

N° d'ordre : 2006-19

ANNÉE 2006

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Julien BERLAND

Modélisation des erreurs numériques dans une
simulation des grandes échelles et étude du screech
dans un jet rectangulaire supersonique

Soutenue le 22 juin 2006 devant la Commission d'Examen

JURY

M. C. BAILLY
M. C. BOGEY
M. P. BONTOUX (Président)
M. P. COMTE
M. R. FRIEDRICH (Rapporteur)
M. C. HIRSCH (Rapporteur)
M. D. JUVÉ

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509
École Centrale de Lyon

Remerciements

Ce travail de thèse, qui a débuté en Octobre 2002, s'est déroulé au Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'École Centrale de Lyon, et a été effectué dans le cadre du projet de recherche DFG/DNRS "Noise Generation in Turbulent Flows".

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Christophe Bailly et Christophe Bogey, pour leur soutien quotidien et leurs précieux conseils. J'associe à ces remerciements Daniel Juvé pour m'avoir accueilli au sein du groupe Acoustique du LMFA et pour avoir bien voulu faire partie du jury. Toute ma reconnaissance s'adresse à Rainer Friedrich et Charles Hirsch qui me font l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Patrick Bontoux et Pierre Comte d'avoir accepté de juger mon travail et d'être membres du jury.

Je voudrais aussi remercier l'ensemble du personnel du LMFA pour les échanges fructueux et l'ambiance sympathique qui m'ont accompagné durant ces années de thèse.

Résumé de la thèse

Ce travail de thèse est consacré au calcul direct du screech des jets supersoniques à partir des équations de Navier-Stokes.

Le bruit des jets supersoniques choqués est constitué de trois composantes majeures : le bruit des structures turbulentes, le bruit de choc et le bruit de screech. Le screech est un rayonnement harmonique intense observé vers l'amont de l'écoulement, résultant d'une boucle de rétroaction. L'interaction des structures turbulentes avec le réseau quasi-périodique des cellules de choc peut en effet produire une onde acoustique qui se propage vers l'amont du jet. La boucle se referme au niveau de la lèvre de la tuyère où la couche de mélange est alors excitée par l'onde acoustique.

Les investigations antérieures de la littérature ont montré la complexité des mécanismes liés au screech. La Simulation des Grandes Échelles (SGE) compressible permet maintenant d'accéder aux détails du développement turbulent d'écoulements réalistes à haut nombre de Reynolds, et au champ acoustique rayonné. La méthode utilisée pour la SGE requiert l'utilisation d'algorithmes peu dissipatifs afin de minimiser la dissipation appliquée aux échelles résolues. Les schémas numériques doivent de plus pouvoir calculer les fluctuations acoustiques très petites par rapport au champ aérodynamique.

La première étape du travail de thèse s'est concentrée sur le développement d'un solveur des équations de Navier-Stokes 3-D, adapté aux écoulements supersoniques. Afin de développer des techniques numériques pour ce type de simulations, des schémas de différenciation spatiale et de filtrage sélectif ont été mis au point pour l'implémentation de conditions aux limites de paroi, et pour le raccordement de maillages entre champ proche et champ lointain. Un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre à stockage réduit a aussi été construit pour une meilleure résolution des effets non-linéaires. La précision des schémas a été minutieusement évaluée par des cas tests représentatifs de l'aéroacoustique numérique.

Le problème de l'influence du choix des algorithmes de discrétisation sur la précision d'une SGE filtrée explicitement a également été abordé. Un outil d'analyse des erreurs numériques commises lors de la SGE d'un cube de turbulence homogène isotrope incompressible a ainsi été développé, et a permis de montrer que les schémas d'ordre élevé peu dispersifs et peu dissipatifs présentent un bon compromis entre précision et coût informatique.

Finalement, un jet 3-D plan sous-détendu à nombre de Mach équivalent $M_j = 1.55$ et au nombre de Reynolds $Re_h = 6 \times 10^4$ a été simulé. La structure du jet choqué et son développement turbulent ont été fidèlement reproduits et le rayonnement acoustique observé en amont pour ce calcul se compare favorablement aux mesures expérimentales en terme de fréquence, de niveau, et de répartition de phase de part et d'autre de la tuyère. Des visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique ont fait apparaître que le choc de compression de la troisième cellule tend à pénétrer la couche de mélange au niveau des zones de faible vorticité localisées entre les structures coh erentes associées   l'excitation de la boucle de rétroaction   l'origine du screech. Ces observations ont confirmé l'hypothèse de génération de bruit par le mécanisme de "fuite" des chocs (*shock-leakage*).

Table des matières

Introduction	1
1 Rayonnement de screech des jets supersoniques rectangulaires	5
1.1 Caractéristiques des jets en présence du screech	8
1.1.1 Champ acoustique amont	8
1.1.2 Cellules de choc	12
1.1.3 Développement turbulent	15
1.1.4 Champ proche de pression	19
1.1.5 Interprétation des sources du screech à l'aide de l'acoustique géométrique	20
1.2 Modélisation et prédiction du screech	20
1.2.1 Fréquence fondamentale - Modèle de Tam	20
1.2.2 Prédominance du mode symétrique et du mode antisymétrique	24
1.2.3 Amplitude	24
1.3 Simulation numérique du screech	25
1.4 Conclusion	28
2 Simulation des grandes échelles pour le calcul aéroacoustique	29
2.1 Simulation des grandes échelles compressible	29
2.1.1 Principe	29
2.1.2 Équations de Navier-Stokes compressibles filtrées	30
2.1.3 Fermeture des équations filtrées	32
2.2 Traitement des points intérieurs	37
2.2.1 Système d'équations	37
2.2.2 Algorithmes numériques	39
2.3 Conditions limites	42
2.3.1 Conditions de rayonnement de Tam & Dong	42
2.3.2 Méthode des caractéristiques d'entrée d'écoulement	44
2.3.3 Élaboration de la zone éponge	45
2.3.4 Correction des champs moyens	46
2.3.5 Conditions de périodicité	46
2.3.6 Conditions de paroi solide	46
2.4 Résolution numérique des chocs	47
2.4.1 Méthodes numériques spécifiques	48
2.4.2 Résolution des chocs avec des méthodes numériques d'ordre élevé	49
2.5 Conclusion	56

3	Analyse des erreurs numériques pour la simulation des grandes échelles	57
3.1	Erreur totale d'une SGE	58
3.1.1	Définitions	58
3.1.2	Formulation explicite	66
3.2	Densité spectrale de puissance de l'erreur totale dans l'hypothèse d'une turbulence homogène isotrope	76
3.2.1	Formulations basées sur le spectre de l'énergie cinétique	76
3.2.2	Résultats	81
3.3	Dissipations visqueuse et numérique	90
3.3.1	Bilan de l'énergie cinétique	90
3.3.2	Spectre de Von-Kármán & Saffman	91
3.3.3	Lois d'évolution des dissipations visqueuses et numériques	92
3.3.4	Résultats pour des différences finies et des filtres discrets	95
3.4	Conclusion	98
4	Développement de schémas optimisés pour le calcul aéroacoustique	101
4.1	Algorithme de Runge-Kutta optimisé d'ordre quatre à stockage réduit	102
4.1.1	Construction de l'algorithme de Runge-Kutta	102
4.1.2	Cas test	106
4.2	Schémas explicites décentrés optimisés dans l'espace de Fourier	109
4.2.1	Différences finies	109
4.2.2	Filtres sélectifs	113
4.2.3	Propagation linéaire monodimensionnelle	116
4.3	Conclusion	120
5	Simulation des grandes échelles du screech d'un jet plan sous-détendu	123
5.1	SGE compressible d'un jet plan sous-détendu	123
5.1.1	Stratégie pour la SGE et méthodes numériques	123
5.1.2	Paramètres de simulation	124
5.2	Résultats et validation	126
5.2.1	Instantané des champs de vorticité et de pression	126
5.2.2	Champ moyen	127
5.2.3	Modes d'oscillation de la couche de mélange	130
5.2.4	Champ acoustique	138
5.3	Visualisation de l'écoulement : interaction entre les chocs et les structures cohérentes	147
5.4	Conclusion	150
	Conclusion	153
A	Structure des cellules de choc des jets supersoniques	157
B	Développement des équations de Navier-Stokes sur une paroi solide	161

C	Développements théoriques pour l'analyse des erreurs numériques d'une SGE	167
C.1	Hypothèse de Millionshchikov dans l'espace spectral	167
C.2	Limite de la somme $S_1(\mathbf{k})$ pour un domaine infini	168
C.3	Calcul de l'intégrale $J_{f,mpnq}$	170
C.4	Bilan de l'énergie cinétique du système discret	171
D	Définitions des cas test d'intégration temporelle et coefficients des algorithmes numériques	175
D.1	Définition des cas test \mathbf{A}_1 d'intégration temporelle	175
D.2	Coefficients des algorithmes numériques	175
E	Différences finies et filtres sélectifs de raccordement de maillages	181
E.1	Différences finies	181
E.2	Filtres sélectifs	186
E.3	Cas test	190
E.3.1	Convection linéaire	190
E.3.2	Comparaison avec la méthode d'étirement du maillage	193
E.4	Conclusion	194
	Bibliographie	195

Table des figures

1.1	Spectre du signal de pression mesuré en champ lointain pour un jet circulaire choqué.	6
1.2	Spectres en tiers-d’octave du champ lointain de pression d’un jet supersonique en fonction de l’angle d’observation.	7
1.3	Vue schématique des différents éléments qui composent la boucle de rétroaction du screech.	8
1.4	Photographie Schlieren du screech d’un jet supersonique rectangulaire.	8
1.5	Fréquence du screech en fonction du nombre de Mach équivalent M_j pour des jets rectangulaires et des jets ronds.	9
1.6	Amplitude du screech au voisinage de la lèvre de la tuyère, en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires.	10
1.7	Espacement moyen et intensité des cellules de choc, en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires.	13
1.8	Champ de vitesse moyenne longitudinale \bar{u} obtenue par une installation de PIV pour un jet rectangulaire.	14
1.9	Mouvements instationnaires de la troisième cellule de choc d’un jet rectangulaire supersonique, durant un cycle du screech.	15
1.10	Fluctuations de pression moyennée sur la phase, obtenues en champ proche, pour un jet rond à $M_j = 1.19$	21
2.1	Représentation schématique du domaine de calcul pour une configuration de jet supersonique.	42
2.2	Calcul de la vitesse de groupe V_g des ondes acoustiques par projection de $\mathbf{u} + \mathbf{c}$ suivant la direction de propagation \mathbf{e}_r	44
2.3	Illustration de l’implémentation d’une condition de périodicité avec des schémas aux différence finies sur sept points.	46
2.4	Cas test de propagation linéaire. Perturbations initiales et densité spectrale de puissance de la perturbation initiale.	50
2.5	Solutions du cas test de propagation linéaire à $t = 200$	51
2.6	Cas test de propagation non-linéaire. Perturbation initiale et solution de référence à $t = 200$	52
2.7	Schéma des procédures de filtrage et de sous-échantillonnage mises en place pour comparer la solution calculée à la solution de référence.	53
2.8	Cas test de propagation non-linéaire. Solution calculée filtrée et solution de référence filtrée et sous-échantillonnée pour différentes taille de maille.	54
2.9	Choc droit dans une tuyère. Convergence du champ moyen de masse volumique pour les différentes configurations de maillage.	55

2.10	Choc droit dans une tuyère. Vitesse moyenne des solutions calculées.	56
3.1	Représentation schématique pour différentes valeurs de $\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''$ de l'exponentielle complexe $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}}$ qui intervient dans la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$	72
3.2	Illustration du phénomène d'aliasing en deux dimensions.	74
3.3	Densité spectrale des erreurs numériques en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$ pour différents algorithmes numériques.	83
3.4	Illustration dans le cas monodimensionnel des erreurs d'aliasing et de la règle des 2/3 de Orszag [22].	85
3.5	Limite de précision et taux d'efficacité de différentiation des schémas standards centrés et des schémas optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14], en fonction du nombre de points $2n + 1$ des algorithmes.	87
3.6	Limite de précision et taux d'efficacité d'aliasing et de filtrage pour les schémas standards centrés et les schémas optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14], en fonction du nombre de points $2n + 1$ des algorithmes.	89
3.7	Spectres de Von-Kármán & Saffman de l'énergie cinétique $E(k)$ en fonction du nombre d'onde pour différents nombres de Reynolds.	93
3.8	Spectres de la dissipation visqueuse $\mathcal{D}_\nu(k)$ et de la dissipation numérique $\mathcal{D}_{sf}(k)$ en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$, pour différents nombres de Reynolds Re_{L_f}	97
4.1	Erreurs normalisées E^* obtenues pour les cas test d'intégration temporelle, en fonction de β_6	104
4.2	Propriétés dissipatives et dispersives des algorithmes de RK.	105
4.3	Cas test de propagation linéaire. Perturbation initiale et erreur numérique en fonction du nombre CFL.	107
4.4	Cas test de propagation non linéaire. Perturbation initiale et solution de référence.	108
4.5	Cas test de propagation non linéaire. Erreur numérique en fonction du nombre CFL.	109
4.6	Nomenclature des différences finies décentrées et des filtres sélectifs décentrés.	110
4.7	Dispersion et dissipation des différences finies décentrées sur sept et onze points en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	111
4.8	Dissipation et dispersion des filtres sélectifs décentrés sur sept et onze points en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	114
4.9	Dissipation et dispersion du filtre sélectif complètement décentré SF ₀₃ en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	115
4.10	Perturbation initiale de pression et densité spectrale de puissance de la perturbation initiale pour le cas test d'acoustique linéaire.	116
4.11	Nomenclature des différences finies et des filtres sélectifs standards centrés, et du schéma aux différences finies complètement décentré FD ₀₁	117
4.12	Solutions calculées pour le cas test de réflexion acoustique.	118
4.13	Solutions calculées pour le cas test de réflexion acoustique résolu avec les schémas décentrés et le filtre SF ₀₃	119
5.1	Vue schématique du domaine de calcul et de l'écoulement.	124

5.2	Vu du maillage Cartésien irrégulier, dans les plans (xy) et (yz) , utilisé pour la simulation du jet plan sous-détendu.	126
5.3	Visualisation du champ instantané de vorticité ω_z suivant l'envergure, dans l'ensemble du domaine.	127
5.4	Cartographie de la vitesse moyenne longitudinale \bar{u}/U_j , dans le plan médian (x, y) du jet.	128
5.5	Espacement entre les cellules de choc en fonction du nombre de Mach �quivalent M_j , et intensité des chocs pour les trois premières cellules.	128
5.6	Demi-largeur $\delta_{0.5}/h$ du jet en fonction de la position longitudinale x/h , et profil latéral de vitesse longitudinale moyenne normalisée par la vitesse sur l'axe \bar{u}/U_m , en fonction de $y/\delta_{0.5}$	130
5.7	Définition des points de mesures dans le plan médian (x, y) du jet.	131
5.8	évolution dans la direction longitudinale des densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse dans la couche de mélange, le long de la ligne $(x, y = h/2, z = 0)$	132
5.9	Interspectres des fluctuations de vitesse de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (1.3, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (1.3, -0.5)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$	133
5.10	Interspectre des fluctuations de vitesse transversale v' de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (22.5, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (22.5, -0.5)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$	134
5.11	Variation de phase $\Delta\varphi/(2\pi)$ des fluctuations de vitesse u' , en fonction de la position longitudinale x/h , pour le fondamental et le premier harmonique du screech, sur la ligne $y = h/2$ ($z/h = 0$).	135
5.12	Coefficients de corrélation spatio-temporelle des fluctuations de vitesse, dans la couche de mélange, en fonction de l'écart latéral r_z/h et du décalage temporel τ/T_s	137
5.13	évolution temporelle des perturbations de pression au voisinage de la buse, en $x/h = -0.4$ et $y/h = 0.85$, sur l'ensemble de la simulation.	138
5.14	Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression au voisinage de la buse, en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$, et nombre de Strouhal $St = fh/U_j$ de la fréquence fondamentale du screech en fonction du nombre de Mach �quivalent M_j	139
5.15	Niveau de pression acoustique du fondamental du screech en fonction du nombre de Mach �quivalent M_j	140
5.16	évolution temporelle des perturbations de pression au voisinage de la buse en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$ et en $(x/h, y/h) = (-0.4, -0.85)$	140
5.17	Interspectre des fluctuations de pression en amont, de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$ et $(x/h, y/h) = (-0.4, -0.85)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$	141
5.18	Vue schématique du domaine de calcul de l'extrapolation et des surfaces planes utilisées pour introduire les données de la SGE dans le calcul du champ lointain.	142
5.19	Cartographie dans le plan médian (x, y) de la pression instantanée obtenue pour la méthode d'extrapolation du champ lointain.	143

5.20	Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression obtenues pour la méthode d'extrapolation du champ, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$, pour différents angles d'observation θ par rapport à la direction aval.	144
5.21	Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression en champ lointain, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$ et de l'angle d'observation θ par rapport à la direction aval, en échelle de couleur logarithmique.	145
5.22	Directivité en champ lointain du bruit de screech. Niveau de pression acoustique en fonction de l'angle d'observation θ par rapport à la direction aval.	146
5.23	Visualisation de l'écoulement et du champ proche de pression dans le plan médian (x, y)	148
5.24	Visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique dans le plan médian (x, y) , pour une demi-période du screech.	149
A.1	Structure des cellules de choc des jets sous-détendus et sur-détendus.	159
A.2	Illustration du calcul du nombre de Mach équivalent M_j	159
E.1	Région de transition entre deux maillages uniformes de maille Δx et $2\Delta x$	182
E.2	Nomenclature des schémas de raccordement sur sept et onze points.	183
E.3	Erreur de dispersion et facteur d'amplification des différences finies en Δx de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	184
E.4	Erreur de dispersion et facteur d'amplification des différences finies en $2\Delta x$ de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	184
E.5	Facteur d'amortissement, et erreur de phase des filtres sélectifs en Δx de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	188
E.6	Facteur d'amortissement, et erreur de phase des filtres sélectifs en $2\Delta x$ de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$	188
E.7	Systèmes de maillage pour le cas test de convection linéaire.	190
E.8	Perturbation initiale et solution calculée à $t = 60$ pour une perturbation se propageant vers les x positifs, pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.2$	191
E.9	Perturbation initiale et solution calculée à $t = 60$ pour une perturbation se propageant vers les x négatifs, pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.2$	191
E.10	Solutions calculées à $t = 60$ pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.8$	192
E.11	Perturbation initiale et calculée à $t = 60$ pour une onde qui se propage vers les x positifs et qui n'est pas résolue par la grille de maille $2\Delta x$, avec $\sigma = 0.2$	192

Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des simulations numériques du screech des jets supersoniques. . .	26
2.1	Paramètres de l'air.	39
2.2	Coefficients des différences finies centrées et du filtre sélectif centré sur onze points de Bogey & Bailly [14].	39
3.1	Paramètres des spectres de Von-Kármán & Saffman de l'énergie cinétique $E(k)$ pour différents nombres de Reynolds.	92
4.1	Limites de stabilité, de dissipation et de dispersion des algorithmes de RK en pas de temps par période, $T/\Delta t = 2\pi/\omega\Delta t$	103
4.2	Limites de dispersion et de dissipation des différences finies décentrées sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$	112
4.3	Limites de dissipation et de dispersion des filtres sélectifs décentrés sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$	112
4.4	Cas test de réflexion acoustique. Norme L_2 de l'erreur pour différentes configurations de différences finies et de filtres sélectifs aux frontières du domaine.	121
5.1	Paramètres de simulation pour le calcul du screech d'un jet plan sous-détendu.	125
D.1	Coefficients γ_i de l'algorithme RK46-L, et coefficients α_i , β_i et c_i de l'algorithme RK46-NL.	177
D.2	Coefficients des différences finies décentrées sur sept points.	177
D.3	Coefficients des différences finies décentrées sur onze points.	177
D.4	Coefficients des filtres sélectifs décentrées sur sept points.	178
D.5	Coefficients des filtres sélectifs décentrés sur onze points.	178
D.6	Coefficients du filtre sélectif décentré sur quatre points SF ₀₃	178
D.7	Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre six sur sept points.	179
D.8	Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre dix sur onze points.	179
D.9	Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur sept points.	180
D.10	Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur onze points.	180
E.1	Limites de précision en dispersion et en dissipation des différences finies de raccordement sur onze points, en nombres de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$ par rapport à une taille de maille Δx	185
E.2	Limites de précision en dissipation et en dispersion des filtres sélectifs de raccordement sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$ par rapport à une taille de maille Δx	189

E.3	Norme L_2 de l'erreur numérique à $t = 200$ pour différentes longueurs d'onde dominante de la perturbation initiale par rapport à une maille Δx , et pour différentes configurations de maillage.	194
-----	---	-----

Introduction

Le bruit d'origine aérodynamique est actuellement un enjeu industriel et scientifique majeur. C'est le cas en particulier dans le domaine des transports aéronautiques qui mettent en jeu des écoulements très énergétiques dont le rayonnement acoustique peut dégrader la qualité de l'environnement ou nuire au confort des usagers. Le bruit produit peut également être une source de fatigue structurelle. Par exemple, le rayonnement de screech dans les jets supersoniques ou les ondes sonores produites par un écoulement affleurant une cavité peuvent conduire à une détérioration prématurée des éléments mécaniques qui entourent le fluide. Il convient donc de disposer d'outils de prédiction et d'investigation du champ sonore rayonné par des écoulements turbulents.

Bruit de jet supersonique

Les appareils de transport supersoniques nécessitent l'utilisation de systèmes de propulsion basés sur des tuyères convergentes-divergentes qui permettent de générer des écoulements dont la vitesse dépasse celle du son. Les problèmes d'adaptation de la pression d'éjection à la pression ambiante conduisent à la formation dans les jets de cellule de chocs. Le bruit des jets supersoniques fait alors apparaître trois composantes principales [140] : le rayonnement d'onde de Mach lié à la convection des grosses structures turbulentes, le bruit de choc et le screech.

Si le rayonnement par onde de Mach a été relativement bien identifié [128], les mécanismes d'interaction entre les chocs et les structures tourbillonnaires à l'origine du bruit de choc et du screech restent encore mal connus. Le screech implique en particulier une grande variété de phénomènes physiques, et son étude permet par conséquent de mieux comprendre le couplage choc/tourbillon.

Powell [93] a été le premier à observer le phénomène de screech au début des années 1950 et à suggérer que la production du screech est contrôlée par une boucle de rétroaction aéroacoustique. L'interaction entre le réseau de chocs et les structures tourbillonnaires de la couche de mélange peut en effet générer un rayonnement acoustique vers l'amont. La boucle de referme au niveau de la lèvre de la tuyère où les ondes se réfléchissent et excitent la couche de mélange. Les études expérimentales et théoriques qui ont été menées depuis les travaux de Powell [93] ont permis de clarifier de nombreux aspects de ce système auto-entretenu [98]. Les connaissances actuelles restent malgré tout essentiellement qualitatives, et les prédictions quantitatives se limitent au calcul de la fréquence fondamentale du screech. En particulier, il n'existe pas de théorie qui permette de déterminer l'amplitude des ondes acoustiques rayonnées vers l'amont. Une prédiction de ce type repose en effet sur une très bonne compréhension des mécanismes de production de son associés aux interactions entre les chocs et les structures tourbillonnaires de la couche de mélange. Dans de récents travaux, Suzuki & Lele [125] utilisent cependant l'acoustique géométrique pour modéliser le processus

de génération de bruit de ce type de couplage en établissant une analogie entre la trajectoire des rayons dans le jet et la déformation des chocs. La théorie de Suzuki & Lele [125] permet de montrer que les chocs tendent à pénétrer dans la couche de mélange au niveau des régions de faible vorticité localisées entre les structures turbulentes, ce qui conduit   une fuite des chocs (ou *shock-leakage*). Ce processus conduit   la production d’une onde acoustique similaire   celle observée pour le screech. Il n’existe pas   l’heure actuelle de données expérimentales qui mettent en évidence le mécanisme de *shock-leakage*, mais la simulation numérique peut être utilisée pour démontrer que ce phénomène a effectivement lieu dans les jets où le phénomène du screech est présent.

Simulation du bruit de screech

Depuis les travaux précurseurs de Lighthill [64], le calcul du bruit d’origine aérodynamique a connu de nombreux développements [159] et les simulations numériques apparaissent comme des outils de prédiction prometteurs. La simulation directe du bruit (DNC pour *Direct Noise Computation*) cherche en particulier   calculer simultanément le développement turbulent d’un écoulement et le champ acoustique rayonné. L’étude de phénomènes comme le screech, qui présente un couplage fort entre les champs aérodynamique et acoustique, nécessite l’utilisation de ce type de méthode, car les approches alternatives comme les méthodes hybrides reposent sur un traitement séparé des sources de bruit et du rayonnement acoustique. La mise en place d’une DNC reste néanmoins un problème délicat qui requiert des algorithmes de discrétisation spécifiquement dédiés   l’aéroacoustique numérique. Les méthodes numériques doivent en effet être capable de résoudre les perturbations de nature acoustique bien qu’elles aient des amplitudes très petites comparées aux fluctuations de pression aérodynamique. Les schémas numériques doivent également permettre de propager avec précision des ondes sonores sur de longues distances. Ces contraintes ont motivé le développement d’algorithmes peu dispersifs et peu dissipatifs comme les schémas compacts de Lele [60], les schémas DRP (*Dispersion-Relation-Preserving*) de Tam & Webb [135] ou encore les schémas explicites de Bogey & Bailly [14]. Des conditions limites aux frontières du domaine ont également été proposées dans le but d’évacuer les ondes acoustiques et les perturbations aérodynamiques sans créer d’ondes parasites qui pourraient couvrir le champ acoustique physique [11, 141].

Les premiers calculs directs du bruit de jet supersonique ont été effectués par Shen & Tam [114] qui ont résolu les équations de Navier-Stokes moyenn es instationnaires (URANS pour *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*) afin de reproduire le screech de jets circulaires. Cette méthode conduit cependant   une représentation partielle du phénomène car elle fournit une solution moyennée sur la phase   la fréquence de forçage induite par la boucle de rétroaction. La totalité des échelles turbulentes d’un écoulement peut être obtenue   l’aide d’une simulation numérique directe (DNS pour *Direct Numerical Simulation*). Le coût informatique est alors néanmoins très élevé et l’approche directe est généralement restreinte   des nombres de Reynolds relativement petits ou   des systèmes simplifiés. Suzuki & Lele [125] ont par exemple effectué la DNS d’une couche de mélange supersonique interagissant avec une onde de compression oblique, l’objectif étant d’étudier en détail le mécanisme de pénétration du choc au travers des régions cisailées de l’écoulement. Les moyens informatiques actuels ne permettent toutefois pas de mettre en œuvre la DNS d’un jet choqué complet. L’étude

d'écoulements à des nombres de Reynolds élevés et de leurs rayonnements acoustiques peut alors être effectuée à l'aide de la simulation des grandes échelles compressible (SGE). En effet, lors d'une SGE, seules les échelles les plus grandes sont résolues alors que l'influence des échelles plus petites sont prises en compte à l'aide d'une modélisation adéquate. Il est donc possible d'aborder la simulation de configurations turbulentes réalistes tout en gardant le coût informatique à un niveau raisonnable.

