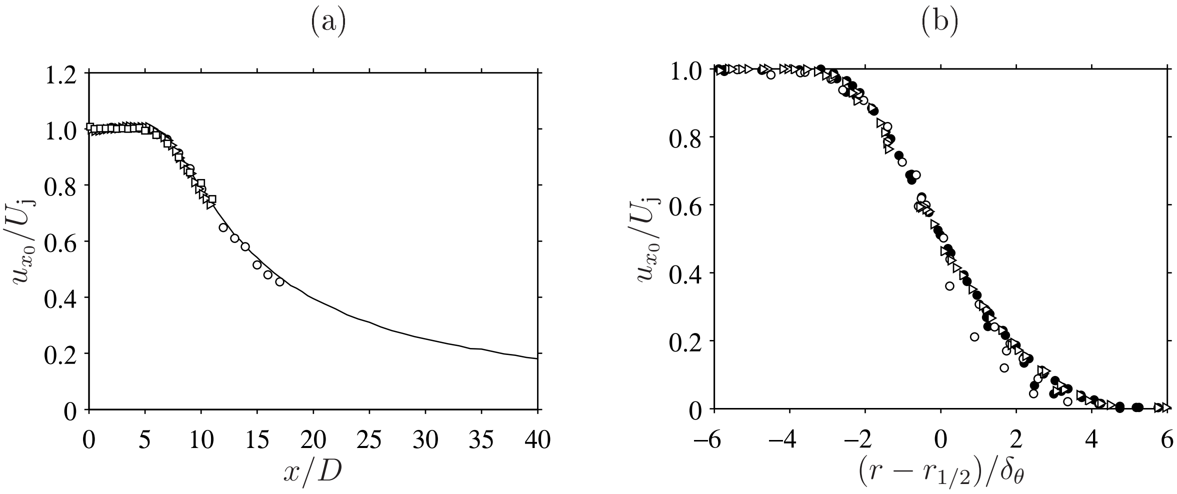


FIG. 4.3: Vitesse axiale moyenne u_{x_0} du jet à nombre de Mach $M_\mathrm{j} = 0.90$: ——— et • présentes mesures ($\mathrm{Re}_D = 8.0 \times 10^5$) ; ∘ Lau *et al.* [84, 85] (LDA – $\mathrm{Re}_D = 1.0 \times 10^6$) ; ▷ Fleury [54] (PIV – $\mathrm{Re}_D = 8.0 \times 10^5$) ; □ Fleury [54] (LDA – $\mathrm{Re}_D = 8.0 \times 10^5$). (a) Évolution le long de l'axe du jet. (b) Profils radiaux en $x/D = 0.5$, 1, 2, 3 et 4. La variable $r_{1/2}$ est la valeur de r au point où $u_{x_0} = 0.5U_\mathrm{j}$, et δ_θ est l'épaisseur de quantité de mouvement.

décroissance de u_{x_0} le long de l'axe du jet est comparée à des mesures de la littérature sur la figure 4.3(a). Le cône potentiel du jet a une longueur $x_\mathrm{c} = 7D$, en considérant le point de l'axe où $u_{x_0} = 0.95U_\mathrm{j}$. Cette valeur est en bon accord avec les mesures LDA (Laser Doppler Anemometry) de Lau *et al.* [84, 85] et avec les mesures LDA et PIV (Particle Image Velocimetry) de Fleury [54]. La décroissance de la vitesse sur l'axe est également similaire à celle obtenue avec les mesures de la littérature. Les profils radiaux de u_{x_0} en $x/D = 0.5$, 1, 2, 3 et 4 sont aussi reportés sur la figure 4.3(b) en fonction de $(r - r_{1/2})/\delta_\theta$, où $r_{1/2}$ est la valeur de r lorsque $u_{x_0} = 0.5U_\mathrm{j}$ et δ_θ est l'épaisseur de quantité de mouvement. Ceux-ci sont auto-similaires et se comparent bien avec les autres mesures. Ces résultats montrent la qualité des mesures effectuées au tube de Pitot. Des mesures des fluctuations de vitesses par LDA et PIV ont également été réalisées par Fleury [54].

4.3 Mesures acoustiques en champ proche

On s'est ensuite intéressé au champ acoustique proche de jets subsoniques et supersoniques. Les configurations étudiées sont reportées dans le tableau 4.2. Les mesures ont été effectuées avec une antenne de 12 microphones 1/4" B&K espacés les uns des autres d'un diamètre D, comme l'illustre la figure 4.4. L'antenne est positionnée parallèlement à l'axe du jet et les microphones sont placés en incidence rasante, sans grille de protec-

M_j	nature du chauffage	T_∞ (K)	T_j (K)	P_j (bar)	U_j (m.s^{-1})	Re_D
0.60	jet compensé	282	282	0.987	202	5.3×10^5
0.90	jet compensé	283	283	0.980	304	7.9×10^5
1.1	jet compensé	282	282	0.987	370	9.7×10^5
1.6	jet froid	282	220	0.986	473	1.9×10^6

TAB. 4.2: Paramètres aérodynamiques des jets étudiés lors des mesures en champ acoustique proche.

FIG. 4.4: Dispositif expérimental lors des mesures acoustiques en champ proche.

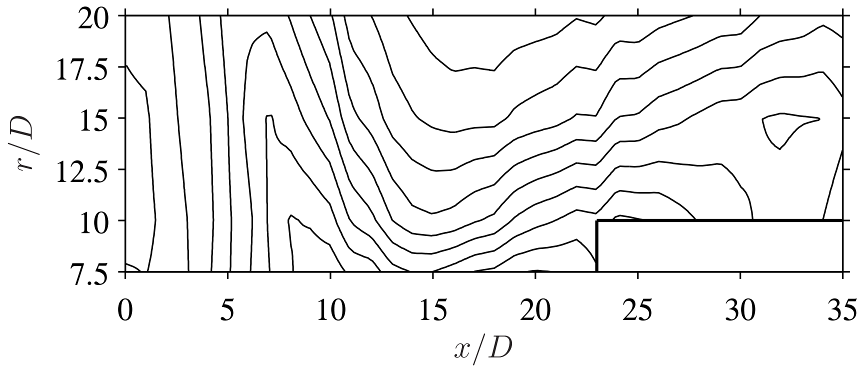


FIG. 4.5: Iso-niveaux de pression en champ proche à St= 0.39, dans le cas du jet à Mach $M_\mathrm{j} = 1.6$, en dB. Ce nombre de Strouhal correspond au pic de fréquence du bruit de choc. Niveaux : de 90 dB à 106 dB avec un pas de 2 dB. Le rectangle blanc représente une zone non balayée par les microphones.

tion. Les mesures de pression ont été corrigées de la courbe de réponse en fréquence des microphones et de l'absorption atmosphérique [8, 9].

Les signaux temporels et les spectres de pression ont été mesurés en des points séparés axialement de $\Delta x/D = 1$, en quatre positions radiales : $r/D = 7.5$, 10, 15 et 20. Le long des lignes $r/D = 7.5$ et $r/D = 10$, les données ont été recueillies entre $x/D = 0$ et 23 en régime subsonique, et entre $x/D = -12$ et 23 en régime supersonique. Aux autres positions radiales, les microphones ont été placés de $x/D = 0$ à 35. Les spectres ont été enregistrés sur une gamme de fréquences allant de 3 Hz à 77 kHz, avec un pas Δf de 3 Hz. Ils ont été moyennés sur 450 échantillons.

La figure 4.5 montre les iso-niveaux de pression en champ proche du jet à nombre de Mach $M_\mathrm{j} = 1.6$, pour un nombre de Strouhal St= $fD/U_\mathrm{j} = 0.39$. Cette valeur correspond à la fréquence de rayonnement maximal du bruit de choc. On distingue deux lobes de directivité, l'un vers l'aval et l'autre orienté vers les côtés du jet. Ce résultat est en bon accord avec les travaux de Yu & Dosanjh [155], qui rapportent que la contribution latérale correspond au bruit de choc et que le rayonnement émis vers l'aval est associé au bruit de mélange de la turbulence.

Les iso-niveaux des fluctuations de pression dans le cas du jet à Mach $M_\mathrm{j} = 0.90$ sont reportés sur la figure 4.6. On remarque que les niveaux de bruit rayonnés sont plus élevés dans la direction aval. Ce résultat est confirmé par la figure 4.7, qui représente les iso-niveaux de pression aux nombres de Strouhal St= 0.2, 0.5 et 1. La directivité du rayonnement aux basses fréquences est très marquée vers l'aval, et le lobe du rayonnement acoustique se décale progressivement vers la direction perpendiculaire à l'axe du jet lorsque la fréquence augmente, comme illustré par les figures 4.7(b) et 4.7(c). Ces observations

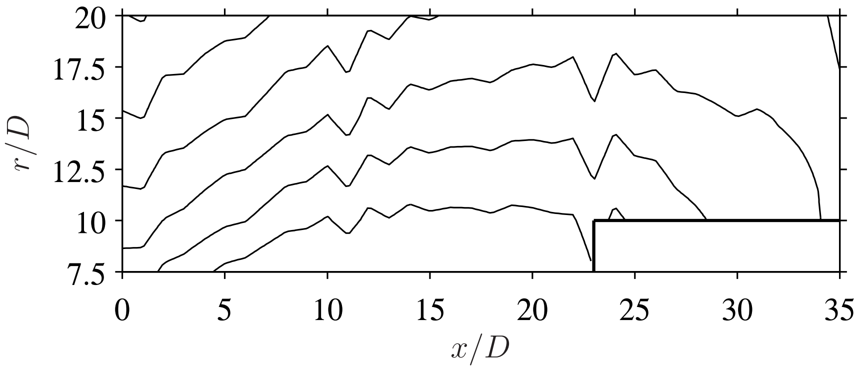


FIG. 4.6: Iso-niveaux des fluctuations de pression en champ proche dans le cas du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$, en dB. Niveaux de 109 dB à 119 dB avec un pas de 2 dB.

sont en accord avec les résultats de la littérature [144, 158].

La figure 4.8(a) représente des spectres de pression mesurés le long de la ligne $r/D = 7.5$ en différentes positions axiales, dans le cas du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$. On observe une évolution notable des formes et des niveaux des spectres lorsque x/D augmente. Vers $x/D = 0$, le spectre est large bande et présente un maximum vers $\mathrm{St_p} = 0.7$. Le pic se décale vers les basses fréquences lorsqu'on s'éloigne de la buse, pour atteindre en $x/D = 20$ un maximum plus marqué à $\mathrm{St_p} = 0.13$. Les spectres mesurés en $x/D = 0$, perpendiculairement à la sortie de buse, sont reportés sur la figure 4.8(b), pour les différentes positions radiales. Le nombre de Strouhal du pic se déplace vers les basses fréquences lorsqu'on s'éloigne de l'axe du jet, et passe de $\mathrm{St_p} = 0.7$ en $r/D = 7.5$ à $\mathrm{St_p} = 0.3$ en champ lointain, en $r/D = 52$. Les propriétés du champ acoustique évoluent donc sensiblement entre le champ proche et le champ lointain. Cela montre bien qu'il est nécessaire de disposer de mesures en champ proche pour valider les résultats des calculs directs.

4.4 Mesures acoustiques en champ lointain

Des mesures acoustiques en champ lointain ont enfin été effectuées. Les paramètres aérodynamiques des configurations étudiées sont donnés dans le tableau 4.3. Les directivités et les spectres de pression ont été mesurés avec un microphone 1/4" B&K sans grille de protection et orienté en incidence rasante. Il est placé à une distance $d/D = 52$ de la sortie de buse et les mesures sont réalisées entre $\phi = 10°$ et $\phi = 150°$, où ϕ est l'angle par rapport à l'axe du jet. Le dispositif expérimental est présenté sur figure 4.9. Les données ont été corrigées de la réponse en fréquence du microphone et de l'absorption atmosphérique [8, 9]. Les spectres ont été enregistrés de 3 Hz à 77 kHz, avec un pas en fréquence $\Delta f = 3$ Hz. Ils ont été moyennés sur 400 échantillons.

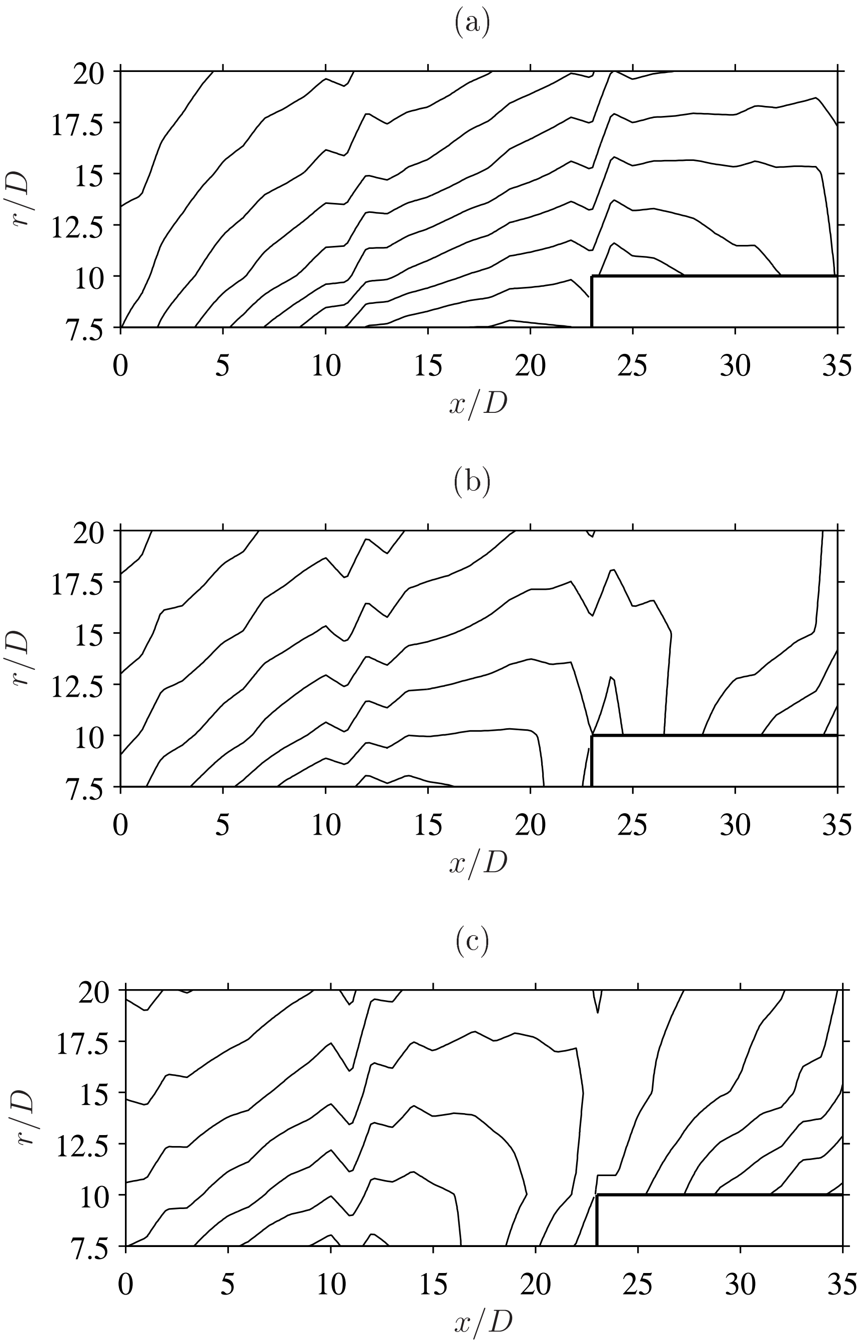


Fig. 4.7: Iso-niveaux de pression en champ proche dans le cas du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$, en dB. (a) Pour un nombre de Strouhal de St$= 0.2$: niveaux de 68 dB à 86 dB avec un pas de 2 dB. (b) Pour un nombre de Strouhal de St$= 0.5$: niveaux de 67 dB à 81 dB avec un pas de 2 dB. (c) Pour un nombre de Strouhal de St$= 1$: niveaux de 60 dB à 78 dB avec un pas de 2 dB.

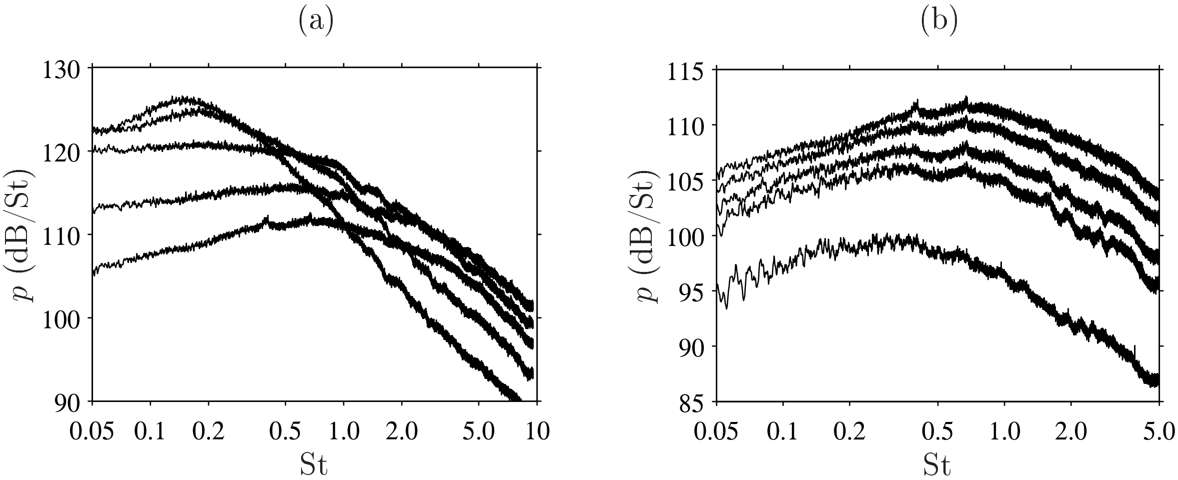


FIG. 4.8: Mesures en champ proche dans le cas du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$. (a) Spectres de pression le long de la ligne $r/D = 7.5$. De bas en haut : $x/D = 0$, 5, 10, 15 et 20. (b) Spectres de pression en $x/D = 0$. De haut en bas : $r/D = 7.5$, 10, 15, 20 et 52D (ce spectre est issu des mesures en champ lointain présentées au paragraphe 4.4).

M_{j}	nature du chauffage	T_∞ (K)	T_{j} (K)	P_{j} (bar)	U_{j} (m.s^{-1})	Re_D
0.60	jet compensé	284	284	0.964	203	5.3×10^5
0.75	jet compensé	282	282	0.966	252	6.6×10^5
0.90	jet compensé	286	286	0.971	306	7.8×10^5
0.98	jet compensé	282	282	0.967	330	8.7×10^5
1.1	jet compensé	282	282	0.985	370	9.7×10^5
1.6	jet froid	281	220	0.983	478	2.0×10^6

TAB. 4.3: Paramètres aérodynamiques des jets étudiés lors des mesures en champ acoustique lointain.

FIG. 4.9: Dispositif expérimental lors des mesures acoustiques en champ lointain.

La figure 4.10 représente la puissance acoustique W rayonnée par les différents jets étudiés, en fonction du nombre de Mach M_{j}. Cette puissance a été obtenue par intégration de la directivité de chaque jet. Sur cette figure, les valeurs de W sont normalisées pour une section de buse équivalente de surface 1 m^2. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux de la littérature, et on retrouve notamment en régime subsonique la loi dimensionnelle en U_{j}^8. Tout cela démontre la qualité de nos mesures en champ lointain.

La directivité du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$ est tracée sur la figure 4.11. Le jet rayonne de manière prépondérante vers l'aval, avec un niveau maximal en $\phi = 20°$. On observe également les effets de la présence d'un cône de silence pour $\phi < 20°$, dû aux effets de réfraction de l'écoulement. La directivité mesurée se compare également très bien aux données de la littérature.

Les spectres de pression en $\phi = 30°$ et $\phi = 90°$ dans le cas du jet à Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$ sont reportés sur la figure 4.12. En $\phi = 30°$, le spectre acoustique présente un pic marqué, à un nombre de Strouhal $\mathrm{St_p} = 0.16$. Lorsque l'angle d'observation augmente, le spectre s'élargit et le pic se décale vers les hautes fréquences, pour atteindre $\mathrm{St_p} = 0.3$ en $\phi = 90°$. Ces résultats sont en bon accord avec les mesures de Tanna [140] et Jordan & Gervais [77]. On note toutefois que les mesures de Tanna surestiment légèrement les hautes fréquences en $\phi = 90°$, ce qui a aussi été mentionné par Viswanathan [147].

On s'est ensuite intéressé à la loi dimensionnelle suivie par la fréquence f_{p} du maximum des spectres de pression en champ lointain au voisinage de l'axe. La figure 4.13 représente les spectres de bruit à la position angulaire $\phi = 25°$, tracés en utilisant des tiers d'octave (ligne 1) et des bandes fines (ligne 2), en fonction du nombre de Strouhal St$= fD/U_{\mathrm{j}}$ (colonne A) et du nombre de Helmholtz Hm$= fD/c_0$ (colonne B). Lorsque ces spectres de pression sont représentés en tiers d'octave, la fréquence f_{p} est donnée par

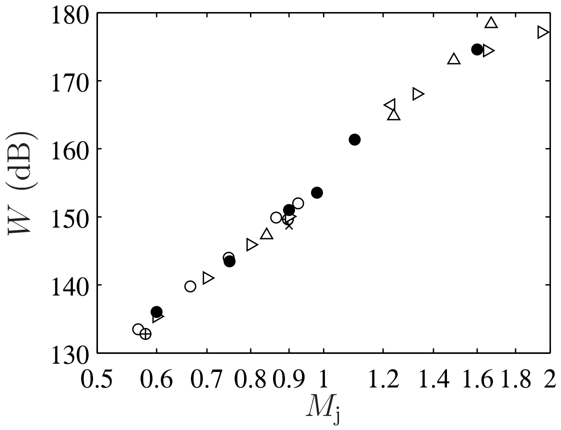


FIG. 4.10: Puissance acoustique rayonnée, ramenée à un jet de section 1 m^2, en fonction du nombre de Mach M_j : • présentes mesures ; ○ Lush [94, 95] ; ▷ Tanna [140] ; × Stromberg *et al.* [126] ; ◁ Yu & Dosanjh [155] ; △ Seiner *et al.* [118, 119].

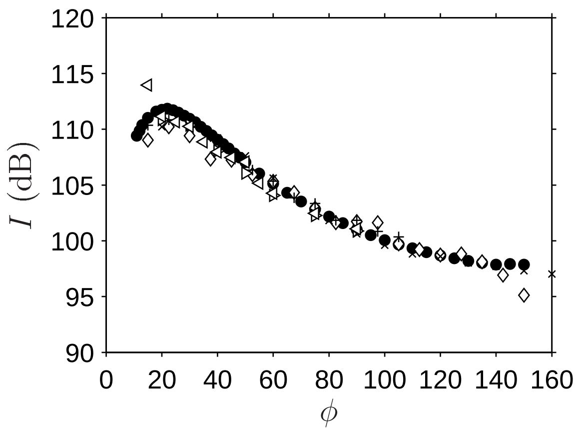


FIG. 4.11: Directivités de jets à Mach $M_j = 0.90$: • présentes mesures ; + Lush [94, 95] ; ◇ Tanna [140] ; ▷ Mollo-Christensen *et al.* [109] ; × nome SAE ; ◁ Seiner *et al.* [118, 119].

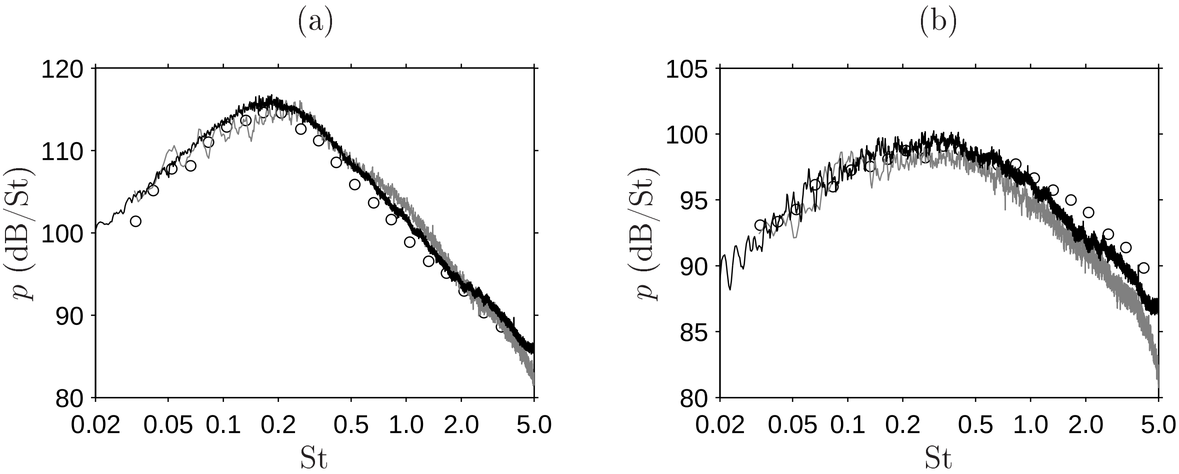


FIG. 4.12: Spectres de pression en champ lointain dans le cas de jets à nombre de Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.90$: ——— présentes mesures ; ——— Jordan & Gervais [77] ; ○ Tanna [140]. (a) $\phi = 30°$; (b) $\phi = 90°$.

un nombre de Helmholtz constant, et par un nombre de Strouhal fixe, comme le montrent les figures 4.13(1.A) et 4.13(1.B). Ceci est en accord avec les observations de Lush [94] et Tanna [141]. Toutefois, ce résultat n'est plus valable lorque l'on considère des spectres en bandes fines. La fréquence des pics est alors déterminée par un nombre de Strouhal constant, comme l'illustrent les figures 4.13(2.A) et 4.13(2.B). Ce comportement a aussi été observé par Zaman [161]. La loi en nombre de Helmholtz apparaît donc comme une conséquence de l'utilisation des tiers d'octave, qui renforce les hautes fréquences et décale le pic des spectres vers la droite. Le mécanisme dominant de génération de bruit vers l'aval est donc soumis à l'influence de la vitesse du jet U_{j}, et non à c_0 comme l'indiquerait une loi en nombre de Helmholtz.

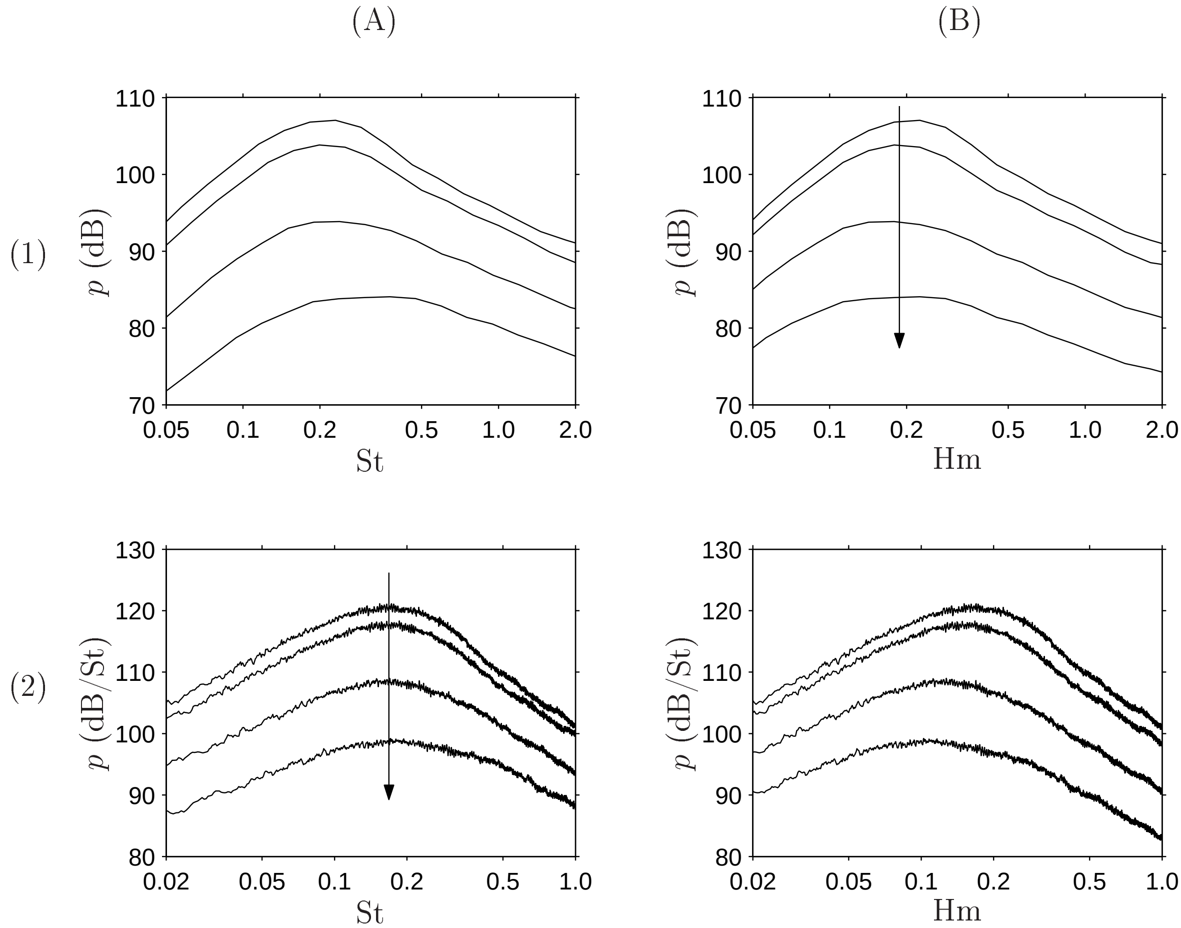


FIG. 4.13: Spectres de pression en champ lointain à la position angulaire $\phi = 25°$ et à une distance $d/D = 52$ de la sortie de buse. Représentation en (1) tiers d'octave, (2) bandes fines, en fonction (A) du nombre de Strouhal St$= fD/U_\mathrm{j}$ et (B) du nombre de Helmholtz Hm$= fD/c_0$. De bas en haut : $M_\mathrm{j} = 0.60$, 0.75, 0.90 et 0.98.