La faisabilité de la DNC de jets subsoniques par SGE compressible a été démontrée par Bogey & Bailly [12, 19, 20] et Bodony & Lele [9]. En ce qui concerne les jets supersoniques, Al Qadi & Scott [2] ont effectué la SGE d'un jet rectangulaire présentant un rayonnement de screech, les chocs étant résolus avec un schéma d'intégration temporelle TVD (*Total Variation Diminishing*). De la même manière, Imamoglu & Balakumar [53] ont calculé un jet rond choqué en utilisant une SGE implicite basée sur une discrétisation spatiale de type WENO (*Weighted Essentially Non Oscillatory*) et un algorithme TVD pour l'avancement en temps. Loh *et al.* [69] ont par ailleurs simulé le screech d'un jet rond avec une méthode aux volumes finis d'ordre faible. Les simulations présentées ci-dessus utilisent des algorithmes de capture de choc ou des schémas numériques d'ordre faible. Ces méthodes sont néanmoins mal adaptées à la SGE car elles peuvent introduire une dissipation excessive aux échelles résolues [37], ou générer des erreurs numériques trop importantes [40]. Il est donc recommandé d'implémenter des schémas peu dispersifs et peu dissipatifs qui minimisent les erreurs numériques et réduisent la dissipation introduite artificiellement aux longueurs d'onde correctement résolues.

Objectif de la thèse

L'objectif de ce travail de thèse est de mettre en œuvre le calcul direct du bruit de screech produit par un jet choqué à nombre de Reynolds élevé. Le développement turbulent et le rayonnement acoustique sont déterminés à l'aide d'une simulation des grandes échelles compressible basée sur des méthodes numériques d'ordre élevé, et sur l'application d'un filtrage explicite des variables de l'écoulement.

Un solveur adapté à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles filtrées doit donc être développé en s'appuyant sur des algorithmes peu dispersifs et peu dissipatifs spécifiques à l'aéroacoustique [14]. Le domaine de calcul doit également inclure la tuyère, qui est un élément nécessaire à l'apparition de la boucle de rétroaction du screech. Un soin particulier est aussi à porter à la connaissance des sources d'erreurs numériques car celles-ci conditionnent la qualité des résultats. En particulier, lors d'une SGE avec filtrage explicite, les propriétés du filtre discret et l'amplitude des erreurs numériques sont *a priori* liées. Un des enjeux de ce travail est donc d'élaborer un outil d'analyse des erreurs commises au cours de la simulation. La présente étude cherche aussi à compléter les méthodes numériques d'ordre élevé actuellement disponibles. Ce type d'algorithmes peut par exemple être requis pour des zones spécifiques du domaine de calcul, comme les régions où des conditions limites doivent être imposées, alors que les schémas fournis dans la littérature s'appliquent généralement aux points intérieurs du maillage.

L'utilisation du solveur doit permettre d'effectuer le calcul direct du bruit d'un jet supersonique tout en reproduisant correctement le développement turbulent de l'écoulement. Il est donc nécessaire d'accomplir un calcul de jet et de valider la simulation en confrontant

les résultats numériques aux données expérimentales. Enfin, on souhaite également utiliser la simulation numérique comme un outil d'investigation des mécanismes de génération de bruit.

Organisation du mémoire

Le manuscrit s'organise de la façon suivante. Le premier chapitre renseigne sur l'état des connaissances expérimentales et théoriques concernant le rayonnement du screech des jets supersoniques rectangulaires.

Le deuxième chapitre présente le solveur utilisé dans ce travail pour effectuer des calculs aéroacoustiques par simulation des grandes échelles compressible. Le choix du modèle de sous-maille est en particulier décrit et la mise en œuvre des techniques de discrétisation d'ordre élevé est également détaillée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des erreurs numériques commises lors d'une simulation des grandes échelles. L'analyse s'appuie sur le formalisme proposé par Ghosal [40] pour évaluer l'influence du choix des méthodes numériques sur la précision de la simulation. Une étude est également menée pour comparer la dissipation associée aux termes visqueux des équations de Navier-Stokes à la dissipation introduite artificiellement par le filtrage explicite des variables de l'écoulement.

Le quatrième chapitre expose le développement de méthodes numériques peu dispersives et peu dissipatives dédiées à l'aéroacoustique numérique. Un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre à stockage réduit est construit et des schémas décentrés optimisés dans l'espace de Fourier sont proposés pour l'implémentation des conditions limites.

Finalement, le cinquième chapitre aborde la simulation des grandes échelles compressible d'un jet 3-D plan sous-détendu, à nombre de Mach équivalent 1.55 et au nombre de Reynolds 6×10^4 . Les résultats aérodynamiques et acoustiques sont comparés aux données expérimentales de la littérature pour montrer que la structure des cellules de choc, le développement turbulent et le rayonnement du screech sont fidèlement reproduits par le calcul. La consistance de la simulation ayant été démontrée, des visualisations de l'écoulement et du champ sonore sont fournies afin d'interpréter les sources de bruit du screech en s'appuyant sur le phénomène de *shock-leakage* suggéré par Suzuki & Lele [125].

Rayonnement de screech des jets supersoniques rectangulaires

Le bruit de jet supersonique choqué fait apparaître trois composantes majeures : le bruit des structures turbulentes, le bruit de choc et le screech. Ces trois éléments du bruit rayonné sont illustrés sur la figure 1.1, qui donne le spectre des fluctuations de pression mesurées par Seiner & Yu [111] en amont et en champ lointain pour un jet rond supersonique choqué, en fonction du nombre de Strouhal. Le pic harmonique de forte intensité observé au voisinage du nombre de Strouhal 0.4 correspond au rayonnement de screech, qui est généralement présent dans la direction amont de l'écoulement. Le pic large-bande à une fréquence plus basse que celle du screech est le bruit des structures turbulentes. Cette partie du spectre est associée au rayonnement acoustique des structures tourbillonnaires du jet [128]. La dernière composante est le bruit de choc, qui se traduit sur la figure 1.1 par le pic large-bande visible à un nombre de Strouhal de 0.5.

Le bruit des structures turbulentes, le bruit de choc et le screech présentent par ailleurs des maxima de rayonnement dans des directions différentes. La figure 1.2 fournit par exemple les spectres des signaux de pression mesurés en champ lointain à différents angles d'observation ψ par rapport à la direction amont, pour un jet rectangulaire supersonique choqué [134]. On remarque que le screech est prépondérant vers l'amont car les spectres à $\psi = 30^\circ$ et $\psi = 45^\circ$ contiennent une raie de fort niveau qui est absente dans les spectres obtenus plus en aval. De façon opposée, le bruit des structures turbulentes est plus intense dans la direction aval. Par exemple, pour $\psi = 120^\circ$, il apparaît une composante large-bande centrée sur 2 kHz qui n'est pas visible pour des valeurs plus petites de ψ . La contribution du bruit de choc est également en évidence dans les spectres de la figure 1.2. Cette composante du bruit de jet supersonique est présente pour toutes les directions d'observation, et possède deux caractéristiques fondamentales qui sont confirmées par les mesures représentées ici. La fréquence centrale du pic large-bande du bruit de choc est en effet fonction de l'angle d'observation ψ . La fréquence la plus basse est obtenue vers l'amont et se situe aux environs de 3 kHz pour $\psi = 30^\circ$. Elle augmente vers l'aval pour atteindre 10 kHz à $\psi = 120^\circ$. On constate par ailleurs que le pic s'élargit quand le point d'observation se déplace de l'amont vers l'aval.

Les problématiques du bruit des structures turbulentes et du bruit de choc ne seront pas abordés dans ce chapitre, qui est consacré exclusivement à la description du phénomène de rétroaction aéroacoustique à l'origine du screech. Il est néanmoins possible de se référer par exemple au travail de synthèse de Tam [126], qui propose un bilan des connaissances actuelles sur le bruit de jet supersonique.

Le screech est donc un bruit de raie intense observé dans la direction amont des jets supersoniques choqués. Powell [93] est le premier à observer ce phénomène dans les années 1950 et à émettre l'hypothèse que le screech est le cycle limite d'une boucle de rétroaction

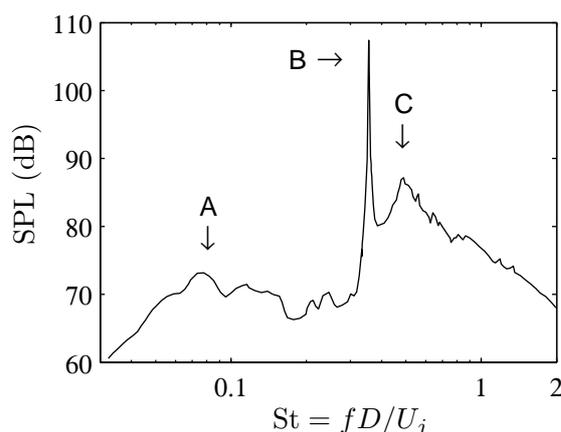


Figure 1.1: Spectre du signal de pression mesuré en champ lointain pour un jet circulaire choqué, en amont (reproduit d'après [140]). A : bruit des structures turbulentes, B : screech, C : bruit de choc. (D : diamètre du jet, U_j : vitesse d'éjection.)

aéroacoustique. La figure 1.3 propose une vision schématique des mécanismes à l'origine de l'établissement du screech : l'interaction des cellules de chocs avec les structures turbulentes qui se développent dans le jet agit comme une source acoustique. Sous certaines conditions qui seront évoquées dans les sections suivantes, les ondes acoustiques ainsi produites peuvent se propager vers l'amont, être diffractées par la lèvre de la tuyère et interagir avec la couche de mélange. En sortie de buse, la couche de mélange est en effet relativement fine, et est donc réceptive aux excitations extérieures. On obtient alors une boucle de rétroaction qui peut converger vers une fréquence précise et générer un rayonnement harmonique intense vers l'amont. Les niveaux sonores impliqués sont par ailleurs suffisamment élevés pour permettre d'observer le champ acoustique avec un système de visualisation Schlieren. Une photographie Schlieren obtenue pour un jet rectangulaire supersonique [97] est reproduite sur la figure 1.4. On distingue les trois premières cellules de choc qui sont caractérisées par une succession de zones claires et sombres à l'intérieur de l'écoulement. Le screech apparaît dans le champ proche acoustique du jet sous la forme de trois fronts d'onde semi-circulaires, un au-dessus du jet et deux en-dessous, qui semblent se propager vers l'amont.

La boucle de rétroaction proposée par Powell [93] pour décrire la génération du screech repose sur trois éléments essentiels : les cellules de choc, la couche de mélange et le champ proche acoustique ; la tuyère étant un intermédiaire du couplage entre les champs acoustique et aérodynamique. La compréhension des mécanismes à l'origine du screech est donc soumise à l'étude des interactions entre les composantes de la boucle de rétroaction :

- le couplage des cellules de choc avec la couche de mélange conduit à la génération d'ondes acoustiques à l'origine du bruit de choc et du screech. Les chocs et la couche de mélange ont également une influence réciproque. Le développement turbulent de la couche de mélange conduit en effet à l'affaiblissement, puis à la disparition totale des chocs dans la direction aval. Par ailleurs, les cellules de choc, qui sont constituées de zones de détentes et de compression, modifient significativement la structure de l'écoulement (déformation de la frontière du jet, modulation de la vitesse de convection par exemple) et par conséquent la croissance des instabilités dans la couche de

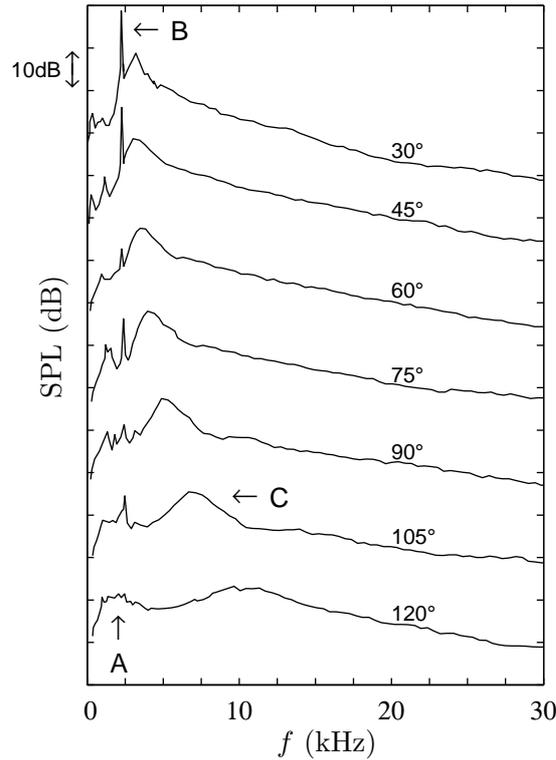


Figure 1.2: Spectres en tiers-d'octave du champ lointain de pression d'un jet supersonique ($M_d = 1.5$, $M_j = 1.67$) en fonction de l'angle d'observation ψ par rapport à la direction amont (d'après [134]), pour $30^\circ \leq \psi \leq 120^\circ$. A : bruit des structures turbulentes, B : screech, C : bruit de choc.

mélange [134] ;

- la couche de mélange et le champ acoustique amont interagissent principalement après réflexion et diffraction d'ondes acoustiques à la lèvre de la tuyère. La couche de mélange, qui est alors de très faible épaisseur, est réceptive aux excitations extérieures. La propagation acoustique au voisinage de la frontière du jet est aussi probablement influencée par le champ proche aérodynamique [89].

Les travaux menés depuis les premières observations de Powell [93] ont ainsi cherché à caractériser les cellules de choc, le développement turbulent du jet et le champ acoustique rayonné, et à décrire les différents couplages qui peuvent être apparaître entre ces éléments de la boucle de rétroaction.

Les caractéristiques des jets soumis au screech sont décrites dans la section 1.1, qui porte en particulier sur les jets rectangulaires. La section 1.2 présente les modèles actuellement disponibles qui permettent de prédire ou d'interpréter certaines propriétés de la boucle de rétroaction. Le problème de la simulation numérique du screech est finalement abordé dans la section 1.3.

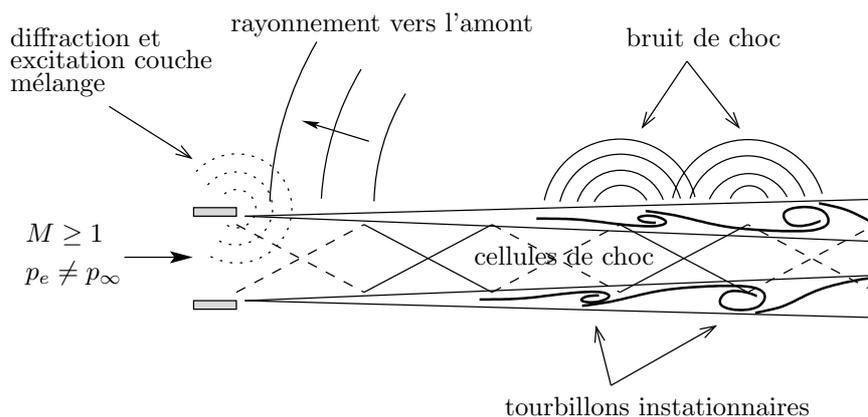


Figure 1.3: Vue schématique des différents éléments qui composent la boucle de rétroaction du screech.

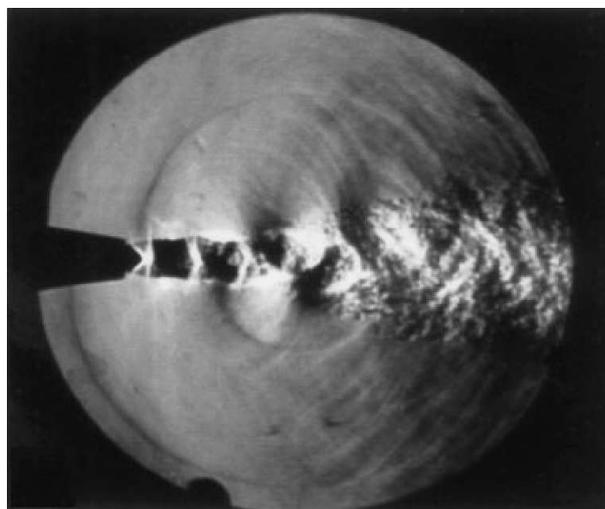


Figure 1.4: Photographie Schlieren du screech d'un jet supersonique rectangulaire à $M_j = 1.44$ (d'après Raman [97]).

1.1 Caractéristiques des jets en présence du screech

1.1.1 Champ acoustique amont

Fréquence du screech

Le bruit associé au phénomène de bouclage du screech est composé d'une série de raies harmoniques dont le fondamental possède le niveau le plus élevé. De façon générale, les mesures expérimentales montrent que la fréquence fondamentale décroît quand le nombre de Mach équivalent M_j croît (voir l'annexe A pour une définition de M_j). Pour des jets rectangulaires de rapport longueur sur largeur important, cette tendance est illustrée par la figure 1.5.a, qui donne l'évolution du nombre de Strouhal de la fréquence dominante du screech en fonction du nombre Mach équivalent M_j , obtenue par différents expérimentateurs. On constate effectivement que la fréquence diminue régulièrement avec le nombre de Mach M_j du jet.

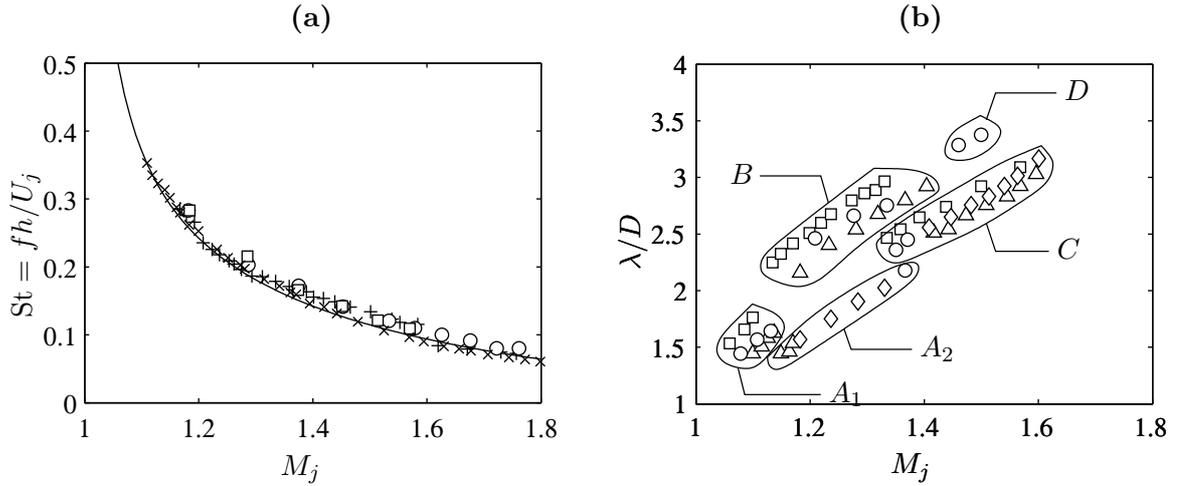


Figure 1.5: (a) Nombre de Strouhal, $St = fh/U_j$, de la fréquence dominante du screech, en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires : +, Raman & Rice [95] ; o, Krothapalli *et al.* [59] ; □, Krothapalli *et al.* [59] ; ×, Panda *et al.* [87] ; —, formule analytique de Tam [132] pour un jet plan. (b) Longueur d'onde, λ/D , de la fréquence dominante du screech, en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets ronds (reproduit d'après [85]) : o, Powell [93] ; □, Sherman *et al.* [115] ; △, Davies & Oldfield [28, 29] ; ◇ Merle [77]. Les longueurs d'onde se répartissent en cinq ensembles, A_1 , A_2 , B, C, et D, chacun correspondant à un mode du screech.

À noter que pour des géométries de faible rapport longueur sur largeur, comme les jets ronds ou carrés, la situation est plus complexe et la courbe donnant la fréquence dominante du screech en fonction du nombre de Mach équivalent M_j peut présenter des discontinuités [85, 150]. Ces variations abruptes de fréquence sont appelées des changements de mode du screech, ou encore *screech staging*. À titre indicatif, la figure 1.5.b fournit la longueur d'onde dominante du screech de jets circulaires en fonction de M_j , pour plusieurs expériences. Des discontinuités dans l'évolution de la longueur d'onde dominante sont clairement visibles. Les mesures de Davies & Oldfield [28, 29] (symbole \triangle sur la figure 1.5.b) montrent par exemple que la longueur d'onde du screech augmente de manière continue pour $1.1 < M_j < 1.15$, $1.15 < M_j < 1.2$, $1.2 < M_j < 1.4$ et $1.4 < M_j < 1.6$, tandis qu'elle est discontinue aux bornes de ces intervalles. À chacun de ces intervalles est associé un mode du screech. Cinq modes distincts, notés A_1 , A_2 , B, C, et D, ont ainsi été répertoriés pour les jets circulaires [85]. Les mesures de Umeda & Ishii [150] ont par ailleurs mis en évidence un comportement similaire sur des jets carrés et triangulaires.

Répartition de phase

Le screech se caractérise d'une part par sa fréquence mais aussi par sa répartition de phase au voisinage du jet. Dans le cas des jets rectangulaires, la fréquence dominante du phénomène ne présente pas de discontinuité quand le nombre de Mach équivalent M_j varie. L'étude de la répartition de phase du champ de pression acoustique de part et d'autre de la tuyère, dans la direction du petit axe, fait cependant apparaître deux modes de fonctionnement de la boucle de rétroaction. Sur une large gamme de nombre de Mach, typiquement pour $M_j > 1.15$, il y a en effet opposition de phase entre les fronts d'onde mesurés sur les lèvres supérieure

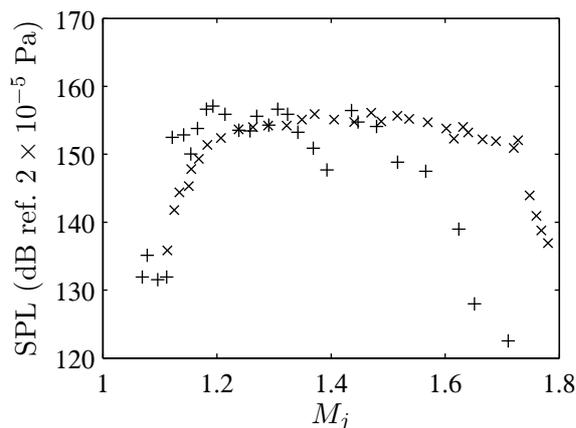


Figure 1.6: Amplitude du screech au voisinage de la lèvre de la tuyère, en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires : +, Raman & Rice [95] ; ×, Panda *et al.* [87].

et inférieure [59, 95]. On parle alors de mode antisymétrique du screech. Pour des taux de détente plus faibles, *i.e.* pour $1 < M_j < 1.15$, on observe au contraire un mode symétrique de faible amplitude [47, 65, 124].

Les harmoniques du bruit de raie produit par la boucle de rétroaction possèdent également une répartition de phase caractéristique. Les résultats expérimentaux obtenus par Raman & Rice [95] et Gutmark *et al.* [47] pour des jets rectangulaires font en effet apparaître que si le mode du screech est antisymétrique, alors la première harmonique est symétrique.

La structure tridimensionnelle de la phase du screech au voisinage de la tuyère a été étudiée par Raman [96] pour un jet rectangulaire soumis au mode antisymétrique du screech. Des sondes de pression placées aux extrémités du grand axe du jet, au-dessus de la tuyère, montrent que le mode est symétrique dans la direction de l'envergure. Raman & Rice [95] complètent l'étude en mesurant la répartition de phase du champ acoustique dans un plan, placé au-dessus du jet et qui s'étend dans la direction de l'envergure et dans la direction de l'écoulement. Il s'avère que le champ acoustique est quasi bidimensionnel dans la partie amont du jet. Cependant, plus en aval, des modes tridimensionnels se développent dans la direction de l'envergure.

Amplitude et directivité

Le screech est un phénomène de très forte amplitude. La figure 1.6.b reproduit les niveaux acoustiques mesurés en amont sur des jets rectangulaires choqués par Raman & Rice [95] et Panda *et al.* [87]. Le niveau est relativement faible, environ 130 dB, pour des taux de détente peu élevés tels que $M_j < 1.1$. L'amplitude du screech présente ensuite un palier au voisinage de 155 dB pour $M_j > 1.1$. Le niveau décroît finalement à partir de $M_j = 1.6$ pour les mesures de Raman & Rice [95], et à partir de $M_j = 1.75$ pour les mesures de Panda *et al.* [87]. Pour des nombres de Mach suffisamment élevés ($M_j > 2$), le phénomène finit alors par disparaître.

L'amplitude varie également en fonction de l'angle d'observation par rapport à l'axe du jet. De telles mesures de directivité longitudinale sont peu nombreuses dans la littérature pour des

jets rectangulaires, mais des données relatives aux jets circulaires sont malgré tout disponibles. Le fondamental du screech des jets ronds rayonne suivant deux directions principales. Le lobe dominant pointe vers l'amont, tandis que le deuxième est dirigé vers l'aval [85]. L'étude du premier harmonique montre qu'à cette fréquence le screech rayonne principalement dans la direction transverse.

Bien que l'on dispose de peu d'informations sur la directivité longitudinale des jets rectangulaires, la directivité azimutale a malgré tout été étudiée par Raman & Rice [95] pour cette géométrie. Les résultats montrent que le maximum de rayonnement se situe dans le plan médian du jet, parallèlement au petit axe. L'amplitude est de plus minimale dans les directions parallèles au grand axe du jet.

Stabilité du screech

Le screech se traduit sur les spectres de bruit par une série de raies. Cette représentation dans l'espace des fréquences ne donne cependant pas accès aux caractéristiques temporelles du phénomène, comme l'intermittence.

En s'appuyant sur une transformée de Fourier glissante, Raman [96, 97] obtient néanmoins pour un jet rectangulaire une représentation temps-fréquence du signal de pression produit par le phénomène de rétroaction. La méthode permet de montrer que le mode antisymétrique du screech est stable, avec une amplitude constante, jusqu'à $M_j = 1.6$. Pour des taux de détente plus importants, l'amplitude du bruit rayonné commence à décroître avec le nombre de Mach M_j , et le phénomène cesse d'être produit au voisinage de $M_j = 1.8$. L'analyse temps-fréquence met en évidence que sur cette gamme de nombre de Mach, la boucle de rétroaction est moins robuste. L'évolution temporelle du niveau de pression à la fréquence du screech devient en effet instationnaire.

Une approche temps-fréquence rend également possible l'étude des configurations de jet où plusieurs modes du screech sont produits à la fois. Cette situation apparaît entre autres pour les jets ronds [85] et pour les jets rectangulaires sur-détendus [96]. L'analyse temps-fréquence de Raman [96] du screech d'un jet rectangulaire sur-détendu montre ainsi que deux modes possédant des fréquences non harmoniques peuvent coexister avec une amplitude qui reste constante dans le temps. À noter que deux modes peuvent s'exclure mutuellement et apparaître uniquement par intermittence. C'est le cas par exemple pour des jets rectangulaires sur-détendus possédant une tuyère oblique dans la direction de l'envergure [96].

Influence de la lèvre de la tuyère

La lèvre de la tuyère est un élément à part entière de la boucle de rétroaction, dont les caractéristiques influent notablement sur la production du screech. Plusieurs expériences ayant pour objectif la modification du processus de réceptivité ont ainsi été menées. Tanna [146] supprime par exemple le screech d'un jet rond en recouvrant la tuyère de matériau absorbant pour l'acoustique, et l'utilisation de réflecteurs placés par rapport à la sortie de la tuyère à une distance égale à un multiple impaire de la longueur d'onde du screech, permet de diminuer significativement l'amplitude du phénomène [84].

L'épaisseur de la lèvre constitue par ailleurs un des paramètres de la boucle de rétroaction à l'origine du screech. Elle peut en particulier influencer sur le nombre de Mach M_j à partir

duquel la rétroaction cesse d'apparaître. Pour un jet rond, Ponton & Seiner [91] repoussent cette limite de $M_j = 1.6$ à $M_j = 1.9$ en augmentant d'un facteur d'environ trois l'épaisseur de la lèvre de la tuyère. De la même manière, pour un jet rectangulaire, Raman [97] étend la gamme de nombre Mach sur laquelle la rétroaction apparaît en agissant sur l'épaisseur de la lèvre en sortie de buse. Il montre de plus que la cessation du screech est lié à un phénomène de masquage de la lèvre par le jet lui-même. Pour des taux de détente importants, les cellules de choc induisent en effet des déformations significatives de l'écoulement. La hauteur du jet au niveau de la première cellule est en particulier plus grande qu'au niveau de la section d'éjection. Raman [97] mesure par exemple à $M_j = 1.7$ un facteur d'environ 1.8 entre la hauteur apparente du jet avant le premier choc, et la hauteur du jet en sortie de buse. Cette zone aérodynamique agit comme une barrière pour le champ acoustique qui se propage vers l'amont, et masque ainsi la lèvre de la tuyère. L'utilisation d'une lèvre plus large permet de réactiver le phénomène de rétroaction en introduisant une surface réfléchissante plus importante, qui reste toujours visible par les ondes acoustiques malgré les déformations de la frontière du jet.

La forme de la lèvre peut également avoir un impact plus radical sur la boucle de rétroaction. La mise en place de chevrons sur le pourtour de la section d'éjection, ou encore l'utilisation de buses obliques dans la direction transversale modifie l'écoulement lui-même, plutôt que d'influer sur les détails des mécanismes de réceptivité. Les travaux de Raman [96] mettent en évidence que biseauter dans le sens de l'envergure la tuyère d'un jet rectangulaire modifie significativement la structure tridimensionnelle des cellules de choc et conduit à l'apparition de modes du screech qui sont absents des jets rectangulaires classiques. En particulier, l'amplitude et la répartition de phase de ces modes est différentes. La boucle de rétroaction est en outre moins robuste et l'amplitude du phénomène subit des variations dans le temps. On pourra aussi se référer aux travaux de Samimy *et al.* [109], de Krothapalli *et al.* [58] ou encore de Norum [85] qui portent sur la modification de la structure de jets supersoniques issus de tuyères possédant des chevrons.

Influence de la température du jet

À l'instar du taux de détente, la température du jet est un paramètre qui influe directement sur la fréquence et l'amplitude du screech. Il apparaît en effet sur les mesures de Rosfjord & Toms [105] que la fréquence du screech décroît quand la température du jet augmente, le Mach équivalent M_j restant par ailleurs fixé. De plus, Massey *et al.* [74] observent expérimentalement que l'intensité du screech décroît quand un jet supersonique est chauffé, et que cette tendance est particulièrement visible pour des nombres de Mach M_j faibles.

1.1.2 Cellules de choc

Les cellules de choc sont une composante essentielle de l'écoulement, et elles s'avèrent être nécessaires à l'apparition du screech. L'espacement entre les cellules de choc est en outre une grandeur caractéristique qui dimensionne les fréquences acoustiques rayonnées. On pourra se reporter à l'annexe A pour une description détaillée de la structure des cellules de choc.

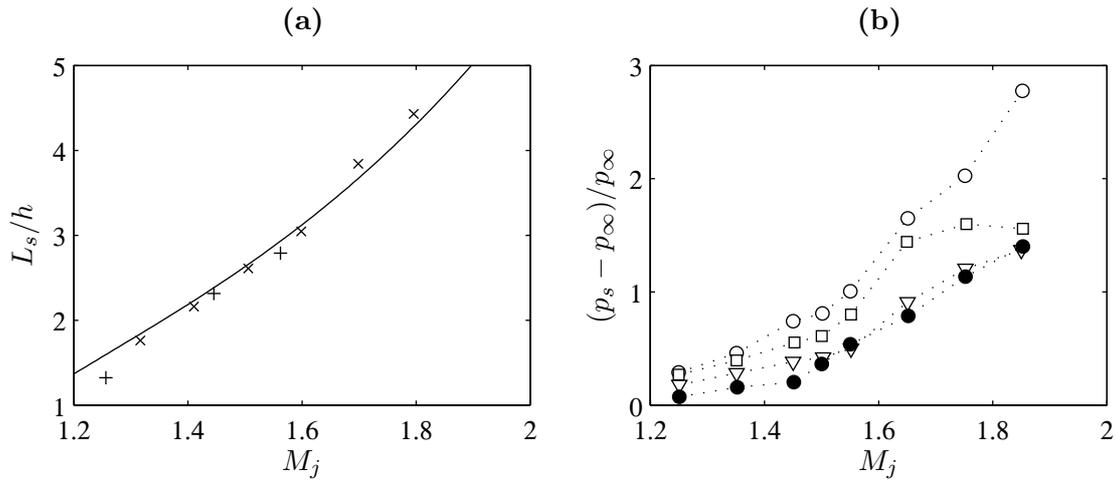


Figure 1.7: (a) Espacement moyen des cellules de choc, L_s/h , en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires : +, Raman & Rice [95]; ×, Panda *et al.* [87]; —, formule analytique de Tam [132] pour un jet plan. (b) Intensité des quatre premiers chocs d'un jet rectangulaire, d'après Raman [97]. ···○···, 1^{er} choc; ···□···, 2^{ème} choc; ···▽···, 3^{ème} choc; ···●···, 4^{ème} choc.

Espacement moyen

La présence de chocs dans un jet conduit à la formation de zones de détente et de compression qui se répètent de façon quasi périodique dans la direction aval. L'observation pratique de la pression moyenne sur l'axe du jet ne fait cependant pas apparaître de discontinuités. En effet, les chocs ne sont pas statiques et la moyenne temporelle tend à lisser les gradients présents dans les cellules [88]. De plus, les interactions entre les chocs et la couche de mélange turbulente du jet modifient la structure des cellules de chocs. L'amplitude des détentes et des compressions dans le jet diminue dans la direction longitudinale [97], et l'espacement entre les cellules est généralement irrégulier [87]. Suffisamment en aval, la pression moyenne sur l'axe est constante et égale à la pression ambiante. Malgré ces variations longitudinales des cellules de choc, on parle généralement d'une structure quasi périodique qui est caractérisée par l'espacement moyen entre les chocs.

L'évolution de cet espacement moyen en fonction du nombre de Mach équivalent M_j est représentée sur la figure 1.7.a, pour différents jets rectangulaires. La taille des cellules augmente de façon continue avec le rapport de détente. Pour des jets rectangulaires suffisamment sous-détendus, *i.e.* au voisinage de $M_j = 1.7$, la réflexion sur l'axe du choc à la fin de la première cellule n'est plus régulière et un disque de Mach se forme [97]. Comme l'illustre la figure 1.7.a, l'introduction de ce choc normal dans l'écoulement ne modifie cependant pas de manière significative l'évolution de l'espacement des cellules avec M_j .

Intensité des chocs

La figure 1.7.b fournit les intensités des quatre premiers chocs mesurées par Raman [97] sur un jet rectangulaire, en fonction du nombre de Mach M_j . La grandeur $(p_s - p_\infty)/p_\infty$, où p_s est la pression juste en aval du choc et p_∞ la pression ambiante, caractérise en effet l'intensité du gradient de pression. La tendance générale est une augmentation des sauts de

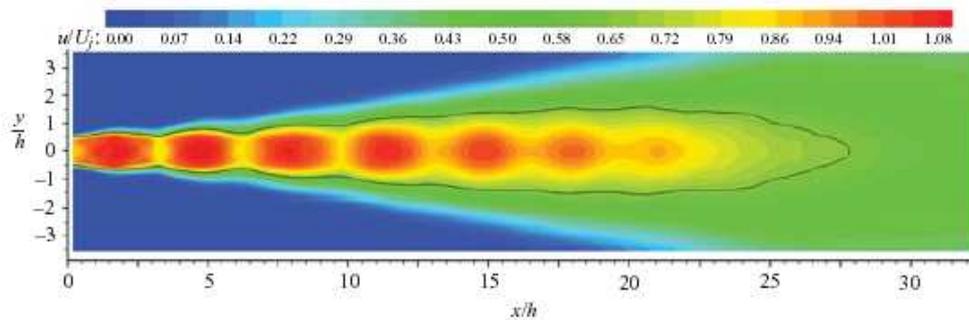


Figure 1.8: Champ de vitesse moyenne longitudinale \bar{u} obtenue par Alkisar *et al.* [3] par une installation de PIV pour un jet rectangulaire supersonique choqué. La courbe en trait plein noir indique la ligne sonique. D’après Alkisar *et al.* [3].

pression à travers les chocs quand le nombre de Mach M_j augmente. En outre, il s’avère que l’intensité des chocs décroît dans la direction aval. La formation du disque de Mach au niveau de la première cellule, aux environs de $M_j = 1.7$, influe essentiellement sur l’intensité des deux premiers chocs, mais Raman [97] n’observe pas de modifications majeures sur l’intensité des troisième et quatrième cellules de chocs.

Influence sur le champ moyen

Les ondes de détente et les chocs de compression qui constituent les cellules de choc modifient fortement la structure de l’écoulement. Les données du champ de vitesse moyenne longitudinale \bar{u} obtenue par Alkisar *et al.* [3] par une installation de PIV (*Particule Imagery Velocity*) pour un jet rectangulaire sont par exemple reproduites sur la figure 1.8 pour un jet rectangulaire à $M_j = 1.68$. On constate que le champ moyen diffère notablement de celui généralement observé pour les jets parfaitement détendus. La hauteur effective du jet est en particulier modulée et subit des phases de croissance et d’expansion quand l’écoulement passe au travers des zones de détente ou de compression. La structure des cellules implique également que le fluide est successivement accéléré et ralenti, les zones de basse vitesse se situant juste en aval des chocs de compression. Par ailleurs, comme le montre la figure 1.8, les gradients de vitesse dans les cellules sont de plus en plus faibles quand on se déplace vers l’aval. Au-delà de $x/h > 25$, l’écoulement devient même ici subsonique et les chocs ne peuvent alors plus se former.

Dynamique des cellules de choc

Le comportement stationnaire des cellules de choc est relativement bien connu, mais le screech et le bruit de choc sont aussi liés à l’évolution instationnaire des cellules. Le mouvement de la troisième cellule de choc d’un jet plan a été étudié en particulier par Suda *et al.* [124] à l’aide d’un système de visualisation Schlieren. La figure 1.9 donne une vue schématique de cette cellule au cours d’une période du screech. Le choc $A - B$ subit une rotation autour du point B , et se déplace vers l’aval (figures 1.9.a et 1.9.b). Ce choc mobile est appelé *traveling shock*. À la moitié de la période du screech, le choc $A - B$ atteint la fin de la cellule de choc et fusionne avec le choc de compression situé à ce niveau (figures 1.9.c

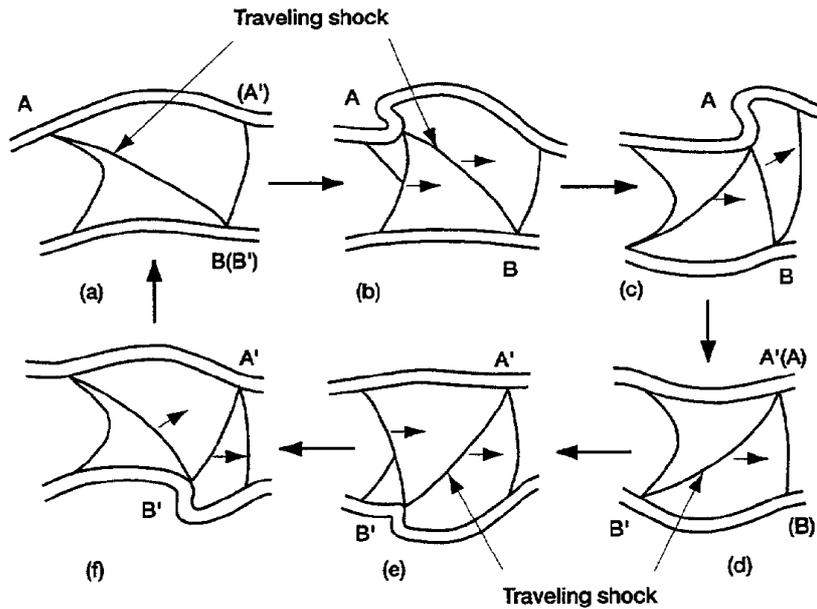


Figure 1.9: Mouvements instationnaires de la troisième cellule de choc d'un jet rectangulaire supersonique, durant un cycle du screech. D'après Suda *et al.* [124].

et 1.9.d). Un nouveau choc mobile $A' - B'$ apparaît. Il se déplace aussi vers l'aval, mais avec une rotation autour de A' . De la même manière, à la fin du cycle du screech, le choc atteint l'extrémité aval de la cellule de choc et devient immobile (figures 1.9.e et 1.9.f). Le cycle peut alors recommencer.

Des mesures similaires ont été effectuées par Panda [88] sur des jets ronds à l'aide d'une méthode de détection de choc utilisant des lasers. L'étude porte sur deux jets en présence du screech : l'un est soumis à un mode d'oscillation symétrique, et l'autre à un mode antisymétrique. Les observations de Panda [88] présentent des similitudes avec les résultats de Suda *et al.* [124]. Durant une période du screech, un choc statique se place à la fin de la cellule de choc. Des chocs mobiles se forment au début de la cellule et se déplacent de l'amont vers l'aval pour finalement fusionner avec le choc immobile.

1.1.3 Développement turbulent

Modes dominants

Le mécanisme de rétroaction aéroacoustique à l'origine du screech peut se scinder en deux parties : une boucle externe associée au champ proche acoustique, et une boucle interne liée aux perturbations aérodynamiques. Dans le cadre des jets rectangulaires, Raman & Rice [95] ont caractérisé la nature des ondes d'instabilités qui se développent dans la couche de mélange. Leurs mesures mettent en évidence des modes dominants dont la fréquence coïncide avec le fondamental ou un harmonique du screech. Il apparaît en outre que la différence de phase entre les instabilités des deux couches de mélange est identique à celle observée pour le champ acoustique amont. En effet, pour les trois jets rectangulaires étudiés par Raman & Rice [95], à des nombre de Mach M_j de 1.25, 1.44 et 1.55, le fondamental du screech est antisymétrique et la première harmonique est symétrique, et les mesures dans la couche de mélange montrent

l'existence d'une instabilité antisymétrique à la fréquence fondamentale du screech et d'une instabilité symétrique à la fréquence harmonique. De la manière, Shih *et al.* [116] que pour les jets rectangulaires qu'ils ont étudiés ($1.15 < M_j < 1.5$), le mode le plus amplifié de la couche de mélange oscille à la fréquence fondamentale du screech et possède une parité identique à celle du champ acoustique amont.

La répartition des composantes du tenseur de Reynolds a été étudiée par Alkislar *et al.* [3] pour un jet rectangulaire soumis au screech. Les données issues d'une moyenne de phase à la fréquence du screech leur ont permis d'utiliser une décomposition triple de la vitesse de la forme $u = \bar{u} + \tilde{u} + u''$, où \bar{u} est la vitesse moyenne, \tilde{u} les fluctuations cohérentes et u'' les fluctuations aléatoires [100]. Il est alors ensuite possible de séparer les contributions des fluctuations périodiques et aléatoires dans le tenseur de Reynolds. Alkislar *et al.* [3] concluent ainsi qu'une part significative, de l'ordre de 50%, de l'énergie cinétique turbulente est produite par les fluctuations périodiques dans la région supersonique du jet où se situent les sources de bruit.

Modulation de l'amplitude des perturbations aérodynamiques

L'amplitude des perturbations d'origine aérodynamique a été mesurée par Raman & Rice [95] dans un jet rectangulaire. Il s'avère que la présence de chocs dans l'écoulement module de manière significative les instabilités qui se développent dans la couche de mélange. Raman & Rice [95] ont en effet déterminé expérimentalement l'évolution longitudinale de l'amplitude du fondamental du screech et de ses deux premiers harmoniques. Ils remarquent que le comportement des instabilités est fortement non-linéaire, et qu'il est difficile d'observer des zones de l'écoulement où apparaissent des phases de croissance exponentielle comme le prédit la théorie des instabilités linéaires. La dynamique des perturbations est par ailleurs clairement modulée par les chocs. L'amplitude du fondamental décroît par exemple rapidement juste après un choc puis augmente à nouveau dans la région plus en aval.

Vitesse de convection

La vitesse de convection u_c est associée à la vitesse de déplacement des structures turbulentes cohérentes dans la couche de mélange. Dans le cas d'un jet plan, un calcul de stabilité conduit à écrire que $u_c \simeq 0.5U_j$, pour un jet réel soumis au screech, la présence des cellules de choc et l'autoexcitation de l'écoulement sont des facteurs qui modifient *a priori* la dynamique des tourbillons. La vitesse de convection a ainsi été mesurée par Panda [89] pour un jet rond à $M_j = 1.42$ et par Alkislar *et al.* [3] pour un jet rectangulaire tel que $M_j = 1.68$. Le calcul de la grandeur u_c dans ces deux expériences s'appuie néanmoins sur des approches distinctes, qui fournissent au final des résultats différents.

Panda [89] propose de déterminer la vitesse de convection à partir du calcul de l'interspectre des fluctuations de pression dans la couche de mélange. Il est de cette façon possible de calculer, pour une fréquence donnée, la phase relative φ des perturbations en fonction de la position longitudinale dans le jet. Panda [89] associe ensuite la vitesse de convection à la vitesse de phase des perturbations à la fréquence f_s du screech, il vient alors,

$$u_c = \frac{2\pi f_s}{d\varphi/dx} \quad (1.1)$$

où $d\varphi/dx$ est la dérivée spatiale de la phase dans la direction longitudinale. Les résultats obtenus pour un jet rond révèlent l'existence d'une modulation de la vitesse de convection autour de sa valeur moyenne $u_c \simeq 0.7U_j$. La longueur d'onde de ces variations est notée λ_{sw} , et correspond à longueur d'onde d'une onde partiellement stationnaire associée à la superposition de fluctuations acoustiques et aérodynamiques [89] (voir par ailleurs la section 1.1.4 de ce chapitre).

Une méthode alternative pour calculer la vitesse de convection a été proposée par Alkislar *et al.* [3] dans le cadre de l'étude d'un jet rectangulaire choqué. La technique repose sur la détermination des corrélations double de vitesse dans la couche de mélange. La position et la taille des structures tourbillonnaires cohérentes sont obtenues dans un premier temps à partir de la corrélation double des fluctuations de vitesse longitudinale u' :

$$R_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{\overline{u'(\mathbf{x})u'(\mathbf{x} + \mathbf{r})}}{\sqrt{\overline{u'^2(\mathbf{x})} \overline{u'^2(\mathbf{x} + \mathbf{r})}}} \quad (1.2)$$

La surface occupée par la structure cohérente au point \mathbf{x} est alors définie comme la surface Σ pour laquelle la relation $R_{uu} > 0.6$ est vérifiée. La circulation $\Gamma(\mathbf{x})$ correspondant à la structure cohérente en \mathbf{x} ainsi déterminée est ensuite donnée par l'intégrale :

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \oint_{\Sigma} \omega_z d\Sigma \quad (1.3)$$

où ω_z est la composante de la vorticité dans la direction de l'envergure. Finalement, comme le suggèrent Shih *et al.* [117], le vecteur vitesse de convection \mathbf{u}_c est calculé   l'aide de la relation,

$$\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{x})} \oint_{\Sigma} \mathbf{u} \omega_z d\Sigma \quad (1.4)$$

Cette méthode a été appliquée par Alkislar *et al.* [3]   un jet rectangulaire choqué. Les résultats diff rent notablement de ceux de Panda [89], puisque Alkislar *et al.* [3] trouvent une vitesse de convection quasiment constante dans la direction longitudinale, et égale   environ $0.5U_j$.

Dynamique non-linéaire

La connaissance des mécanismes non-linéaires qui agissent sur les structures tourbillonnaires permet de caractériser de façon plus approfondie le développement turbulent d'un écoulement. Le calcul de la bicohérence d'un signal temporel permet par exemple de déterminer la cohérence entre les phases des composantes aux fréquences f_1 , f_2 et $f_1 + f_2$. Si elle est proche de l'unité, les fluctuations aux fréquences f_1 et f_2 interagissent probablement de manière quadratique pour former $f_1 + f_2$. Walker & Thomas [157] ont effectué des mesures de bicohérence dans la couche de mélange d'un jet rectangulaire soumis au screech. Ils observent qu'il existe effectivement des couplages quadratiques qui relient le fondamental du screech aux différents harmoniques. En particulier, le fondamental,   la fréquence f_s , interagit avec lui-même pour donner le premier harmonique $2f_s$. De la même manière, le premier harmonique et le fondamental donnent le deuxième harmonique $3f_s$. Ces résultats mettent en évidence l'existence de couplage quadratiques. Cependant, la bicohérence ne donne pas d'information sur la localisation des phénomènes non-linéaires. En effet, le couplage quadratique, qui rend

cohérentes les phases entre les harmoniques du screech sur l'ensemble du cycle de rétroaction, peut avoir lieu n'importe où dans la boucle de rétroaction.

Afin d'obtenir des informations localisées sur les couplages non-linéaires qui agissent dans la couche de mélange, Walker & Thomas [157] se placent dans l'espace des fréquences, et proposent de modéliser localement la dynamique de la couche de mélange à l'aide d'un système construit comme la somme d'un processus linéaire et d'un processus non-linéaire. Ce système est alors caractérisé par deux fonctions de transfert, une linéaire et une non-linéaire, qui relie la composante à la fréquence f des perturbations en un point de l'écoulement (entrée du système), à la composante du signal mesuré légèrement en aval (sortie du système). Ces fonctions de transfert sont calculées à l'aide d'une méthode itérative [55]. Leur connaissance permet alors de déterminer les termes du bilan sur la cohérence à la fréquence f :

$$\gamma_L^2(f) + \gamma_Q^2(f) + \gamma_{LQ}^2(f) + \gamma_\epsilon^2(f) = 1 \quad (1.5)$$

où $\gamma_L^2(f)$ est la cohérence linéaire locale, qui représente la fraction d'énergie de la sortie du système due à la croissance linéaire. Le terme $\gamma_Q^2(f)$ est la cohérence non-linéaire locale qui quantifie la part de l'énergie à la sortie du système qui a été générée par des interactions quadratiques. La cohérence linéaire-quadratique $\gamma_{LQ}^2(f)$ donne par ailleurs des informations sur l'histoire amont de l'écoulement, soit encore renseigne sur la fraction d'énergie qui a été produite via des processus non-linéaires antérieurs. Finalement, le terme d'erreur $\gamma_\epsilon^2(f)$ rend compte des erreurs induites par la modélisation proposée [55].

Une telle approche a permis à Walker & Thomas [157] d'identifier les mécanismes responsables du développement de chaque modes d'instabilités de la couche de mélange. Le fondamental du screech apparaît comme un mode antisymétrique qui croît dans un premier temps de manière linéaire. Les autres modes observés plus en aval s'avèrent être produits par interactions quadratiques. La parité des modes (symétrique / antisymétrique) peut alors être expliquée en se basant sur ces couplages quadratiques : une interaction d'un mode antisymétrique ou symétrique avec lui-même fournit un mode symétrique, tandis que le couplage d'un mode symétrique avec un mode antisymétrique conduit à la génération d'un mode antisymétrique. Ainsi, pour un jet rectangulaire, si le mode fondamental est par exemple antisymétrique, le premier harmonique est nécessairement symétrique [157].

Taux d'élargissement et permutation des axes

L'évolution longitudinale de la demi-largeur d'un jet est un indicateur du développement turbulent de l'écoulement. On observe dans les jets rectangulaires une nette augmentation du taux d'élargissement quand le bruit rayonné par le screech approche de son maximum d'amplitude [3, 59]. La demi-largeur transversale augmente en effet avec un taux supérieur à celui typiquement mesuré sur des jets rectangulaires parfaitement détendus.

Un phénomène de permutation du grand axe et du petit axe du jet (*axis switching*) est en outre visible. Des mesures expérimentales [3, 59] montrent que la demi-largeur dans la direction de l'envergure décroît dans un premier temps. Suffisamment en aval, quand les demi-largeurs transversale et dans le sens de l'envergure sont identiques, la demi-largeur dans l'envergure arrête sa décroissance et augmente linéairement. La demi-largeur transversale poursuit par ailleurs sa croissance, mais avec un taux plus faible. Il y a donc permutation des

axes puisque le petit axe possède alors une demi-largeur plus grande que celle observée dans l'envergure. À noter que loin en aval, les taux de croissance dans les deux directions ne sont pas nécessairement identiques [59].

L'augmentation du taux d'élargissement et la permutation des axes peuvent être expliquée par la formation de structures tourbillonnaires dans la direction de l'écoulement, appelées *ribs*. Ces structures, qui ont été observées par Alkislar *et al.* [3] sur un jet rectangulaire soumis au screech, sont associées à la formation de structures turbulentes cohérentes dans la direction de l'envergure [52]. Elles participent notamment à l'amélioration du transport entre le jet et le milieu ambiant, et au phénomène de permutation des axes.

1.1.4 Champ proche de pression

Propagation amont et renforcement du screech

Le modèle de la boucle de rétroaction du screech suppose que les sources acoustiques sont en interférences constructives dans la direction longitudinale. On s'attend en particulier à ce que le niveau de pression augmente quand on se déplace vers l'amont puisque le nombre de sources participant au screech est *a priori* plus élevé. Ce renforcement du screech vers l'amont a été caractérisé expérimentalement sur des jets rectangulaires par Raman [97], à l'aide de mesures de niveaux de pression en champ proche, suffisamment loin des fluctuations de pression aérodynamique. Les résultats montrent que pour $M_j = 1.45$, le niveau augmente vers l'amont. Cependant, quand le taux de détente croît, le renforcement est de moins en moins visible et devient même inexistant. Par exemple, pour $M_j = 1.75$, le niveau acoustique en amont est plus faible qu'en aval, et l'amplitude du screech est inférieure à celle observée pour $M_j = 1.45$.