Chapitre 5

Calcul direct du bruit de jets subsoniques laminaires et turbulents en sortie de buse

Ce chapitre présente des simulations de jets qui ont été réalisées à l'aide du solveur 3-D développé au cours de ces travaux. Des jets initialement laminaires et turbulents seront calculés, pour poursuivre les deux objectifs suivants. Il s'agit tout d'abord de calculer directement le bruit rayonné par un jet subsonique à haut nombre de Reynolds et initialement turbulent. Les champs aérodynamiques et acoustiques obtenus par simulation seront comparés avec des données expérimentales, afin de valider le solveur et de montrer son intérêt en temps qu'outil de prédiction. On désire ensuite étudier l'influence du taux de turbulence en sortie de buse sur le comportement acoustique d'un jet, et montrer que ce paramètre est essentiel pour obtenir une bonne prédiction du bruit rayonné à haut nombre de Reynolds.

5.1 Maillage et paramètres des simulations

Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement à des jets compensés en température ($T_\mathrm{j} = T_\infty = 288$ K). Le nombre de Mach des jets vaut $M_\mathrm{j} = U_\mathrm{j}/c_\mathrm{j} = 0.9$, ce qui correspond à une vitesse d'éjection de $U_\mathrm{j} = 306$ m.s^{-1}. Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre $D = 2.45$ cm du jet est alors $\mathrm{Re}_D = U_\mathrm{j}D/\nu = 5\times10^5$. D'après les résultats de Zaman [157] présentés au paragraphe 3.3 sur la figure 3.1, un jet à un tel nombre de Reynolds est expérimentalement turbulent dès la sortie de buse.

Le maillage utilisé est représenté sur la figure 5.1. Le maillage interne (voir la figure 3.5)

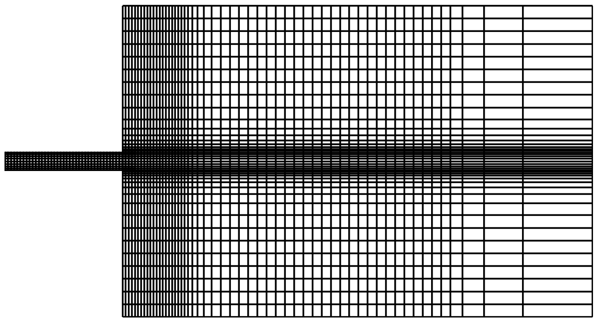


Fig. 5.1: Maillage utilisé pour les calculs de jets (coupe dans le plan (x, r)). Pour des raisons de clarté, seul un point sur dix est représenté.

est constitué de $n_r \times n_\theta \times n_x = 46 \times 48 \times 391$ points et le maillage principal contient $n_r \times n_\theta \times n_x = 219 \times 48 \times 551$ points, ce qui donne un total de 6.7×10^6 points. La face intérieure de la buse est placée au point radial $n_{r_\mathrm{i}} = 46$ et la face extérieure est en $n_{r_\mathrm{e}} = 49$. Au niveau de l'axe, le pas radial vaut $\Delta r_0 = 0.016D = 3.92 \times 10^{-4}$ m. Un taux de resserrement de 2 % est appliqué sur les 29 premiers points radiaux à partir de l'axe, pour mailler le plus finement possible la couche limite et la couche de cisaillement. Puis, le pas est constant sur les 31 points suivants. Au niveau de la buse, le pas radial vaut donc $\Delta r_\mathrm{paroi} = 0.57\Delta r_0$. Ensuite, le maillage est étiré à un taux de 3 % sur 67 points, pour atteindre le champ proche acoustique. Après cet étirement, le pas radial est maintenu constant jusqu'en $n_r = 219$. Le pas radial maximal est $\Delta r_\mathrm{max} = 4.12\Delta r_0$, et le domaine de calcul s'étend donc jusqu'à $r = 8.6D$.

Le maillage axial a un pas constant $\Delta x_0 = \Delta r_0$ dans toute la buse et sur les premiers 160 points après la sortie de la tuyère. La buse est constituée de 420 points dans la direction axiale, dont 39 sont inclus dans le maillage principal. Ainsi, la zone interne de la tuyère a une longueur totale de $L_\mathrm{buse} = 6.7D$, dont les derniers $0.61D$ contenus dans le maillage principal. Le pas axial est étiré sur 55 points à partir de $x/D = 2.6$ avec un taux de 2 %, ce qui permet d'atteindre un pas $\Delta x_\mathrm{max} = 2.97\Delta r_0$. Puis, le maillage reste constant jusqu'au point $n_x - 40 = 511$, où commence la zone éponge et dans laquelle on applique un étirement des mailles de 6 %. On calcule donc le jet sur une longueur $L_\mathrm{jet} = 16.4D$. Notons que $\Delta x_\mathrm{max} < \Delta r_\mathrm{max}$: la direction radiale fixe donc le nombre de Strouhal maximal du champ acoustique. Sachant que les schémas numériques sont précis jusqu'à 4 points par longueur d'onde (voir le paragraphe 1.2), la propagation acoustique est donc bien calculée jusqu'à un nombre de Strouhal $\mathrm{St} = fD/U_\mathrm{j} = 3.3$. Une telle valeur assure une bonne description du bruit rayonné par le jet, qui est essentiellement compris entre $\mathrm{St} = 0.01$ et $\mathrm{St} = 1$.

La direction azimutale est maillée avec un pas constant $\Delta\theta = 2\pi/48$. D'après les observations du paragraphe 1.7, le pas de temps est déterminé à l'aide de la relation $\Delta t = \text{CFL}\Delta r_0 \Delta\theta / c_0$. Des calculs préliminaires ont ainsi montré que prendre CFL=1.1 permet d'assurer la stabilité des simulations.

D'après Zaman [157], pour un jet turbulent à un nombre de Reynolds $\text{Re}_D = 5 \times 10^5$, l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ de la couche de cisaillement en sortie de buse est de l'ordre de $10^{-3}D$ (voir la figure 3.1). Une couche limite associée à une couche de cisaillement aussi fine ne peut pas être maillée actuellement, car cela induirait des coûts de calculs prohibitifs. On est alors contraint de prendre une couche limite plus épaisse que dans les expériences. Dans le présent maillage, le point le plus proche de la buse est placé à une distance $\Delta r_{\text{paroi}} = 9 \times 10^{-3}D$ de la paroi. On choisit $\delta = 7\Delta r_{\text{paroi}}$, soit $\delta/D = 0.064$. Il y a donc 7 points dans l'épaisseur de la couche limite. Avec le profil de couche limite laminaire imposé en entrée de buse (paragraphe 3.5), le pas radial en unités de paroi est alors de $\Delta r^+_{\text{paroi}} = 36$ et le pas axial vaut $\Delta x^+_{\text{paroi}} = 63$. On peut donc s'attendre à ce que la discrétisation soit suffisante pour que des structures se développent au voisinage de la paroi.

Nous avons vu au paragraphe 3.3 qu'il est nécessaire d'introduire des perturbations dans la couche limite, pour obtenir un taux de turbulence réaliste en sortie de buse. Les paramètres de l'excitation utilisés sont, avec les notations du paragraphe 3.3 : $r_{\text{ex}} = 0.48D$, $x_{\text{ex}} = -6.40D$ et $\Delta_{\text{ex}} = 1.5\Delta r_0$. Le choix du niveau U_{ex} de l'excitation permet d'ajuster le taux de turbulence dans la couche limite en sortie de buse. Pour étudier l'influence de ce paramètre sur le développement du jet et sur son rayonnement acoustique, deux configurations ont été calculées, avec la même épaisseur δ et deux niveaux de turbulence en sortie de buse : 9.0 % (cas turbulent) et 1.6 % (cas laminaire). Cela correspond respectivement à des niveaux d'excitation de $U_{\text{ex}} = 10^{-2}$ et $U_{\text{ex}} = 10^{-4}$.

Chaque calcul a été effectuté sur 1.02×10^5 itérations, le transitoire numérique correspondant aux 2.5×10^4 premières itérations. Le temps physique simulé pour chaque jet est donc de $T_{\text{sim}} = 12.8$ ms. Chaque simulation a nécessité 250 heures de calcul sur le Nec SX-5 de l'IDRIS, avec une vitesse d'exécution de 3700 Mflops.

5.2 Évolution de la couche limite

Les résultats obtenus dans les couches limites des deux jets dans la buse sont tout d'abord étudiés. La figure 5.2(a) représente l'évolution axiale de $u_{x_{\text{rms}}}$ le long de la couche limite, en $r = 0.47D$. Dans les deux configurations, les perturbations introduites en entrée de buse s'amplifient naturellement le long de la couche limite. Dans le cas turbulent, le niveau des fluctuations atteint un palier à partir de $x/D = -1$. Un niveau de turbulence

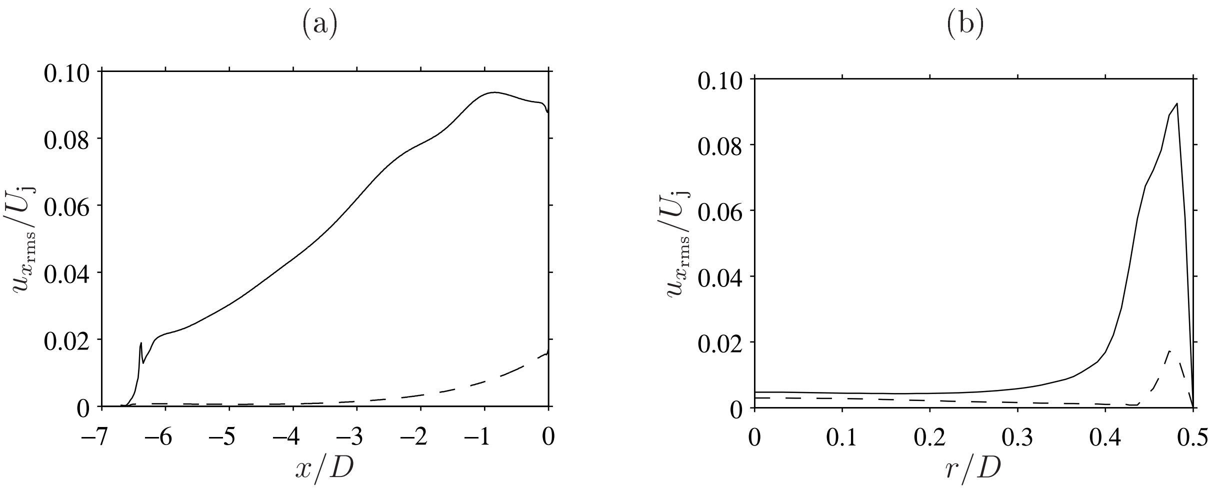


FIG. 5.2: Niveaux des fluctuations de la vitesse axiale $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ dans la buse : ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire. (a) Évolution axiale dans la couche limite, en $r = 0.47D$. (b) Profil en $x = 0$, en sortie de buse.

élevé de 9 % est alors obtenu en sortie de tuyère. Dans le cas laminaire, les perturbations initiales étant très petites on obtient un faible niveau de fluctuations de 1.6 % en sortie de buse. Cela est bien illustré par le profil de $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ en sortie de tuyère, sur la figure 5.2(b). Sur les profils radiaux, le niveau des fluctuations au voisinage du centre de la buse est de l'ordre de 0.5 %. Il augmente ensuite rapidement lorsqu'on pénètre dans la couche limite, puis il décroît brutalement près de la paroi, où la condition de non-glissement impose des valeurs de vitesse nulles. La position radiale du maximum de fluctuations du profil est identique pour les deux jets, et se trouve à une distance $2\Delta r_{\mathrm{paroi}}$ de la paroi.

Les profils des fluctuations des trois composantes de la vitesse en $x/D = -0.6$ sont tracés sur la figure 5.3, dans le cas du jet turbulent. Les maxima de fluctuations sont plus proches de la paroi pour les composantes axiales et azimutales que pour la composante radiale de la vitesse. Le niveau maximal est obtenu pour $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ tandis que $u_{r_{\mathrm{rms}}}$ présente des niveaux plus faibles du fait de la proximité de la paroi, qui restreint les fluctuations radiales. Les allures de ces profils et leurs niveaux relatifs sont en bon accord avec les résultats de Kim *et al.* [81], qui ont effectué la DNS d'une couche limite turbulente dans un canal plan, et de Eggels *et al.* [50], qui ont calculé par simulation numérique directe une couche limite turbulente dans un canal axisymétrique. Ce bon accord est toutefois qualitatif, du fait de la sous-discrétisation de la couche limite dans nos calculs. En effet, les maxima de fluctuations obtenus par ces deux équipes sont observés très près de la paroi, typiquement à une distance $\Delta r^+ < 30$, alors que dans nos simulations le premier point de maillage se trouve en $\Delta r^+ = 36$. Les maxima calculés sont alors obtenus plus

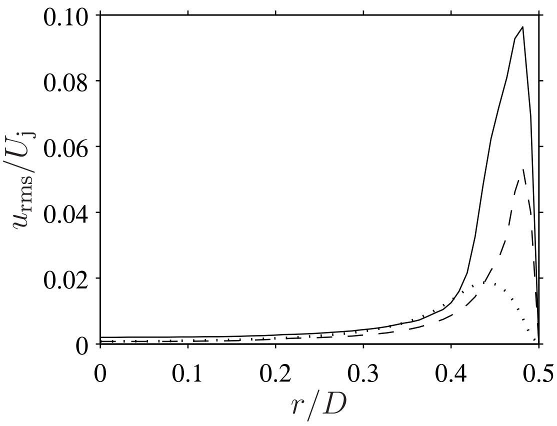


FIG. 5.3: Profils des niveaux de fluctuations de vitesse en $x/D = -0.6$ dans le cas turbulent : ——— $u_{x_{\mathrm{rms}}}$; – – – – $u_{\theta_{\mathrm{rms}}}$; ······· $u_{r_{\mathrm{rms}}}$.

loin de la paroi.

Il est important de rappeler que notre objectif n'est pas de calculer parfaitement la couche limite dans la tuyère. On souhaite reproduire le comportement d'une couche limite turbulente en sortie de buse, sans générer de bruit parasite et pour un coût numérique acceptable, sachant que le développement du jet est aussi à calculer. Le bon accord qualitatif de nos résultats avec ceux de la littérature suggère que la physique de la couche limite est bien retranscrite, malgré la sous-discrétisation de l'écoulement au voisinage de la paroi. Les perturbations introduites en entrée de buse sont amplifiées et réorganisées par l'écoulement, et présentent une forme physique en sortie de buse, sans biais apparemment lié au choix arbitraire de leur forme initiale. Un niveau élevé de turbulence est aussi obtenu en sortie de buse, sans recourir à un traitement non physique dans le jet lui-même ou au voisinage de la sortie de la tuyère.

5.3 Résultats aérodynamiques

On s'intéresse maintenant aux champs aérodynamiques des deux jets calculés. Les résultats obtenus seront comparés à des données expérimentales de la littérature. Nous utiliserons également des données issues d'une campagne de mesures effectuée avec Fleury sur un jet compensé en température à nombre de Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.9$ et à nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 7.8 \times 10^5$. Ces mesures ont été réalisées dans la soufflerie anéchoïque supersonique de l'Ecole Centrale de Lyon. Elle sont présentées plus en détail dans le chapitre 4.

La figure 5.4 représente des champs instantanés de vorticité obtenus pour les jets laminaires et turbulent. Au delà de $x/D = 5$, on ne distingue pas de différence notable

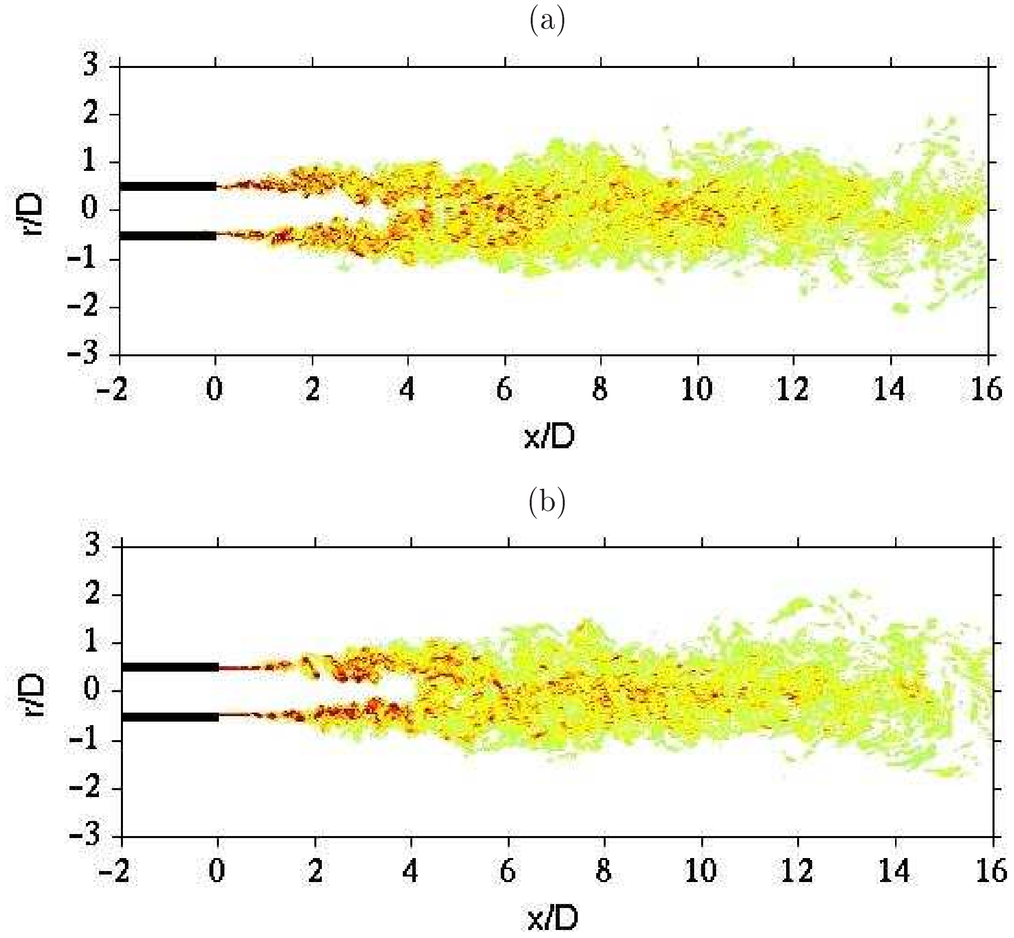


FIG. 5.4: Champ instantané de vorticité dans le plan (x, r). (a) Jet turbulent ; (b) jet laminaire. Les niveaux sont compris entre $\pm 2 \times 10^5$ s^{-1}.

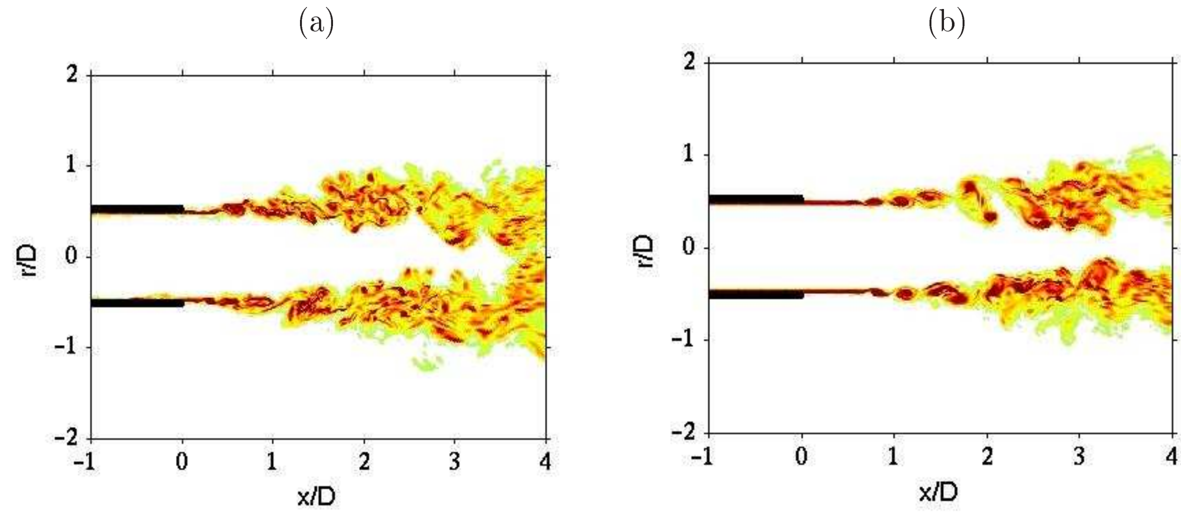


FIG. 5.5: Détails du champ instantané de vorticité dans la couche de cisaillement, dans le plan (x, r). (a) Jet turbulent ; (b) jet laminaire. Les niveaux sont compris entre $\pm 2 \times 10^5$ s^{-1}.

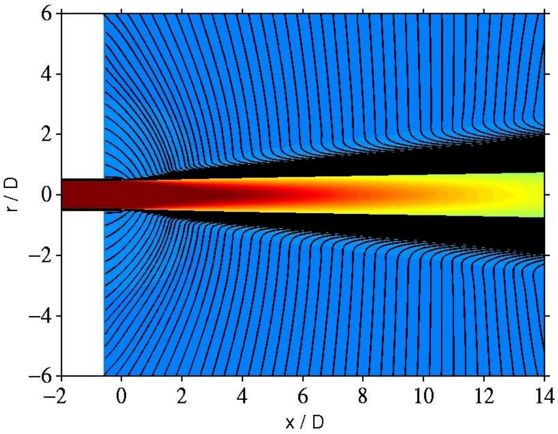
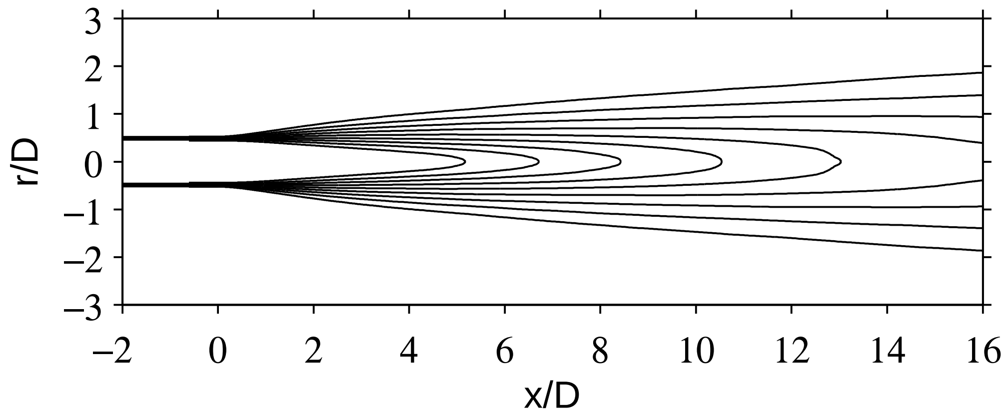


FIG. 5.6: Champ moyen de la vitesse axiale dans le cas du jet turbulent. Coupe dans le plan (x, r). Les niveaux sont compris entre 0 et $U_{\mathrm{j}} = 306$ m.s^{-1}. ——— Lignes de courant.

entre les deux jets. En revanche, les couches de cisaillement se développent différemment, comme le souligne la figure 5.5. Dans le cas du jet avec un taux de turbulence de 9 % (figure 5.5(a)), des petites structures turbulentes sont présentes dans toute la couche de cisaillement, dès la sortie de la tuyère. Dans le cas du jet avec un taux de turbulence de 1.6 % (figure 5.5(b)), la couche de cisaillement contient des grandes structures cohérentes axisymétriques. Les premières apparaissent vers $x/D = 0.8$ et semblent correspondre à des tourbillons annulaires. Ceux-ci sont convectés et s'apparient vers $x/D = 2$. On remarque sur la figure 5.5(b) qu'ils se décorrèlent alors rapidement dans la direction azimutale, et assurent ainsi la transition vers une turbulence 3-D. Les développements initiaux de la turbulence dans les deux jets sont donc bien différents, ce qui aura des conséquences sur les champs rayonnés, comme nous le verrons au paragraphe 5.4.

La figure 5.6 représente les lignes de courant du champ moyen de vitesse, dans le cas du jet turbulent. On observe l'entraînement du fluide environnant dans le jet. Les conditions aux limites assurent donc correctement l'entrée du fluide extérieur dans le domaine de calcul. Conformément aux résultats analytiques [6], les lignes de courant latérales arrivent aussi perpendiculairement à l'axe du jet. La zone éponge en aval en $x/D = 16.4$ n'a pas d'effet visible sur le champ moyen de vitesse dans le domaine physique, et la structure des lignes de courant au voisinage de la buse est correctement calculée. Les iso-niveaux des champs moyens de vitesse axiale u_{x0} des deux jets sont reportés sur la figure 5.7. Les champs moyens des deux jets sont pratiquement identiques. Dans les deux cas, le cône potentiel a une longueur de $x_{\mathrm{c}} = 4.5D$, en considérant le point de l'axe où la vitesse atteint $0.95U_{\mathrm{j}}$. Lau *et al.* [84, 85] obtiennent expérimentalement une valeur de $x_{\mathrm{c}} = 7D$ avec un jet à nombre de Mach identique et à nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 1.0 \times 10^6$. Les mesures présentées au chapitre suivant fournissent aussi une valeur de $x_{\mathrm{c}} = 7D$. Les

(a)



(b)

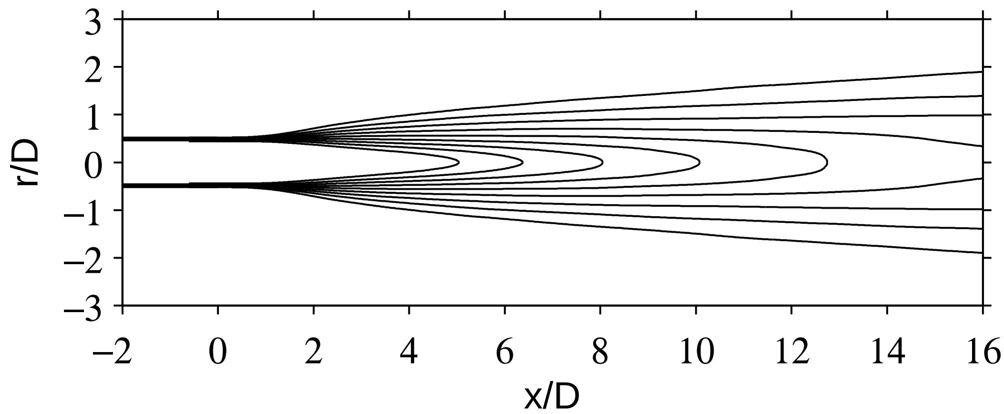


Fig. 5.7: Iso-niveaux du champ moyen de vitesse axiale u_{x_0}. Coupe dans le plan (x, r). (a) Jet turbulent ; (b) jet laminaire. Niveaux : de $0.1U_\mathrm{j}$ à $0.9U_\mathrm{j}$ avec un pas de $0.1U_\mathrm{j}$.

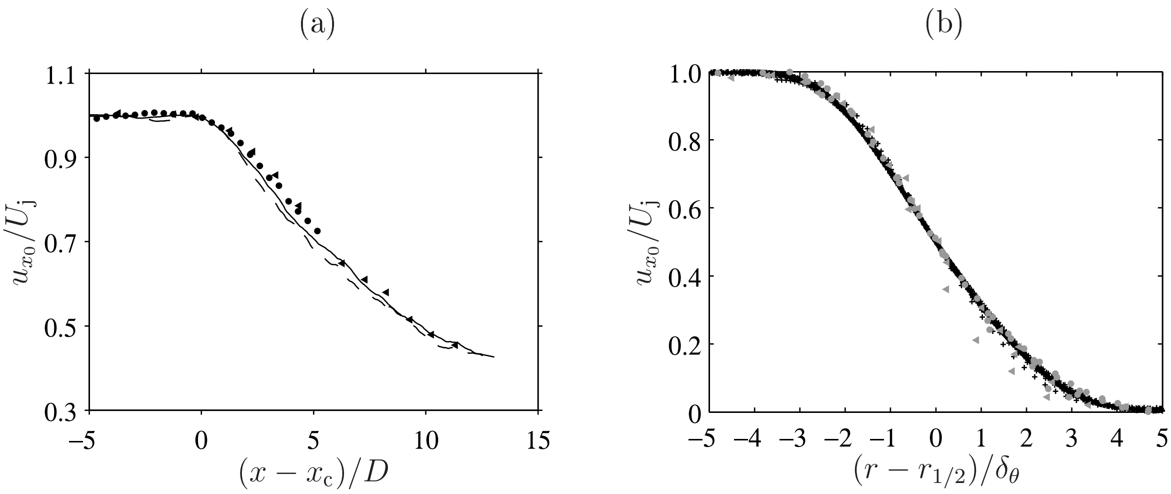


FIG. 5.8: Vitesse axiale moyenne u_{x_0}. (a) Évolution le long de l'axe du jet : ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire ; • Barré & Fleury ($\mathrm{Re}_D = 7.8 \times 10^5$) ; ◀ Lau *et al.* [84, 85] ($\mathrm{Re}_D = 1.0 \times 10^6$). (b) Profils radiaux entre $x/D = 0.6$ et $x/D = 4$ dans le cas du jet turbulent : + calcul ; • Barré & Fleury ; ◀ Lau *et al.* [84, 85]. La variable $r_{1/2}$ est la valeur de r au point où $u_{x_0} = 0.5U_\mathrm{j}$, et δ_θ est l'épaisseur de quantité de mouvement.

calculs sous-estiment donc la longueur du cône potentiel. Cet écart provient peut-être de l'épaisseur de la couche limite, qui est bien plus grande dans les simulations que dans les expériences. Ce dernier point implique que l'épaisseur initiale de quantité de mouvement δ_θ de la couche de cisaillement, définie par la relation :

$$\delta_\theta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u_{x_0}(x,r)}{U_\mathrm{j}} \left(1 - \frac{u_{x_0}(x,r)}{U_\mathrm{j}}\right) \mathrm{d}r$$

est aussi sensiblement plus grande que dans les expériences au voisinage de la buse. En sortie de buse, les simulations donnent en effet $\delta_\theta/D = 1.3 \times 10^{-2}$ pour le jet turbulent et $\delta_\theta/D = 1.2 \times 10^{-2}$ pour le jet laminaire, tandis que dans les jets de Zaman [157] à un nombre de Reynolds équivalent à celui calculé, δ_θ/D est expérimentalement inférieur à 10^{-3}. On peut remarquer par ailleurs que δ_θ présente une valeur similaire dans les deux configurations calculées.

L'évolution de la vitesse axiale moyenne u_{x_0} le long de l'axe est présentée sur la figure 5.8(a). Dans cette figure, la fin des différents cônes potentiels est ramenée à 0 pour s'affranchir des écart de x_c entre les calculs et les mesures. On note tout d'abord que les deux jets ont une décroissance de vitesse similaire sur l'axe, qui est en très bon accord avec les mesures de Lau *et al.* [84, 85] et avec celles issues de notre campagne de mesures. La figure 5.8(b) trace les profils moyens de vitesse axiale entre $x/D = 0.6$ et $x/D = 4$ dans le cas du jet turbulent. Ceux-ci sont auto-similaires et se comparent très bien avec les me-

(a)

(b)

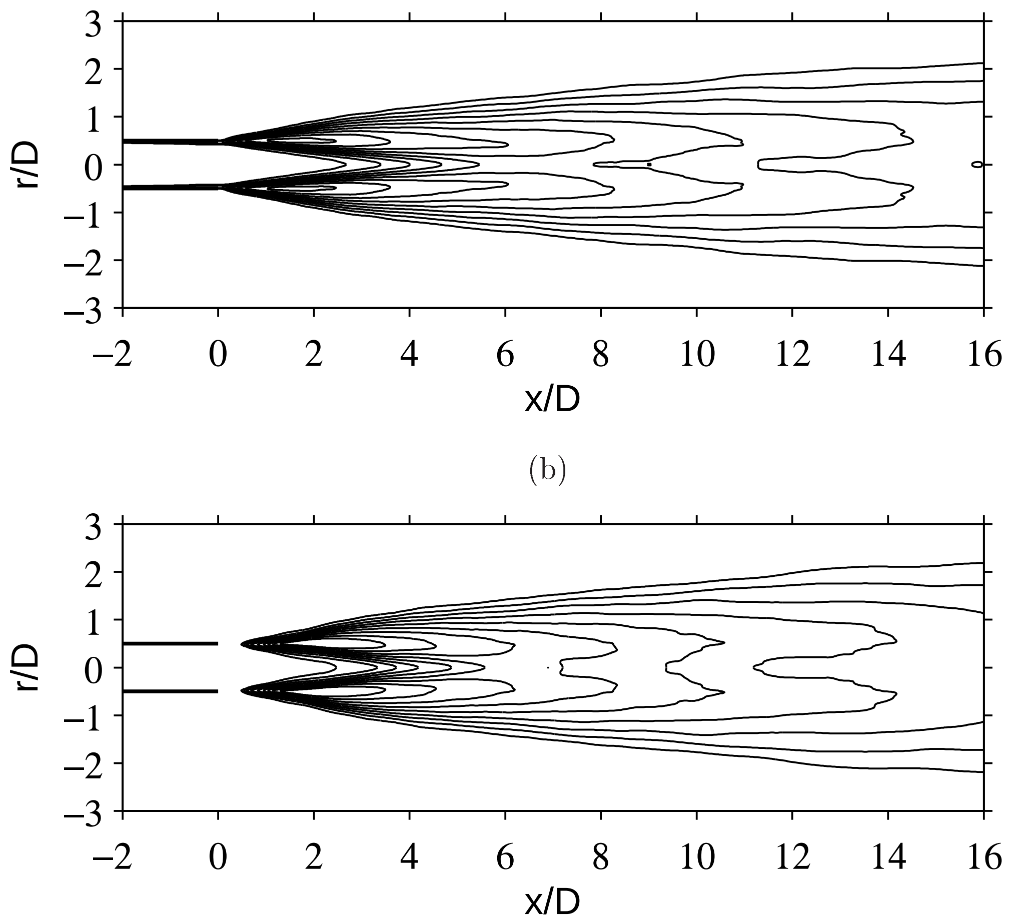


FIG. 5.9: Fluctuations de la vitesse axiale $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ dans le plan (x, r). (a) Jet turbulent ; (b) jet laminaire. Niveaux : de $0.04U_{\mathrm{j}}$ à $0.2U_{\mathrm{j}}$ avec un pas de $0.02U_{\mathrm{j}}$.

sures. Des résultats similaires sont obtenus pour le jet laminaire. Ces éléments montrent que le taux de turbulence en sortie de buse n'a que peu d'impact sur le champ moyen de vitesse axiale.

Les iso-niveaux des fluctuations de vitesse axiale $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ sont tracés sur la figure 5.9. Dans les deux jets, les maxima de fluctuations sont situés dans la couche de cisaillement. Ils sont cependant plus proches de la buse dans le cas turbulent. Les taux de fluctuations sur l'axe présentés sur la figure 5.10(a) sont comparables aux mesures de la littérature, et les maxima sont situés dans la gamme classique des résultats expérimentaux, entre 0.12 et 0.15. Le jet turbulent atteint un maximum sur l'axe de $u_{x_{\mathrm{rms}}} = 0.12U_{\mathrm{j}}$, au lieu de $u_{x_{\mathrm{rms}}} = 0.14U_{\mathrm{j}}$ dans le cas laminaire. Le jet laminaire est marqué par des niveaux de fluctuations plus élevés, aussi bien sur l'axe que dans la couche de cisaillement, comme l'illustrent les profils de la figure 5.10(b). On remarque que les fluctuations de vitesse

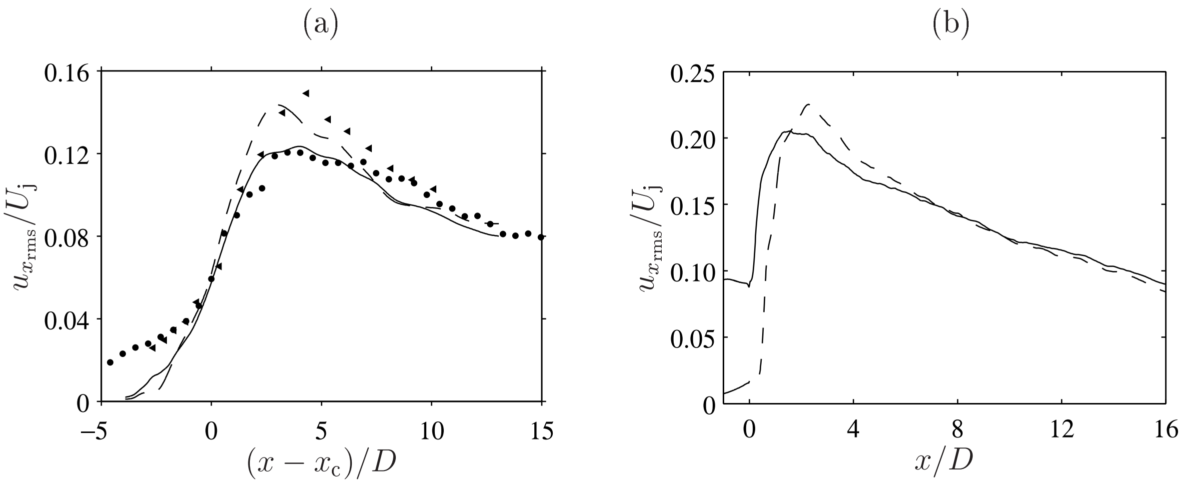


FIG. 5.10: Niveaux des fluctuations de vitesse axiale $u_{x_{\mathrm{rms}}}$: ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire. (a) Évolution sur l'axe du jet : • Arakeri *et al.* [5] ($\mathrm{Re}_D = 5.0 \times 10^5$) ; ◀ Lau *et al.* [85] ($\mathrm{Re}_D = 1.0 \times 10^6$). (b) Évolution dans la couche de cisaillement le long de la ligne $r/D = 0.48$.

dans la couche de cisaillement se développent plus tard lorsque le jet est initialement laminaire, mais que la transition vers la turbulence est plus rapide, avec un maximum à $u_{x_{\mathrm{rms}}} = 0.22U_j$ au lieu de $u_{x_{\mathrm{rms}}} = 0.20U_j$ lorsque le jet est turbulent. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de Husain & Hussain [73], détaillés au paragraphe 3.3 (figure 3.2). On note cependant que les maxima dans la couche de cisaillement sont sur-estimés et se positionnent plus en aval que dans les expériences de Husain & Hussain, qui obtenaient des taux de fluctuations compris entre 0.16 et 0.18. De plus, la figure 3.2 montre que la croissance de $u_{x_{\mathrm{rms}}}$ après la sortie de buse est expérimentalement beaucoup plus rapide que dans les deux calculs. Ces différences sont peut-être dues à l'épaisseur de quantité de mouvement qui est nettement plus grande dans les simulations. Les contraintes de maillage ne permettent pas de discrétiser cette région assez finement pour reproduire la brusque hausse de $u_{x_{\mathrm{rms}}}$, ce qui explique aussi le décalage vers l'aval des maxima. À l'issue de ces résultats, on constate donc que le taux de turbulence en sortie de buse a un effet notable sur le développement du jet et sur les niveaux de fluctuations de vitesse. Toutefois, cet effet semble surtout sensible sur les premiers diamètres après la sortie de buse, et être moins important lorsqu'on s'éloigne du cône potentiel.

Pour mieux comprendre les différences de comportements entre les deux configurations, il est intéressant d'étudier la corrélation azimutale $\mathcal{R}_{xx}^{(\theta)}$ de la vitesse axiale u_x dans la

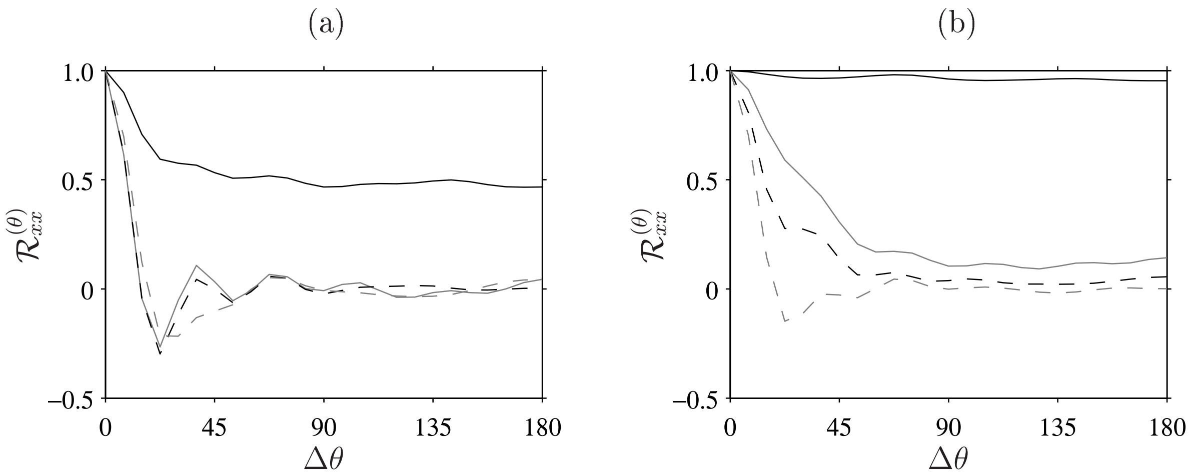


FIG. 5.11: Corrélations azimutales $\mathcal{R}_{xx}^{(\theta)}$ de la vitesse axiale en $r/D = 0.5$ pour différentes positions axiales : ——— $x/D = 0$; ——— $x/D = 0.5$; - - - - $x/D = 1$; - - - - $x/D = 2$. (a) Jet turbulent ; (b) jet laminaire.

couche de cisaillement. La fonction de corrélation azimutale est donnée par :

$$\mathcal{R}_{xx}^{(\theta)}(x, r, \Delta\theta) = \frac{\overline{u'_x(x, r, \theta) u'_x(x, r, \theta + \Delta\theta)}}{\left[\overline{u'^2_x}(x, r, \theta)\right]^{1/2} \left[\overline{u'^2_x}(x, r, \theta + \Delta\theta)\right]^{1/2}}$$

où $\Delta\theta$ est l'écartement angulaire azimutal. Les valeurs obtenues pour les jets turbulent et laminaire sont reportées respectivement sur les figures 5.11(a) et 5.11(b). Dans le cas turbulent, la corrélation en sortie de buse chute rapidement avec $\Delta\theta$ dans le cas turbulent, mais elle se stabilise après $\Delta\theta = 20°$ à une valeur élevée de 0.5. En s'éloignant de la tuyère, le jet se décorrèle très rapidement, et au delà de $x/D = 0.5$ la corrélation azimutale devient négligeable pour un écartement $\Delta\theta$ supérieur à 20°. Il n'y a ensuite plus d'évolution notable de la courbe de corrélation lorsque x augmente. Dans le jet laminaire, le comportement de la couche de cisaillement est sensiblement différent. En sortie de buse, la vitesse axiale est presque parfaitement corrélée pour $0 \leq \Delta\theta \leq 180°$, avec $\mathcal{R}_{xx}^{(\theta)} \approx 1$. On note donc que l'augmentation du taux de turbulence en sortie de buse a pour effet de décorréler azimutalement les fluctuations de vitesse. Cette différence s'observe également lorsqu'on s'éloigne de la tuyère. Dans le cas laminaire, en $x/D = 0.5$ par exemple, la corrélation décroît lentement puis reste constante à un niveau de 0.15 au delà de $\Delta\theta = 60°$. Pour $x/D < 2$, la vitesse axiale reste fortement corrélée sur une large gamme de $\Delta\theta$. En revanche, à partir de $x/D = 2$, la corrélation diminue sensiblement pour prendre des niveaux similaires à ceux obtenus dans le cas turbulent, avec une corrélation négligeable au delà de $\Delta\theta = 20°$. On peut remarquer que ce changement se produit au niveau des

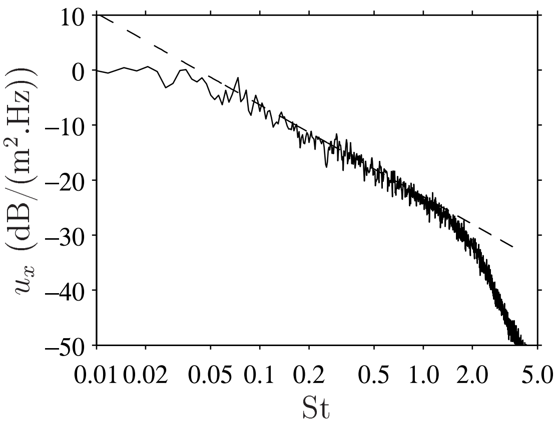


FIG. 5.12: Spectre de la vitesse axiale u_x en $r/D = 0.5$ et $x/D = 15$ dans le cas du jet turbulent : ——— spectre ; − − − − loi de puissance en $-5/3$.

appariements de tourbillons observés à la figure 5.4(b). Il semble donc que ce soit ces appariements qui provoquent la transition turbulente 3-D de la couche de cisaillement et qui réduisent les niveaux de la corrélation azimutale.

La figure 5.12 représente le spectre de la vitesse axiale au point $r/D = 0.5$ et $x/D = 15$ dans le cas du jet turbulent. Le spectre est en très bon accord avec la loi de puissance théorique en $-5/3$, qui est observée sur deux décades. De plus, il n'y a pas d'accumulation d'énergie aux hautes fréquences, ce qui atteste du bon comportement de la modélisation des échelles de sous-maille (voir le paragraphe 3.1.3). Notons qu'on obtient un résultat similaire dans le cas laminaire.

Ce paragraphe montre que les résultats des simulations sont en bon accord avec les données de la littérature et avec les mesures qui ont été réalisées à l'Ecole Centrale de Lyon. Le taux de turbulence en sortie de buse a un impact notable sur la structure de la couche de cisaillement et sur les fluctuations de vitesse dans le jet. En particulier, il a une forte influence sur la corrélation azimutale de la vitesse dans la couche de cisaillement. Par contre, les effets de ce paramètre s'atténuent lorsqu'on s'éloigne du cône potentiel.

5.4 Résultats acoustiques

On étudie maintenant le comportement acoustique des deux jets et les effets du taux de turbulence en sortie de buse sur le bruit rayonné. Les calculs seront comparés aux mesures que nous avons réalisées dans la soufflerie anéchoïque supersonique de l'Ecole Centrale de Lyon. On rappelle que ce jet est à nombre de Mach $M_{\mathrm{j}} = 0.9$ et à nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_D = 7.8 \times 10^5$, et qu'il est turbulent dès la sortie de buse (voir le chapitre 4).

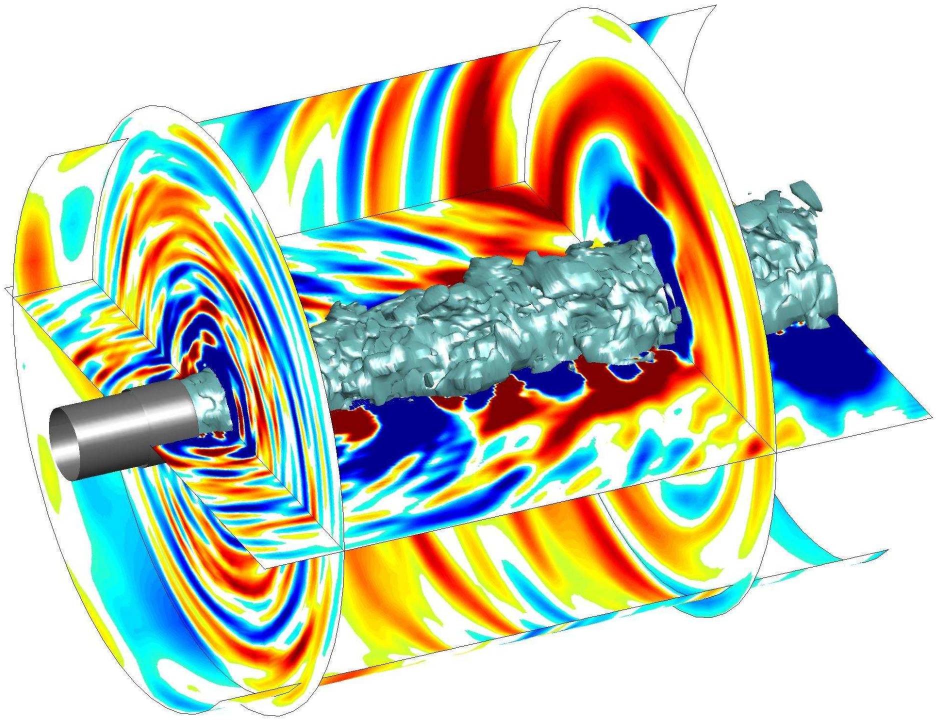


FIG. 5.13: Jet turbulent : iso-niveau de vitesse axiale $u_x = 0.25U_\mathrm{j}$ au centre et coupes du champ de pression à l'extérieur du jet (niveaux compris entre $P_\infty \pm 100$ Pa).

La figure 5.13 représente le jet turbulent et son champ acoustique. On observe bien les ondes acoustiques rayonnées par le jet. Un bruit hautes fréquences est généré sur les côtés du jet, tandis que le rayonnement émis vers l'aval contient plus de basses fréquences. Ces observations, en bon accord avec les résultats de la littérature (voir par exemple Lush [94], Tam [130], Tanna [141], Zaman [158] et Viswanathan [148]), sont également illustrées par la figure 5.14. Le jet laminaire génère des niveaux de bruit plus élevés que le jet turbulent. En particulier, on remarque dans le cas laminaire l'émission de fronts d'ondes supplémentaires qui semblent être émis dans la couche de cisaillement, au voisinage du lieu d'appariement des tourbillons, vers $x/D \approx 2-3$. Cette différence de comportement acoustique entre les deux jets peut-être reliée aux corrélations azimutales de la vitesse axiale en sortie de buse (voir la figure 5.11). En effet, nous avons vu que les fluctuations de vitesse dans la couche de cisaillement sont notablement plus corrélées azimutalement lorsque le jet est laminaire. On peut donc s'attendre à ce que la couche de cisaillement rayonne de manière plus efficace dans ce cas. Notons également que la buse et la méthode de génération de la turbulence initiale ne créent pas d'ondes acoustiques parasites d'amplitude significative. Enfin, il n'y a pas de réflexions visibles au niveau des conditions aux limites.

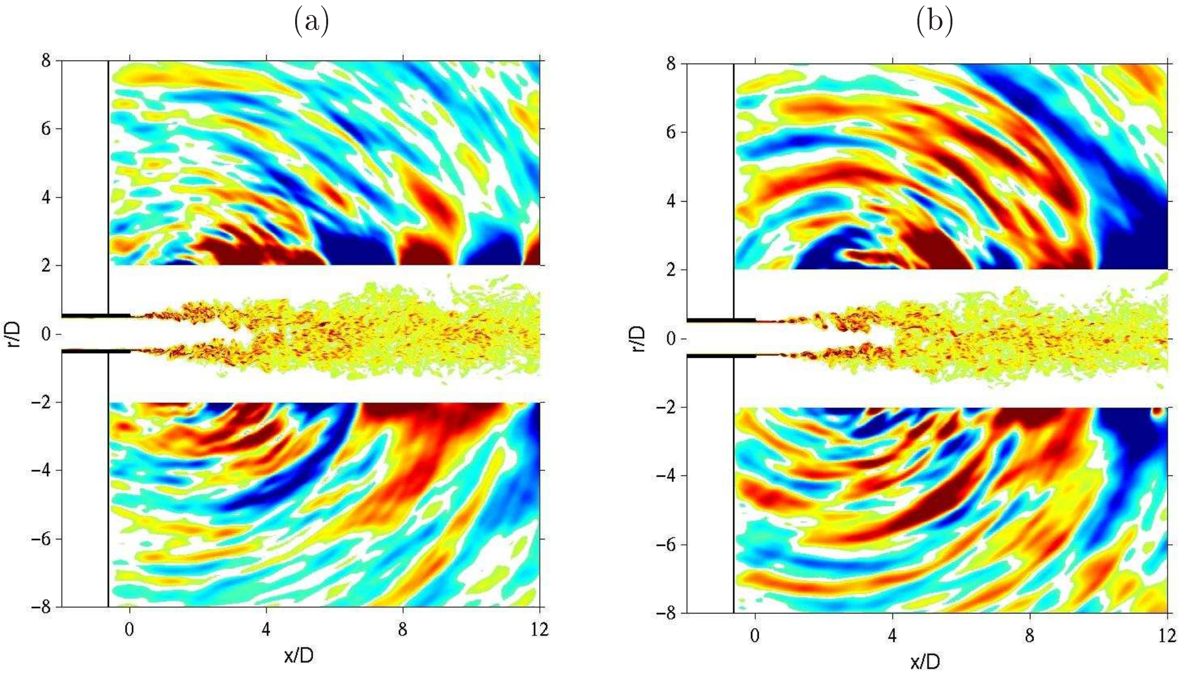


FIG. 5.14: Champ de vorticité au centre et champ de pression à l'extérieur : (a) jet turbulent ; (b) jet laminaire. Niveaux de vorticité compris entre $\pm 2 \times 10^5$ s^{-1} ; niveaux de pression compris entre $P_\infty \pm 100$ Pa.

Les niveaux des fluctuations de pression obtenus le long de la ligne $r/D = 7.5$ sont présentés sur la figure 5.15. Les résultats du jet turbulent sont en très bon accord avec les mesures, avec des écarts inférieurs à 2 dB dans la direction perpendiculaire au jet et inférieurs à 1 dB dans la direction aval. On remarque à nouveau que le jet laminaire génère des niveaux plus élevés dans toutes les directions, avec une surestimation du bruit de l'ordre de 5 dB, comme pour les simulations LES n'incluant pas la buse dans le domaine de calcul [14]. Ces observations sont en accord avec les mesures de Zaman [156] qui suggère en effet que le bruit additionnel du jet laminaire est produit par des appariements de tourbillons dans la couche de cisaillement. Cela rejoint aussi les résultats de Bridges & Hussain [27] et les travaux de Viswanathan [147]. Ce dernier a remarqué qu'un jet génère un bruit supplémentaire lorsque le nombre de Reynolds devient inférieur à une valeur critique de l'ordre de 4×10^5. Cette valeur se trouve dans la zone transitionnelle (voir le paragraphe 3.3), ce qui semble indiquer que le changement de comportement mentionné par Viswanathan est lié à l'état de la couche de cisaillement en sortie de buse, et qu'une couche initialement laminaire induit une hausse de bruit, à l'image de ce que l'on obtient avec nos simulations. Le comportement acoustique d'un jet est donc sensiblement dépendant du taux de turbulence en sortie de buse.

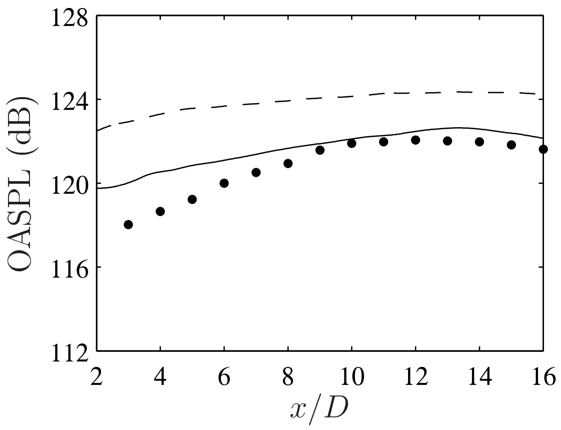


FIG. 5.15: Niveaux des fluctuations de pression en $r/D = 7.5$: ——— jet turbulent ; - - - - jet laminaire ; • mesures de Barré & Fleury.

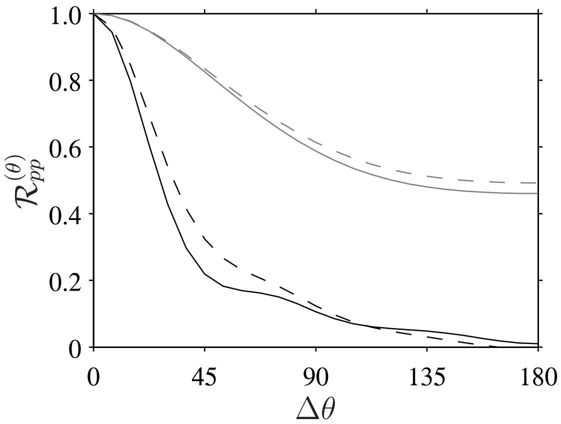


FIG. 5.16: Corrélation azimutale $\mathcal{R}_{pp}^{(\theta)}$ de la pression en $r/D = 7.5$ pour différentes positions axiales : ——— jet turbulent ; - - - - jet laminaire. En noir : $x/D = 0$; en gris : $x/D = 15$.

Ce point est confirmé par la corrélation azimutale $\mathcal{R}_{pp}^{(\theta)}$ des fluctuations de pression en $r/D = 7.5$, représentée sur la figure 5.16. Celle-ci est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{R}_{pp}^{(\theta)}(x, r, \Delta\theta) = \frac{\overline{p'(x, r, \theta)p'(x, r, \theta + \Delta\theta)}}{\left[\overline{p'^2}(x, r, \theta)\right]^{1/2} \left[\overline{p'^2}(x, r, \theta + \Delta\theta)\right]^{1/2}}$$

En $x/D = 0$, le bruit rayonné par le jet turbulent se décorrèle plus rapidement que celui émis par le jet laminaire. Ce résultat est analogue à celui observé avec les fluctuations de vitesse dans la couche de cisaillement (figure 5.11), ce qui conforte l'hypothèse que le bruit supplémentaire dans le cas laminaire provient des appariements de tourbillons dans la couche de cisaillement. Le même résultat est obtenu en $x/D = 15$, bien que la

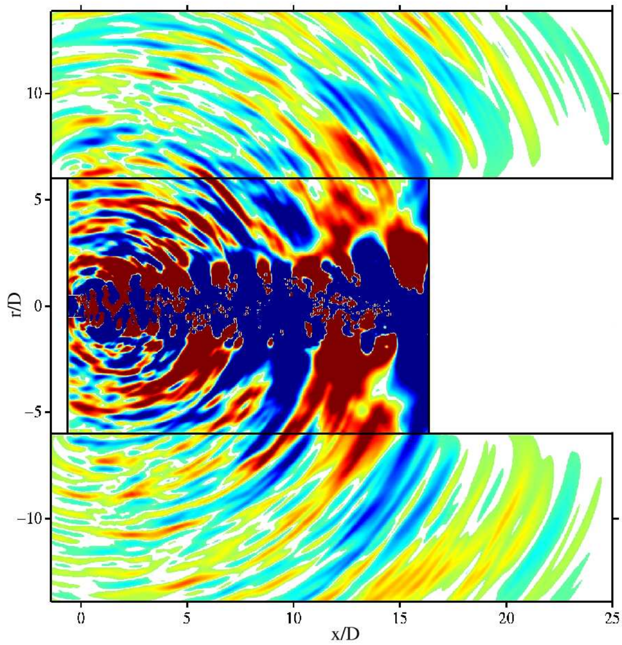


FIG. 5.17: Coupe dans le plan (x, r) du champ de pression dans le cas turbulent. Au centre : domaine de calcul utilisé par le solveur LES. À l'extérieur : domaine de calcul du code de propagation résolvant les équations d'Euler.

différence entre les deux configurations soit alors moins nette. Enfin, les évolutions de l'allure et du niveau de la corrélation avec la position axiale sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Maestrello [96].