Ondes stationnaires

Le screech est un phénomène très intense qui conduit à des fluctuations de pression de fort niveau se propageant au voisinage de la frontière du jet. Ces ondes sont visibles sur le champ de pression dans la couche de mélange. Panda *et al.* [87] et Panda [89] observent en effet, sur des jets ronds et rectangulaires, la présence d'une onde partiellement stationnaire associée à la superposition des perturbations acoustiques et aérodynamiques, qui ont des vitesses de phase de signe opposé et des amplitudes du même ordre de grandeur. Panda [89] propose alors d'utiliser à la place de la taille des cellules de choc la longueur d'onde de cette onde stationnaire, notée λ_{sw} , comme paramètre pour dimensionner la fréquence du screech.

Structure du champ proche et localisation des sources de bruit

La structure du champ proche acoustique a été étudiée expérimentalement par Rice & Taghavi [102] pour un jet rectangulaire. Des mesures au microphone au voisinage du jet leur ont permis de déterminer une cartographie du niveau acoustique à la fréquence du screech, dans le plan médian du jet, perpendiculairement au grand axe. Cinq maxima de niveau de pression, localisés légèrement en aval des chocs de compression, sont observés, et sont associés aux sources du screech, ou à des renforcements locaux de l'onde acoustique amont par interférences constructives. Les maxima situés au niveau des troisième et quatrième cellules

sont en outre dominants, et laissent penser que les sources du screech se positionnent au voisinage des troisième et quatrième chocs [102].

Une étude similaire a été effectuée par Panda [89] pour un jet circulaire soumis au screech. Une représentation du champ proche associé à la boucle de rétroaction est obtenue à l'aide d'une moyenne de phase verrouillée sur la fréquence de la boucle de rétroaction. Les résultats sont reproduits sur la figure 1.10, qui présente les fluctuations de pression moyennées sur la phase, sur une période du screech. Panda [89] identifie alors trois ondes de nature différente. Au voisinage de la frontière, une onde marquée par la flèche I est convectée vers l'aval, et est liée aux fluctuations de pression aérodynamiques. Deux types d'onde acoustique sont également observées. Les ondes représentées par la flèche III se propagent vers l'amont et correspondent au screech, tandis que les perturbations identifiées par la flèche II se propagent vers l'aval. Panda [89] remarque par ailleurs que la démarcation entre les ondes amonts (III) et avals (II) se situe entre la troisième et quatrième cellule de choc, et que cette position pourrait être la source principale du screech.

1.1.5 Interprétation des sources du screech à l'aide de l'acoustique géométrique

Les ondes acoustiques à l'origine du screech sont issues de l'interaction entre les cellules de choc et les tourbillons qui se développent dans la couche de mélange. Ce couplage est donc un élément clé du screech et plus généralement du bruit de choc. Il est cependant très difficile de caractériser ou même d'observer un tel mécanisme de génération de bruit. Suzuki & Lele [125] ont ainsi proposé une étude numérique de l'interaction d'un choc oblique avec une couche de mélange supersonique. Leur approche repose sur une méthode de tracé de rayons. En s'appuyant sur l'hypothèse de chocs de compression faibles, il est en effet possible de résoudre le problème de l'interaction du choc avec la couche de mélange à l'aide des outils de l'acoustique géométrique. Suzuki & Lele [125] reformulent alors le problème du bruit de choc en terme de "fuite" des chocs (*shock leakage*) à travers la frontière du jet. L'étude montre en particulier que la fuite des chocs a lieu au niveau des points d'inflexion de la vorticité, entre deux tourbillons, et que le rayonnement acoustique produit est dirigé vers l'amont et est composé d'une onde de compression suivie d'une onde de détente.

Ces résultats permettent par exemple d'interpréter les observations de Panda [89] ou de Walker & Thomas [157] qui constatent que la génération du screech est la plus intense entre la deuxième et la quatrième cellule de choc. L'apparition de fuite des choc   travers la couche de mélange nécessite en effet que les structures tourbillonnaires soient suffisamment développées. De manière opposée, plus en aval, les structures cohérentes tendent   disparaître et les points d'inflexion entre les tourbillons ne sont plus clairement définis. Par conséquent, l'intensité du rayonnement associé   la fuite des chocs est réduite [125].

1.2 Modélisation et prédiction du screech

1.2.1 Fréquence fondamentale - Modèle de Tam [132]

Le calcul de la fréquence fondamentale du screech peut être abordée   l'aide du modèle proposé par Tam [132], qui s'appuie sur une description simplifiée des propriétés de chaque

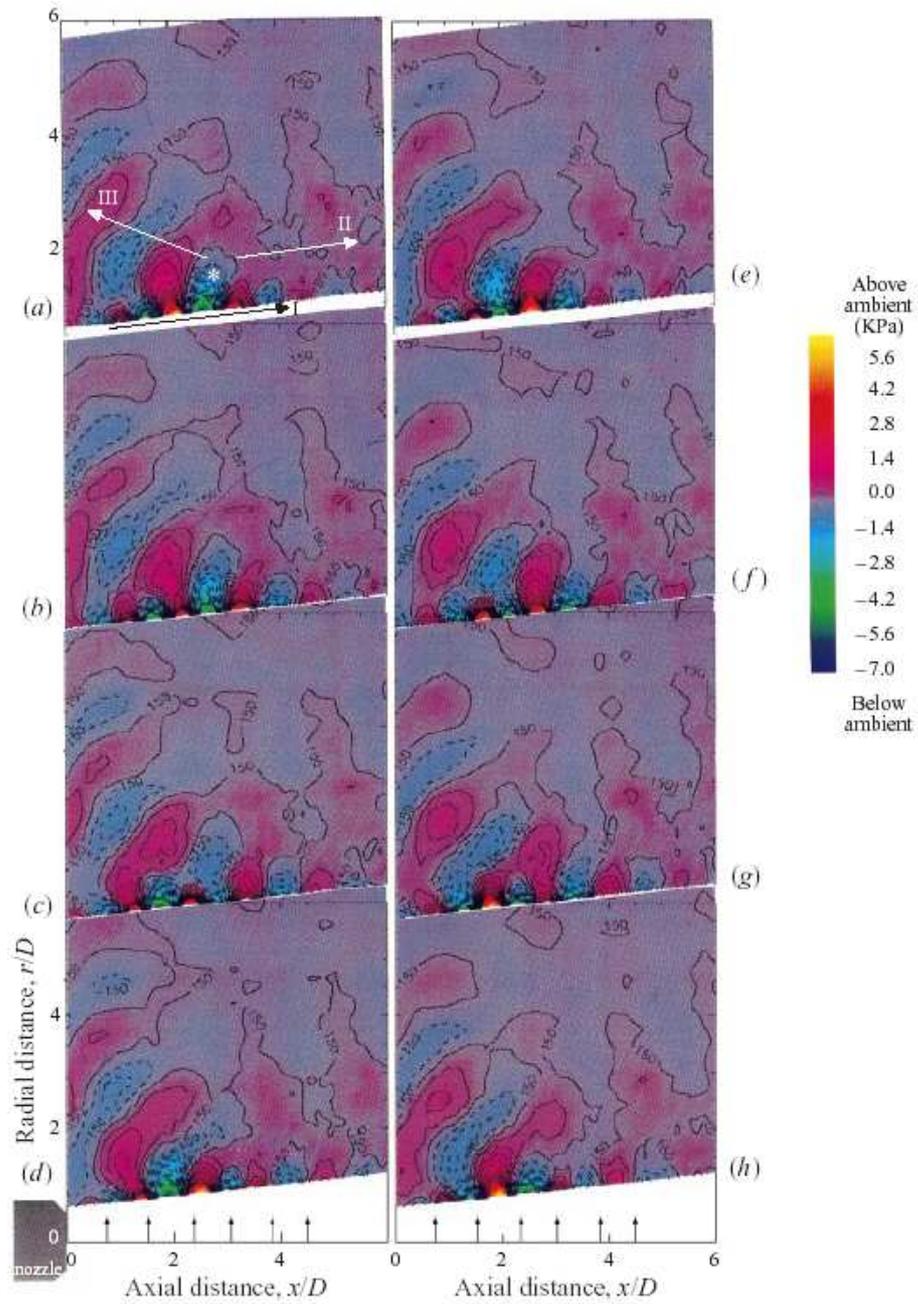


Figure 1.10: Fluctuations de pression moyennée sur la phase, obtenues en champ proche, pour un jet rond à $M_j = 1.19$. Décalage en temps τ/T (a)-(h) : 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75 et 0.0875, où T est la période du screech. D'après Panda [89].

élément de la boucle de rétroaction et des différents couplages qui peuvent intervenir. Les hypothèses du modèle sont que le facteur limitant est le phénomène de réceptivité, et que le couplage entre les cellules de choc et la couche de mélange est faible mais a pour conséquence la production d'ondes acoustiques.

Réceptivité de la couche de mélange

Tam *et al.* [130] suggèrent que le facteur limitant de la boucle de rétroaction est le processus de réceptivité, qui intervient au niveau de la lèvre de la tuyère. Ils émettent l'hypothèse que si l'amplitude de l'onde acoustique amont est trop faible, l'excitation ne sera pas suffisamment importante pour produire une onde d'instabilité capable de maintenir la boucle de rétroaction. Il est donc nécessaire que le maximum du rayonnement acoustique issu de l'interaction entre la couche de mélange et les cellules de choc se situe vers l'amont.

Cellules de choc

En s'appuyant sur les travaux de Pack [86], Tam [132] propose une méthode qui permet d'estimer la longueur des cellules de choc en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour des jets rectangulaires et elliptiques. La couche de mélange est modélisée par une couche de vorticit   infiniment mince, et les   quations d'Euler sont lin  aris  es. Le jet peut alors   tre consid  r   comme un guide d'onde pour des chocs faibles. L'espacement entre les cellules de choc est d  termin   en d  veloppant la solution suivant ses valeurs propres : le premier mode donne alors l'approximation    l'ordre un de la longueur L_s des cellules. Le mod  le suppose donc que les chocs sont statiques et que leur intensit   n'est pas affect  e par le d  veloppement des perturbations a  rodynamiques. Pour un jet plan, Tam [132] fournit ainsi la solution analytique :

$$\frac{L_s}{h} = 2 (M_j^2 - 1)^{1/2} \frac{M_d}{M_j} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_j^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_d^2} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \quad (1.6)$$

o   h est la hauteur du jet, γ la chaleur sp  cifique du fluide et M_d le nombre de Mach d'  jection de la tuy  re (voir l'annexe A). La relation (1.6) se r  v  le   tre une bonne approximation pour les jets ronds et rectangulaires sur une large gamme de nombre de Mach [116, 132].    noter que des mod  les plus   labor  s ont   t   d  velopp  s par exemple par Morris *et al.* [82] pour tenir compte de g  om  tries plus complexes, ou par Tam *et al.* [129] pour estimer l'  volution longitudinale des cellules de chocs dans le cas d'un   coulement de base faiblement divergent.

Perturbations a  rodynamiques

Les structures turbulentes sont mod  lis  es par une onde d'instabilit   dont l'amplitude et la vitesse de convection sont constantes. En ne tenant pas compte de l'influence des cellules de choc, il est possible d'  valuer la vitesse de convection u_c    partir de la th  orie des instabilit  s lin  aires appliqu  e    un jet parfaitement d  tendu, dont le nombre de Mach est   gal    M_j . La m  thode conduit    $u_c \simeq 0.7U_j$ pour des jets circulaires, et    $u_c \simeq 0.5U_j$ pour des jets plans, en notant la vitesse du jet $U_j = M_j c_j$, o   c_j est la vitesse du son dans l'  coulement.    noter que ces valeurs sont coh  rentes avec les r  sultats exp  rimentaux pr  sent  s dans la section 1.1.3.

Modèle de l'interaction des structures turbulentes avec les cellules de choc

L'analyse des couplages des ondes d'instabilités avec la structure quasi-périodique des chocs peut être abordée à l'aide du modèle de Tam [131] développé pour le bruit de choc. L'approche théorique est décrite ici dans un contexte simplifié mono-dimensionnel afin de faire apparaître plus clairement les mécanismes de génération de bruit. Une étude complète dans le cas tridimensionnel est fournie dans la référence [131].

La perturbation de vitesse associée aux structures turbulentes est représentée par une onde d'instabilité :

$$u_t = A_t \cos(kx - \omega t) \quad (1.7)$$

où A_t est l'amplitude. Le nombre d'onde k et la pulsation ω sont par ailleurs reliés par la relation de dispersion $k = \omega/u_c$, où u_c est la vitesse de convection.

Les perturbations de vitesse associées à la présence de cellules de choc dans l'écoulement sont ensuite modélisées par une superposition de modes de guide d'onde de la colonne du jet [129]. Le i -ème mode des cellules de choc est une fonction spatialement périodique qui peut se mettre sous la forme :

$$u_s = A_s \cos(\kappa_i x) \quad (1.8)$$

où $\kappa_i = 2\pi/L_i$ est le nombre d'onde du mode i , et L_i est l'espacement entre les chocs pour le mode i .

Les perturbations générées par l'interaction entre l'onde d'instabilité et les cellules de choc sont ensuite données par le produit de u_t et u_s ,

$$u_t u_s = \frac{A_t A_s}{2} \left[\underbrace{\cos[(k - \kappa_i)x - \omega t]}_{\text{onde } W^-} + \underbrace{\cos[(k + \kappa_i)x - \omega t]}_{\text{onde } W^+} \right] \quad (1.9)$$

La perturbation résultante est composée d'une onde W^+ de vitesse de phase $v_\varphi = \omega/(k + \kappa_i)$ et d'une onde W^- telle que $v_\varphi = \omega/(k - \kappa_i)$.

Pour les ondes W^- , si κ_i est légèrement supérieur à k , la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/(k - \kappa_i)$ peut être négative et supérieure en valeur absolue à la vitesse du son dans le milieu ambiant c_∞ . L'onde est donc supersonique, et le champ acoustique rayonné est alors dirigé vers l'amont et est de type ondes de Mach [126, 128]. La direction de propagation est donnée par l'angle de Mach θ mesuré par rapport à la direction aval, qui est relié à la vitesse de phase par l'expression :

$$\cos \theta = \frac{c_\infty}{v_\varphi} \quad (1.10)$$

soit encore, en faisant apparaître la fréquence de l'onde,

$$f_i = \frac{u_c}{L_i(1 - M_c \cos \theta)} \quad (1.11)$$

où $f_i = \omega_i/2\pi$ et $M_c = u_c/c_\infty$ est le nombre de Mach acoustique. Cette relation lie les fréquences dominantes du champ acoustique à la direction d'observation. En ce qui concerne la vitesse de phase de l'onde W^+ , elle peut se mettre sous la forme $v_\varphi = u_c \omega_i / (\omega_i + u_c \kappa_i)$ et est inférieure à u_c . Pour les taux de détente généralement étudiés en laboratoire, $M_j < 2$, la vitesse de convection u_c est subsonique et par conséquent la vitesse v_φ l'est aussi. l'amplitude

de l'onde est donc faible et son rayonnement ne participe pas de manière significative au bruit de choc [128].

La fréquence fondamentale f_s du screech peut donc être estimée avec la relation (1.11) en posant $\theta = \pi$ pour avoir un rayonnement vers l'amont, et $i = 1$ pour obtenir le fondamental :

$$f_s = \frac{u_c}{L_s(1 + M_c)} \quad (1.12)$$

où $L_s = L_1$ est l'espacement entre les cellules de choc.

Fréquence fondamentale du screech

Il est finalement possible d'écrire une formule analytique de la fréquence du screech à partir des relations (1.6) et (1.12). Il vient pour le nombre de Strouhal,

$$\text{St} = \frac{f_s h}{U_j} = \frac{u_c}{U_j} \frac{h}{L_s} \left[1 + \frac{u_c}{U_j} \frac{c_j}{c_\infty} M_j \right]^{-1} \quad (1.13)$$

Dans le cas des jets rectangulaires, cette formule reproduit fidèlement l'évolution de la fréquence du screech avec le nombre de Mach M_j [87, 95, 116, 132] †.

1.2.2 Prédominance du mode symétrique et du mode antisymétrique

La formule analytique (1.13) permet de calculer la fréquence du screech mais n'apporte pas d'information supplémentaire sur les caractéristiques du phénomène. En particulier, le passage du mode symétrique au mode antisymétrique, pour un jet rectangulaire, n'est pas décrit.

On observe un changement de comportement similaire pour le screech des jets circulaires, qui passe d'un mode hélicoïdal à un mode de battement au voisinage de $M_j = 1.3$. Tam *et al.* [138] suggèrent que la rétroaction sera d'autant plus efficace que le mode de la couche de mélange excité est instable, et que c'est donc les instabilités de la couche de mélange qui fixent le mode de fonctionnement de la boucle de rétroaction. L'étude du développement des instabilités d'un jet rond montre en effet que pour $M_j < 1.3$, le mode le plus instable à la fréquence du screech (1.13) est hélicoïdal, tandis que pour $M_j > 1.3$, l'instabilité dominante est un mode de battement.

1.2.3 Amplitude

Niveau absolu

La prédiction du niveau du screech est un problème de modélisation très délicat. Elle nécessite en effet de savoir décrire fidèlement toutes les composantes de la rétroaction et leurs interactions, et d'être capable de quantifier avec précision les mécanismes qui conduisent à la saturation de l'amplitude des fluctuations. Il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle permettant de calculer le niveau absolu du screech [140].

†Ce modèle permet aussi d'obtenir la fréquence des modes A_1 et B des jets ronds. La fréquence des modes A_2 et C semblent néanmoins obéir à une loi différente [114]. L'analyse par Tam & Hu [133] des instabilités linéaires d'un jet supersonique plan parfaitement détendu montre cependant que certaines instabilités qui restent confinées au voisinage de la frontière du jet peuvent se propager vers l'amont de l'écoulement. Shen & Tam [114], en utilisant ces ondes pour construire la boucle de rétroaction du screech, ont développé un modèle qui conduit aux fréquences des modes A_2 et C .

Directivité

En s'inspirant des travaux de Powell [93], le screech peut être modélisé par une série de sources ponctuelles équidistantes, dont le déphasage dépend du temps mis par les structures turbulentes pour être convectées entre deux sources. La méthode permet de déterminer le niveau acoustique relatif en fonction de la direction d'observation θ mesurée par rapport à la direction aval [85]. En effet, la pression rayonnée en champ lointain par le réseau de sources est donnée par l'expression,

$$p = \exp \left[\frac{2i\pi(c_\infty t - r_0)}{\lambda_s} \right] \sum_j \frac{S_j}{r_j} \exp \left[-2i\pi j \frac{\Delta_s}{\lambda_n} \left(\frac{1}{M_c} - \cos \theta \right) \right] \quad (1.14)$$

où r_0 est la distance entre l'observateur et la sortie de la buse, r_j est la distance entre l'observateur et la source j , λ_s est la longueur d'onde des sources, Δ_s est l'écart entre deux sources, et S_j est l'amplitude de la source j . En outre, d'après l'équation (1.12) qui donne la fréquence du screech, la longueur d'onde λ_n des sources peut s'écrire,

$$\lambda_n = \frac{L_s}{n} \left(1 + \frac{1}{M_c} \right) \quad (1.15)$$

l'entier n étant l'indice de l'harmonique du screech que l'on considère.

À partir de la relation (1.14), Norum [85] reproduit de manière satisfaisante la position et l'amplitude relative des lobes du screech d'un jet circulaire. Il remarque en outre que le nombre et l'amplitude des sources influencent peu les résultats. Les paramètres critiques sont le nombre de Mach de convection M_c et l'écart spatial entre les sources Δ_s/λ_s .

Décroissance du niveau avec la température

Les observations expérimentales montrent que le niveau du screech diminue avec la température du jet [105]. Il a été suggéré dans la section 1.2.2 que de la boucle de rétroaction est d'autant plus efficace que l'onde d'instabilité de la couche de mélange à la fréquence du screech est instable. Dans le cas d'un jet rond, la fréquence du mode le plus amplifié par la couche de mélange augmente avec la température, tandis que la fréquence du screech fournit par la relation (1.13) diminue [138]. Ainsi, pour un jet chauffé, le champ de pression amont excite une fréquence relativement éloignée de celle du mode le plus amplifié. La croissance des perturbations aérodynamiques est donc plus faible et le rayonnement associé à l'interaction avec les chocs est moins intense. Une diminution de l'intensité du screech quand la température augmente peut alors être observée. Ce type d'étude n'a pas encore été effectuée pour les jets rectangulaires. Les tendances expérimentales sont cependant similaires : une température dans le jet plus importante se traduit par une augmentation de la fréquence du screech et par une diminution de la fréquence du mode le plus amplifié par la couche de mélange.

1.3 Simulation numérique du screech

Les parties précédentes ont montré la complexité des mécanismes à l'origine du screech. L'étude expérimentale de ce phénomène de bouclage est par ailleurs délicate car les écoulements supersoniques mettent en jeu des vitesses très élevées et des fluctuations de fortes

Tableau 1.1: Récapitulatif des simulations numériques du screech des jets supersoniques. (MILES, Monotonically Integrated Large-Eddy Simulation ; URANS : Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes ; LES : Large-Eddy Simulation ; ILES : Implicit Large-Eddy Simulation)

	Auteurs	Méthode	Géométrie
1996	Kolbe <i>et al.</i> [56]	MILES	3D rectangulaire
1998	Shen & Tam [112]	URANS	2D axisymétrique
2000	Shen & Tam [113]	URANS	2D axisymétrique
2002	Shen & Tam [114]	URANS	3D circulaire
2003	Loh <i>et al.</i> [69]	ILES	3D circulaire
2003	Alqadi & Scott [2]	LES	3D rectangulaire
2004	Li & Gao [63]	URANS	2D axisymétrique
.....			
2003	Suzuki & Lele [125]	DNS	couche de mélange 2D
2005	Schaupp <i>et al.</i> [110]	DNS	couche de mélange 3D

amplitudes qui rendent les mesures expérimentales difficiles. La durée de vie d'un fil chaud placé dans un jet supersonique est par exemple relativement courte. À noter que des méthodes non-intrusives comme la PIV ou les photographies Schlieren permettent malgré tout d'obtenir des visions instantanées des champs de vitesse ou des gradients de masse volumique dans l'écoulement (voir par exemple les références [3] et [89]).

Afin de compléter les études expérimentales, des simulations numériques peuvent être effectuées. Il est alors nécessaire de disposer de méthodes numériques à la fois capables de calculer des chocs de compression, de reproduire correctement les perturbations aérodynamiques et de prendre en compte les fluctuations acoustiques de faible amplitude. Le calcul doit également inclure une tuyère qui est un élément essentiel de la boucle de rétroaction du screech, mais qui d'un point de vue numérique peut poser des problèmes, en particulier quand l'écoulement au voisinage des parois présente de forts gradients comme pour les jets supersoniques choqués. L'évolution des algorithmes de discrétisation spécifiques au calcul aéroacoustique [14, 60, 135] a malgré tout permis de simuler directement le screech et d'obtenir les champs instantanés de l'ensemble des variables qui décrivent l'écoulement de jets supersoniques. La simulation numérique apparaît donc à la fois comme un outil de prédiction et comme un moyen d'investigation des phénomènes physiques des jets soumis au screech.

Le tableau 1.1 fournit un récapitulatif, non-exhaustif, des simulations disponibles dans la littérature. Les calculs se répartissent en deux catégories principales. Une partie des simulations utilise une approche de type RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*), alors que les autres calculs sont des simulations des grandes échelles (SGE ou LES pour *Large-Eddy Simulation*). On remarquera également les simulations DNS (*Direct Numerical Simulation*) de Suzuki & Lele [125] et de Schaupp *et al.* [110], qui portent sur la caractérisation de l'interaction d'une onde de compression avec une couche de mélange.

Navier-Stokes moyennée instationnaire (URANS)

Les méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes de type RANS cherchent à réduire les degrés de liberté du problème en ne calculant que la moyenne statistique de la

solution, le développement turbulent étant pris en compte par une modélisation du tenseur de Reynolds. Dans le cas de l'étude d'un phénomène périodique, la résolution peut également porter sur les modes instationnaires périodiques de l'écoulement [106]. On parle alors de simulations de type URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

Le caractère périodique du screech donne la possibilité de mettre en pratique une approche numérique basée sur une méthode URANS. Shen & Tam [112, 113, 114] et Li & Gao [63] ont ainsi calculé le screech de jets axisymétriques et circulaires.

La simulation 2D axisymétrique de Shen & Tam [112] reproduit par exemple correctement la structure des cellules de choc. Ces auteurs observent par ailleurs un rayonnement harmonique vers l'amont qui correspond aux modes d'oscillation A_1 et A_2 du screech, qui sont, pour les nombres de Mach considérés dans le calcul, des modes caractéristiques des jets circulaires. Les niveaux acoustiques du screech obtenus sont de plus en accord avec les résultats expérimentaux pour la plupart des nombres de Mach M_j simulés. Un calcul similaire permet à Shen & Tam [113] d'observer une augmentation de la fréquence du screech avec la température du jet, et de constater par ailleurs que l'épaisseur de la lèvre a peu d'influence sur le bruit rayonné en amont. Shen & Tam ont étendu par la suite ce calcul axisymétrique à une simulation URANS tridimensionnelle [114], afin d'aborder la résolution des modes d'oscillation non-axisymétriques du screech des jets circulaires. Le champ acoustique amont fourni par ce calcul met effectivement en évidence l'apparition un mode de battement (mode B) et d'un mode hélicoïdal (mode C) pour des nombres de Mach M_j suffisamment élevés [114]. En s'inspirant des travaux de Shen & Tam [112], Li & Gao [63] ont également effectué des simulations URANS du screech de jet 2D axisymétrique. Ils observent en particulier des mouvements des cellules de choc similaires à ceux mis en évidence expérimentalement par Panda [88].

Simulation des grandes échelles (SGE)

La simulation des grandes échelles repose sur une séparation des échelles turbulentes, qui permet d'alléger le coût informatique de la résolution en se consacrant uniquement au calcul des échelles les plus grandes de l'écoulement. Loh *et al.* [69] effectuent ainsi une SGE d'un jet circulaire supersonique et reproduisent correctement les modes symétriques A_1 et A_2 du screech, mais trouvent un niveau plus faible de 15 dB par rapport aux résultats expérimentaux. Alqadi & Scott [2] ont par ailleurs réalisé la SGE d'un jet supersonique rectangulaire soumis au screech qui prédit la fréquence du screech mais sous-estime le niveau du phénomène d'environ 5 dB par rapport aux résultats expérimentaux proposés par exemple dans la section 1.1.1.

Simulation numérique directe (DNS)

La simulation numérique directe du screech nécessite de résoudre un très grand nombre de degrés de liberté puisqu'il faut prendre en compte toutes les échelles de la turbulence dans un jet complet. Le cadre d'étude peut cependant être simplifié afin d'envisager une DNS avec un coût informatique raisonnable. Le problème du bruit de chocs (*cf.* la section 1.1.5 de ce chapitre) a ainsi été étudié par Suzuki & Lele [125] à l'aide d'une DNS de l'interaction d'un onde de compression avec une couche de mélange bidimensionnelle. Les auteurs observent en

particulier le mécanisme de génération de bruit associé à la “fuite” des chocs au niveau des points d’inflexion de la vorticité. Le calcul a été étendu au cas tridimensionnel par Schaupp *et al.* [110] qui simulent également le couplage entre une couche de mélange et une onde de compression mais pour une configuration 3D périodique dans la direction de l’envergure.

1.4 Conclusion

Les travaux de recherche menés sur le screech ont permis de caractériser certains aspects de la boucle de rétroaction   l’origine du phénomène de feedback. Les connaissances accumulées restent malgré tout essentiellement qualitatives et les prédictions quantitatives portent principalement sur la fréquence dominante du screech. En effet, quelques éléments clés de la boucle rétroaction échappent encore   une caractérisation précise. Le processus de réceptivité est par exemple clairement identifié mais une relation quantitative entre l’onde acoustique incidente et l’onde d’instabilité générée reste hors d’atteinte pour le moment. De la même manière, les sources de bruit du screech, qui sont associées   l’interaction entre les tourbillons de la couche de mélange et les chocs, sont mal comprises et il n’existe pas   l’heure actuelle de modèle qui permette de prédire leur amplitude.

Simulation des grandes échelles pour le calcul aéroacoustique

Ce deuxième chapitre décrit les bases théoriques de la Simulation des Grandes Échelles (SGE) compressible, ainsi que les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes filtrées dans le cadre du calcul direct du bruit d'origine aérodynamique. L'objectif est alors de déterminer simultanément les perturbations d'origine aérodynamique et acoustique.

Ce problème est délicat car il nécessite des méthodes numériques très précises. Les contraintes liées à l'aéroacoustique numérique [139] ont cependant motivé la création de nouveaux algorithmes d'ordre élevé, peu dissipatifs et peu dispersifs, ayant la capacité de résoudre correctement des perturbations acoustiques au sein d'un écoulement [14, 60, 135]. Ces algorithmes, appliqués aux SGE compressibles, permettent d'obtenir en un seul calcul le développement turbulent d'un écoulement réaliste en terme de nombre de Reynolds, et le champ acoustique rayonné. On parle alors de calcul direct du bruit, ou de *Direct Noise Computation* (DNC). La faisabilité de ce type de calcul a récemment été démontrée par plusieurs équipes de recherche [8, 9, 10, 15, 17, 42, 43, 151].

Les équations de Navier-Stokes filtrées et la SGE compressible basée sur un filtrage explicite d'ordre élevé, qui est utilisée dans ce manuscrit, sont décrites dans la section 2.1. Les parties suivantes présentent la mise en œuvre pratique des méthodes numériques d'ordre élevé spécifiques à ce type de simulation. Le traitement des points intérieurs du domaine de calcul est abordé dans la section 2.2, et la section 2.3 décrit l'implémentation des conditions limites non-réfléchissantes. Finalement, le problème de la résolution numérique des chocs de compression est examiné dans la section 2.4.

2.1 Simulation des grandes échelles compressible

2.1.1 Principe

La SGE repose sur une séparation des échelles turbulentes. Cette séparation entre les structures de l'écoulement est soumise au choix d'une longueur de coupure Δ : les échelles plus grandes que Δ sont dites résolues, tandis que pour les structures plus petites que Δ , on parle d'échelles de sous-maille, ou d'échelles non-résolues. Cette approche s'appuie notamment sur l'hypothèse que le développement des échelles résolues est propre à chaque écoulement, tandis que les échelles non-résolues présentent un comportement plus universel, qui peut être modélisé *a priori*. L'application d'un filtre passe-bas pour les nombres d'onde aux équations de Navier-Stokes permet d'obtenir le modèle qui gouverne la dynamique des grandes échelles. Ces équations filtrées font intervenir en particulier des termes de sous-maille qui décrivent les

interactions entre les échelles résolues et non-résolues. Il est donc nécessaire de modéliser ces termes afin de fermer les équations de Navier-Stokes filtrées. Les principaux efforts du développement des techniques de SGE ont ainsi porté sur l'élaboration de modèles de sous-maille visant à décrire les termes de sous-maille à partir des échelles résolues.

2.1.2 Équations de Navier-Stokes compressibles filtrées

En coordonnées Cartésiennes, la masse volumique ρ , la vitesse $\mathbf{u} = (u_i)$, la pression p et l'énergie spécifique totale e_t sont gouvernées par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e_t u_j) + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(p u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \tau_{ij}) = 0 \quad (2.3)$$

avec la convention de Einstein de sommation des indices répétés. Pour un gaz parfait, on dispose de l'équation d'état $p = \rho r T$, où T est la température, et r est la constante massique des gaz parfaits. L'énergie totale s'exprime ainsi suivant :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_k^2 \quad (2.4)$$

avec une chaleur spécifique γ égale à 1.4 pour l'air. L'hypothèse de fluide Newtonien permet d'exprimer le tenseur des contraintes avec,

$$\tau_{ij} = 2\mu(T)S_{ij} \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.5)$$

où la viscosité dynamique $\mu(T)$ est donnée par la relation empirique de Sutherland [160]. Le flux de chaleur q_j est ensuite modélisé par la loi de Fourier,

$$q_j = -\frac{\mu(T)c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

où c_p est la capacité calorifique massique à pression constante, et Pr est le nombre de Prandtl.

Un filtrage spatial passe-bas du point de vue des longueurs d'onde est ensuite introduit. La partie filtrée \bar{f} d'une variable f est obtenue avec le produit de convolution,

$$\bar{f} = \int_D G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.7)$$

où G est le noyau du filtre, et D le domaine de calcul. Afin de permettre la manipulation des équations de Navier-Stokes après application du filtre, on impose à l'opération de filtrage d'être linéaire et de commuter avec l'opérateur de dérivation. L'introduction du filtrage de Favre permet en outre d'écrire les équations sous une forme plus compacte. La partie filtrée au sens de Favre \tilde{f} de la variable f s'obtient en effet à l'aide de la pondération par la masse volumique suivante :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (2.8)$$

La variable f peut alors être décomposée suivant sa partie filtrée \tilde{f} , et sa partie de sous-maille f'' , i.e. $f = \tilde{f} + f''$.

Après manipulations, il vient pour les équations filtrées de continuité et de quantité de mouvement [32],

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \hat{\tau}_{ij}) \quad (2.10)$$

avec,

$$\hat{\tau}_{ij} \equiv 2\mu(\tilde{T})\hat{S}_{ij} \quad \text{et} \quad \hat{S}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.11)$$

On utilise pour l'énergie une équation sur $\rho \hat{e}_t$ [155], qui est la partie de l'énergie totale qui ne fait intervenir que les variables résolues :

$$\bar{\rho} \hat{e}_t \equiv \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_k^2 \quad (2.12)$$

L'évolution de $\rho \hat{e}_t$ est donnée par l'équation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \hat{e}_t) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \hat{e}_t \tilde{u}_j) + \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{p} \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{u}_i \hat{\tau}_{ij}) = -\frac{\partial \mathcal{Q}_j}{\partial x_j} + \tilde{u}_i \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} \\ + \bar{\rho} \tilde{\epsilon} + \bar{\rho} \tilde{\pi} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{u}_i \bar{\tau}_{ij} - \tilde{u}_i \hat{\tau}_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{q}_j - \hat{q}_j) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où,

$$\hat{q}_j \equiv -\frac{\mu(\tilde{T})c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

Les termes qui apparaissent au second membre des équations (2.10) et (2.13) sont des termes correctifs :

- le tenseur des échelles de sous-maille,

$$\mathcal{T}_{ij} = \bar{\rho}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \widetilde{u_i u_j}) \quad (2.15)$$

qui se décompose suivant,

$$\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{L}_{ij} + \mathcal{C}_{ij} + \mathcal{R}_{ij} \quad (2.16)$$

avec,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{ij} = -\bar{\rho}(\widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \\ \mathcal{C}_{ij} = -\bar{\rho}(\widetilde{\tilde{u}_i u_j''} + \widetilde{u_i'' \tilde{u}_j}) \\ \mathcal{R}_{ij} = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} \end{cases} \quad (2.17)$$

où \mathcal{L}_{ij} est le tenseur de Léonard, qui traduit le fait que l'opération de filtrage n'est pas idempotente. Ce terme peut se calculer à partir des échelles résolues. Le terme \mathcal{C}_{ij} est le tenseur des termes croisés qui rend compte des interactions directes entre les échelles résolues et non-résolues. Le dernier terme, \mathcal{R}_{ij} , caractérise l'influence des échelles non-résolues sur les échelles résolues. \mathcal{R}_{ij} est le tenseur des contraintes de Reynolds, ou vrai tenseur de sous-maille ;

- la corrélation pression-vitesse de sous-maille,

$$Q_j = \frac{\overline{p u_j} - \bar{p} \tilde{u}_j}{\gamma - 1} \quad (2.18)$$

- la corrélation pression-dilatation de sous-maille,

$$\bar{\rho} \tilde{\pi} = \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

- la dissipation turbulente de sous-maille,

$$\bar{\rho} \tilde{\epsilon} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

- et deux termes, $\partial_j(\bar{\tau}_{ij} - \hat{\tau}_{ij})$, $\partial_j(\tilde{u}_i \bar{\tau}_{ij} - \tilde{u}_i \hat{\tau}_{ij})$, et $\partial_j(\bar{q}_j - \hat{q}_j)$, qui tiennent compte de la substitution de $\bar{\tau}_{ij}$ par $\hat{\tau}_{ij}$, et de \bar{q}_j par \hat{q}_j .

Le tenseur de sous-maille \mathcal{T}_{ij} est généralement considéré comme le terme prépondérant qui doit être modélisé à partir des échelles résolues.

2.1.3 Fermeture des équations filtrées

Contraintes physiques

Pour des écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds, la prépondérance des effets convectifs vis à vis des effets visqueux implique un spectre très large de la turbulence. Les grandes structures turbulentes, typiquement de la taille de l'échelle intégrale, sont porteuses de l'essentiel de l'énergie cinétique qu'elles transmettent vers les échelles plus petites, via la cascade d'énergie. Leur dynamique, qui est fortement dépendante des conditions de génération de l'écoulement, est spécifique à chaque problème. Les petits tourbillons, dont la taille est de l'ordre de l'échelle de Taylor, dissipent par effets visqueux l'énergie qu'ils reçoivent des structures plus grandes sous forme de chaleur [5]. Pour des nombres de Reynolds élevés, les structures énergétiques et les structures dissipatives sont bien distinctes. Les tourbillons de la zone intermédiaire du spectre, dite zone inertielle, ne sont pas dissipatifs : ils transmettent l'énergie cinétique des grosses structures vers les structures plus fines chargées de la dissiper. Le comportement des tourbillons de la zone inertielle est supposé universel. Il est en particulier peu sensible aux caractéristiques macroscopiques de l'écoulement. La séparation introduite par le filtrage spatial de la simulation des grandes échelles se situe ainsi idéalement dans la zone inertielle, d'une part afin de résoudre les grandes structures qui sont propres à l'écoulement étudié, et d'autre part pour pouvoir tenir compte de l'influence des échelles non-résolues en modélisant la dynamique des tourbillons de la zone inertielle ; modélisation *a priori* possible au vu du caractère universel des structures turbulentes dans cette gamme de longueurs d'onde [39].

Les modèles de sous-maille sont donc soumis à une contrainte majeure : reproduire fidèlement le flux entre les échelles résolues et les échelles non-résolues dans la cascade d'énergie.

Contraintes numériques

Le couplage entre les algorithmes de discrétisation spatiale et la précision de la SGE a fait l'objet de travaux récents [27, 40, 57]. Cette problématique est par ailleurs abordée dans le chapitre 3. Deux sources principales d'erreur sont distinguées : les erreurs dues aux différences finies et celles produites par l'aliasing.

Le calcul approché des dérivées au voisinage de forts gradients, qui sont mal résolus par le maillage, génère des erreurs numériques qui sont associées aux différences finies. Il est alors intéressant de déterminer le nombre d'onde effectif k^* du schéma aux différences finies [139]. De manière général, on observe que les différences finies ne résolvent pas les nombres d'onde proches de la coupure du maillage, mais sont précis pour des nombres d'onde plus petits. Kravchenko & Moin [57] remarquent que pour des schémas d'ordre deux, l'erreur numérique peut être plus importante que le terme de sous maille lui-même. Ils recommandent donc l'utilisation de différences finies d'ordre élevé, plus précises.

Le phénomène d'aliasing est aussi à l'origine d'une partie des erreurs numériques. L'évaluation des termes quadratiques des équations de Navier-Stokes génère en effet des hautes fréquences qui ne sont pas supportées par le maillage, et qui interagissent avec les basses fréquences par recouvrement spectral.

Une approche possible pour réduire les erreurs de discrétisation lors d'une SGE est l'application explicite d'un filtre sélectif [70]. La méthode permet de contrôler l'erreur associée aux différences finies en supprimant de la solution numérique les longueurs d'onde qui ne sont pas résolues par les schémas de dérivation spatiale. Le phénomène de l'aliasing peut aussi être réduit avec un choix adéquat du filtrage. Ce problème sera traité en détails dans le chapitre 3.

Les caractéristiques du filtre ont aussi une influence non négligeable sur la modélisation. Il est possible de faire apparaître explicitement les propriétés du noyau du filtre dans les équations de Navier-Stokes filtrées. Domaradzki & Adams [30] remarquent en effet que la discrétisation du problème induit une perte définitive d'information. La représentation de la solution continue des équations de Navier-Stokes par un nombre fini de points opère implicitement une projection qui ne peut être inversée. Le support spectral de la solution projetée, *i.e.* de la solution discrétisée, est tronqué. Les informations sur les échelles non-résolues ne peuvent être en aucun cas restituées. Une notation explicite de la troncature spectrale associée à la discrétisation du problème peut être introduite : si l'exposant \mathcal{L} indique la troncature spectrale et l'exposant \mathcal{S} son complément, la décomposition traditionnelle (2.7) d'une variable f devient [30] :

$$\begin{aligned} f &= f^{\mathcal{L}} + f^{\mathcal{S}} \\ &= \bar{f}^{\mathcal{L}} + \underbrace{(f^{\mathcal{L}} - \bar{f}^{\mathcal{L}})}_{f'} + f^{\mathcal{S}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $f^{\mathcal{L}}$ représente les échelles résolues non filtrées, $\bar{f}^{\mathcal{L}}$ sont les échelles résolues filtrées, $(f^{\mathcal{L}} - \bar{f}^{\mathcal{L}})$ sont les échelles dites de sous-filtre (*subfilter scales*), et $f^{\mathcal{S}}$ sont les échelles non résolues. Du point de la terminologie utilisée classiquement, les échelles de sous-maille f' sont la somme des échelles de sous-filtre et des échelles non résolues. L'introduction explicite de la troncature

spectrale fait en outre apparaître deux termes dans le tenseur de sous-maille [30] :

$$\mathcal{T}_{ij} = \underbrace{\bar{\rho} \left[(\overline{u_i^{\mathcal{L}} u_j^{\mathcal{L}}})^{\mathcal{L}} - \overline{u_i^{\mathcal{L}} u_j^{\mathcal{L}}} \right]}_{\mathcal{T}_{ij}^{\text{rep}}} + (-\bar{\rho}) \underbrace{\left[\overline{u_i^{\mathcal{L}} u_j^{\mathcal{S}}} + \overline{u_i^{\mathcal{S}} u_j^{\mathcal{L}}} + \overline{u_i^{\mathcal{S}} u_j^{\mathcal{S}}} \right]}_{\mathcal{T}_{ij}^{\text{nrp}}} \quad (2.22)$$

où $\mathcal{T}_{ij}^{\text{rep}}$ représente les interactions entre les échelles qui sont supportées par le maillage, et qui ne sont qu'en partie affectées par le filtre. Ce terme, qui fait directement intervenir les propriétés du filtre dans la modélisation, est d'autant plus petit que le filtre est proche d'un filtre passe-bas idéal, c'est à dire un filtre dont le nombre d'onde de coupure coïncide avec celui du maillage. Le tenseur $\mathcal{T}_{ij}^{\text{nrp}}$ contient l'influence des échelles absentes du système discrétisé, et est ainsi le terme pertinent pour la modélisation des échelles non-résolues.

Modèles de viscosité turbulente

Une grande partie des modèles de sous-maille repose sur une hypothèse de viscosité turbulente de type Boussinesq, qui postule que le tenseur des contraintes de sous-maille est relié au tenseur des déformations du champ résolu par le biais d'une viscosité turbulente ν_t :

$$\mathcal{T}_{ij} = -\nu_t \hat{S}_{ij} \quad (2.23)$$

Pour reproduire le transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles, la viscosité turbulente extrait de l'énergie aux structures résolues par un mécanisme similaire à celui de la viscosité moléculaire. L'alignement de \mathcal{T}_{ij} et \hat{S}_{ij} conduit en effet à une dissipation totale donnée par $(\nu + \nu_t)$. La viscosité turbulente peut être interprétée par analyse dimensionnelle comme le produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques qui doivent être décrites à partir des échelles résolues.

Smagorinsky [120] propose ainsi de construire une viscosité turbulente en utilisant la longueur de coupure Δ du filtre et $\Delta|\hat{S}|$ comme grandeurs caractéristiques, ce qui se traduit par :

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\hat{S}| \quad (2.24)$$

où C_S est la constante de Smagorinsky. En supposant ensuite que la coupure du filtre se situe dans la zone inertielle, il est possible d'estimer la constante C_S si l'on écrit que les échelles non-résolues dissipent entièrement et instantanément l'énergie provenant des échelles résolues. Pour une turbulence isotrope [120], la constante prend une valeur de 0.18. En pratique, les calculs sont typiquement effectués avec une valeur de 0.10 pour des écoulements qui diffèrent notablement de la turbulence isotrope [62]. Erlebacher *et al.* [32] étendent par ailleurs le modèle de Smagorinsky au cas compressible.

Le modèle de Smagorinsky pose cependant problème car il lie la quantité d'énergie à dissiper aux gradients de vitesse des échelles résolues. La dissipation peut ainsi être importante dans les zones laminaires de l'écoulement avec de forts gradients de vitesse. Vreman *et al.* [156] observent par exemple lors de la simulation d'une couche de mélange une dissipation excessive qui modifie significativement la transition vers le régime turbulent. Avec le modèle Smagorinsky standard, le phénomène de retour d'énergie des échelles non-résolues vers les échelles résolues, ou *backscattering*, est en outre impossible.

Pour pallier à ces difficultés, des formulations dynamiques du modèle sous-maille sont développées. Celles-ci ne remettent pas en cause la formulation du tenseur de sous-maille de Smagorinsky [120], mais cherchent à adapter la constante de Smagorinsky en temps et en espace afin de capturer les transferts d'énergie relatifs à l'activité turbulente locale et instantanée. De tels modèles, proposés par Germano *et al.* [38] en incompressible et par Moin *et al.* [78] en compressible, s'appuient sur l'identité de Germano [38], et sur l'application d'un filtre test avec une longueur de coupure plus grande que Δ , qui permet, par similarité, d'extraire des petites échelles résolues des informations sur le tenseur de sous-maille. Cette approche permet de prendre en compte la présence de parois solides et les zones d'écoulements laminaires. La mise en œuvre pratique de ces modèles est cependant lourde, et induit un surcoût significatif du temps de calcul [16, 153]. Par ailleurs, des valeurs négatives de la viscosité turbulentes peuvent déstabiliser le calcul. La constante de Smagorinsky locale est alors généralement mise artificiellement à zéro quand elle devient négative (*clipping*), ou est moyennée dans une direction homogène de l'écoulement [41].

Malgré leur complexité croissante, les modèles de sous-maille s'appuyant sur une hypothèse de viscosité turbulente se résument dans la pratique à résoudre les équations de Navier-Stokes avec une viscosité effective ($\nu + \nu_t$). La dissipation de sous-maille agit ainsi sur une partie conséquente des échelles résolues et le nombre de Reynolds effectif de l'écoulement peut être modifié [16]. De plus, comme le suggère l'analyse des résultats expérimentaux de Liu *et al.* [66], la corrélation entre le tenseur de sous-maille et le tenseur des déformations est faible. L'hypothèse d'alignement de ces deux termes n'est probablement pas valide dans le cas général.

Modèles de similarité et modèles mixtes

Les modèles de similarité reposent sur l'hypothèse que la structure fonctionnelle du tenseur de sous-maille est invariante dans la zone inertielle. Bardina *et al.* [6] expriment ainsi en incompressible le tenseur de sous-maille en fonction des plus petites échelles résolues suivant,

$$\mathcal{T}_{ij} = \rho(\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j}) \quad (2.25)$$

Ce modèle ne requiert aucune modélisation physique. Il propose plutôt une procédure algorithmique pour donner une approximation \mathcal{T}_{ij} . Les mesures de corrélation de Liu *et al.* [66] montrent que cette méthode prédit correctement la dynamique du tenseur de sous-maille. Un tel modèle est cependant trop peu dissipatif. Il sous-estime en effet l'amplitude du flux d'énergie entre les échelles résolues et non-résolues, et surestime le *backscattering* [6, 156]. L'énergie peut ainsi s'accumuler aux hautes fréquences, et faire diverger la solution.

Les modèles mixtes combinent les approches basées sur la viscosité turbulente et sur la similarité des échelles; l'objectif étant de tirer profit du bon comportement du modèle de Bardina *et al.* [6] et du caractère dissipatif des modèles de type Smagorinsky pour stabiliser la solution. Plusieurs modèles mixtes ont été proposés en incompressible et en compressible, avec une estimation dynamique de la constante de Smagorinsky [107, 154, 164]. La partie dissipative du modèle associée à l'hypothèse de viscosité turbulente souffre cependant des limitations propres aux modèles de type Smagorinsky.

Modèles de similarité généralisés

Les modèles de similarité généralisés cherchent à construire à partir d'une grandeur filtrée \bar{f} , une approximation f^* du champ complet f avant filtrage. Le tenseur de sous-maille peut ainsi être calculé directement à partir de sa définition. Par exemple en incompressible, on pose ainsi,

$$T_{ij} = \rho(\bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}) \simeq \rho(\overline{u_i^* u_j^*} - \overline{u_i^* u_j^*}) \quad (2.26)$$

Le modèle de Bardina *et al.* [6] s'inscrit dans le cadre de cette approche en approchant le champ non-filtré u_i par le champ résolu \bar{u}_i , *i.e.* $u_i^* = \bar{u}_i$.

L'inversion de l'opération de filtrage, appelée *deconvolution* ou *defiltering*, est une méthode qui permet de reconstruire une partie du champ complet u_i à partir du champ résolu \bar{u}_i . Geurts [44] calcul l'opérateur inverse du filtre à l'aide d'approximations polynomiales. Stolz & Adams [123], et Mathew *et al.* [75] utilisent la méthode itérative de Van Cittert pour déconvoluer le champ calculé. À l'instar du modèle de Bardina *et al.* [6], les modèles de déconvolution sont des méthodes algorithmiques dont la définition s'appuie uniquement sur les expressions du filtre et du tenseur de sous-maille. La fermeture des équations filtrées est ainsi effectuée sans introduire de modélisation physique.

Mathew *et al.* [75] ont cependant montré que l'application d'une méthode de déconvolution est finalement équivalente à une SGE reposant sur un filtrage très sélectif. Le modèle de sous-maille peut alors être remplacé par une procédure de régularisation, basée sur des opérations de filtrage, qui reproduisent les mécanismes de dissipation associés aux échelles non-résolues [30, 75].

Les modèles de similarité généralisés permettent d'introduire dans le cadre théorique de la SGE les caractéristiques du filtrage utilisé. Les modèles de type Smagorinsky ou les modèles mixtes sont en effet le plus souvent développés sans faire référence aux propriétés du noyau G du filtre, bien qu'elles aient une influence non-négligeable sur la simulation [122].

SGE implicite

À l'instar des méthodes de déconvolution, la SGE implicite utilise les caractéristiques des méthodes numériques pour modéliser l'impact des échelles non-résolues sur la solution. La dissipation par les échelles non-résolues est prise en compte implicitement à travers la discrétisation du problème, et l'application des algorithmes de différentiation. La dérivée approchée d'une variable f , notée $\delta f / \delta x$, peut être interprétée comme la dérivée exacte d'une variable filtrée \bar{f} telle que :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x') f(x') dx' \right] \quad (2.27)$$

où G est le noyau du filtre dans l'espace physique. Dans l'espace spectral, il vient $\tilde{G}(k) = k^*/k$, si k^* est le nombre d'onde effectif du schéma aux différences finies [108].

La simulation des grandes échelles implicite a d'abord été mise en œuvre avec des schémas fortement dissipatifs de type *shock capturing* [21]. Garnier *et al.* [37] observent toutefois que ces algorithmes dissipent de manière excessive l'énergie sur une large gamme d'échelles résolues, et leurs simulations de turbulence isotrope montrent une décroissance du nombre

de Reynolds effectif. Meinke *et al.* [76] notent aussi une atténuation notable des fluctuations turbulentes lors de la simulation de l'écoulement dans un canal plan avec des schémas de type ENO (*Essentially Non-Oscillatory schemes* [118]).

SGE explicite avec des schémas d'ordre élevé

La stratégie utilisée pour la SGE réalisée lors de ce travail de thèse, qui est présentée dans le chapitre 5, combine l'utilisation de différences finies avec des propriétés de faibles dispersion et dissipation et à l'application explicite d'un filtre sélectif.

Des différences finies optimisées dans l'espace spectral minimisent les erreurs numériques sur une large gamme de nombre d'onde, et autorisent une utilisation optimale du maillage. L'application d'un filtre sélectif explicite réduit les problèmes d'aliasing et supprime les longueurs d'onde qui ne sont pas résolues par les schémas de dérivation spatiale. Le filtre agit par ailleurs comme une procédure de régularisation pour dissiper l'énergie aux hautes fréquences [14]. Cette approche explicite a permis d'effectuer avec succès la SGE de jets libres [7, 10, 15, 16, 17], d'écoulements au dessus d'une cavité [43], ou autour d'un profil d'aile [73]. Les méthodes de Stolz & Adams [123] par exemple, ou encore de Visbal *et al.* [151], qui se sont avérées efficaces dans de multiples configurations [75, 103], sont similaires à l'approche utilisée dans ce travail de thèse.

Finalement, on résout le système d'équations,

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \hat{e}_t) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \hat{e}_t \tilde{u}_j) + \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{p} \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{u}_i \hat{\tau}_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

qui n'inclut pas explicitement de termes de sous-maille.