La très grande majorité des études du bruit de jet de la littérature ont été effectuées en champ lointain. Pour pouvoir utiliser plus directement ces travaux, il est donc intéressant de calculer le bruit émis en champ lointain par les deux jets. Ceci ne peut pas être effectué avec le solveur, car il est numériquement trop coûteux de mailler le champ lointain pendant le calcul LES. Il est cependant possible d'utiliser une méthode d'extrapolation des ondes, consistant à propager en champ lointain le bruit calculé par LES. Plusieurs méthodes hybrides peuvent être employées. Gloerfelt a par exemple appliqué avec succès la méthode de Kirchhoff dans le cas d'une cavitée placée dans un écoulement [65]. On choisit de propager le rayonnement calculé précédemment à l'aide d'un second code de calcul résolvant les équations d'Euler. Dans un premier temps, on enregistre à chaque instant du calcul direct les valeurs des variables sur une surface cylindrique. Dans un second temps, ces données sont injectées dans le code de propagation. Celui-ci utilise les mêmes schémas numériques et les mêmes conditions aux limites que le solveur LES. La figure 5.17 montre la structure des deux domaines de calculs. Le maillage du code de propagation correspond à un tube annulaire qui enveloppe le maillage cylindrique du calcul direct. La

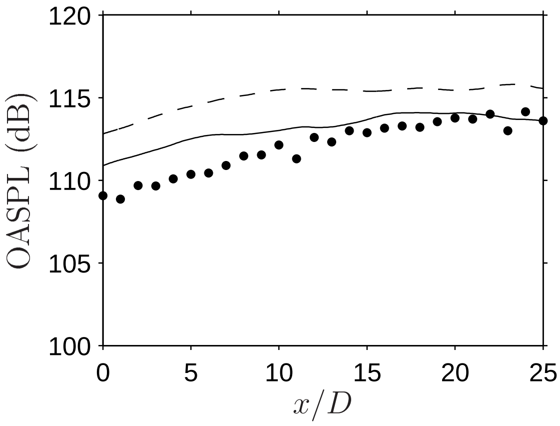


Fig. 5.18: Niveaux des fluctuations de pression en $r/D = 20$ obtenus en propageant en champ lointain : ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire ; • mesures de Barré & Fleury.

surface d'enregistrement des données correspond à l'interface entre les deux domaines. Sur la figure 5.17, elle est placée en $r/D = 6$. Elle doit être située à l'extérieur de l'écoulement mais être le plus près possible de l'axe, pour pouvoir propager les ondes acoustiques émises vers l'aval. Dans ce qui suit, la surface a été placée en $r/D = 4$, ce qui permet de calculer correctement la propagation jusqu'à un angle ϕ de 40° par rapport à l'axe. Le maillage du code de propagation est composé de $n_r \times n_\theta \times n_x = 529 \times 48 \times 821$ points, soit un total de 2.1×10^7 points, et il permet d'utiliser un pas de temps 12 fois plus grand que celui des calculs LES.

Les niveaux de fluctuations de pression acoustique obtenus le long de la ligne $r/D = 20$ sont représentés sur la figure 5.18. On retrouve des résultats similaires à ceux observés en $r/D = 7.5$, avec un bon accord entre les résultats du jet turbulent et les mesures, et une surestimation des niveaux avec le jet laminaire. Les spectres de bruit en $x/D = 0$ et en $x/D = 25$ sont également tracés sur la figure 5.19. En $x/D = 0$ (figure 5.19(a)), le spectre issu du jet turbulent est large bande, tout comme le spectre expérimental. Les niveaux sont plus élevés, mais les écarts restent modérés. Pour le jet laminaire, le spectre présente un pic plus marqué. Les niveaux de bruit sont également plus élevés que dans le cas turbulent, pour toutes les fréquences. Au delà de St$= 2.5$, les spectres calculés chutent brutalement, à cause de la coupure du maillage du code de propagation. En $x/D = 25$ (figure 5.19(b)), on observe un très bon accord entre le spectre du jet turbulent et les mesures, sauf aux basses fréquences (St< 0.25) où les écarts restent toutefois de l'ordre de 2 dB. Dans le cas laminaire, le jet génère des niveaux de bruit plus élevés de 2 à 3 dB que dans le cas turbulent, sur toute la gamme de fréquences.

Les directivités à une distance de $52D$ de la sortie de buse sont reportées sur la fi-

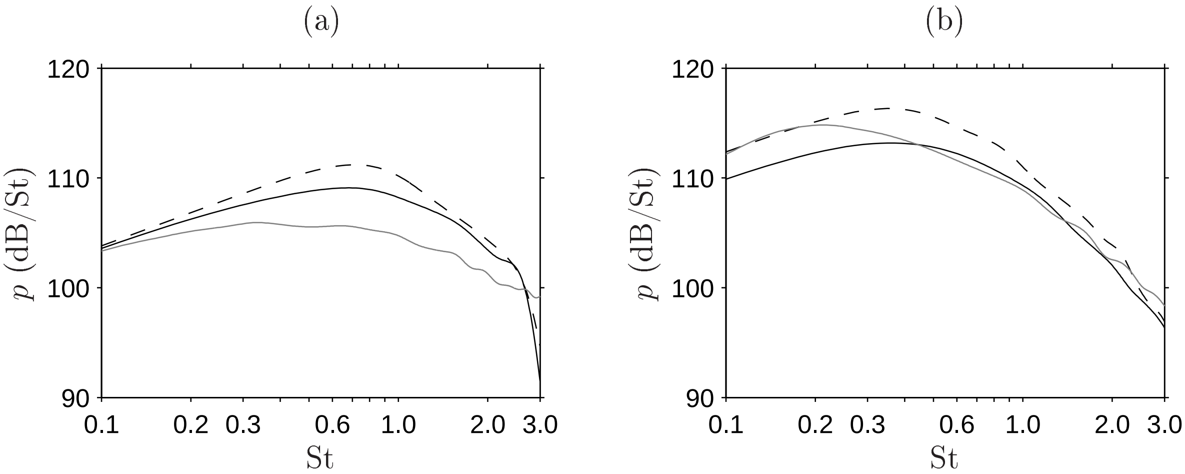


FIG. 5.19: Spectres de pression en $r/D = 20$ obtenus en propageant en champ lointain : ——— jet turbulent ; - - - - jet laminaire ; ——— mesures de Barré & Fleury. (a) $x/D = 0$; (b) $x/D = 25$.

gure 5.20. Pour les angles inférieurs à 35°, le calcul de propagation n'est plus valable, car la surface d'enregistrement des données est trop éloignée de l'axe pour prendre correctement en compte les ondes rayonnées dans ce secteur angulaire. Il en est de même pour les angles supérieurs à 95°. Les résultats du calcul turbulent sont en très bon accord avec nos mesures et avec les données de la littérature. Les écarts sont inférieurs à 2 dB vers 90° et descendent même en dessous de 1 dB lorsqu'on se rapproche de l'axe du jet. Comme dans les figures précédentes, le jet laminaire génère des niveaux sensiblement plus élevés que le jet turbulent, dans toutes les directions. La sur-estimation s'atténue cependant lorsqu'on se rapproche de l'axe du jet.

Les spectres obtenus à $52D$ pour des angles de $\phi = 90°$ et $\phi = 40°$ sont tracés sur la figure 5.21. En $\phi = 90°$ (figure 5.21(a)), on remarque que le spectre du jet turbulent est plus large bande qu'en $r/D = 20$ (voir la figure 5.19(a)). Le maximum du spectre est un peu plus haut en fréquence que celui issu des mesures, avec respectivement $\mathrm{St_{pic}} = 0.4$ au lieu de $\mathrm{St_{pic}} = 0.3$. La simulation sur-estime toujours un peu les niveaux, notamment en hautes fréquences, mais l'accord général reste très satisfaisant. Comme précédemment en $r/D = 20$, le jet laminaire émet sur les côtés du jet un bruit moins large bande que dans le cas turbulent. Le pic du spectre est plus marqué, et est décalé vers les hautes fréquences en $\mathrm{St_{pic}} = 0.7$. Cela semble indiquer que les appariements de tourbillons dans la couche de cisaillement génèrent un bruit plus fort, plus haut en fréquence et avec un pic en Strouhal plus marqué que la couche de cisaillement turbulente. À un angle de 40° (figure 5.21(b)), il y a un excellent accord entre le résultat du calcul turbulent et les mesures. Les écarts sont

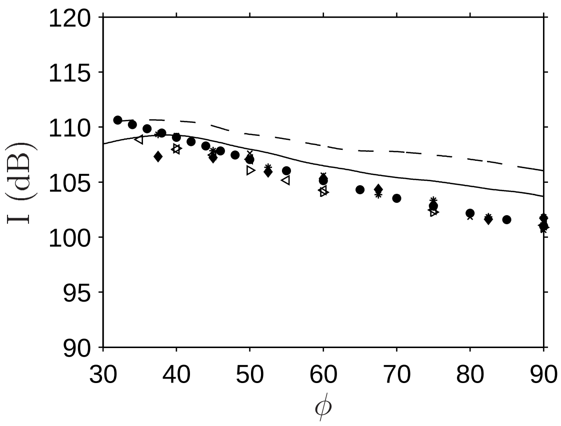


FIG. 5.20: Directivités à une distance de $52D$ de la sortie de buse. Calculs : ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire. Mesures : • Barré & Fleury ($\mathrm{Re}_D = 7.8 \times 10^5$) ; ♦ Tanna [141] ($\mathrm{Re}_D = 10^6$) ; ∗ Lush [94] ($\mathrm{Re}_D = 5.0 \times 10^5$) ; ▶ Mollo-Christensen *et al.* [109] ($\mathrm{Re}_D = 5.4 \times 10^5$) ; ◀ Seiner *et al.* [118, 119] ; × norme SAE.

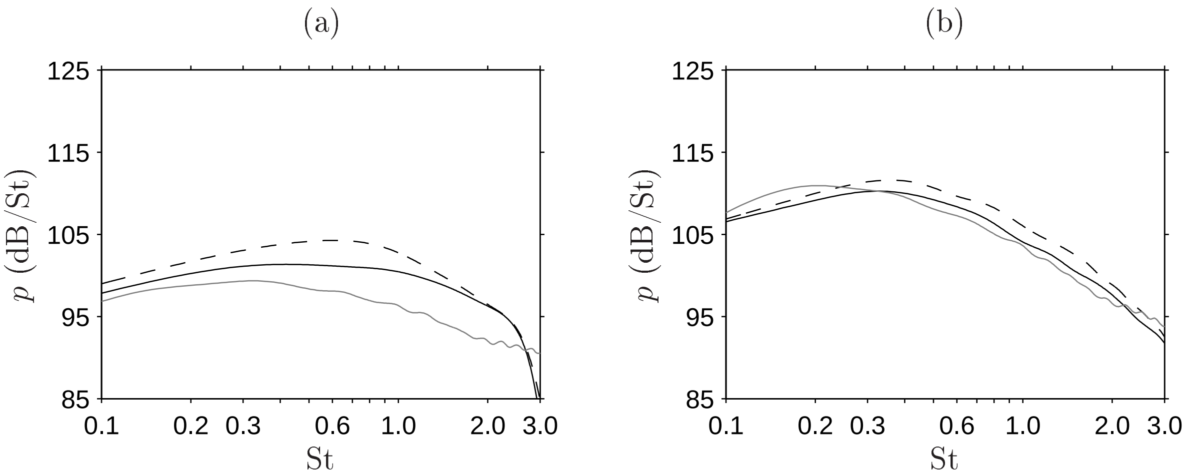


FIG. 5.21: Spectres de pression à une distance de $52D$ de la sortie de buse : ——— jet turbulent ; – – – – jet laminaire ; ——— mesures de Barré & Fleury. (a) $\phi = 90°$; (b) $\phi = 40°$.

inférieurs à 1 dB sur toute la gamme de fréquences. On note tout de même un décalage des pics, avec $\mathrm{St}_{\mathrm{pic}} = 0.33$ pour la simulation et $\mathrm{St}_{\mathrm{pic}} = 0.20$ avec les mesures. Dans le cas laminaire, les niveaux sont supérieurs de 1 dB au cas turbulent et le Strouhal du pic est identique. Cela confirme que la source de bruit supplémentaire dans le jet laminaire a plus d'effets sur les côtés du jet qu'au voisinage de l'axe, comme l'indiquait également la corrélation azimutale de la pression (figure 5.16).

5.5 Bilan sur les effets du taux de turbulence en sortie de buse

Ce chapitre montre que le taux de turbulence en sortie de buse a un effet important sur les comportements aérodynamique et acoustique des jets subsoniques. Les résultats obtenus pour le jet initialement turbulent sont en très bon accord avec les données expérimentales. En particulier, la directivité et les spectres de bruit présentent des écarts inférieurs à 2 dB par rapport aux mesures. En revanche, lorsque le jet est initialement laminaire, les niveaux de bruit générés sont supérieurs au cas turbulent, avec des écarts pouvant aller jusqu'à 5 dB. Le bruit supplémentaire semble provenir des appariements de tourbillons présents dans la couche de cisaillement lorsque le taux de turbulence en sortie de buse est suffisamment faible, comme suggéré par Zaman [156]. Les résultats en champ lointain montrent que cela implique une hausse du bruit dans toutes les directions, avec un effet plus marqué pour le rayonnement latéral. Cette source supplémentaire rayonne un bruit moins large bande que dans le cas turbulent, et émet plutôt dans les hautes fréquences.

Ainsi, la présence de la tuyère dans le domaine de calcul n'est pas suffisante pour assurer des résultats conformes aux mesures. Il est essentiel d'avoir des conditions turbulentes en sortie de buse pour prédire convenablement le bruit rayonné par un jet subsonique à nombre de Reynolds élevé. Le taux de turbulence en sortie de buse est donc un paramètre clef pour la simulation numérique direct du bruit de jet.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, le développement d'un solveur et son application à des écoulements 2-D et 3-D ont été présentés. L'obtention dans un même calcul des champs aérodynamiques et acoustiques a nécessité une précision de résolution très élevée, et donc le recours à des techniques numériques spécifiquement dédiées à l'aéroacoustique.

Dans une première partie, l'implémentation d'un code 2-D est détaillée. Un grand soin a été donné au choix des schémas numériques. Plusieurs schémas de discrétisation spatiale et temporelle sont comparés, de façon à sélectionner les moins dispersifs et les moins dissipatifs. Deux schémas de filtrage sélectif ont également été testés. Le solveur 2-D a été validé pour de nombreux cas tests, afin de mettre en évidence la performance des schémas numériques retenus. Le code de calcul a ensuite été passé en coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est en effet plus adapté à la simulation de jets ronds, qui est l'objectif de cette étude. Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques étant singulières sur l'axe, il a fallu traiter numériquement cette singularité tout en maintenant une précision de résolution élevée. Deux méthodes de traitement de l'axe, développées respectivement par Mohseni & Colonius [107] et par Constantinescu & Lele [34], ont alors été comparées. On a finalement choisi d'utiliser la méthode de Constantinescu & Lele, qui s'appuie sur des développements en séries des variables sur l'axe. Elle est en effet plus précise, permet d'utiliser un niveau de filtage sélectif plus faible et le pas de temps admissible est deux fois plus grand qu'avec la méthode de Mohseni & Colonius. Une technique de filtrage sélectif des variables sur l'axe a également été mise au point. Plusieurs calculs ont ensuite été réalisés, afin de valider le solveur en coordonnées cylindriques. Ce dernier s'est avéré aussi précis que le solveur en coordonnées cartésiennes.

Le comportement aérodynamique et acoustique de tourbillons elliptiques a ensuite été étudié à l'aide du code de calcul 2-D. Les évolutions de plusieurs tourbillons d'excentricités différentes ont été calculées. On a alors montré que deux phénomènes peuvent se produire : un processus d'axisymétrisation, qui tend à rendre le tourbillon circulaire, et la croissance d'instabilités, qui peut provoquer la cassure du tourbillon. La compétition entre ces deux phénomènes et leurs effets sur le champ acoustique ont été analysés. On a constaté que le rapport initial σ_0 du grand axe avec le petit axe du tourbillon détermine les poids relatifs de ces deux phénomènes. Lorsque σ_0 est proche de un, le tourbillon tourne en effet sans changement de forme notable et rayonne un bruit quadripolaire. Quand le rapport σ_0 est compris entre deux et six, l'axisymétrisation domine l'évolution aérodynamique et stoppe la croissance des instabilités. Le niveau de bruit diminue alors au cours du temps, tandis que la fréquence augmente. Au delà d'un rapport $\sigma_0 = 6$, le tourbillon se casse enfin rapidement en plusieurs tourbillons corotatifs, sous l'effet de la croissance des instabilités. Dans le cas limite $\sigma_0 = 6$, plusieurs passages successifs entre un état elliptique instable et une configuation instable avec deux tourbillons corotatifs sont aussi observés. Cela n'a cependant pas d'impact significatif sur le champ acoustique. Le champ acoustique lointain produit par les tourbillons a également été comparé avec succès à une solution analytique approchée obtenue par Howe [70]. A l'issue de ces calculs, le solveur apparaît comme un outil numérique fiable, permettant une étude précise de nombreuses configurations physiques.

Un solveur 3-D a été implémenté spécialement pour le calcul de jets ronds. Les ressources informatiques étant insuffisantes pour pouvoir mailler toutes les échelles tourbillonnaires présentes dans un jet à haut nombre de Reynolds, nous avons choisi d'utiliser la simulation numérique des grandes échelles (LES). Cela a nécessité le choix d'un modèle de sous-maille, afin de tenir compte des effets des petites échelles turbulentes. On a retenu une approche fondée sur un filtrage sélectif explicite. Les parois de la buse ont été introduites dans le domaine de calcul, et l'évolution de la couche limite dans la tuyère a été calculée. Une attention particulière a été accordée à la génération de la turbulence en sortie de buse. Des perturbations de très faible amplitude sont introduites dans la couche limite en amont de la tuyère. Elles sont amplifiées naturellement au cours de leur convection dans la buse, afin que la structure des fluctuations en sortie de tuyère soit déterminée par la physique de la couche limite. Cette méthode permet d'obtenir des niveaux de fluctuations élevés en sortie de buse, sans générer de rayonnement parasite susceptible de perturber le champ acoustique du jet.

Des mesures effectuées dans la grande soufflerie anéchoïque de l'Ecole Centrale de Lyon ont ensuite été présentées. Des données aérodynamiques et acoustiques ont été recueillies pour plusieurs jets, à des nombres de Mach compris entre 0.6 et 1.6, correspondant à des Reynolds compris entre 5.3×10^5 et 2.0×10^6. Elles viennent compléter les mesures disponibles dans la littérature, et elles se sont avérées très utiles pour la validation des calculs, en particulier les mesures en champ proche. Ces dernières permettent en effet de confronter les résultats expérimentaux avec ceux issus des calculs directs sans nécessiter un recours à une analogie ou à un calcul de propagation en champ lointain.

Enfin, deux jets ronds subsoniques à nombre de Mach 0.9 et à nombre de Reynolds 5×10^5 ont été simulés. Le premier présente une couche de cisaillement turbulente, avec un taux de fluctuations en sortie de buse de 9.0 %. Le second présente une couche de cisaillement initialement laminaire, avec un taux de fluctuations en sortie de buse de 1.6 %. Les résultats obtenus dans la couche limite sont en bon accord qualitatif avec les résultats de la littérature. On observe toutefois quelques décalages par rapports à ceux-ci, du fait de la sous-discrétisation de la couche limite. Au niveau des jets, les champs moyens et les niveaux de fluctuations sont en bon accord avec les mesures. On remarque que le taux de turbulence en sortie de buse a un effet notable sur l'évolution de la turbulence dans la couche de cisaillement. De grandes structures cohérentes sont par exemple présentes dans celle du jet laminaire, et des appariements de tourbillons s'y produisent. La couche de cisaillement a aussi un développement plus tardif dans le cas laminaire, mais présente une transition turbulente plus forte. La turbulence proche de la buse du jet est également plus corrélée dans la direction azimutale lorsque le jet est laminaire. Le taux de turbulence initial a aussi un impact important sur le bruit rayonné. Le champ acoustique du jet turbulent est en très bon accord avec les résultats expérimentaux à haut nombre de Reynolds. En particulier, la directivité et les spectres de pression ont des écarts inférieurs à 2 dB par rapport aux mesures. En revanche, le jet laminaire génère un rayonnement acoustique plus fort, ce qui conduit à une surestimation des niveaux de bruit pouvant aller jusqu'à 5 dB. Cette hausse est plus marquée sur les côtés du jet et semble provenir des appariements observés dans la couche de cisaillement. Le taux de turbulence est donc un paramètre clef pour le calcul direct du bruit des jets à haut nombre de Reynolds ; il est donc essentiel d'avoir des conditions de sortie de buse réalistes pour prédire convenablement le champ acoustique rayonné.

Perspectives

À l'issue de ces travaux, on dispose d'un solveur 3-D permettant le calcul direct du bruit des jets subsoniques à haut nombre de Reynolds, et fournissant des résultats en très bon accord avec les mesures. Il serait maintenant intéressant de poursuivre les simulations que nous avons présentées, en étudiant par exemple l'influence de l'épaisseur de la couche limite en sortie de buse. Plusieurs études [21, 75, 80] montrent en effet que ce paramètre peut avoir une influence sur le développement du jet. Plusieurs simulations de jets avec des épaisseurs de couche limite différentes aideraient notamment à mieux cerner l'impact de l'écart entre les valeur des épaisseurs de cisaillement dans les calculs et dans les expériences.

Le solveur développé permet également de simuler des jets chauffés. Le calcul du bruit rayonné par des jets à différentes températures pourra alors servir à analyser les effets des fluctuations d'entropie sur les sources de bruit. Ceux-ci sont particulièrement mal connus et leur rôle dans la génération de bruit fait encore l'objet de discussions.

Il serait ensuite intéressant de poursuivre les développements numériques que nous avons effectués. Le principal défaut de l'utilisation des coordonnées cylindriques est la nécessité de prendre un pas de temps bien plus petit qu'en cartésien. Cette contrainte pourrait être relaxée par l'utilisation d'une méthode spectrale dans la direction azimutale. Les temps de simulation se trouveraient alors notablement réduits.

Par ailleurs, il est probable que les futures méthodes de réduction du bruit de jet mettent en jeu la tuyère de façon privilégiée, car c'est le seul endroit physique dont on dispose pour influer directement sur le jet. Les travaux présentés dans ce manuscrit montrent que les jets et leurs champs acoustiques sont sensibles aux conditions de sortie de buse, ce qui laisse penser qu'une modification bien choisie de la tuyère peut permettre de réduire le bruit rayonné. Les études récentes sur l'influence de modifications géométriques de la tuyère, comme l'ajout de chevrons ou d'un biseau en sortie de buse [149, 150, 159, 160], vont d'ailleurs dans ce sens. Il sera alors souhaitable de faire évoluer le solveur, afin qu'il puisse prendre en compte des géométries de tuyères plus réalistes. Cela peut passer par l'emploi des coordonnées curvilignes, venant déformer un maillage initial cylindrique. Dans cette optique, les développements numériques menés dans notre équipe par Marsden [97] sont particulièrement intéressants.

Le développement d'une version du solveur simulant des jets coaxiaux est également une perspective intéressante. Des jets double flux à coeur chauffé sont en effet couramment rencontrés en aéronautique. Ainsi, des calculs directs de bruit dans de telles configurations permettraient de mieux comprendre les mécanismes mis en jeu, et de guider la recherche de moyens de réduction de bruit.

Annexe A

Calculs 2-D en coordonnées cartésiennes

Cette annexe présente des calculs 2-D qui ont été effectués afin de valider le solveur en coordonnées cartésiennes. Les objectifs sont d'une part de mettre en évidence le gain apporté par les nouveaux schémas numériques, plus coûteux en temps de calcul car utilisant plus de points, et d'autre part de s'assurer que les flux thermiques incluant la loi de Sutherland sont correctement pris en compte.

A.1 Impulsion de pression acoustique

Le premier cas test réalisé consiste à calculer la propagation d'un pulse de pression en l'absence d'écoulement. Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un domaine de calcul contenant $n_{x_1} \times n_{x_2} = 281 \times 281$ points. Le maillage est régulier, avec un pas $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ m. Le pas de temps est choisi de façon à avoir CFL$= c_0 \Delta t / \Delta x_1 = 2/3$, où c_0 est la vitesse du son dans le milieu au repos. Cette condition permet d'assurer la stabilité du calcul.

À $t = 0$ un pulse gaussien de pression est introduit au centre du domaine :

$$p(x_1, x_2, t = 0) = p_0 + \epsilon e^{-\alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$$

où $\epsilon = 10^3$ Pa est l'amplitude initiale du pulse, $p_0 = 10^5$ est la pression moyenne et $\alpha = \ln 2 / b^2$. Le terme b représente la demi-largeur du pulse et vaut $3\Delta x_1$, de façon à avoir

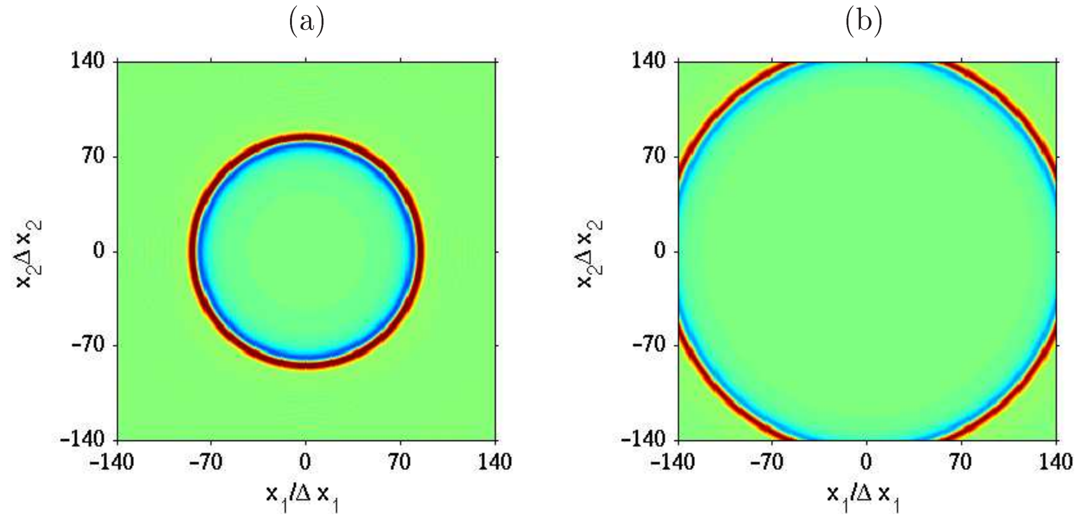


FIG. A.1: Cas test d'un pulse de pression gaussien : champ de pression à deux instants différents. (a) $t/\Delta t = 125$; (b) $t/\Delta t = 225$.

une bonne discrétisation du pulse. Les autres variables sont initialisées à :

$$\rho(x_1, x_2, t=0) = \rho_0 = p_0/rT_\infty$$
$$u_1(x_1, x_2, t=0) = 0$$
$$u_2(x_1, x_2, t=0) = 0$$

Le champ de pression obtenu avec le solveur est représenté sur la figure A.1 à deux instants différents. On observe la propagation du pulse et sa sortie du domaine de calcul. Aucune réflexion n'est visible ce qui atteste de la qualité des conditions aux limites utilisées. Une analyse plus fine peut être effectuée en étudiant l'évolution de l'énergie contenue dans le domaine de calcul. Celle-ci est proportionnelle au taux moyen des fluctuations de pression R_p, aussi appelé résidu :

$$R_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{1}{n_{x_1} \times n_{x_2}} \sum_{i,j} (p_{i,j} - p_0)^2}$$

où $p_{i,j}$ est la pression au point (i, j). Ce cas test a aussi été réalisé avec les anciens schémas numériques. La figure A.2 représente l'évolution de R_p obtenue avec les anciens et les nouveaux schémas. On observe dans un premier temps un palier jusqu'à $t/\Delta t \approx 200$. Il implique que l'énergie reste constante dans le domaine de calcul durant la propagation du pulse, et ainsi qu'il n'y a pas de dissipation notable due aux schémas ou au filtrage sélectif. Vers $t/\Delta t \approx 200$, le pulse atteint les conditions aux limites. Cela se traduit par une brusque diminution du résidu, l'énergie sortant du domaine de calcul. Aucune remontée

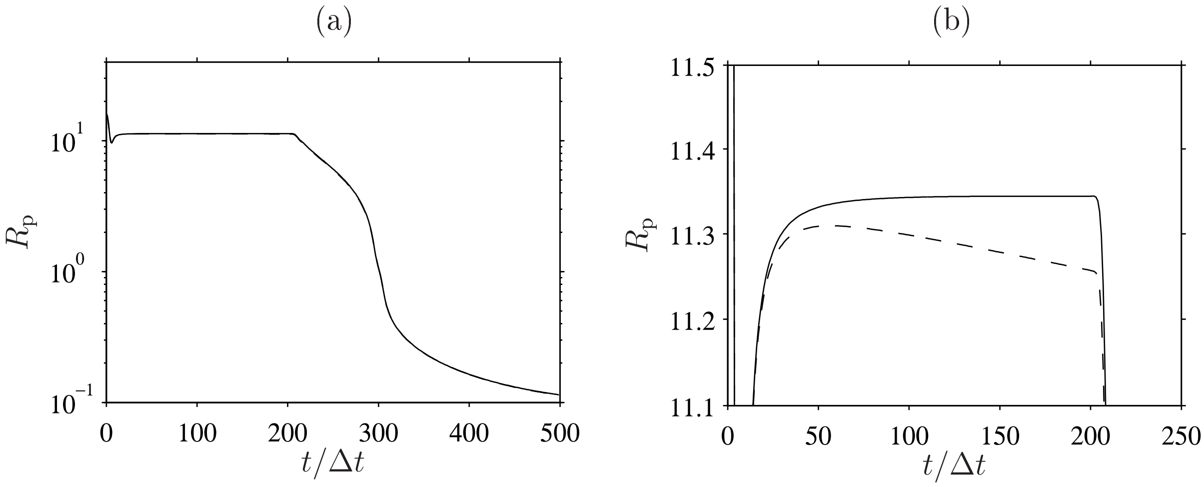


FIG. A.2: Cas test d'un pulse de pression gaussien : évolution du résidu de pression R_{p}. ——— nouveaux schémas ; – – – – anciens schémas. (a) vue globale ; (b) détail.

n'est visible ce qui confirme l'absence de réflexion. Bien que la dissipation soit toujours très faible, la figure A.2(b) montre que les anciens schémas sont plus dissipatifs que les nouveaux. En effet le résidu diminue lentement avec les anciens schémas, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise les nouveaux. Ceux-ci apportent donc un gain significatif de précision, en particulier le nouveau filtrage sélectif qui réduit notablement la dissipation numérique des échelles résolues.