2.2 Traitement des points intérieurs

2.2.1 Système d'équations

Les équations de Navier-Stokes filtrées (2.28) pour une géométrie Cartésienne sont écrites sous la forme,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{G}_e}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial x_3} = 0 \quad (2.29)$$

Les opérations de filtrage ne sont pas indiquées par la suite pour plus de lisibilité. Le vecteur inconnu contient les variables conservatives :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

où ρ est la masse volumique, u_1 , u_2 et u_3 sont les trois composantes de la vitesse suivant x_1 , x_2 et x_3 , et e_t est l'énergie spécifique interne totale définie pour un gaz parfait par,

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_k^2 \quad (2.31)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques et p la pression. Dans l'équation (2.29), les flux sont décomposés en flux Eulériens, \mathbf{E}_e , \mathbf{F}_e et \mathbf{G}_e , et en flux visqueux, \mathbf{E}_v , \mathbf{F}_v et \mathbf{G}_v . Ces flux sont donnés par les expressions :

$$\mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ p + \rho u_1^2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_1 u_3 \\ (\rho e_t + p) u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ p + \rho u_2^2 \\ \rho u_2 u_3 \\ (\rho e_t + p) u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_3 \\ p + \rho u_3^2 \\ (\rho e_t + p) u_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

et,

$$\mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ u_1 \tau_{11} + u_2 \tau_{12} + u_3 \tau_{13} - q_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ u_1 \tau_{21} + u_2 \tau_{22} + u_3 \tau_{23} - q_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ u_1 \tau_{31} + u_2 \tau_{32} + u_3 \tau_{33} - q_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est défini pour un fluide Newtonien à partir des composantes du tenseur des déformations suivant :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.35)$$

où la viscosité dynamique μ est donnée par la loi empirique de Sutherland [160] :

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + s}{T + s} \quad (2.36)$$

où s est une constante qui dépend du gaz modélisé. Les flux de chaleur sont donnés par la loi de Fourier,

$$q_i = - \frac{\mu c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

avec $p = r \rho T$ pour un gaz parfait, r étant la constante massique des gaz parfaits. La constante Pr est le nombre de Prandtl, et c_p est la chaleur massique spécifique à pression constante. Les valeurs numériques de ces paramètres pour l'air sont données dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1: Paramètres de l'air.

γ		1.4
Pr		0.7
r	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	287
c_p	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	1003.4
μ_{ref}	(kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	1.83×10^{-5}
T_{ref}	(K)	288
s	(K)	115.2

Tableau 2.2: Coefficients des différences finies centrées et du filtre sélectif centré sur onze points de Bogey & Bailly [14].

Différences finies ($a_{-r} = -a_r$)		Filtre sélectif ($d_{-r} = d_r$)	
r	a_r	r	d_r
0	0.0	0	0.2150448841109084
1	0.872756993962667	1	-0.1877728835894673
2	-0.286511173973333	2	0.1237559487873421
3	0.090320001280000	3	-0.0592275755757438
4	-0.020779405824000	4	0.0187216091572037
5	0.002484594688000	5	-0.0029995408347887

2.2.2 Algorithmes numériques

Discrétisation spatiale

Les flux Eulériens sont à l'origine de la génération du bruit aérodynamique par l'intermédiaire des termes non-linéaires de vitesse. Ils décrivent en outre la propagation des ondes acoustiques et leurs interactions avec le champ aérodynamique. La discrétisation des flux Eulériens doit donc être particulièrement précise pour pouvoir résoudre les ondes acoustiques d'amplitude très faible. On utilise ici pour les différences finies des schémas centrés sur onze points d'ordre quatre, dont la dispersion a été minimisée dans l'espace spectral [14] afin de résoudre avec précision des ondes avec au moins quatre points par longueur d'onde. Par exemple, la dérivée suivant x_1 au point de maillage (i, j, k) du flux Eulérien \mathbf{E}_e se calcul avec le schéma :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x_1} \right|_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{r=-5}^5 a_r \mathbf{E}_e|_{i+r,j,k} \quad (2.38)$$

où Δx_1 est la taille de la maille dans la direction x_1 . Les coefficients a_r du schéma sont donnés dans le tableau 2.2.

Les effets visqueux sont négligeables sur la propagation sonore aux fréquences considérées. En outre, à haut nombre de Reynolds, ils sont très faibles par rapport aux termes Eulériens et aux effets des termes de sous-maille [18]. Un schéma standard d'ordre deux est donc utilisé

pour la dérivation des flux visqueux,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} \right|_{i,j,k} = \frac{1}{2\Delta x_1} (\mathbf{E}_v|_{i+1,j,k} - \mathbf{E}_v|_{i-1,j,k}) \quad (2.39)$$

Filtrage sélectif

Dans nos simulations, il est nécessaire de filtrer la solution calculée. En effet, les schémas aux différences finies ne résolvent correctement qu'une partie des longueurs d'onde supportées par le maillage et génèrent des ondes parasites hautes fréquences sans rapport avec la solution physique [135]. Ces perturbations, de faible longueur d'onde, sont créées au niveau des conditions limites ou près des forts gradients. Le filtre est aussi utilisé pour régulariser la solution en dissipant l'énergie aux hautes fréquences.

On introduit donc un filtrage spatial, qui n'affecte pas les longueurs d'onde résolues correctement par les différences finies, mais qui dissipe essentiellement les oscillations maille-à-maille, c'est à dire les ondes avec deux points par longueur d'onde. D'un point de vue pratique, la solution numérique \mathbf{U} est filtrée dans chaque direction à la fin de chaque pas de temps. Par exemple, pour la direction x_1 , l'algorithme s'écrit,

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^d = \mathbf{U}_{i,j,k} - \sigma \mathbf{D}_1 \quad (2.40)$$

avec,

$$\mathbf{D}_1 = \sum_{r=-5}^5 d_r \mathbf{U}'_{i+r,j,k} \quad (2.41)$$

où \mathbf{U}^d est la solution filtrée, et $\mathbf{U}' = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle$ est le vecteur des perturbations, $\langle \mathbf{U} \rangle$ étant le champ moyen. Le coefficient σ , qui caractérise l'intensité du filtrage, est compris entre 0 et 1. Les coefficients d_j sont choisis de manière à obtenir un filtre d'ordre deux et à optimiser la fonction de transfert dans l'espace spectral. On utilise ici le filtre sur onze points proposé par Bogey & Bailly [14] dont les coefficients sont donnés dans le tableau 2.2. Les petits nombres d'onde, jusqu'à quatre points par longueur d'onde, sont ainsi peu affectés par le filtrage tandis que les oscillations maille-à-maille sont atténuées. On notera que les nombres d'ondes dissipés correspondent aux nombres d'onde qui ne sont pas résolus par les différences finies.

Intégration temporelle

Pour déterminer les valeurs des variables \mathbf{U}^{n+1} au pas de temps $n + 1$ à partir de leurs valeurs \mathbf{U}^n à l'instant n , on utilise le schéma de Runge-Kutta à stockage réduit d'ordre quatre à six étapes décrit dans le chapitre 4. Les équations sont ainsi avancées en temps à l'aide de

l'algorithme :

$$\begin{array}{l}
 \text{intégration temporelle} \\
 \text{des flux Eulériens} \\
 \\
 \text{intégration temporelle} \\
 \text{des flux visqueux} \\
 \\
 \text{filtrage sélectif}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}^n ; \boldsymbol{\omega}_0 = 0 \\
 \\
 \boldsymbol{\omega}_i = \alpha_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \Delta t \mathbf{K}_e^i \\
 \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \beta_i \boldsymbol{\omega}_i ; \quad i = 1, \dots, 6 \\
 \\
 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{u}_6 + \Delta t \mathbf{K}_v \\
 \\
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \sigma \mathbf{D}_1 \\
 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \sigma \mathbf{D}_2 \\
 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \sigma \mathbf{D}_3
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \right. \quad (2.42)$$

où Δt est le pas de temps. Les coefficients du schéma α_i et β_i sont donnés dans le tableau D.1 en annexe D. Le terme d'intégration des flux Eulériens \mathbf{K}_e^i est calculé à chaque étape du Runge-Kutta,

$$\mathbf{K}_e^i = -\frac{\partial \mathbf{E}_e^i}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_e^i}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{G}_e^i}{\partial x_3} \quad (2.43)$$

Les flux visqueux, qui sont à variation lente par rapport aux flux Eulériens, ne sont pris en compte qu'à la dernière étape, par le terme,

$$\mathbf{K}_v = \frac{\partial \mathbf{E}_v^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_v^n}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{G}_v^n}{\partial x_3} \quad (2.44)$$

Le filtrage sélectif est appliqué à chaque itération via les termes \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 et \mathbf{D}_3 , dans les directions x_1 , x_2 et x_3 .

Critère de stabilité

Pour une discrétisation spatiale donnée, le pas de temps est fixé suivant trois types de critères, liés aux termes convectifs, visqueux et de conduction-diffusion. Pour les termes convectifs, les algorithmes utilisés ici autorisent un nombre de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) maximal en trois dimensions de 2.18 [142],

$$\text{CFL} = \frac{c \Delta t}{\Delta_m} \max [M + \sqrt{3}] \leq 2.18 \quad (2.45)$$

où $\Delta_m = \min(\Delta x_i)$ est la plus petite taille de maille, et $M = u/c$ est le nombre de Mach, avec une vitesse du son donnée par $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$. Le critère de stabilité sur les flux visqueux est défini par,

$$\text{C}_\nu = \Delta t \max_{i,j} \left[\frac{\nu}{\Delta x_i \Delta x_j} \right] \leq 2 \quad (2.46)$$

en supposant que $\nu / \Delta x_i$ est une vitesse caractéristique de la diffusion visqueuse, $\nu = \mu / \rho$ étant la viscosité dynamique. Le critère de stabilité sur la diffusion thermique est introduit

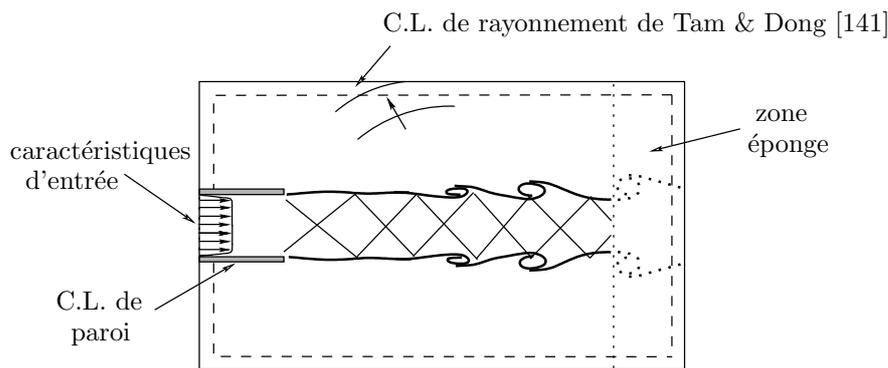


Figure 2.1: Représentation schématique du domaine de calcul pour une configuration de jet supersonique : conditions de paroi pour introduire la tuyère, caractéristiques d'entrée pour imposer les conditions initiales dans la tuyère, conditions de rayonnement pour permettre à l'acoustique de sortir du domaine, et une zone éponge pour atténuer les structures tourbillonnaires avant leur sortie. (C.L. : Conditions Limites).

en utilisant $a/\Delta x$ comme vitesse caractéristique de la diffusion thermique, avec la diffusivité thermique a donnée par ν/Pr . Ainsi, il vient,

$$C_T = \frac{C_\nu}{Pr} \leq 2 \quad (2.47)$$

Pour des calculs de bruit de jet à haut nombre de Reynolds (le nombre de Reynolds du jet étudié dans le chapitre 5 est par exemple égal à 10^5), le pas de temps est généralement fixé par le critère sur les flux Eulériens (2.45).

2.3 Conditions limites

Afin d'aborder la simulation aéroacoustique de systèmes réalistes, il faut pouvoir traiter numériquement une grande variété de conditions limites, dont la qualité influe notablement sur la précision des résultats. La figure 2.1 donne une vue schématique du domaine de calcul utilisé pour effectuer la simulation d'un jet supersonique dans le chapitre 5. Des conditions de rayonnement doivent avant tout être mises en place afin que les ondes acoustiques quittent le domaine de calcul sans réflexion parasite. Une zone éponge doit aussi permettre d'évacuer les structures tourbillonnaires sans qu'elles influent sur le développement amont du jet. L'introduction d'une tuyère pour le jet nécessite enfin l'utilisation de conditions de paroi solide, et des caractéristiques d'entrée sont choisies ici pour imposer l'écoulement dans la tuyère.

2.3.1 Conditions de rayonnement de Tam & Dong

En supposant les frontières du domaine de calcul loin des sources de bruit, il est possible d'écrire les fluctuations acoustiques au voisinage des frontières comme une solution d'une forme particulière des équations de Navier-Stokes. Tam & Webb [135] ont ainsi développé une expression asymptotique des équations d'Euler linéarisées 2-D, en champ lointain, et en présence d'un écoulement uniforme. Ces conditions de rayonnement ont ensuite été étendues par Tam & Dong [141] au cas des équations d'Euler linéarisées en présence d'un écoulement

quelconque. Les conditions limites 2-D ont finalement été adaptées aux géométries 3-D par Bogey & Bailly [11].

Conditions de rayonnement

Les conditions non-réfléchissantes s'écrivent en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Les relations entre les systèmes de coordonnées sphériques et Cartésiennes sont,

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \varphi = \arctan(x_2/x_1) \\ \theta = \arccos(x_3/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \end{cases} \quad (2.48)$$

Il vient alors pour les conditions de rayonnement [11] :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{bmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} \rho - \langle \rho \rangle \\ u_1 - \langle u_1 \rangle \\ u_2 - \langle u_2 \rangle \\ u_3 - \langle u_3 \rangle \\ p - \langle p \rangle \end{bmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

avec une vitesse de groupe V_g donnée par,

$$V_g = \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\langle c \rangle^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2} \quad (2.50)$$

dont le calcul est illustré sur la figure 2.2.a. Les vecteurs unitaires s'écrivent,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{cases} \quad (2.51)$$

avec le champ moyen de vitesse $\langle \mathbf{u} \rangle = (\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle, \langle u_3 \rangle)$. La vitesse moyenne du son est estimée avec $\langle c \rangle = \sqrt{\gamma \langle p \rangle / \langle \rho \rangle}$.

Les conditions limites avec sortie de fluide sont régies par,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (\rho - \langle \rho \rangle) = \frac{1}{\langle c \rangle^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (p - \langle p \rangle) \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (u_1 - \langle u_1 \rangle) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_1} (p - \langle p \rangle) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (u_2 - \langle u_2 \rangle) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_2} (p - \langle p \rangle) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (u_3 - \langle u_3 \rangle) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_3} (p - \langle p \rangle) \\ \frac{1}{V_g} \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) (p - \langle p \rangle) = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

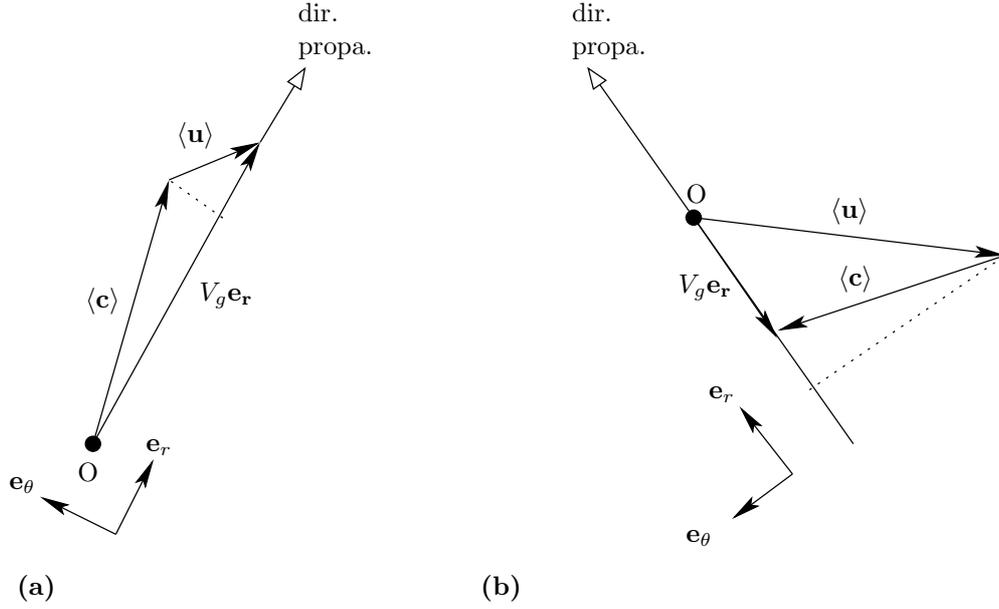


Figure 2.2: Calcul de la vitesse de groupe V_g des ondes acoustiques par projection de $\mathbf{u} + \mathbf{c}$ suivant la direction de propagation \mathbf{e}_r . (a) cas classique, et (b) la condition de rayonnement n'est pas adaptée : l'écoulement est supersonique et les ondes acoustiques ne peuvent pas se propager vers l'amont ; on a dans ce cas $\langle c \rangle^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2 < 0$.

Conditions de rayonnement pour un écoulement supersonique

Il reste néanmoins à prendre en compte le cas d'un écoulement supersonique. Le système (2.49) n'est plus valable pour certains points qui se situent en amont du point de référence. On peut avoir dans cette situation une vitesse de groupe de direction opposée à la direction de propagation, comme le montre la figure 2.2.b, qui illustre le calcul de la vitesse de groupe V_g dans ce cas. L'écoulement supersonique crée en effet une zone de silence qui ne peut être affectée par la source acoustique. Les variables aux points de maillage tels que $\langle c \rangle^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2 < 0$, restent ainsi inchangés et les conditions de rayonnement se réduisent à,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{bmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

2.3.2 Méthode des caractéristiques d'entrée d'écoulement

La méthode repose sur l'utilisation des caractéristiques 1-D de Thompson [148, 149]. Poinsot & Lele [90] ont étendu cette approche aux cas visqueux en supposant que l'écoulement est localement non-visqueux et mono-dimensionnel. Cette hypothèse permet d'introduire les invariants de Riemann \mathcal{L}_i des équations d'Euler normalement à une surface de contrôle. Pour une surface de contrôle perpendiculaire à la direction x_1 , les dérivées temporelles des variables

primitives sont localement données par,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[\mathcal{L}_2 + \frac{\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1}{2} \right] = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1}{2\rho c} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1}{2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 = (u_1 - c) \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ \mathcal{L}_2 = u_1 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \\ \mathcal{L}_3 = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \mathcal{L}_4 = u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \mathcal{L}_5 = (u_1 + c) \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Les cinq invariants \mathcal{L}_i correspondent respectivement aux ondes acoustiques rétrogrades, entropiques, tourbillonnaires suivant x_2 , tourbillonnaires suivant x_3 et acoustiques progressives. Aux limites du domaine, on impose les invariants qui rentrent dans le domaine, et les invariants sortants sont déterminés à partir des points intérieurs à l'aide de schémas décentrés. Pour une condition de non-réflexion on pose $\mathcal{L}_5 = 0$, pour qu'il n'y ait pas d'ondes qui entrent dans le domaine. Pour un écoulement supersonique, on a nécessairement $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = 0$, puisqu'aucune perturbation ne peut remonter vers l'amont. Dans le cas d'un écoulement subsonique, les invariants \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 et \mathcal{L}_4 sont calculés à partir des points intérieurs.

Les caractéristiques sont particulièrement bien adaptées aux écoulements parallèles pour lesquels les perturbations arrivent normalement à la surface de contrôle. Elles sont utilisées ici pour imposer les profils d'entrée de pression, de densité et de vitesse dans la tuyère. Pour éviter une dérive du champ moyen, on ajoute des termes de relaxation. Par exemple pour la pression, le terme correctif est introduit tel que,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1}{2} = \frac{\alpha}{\Delta t} (p - p_e) \quad (2.55)$$

où $\alpha \sim 0.1$, et où p_e est la pression que l'on souhaite imposer dans la tuyère [90].

2.3.3 Élaboration de la zone éponge

Au passage des structures tourbillonnaires dans les conditions de sortie, des ondes parasites peuvent être produites et masquer le champ acoustique physique. La mise en place d'une zone éponge réduit significativement l'amplitude de ces perturbations [11]. D'un point de vue pratique, on combine un étirement du maillage de l'ordre de 5% dans la direction de l'écoulement et l'ajout d'un terme dissipatif de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \dots - \frac{\sigma}{\Delta t} \mathbf{D}_\Delta, \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma_m \left(\frac{x_1 - x_e}{x_m - x_e} \right)^\beta \quad (2.56)$$

avec,

$$\mathbf{D}_\Delta = d_0 \mathbf{U}'_{i,j,k} + \frac{d_1}{3} [\mathbf{U}'_{i+1,j,k} + \mathbf{U}'_{i-1,j,k} + \mathbf{U}'_{i,j+1,k} + \mathbf{U}'_{i,j-1,k} + \mathbf{U}'_{i,j,k+1} + \mathbf{U}'_{i,j,k-1}] \quad (2.57)$$

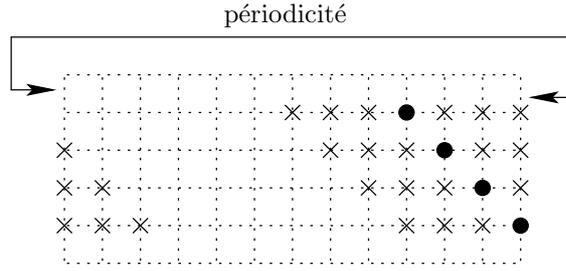


Figure 2.3: Illustration de l'implémentation d'une condition de périodicité avec des schémas aux différences finies sur sept points. Pour calculer la dérivée au point central (●) on utilise les trois premiers points voisins (×).

où $\mathbf{U}' = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle$, et $(d_0, d_1) = (1/2, -1/4)$. Les positions x_e et x_m correspondent aux abscisses de début et de fin de la zone éponge. La constante $\sigma_m = 0.05$ est l'intensité maximale du filtrage, et β est pris égal à 1,5.

2.3.4 Correction des champs moyens

Lors d'un calcul, il n'y a pas d'information provenant de l'extérieur du domaine de calcul. On peut ainsi observer une dérive du champ moyen, notamment de la pression statique sur les frontières du domaine. L'ajout d'un terme de relaxation permet de maintenir le champ moyen sur le pourtour du domaine de calcul. On ajoute à chaque itération le terme suivant :

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} = \dots + \frac{\alpha}{\Delta t} \frac{p - p_\infty}{\gamma - 1} \quad (2.58)$$

avec $\alpha \sim 10^{-3}$, et $p_\infty = 10^5$ Pa.

2.3.5 Conditions de périodicité

Les conditions de périodicité permettent de simuler des géométries planes en rendant périodique le domaine de calcul dans une direction. La figure 2.3 donne une représentation de l'implémentation des conditions périodiques. La méthode consiste à relier les deux extrémités du domaine de calcul. Des schémas centrés sont implémentés aux bords du domaine, en utilisant des points de l'autre extrémité du maillage pour remplacer les points manquants.

2.3.6 Conditions de paroi solide

Pour un fluide visqueux on retient la condition de non-glissement du fluide sur la surface solide. Les composantes de la vitesse sont nulles à la paroi, *i.e.*,

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad (2.59)$$

La température est en outre continue à l'interface fluide-solide,

$$T_{\text{fluide}} = T_{\text{solide}} \quad (2.60)$$

Il faut ensuite ajouter des hypothèses sur le comportement thermodynamique de la surface solide. Par exemple, pour une paroi isotherme, la température T_{solide} est constante, et pour

une paroi adiabatique, le flux normal de quantité de chaleur à la paroi est nul, $q_n = 0$, si n est l'indice de la direction normale à la surface.

Numériquement, l'introduction des conditions limites de paroi implique cependant que le problème aux différences finies devient hyperstatique. En effet, tous les points du maillage sont solutions des équations de Navier-Stokes discrétisées, mais les points de paroi doivent aussi satisfaire à la condition d'adhérence. Il y a donc plus d'équations que de degrés de liberté. Il y a alors deux stratégies possibles pour contourner le caractère hyperstatique du système discrétisé.

La méthode de Tam & Dong [137] repose sur l'introduction de points fantômes qui sont autant de degrés de liberté supplémentaires capables d'imposer la condition d'adhérence. Une méthode alternative consiste à remplacer aux points de paroi les équations de Navier-Stokes complètes par un système qui inclue la condition d'adhérence. La méthode des caractéristiques s'inscrit dans le cadre de cette approche. Il est également possible de récrire les équations de Navier-Stokes en y imposant les conditions limites, et en calculant les gradients à partir des points intérieurs avec des schémas décentrés [42, 104]. Cette méthode est retenue ici. L'objectif est de supprimer des équations afin de ramener le nombre d'équations du système discrétisé au nombre de degrés de liberté. Les flux sont réécrits à la paroi en y introduisant les conditions de non-glissement $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, et de paroi adiabatique $q_n = 0$. Les équations ainsi obtenues permettent de calculer la masse volumique et l'énergie totale sur la surface, tout en imposant implicitement les conditions limites. Les équations de Navier-Stokes modifiées pour des surfaces solides dans les trois directions sont données dans l'annexe B, par les relations (B.10), (B.11) et (B.12). Par exemple, pour une paroi dans le plan (x_1, x_2) la masse volumique et l'énergie totale sont calculées à l'aide du système :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Gloerfelt *et al.* [42, 43] ont testé la méthode dans de nombreuses configurations, et ont ainsi simulé avec succès le bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité.

Le calcul pratique de ce type de conditions de paroi nécessite cependant l'utilisation de schémas aux différences finies décentrés qui sont particulièrement instables et peu précis dans leur forme standard. Pour garder une précision homogène sur l'ensemble du domaine de calcul et éviter les problèmes de stabilité, des différences finies et des filtres sélectifs décentrés peu dispersifs et peu dissipatifs, optimisés dans l'espace spectral, sont utilisés ici. La mise au point de ces schémas numériques est décrite dans le chapitre 4.

2.4 Résolution numérique des chocs

Les jets supersoniques sur- et sous-détendus contiennent des chocs de compression présentant de très forts gradients. L'épaisseur typique d'un choc est de l'ordre du libre parcours moyen [25]. Numériquement, il est donc très difficile de résoudre correctement un choc, et son épaisseur est en pratique généralement fixée par le maillage. De plus, la discrétisation

spatiale agit comme un filtre passe-bas pour les longueurs d'onde, et est donc à l'origine du phénomène de Gibbs [4], qui se traduit par la formation d'oscillations au voisinage du choc. Les méthodes numériques de capture de chocs, héritées de la mécanique des fluides compressibles numériques, sont d'abord présentées. La résolution des chocs avec des méthodes d'ordre élevé est ensuite discutée.

2.4.1 Méthodes numériques spécifiques

Un certain nombre de méthodes dédiées à la résolution des chocs ont été développées dans le cadre de la simulation numérique des écoulements supersoniques. Elles s'appuient généralement sur l'introduction d'une dissipation artificielle, ou de conditions de passage au travers des chocs. Ces algorithmes se classent en deux catégories majeures : les *shock fitting schemes*, et les *shock capturing schemes*.

Shock fitting

La méthode du *shock fitting* repose sur un maillage adaptatif, construit de manière à faire coïncider la position du choc avec un noeud du maillage. Les variables avant et après le choc sont ensuite calculées en appliquant les relations de Rankine-Hugoniot [80]. Cette approche est cependant particulièrement complexe à mettre en place pour des géométries tridimensionnelles avec des chocs multiples, pour lesquelles la topologie du maillage peut devenir très complexe [81]. Les méthodes de type *shock-fitting* sont en outre difficilement applicables dans le cadre de la simulation des grandes échelles : un maillage adaptatif nécessiterait d'interpoler les variables de l'écoulement et de modifier à chaque itération le filtrage de manière locale. Par ailleurs, dans le cadre du bruit de jet supersonique, Panda [88] mesure pour un jet rond sous-détendu des déplacements de chocs de l'ordre 10 à 50% du diamètre du jet. De telles amplitudes peuvent être résolues par un maillage fixe de taille raisonnable, et il ne semble donc pas nécessaire de prendre en compte les déplacements plus petits que la taille des mailles par une méthode de type *shock fitting*.

Shock capturing

Les approches de type *shock capturing* s'utilisent sur un maillage fixe. La position du choc est fixée par les noeuds de la grille, et un traitement particulier est appliqué au voisinage des forts gradients. L'utilisation des schémas aux différences finies décentrées (*upwind schemes* et le schéma de Lax-Wendroff) a ainsi été proposée pour calculer les flux de transport [162]. La dissipation naturellement introduite par l'asymétrie de ces schémas permet de réduire les oscillations près des chocs. Ces méthodes de discrétisation ne peuvent cependant pas être appliquées à l'aéroacoustiques numériques car elles sont de faible précision et dispersives. Les méthodes d'intégration temporelle TVD (*Total Variation Diminishing*) ont aussi été mises en œuvre. Elles appliquent des limiteurs pour éliminer le phénomène de Gibbs [119]. La précision du schéma chute à l'ordre un près des chocs de manière à interpoler linéairement la solution, et éviter ainsi l'apparition d'oscillations. Les schémas ENO et WENO (*Essentially Non-Oscillatory* et *Weighted Essentially Non-Oscillatory*) ont été développés par la suite afin de maintenir l'ordre de précision lors de la résolution des forts gradients [118]. Carpenter &

Casper [26] ont cependant montré que dans la pratique la précision chutait aussi à l'ordre un au niveau des chocs. Les méthodes utilisant des limiteurs de flux (TVD, ENO...), historiquement conçues pour la simulation des écoulements supersoniques sont par conséquent difficilement applicables aux simulations aéroacoustiques, qui nécessitent des méthodes numériques précises et peu dissipatives.

Plus récemment, Tam *et al.* [136] ont développé une méthode basée sur les schémas d'ordre élevé DRP [135] (*Dispersion-Relation-Preserving*) construits pour l'aéroacoustique numérique, dont laquelle l'intensité du filtrage sélectif s'adapte au gradient local de vitesse. Un filtrage fort permet alors d'atténuer dans l'espace spectral la transition entre les échelles résolues par le maillage et les échelles non-résolues, et de limiter ainsi le phénomène de Gibbs. Cette méthode revient à dissiper les gradients jusqu'à ce qu'ils soient supportés par le maillage.

2.4.2 Résolution des chocs avec des méthodes numériques d'ordre élevé

Le développement de méthodes numériques optimisées et d'ordre élevé [14, 135] a fourni des algorithmes possédant une résolution quasi-spectrale qui autorise une séparation claire entre échelles résolues et non-résolues. Le problème de la résolution numérique des chocs peut ainsi être abordé avec une approche similaire à celle employée pour la simulation des grandes échelles. L'objectif est alors de ne résoudre que les longueurs d'onde constitutives du choc qui sont supportées par le maillage. Le phénomène de Gibbs n'est dans ce cas qu'un artefact lié à la représentation dans l'espace physique de la solution filtrée. On se propose d'illustrer cette approche à travers la résolution d'une série de cas test : la propagation linéaire d'un créneau avec l'équation d'advection, la propagation non-linéaire d'une impulsion de pression de forme Gaussienne à l'aide des équations d'Euler, et finalement la résolution d'un choc de compression dans une tuyère monodimensionnelle.

Propagation d'un créneau

L'équation d'advection monodimensionnelle,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad c = 1 \quad (2.62)$$

est résolue avec un pas de temps défini par $\Delta t = \text{CFL} \times \Delta x / c$, où $\Delta x = 1$ est la taille des mailles. L'intégration temporelle est effectuée avec le schéma de Runge-Kutta à stockage réduit d'ordre quatre à six étapes décrit dans le chapitre 4. Deux configurations différentes sont testées ici pour la dérivation spatiale et le filtrage sélectif. La première utilise des schémas standards d'ordre dix sur onze points pour les différences finies et le filtrage sélectif. Dans la deuxième configuration, les schémas optimisés sur onze points de Bogey & Bailly [14] sont implémentés. L'intensité du filtrage σ est fixé à 0.2, et le nombre de CFL est pris égal à 0.5. La solution est calculée à partir de $t = 0$ jusqu'à $t = 200$.

La perturbation initiale, à $t = 0$, est nulle sur l'ensemble du domaine, excepté sur l'intervalle $-5 \leq x \leq 5$, où elle est égale à 1 :

$$u(x, t = 0) = H(x + 5) - H(x - 5)$$

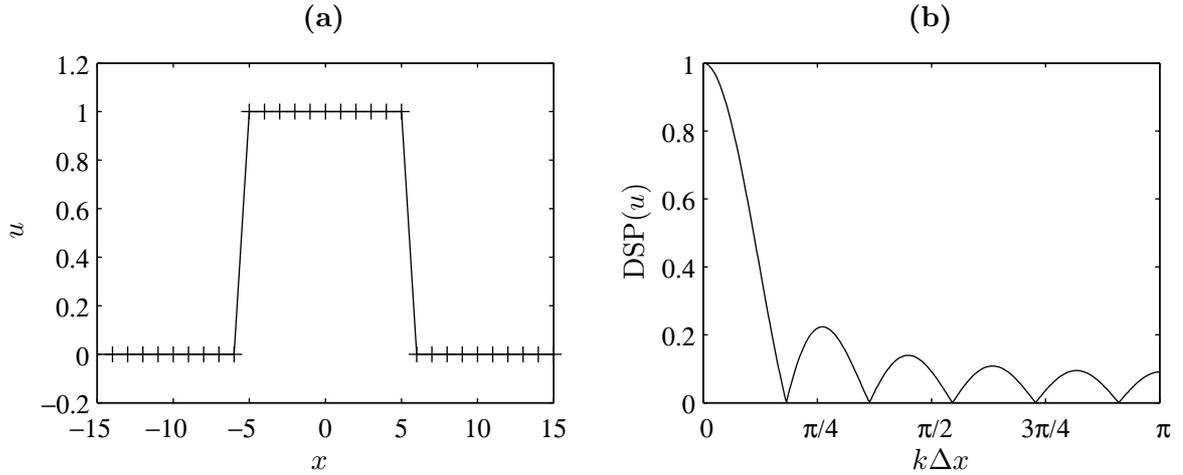


Figure 2.4: Cas test de propagation linéaire. (a) Perturbations initiales, et (b) densité spectrale de puissance normalisée de la perturbation initiale, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$.

où H est la fonction de Heaviside. Cette perturbation est tracée sur la figure 2.4.a.

La densité spectrale de puissance correspondant à la perturbation initiale est donnée sur la figure 2.4.b, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$. On observe que le contenu spectral s'étend sur l'ensemble des nombres d'onde supportés par le maillage ($0 \leq k\Delta x \leq \pi$). Les algorithmes de Runge-Kutta, les différences finies et les filtres sélectifs ne sont cependant précis qu'en dessous d'un nombre d'onde de coupure $k_c\Delta x < \pi$, dont la valeur dépend des schémas implémentés.

Afin de déterminer si la solution calculée est en accord avec la solution exacte, un filtre spectral passe-bas pour les nombres d'onde est construit à l'aide d'une transformée de Fourier discrète. La coupure du filtre est placée à $k\Delta x = \pi/2$, *i.e.* à quatre points par longueur d'onde, qui correspond à la limite de précision des schémas sur onze points de Bogey & Bailly [14]. Ce filtre spectral est appliqué à la solution calculée et à la solution exacte. La précision du calcul est alors jugé en comparant les solutions après filtrage.

La solution calculée, obtenue avec les schémas standards, puis filtrée avec le filtre spectral, est tracée sur la figure 2.5.a. La solution exacte filtrée est aussi indiquée pour comparaison. La solution calculée reproduit grossièrement la solution exacte, avec des écarts pouvant aller jusqu'à 10% de l'amplitude du signal initial. À cause de la dispersion du schéma, on observe en outre une dissymétrie de la forme d'onde. Les ondes au voisinage de $k\Delta x = \pi/2$ sont en effet propagées plus lentement que les perturbations ayant une longueur d'onde plus grande [139].

La solution obtenue avec les schémas optimisés, et filtrée à $k\Delta x = \pi/2$ avec une transformée de Fourier, est maintenant donnée sur la figure 2.5.b. Un bon accord avec la solution exacte filtrée est observé. En effet, les deux signaux coïncident, et il n'y a pas de dispersion visible sur le signal. La résolution numérique du problème de propagation avec les algorithmes optimisés fournit donc une approximation correcte de la solution exacte filtrée à $k\Delta x = \pi/2$.

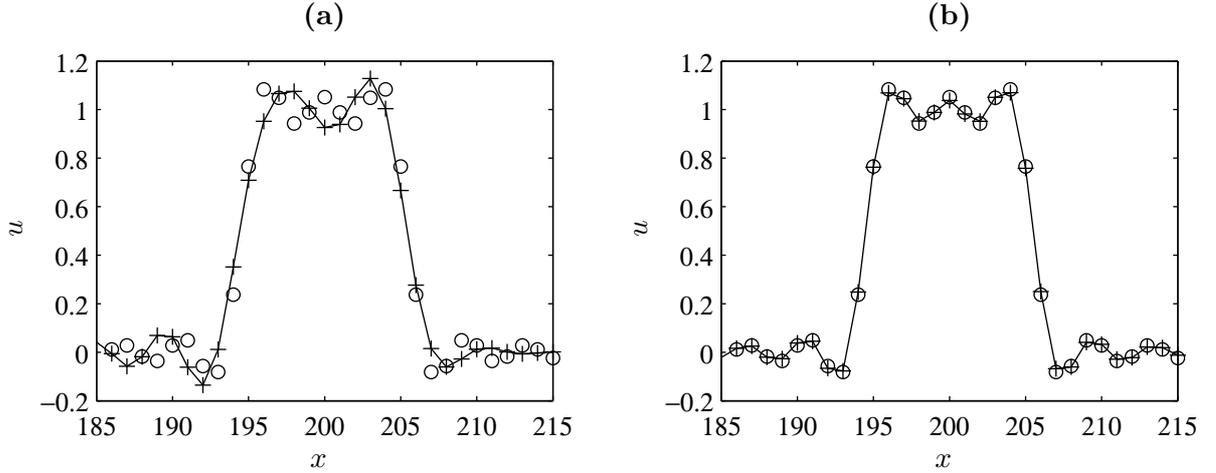


Figure 2.5: Solutions du cas test de propagation linéaire à $t = 200$. —+—, solution calculée filtrée au-delà de $k\Delta x = \pi/2$; \circ , solution exacte filtrée au-delà de $k\Delta x = \pi/2$. (a) Différences finies et filtre sélectif standards d'ordre dix sur onze points; (b) différences finies et filtre sélectif optimisés sur onze points de Bogey & Bailly [14].

Propagation non-linéaire

On considère maintenant un cas test de propagation non-linéaire. Les équations d'Euler 1-D adimensionalisées sont résolues :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

où ρ est la masse volumique, u la vitesse, p la pression et l'énergie totale est donnée par $\rho e_t = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$ avec $\gamma = 1.4$. Le système est discrétisé spatialement avec une taille de maille Δx . Plusieurs valeurs de Δx seront testées pour étudier l'influence de la grille sur la solution calculée. Le domaine est pris très grand, de $x = -800$ à $x = 800$, pour éviter d'avoir à introduire des conditions aux limites de champ libre. Les dérivées spatiales et le filtrage sélectif sont effectués avec les schémas optimisés sur onze points de Bogey & Bailly [14]. Le schéma de Runge-Kutta à stockage réduit d'ordre quatre à six étapes développé dans le chapitre 4 est utilisé pour l'intégration en temps. Le nombre de CFL $= c\Delta t/\Delta x$ est pris égal à 0.5, et l'intensité du filtrage est fixée à $\sigma = 0.8$.

Une impulsion de pression de forme Gaussienne est imposée comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ u = 0 \\ p = \frac{1}{\gamma} + \Delta p e^{-\alpha x^2} \end{cases} \quad (2.64)$$

où $\alpha = 0.005$ et $\Delta p = 0.075$. Le niveau élevé de cette perturbation assure la présence d'effets non-linéaires significatifs lors de la propagation. La solution est calculée jusqu'à $t = 200$, pour différentes valeurs de la taille de maille Δx . La solution calculée pour $\Delta x_{\text{ref}} = 1/40$ fait office de solution de référence. La perturbation imposée initialement est donnée sur la figure 2.6.a. La solution de référence à $t = 200$, tracée sur la figure 2.6.b, montre que le pulse Gaussien

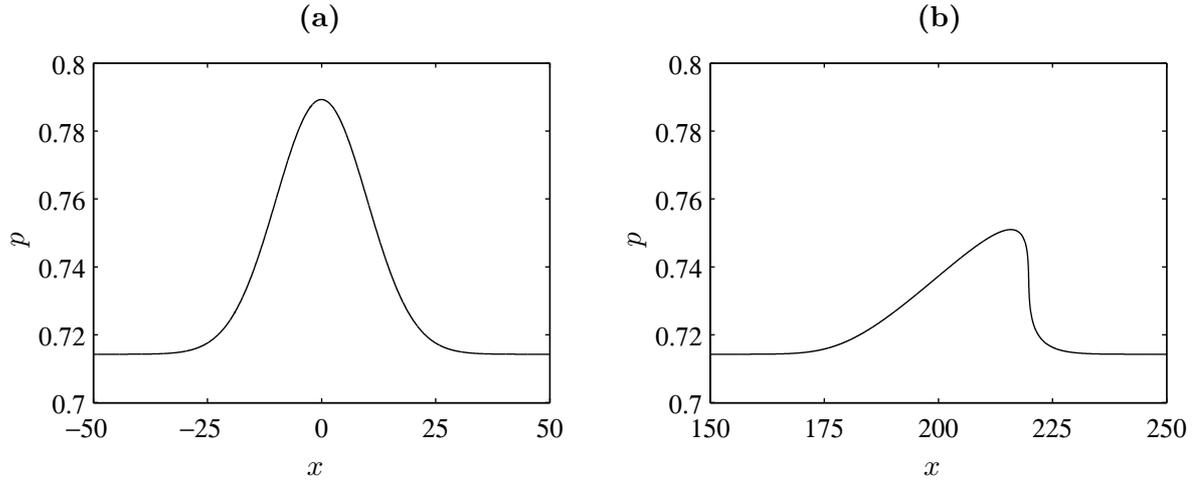


Figure 2.6: Cas test de propagation non-linéaire. (a) Perturbation initiale, et (b) solution de référence à $t = 200$, sur un maillage avec $\Delta x_{\text{ref}} = 1/40$.

a clairement été déformé par les effets non-linéaires. Il apparaît au voisinage de $x = 220$ un gradient très fort, qui reste malgré tout bien discrétisé par le maillage fin.

Le problème est maintenant résolu sur des grilles utilisant des mailles plus grandes que $\Delta x_{\text{ref}} = 1/40$. Quatre configurations sont testées : $\Delta x = 1/2$, $\Delta x = 1$, $\Delta x = 2$ et $\Delta x = 4$. Ces maillages ne peuvent pas supporter le gradient de pression visible sur la solution de référence de la figure 2.6.b. On va cependant chercher à montrer que la dynamique des échelles résolues par ces maillages est correctement reproduite, bien que seule une partie réduite du spectre de la solution exacte soit calculée.

La comparaison entre les solutions calculées et la solution de référence est effectuée en utilisant un filtre spectral et un sous-échantillonnage. La figure 2.7 illustre de manière schématique la procédure utilisée pour évaluer la précision du calcul. Dans un premier temps, la solution calculée est filtrée au-delà de $k\Delta x = \pi/2$, afin de ne garder que les échelles correctement résolues par les méthodes numériques. De la même manière, pour que le support spectral de la solution calculée et de la solution de référence soient identiques, la solution de référence est filtrée à $k\Delta x = \pi/2$, *i.e.* à $k\Delta x_{\text{ref}} = \pi/2(\Delta x_{\text{ref}}/\Delta x)$. La solution de référence filtrée est ensuite sous-échantillonnée pour pouvoir la comparer dans l'espace physique à la solution calculée.

Les solutions calculées filtrées, et les solutions de références filtrées et sous-échantillonnées, sont maintenant tracées sur les figure 2.8.a, 2.8.b, 2.8.c et 2.8.d, pour les tailles de maille $\Delta x = 1/2$, $\Delta x = 1$, $\Delta x = 2$ et $\Delta x = 4$, respectivement. On observe que dans les quatre configurations de maillage, la solution calculée filtrée et la solution de référence filtrée sont en bon accord. À noter que comme le gradient de pression au voisinage de $x = 220$ n'est pas résolu par ces maillages, il apparaît des oscillations près des variations importantes de pression. Pour $\Delta x = 1/2$, les oscillations ont une amplitude très faible et restent localisées près de $x = 220$. Elles sont plus visibles pour $\Delta x = 1$, $\Delta x = 2$ et $\Delta x = 4$. Ces variations de pression sont néanmoins aussi visibles sur le signal de référence filtrée, et peuvent donc être considérées comme faisant partie intégrante de la solution. Ainsi, bien que l'on ne résolve qu'une partie réduite des nombres d'onde impliqués dans ce problème de propagation, la partie du spectre résolue par le maillage est malgré tout correctement reproduite, et ceci

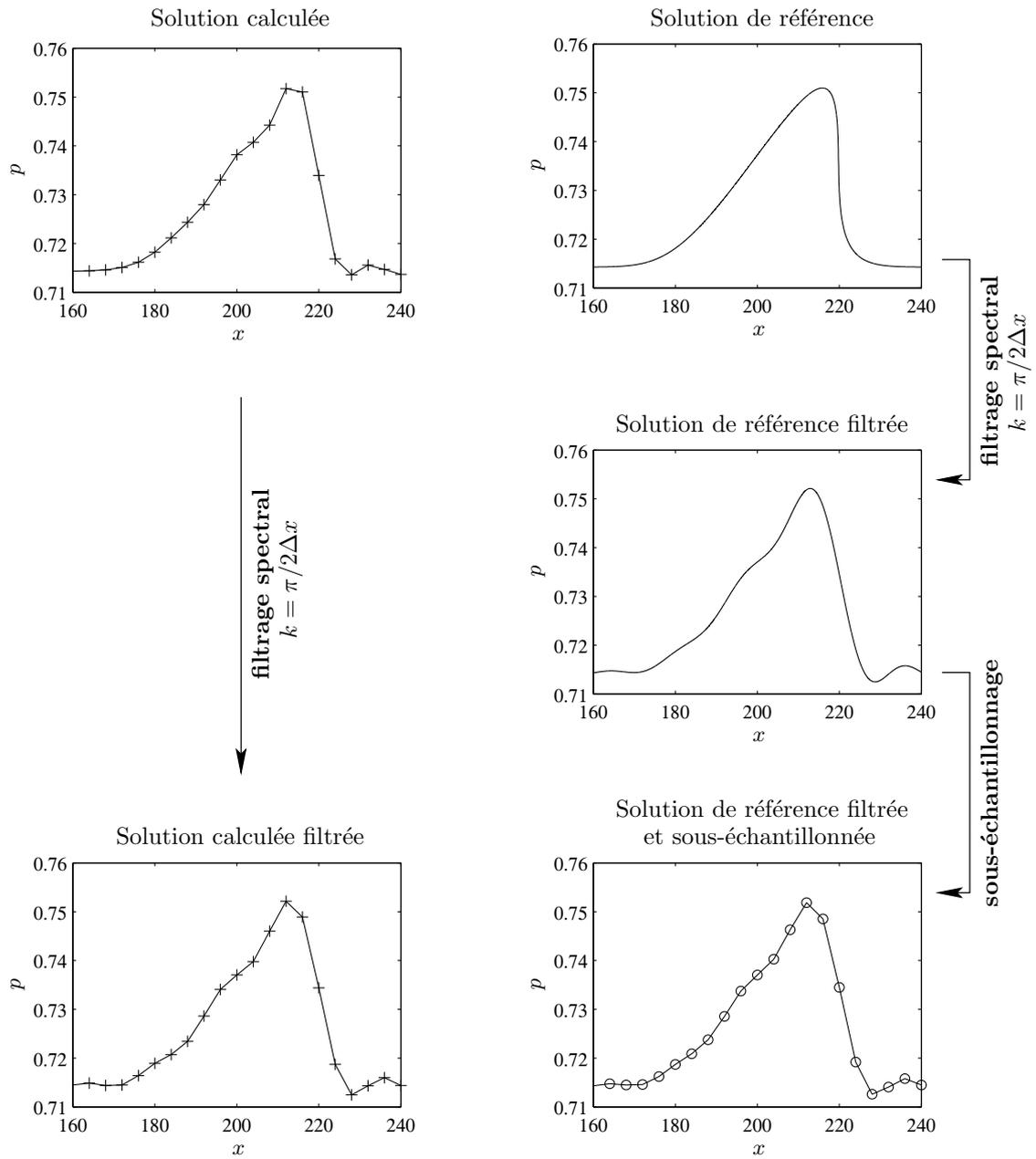


Figure 2.7: Schéma des procédures de filtrage et de sous-échantillonnage mises en place pour comparer la solution calculée à la solution de référence.

indépendamment du nombre d'onde de coupure associé à la grille.

Choc droit dans une tuyère

Le problème de la résolution d'un choc droit dans une tuyère convergente-divergente est enfin résolu. Le cas test s'inspire du problème 2 de la catégorie 1 du troisième workshop d'aéroacoustique numérique [167]. On considère une tuyère dont la section à une surface variable A , qui varie lentement avec la position longitudinale. L'écoulement est modélisé par

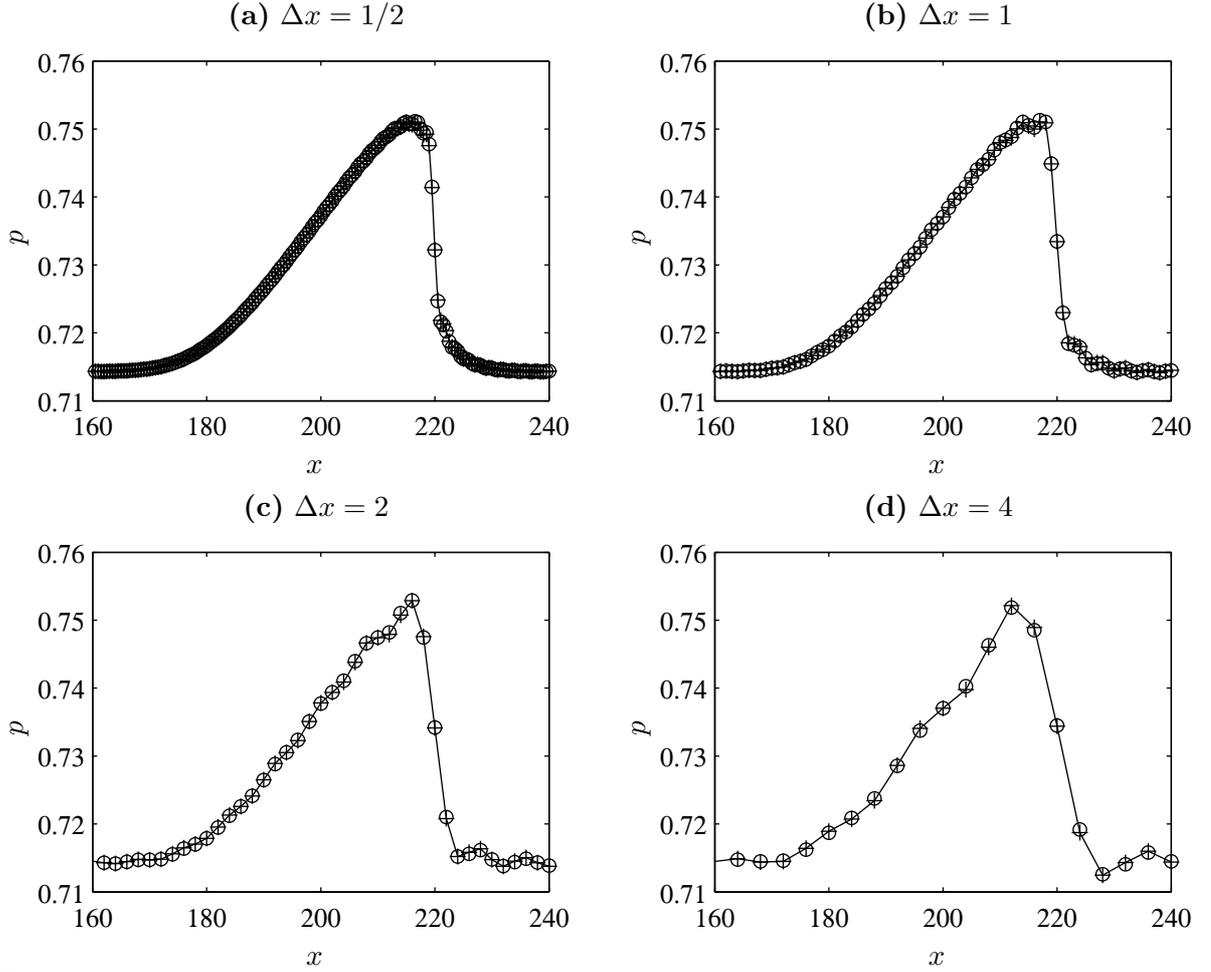


Figure 2.8: Cas test de propagation non-linéaire. Solution calculée filtrée et solution de référence filtrée et sous-échantillonnée pour différentes taille de maille. —+, solution calculée filtrée; o, solution exacte filtrée et sous-échantillonnée. (a), $\Delta x = 1/2$; (b), $\Delta x = 1$; (c), $\Delta x = 2$; (d), $\Delta x = 4$.

les équations d'Euler quasi 1-D. Elles s'écrivent sous forme adimensionnée suivant,

$$\frac{\partial \mathbf{AU}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{AE}}{\partial x} = \mathbf{H}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

où ρ est la masse volumique, u la vitesse, p la pression et l'énergie totale est donnée par $\rho e_t = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$ avec $\gamma = 1.4$. La surface de la section de la tuyère définit un convergent-divergent, dont le col se situe en $x = 0$:

$$A(x) = \begin{cases} 0.536572 - 0.198086 \exp \left[-\ln 2 \frac{x^2}{0.6^2} \right] & \text{si } x > 0 \\ 1 - 0.661514 \exp \left[-\ln 2 \frac{x^2}{0.6^2} \right] & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Le domaine de calcul s'étend de $x = -10$ à $x = 10$, et est discrétisé par une grille uniforme de maille Δx . Le nombre de CFL = $c\Delta t/\Delta x$, avec $c = 1$ est pris égal à 0.05, et le paramètre σ , correspondant à l'intensité du filtrage est fixé à 0.8. Les dérivées spatiales et le filtrage

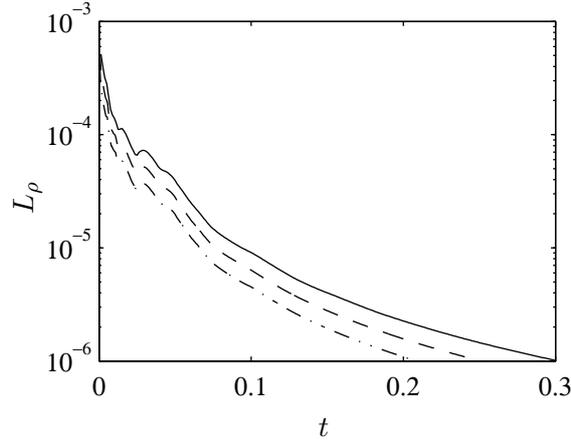


Figure 2.9: Choc droit dans une tuyère. Convergence du champ moyen de masse volumique pour les différentes configurations de maillage. Le critère L_ρ est tracé en fonction du temps t pour les tailles de maille : —, $\Delta x = 1/40$; - - -, $\Delta x = 1/80$; - . - ., $\Delta x = 1/160$.

sélectif sont effectués avec les schémas optimisés sur onze points de Bogey & Bailly [14]. Le schéma de Runge-Kutta à stockage réduit d'ordre quatre à six étapes fourni dans le chapitre 4 est utilisé pour l'intégration en temps. Des conditions aux limites non-réfléchissantes basées sur la méthode des caractéristiques de Thompson [148, 149] sont implémentées aux bords du domaine. Pour qu'il se forme un choc droit dans le divergent de la tuyère, le nombre de Mach à l'entrée du domaine est fixé à $M_{\text{inlet}} = 0.2006533$, tandis que la pression de sortie est imposée à la valeur $p_{\text{outlet}} = 0.6071752$.