A.2 Tourbillons corotatifs

On s'intéresse dans ce second cas test à deux tourbillons corotatifs dans un milieu au repos. Cette configuration a été étudiée analytiquement par Powell [113] et Kambe [78], puis numériquement par Mitchell *et al.* [103], Lee & Koo [86] et Bogey [14]. On souhaite comparer les résultats obtenus avec les anciens et les nouveaux schémas, et les confronter à ceux de la littérature.

Chaque tourbillon est construit sur le modèle de Scully [117], repris aussi par Lee & Koo [86], qui assure la continuité de la vitesse au centre du tourbillon. La vitesse tangentielle du tourbillon dans un repère centré sur celui-ci s'écrit :

$$V_\theta(r) = -\frac{\Gamma r}{2\pi\left(r_{\text{c}}^2 + r^2\right)}$$

où r est la distance depuis le centre du tourbillon, r_{c} est la distance où la vitesse tangentielle est maximale ($V_{\theta_{\max}} = \Gamma/4\pi r_{\text{c}}$) et Γ est la circulation du tourbillon. Les deux tourbillons sont initialement distants de $2r_0$. D'après les résultats de Powell [113], en

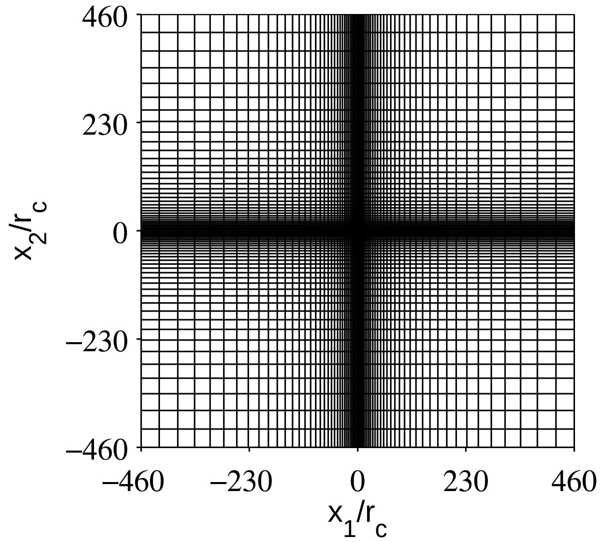


Fig. A.3: Maillage dans le cas test des tourbillons corotatifs. Pour des raisons de lisibilité, seule une ligne sur dix est représentée.

négligeant les effets visqueux, les deux tourbillons tournent selon un cercle de rayon r_0 centré sur le point médiant aux deux tourbillons, à la vitesse de rotation $\Omega = \Gamma/4\pi r_0^2$. Une révolution s'effectue ainsi en $T = 8\pi^2 r_0^2/\Gamma$. Powell a montré que cette configuration produit un rayonnement acoustique quadripolaire de période $T/2$.

Dans ce cas test on a pris $r_0 = 18\Delta x_1$ et $r_c = 4\Delta x_1$, afin d'avoir une bonne discrétisation des tourbillons, et $\Gamma = 2136 r_c$, ce qui donne un nombre de Mach associé à la vitesse tangentielle maximale de $M_{\theta_{\max}} = 0.5$ et un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_{r_c} = 9.1 \times 10^3$. Le maillage est symétrique suivant les deux directions et contient $n_{x_1} \times n_{x_2} = 681 \times 681$ points. Il est représenté sur la figure A.3. Les tourbillons sont placés au centre du domaine de calcul, où le pas de maillage vaut $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2 \times 10^{-4}$ m. En partant du centre de la grille, Δx_i reste constant sur les 30 premiers points, puis un étirement de 0.94 % est appliqué jusqu'aux bords du domaine de calcul. Cela permet d'atteindre le champ acoustique lointain tout en minimisant le nombre de points nécessaires. Le calcul est effectué avec CFL $= c_0\Delta t/\Delta x_1 = 0.8$ ce qui donne $T/\Delta t = 1273$ et assure ainsi une bonne discrétisation temporelle.

La figure A.4 montre l'évolution du champ de vorticité obtenu. On distingue trois étapes dans l'évolution des tourbillons. Dans un premier temps, les tourbillons tournent autour de leur point médian en accord avec la période de rotation prédite par Powell [113]. Au cours de cette rotation, des filaments de vorticité sont éjectés de chaque tourbillon, comme l'illustre la figure A.4(a). Les tourbillons se rapprochent alors peu à peu ce qui accélère leur rotation (voir la figure A.4(b)). Lorsqu'ils sont suffisamment proches

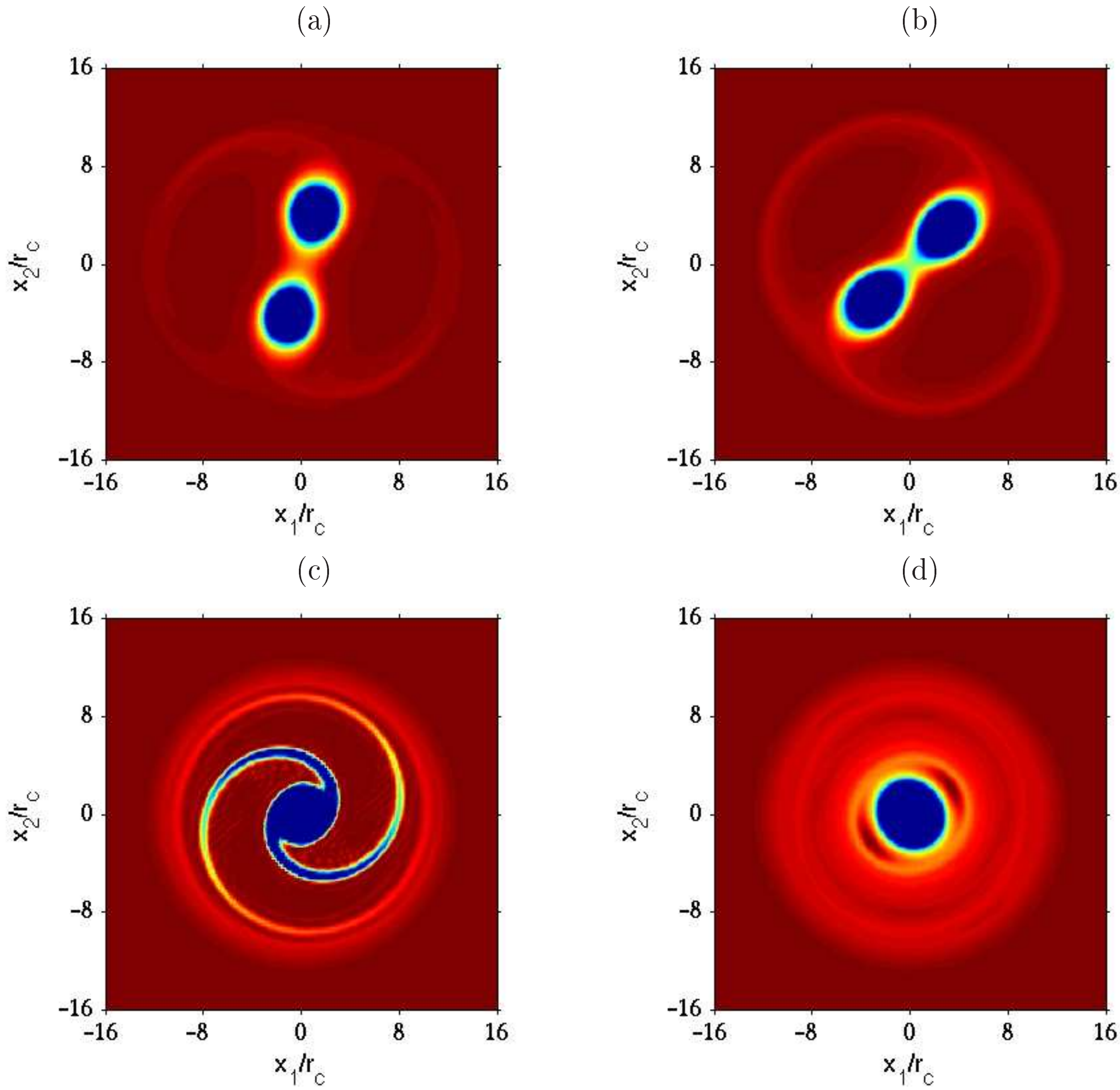


Fig. A.4: Cas test des tourbillons corotatifs : champs de vorticité à quatre instants différents. (a) $t/\Delta t = 8.5\times10^3$; (b) $t/\Delta t = 2.7\times10^4$; (c) $t/\Delta t = 3.2\times10^4$; (d) $t/\Delta t = 3.8\times10^4$.

la seconde étape commence : vers $t/\Delta t = 3.2 \times 10^4$, les deux tourbillons fusionnent. La figure A.4(c) montre que l'éjection de filaments s'intensifie lors de l'appariement. Cette étape s'achève avec la formation d'un tourbillon elliptique. On n'observe alors plus que la rotation du tourbillon (figure A.4(d)) qui tend à devenir circulaire. Ces observations sont en accord avec les résultats numériques de Melander *et al.* [100], qui précisent les conditions conduisant à un appariement des tourbillons.

Le rayonnement acoustique émis est reporté sur la figure A.5. Au centre du domaine, la pression est dominée par le champ de pression proche. En s'éloignant des tourbillons cette contribution diminue rapidement et laisse place au champ lointain acoustique. Lors de la première étape les tourbillons rayonnent comme un quadripole tournant [113]. Le champ de pression est constitué d'une structure en double spirale en rotation avec les tourbillons. La figure A.6 représente l'évolution temporelle de la pression en un point du champ lointain. On remarque que le niveau et la fréquence du bruit généré augmentent avec l'accélération de la rotation observée durant la première étape. L'appariement provoque une diminution brutale du niveau du bruit et une augmentation de la fréquence, comme l'illustrent les figures A.5(d) et A.6. Juste après la fusion, on observe la présence de bouffées sur le signal de pression. Elles sont probablement dues aux variations de l'excentricité du tourbillon elliptique se produisant juste après la fusion. L'excentricité cesse toutefois rapidement d'osciller et le niveau du bruit rayonné décroît alors progressivement, au fur et à mesure que le tourbillon tend à devenir circulaire. Notons que toutes ces observations sont en bon accord avec les résultats de Mitchell *et al.* [103].

La durée de la première étape est fortement liée aux effets visqueux. Plus ceux-ci sont importants, plus l'appariement a lieu rapidement. Ainsi, un code ayant une viscosité numérique élevée et un filtrage peu sélectif fournira une fusion anticipée. Ce cas test a aussi été réalisé avec les anciens schémas. Les valeurs de tous les paramètres, aussi bien numériques que physiques, sont identiques. En particulier, le niveau de filtrage sélectif est le même. On obtient avec les anciens schémas une évolution qualitativement similaire des tourbillons, pour le champ de vorticité comme pour le champ acoustique. En revanche, la fusion se produit à $t/\Delta t = 8.8 \times 10^3$, au lieu de $t/\Delta t = 3.2 \times 10^4$ avec les nouveaux schémas, c'est-à-dire 3.6 fois plus tôt. Cela montre clairement qu'une viscosité numérique non négligeable induit des biais significatifs sur les écoulements calculés. Les nouveaux schémas améliorent donc sensiblement les résultats, tant sur les aspects aérodynamiques qu'acoustiques. Le cas test des tourbillons corotatifs est ainsi particulièrement intéressant pour comparer la viscosité numérique de différentes techniques numériques, du fait de la grande sensibilité du temps de fusion vis-à-vis de ce paramètre.

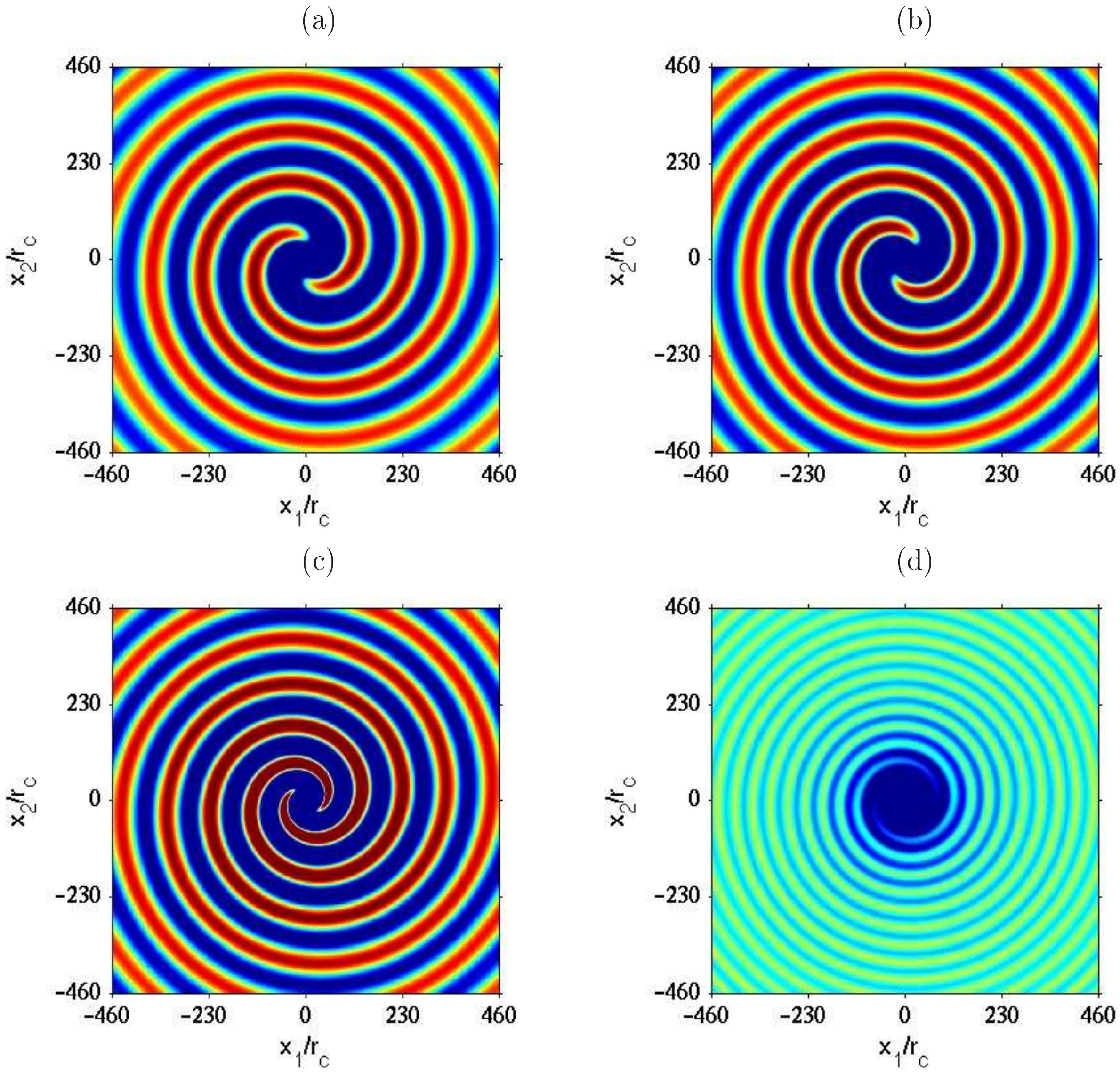


FIG. A.5: Cas test des tourbillons corotatifs : champs de pression à quatre instants différents. (a) $t/\Delta t = 8.5 \times 10^3$; (b) $t/\Delta t = 2.7 \times 10^4$; (c) $t/\Delta t = 3.2 \times 10^4$; (d) $t/\Delta t = 3.8 \times 10^4$.

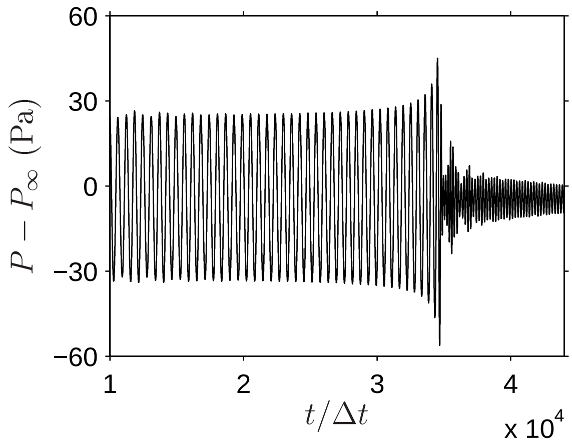


FIG. A.6: Cas test des tourbillons corotatifs : évolution temporelle de la pression au point $x_1/r_c = x_2/r_c = 405$ obtenue avec le présent solveur.

A.3 Source monopolaire dans un jet parallèle 2-D

Ce cas test consiste à étudier la propagation des ondes émises par une source acoustique placée dans un jet parallèle 2-D laminaire à différentes températures. Deux phénomènes peuvent affecter la propagation des ondes. Tout d'abord, la présence d'un écoulement et de gradients de vitesse provoquent la convection et la réfraction des ondes émises. Ensuite, les gradients de température modifient la vitesse du son ce qui crée des effets de réfraction d'origine thermique. L'objectif de ce cas test est alors de vérifier que les effets de réfraction sur la propagation du bruit sont bien pris en compte, en particulier la contribution due aux gradients de température.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un maillage de pas constant $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta = 10^{-3}$ m contenant $n_{x_1} \times n_{x_2} = 551 \times 551$ points. La température ambiante est fixée à $T_\infty = 288$ K. Le jet a un diamètre $D_\mathrm{j}/\Delta = 100$, une vitesse $U_\mathrm{j} = 200$ m.s^{-1} et une épaisseur de cisaillement $\delta_\theta/D_\mathrm{j} = 1/20$. Le Mach acoustique du jet est donc $M_a = U_\mathrm{j}/c_\infty = 0.59$. L'axe du jet se trouve en $x_2 = 0$. Le profil initial de vitesse est défini par :

$$u_1^\mathrm{i} = u_1(x_1, x_2, t = 0) = \frac{U_\mathrm{j}}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{D_\mathrm{j}}{8\delta_\theta}\left(\frac{D_\mathrm{j}}{2|x_2|} - \frac{2|x_2|}{D_\mathrm{j}}\right)\right]\right)$$

L'exposant i indique que l'on considère la valeur de la variable à $t = 0$. La source acoustique est placée en $x_{1\mathrm{s}} = x_{2\mathrm{s}} = 0$. C'est une source monopolaire de forme gaussienne émettant un bruit harmonique de fréquence $f = 34$ kHz, ce qui correspond à un nombre de Strouhal St$= fD_\mathrm{j}/U_\mathrm{j} = 17$ et à une longueur d'onde $\lambda/\Delta = 10$. Son amplitude est fixée à $P_\mathrm{s} = 100$ Pa et sa demi-largeur est de 2Δ. Elle est introduite en ajoutant l'expression

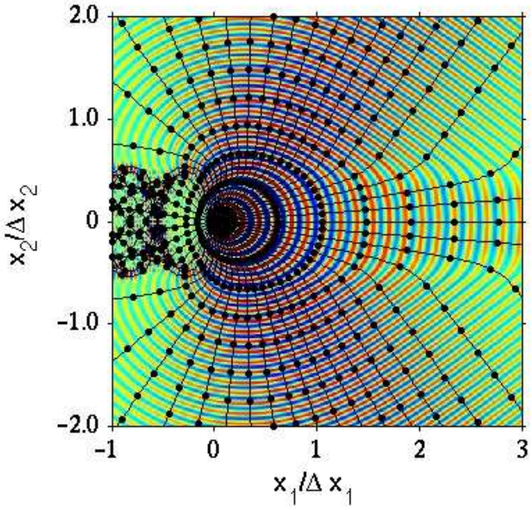


FIG. A.7: Champ de pression dans le cas test d'une source monopolaire dans un jet parallèle 2-D à $T_\mathrm{j} = T_\infty$. Comparaison avec un tracé de rayons : ——— rayons ; ● équiphases.

suivante dans l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial(\rho e_\mathrm{t})}{\partial t} = \cdots + \frac{P_\mathrm{s}}{\gamma - 1}\omega \sin(\omega t) \exp\left(-\frac{\ln 2}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)$$

où ω est la pulsation de la source. Trois températures de jet ont été testées : $T_\mathrm{j} = 210$ K, 288 K et 800 K. Le profil initial de température est déterminé par la relation de Crocco-Busemann :

$$T^\mathrm{i} = T(x_1, x_2, t = 0) = T_\mathrm{j}\left[\frac{T_\infty}{T_\mathrm{j}} - \frac{u_1^\mathrm{i}}{U_\mathrm{j}}\left(\frac{T_\infty}{T_\mathrm{j}} - 1\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{U_\mathrm{j}}{c_\mathrm{j}^2} \cdot \frac{u_1^\mathrm{i}}{U_\mathrm{j}}\left(1 - \frac{u_1^\mathrm{i}}{U_\mathrm{j}}\right)\right]$$

où $c_\mathrm{j} = \sqrt{\gamma r T_\mathrm{j}}$ est la vitesse du son dans le jet. Le pas de temps est fixé par $\Delta t = \Delta/\max(c_\infty, c_\mathrm{j})$.

Le premier calcul a été effectué pour $T_\mathrm{j} = T_\infty$. La figure A.7 représente le champ de pression obtenu. En aval de la source les fronts d'onde sont déviés hors de l'écoulement, créant ainsi un cône de silence dans l'axe du jet. En amont le rayonnement tend à rester dans le jet, les ondes ayant tendance à se diriger vers les zones où leur vitesse de propagation est la plus faible. Un tracé de rayons a été superposé au champ acoustique, afin de comparer la position des fronts d'ondes. La théorie des rayons s'applique ici car le bruit émis par la source a une longueur d'onde petite par rapport aux variations de vitesse et de température du milieu de propagation. Les équiphases obtenues par le tracé de rayons sont en très bon accord avec le calcul direct, ce qui montre que la réfraction due aux gradients de vitesse est correctement prise en compte.

Les cas de jets à $T_\mathrm{j} = 210$ K et $T_\mathrm{j} = 800$ K sont reportés sur la figure A.8. Lorsque

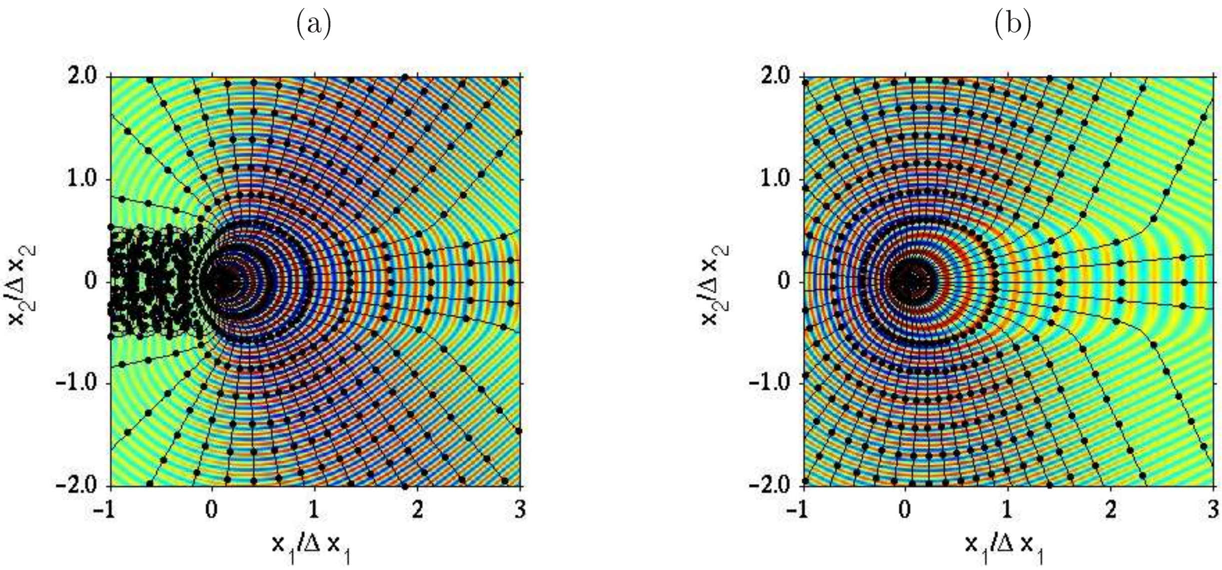


FIG. A.8: Champ de pression dans le cas test d'une source monopolaire dans un jet parallèle 2-D. (a) $T_{\mathrm{j}} = 210$ K ; (b) $T_{\mathrm{j}} = 800$ K. Comparaison avec un tracé de rayons : ——— rayons ; • équiphases.

le jet est froid, la réfraction en aval est moins importante tandis que celle en amont se renforce. Inversement, lorsque le jet est chauffé la zone de silence en aval s'étend alors que le jet laisse plus facilement sortir le rayonnement amont. Dans ces deux cas il y a un très bon accord entre les tracés de rayons et le calcul direct. Les effets de réfraction d'origine thermique sont donc bien décrits par le solveur.

A.4 Diffusion d'un pulse gaussien de température

On s'intéresse dans ce dernier exemple à la diffusion d'un pulse gaussien de température. L'objectif est de vérifier que les flux thermiques dus aux gradients de température sont correctement pris en compte par le solveur.

Le maillage est composé de $n_{x_1} \times n_{x_2} = 161 \times 161$ points, avec un pas constant $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta = 10^{-5}$ m. Le pas de temps choisi est $\Delta t = 0.8\Delta/c_\infty$, ce qui assure la stabilité du calcul. Le pulse est placé au centre du domaine de calcul, en $x_1 = x_2 = 0$. La répartition initiale de température est une gaussienne de demi-largeur b et d'amplitude T_{p} :

$$T^{\mathrm{i}} = T(x_1, x_2, t = 0) = T_\infty + (T_{\mathrm{p}} - T_\infty) \exp\left[\frac{\ln 2}{b^2}(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

Le pulse est placé dans un milieu au repos à température ambiante $T_\infty = 288$ K.

Une solution analytique de ce problème peut être obtenue si on fait l'hypothèse que la diffusivité thermique $D_{\mathrm{th}} = \lambda_{\mathrm{th}}/c_{\mathrm{p}}\rho$ est une constante, où λ_{th} est la conductivité thermique

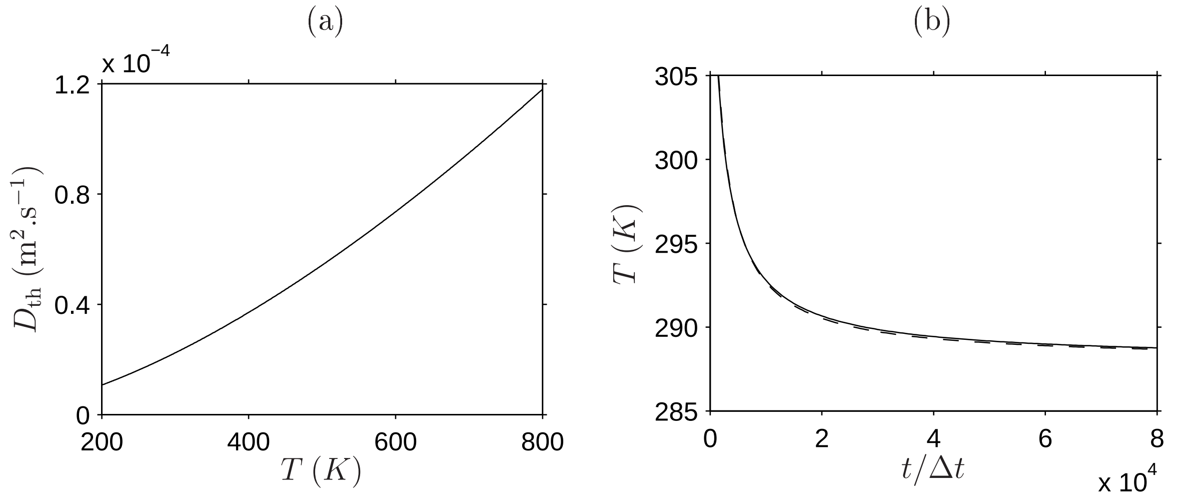


FIG. A.9: (a) Variations de la diffusivité thermique de l'air en fonction de la température. (b) Évolution de la température au centre du pulse en fonction du temps. ——— calcul ; – – – – solution analytique.

du fluide et c_p est la chaleur massique spécifique à pression constante. Dans le cas général D_th varie avec T, comme l'illustre la figure A.9(a). L'hypothèse précédente nécessite donc d'avoir des gradients thermiques modérés et de faibles différences de température. Le calcul sera effectué avec $b = 5\Delta$ et $T_\mathrm{p} = 320$ K, ce qui permet d'assimiler D_th à une constante. La température vérifie alors l'équation :

$$D_\mathrm{th}\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

D'après Carslaw *et al.* [29], la solution de cette équation s'écrit en 2-D :

$$T(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi D_\mathrm{th} t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T(x_1, x_2, t=0)\exp\left[\frac{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}{4D_\mathrm{th} t}\right]\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'$$

On prendra $D_\mathrm{th} = D_\mathrm{th}(T = 300\,\mathrm{K})$ pour calculer la solution analytique.

La figure A.9(b) représente l'évolution temporelle de la température au centre du pulse et compare les résultats issus du solveur à la solution analytique. La température au centre du pulse diminue sous l'effet de la diffusion thermique dans l'air. Dans un premier temps la chute de température est rapide puis elle se ralentit progressivement, les gradients étant de plus en plus faibles. Les deux résultats sont en très bon accord ce qui montre que les gradients thermiques sont bien pris en compte par le solveur. Le léger écart entre les deux courbes s'explique par les limitations de la solution analytique. En effet, au début du calcul la température au centre du pulse est supérieure à 300 K et la diffusivité thermique réelle - et donc celle du solveur - est supérieure à celle utilisée dans la solution analytique.

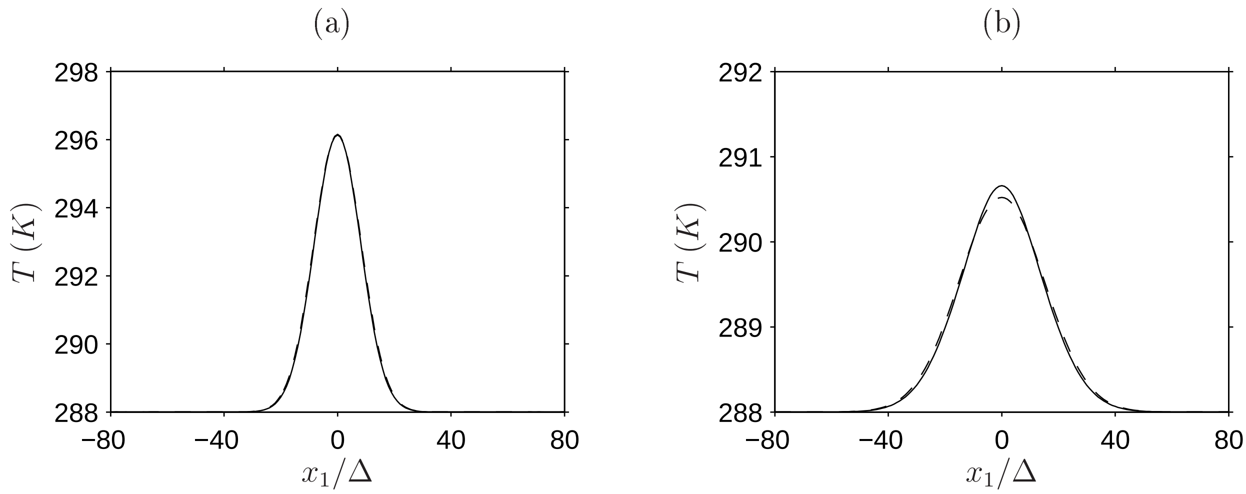


FIG. A.10: Cas de la diffusion d'un pulse gaussien de température. Profil de température le long de l'axe x_1 à deux instants différents. (a) $t/\Delta t = 5 \times 10^3$; (b) $t/\Delta t = 2 \times 10^4$.

La diffusion thermique dans le solveur sera donc plus rapide que celle prise en compte dans la solution analytique. Inversement, lorsque la température devient inférieure à 300 K, la diffusivité thermique réelle est plus faible que celle de la solution analytique et la diffusion sera plus lente dans le solveur qu'avec la solution analytique. Ainsi, cette dernière sur-estime la température au début de la diffusion et elle la sous-estime ensuite. Des profils de la température le long de l'axe x_1 sont reportés sur la figure A.10, pour deux instants différents. Le calcul est en très bon accord avec la solution analytique et là encore les faibles écarts observés s'expliquent par la limitation de la solution analytique à une diffusivité thermique constante.

Ce cas test montre que les transferts thermiques sont bien pris en compte par le solveur. Notons qu'ils jouent ici un rôle bien plus important que dans les configurations étudiées par la suite. En effet, dans les jets qui seront calculés la diffusion thermique moléculaire est un phénomène très lent par rapport aux vitesses de l'écoulement et les transferts de chaleur se feront principalement par convection.

Annexe B

Équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques : détermination des équations sur l'axe

Cette annexe présente les calculs menés pour obtenir les équations en coordonnées cylindriques sur l'axe avec la méthode de Constantinescu & Lele [34] (voir la partie 1.6.4). La partie B.1 présente le cas 2-D des coordonnées polaires. La généralisation au cas 3-D cylindrique est ensuite effectuée dans la partie B.2. La prise en compte des variations de température est exposée dans la partie B.3. Les relations nécessaires au calcul des coefficients des séries sont détaillées dans la partie B.4, de même que le calcul de la dilatation et de la vorticité sur l'axe. Les équations polaires et cylindriques sur l'axe sont finalement récapitulées dans les parties B.5 et B.6.

B.1 Cas 2-D : équations en coordonnées polaires

B.1.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_m - V_m = 0$$

$$\text{avec } E_m = \frac{\partial r \rho u_r}{r \partial r} + \frac{\partial \rho u_\theta}{r \partial \theta} \qquad \text{(flux eulériens)}$$

$$\text{et } V_m = 0 \qquad \text{(flux visqueux)}$$

On a vu à la partie 1.6.4 que les variables peuvent être regroupées en deux catégories : les grandeurs régulières et les grandeurs singulières. Les variables régulières, ρ par exemple, ont un développement en série de la forme :

$$\rho(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}^{(\rho)} r^{2n} \right) \cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{mn}^{(\rho)} r^{2n} \right) \sin(m\theta)$$

où $\alpha_{mn}^{(\rho)}$ et $\beta_{mn}^{(\rho)}$ sont les coefficients de la série et ne dépendent que du temps. Les variables singulières, u_r par exemple, s'écrivent de la façon suivante :

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{0n}^{(r)} r^{2n} + \sum_{m=1}^{+\infty} r^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn}^{(r)} r^{2n} \right) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} r^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_{mn}^{(r)} r^{2n} \right) \sin(m\theta)$$

où $A_{mn}^{(r)}$ et $B_{mn}^{(r)}$ sont les coefficients de la série et ne dépendent que du temps. En remplaçant chaque variable par son développement en série, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r \rho u_r}{r \partial r} =& \frac{\alpha_{00}^{(\rho)} \left(A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta \right)}{r} \\
&+ 2 \left(\alpha_{10}^{(\rho)} \cos\theta + \beta_{10}^{(\rho)} \sin\theta \right) \left(A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta \right) \\
&+ 2\alpha_{00}^{(\rho)} \left(A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)} \cos 2\theta + B_{20}^{(r)} \sin 2\theta \right) \\
&+ O(r)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_\theta}{r \partial \theta} =& \frac{\alpha_{00}^{(\rho)} \left(-B_{10}^{(r)} \sin\theta - A_{10}^{(r)} \cos\theta \right)}{r} \\
&+ \left(-\alpha_{10}^{(\rho)} \sin\theta + \beta_{10}^{(\rho)} \cos\theta \right) \left(B_{10}^{(r)} \cos\theta - A_{10}^{(r)} \sin\theta \right) \\
&+ \left(\alpha_{10}^{(\rho)} \cos\theta + \beta_{10}^{(\rho)} \sin\theta \right) \left(-B_{10}^{(r)} \sin\theta - A_{10}^{(r)} \cos\theta \right) \\
&+ \alpha_{00}^{(\rho)} \left(-2B_{20}^{(r)} \sin 2\theta - 2A_{20}^{(r)} \cos 2\theta \right) \\
&+ O(r)
\end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation de conservation de la masse et en prenant la limite quand r tend vers 0, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_m - V_m = 0 \\
&\text{avec } E_m = 2\alpha_{00}^{(\rho)} A_{01}^{(r)} + \alpha_{10}^{(\rho)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)} B_{10}^{(r)} \\
&\text{et } V_m = 0
\end{aligned}$$

Cette équation est exacte et n'est valable que sur l'axe.

B.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Considérons tout d'abord la composante radiale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + E_r - V_r = 0 \\
&\text{avec } E_r = \frac{\partial r\rho u_r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial \rho u_r u_\theta}{r\partial \theta} - \frac{\rho u_\theta u_\theta}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{(flux eulériens)} \\
&\text{et } V_r = \frac{\partial r\mathcal{T}_{rr}}{r\partial r} + \frac{\partial \mathcal{T}_{r\theta}}{r\partial \theta} - \frac{\mathcal{T}_{\theta\theta}}{r} \qquad \text{(flux visqueux)}
\end{aligned}
$$

L'expression des termes visqueux est donnée dans la partie 1.6.1.

On remplace chaque variable par son développement en série. Les termes des flux eulériens s'écrivent alors :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r\rho u_r u_r}{r\partial r} =& \frac{\alpha_{00}^{(\rho)}\left(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\right)^2}{r} \\
&+ 2\left(\alpha_{10}^{(\rho)}\cos\theta + \beta_{10}^{(\rho)}\sin\theta\right)\left(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\right)^2 \\
&+ 4\alpha_{00}^{(\rho)}\left(A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\right)\left(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\right) \\
&+ O(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_r u_\theta}{r\partial \theta} =& \frac{\alpha_{00}^{(\rho)}\left[(B_{10}^{(r)^2} - A_{10}^{(r)^2})(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4A_{10}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\right]}{r} \\
&- 5\alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos^2\theta\sin\theta + \alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}B_{10}^{(r)}\sin^3\theta - 5\beta_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin^2\theta \\
&+ \beta_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos^3\theta + 2\alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)^2}\cos\theta\sin^2\theta - \alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)^2}\cos^3\theta \\
&- 2\beta_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)^2}\cos^2\theta\sin\theta + \beta_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)^2}\sin^3\theta - 2\alpha_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)^2}\cos\theta\sin^2\theta \\
&+ \alpha_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)^2}\cos^3\theta + 2\beta_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)^2}\cos^2\theta\sin\theta - \beta_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)^2}\sin^3\theta \\
&+ \alpha_{00}^{(\rho)}\Big[A_{01}^{(\theta)}(-A_{10}^{(r)}\sin\theta + B_{10}^{(r)}\cos\theta) - A_{01}^{(r)}(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta) \\
&\qquad - 3A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}(\cos 2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin 2\theta) \\
&\qquad + 3B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}(\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta) \\
&\qquad + 3A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}(\sin 2\theta\sin\theta - \cos 2\theta\cos\theta) \\
&\qquad - 3A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}(\cos 2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin 2\theta)\Big] \\
&+ O(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho u_\theta u_\theta}{r} =& \frac{\alpha_{00}^{(\rho)}(B_{10}^{(r)}\cos\theta - A_{10}^{(r)}\sin\theta)^2}{r} \\
&+ (\alpha_{10}^{(\rho)}\cos\theta + \beta_{10}^{(\rho)}\sin\theta)(B_{10}^{(r)}\cos\theta - A_{10}^{(r)}\sin\theta)^2 \\
&+ 2\alpha_{00}^{(\rho)}(A_{01}^{(\theta)} + B_{20}^{(r)}\cos 2\theta - A_{20}^{(r)}\sin 2\theta)(B_{10}^{(r)}\cos\theta - A_{10}^{(r)}\sin\theta) \\
&+ O(r)
\end{aligned}
$$

La contribution de la pression se calcule aisément :

$$
\frac{\partial p}{\partial r} = \alpha_{10}^{(p)}\cos\theta + \beta_{10}^{(p)}\sin\theta + O(r)
$$

Pour déterminer les flux visqueux, on a besoin des dérivées des composantes de la vitesse :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r u_r}{r\partial r} =& \frac{A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta}{r} \\
&+ 2(A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + B_{20}^{(r)}\sin 2\theta) \\
&+ 3(A_{11}^{(r)}\cos\theta + B_{11}^{(r)}\sin\theta + A_{30}^{(r)}\cos 3\theta + B_{30}^{(r)}\sin 3\theta)r \\
&+ O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} =& -\frac{A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta}{r} \\
&- 2(A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + B_{20}^{(r)}\sin 2\theta) \\
&+ (-A_{11}^{(\theta)}\sin\theta + B_{11}^{(\theta)}\cos\theta - 3B_{30}^{(r)}\sin 3\theta - 3A_{30}^{(r)}\cos 3\theta)r \\
&+ O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial r} =& A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + B_{20}^{(r)}\sin 2\theta \\
&+ 2(A_{11}^{(r)}\cos\theta + B_{11}^{(r)}\sin\theta + A_{30}^{(r)}\cos 3\theta + B_{30}^{(r)}\sin 3\theta)r \\
&+ O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} =& \frac{-A_{10}^{(r)}\sin\theta + B_{10}^{(r)}\cos\theta}{r} \\
&+ 2(-A_{20}^{(r)}\sin 2\theta + B_{20}^{(r)}\cos 2\theta) \\
&+ (-A_{11}^{(r)}\sin\theta + B_{11}^{(r)}\cos\theta - 3A_{30}^{(r)}\sin 3\theta + 3B_{30}^{(r)}\cos 3\theta)r \\
&+ O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} =& A_{01}^{(\theta)} - A_{20}^{(r)} \sin 2\theta + B_{20}^{(r)} \cos 2\theta \\
& + 2(A_{11}^{(\theta)} \cos\theta + B_{11}^{(\theta)} \sin\theta - A_{30}^{(r)} \sin 3\theta + B_{30}^{(r)} \cos 3\theta) r \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u_r}{r} =& \frac{A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta}{r} \\
& + A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)} \cos 2\theta + B_{20}^{(r)} \sin 2\theta \\
& + (A_{11}^{(r)} \cos\theta + B_{11}^{(r)} \sin\theta + A_{30}^{(r)} \cos 3\theta + B_{30}^{(r)} \sin 3\theta) r \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u_\theta}{r} =& \frac{B_{10}^{(r)} \cos\theta - A_{10}^{(r)} \sin\theta}{r} \\
& + A_{01}^{(\theta)} + B_{20}^{(r)} \cos 2\theta - A_{20}^{(r)} \sin 2\theta \\
& + (A_{11}^{(\theta)} \cos\theta + B_{11}^{(\theta)} \sin\theta + B_{30}^{(r)} \cos 3\theta - A_{30}^{(r)} \sin 3\theta) r \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

On peut maintenant calculer les flux (on rappelle que $\lambda = -2\mu/3$ d'après la loi de Stokes) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{rr} =& 2\mu \Big[A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)} \cos 2\theta + B_{20}^{(r)} \sin 2\theta + 2(A_{11}^{(r)} \cos\theta + B_{11}^{(r)} \sin\theta + A_{30}^{(r)} \cos 3\theta \\
& \quad + B_{30}^{(r)} \sin 3\theta) r \Big] \\
& + \lambda \Big[2A_{01}^{(r)} + (3A_{11}^{(r)} \cos\theta - A_{11}^{(\theta)} \sin\theta + 3B_{11}^{(r)} \sin\theta + B_{11}^{(\theta)} \cos\theta) r \Big] \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{r\theta} =& \mu \Big[-2A_{20}^{(r)} \sin 2\theta + 2B_{20}^{(r)} \cos 2\theta \\
& \quad + (-A_{11}^{(r)} \sin\theta + B_{11}^{(r)} \cos\theta + A_{11}^{(\theta)} \cos\theta + B_{11}^{(\theta)} \sin\theta - 4A_{30}^{(r)} \sin 3\theta \\
& \quad\quad + 4B_{30}^{(r)} \cos 3\theta) r \Big] \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\theta\theta} =& 2\mu \Big[A_{01}^{(r)} - A_{20}^{(r)} \cos 2\theta - B_{20}^{(r)} \sin 2\theta \\
& \quad + (-A_{11}^{(\theta)} \sin\theta + B_{11}^{(\theta)} \cos\theta + A_{11}^{(r)} \cos\theta + B_{11}^{(r)} \sin\theta - 2A_{30}^{(r)} \cos 3\theta \\
& \quad\quad - 2B_{30}^{(r)} \sin 3\theta) r \Big] \\
& + \lambda \Big[2A_{01}^{(r)} + (3A_{11}^{(r)} \cos\theta - A_{11}^{(\theta)} \sin\theta + 3B_{11}^{(r)} \sin\theta + B_{11}^{(\theta)} \cos\theta) r \Big] \\
& + O(r^2)
\end{aligned}
$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial r\mathcal{T}_{rr}}{r\partial r} =&2\mu\left[\frac{A_{01}^{(r)}+A_{20}^{(r)}\cos 2\theta+B_{20}^{(r)}\sin 2\theta}{r}+4(A_{11}^{(r)}\cos\theta+B_{11}^{(r)}\sin\theta+A_{30}^{(r)}\cos 3\theta\right.\\&\left.+\ B_{30}^{(r)}\sin 3\theta)\right]\\&+\lambda\left[\frac{2A_{01}^{(r)}}{r}+2(3A_{11}^{(r)}\cos\theta-A_{11}^{(\theta)}\sin\theta+3B_{11}^{(r)}\sin\theta+B_{11}^{(\theta)}\cos\theta)\right]\\&+O(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{T}_{r\theta}}{r\partial\theta} =&\mu\left[\frac{-4A_{20}^{(r)}\cos 2\theta-4B_{20}^{(r)}\sin 2\theta}{r}\right.\\&\left.-A_{11}^{(r)}\cos\theta-B_{11}^{(r)}\sin\theta-A_{11}^{(\theta)}\sin\theta+B_{11}^{(\theta)}\cos\theta-12A_{30}^{(r)}\cos 3\theta-12B_{30}^{(r)}\sin 3\theta\right]\\&+O(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{T}_{\theta\theta}}{r} =&2\mu\left[\frac{A_{01}^{(r)}-A_{20}^{(r)}\cos 2\theta-B_{20}^{(r)}\sin 2\theta}{r}\right.\\&\left.-A_{11}^{(\theta)}\sin\theta+B_{11}^{(\theta)}\cos\theta+A_{11}^{(r)}\cos\theta+B_{11}^{(r)}\sin\theta-2A_{30}^{(r)}\cos 3\theta-2B_{30}^{(r)}\sin 3\theta\right]\\&+\lambda\left[\frac{2A_{01}^{(r)}}{r}+3A_{11}^{(r)}\cos\theta-A_{11}^{(\theta)}\sin\theta+3B_{11}^{(r)}\sin\theta+B_{11}^{(\theta)}\cos\theta\right]\\&+O(r)\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient finalement en prenant la limite en $r=0$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho u_r}{\partial t}+E_r-V_r=0\\&\text{avec } E_r=(A_{10}^{(r)}\cos\theta+B_{10}^{(r)}\sin\theta)(\alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)}+\beta_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)})\\&\qquad+\alpha_{00}^{(\rho)}\left[3A_{01}^{(r)}(A_{10}^{(r)}\cos\theta+B_{10}^{(r)}\sin\theta)-A_{01}^{(\theta)}(B_{10}^{(r)}\cos\theta-A_{10}^{(r)}\sin\theta)\right.\\&\qquad\left.+\cos\theta(A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}+B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)})+\sin\theta(A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}-A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)})\right]\\&\qquad+\alpha_{10}^{(p)}\cos\theta+\beta_{10}^{(p)}\sin\theta\\&\text{et } V_r=\mu\left[(5A_{11}^{(r)}-B_{11}^{(\theta)})\cos\theta+(5B_{11}^{(r)}+A_{11}^{(\theta)})\sin\theta\right]\\&\qquad+\lambda\left[(3A_{11}^{(r)}+B_{11}^{(\theta)})\cos\theta+(3B_{11}^{(r)}-A_{11}^{(\theta)})\sin\theta\right]\end{aligned}$$

On souhaite obtenir des équations régulières valables sur l'axe. En ce point, u_θ se déduit de u_r par rotation : $u_\theta(r=0,\theta)=u_r(r=0,\theta+\pi/2)$. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer des calculs supplémentaires pour obtenir la composante selon θ de la conservation de quantité de mouvement. Elle se déduit de la composante selon r par une rotation de $\pi/2$. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement sur l'axe.

B.1.3 Conservation de l'énergie

Dans un souci de simplicité, on considère dans cette partie l'équation de conservation de l'énergie sans les flux thermiques. La prise en compte des effets de la température dans les équations sur l'axe est détaillée dans la partie B.3. L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho e_{\mathrm{t}}}{\partial t} + E_e - V_e = 0 \\
&\text{avec } E_e = \frac{\partial r(\rho e_{\mathrm{t}} + p)u_r}{r\partial r} + \frac{\partial (\rho e_{\mathrm{t}} + p)u_\theta}{r\partial \theta} \qquad \text{(flux eulérien)} \\
&\text{et } V_e = \frac{\partial r(\mathcal{T}_{rr}u_r + \mathcal{T}_{r\theta}u_\theta)}{r\partial r} + \frac{\partial (\mathcal{T}_{\theta r}u_r + \mathcal{T}_{\theta\theta}u_\theta)}{r\partial \theta} \qquad \text{(flux visqueux)}
\end{aligned}$$

Les termes composant E_e se déduisent facilement des calculs effectués pour la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r(\rho e_{\mathrm{t}} + p)u_r}{r\partial r} =& \frac{(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)})\left(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\right)}{r} \\
&+ 2\left((\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)})\cos\theta + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)})\sin\theta\right)\left(A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\right) \\
&+ 2(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)})\left(A_{01}^{(r)} + A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\right) \\
&+ O(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\rho e_{\mathrm{t}} + p)u_\theta}{r\partial \theta} =& \frac{(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)})\left(-B_{10}^{(r)}\sin\theta - A_{10}^{(r)}\cos\theta\right)}{r} \\
&+ \left(-(\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)})\sin\theta + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)})\cos\theta\right)\left(B_{10}^{(r)}\cos\theta - A_{10}^{(r)}\sin\theta\right) \\
&+ \left((\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)})\cos\theta + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)})\sin\theta\right)\left(-B_{10}^{(r)}\sin\theta - A_{10}^{(r)}\cos\theta\right) \\
&+ (\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)})\left(-2B_{20}^{(r)}\sin 2\theta - 2A_{20}^{(r)}\cos 2\theta\right) \\
&+ O(r)
\end{aligned}$$

Les termes visqueux ont pour expressions :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r\mathcal{T}_{rr}u_r}{r\partial r} =& \frac{2\mu}{r}\Big[A_{01}^{(r)}A_{10}^{(r)}\cos\theta + A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta + A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta \\
&\quad + A_{01}^{(r)}B_{10}^{(r)}\sin\theta + A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta + B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta\Big] \\
&+ 4\mu\Big[A_{01}^{(r)^2} + A_{20}^{(r)^2}\cos^2 2\theta + B_{20}^{(r)^2}\sin^2 2\theta + 2A_{01}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta \\
&\quad + 2A_{01}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta + 2A_{20}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin 2\theta + 2A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}\cos^2\theta \\
&\quad + 2A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta + 2A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta \\
&\quad + 2A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta + 2A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta + 2B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\sin^2\theta \\
&\quad + 2A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta + 2B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta\Big] \\
&+ \frac{2\lambda A_{01}^{(r)}}{r}\Big[A_{10}^{(r)}\cos\theta + B_{10}^{(r)}\sin\theta\Big] \\
&+ 2\lambda\Big[2A_{01}^{(r)^2} + 2A_{01}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta + 2A_{01}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta + 3A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}\cos^2\theta \\
&\quad - A_{10}^{(r)}A_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta + 3A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta + A_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}\cos^2\theta \\
&\quad + 3A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta - A_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}\sin^2\theta + 3B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\sin^2\theta \\
&\quad + B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\Big] \\
&+ O(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r\mathcal{T}_{r\theta}u_\theta}{r\partial r} =& \frac{\mu}{r}\Big[-2A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta + 2B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta \\
&\quad + 2A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta - 2A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta\Big] \\
&+ 2\mu\Big[-A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta + B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos^2\theta + A_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}\cos^2\theta \\
&\quad + B_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta - 4A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta + 4B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta \\
&\quad + A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}\sin^2\theta - A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta - A_{10}^{(r)}A_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta \\
&\quad - A_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}\sin^2\theta + 4A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta - 4A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta \\
&\quad - 2A_{01}^{(\theta)}A_{20}^{(r)}\sin 2\theta + 2A_{01}^{(\theta)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta - 4A_{20}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin 2\theta \\
&\quad + 2B_{20}^{(r)^2}\cos^2 2\theta + 2A_{20}^{(r)^2}\sin^2 2\theta\Big] \\
&+ O(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{T}_{\theta r}u_r}{r\partial\theta} =& \frac{\mu}{r}\Big[2A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta - 2A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta - 2A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta \\
&\quad + 2B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta - 4A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta - 4A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta \\
&\quad - 4A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta - 4B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\Big[A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-2A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta-2A_{10}^{(r)}A_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad+A_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta-12A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta\\
&\quad-4A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta-12A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta-2A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad+B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+A_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2B_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad-4A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta-12A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta+4B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta\\
&\quad-12B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta-4A_{01}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta+4A_{20}^{(r)^2}(\sin^2 2\theta-\cos^2 2\theta)\\
&\quad-16A_{20}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin 2\theta-4A_{01}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta+4B_{20}^{(r)^2}(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)\Big]\\
&+O(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{T}_{\theta\theta}u_\theta}{r\partial\theta}=&\frac{2\mu}{r}\Big[2A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta-2A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta-2B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta\\
&\quad+2A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta-A_{01}^{(r)}B_{10}^{(r)}\sin\theta-A_{01}^{(r)}A_{10}^{(r)}\cos\theta+A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 2\theta\sin\theta\\
&\quad+A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta\cos\theta+B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\sin\theta+A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos\theta\sin 2\theta\Big]\\
&-\frac{2A_{01}^{(r)}\lambda}{r}\Big[A_{10}^{(r)}\cos\theta+B_{10}^{(r)}\sin\theta\Big]\\
&2\mu\Big[2A_{01}^{(\theta)}A_{20}^{(r)}\sin 2\theta+8A_{20}^{(r)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta\sin 2\theta+2A_{20}^{(r)^2}(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)\\
&\quad-2A_{01}^{(\theta)}B_{20}^{(r)}\cos 2\theta+2B_{20}^{(r)^2}(\sin^2 2\theta-\cos^2 2\theta)-2A_{01}^{(r)}B_{20}^{(r)}\sin 2\theta\\
&\quad-2A_{01}^{(r)}A_{20}^{(r)}\cos 2\theta+A_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-2B_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad-2A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta+B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+6A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta\\
&\quad+2A_{30}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta-6B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta+2B_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta\\
&\quad+2A_{10}^{(r)}A_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta+A_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\\
&\quad-2A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta-6A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\sin 3\theta\sin\theta+2A_{10}^{(r)}A_{30}^{(r)}\cos 3\theta\cos\theta\\
&\quad+6A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos 3\theta\sin\theta+2A_{10}^{(r)}B_{30}^{(r)}\cos\theta\sin 3\theta\Big]\\
&+\lambda\Big[2A_{01}^{(r)}(-2B_{20}^{(r)}\sin 2\theta-2A_{20}^{(r)}\cos 2\theta)-6A_{11}^{(r)}B_{10}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad+A_{11}^{(\theta)}B_{10}^{(r)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+3B_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2B_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad+3A_{10}^{(r)}A_{11}^{(r)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+2A_{10}^{(r)}A_{11}^{(\theta)}\cos\theta\sin\theta-6A_{10}^{(r)}B_{11}^{(r)}\cos\theta\sin\theta\\
&\quad+A_{10}^{(r)}B_{11}^{(\theta)}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\Big]\\
&+O(r)
\end{aligned}
$$

En reportant ces expressions dans l'équation de conservation de l'énergie et en prenant la limite en $r = 0$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho e_{\mathrm{t}}}{\partial t} + E_e - V_e = 0\\
&\text{avec } E_e = 2(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)})A_{01}^{(r)} + (\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)})A_{10}^{(r)} + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)})B_{10}^{(r)}\\
&\text{et } V_e = 4\mu\left[A_{01}^{(r)^2} + A_{20}^{(r)^2} + B_{20}^{(r)^2}\right] + \mu\left[(5A_{11}^{(r)} - B_{11}^{(\theta)})A_{10}^{(r)} + (5B_{11}^{(r)} + A_{11}^{(\theta)})B_{10}^{(r)}\right]\\
&\qquad + 4\lambda A_{01}^{(r)^2} + \lambda\left[(B_{11}^{(\theta)} + 3A_{11}^{(r)})A_{10}^{(r)} + (3B_{11}^{(r)} - A_{11}^{(\theta)})B_{10}^{(r)}\right]
\end{aligned}$$

B.2 Généralisation au cas 3-D cylindrique

La présence d'une troisième dimension, celle de l'axe cylindrique x, fait apparaître des termes supplémentaires dans les équations. On procède avec ces nouveaux termes de la même manière que dans le cas 2-D.

Une nouvelle variable régulière apparaît : la vitesse du fluide dans la direction de l'axe u_x. Son développement en série est de la forme :

$$u_x(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}^{(x)} r^{2n}\right)\cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{mn}^{(x)} r^{2n}\right)\sin(m\theta)$$

En coordonnées polaires, toutes les grandeurs étaient des fonctions du temps t et de deux variables d'espace r et θ. Les décompositions étant effectuées sur ces deux variables, les coefficients des séries n'étaient fonctions que du temps. En 3-D, les coefficients des séries sont maintenant aussi des fonctions de x.

Considérons le cas de la conservation de la masse. Celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_{3\mathrm{D}m} - V_{3\mathrm{D}m} = 0\\
&\text{avec } E_{3\mathrm{D}m} = E_{2\mathrm{D}m} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x}\\
&\text{où } E_{2\mathrm{D}m} = \frac{\partial r \rho u_r}{r\partial r} + \frac{\partial \rho u_\theta}{r\partial \theta} \quad \text{(flux eulériens en 2-D)}\\
&\text{et } V_{3\mathrm{D}m} = 0
\end{aligned}$$

On note ainsi que le terme $\partial(\rho u_x)/\partial x$ vient s'ajouter au flux eulériens en coordonnées polaires. Comme $\rho u_x = \alpha_{00}^{(\rho)}\alpha_{00}^{(x)} + O(r)$, on a :

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)}\alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + O(r)$$

On obtient finalement :

$$E_{3\mathrm{D}m} = 2\alpha_{00}^{(\rho)}A_{01}^{(r)} + \alpha_{10}^{(\rho)}A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)}B_{10}^{(r)} + \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)}\alpha_{00}^{(x)}}{\partial x}$$

On procède de même avec les autres équations. Il faut notamment prendre garde aux termes supplémentaires dans le tenseur des contraintes et à l'apparition de termes liés à la direction x ($\mathcal{T}_{xx}$, $\mathcal{T}_{xr}$ et $\mathcal{T}_{x\theta}$). De plus les coefficients des séries dépendent de x. Dans un souci de concision, les calculs détaillés ne sont pas présentés ici, les expressions des différents termes étant particulièrement lourdes. Les équations obtenues à l'issue des calculs seront données dans la partie B.6.

B.3 Prise en compte des variations de la température

Les développements précédents sont valables uniquement si la température T reste constante. Dans le cas général il faut prendre en compte les effets dus aux variations de la température. Tout d'abord la viscosité μ varie avec T, de même que $\lambda = -2\mu/3$ d'après la loi de Stokes. La loi de Sutherland [36] (voir la partie 1.1) donne :

$$\mu = \mu_\infty \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1.4}{0.4 + \frac{T}{T_\infty}} \qquad \text{avec } \mu_\infty = \mu(T_\infty = 288 \text{ K})$$

Les dérivées spatiales de μ et λ sont alors calculées par :

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{\partial \lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{\partial \lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

La température étant une variable régulière, sa série s'écrit :

$$T(x,r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}^{(T)} r^{2n}\right)\cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{mn}^{(T)} r^{2n}\right)\sin(m\theta)$$

Comme la viscosité n'est plus une constante, de nouveaux termes apparaissent dans les flux visqueux des équations de quantité de mouvement et de l'équation d'énergie. En les notant respectivement $S^T_{\rho u_x}$, $S^T_{\rho u_r}$ et $S^T_{\rho e}$, on obtient finalement après des calculs similaires à ceux qui précèdent :

$$S^T_{\rho u_x} = \frac{\partial \mu}{\partial T}\left[\alpha_{10}^{(T)}\left(\alpha_{10}^{(x)} + \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x}\right) + \beta_{10}^{(T)}\left(\beta_{10}^{(x)} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
S^T_{\rho u_r} =& \frac{\partial \mu}{\partial T}\left[2A^{(r)}_{01}\left(\alpha^{(T)}_{10}\cos\theta + \beta^{(T)}_{10}\sin\theta\right)\right.\\
&\left. +2\left[\left(A^{(r)}_{20}\alpha^{(T)}_{10} + B^{(r)}_{20}\beta^{(T)}_{10}\right)\cos\theta + \left(B^{(r)}_{20}\alpha^{(T)}_{10} - A^{(r)}_{20}\beta^{(T)}_{10}\right)\sin\theta\right]\right]\\
&+ \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(\frac{\partial \alpha^{(x)}_{00}}{\partial x} + 2A^{(r)}_{01}\right)\left(\alpha^{(T)}_{10}\cos\theta + \beta^{(T)}_{10}\sin\theta\right)\\
S^T_{\rho e} =& \frac{\partial \mu}{\partial T}\left[\alpha^{(T)}_{00}\left[\alpha^{(T)}_{10}\left(\alpha^{(x)}_{10} + \frac{\partial A^{(r)}_{10}}{\partial x}\right) + \beta^{(T)}_{10}\left(\beta^{(x)}_{10} + \frac{\partial B^{(r)}_{10}}{\partial x}\right)\right]\right.\\
&+ 2A^{(r)}_{01}\left(\alpha^{(T)}_{10}A^{(r)}_{10} + \beta^{(T)}_{10}B^{(r)}_{10}\right)\\
&\left.+ 2\alpha^{(T)}_{10}\left(A^{(r)}_{10}A^{(r)}_{20} + B^{(r)}_{10}B^{(r)}_{20}\right) + 2\beta^{(T)}_{10}\left(A^{(r)}_{10}B^{(r)}_{20} - A^{(r)}_{20}B^{(r)}_{10}\right)\right]\\
&+ \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(2A^{(r)}_{01} + \frac{\partial \alpha^{(x)}_{00}}{\partial x}\right)\left(\alpha^{(T)}_{10}A^{(r)}_{10} + \beta^{(T)}_{10}B^{(r)}_{10}\right)
\end{aligned}$$

Ces termes supplémentaires sont uniquement liés au fait que la viscosité varie avec T. Il faut également rajouter dans l'équation d'énergie les flux thermiques, modélisés par la loi de Fourier. On note ces termes $S^{\mathrm{Fourier}}_{\rho e}$:

$$S^{Fourier}_{\rho e} = \frac{c_p}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \alpha^{(T)}_{00}}{\partial x}\right) + 4\mu\alpha^{(T)}_{01} + \frac{\partial \mu}{\partial T}\left({\alpha^{(T)}_{10}}^2 + {\beta^{(T)}_{10}}^2\right)\right]$$

B.4 Calcul des coefficients des séries, de la dilatation et de la vorticité

Les nouvelles équations sur l'axe font intervenir les premiers coefficients des développements en séries de ρ, u_x, u_r, u_θ, ρe_{t}, p et T. Pour pouvoir passer à l'itération suivante, on a besoin de les calculer, connaissant les valeurs de ces grandeurs à l'itération présente. Pour cela, on considère une direction θ arbitraire. Les coefficients des variables singulières s'expriment alors par :

$$\begin{aligned}
A^{(r)}_{11} =& \frac{1}{4}\left[\cos\theta \left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta)} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})}\right.\\
&\left. - \sin\theta \left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})} - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right]\\
B^{(r)}_{11} =& \frac{1}{4}\left[\sin\theta \left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta)} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})}\right.\\
&\left. + \cos\theta \left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{11}^{(\theta)} =& \frac{1}{4}\left[\cos\theta \left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta)} + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})}\right.\\
&\left. - \sin\theta \left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})} - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right]\\
B_{11}^{(\theta)} =& \frac{1}{4}\left[\sin\theta \left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta)} + \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})}\right.\\
&\left. + \cos\theta \left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})} + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left.\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right]\\
A_{10}^{(r)} =& u_r(0,\theta)\cos\theta - u_r\left(0,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\\
B_{10}^{(r)} =& u_r(0,\theta)\sin\theta + u_r\left(0,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\\
A_{01}^{(r)} =& \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} + \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right]\\
A_{01}^{(\theta)} =& \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} + \left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right]\\
A_{20}^{(r)} =& \frac{1}{2}\left[\left(\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} - \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right)\cos 2\theta\right.\\
&\left. - \left(\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})} - \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right)\sin 2\theta\right]\\
B_{20}^{(r)} =& \frac{1}{2}\left[\left(\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} - \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right)\sin 2\theta\right.\\
&\left. + \left(\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{4})} - \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{3\pi}{4})}\right)\cos 2\theta\right]
\end{aligned}
$$

Les coefficients des grandeurs régulières se calculent de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{00}^{(\rho)} =& \rho(r=0)\\
\alpha_{10}^{(\rho)} =& \cos\theta \left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} - \sin\theta \left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\\
\beta_{10}^{(\rho)} =& \sin\theta \left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta)} + \cos\theta \left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\\
\alpha_{01}^{(\rho)} =& \frac{1}{4}\left[\left.\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta)} + \left.\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}\right|_{(0,\theta+\frac{\pi}{2})}\right]
\end{aligned}
$$

Ces expressions sont données pour ρ mais les coefficients de p, ρe_{t} et T se déterminent de façon analogue.

Les relations de détermination des coefficients font intervenir différentes grandeurs prises en θ, $\theta + \pi/4$, $\theta + \pi/2$ et $\theta + 3\pi/4$. Les maillages utilisés doivent donc avoir un nombre de directions θ multiple de 8. On note également que pour utiliser ces relations on doit choisir une direction arbitraire θ. Afin que le résultat ne dépende pas de ce choix, notre calcul des coefficients est effectué pour toutes les directions θ du maillage, puis on prend la moyenne des résultats obtenus.

Pour finir, la dilatation et la vorticité s'expriment de la façon suivante en coordonnées cylindriques :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} \\
\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,(\boldsymbol{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r u_\theta}{r\partial r} - \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial u_x}{r\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En coordonnées polaires, il suffit d'enlever les termes contenant u_x ou une dérivée selon x. Les deux expressions ci-dessus sont singulières en $r = 0$. Pour obtenir les valeurs sur l'axe on procède de même que pour les équations de Navier-Stokes. En remplaçant les diverses grandeurs par leurs développements en séries et en prenant la limite en $r = 0$, on obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + 2A_{01}^{(r)} \\
\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,(\boldsymbol{u}) &= \begin{pmatrix} 2A_{01}^{(\theta)} \\ \left(\beta_{10}^{(x)} - \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x}\right)\cos\theta - \left(\alpha_{10}^{(x)} - \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x}\right)\sin\theta \\ \left(\frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} - \alpha_{10}^{(x)}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} - \beta_{10}^{(x)}\right)\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

B.5 Bilan sur les équations 2-D

Conservation de la masse :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_m - V_m = 0 \\
&\text{avec } E_m = 2\alpha_{00}^{(\rho)} A_{01}^{(r)} + \alpha_{10}^{(\rho)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)} B_{10}^{(r)} \\
&\text{et } V_m = 0
\end{aligned}
$$

Conservation de la quantité de mouvement selon r :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + E_r - V_r = 0 \\
&\text{avec } E_r = (A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta)(\alpha_{10}^{(\rho)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)} B_{10}^{(r)}) \\
&\qquad + \alpha_{00}^{(\rho)} \left[3A_{01}^{(r)} (A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta) - A_{01}^{(\theta)} (B_{10}^{(r)} \cos\theta - A_{10}^{(r)} \sin\theta) \right. \\
&\qquad \left. + \cos\theta (A_{10}^{(r)} A_{20}^{(r)} + B_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)}) + \sin\theta (A_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)} - A_{20}^{(r)} B_{10}^{(r)}) \right] \\
&\qquad + \alpha_{10}^{(p)} \cos\theta + \beta_{10}^{(p)} \sin\theta \\
&\text{et } V_r = \mu \left[(5A_{11}^{(r)} - B_{11}^{(\theta)}) \cos\theta + (5B_{11}^{(r)} + A_{11}^{(\theta)}) \sin\theta \right] \\
&\quad + \lambda \left[(3A_{11}^{(r)} + B_{11}^{(\theta)}) \cos\theta + (3B_{11}^{(r)} - A_{11}^{(\theta)}) \sin\theta \right] \\
&\quad + \frac{\partial \mu}{\partial T} \left[2A_{01}^{(r)} \left(\alpha_{10}^{(T)} \cos\theta + \beta_{10}^{(T)} \sin\theta \right) \right. \\
&\qquad \left. + 2 \left[\left(A_{20}^{(r)} \alpha_{10}^{(T)} + B_{20}^{(r)} \beta_{10}^{(T)} \right) \cos\theta + \left(B_{20}^{(r)} \alpha_{10}^{(T)} - A_{20}^{(r)} \beta_{10}^{(T)} \right) \sin\theta \right] \right] \\
&\quad + 2A_{01}^{(r)} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\alpha_{10}^{(T)} \cos\theta + \beta_{10}^{(T)} \sin\theta \right)
\end{aligned}
$$

Conservation de l'énergie

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho e}{\partial t} + E_e - V_e = 0 \\
&\text{avec } E_e = 2(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)}) A_{01}^{(r)} + (\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)}) A_{10}^{(r)} + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)}) B_{10}^{(r)} \\
&\text{et } V_e = 4\mu \left[A_{01}^{(r)^2} + A_{20}^{(r)^2} + B_{20}^{(r)^2} \right] + \mu \left[(5A_{11}^{(r)} - B_{11}^{(\theta)}) A_{10}^{(r)} + (5B_{11}^{(r)} + A_{11}^{(\theta)}) B_{10}^{(r)} \right] \\
&\quad + 4\lambda A_{01}^{(r)^2} + \lambda \left[(B_{11}^{(\theta)} + 3A_{11}^{(r)}) A_{10}^{(r)} + (3B_{11}^{(r)} - A_{11}^{(\theta)}) B_{10}^{(r)} \right] \\
&\quad + \frac{\partial \mu}{\partial T} \left[\alpha_{00}^{(T)} \left[\alpha_{10}^{(T)} \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} + \beta_{10}^{(T)} \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} \right] \right. \\
&\qquad + 2A_{01}^{(r)} \left(\alpha_{10}^{(T)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(T)} B_{10}^{(r)} \right) \\
&\qquad \left. + 2\alpha_{10}^{(T)} \left(A_{10}^{(r)} A_{20}^{(r)} + B_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)} \right) + 2\beta_{10}^{(T)} \left(A_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)} - A_{20}^{(r)} B_{10}^{(r)} \right) \right] \\
&\quad + 2A_{01}^{(r)} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\alpha_{10}^{(T)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(T)} B_{10}^{(r)} \right) \\
&\quad + \frac{c_p}{\sigma} \left[4\mu \alpha_{01}^{(T)} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \left(\alpha_{10}^{(T)^2} + \beta_{10}^{(T)^2} \right) \right]
\end{aligned}
$$

B.6 Bilan sur les équations 3-D

Conservation de la masse :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + E_{3Dm} - V_{3D}m = 0 \\
&\text{avec } E_{3Dm} = 2\alpha_{00}^{(\rho)} A_{01}^{(r)} + \alpha_{10}^{(\rho)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)} B_{10}^{(r)} + \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} \\
&\text{et } V_{3Dm} = 0
\end{aligned}
$$

Conservation de la quantité de mouvement selon x :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + E_{3Dx} - V_{3Dx} = 0 \\
&\text{avec } E_{3Dx} = 2\alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{00}^{(x)} A_{01}^{(r)} + A_{10}^{(r)} \left[\alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{10}^{(x)} + \alpha_{00}^{(x)} \alpha_{10}^{(\rho)}\right] + B_{10}^{(r)} \left[\alpha_{00}^{(\rho)} \beta_{10}^{(x)} + \alpha_{00}^{(x)} \beta_{10}^{(\rho)}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{00}^{(x)} \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{00}^{(p)}}{\partial x} \\
&\text{et } V_{3Dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + 2A_{01}^{(r)}\right)\right] + \mu \left[4\alpha_{01}^{(x)} + 2\frac{\partial A_{01}^{(r)}}{\partial x}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial \mu}{\partial T}\left[\alpha_{10}^{(T)} \left(\alpha_{10}^{(x)} + \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x}\right) + \beta_{10}^{(T)} \left(\beta_{10}^{(x)} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Conservation de la quantité de mouvement selon r :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + E_{3Dr} - V_{3Dr} = 0 \\
&\text{avec } E_{3Dr} = (A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta)(\alpha_{10}^{(\rho)} A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(\rho)} B_{10}^{(r)}) \\
&\qquad + \alpha_{00}^{(\rho)} \Big[3A_{01}^{(r)} (A_{10}^{(r)} \cos\theta + B_{10}^{(r)} \sin\theta) - A_{01}^{(\theta)} (B_{10}^{(r)} \cos\theta - A_{10}^{(r)} \sin\theta) \\
&\qquad\qquad + \cos\theta (A_{10}^{(r)} A_{20}^{(r)} + B_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)}) + \sin\theta (A_{10}^{(r)} B_{20}^{(r)} - A_{20}^{(r)} B_{10}^{(r)})\Big] \\
&\qquad + \alpha_{10}^{(p)} \cos\theta + \beta_{10}^{(p)} \sin\theta \\
&\qquad + \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{00}^{(x)} A_{10}^{(r)}}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial \alpha_{00}^{(\rho)} \alpha_{00}^{(x)} B_{10}^{(r)}}{\partial x} \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{et } V_{3Dr} = {} & \mu \left[(5A_{11}^{(r)} - B_{11}^{(\theta)}) \cos\theta + (5B_{11}^{(r)} + A_{11}^{(\theta)}) \sin\theta \right] \\
& + \lambda \left[(3A_{11}^{(r)} + B_{11}^{(\theta)}) \cos\theta + (3B_{11}^{(r)} - A_{11}^{(\theta)}) \sin\theta \right] \\
& + \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\alpha_{10}^{(x)} + \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} \right) \right] + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\beta_{10}^{(x)} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} \right) \right] \\
& + \lambda \left[\frac{\partial \alpha_{10}^{(x)}}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial \beta_{10}^{(x)}}{\partial x} \sin\theta \right] \\
& + \frac{\partial \mu}{\partial T} \left[2A_{01}^{(r)} \left(\alpha_{10}^{(T)} \cos\theta + \beta_{10}^{(T)} \sin\theta \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[\left(A_{20}^{(r)} \alpha_{10}^{(T)} + B_{20}^{(r)} \beta_{10}^{(T)} \right) \cos\theta + \left(B_{20}^{(r)} \alpha_{10}^{(T)} - A_{20}^{(r)} \beta_{10}^{(T)} \right) \sin\theta \right] \right] \\
& + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + 2A_{01}^{(r)} \right) \left(\alpha_{10}^{(T)} \cos\theta + \beta_{10}^{(T)} \sin\theta \right)
\end{aligned}$$

Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho e}{\partial t} + E_{3De} - V_{3De} = 0 \\
& \text{avec } E_{3De} = 2(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)}) A_{01}^{(r)} + (\alpha_{10}^{(\rho e)} + \alpha_{10}^{(p)}) A_{10}^{(r)} + (\beta_{10}^{(\rho e)} + \beta_{10}^{(p)}) B_{10}^{(r)} \\
& \qquad + \frac{\partial \left(\alpha_{00}^{(\rho e)} + \alpha_{00}^{(p)} \right) \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} \\
& \text{et } V_{3De} = 4\mu \left[A_{01}^{(r)^2} + A_{20}^{(r)^2} + B_{20}^{(r)^2} \right] + \mu \left[(5A_{11}^{(r)} - B_{11}^{(\theta)}) A_{10}^{(r)} + (5B_{11}^{(r)} + A_{11}^{(\theta)}) B_{10}^{(r)} \right] \\
& \quad + 4\lambda A_{01}^{(r)^2} + \lambda \left[(B_{11}^{(\theta)} + 3A_{11}^{(r)}) A_{10}^{(r)} + (3B_{11}^{(r)} - A_{11}^{(\theta)}) B_{10}^{(r)} \right] \\
& \quad + A_{10}^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\alpha_{10}^{(x)} + \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} \right) \right] + B_{10}^{(r)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\beta_{10}^{(x)} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} \right) \right] \\
& \quad + \mu \left[\frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} + 2\alpha_{10}^{(x)} \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x} + 2\beta_{10}^{(x)} \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x} + \alpha_{10}^{(x)} \alpha_{10}^{(x)} + \beta_{10}^{(x)} \beta_{10}^{(x)} \right] \\
& \quad + \alpha_{00}^{(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + 2A_{01}^{(r)} \right) \right] + \mu \left(4\alpha_{01}^{(x)} + 2\frac{\partial A_{01}^{(r)}}{\partial x} \right) \right] \\
& \quad + \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} + 2A_{01}^{(r)} \right) \right] \\
& \quad + \lambda \left[A_{10}^{(r)} \frac{\partial \alpha_{10}^{(x)}}{\partial x} + B_{10}^{(r)} \frac{\partial \beta_{10}^{(x)}}{\partial x} \right] + 2\lambda \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x} A_{01}^{(r)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\partial \mu}{\partial T}\left[\alpha_{00}^{(T)}\left[\alpha_{10}^{(T)}\left(\alpha_{10}^{(x)} + \frac{\partial A_{10}^{(r)}}{\partial x}\right) + \beta_{10}^{(T)}\left(\beta_{10}^{(x)} + \frac{\partial B_{10}^{(r)}}{\partial x}\right)\right]\right. \\
&\quad + 2A_{01}^{(r)}\left(\alpha_{10}^{(T)}A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(T)}B_{10}^{(r)}\right) \\
&\quad \left. + \, 2\alpha_{10}^{(T)}\left(A_{10}^{(r)}A_{20}^{(r)} + B_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)}\right) + 2\beta_{10}^{(T)}\left(A_{10}^{(r)}B_{20}^{(r)} - A_{20}^{(r)}B_{10}^{(r)}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(2A_{01}^{(r)} + \frac{\partial \alpha_{00}^{(x)}}{\partial x}\right)\left(\alpha_{10}^{(T)}A_{10}^{(r)} + \beta_{10}^{(T)}B_{10}^{(r)}\right) \\
&+ \frac{c_p}{Pr}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial \alpha_{00}^{(T)}}{\partial x}\right) + 4\mu\alpha_{01}^{(T)} + \frac{\partial \mu}{\partial T}\left(\alpha_{10}^{(T)^2} + \beta_{10}^{(T)^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Annexe C

Solutions analytiques sur le tourbillon de Kirchhoff

C.1 Champ de vitesse initial

L'initialisation des calculs pour les tourbillons elliptiques nécessite de connaître l'expression du champ de vitesse initial en coordonnées cartésiennes. Les calculs sont initialisés par un tourbillon elliptique de Kirchhoff, qui est une solution analytique exacte des équations d'Euler en 2-D. C'est un tourbillon de vorticité ω constante dans l'ellipse et de vorticité nulle à l'extérieur. La frontière du tourbillon vérifie la relation $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, où a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse. On utilisera dans la suite deux autres quantités, r_e et ϵ, définies par $a = r_e(1+\epsilon)$ et $b = r_e(1-\epsilon)$; r_e est le rayon du cercle associé à l'ellipse et ϵ sera appelé le paramètre de l'ellipse. Quand $\epsilon = 0$, le tourbillon est circulaire. Le rapport de l'ellipse s'écrit enfin $\sigma = a/b = (1+\epsilon)/(1-\epsilon)$.

Love [93] et Lamb [83] ont montré qu'en l'absence de viscosité, le tourbillon de Kirchhoff tourne autour de son centre sans changement de forme, avec une vitesse angulaire $\Omega_\mathrm{th} = \omega ab/(a+b)^2 = \omega(1-\epsilon^2)/4$. Pour obtenir le champ de vitesse induit par le tourbillon, il faut raccorder un champ rotationnel, interne au tourbillon, à un champ potentiel extérieur au tourbillon. À l'intérieur de ce dernier les composantes de la vitesse selon x_1 et x_2 s'écrivent :

$$u_1 = -\frac{a\omega}{a+b}x_2, \quad u_2 = \frac{b\omega}{a+b}x_1$$

Pour exprimer le champ de vitesse à l'extérieur du tourbillon, Lamb [83] introduit les coordonnées elliptiques (ξ,η) définies par $x_1 = c\cosh(\xi)\cos(\eta)$ et $x_2 = c\sinh(\xi)\sin(\eta)$, où $c = (a^2-b^2)^{1/2}$. Le potentiel de vitesse est alors donné par :

$$\psi = \frac{1}{4}\Omega(a+b)^2 \ \exp(-2\xi)\cos(2\eta) + \frac{1}{2}\omega ab\xi \tag{C.1}$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse vérifient de plus :

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}$$

L'expression (C.1) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}\Omega(a+b)^2\ \exp(-2\xi)\cos(2\eta) + \frac{\omega ab}{2} \\
\frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2}\Omega(a+b)^2\ \exp(-2\xi)\sin(2\eta)
\end{aligned}$$

Pour disposer d'une formulation analytique de la vitesse en coordonnées cartésiennes, on doit exprimer les termes $\exp(-2\xi)$, $\cos(2\eta)$, $\sin(2\eta)$, $\partial\xi/\partial x_1$, $\partial\xi/\partial x_2$, $\partial\eta/\partial x_1$ et $\partial\eta/\partial x_2$ en fonction de x_1 et x_2. On commence tout d'abord par les exprimer en fonction de $\sinh\xi$, $\cosh\xi$ et de leurs dérivées suivant x_1 et x_2.

$$\begin{aligned}
\cos(2\eta) &= \cos^2(\eta) - \sin^2(\eta) = \left(\frac{x_1}{c\cosh(\xi)}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{c\sinh(\xi)}\right)^2 \\
\sin(2\eta) &= 2\sin(\eta)\cos(\eta) = \frac{2x_1x_2}{c^2\sinh(\xi)\cosh(\xi)} \\
\exp(-2\xi) &= (\cosh(\xi) - \sinh(\xi))^2
\end{aligned}$$

Les dérivées de ξ et η se calculent facilement :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \frac{1}{\cosh(\xi)}\frac{\partial \sinh(\xi)}{\partial x_1} \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \frac{1}{\sinh(\xi)}\frac{\partial \cosh(\xi)}{\partial x_2} \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{1}{\cos(\eta)}\frac{\partial \sin(\eta)}{\partial x_1} \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = -\frac{1}{\sin(\eta)}\frac{\partial \cos(\eta)}{\partial x_2} \tag{C.5}$$

En éliminant $\cos(\eta)$ et $\sin(\eta)$ dans (C.4) et (C.5) on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{x_1}\frac{\cosh(\xi)}{\sinh^2(\xi)}\frac{\partial \sinh(\xi)}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{x_2}\frac{\sinh(\xi)}{\cosh^2(\xi)}\frac{\partial \cosh(\xi)}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Pour finir, il ne reste plus qu'à exprimer $\sinh(\xi)$, $\cosh(\xi)$, $\partial\sinh(\xi)/\partial x_1$ et $\partial\cosh(\xi)/\partial x_2$ en fonction de x_1 et x_2. La définition des coordonnées elliptiques implique que le point (x_1, x_2) se trouve sur l'ellipse de demi-grand axe $c\cosh(\xi)$ et de demi-petit axe $c\sinh(\xi)$. Ainsi :

$$\frac{x_1^2}{(c\cosh\xi)^2} + \frac{x_2^2}{(c\sinh\xi)^2} = 1 \tag{C.6}$$

En remplaçant $\cosh^2(\xi)$ par $1+\sinh^2(\xi)$ ou $\sinh^2(\xi)$ par $\cosh^2(\xi)-1$ dans (C.6) et en résolvant les équations obtenues, on a finalement :

$$\begin{aligned}
\sinh(\xi) &= \frac{1}{c\sqrt{2}}\left[\lambda_- + \left(\lambda_-^2 + 4c^2x_2^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\
\cosh(\xi) &= \frac{1}{c\sqrt{2}}\left[\lambda_+ + \left(\lambda_+^2 - 4c^2x_1^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\
\frac{\partial \sinh(\xi)}{\partial x_1} &= \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{x_1}{\left[\lambda_- + (\lambda_-^2 + 4c^2x_2^2)^{1/2}\right]^{1/2}} \left[1 + \frac{\lambda_-}{(\lambda_-^2 + 4c^2y^2)^{1/2}}\right] \\
\frac{\partial \cosh(\xi)}{\partial y} &= \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{x_2}{\left[\lambda_+ + (\lambda_+^2 - 4c^2x_1^2)^{1/2}\right]^{1/2}} \left[1 + \frac{\lambda_+}{(\lambda_+^2 - 4c^2x_1^2)^{1/2}}\right]
\end{aligned}$$

où $\lambda_+ = x_1^2 + x_2^2 + c^2$ et $\lambda_- = x_1^2 + x_2^2 - c^2$.

Le champ de vitesse est maintenant entièrement formulé en coordonnées cartésiennes. On peut noter que les expressions de $\partial\eta/\partial x_1$ et $\partial\eta/\partial x_2$ sont singulières sur les axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ respectivement. Cette difficulté est toutefois aisément contournée en se rappelant que u_2 et u_1 sont nulles sur ces axes.

C.2 Formules analytiques du bruit rayonné en champ lointain

Cette partie détaille deux solutions analytiques du bruit émis par le tourbillon de Kirchhoff en champ lointain. La démarche employée pour déterminer ces expressions a été présentée par Howe [70] et Crighton *et al.* [38]. Dans la suite, les effets visqueux et les fluctuations d'entropie sont négligés.

On considère un écoulement incompressible contenu dans un volume V. On note respectivement $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\omega}$ les champs de vitesse et de vorticité. D'après l'analogie de Powell, les fluctuations de masse volumique à l'extérieur de l'écoulement s'expriment par :

$$\rho'(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\rho_\infty}{4\pi c_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u})_i \left(\boldsymbol{y}, t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c_\infty}\right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

où ρ_∞ et c_∞ sont respectivement la masse volumique et la vitesse du son dans le milieu ambiant, supposé au repos. En champ lointain, cette relation devient :

$$\rho'(t,\boldsymbol{x}) \approx -\frac{\rho_\infty}{4\pi c_\infty^4 |\boldsymbol{x}|} \frac{x_i x_j}{|\boldsymbol{x}|^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V y_j \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}\right)_i \left(\boldsymbol{y}, t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c_\infty}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \qquad \text{(C.7)}$$

On peut appliquer cette expression au cas d'un tourbillon de Kirchhoff isolé. Le champ de vitesse dans le tourbillon est, en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\omega r}{2} \left| \begin{array}{l} \sin(\theta) + \epsilon \sin\left(\theta - \frac{1-\epsilon^2}{2}\omega t\right) \\ -\cos(\theta) + \epsilon \cos\left(\theta - \frac{1-\epsilon^2}{2}\omega t\right) \end{array} \right.$$

Ces expressions sont valables quelle que soit la valeur du paramètre de l'ellipse ϵ. Dans ce qui suit, on suppose cependant que $\epsilon \ll 1$, et on ne conserve que le premier ordre en ϵ. Suivant cette restriction, la frontière du tourbillon s'écrit en coordonnées polaires $r = r_e[1 + \epsilon \cos(2\theta - \omega t/2)]$, et la vitesse angulaire du tourbillon devient $\Omega_{\mathrm{app}} = \omega/4$. En appliquant la méthode de la phase stationnaire dans l'intégrale (C.7) et en utilisant la relation $p(t,r,\theta) - \overline{p}(r,\theta) \approx c_\infty^2 \left[\rho(t,r,\theta) - \overline{\rho}(r,\theta)\right]$, le champ lointain de pression s'écrit alors :

$$p(t,r,\theta) - \overline{p}(r,\theta) \approx -\frac{\epsilon}{8}\left(\frac{2\pi r_e}{r}\right)^{1/2} \rho_\infty U^2 M^{3/2} \cos\left(2\theta - \frac{\omega t_{\mathrm{r}}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{C.8}$$

avec $U = r_e\omega/2$, $M = U/c_\infty$ et t_{r} est le temps retardé $t - r/c_\infty$. Cette expression n'est valable que dans le champ acoustique lointain d'un tourbillon de Kirchhoff de rapport σ proche de 1 ($\epsilon \ll 1$). On remarque que la pression décroît en $r^{-1/2}$, conformément à la géométrie 2-D du problème. On note aussi que l'amplitude du bruit est proportionnelle à ϵ tandis que la fréquence est constante et ne varie pas avec le rapport de l'ellipse. Ainsi, les effets de ϵ sur la fréquence ne sont pas pris en compte.

Les résultat présentés dans le chapitre 2 montrent que la forme du tourbillon évolue lorsque le rapport σ n'est pas voisin de 1. Dans ce cas, σ et Ω varient au cours du temps. Les grandeurs intervenant dans la formulation (C.8) doivent alors être prises au temps retardé t_{r} pour tenir compte du temps de propagation entre l'émission et la réception du bruit. De plus, si ϵ n'est pas négligeable la vitesse angulaire approchée $\Omega_{\mathrm{app}} = \omega/4$ peut différer significativement de la vitesse théorique $\Omega_{\mathrm{th}} = \omega(1-\epsilon^2)/4$, et donc de la vitesse calculée. Dans ce cas, l'expression (C.8) ne permet pas de prédire convenablement le bruit rayonné. Une formulation généralisée, qui tient compte des effets de ϵ aussi bien dans la fréquence que dans l'amplitude, peut alors être obtenue en remarquant que $\omega t_{\mathrm{r}}/4$ est la position angulaire du tourbillon, notée α_{r}, au temps retardé t_{r}. Dans le cas d'un tourbillon elliptique dont le rapport et la vitesse angulaire varient avec t, le champ acoustique lointain peut s'exprimer alors par :

$$p(t,r,\theta) - \overline{p}(r,\theta) \approx -\frac{\epsilon_{\mathrm{r}}}{8}\left(\frac{2\pi r_{\mathrm{er}}}{r}\right)^{1/2} \rho_\infty U_{\mathrm{r}}^2 M_{\mathrm{r}}^{3/2} \cos\left(2(\theta - \alpha_{\mathrm{r}}) + \frac{\pi}{4}\right) \tag{C.9}$$

où l'indice r indique que la quantité est prise au temps retardé. Cette nouvelle expression fournit une meilleure description de la fréquence du bruit rayonné car celle-ci est directement reliée au mouvement réel du tourbillon.

Bibliographie

[1] Andersson, N., Eriksson, L., and Davidson, L. Effects of inflow conditions and subgrid model on LES for turbulent jets. No. 2005-2925, 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[2] Andersson, N., Eriksson, L., and Davidson, L. Investigation of an isothermal Mach 0.75 jet and its radiated sound using large-eddy simulation and Kirchhoff surface integration. *International Journal of Heat and Fluid Flow 26* (2005), 393–410.

[3] Andersson, N., Eriksson, L., and Davidson, L. Large-eddy simulation of subsonic turbulent jets and their radiated sound. *AIAA J. 43*, 9 (2005), 1899–1912.

[4] Andersson, N., Eriksson, L., and Davidson, L. LES prediction of flow and acoustic field of a coaxial jet. No. 2005-2884, 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[5] Arakeri, V. H., Krothapalli, A., Siddavaram, V., Alkislar, M. B., and Lourenco, L. On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet. *J. Fluid Mech. 409* (2003), 75–98.

[6] Bailly, C., and Comte-Bellot, G. *Turbulence.* CNRS Éditions, Paris, 2003.

[7] Bardina, J., Ferziger, J. H., and Reynolds, W. C. Improved subgrid scale models for Large Eddy Simulation. No. 1980-1357, 13th AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference.

[8] Bass, H. E., Sutherland, L. C., and Zuckerwar, A. J. Atmospheric absorption of sound : Update. *Journal of Acoustical Society of America 88*, 4 (1990), 2019–2021.

[9] Bass, H. E., Sutherland, L. C., Zuckerwar, A. J., Blackstock, D. T., and Hester, D. M. Atmospheric absorption of sound : Further developments. *Journal of Acoustical Society of America 97*, 1 (1995), 680–683.

[10] Berland, J. *Simulation des grandes échelles du screech d'un jet supersonique.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.

[11] Bodony, D. J., and Lele, S. K. Jet noise prediction of cold and hot subsonic jets using large-eddy simulation. No. 2004-3022, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[12] Bodony, D. J., and Lele, S. K. Generation of low frequency sound in turbulent jets. No. 2005-3041, 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[13] Bodony, D. J., and Lele, S. K. On using large-eddy simulation for the prediction of noise from cold and heated turbulent jets. *Phys. Fluids 17*, 8 (2005).

[14] Bogey, C. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2000.

[15] Bogey, C., and Bailly, C. LES of a high Reynolds number jet for acoustics. Workshop on LES for Acoustics (2002).

[16] Bogey, C., and Bailly, C. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulation : far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acustica 88* (2002), 463–471.

[17] Bogey, C., and Bailly, C. LES of a high Reynolds, high subsonic jet : effects of the subgrid scale modelling on flow and noise. No. 2003-3557, 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[18] Bogey, C., and Bailly, C. Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible LES. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics 16*, 4 (2003), 273–297.

[19] Bogey, C., and Bailly, C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computation. *Journal of Computational Physics 194* (2004), 194–214.

[20] Bogey, C., and Bailly, C. Investigation of subsonic jet noise using LES : Mach and Reynolds number effects. No. 2004-3023, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. To appear in TCFD (2006).

[21] Bogey, C., and Bailly, C. Effects of inflow conditions and forcing on a Mach 0.9 jet and its radiated noise. *AIAA J. 43*, 5 (2005), 1000–1007.

[22] Bogey, C., and Bailly, C. Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic smagorinsky model. vol. 2, Turbulence and Shear Flow Phenomena-4, pp. 817–822. To appear in Int. J. Heat and Fluid Flow, 2006.

[23] Bogey, C., and Bailly, C. Technical notes : Decrease of the effective Reynolds number with eddy-viscosity subgrid-scale modeling. *AIAA J. 43*, 2 (2005), 437–439.

[24] Bogey, C., Bailly, C., and Juvé, D. Computation of the sound radiated by a 3-D jet using Large Eddy Simulation. No. 2000-2009, 6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[25] Boris, J. B., Grinstein, F. F., Oran, E. S., and Kolbe, R. K. New insights into large eddy simulation. *Fluid Dynamics Research 10* (1992), 199–228.

[26] Brentner, K. S. Analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces. *AIAA J. 36*, 8 (1998), 1379–1386.

[27] Bridges, J., and Hussain, F. Direct evaluation of aeroacoustic theory in a jet. *J. Fluid Mech. 240* (1992), 469–501.

[28] Bridges, J., and Hussain, F. Effects of nozzle body on jet noise. *Journal of Sound and Vibration 188*, 3 (1995), 407–418.

[29] Carslaw, H. S., and Jaeger, J. C. *Conduction of heat in solids.* Oxford Science Publications, 1959.

[30] Chow, F. K., and Moin, P. A further study of numerical errors in Large-Eddy Simulations. *Journal of Computational Physics 184* (2003), 366–380.

[31] Colonius, T., Basu, A. J., and Rowley, C. W. Numerical investigation for the flow past a cavity. No. 1999-1912, 5th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference.

[32] Colonius, T., Lele, S. K., and Moin, P. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. *AIAA J. 31*, 9 (1994), 1574–1582.

[33] Colonius, T., Lele, S. K., and Moin, P. Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech. 330* (1997), 375–409.

[34] Constantinescu, C. S., and Lele, S. K. A highly accurate technique for the treatment of flow equations at the polar axis in cylindrical coordinates using series expansions. *Journal of Computational Physics 183* (2002), 165–186.

[35] Constantinescu, G. S., and Lele, S. K. Large Eddy Simulation of a near sonic turbulent jet and its radiated noise. No. 2001-0376, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.

[36] Constantinescu, V. M. *Laminar viscous flow.* Mechanical Engineering Series, Spinger. F. F. Ling, 1995.

[37] Crighton, D. G. The excess noise field of subsonic jets. *J. Fluid Mech. 56*, 4 (1972), 683–694.

[38] Crighton, D. G., Dowling, A. P., William, J. E. F., Heckl, M., and Leppington, F. G. *Modern methods in analytical acoustics.* Springer, 1992.

[39] Crow, S. C., and Champagne, F. H. Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech. 48* (1971), 547–591.

[40] Dahan, C., and Elias, G. Source structure in a hot jet by infared-microphones correlations. No. 1976-542, 3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[41] Dahan, C., Elias, G., Maulard, J., and Perulli, M. Coherent structures in the mixing zone of a subsonic hot free jet. *Journal of Sound and Vibration 59*, 3 (1978), 313–333.

[42] Debonis, J., and Scott, J. A large-eddy simulation of a turbulent compressible round jet. *AIAA J. 40*, 7 (2002), 1346–1354.

[43] DeBonis, J. R. A large-eddy simulation of a high Reynolds number Mach 0.9 jet. No. 2004-3025, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[44] Domaradski, J. A., and Adams, N. A. Direct modelling of subgrid scales of turbulence in large eddy simulations. *Journal of Turbulence 3* (2002), 1–19.

[45] Domaradski, J. A., and Yee, P. The subgrid-scale estimation model for high Reynolds number turbulence. *Phys. Fluids 12*, 1 (2000).

[46] Dritschel, D. G. The stability and energetics of corotating uniform vortices. *J. Fluid Mech. 157* (1985), 95–134.

[47] Dritschel, D. G. The nonlinear evolution of rotating configurations of uniform vorticity. *J. Fluid Mech. 172* (1986), 157–182.

[48] Dritschel, D. G. On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows. *J. Fluid Mech. 371* (1998), 141–155.

[49] Dritschel, D. G., and Legras, B. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. II : disturbance equations. *Phys. Fluids 3*, 5 (1991), 855–869.

[50] Eggels, J. G. M., Unger, F., Weiss, M. H., Westerweel, J., Adrian, R. J., Friedrich, R., and Nieuwstadt, F. T. M. Fully developed turbulent pipe flow : a comparison between direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid Mech. 268* (1994), 175–209.

[51] Erlebacher, G., Hussaini, M. Y., Speziale, C. G., and Zang, T. A. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows. *J. Fluid Mech. 238* (1992), 155–185.

[52] Ffowcs-Williams, J. E., and Hawkings, D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. In *Phil. Trans. Roy. Soc. London* (1969), no. 1151 in Ser. A, pp. 321–342.

[53] Fisher, M. J., Lush, P. A., and Bourne, H. Jet noise. *Journal of Sound and Vibration 28*, 3 (1973), 563–585.

[54] Fleury, V. *Étude expérimentale du bruit des jets subsoniques.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.

[55] Freund, J. B. Acoustic sources in a turbulent jet : a direct numerical study. No. 1999-1858, 5th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference.

[56] Freund, J. B. Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9. *J. Fluid Mech. 438* (2001), 277–305.

[57] Freund, J. B., Lele, S. K., and Moin, P. Direct simulation of a Mach 1.92 jet and its sound field. No. 1998-2291.

[58] Freund, J. B., Moin, P., and Lele, S. K. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. Tech. Rep. TF-72, Flow Physics and Computation Division Department of Mechanical Engineering of Stanford University, Stanford, California 94305, September 1997.

[59] Gavelle, N., Mary, I., Elias, G., and Sagaut, P. Large-eddy simulation of a subsonic hot jet at high Reynolds number. No. 2003-3556, 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.

[60] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., and Cabot, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids 3*, 7 (July 1991), 1760–1765.

[61] Geurts, B. J. Inverse modeling for large-eddy simulation. *Phys. Fluids 9*, 12 (1997), 3585–3587.

[62] Ghosal, S. An analysis of numerical errors in Large-Eddy Simulations of turbulence. *Journal of Computational Physics 125* (1996), 187–206.

[63] Ghosal, S. Mathematical and physical constraints on large-eddy simulation of turbulence. *AIAA J. 37*, 4 (1999), 425–433.

[64] Giles, M. B. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations. *AIAA J. 28*, 12 (1990), 2050–2058.

[65] Gloerfelt, X. *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2001.

[66] Gloerfelt, X., Bailly, C., and Juvé, D. Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods. *Journal of Sound and Vibration 266*, 1 (2003), 119–146.

[67] GLOERFELT, X., BOGEY, C., AND BAILLY, C. Numerical evidence of mode switching in the flow-induced oscillations by a cavity. *International Journal of Aeroacoustics 2*, 2 (2003), 193–217.

[68] GLOERFELT, X., BOGEY, C., BAILLY, C., AND JUVÉ, D. Aerodynamic noise induced by laminar and turbulent boundary layer over rectangular cavities. No. 2002-2476, 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[69] GOLDSTEIN, M. E. An exact form of Lilley's equation with a velocity quadrupole/temperature dipole source term. *J. Fluid Mech. 443* (2001), 231–236.

[70] HOWE, M. S. Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech. 71*, 625-673 (1975).

[71] HOWE, M. S. The generation of sound by aerodynamic sources in an homogeneous steady flow. *J. Fluid Mech. 67*, 3 (1975), 597–610.

[72] HU, F. Q., HUSSAINI, M. Y., AND MANTHEY, J. L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics 124*, 1 (1996), 177–191.

[73] HUSAIN, Z. D., AND HUSSAIN, A. K. M. F. Axisymmetric mixing layer : influence of the initial and boundary conditions. *AIAA J. 17*, 1 (1979), 48–55.

[74] HUSSAIN, A. K. M. F., AND ZEDAN, M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer : Effects of the initial fluctuation level. *Phys. Fluids 21*, 9 (1978), 1475–1481.

[75] HUSSAIN, A. K. M. F., AND ZEDAN, M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer : Effects of the initial momentum thickness. *Phys. Fluids 21*, 7 (1978), 1100–1112.

[76] JORDAN, P., COIFFET, F., DELVILLE, J., GERVAIS, Y., AND RICAUD, F. Acoustic-hydrodynamic interaction in the entrainment region of a subsonic jet flow. No. 2004-3020, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[77] JORDAN, P., AND GERVAIS, Y. Nearfield acoustic and 2-pt LDV results. Tech. Rep. delivrable 3.6b, European project Jet Exhaust Aerodynamics and Noise, 2003.

[78] KAMBE, T. Acoustic emissions by vortex motions. *JFM 173*, 643-666 (1986).

[79] KEIDERLING, F., MÜLLER, S. B., AND KLEISER, L. Large-eddy simulation of round jet flow using the approximate deconvolution model. Euromech Colloquium no. 467 (2005).

[80] Kim, J., and Choi, H. Effect of the initial momentum thickness on the acoustic source in an incompresible round jet. No. 2004-2949, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[81] Kim, J., Moin, P., and Moser, R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech. 177* (1987), 133–166.

[82] Kravchenko, A. G., and Moin, P. On the effect of the numérical errors in Large Eddy Simulations of turbulent flows. *Journal of Computational Physics 131* (1997), 310–322.

[83] Lamb, S. H. *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, 1932.

[84] Lau, J. C. Effects of exit Mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets. *J. Fluid Mech. 105* (1981), 193–218.

[85] Lau, J. C., Morris, P. J., and Fisher, M. J. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter. *J. Fluid Mech. 93*, 1 (1979), 1–27.

[86] Lee, D. J., and Koo, S. O. Numerical study of sound generation due to a spinning vortex pair. *AIAA J. 33*, 1 (1995), 20–26.

[87] Legras, B., and Dritschel, D. G. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. I : the basic state. *Phys. Fluids 3*, 5 (1991), 845–854.

[88] Lesieur, M., and Métais, O. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *ARFM 28* (1996), 45–82.

[89] Lew, P., Uzun, A., Blaisdell, G. A., and Lyrintzis, A. S. Effects of inflow forcing on jet noise using large eddy simulation. No. 2004-0516, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[90] Lighthill, M. J. On sound generated aerodynamically - I General theory. In *Proc. Roy. Soc. London* (1952), no. 1107 in Ser. A, pp. 564–587.

[91] Lilley, G. M. The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II : Generation of sound in a mixing region. Tech. Rep. AFAPL-TR-72-53, Air Force Aero Propulsion Laboratory, 1972.

[92] Liu, S., Meneveau, C., and Katz, J. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech. 275* (1994), 83–119.

[93] Love, A. E. H. On the stability of certain vortex motions. In *Proc. Lond. Math. Soc.* (1893), vol. 35, pp. 18–42.

[94] LUSH, P. A. Measurement of subsonic jet noise and comparaison with theory. *J. Fluid Mech. 46*, 3 (1971), 477–500.

[95] LUSH, P. A. The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol V. Tech. Rep. AFAPL-TR-72-53, Air Force Aero Propulsion Laboratory, 1972.

[96] MAESTRELLO, L. *Two point correlations of sound pressure in the far field of a jet : experiment.* NASA-TMX-72835, 1976.

[97] MARSDEN, . *Calcul direct du rayonnement acoustique de profils par une approche curviligne d'ordre élevé.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005.

[98] MATHEW, J., LECHNER, R., FOYSI, H., SESTERHENN, J., AND FRIEDRICH, R. An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows. *Phys. Fluids 15*, 8 (2003), 2279–2289.

[99] MELANDER, M. V., MCWILLIAMS, J. C., AND ZABUSKY, N. J. Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation. *J. Fluid Mech. 178* (1987), 137–159.

[100] MELANDER, M. V., ZABUSKY, N. J., AND MCWILLIAMS, J. C. Symmetric vortex merger in two dimensions : causes and conditions. *J. Fluid Mech. 195* (1988), 303–340.

[101] MIAZAKI, T., AND HANAZAKI, H. Baroclinic instability of kirchhoff's elliptic vortex. *J. Fluid Mech. 261* (1994), 253–271.

[102] MIAZAKI, T., HIRAHARA, K., AND HANAZAKI, H. The quasi-three-dimensional instability of an elliptical vortex subjet to a strain field in a rotating stratified fluid. *Fluid Dynamics Research 21* (1997), 359–380.

[103] MITCHELL, B. E., LELE, S. K., AND MOIN, P. Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair. *J. Fluid Mech. 285* (1995), 181–202.

[104] MITCHELL, B. E., LELE, S. K., AND MOIN, P. Direct computation of the sound generated by subsonic and supersonic axisymmetric jets. Tech. Rep. TF-66, Thermosciences Division Department of Mechanical Engineering of Stanford University, Stanford, California 94305, November 1995.

[105] MITCHELL, B. E., LELE, S. K., AND MOIN, P. Direct computation of Mach wave radiation in an axisymmetric supersonic jet. *AIAA J. 35*, 10 (1997), 1574–1580.

[106] MITCHELL, B. E., LELE, S. K., AND MOIN, P. Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet. *J. Fluid Mech. 383* (1999), 113–142.

[107] Mohseni, K., and Colonius, T. Numerical treatment of polar coordinate singularities. *Journal of Computational Physics 157* (2000), 787–795.

[108] Moin, P., Squires, K., Cabot, W., and Lee, S. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Phys. Fluids 3*, 11 (November 1991), 2746–2757.

[109] Mollo-Christensen, E., Kolpin, M. A., and Martucelli, J. R. Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. *J. Fluid Mech. 18* (1964), 285–301.

[110] Morris, P. J., Long, L. N., Scheidegger, T. E., and Boluriaan, S. Simulations of supersonic jet noise. *International Journal of Aeroacoustics 1* (2002), 17–41.

[111] Phillips, O. M. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *J. Fluid Mech. 9*, 1 (1960), 1–28.

[112] Poinsot, T. J., and Lele, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics 101* (1992), 104–129.

[113] Powell, A. Theory of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am. 36*, 1 (1964), 177–195.

[114] Rizzetta, D. P., Visbal, M. R., and Blaisdell, G. A. A time-implicit high-order compact differencing and filtering scheme for large-eddy simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids 42*, 6 (2003), 665–693.

[115] Sagaut, P. *Introductionà la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressibles.* collection Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, 1998.

[116] Salvetti, M. V., and Banerjee, S. A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations. *Phys. Fluids 7*, 11 (1995), 2831–2847.

[117] Scully, M. P. *Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads.* Pub. ARSL TR 178-1, Cambridge, MA, 1975.

[118] Seiner, J. M., McLaughlin, D. K., and Liu, C. H. Supersonic jet noise generated by large-scale instabilities. Technical paper 2072, NASA, 1982.

[119] Seiner, J. M., and Ponton, M. K. Aeroacoustic data for high Reynolds number supersonic axisymmetric jets. NASA TM 86296, NASA, 1985.

[120] Seror, C., Sagaut, P., Bailly, C., and Juvé, D. Subgrid-scale contribution to noise production in decaying isotropic turbulence. *AIAA J. 38*, 10 (2000), 1795–1803.

[121] Seror, C., Sagaut, P., Bailly, C., and Juvé, D. On the radiated noise computed by large-eddy simulation. *Phys. Fluids 13*, 2 (2001), 476–487.

[122] Shur, M. L., Spalart, P. R., Strelets, M. K., and Travin, A. K. Toward the prediction of noise from jet engines. *International Journal of Heat and Fluid Flow 24* (2003), 551–561.

[123] Smagorinsky, J. S. General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment. *Mon. Weath Rev. 91* (1963), 99–163.

[124] Stefano, G. D., and Vasilyev, O. V. Sharp cutoff versus smooth filtering in Large-Eddy simulation. *Phys. Fluids 14*, 1 (2002), 362–369.

[125] Stolz, S., and Adams, N. A. An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation. *Phys. Fluids 11*, 7 (1999), 1699–1701.

[126] Stromberg, J. L., McLaughlin, D. K., and Troutt, T. R. Flow field and acoustic properties of a Mach number 0.9 jet at a low Reynolds number. *Journal of Sound and Vibration 72*, 2 (1980), 159–176.

[127] Sunyach, M., Brunel, B., and Comte-Bellot, G. Performances de la soufflerie anéchoïque à grande vitesse de l'École Centrale de Lyon. *Revue d'Acoustique 73* (1985), 316–330.

[128] Tam, C. K. W. Computational aeroacoustics : Issues and methods. *AIAA J. 33*, 10 (1995), 1788–1796.

[129] Tam, C. K. W. Supersonic jet noise. *Annual Review of Fluid Mechanic 27* (1995), 17–43.

[130] Tam, C. K. W. Jet noise : Since 1952. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics 10* (1998), 393–405.

[131] Tam, C. K. W. Computational aeroacoustics examples showing the failure of the acoustic analogy theory to identify the correct noise sources. *Journal of Computational Acoustics 10*, 4 (2002), 387–405.

[132] Tam, C. K. W. Further consideration of the limitations and validity of the acoustic analogy theory. No. 2002-2425, 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[133] Tam, C. K. W., and Burton, D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. part 1, two-domensional mixing layers ; part 2, axisymmetric jets. *J. Fluid Mech. 138* (1984), 249–295.

[134] Tam, C. K. W., and Dong, Z. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comput. Acous. 4*, 2 (1996), 175–201.

[135] Tam, C. K. W., Golebiowski, M., and Seiner, J. M. On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets. 1996-1716, 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[136] Tam, C. K. W., and Pastouchenko, N. N. On the two sources of supersonic jet noise. No. 2003-3163, 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[137] Tam, C. K. W., and Shen, H. Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high order finite difference schemes. No. 1993-4325, 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[138] Tam, C. K. W., and Webb, J. C. Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics 107* (1993), 262–281.

[139] Tam, C. K. W., Webb, J. C., and Dong, Z. A study of the short wave components in computational acoustics. *Journal of Computational Acoustics 1*, 1 (1993), 1–10.

[140] Tanna, H. K. The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol III. Tech. Rep. AFAPL-TR-76-65, Air Force Aero Propulsion Laboratory, 1976.

[141] Tanna, H. K. An experimental study of jet noise – part I : turbulent mixing noise. *Journal of Sound and Vibration 50*, 3 (1977), 405–428.

[142] Thompson, K. W. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics 68* (1987), 1–24.

[143] Thompson, K. W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II. *Journal of Computational Physics 89* (1990), 439–461.

[144] Ukeiley, L. S., and Ponton, M. K. On the near field pressure of a transonic axisymmetric jet. *Int. Journal of Aeroacoustics 3*, 1 (2004), 43–66.

[145] Visbal, M. R., Morgan, P. E., and Rizetta, D. P. An implicit LES approach based on high-order compact differencing and filtering schemes (invited). No. 2003-4098, 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.

[146] Visbal, M. R., and Rizzetta, D. P. Large-eddy simulation on curvilinear grids using compact differencing and filtering schemes. *Journal of Fluids Engineering 124*, 4 (2002), 836–847.

[147] Viswanathan, K. Aeroacoustics of hot jets. No. 2002-2481, 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

[148] Viswanathan, K. Analysis of the two similarity components of turbulent mixing noise. *AIAA J. 40*, 9 (2002), 1735–1744.

[149] Viswanathan, K., and Clark, L. T. Effect of the nozzle internal contour on jet aeroacoustics. *International Journal of Aeroacoustics 3*, 2 (2004), 103–135.

[150] Viswanathan, K., Shur, M., Strelets, M., and Spalart, P. R. Numerical prediction of noise from round and beveled nozzles. Euromech Colloquium no. 467 (2005).

[151] Vosbeek, P. W. C., van Heijst, G. J. F., and Mogendorff, V. P. The strain rate in evolution of (elliptical) vortices in inviscid two-dimensional flows. *Phys. Fluids 13*, 12 (2001), 3699–3708.

[152] Vreman, B., Geurts, B., and Kuerten, H. Subgrid-modelling in LES of compressible flow. *Applied Scientific Research 54* (1995), 191–203.

[153] Vreman, B., Geurts, B., and Kuerten, H. Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech. 339* (1997), 357–390.

[154] Vreman, B., Geurts, B., and Kuerten, J. G. M. On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model. *Phys. Fluids 6*, 12 (1994), 4057–4059.

[155] Yu, J. C., and Dosanjh, D. S. Noise field of a supersonic Mach 1.5 cold model jet. *Journal of Acoustical Society of America 51*, 5 (1972).

[156] Zaman, K. B. M. Q. Effect of initial condition on subsonic jet noise. *AIAA J. 23* (1985), 1370–1373.

[157] Zaman, K. B. M. Q. Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation. *J. Fluid Mech. 152* (1985), 83–111.

[158] Zaman, K. B. M. Q. Flow field and near and far sound field of a subsonic jet. *Journal of Sound and Vibration 106*, 1 (1986), 1–16.

[159] Zaman, K. B. M. Q. Spreading characteristics of compressible jets from nozzles of various geometries. *J. Fluid Mech. 383* (1999), 197–228.

[160] Zaman, K. B. M. Q., Wang, F. Y., and Georgiadis, N. J. Noise, turbulence and thrust of subsonic freejets from lobed nozzles. *AIAAJ 41*, 3 (2003), 398–407.

[161] Zaman, K. B. M. Q., and Yu, J. C. Power spectral density of subsonic jet noise. *J. Sound and Vib. 98*, 4 (1985), 519–537.

[162] Zhao, W., Frankel, S., and Mongeau, L. Large-eddy simulation of sound radiation from subsonic turbulent jets. *AIAA J. 39*, 8 (2001), 1469–1477.

[163] Zoppellari, E., and Juvé, D. Reduction of jet noise by water injection. No. 1997-1622, 3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.