Le problème est résolu avec des tailles de maille $\Delta x = 1/40$, $\Delta x = 1/80$, $\Delta x = 1/160$. Le calcul est poursuivi jusqu'à $t = 0.3$, soit jusqu'à la convergence du champ moyen, que l'on considère atteinte si le critère,

$$L_\rho = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right|^2 < 10^{-6} \quad (2.67)$$

sur les variations temporelles du champ moyen de masse volumique $\bar{\rho}$, est satisfait. Le nombre de points de la grille est donné par N .

La convergence du champ moyen est illustrée par la figure 2.9, où la quantité L_ρ obtenue pour les différentes configurations de maillage est tracée en fonction du temps. Pour les trois grilles, le critère de convergence (2.67) est donc bien satisfait à $t = 0.3$.

La vitesse moyenne calculée avec $\Delta x = 1/40$ est maintenant tracée sur la figure 2.10.a. Un choc de compression, qui s'accompagne par ailleurs du phénomène de Gibbs, est visible dans la partie divergente de la tuyère au voisinage de $x = 0.4$. Afin de comparer les solutions calculées sur les trois maillages, une procédure de filtrage et de sous-échantillonnage similaire à celle décrite sur la figure 2.7 est mise en place. Un filtre spectral, construit avec une transformée de Fourier, est appliqué dans un premier temps aux champs moyens calculés. Le nombre de coupure est choisi égal à $k = \pi/2\Delta_L$, où $\Delta_L = 1/40$ est la taille de maille de la grille qui contient le moins de points. Les champs moyens ainsi obtenus pour chaque maillage ont alors le même support spectral. Ils sont ensuite sous-échantillonnés de manière à pouvoir les comparer plus facilement dans l'espace physique : on ne garde qu'un point sur deux de la solution calculée pour $\Delta x = 1/80$, et qu'un point sur quatre de la solution avec $\Delta x = 1/160$.

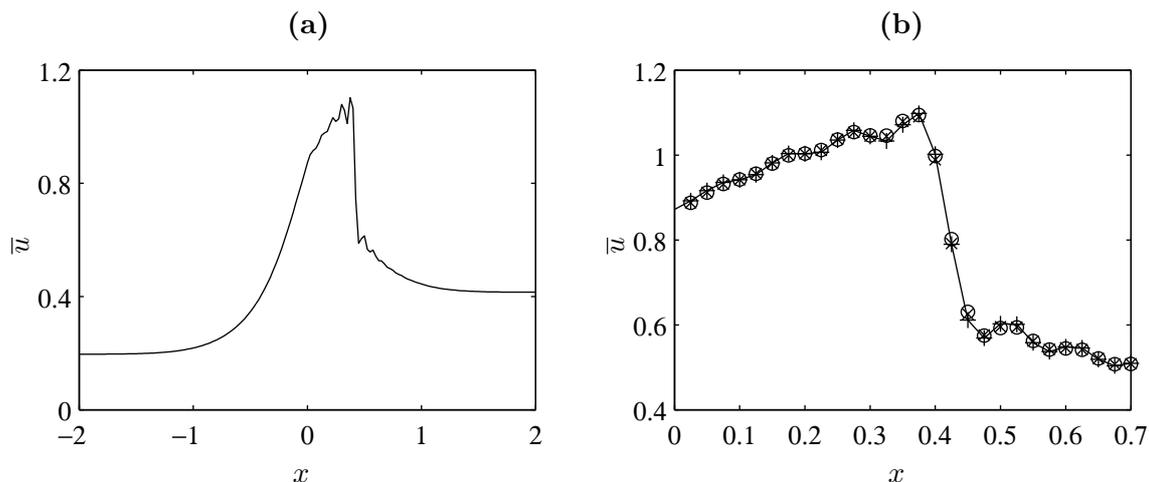


Figure 2.10: Choc droit dans une tuyère. (a) Vitesse moyenne de la solution calculée avec $\Delta x = 1/40$, et (b), vitesse moyenne de la solution calculée filtrée et sous-échantillonnée pour les différentes configurations de maillage. —+—, $\Delta x = 1/40$; ×, $\Delta x = 1/80$; ◦, $\Delta x = 1/160$.

À noter que la solution pour $\Delta x = 1/40$ n'est pas sous-échantillonnée. La vitesse moyenne filtrée et sous-échantillonnée est tracée sur la figure 2.10.b pour les trois configurations de maillage. Les trois solutions sont en bon accord. En particulier, le choc de compression est reproduit de la même manière par les trois calculs.

Des oscillations de la vitesse moyenne, associées au phénomène de Gibbs, sont aussi visibles près du choc de compression. On remarque cependant sur la figure 2.10.b que ces variations de vitesse moyenne sont identiques sur les solutions filtrées obtenues avec les trois maillages. Il est alors possible de considérer que ces oscillations font partie de la solution. Leur existence n'est qu'un artefact de la représentation dans l'espace physique d'une fonction dont le contenu spectral a été tronqué.

2.5 Conclusion

Les méthodes utilisées dans un solveur de calcul dédié à la simulation aéroacoustique de jets supersoniques à hauts nombres de Reynolds ont été décrites. L'approche retenue, la simulation des grandes échelles compressible avec filtrage explicite d'ordre élevé, permet d'obtenir en un seul calcul le développement turbulent de l'écoulement, et le champ acoustique rayonné. La mise en œuvre pratique des méthodes numériques a été traitée : la différentiation spatiale, l'intégration temporelle et l'implémentation des conditions limites ont été présentées en détails. Pour finir, le problème de la résolution numérique des chocs a été abordé. Il a été montré en particulier que pour des cas test de propagation linéaire, non-linéaire et de résolution d'un choc de compression, le phénomène de Gibbs faisait partie intégrante de la solution calculée.

Analyse des erreurs numériques pour la simulation des grandes échelles

Les premières études d'écoulements ont reposé sur des modèles théoriques déduits des équations de la mécanique des fluides. Les équations les plus classiquement utilisées pour décrire le comportement d'un fluide sont celles de Navier-Stokes. L'obtention de solutions analytiques est cependant très difficile, et plus particulièrement dans le cas de configurations réalistes d'écoulements turbulents.

Une alternative possible est d'avoir recours à une résolution numérique. Un modèle discret est ainsi substitué au système continu. Lors d'une simulation directe des écoulements (DNS pour *Direct Numerical Simulation*), les variables continues de l'écoulement sont remplacées par une suite de valeurs discrètes, et les opérateurs d'intégration temporelle et de dérivation spatiale sont approchés par des algorithmes numériques spécifiques. Sous réserve que le maillage et le pas de temps soient suffisamment petits, toutes les échelles de la turbulence peuvent être prise en compte, et il est alors possible d'obtenir une estimation de la solution exacte avec une précision donnée [39].

Le coût informatique d'une simulation directe est cependant très élevé, puisqu'elle nécessite un très grand nombre de degrés de liberté. Afin de contourner cette difficulté, les équations à résoudre peuvent être modifiées afin d'alléger la charge de calcul. On s'intéresse ici à la simulation des grandes échelles (SGE), qui cherche à réduire le coût informatique de la résolution numérique en proposant un modèle théorique simplifié de l'écoulement. L'application d'un filtre passe-bas pour les nombres d'onde permet en effet de traiter séparément les échelles turbulentes. La dynamique des échelles résolues, plus grandes que la longueur de coupure du filtre, est ainsi décrite à partir d'un système continu, dérivé de manière exacte à partir des équations de Navier-Stokes [62]. Les échelles non-résolues sont prises en compte grâce à un modèle de sous-maille.

Le système continu étant défini, la mise en place d'un modèle discret est ensuite nécessaire si l'on veut obtenir une solution aux équations de la SGE. Les erreurs numériques sont toutefois inévitables, et contrairement à la DNS, la réduction de la taille des mailles ne permet pas d'assurer la précision du calcul d'une SGE. Raffiner la grille équivaut en effet à déplacer la longueur d'onde de coupure vers de plus petites échelles. Néanmoins, ces structures portent toujours une énergie substantielle. Ainsi, quelque soit la taille des mailles, les échelles résolues sont suffisamment énergétiques pour solliciter l'ensemble des nombres d'onde que le maillage peut supporter [40]. L'obtention d'un système discret physiquement réaliste nécessite alors de quantifier spécifiquement les erreurs numériques pour le problème étudié.

Cependant, l'étude des erreurs numériques s'appuie généralement sur des outils d'analyse définis à partir des propriétés intrinsèques des algorithmes de discrétisation. L'ordre de précision d'un schéma de différences finies donne par exemple l'évolution de l'écart, quand la

taille des mailles tend vers zéro, entre la dérivée discrète et la dérivée continue [49]. En d'autres termes, l'ordre permet d'évaluer l'erreur pour des longueurs d'onde très grandes devant le pas de la grille. L'ordre de précision peut cependant être associé au nombre d'onde effectif [139], qui donne accès aux erreurs commises pour toutes les longueurs d'onde, notamment celles proches de la coupure du maillage.

Afin de compléter ces méthodes d'investigation, qui restent indépendantes du système à résoudre, Ghosal [40] propose un cadre théorique permettant une quantification des erreurs numériques lors d'une SGE incompressible d'une turbulence homogène isotrope. L'objectif est ici de savoir si le modèle théorique continu et le modèle discret fournissent des solutions similaires. Les équations impliquées sont néanmoins définies dans des espaces différents. Ce problème de compatibilité est résolu en interprétant les solutions des problèmes continu et discret comme des éléments de deux espaces distincts [40]. La comparaison entre le modèle continu et le modèle discret est rendue possible en introduisant un espace intermédiaire, et en construisant des opérateurs qui permettent de relier ces différents ensembles entre eux. Le problème continu et le problème discret sont alors reformulés dans cet espace intermédiaire, pour fournir deux nouveaux systèmes d'équations qui peuvent être comparés directement.

Ghosal [40] obtient avec cette approche une formulation explicite des erreurs de différentiation et d'aliasing. Les développements théoriques proposés supposent cependant que la séparation des échelles est effectuée implicitement par le maillage. Dans le cadre d'une SGE explicite, une opération de filtrage est appliquée explicitement afin de séparer les échelles turbulentes en une gamme résolue et une gamme non-résolue. D'un point de vue pratique, le filtre est un opérateur discret dont les caractéristiques influenceront sur les erreurs numériques. Les développements théoriques de Ghosal [40] sont donc repris ici en incluant le filtrage dans le système que l'on cherche à simuler.

Les bases de la méthode d'analyse des erreurs numériques sont décrites dans la section 3.1. Dans un souci de simplicité, l'étude se limite à une simulation incompressible, pour laquelle l'erreur totale est définie, puis calculée explicitement. Les erreurs de différentiation, d'aliasing, de modélisation de sous-maille et de filtrage sont par ailleurs introduites à partir de l'erreur totale. Dans la section 3.2, l'hypothèse d'une turbulence homogène isotrope permet de calculer les densités spectrales des erreurs pour des différences finies et des filtres sélectifs standards ou optimisés. Les résultats sont reformulés en terme d'efficacité afin d'établir quelles sont les méthodes numériques les mieux adaptées au problème à résoudre. La section 3.3 aborde finalement le problème des mécanismes de dissipation de l'énergie au sein du système discret. L'influence du nombre de Reynolds sur les contributions des dissipations visqueuse et numérique à la dissipation totale est plus particulièrement abordée.

3.1 Erreur totale d'une SGE

3.1.1 Définitions

Systeme continu

Le système continu est défini comme le système d'équations obtenu formellement à partir des équations de Navier-Stokes. Dans le cadre d'une SGE, le système continu est constitué des équations de Navier-Stokes filtrées, auxquelles sont associées des conditions limites de manière

à former un problème bien posé. Afin de simplifier l'étude, le fluide est supposé incompressible. On considérera plus précisément un cube de turbulence, de dimensions $L \times L \times L = V$, périodique dans les trois directions x_1 , x_2 et x_3 , des coordonnées Cartésiennes.

Les équations de quantité de mouvement et de continuité sont à la base de l'obtention des équations filtrées. Ces relations s'écrivent en coordonnées Cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} &= 0, \quad \text{avec } p^* = p/\rho \end{aligned} \quad (3.1)$$

où (u_1, u_2, u_3) est le champ de vitesse, et p^* est un scalaire qui se déduit de la connaissance du champ de vitesse à partir de l'équation de continuité [5]. Afin de simplifier les notations, l'équation (3.1) sera par la suite écrite de manière formelle suivant l'expression,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathcal{N}\mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

où \mathcal{N} est un opérateur non-linéaire, et $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur vitesse. Le fluide est ensuite supposé confiné dans un cube Ω de dimensions $L \times L \times L = V$, avec une condition de périodicité sur les frontières de Ω . Il vient ainsi pour les conditions limites,

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(0, x_2, x_3) = \mathbf{u}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, 0, x_3) = \mathbf{u}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{u}(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans le cadre de la simulation des grandes échelles, un filtre passe-bas du point de vue des nombres d'onde est introduit. Le nombre d'onde de coupure est pris égal à $k_c = \pi/\Delta$, où Δ est une longueur choisie arbitrairement. La partie filtrée $\bar{\mathbf{u}}$ d'un vecteur \mathbf{u} est obtenue avec le produit de convolution,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.4)$$

où G est le noyau du filtre. L'application du filtre passe-bas à l'équation (3.1) conduit aux équations de Navier-Stokes filtrées, qui peuvent être notée,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} = [-\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N}\mathbf{u}}] \quad (3.5)$$

où $[-\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N}\mathbf{u}}]$ dans le second membre est le terme de sous-maille. Il est introduit afin de prendre en compte la substitution des termes non-linéaires filtrés $\overline{\mathcal{N}\mathbf{u}}$, par les termes non-linéaires $\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}$, déduits de la vitesse filtrée $\bar{\mathbf{u}}$. Il vient également pour les conditions limites,

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \\ \bar{\mathbf{u}}(0, x_2, x_3) = \bar{\mathbf{u}}(L, x_2, x_3) \\ \bar{\mathbf{u}}(x_1, 0, x_3) = \bar{\mathbf{u}}(x_1, L, x_3) \\ \bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, 0) = \bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.6)$$

L'équation (3.5), associée aux conditions limites (3.6), constitue le modèle théorique continu de la SGE du cube de turbulence étudié.

Systeme discret

La résolution numérique du problème continu (3.5-3.6) à l'aide de différences finies est maintenant traitée. Le domaine Ω est discrétisé par une grille uniforme de taille de maille Δ_m , dont les points constituent un ensemble noté Ω_0 . Afin d'autoriser une utilisation optimale du maillage, on choisit de faire correspondre la taille des mailles avec la longueur de coupure du filtre, *i.e.* $\Delta_m = \Delta$. Si N^3 est le nombre de point de la grille, il vient alors $\Delta = L/(N - 1)$. Le problème (3.5-3.6) est ensuite remplacé par le modèle discret :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^d}{\partial t} - \mathcal{N}^d \mathbf{u}^d = \mathcal{M}^d \mathbf{u}^d \quad (3.7)$$

avec les conditions limites périodiques,

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega_0 \\ \mathbf{u}^d(0, x_2, x_3) = \mathbf{u}^d(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}^d(x_1, 0, x_3) = \mathbf{u}^d(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{u}^d(x_1, x_2, 0) = \mathbf{u}^d(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.8)$$

où \mathbf{u}^d est le vecteur vitesse discrétisé, défini uniquement aux points $\mathbf{x} \in \Omega_0$. L'opérateur \mathcal{N}^d représente les algorithmes numériques, et \mathcal{M}^d prend en compte les effets du modèle de sous-maille. L'intégration temporelle est supposée idéale, car l'objectif est ici d'étudier les algorithmes de discrétisation spatiale.

Comparaison entre le système continu et le système discret

L'objectif est maintenant de savoir si les problèmes (3.5-3.6) et (3.7-3.8) fournissent des solutions similaires. Les équations impliquées sont cependant définies dans des espaces différents, et leurs solutions ne peuvent donc pas être comparées directement. Afin de résoudre ce problème de compatibilité, les solutions des problèmes continu et discret sont interprétées comme étant éléments de deux espaces Hilbertiens distincts, qui vont être définis ici. Un troisième espace Hilbertien intermédiaire sera ensuite introduit, ainsi que des opérateurs permettant de relier ces différents ensembles. Le problème continu (3.5-3.6) et le problème discret (3.7-3.8) seront alors reformulés dans l'espace intermédiaire, pour donner deux nouveaux problèmes de même nature.

Notons \mathcal{H} l'espace Hilbertien des vecteurs \mathbf{u} , de carré intégrable sur Ω , qui satisfont aux conditions de périodicité (3.3) aux frontières de Ω . La norme sur \mathcal{H} est calculée par,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \frac{1}{3} \int_{\Omega} (u_i - v_i)^2 d\mathbf{x}, \quad \text{avec } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H} \quad (3.9)$$

Le système continu (3.5-3.6) est défini sur \mathcal{H} , et ses solution sont également des éléments de \mathcal{H} . Un vecteur vitesse solution du problème du cube de turbulence est effectivement périodique sur Ω . Il possède en outre une énergie finie, et est donc de carré intégrable sur Ω .

De la même manière, il est possible d'introduire un espace Hilbertien \mathcal{H}^d des fonctions discrètes \mathbf{u}^d , définies sur la grille Ω_0 et satisfaisant aux conditions périodiques (3.8). La norme sur l'espace \mathcal{H}^d est donnée par,

$$\|\mathbf{u}^d - \mathbf{v}^d\| = \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0} \left[u_i^d(\mathbf{x}) - v_i^d(\mathbf{x}) \right]^2 \quad \text{avec } \mathbf{u}^d, \mathbf{v}^d \in \mathcal{H}^d \quad (3.10)$$

Une solution du modèle discret (3.7-3.8) des équations de Navier-Stokes filtrées, est un élément de l'espace \mathcal{H}^d .

Par construction, les espaces Hilbertiens \mathcal{H} et \mathcal{H}^d sont de natures différentes. Il est donc difficile de comparer directement deux éléments de ces ensembles, en créant par exemple une norme qui serait définie à la fois sur \mathcal{H} et sur \mathcal{H}^d . Une approche alternative consiste à définir un espace intermédiaire, noté \mathcal{H}_0 , dans lequel il serait possible de formuler le problème continu (3.5-3.6), et le problème discret (3.7-3.8). On montrera que \mathcal{H}_0 peut être construit en s'appuyant sur un sous-espace de \mathcal{H} .

Soit \mathcal{B} l'ensemble des vecteurs $\Psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ définis par,

$$\Psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}(\mathbf{x}) = \left(e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}, e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}, e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (3.11)$$

où les vecteurs nombre d'onde \mathbf{k}_i sont de la forme,

$$(2p\pi/L, 2q\pi/L, 2r\pi/L), \quad \text{avec } (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (3.12)$$

Il est possible de montrer que l'ensemble \mathcal{B} constitue une base orthogonale de l'espace \mathcal{H} . Qualitativement, on remarque que chaque composante des vecteurs $\Psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ est le produit de trois exponentielles complexes,

$$\exp\left(i2\pi p \frac{x_1}{L}\right) \exp\left(i2\pi q \frac{x_2}{L}\right) \exp\left(i2\pi r \frac{x_3}{L}\right) \quad (3.13)$$

qui ne dépendent chacune que d'une seule composante du vecteur position \mathbf{x} . Ces exponentielles sont de plus périodiques dans une des directions x_i , avec un rapport entier entre la longueur L du domaine et leur longueur d'onde. Cette famille de fonction est obtenue en cherchant, par séparation des variables, les vecteurs qui sont périodiques et de carré intégrable sur le cube Ω .

Chaque élément $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ peut alors être projeté sur la base \mathcal{B} . La composante dans la direction x_i du vecteur vitesse est développée suivant la relation,

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{et} \quad \hat{u}_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.14)$$

qui s'apparente à une transformée de Fourier pour un espace des nombres d'onde discret. Les conditions de périodicité excluent en effet de l'espace \mathcal{H} les fonctions périodiques dont le rapport entre la longueur L du domaine et les longueurs d'onde dans les trois directions n'est pas un entier. Les coefficients $\hat{u}_i(\mathbf{k})$ seront appelés les composantes spectrales de la vitesse.

L'espace Hilbertien $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ est ensuite construit à partir de la base $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ des vecteurs tels que,

$$\Psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}(\mathbf{x}) = \left(e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}, e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}}, e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}} \right), \quad \text{avec } \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \in \square \quad (3.15)$$

où l'ensemble des nombres d'onde \square est défini par,

$$\square = [-k_c, k_c] \times [-k_c, k_c] \times [-k_c, k_c], \quad \text{avec, } k_c = \frac{\pi}{\Delta} \quad (3.16)$$

L'ensemble \mathcal{H}_0 contient donc des fonctions qui possèdent un contenu spectral réduit. Par construction, on a en effet $\hat{u}_i(\mathbf{k}) = 0$ si $\mathbf{k} \notin \square$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0$.

L'espace \mathcal{H}_0 peut être interprété comme l'ensemble qui contient les vecteurs vitesses filtrés $\bar{\mathbf{u}}$, solutions des équations de Navier-Stokes filtrées (3.5), et satisfaisant aux conditions de périodicité (3.6) sur Ω . Le filtre est en effet construit de manière à supprimer toutes les échelles plus petites que 2Δ , c'est à dire tous les nombres d'onde plus grands que $k_c = \pi/\Delta$. Le support spectral d'un vecteur vitesse filtré est donc limité aux nombres d'onde \mathbf{k} appartenant à l'ensemble \square .

Il faut cependant garder à l'esprit que le système continu des équations filtrées (3.5-3.6) est défini seulement sur \mathcal{H} , et non sur \mathcal{H}_0 . L'équation (3.5) contient en effet des termes non-linéaires dont le contenu spectral n'est pas restreint à l'ensemble \square . Le terme non-linéaire $\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}$ fait par exemple intervenir des produits des composantes de la vitesse de la forme $\bar{u}_i\bar{u}_j$. Les composantes spectrales de \bar{u}_i et de \bar{u}_j sont nulles pour des nombres d'onde \mathbf{k} en dehors de \square , mais leur produit peut générer des longueurs d'onde plus petites qui n'appartiennent pas *a priori* à l'ensemble \square .

Afin d'exprimer le problème continu (3.5-3.6), qui est défini sur \mathcal{H} , dans le sous-espace \mathcal{H}_0 , il est nécessaire de construire un opérateur qui associe à un élément de \mathcal{H} un élément de \mathcal{H}_0 . La méthode la plus simple consiste à opérer une troncature spectrale : étant donné les composantes spectrales d'un vecteur $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, un vecteur $\mathbf{u}^{\mathcal{L}} \in \mathcal{H}_0$ est reconstruit en ne gardant que les composantes spectrales de \mathbf{u} dont les nombres d'onde appartiennent à l'ensemble \square . Plus précisément, un projecteur \mathcal{P} est défini suivant,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_0 \\ \mathbf{u} &\longrightarrow \mathbf{u}^{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec, pour chaque composante de la vitesse,

$$u_i^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k} \in \square} \hat{u}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{et} \quad \hat{u}_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

L'obtention de la vitesse projetée $u_i^{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ est très similaire à la décomposition sur la base \mathcal{B} donnée par l'équation (3.14). On remarque cependant que dans la définition (3.18) du projecteur \mathcal{P} , la reconstruction de $u_i^{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ à partir des composantes spectrales n'utilise que les nombres d'onde appartenant à l'ensemble \square , afin d'effectuer une troncature du contenu spectral.

La projection du système continu (3.5-3.6) des équations de Navier-Stokes filtrées dans \mathcal{H}_0 conduit à,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}) - \mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} = \mathcal{P} [-\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}}] \quad (3.19)$$

avec les conditions limites,

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(0, x_2, x_3) = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(L, x_2, x_3) \\ \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(x_1, 0, x_3) = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(x_1, L, x_3) \\ \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, 0) = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.20)$$

Ce nouveau système continu (3.19-3.20) est défini dans le sous-espace \mathcal{H}_0 des fonctions dont le support spectral est restreint à l'ensemble des nombres d'onde \square . Les solutions de ce problème sont également des éléments de \mathcal{H}_0 .

L'obtention du système continu projeté dans \mathcal{H}_0 constitue une première étape. Il est maintenant nécessaire d'effectuer une démarche similaire pour le modèle discret (3.7-3.8), défini dans \mathcal{H}^d . On cherche donc un opérateur qui associe à une fonction discrète de \mathcal{H}^d , une fonction continue de \mathcal{H}_0 , avec les notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{H}^d &\longrightarrow \mathcal{H}_0 \\ \mathbf{u}^d &\longrightarrow \mathbf{u}_0 = (v_1, v_2, v_3) \end{aligned} \quad (3.21)$$

où les composantes du vecteur \mathbf{u}_0 sont notées (v_1, v_2, v_3) pour éviter un trop grand nombre d'indices. L'opérateur \mathcal{C} est un interpolateur car il doit fournir une fonction continue définie sur l'ensemble du domaine continu Ω à partir des valeurs d'une fonction sur la grille Ω_0 . Il existe cependant une infinité de façons de définir \mathcal{C} . Une interpolation trigonométrique faisant intervenir la base \mathcal{B}_0 est utilisée ici [40]. On pose ainsi,

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k} \in \square} \alpha_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.22)$$

La fonction $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (v_1, v_2, v_3)(\mathbf{x})$ ainsi obtenue est bien un élément de \mathcal{H}_0 , puisque l'interpolation s'appuie uniquement sur des exponentielles complexes de la forme $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ issues de la base \mathcal{B}_0 . Les coefficients $\alpha_i(\mathbf{k})$ de l'interpolation sont choisis de manière à faire coïncider les valeurs de la fonction continue $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ avec les valeurs de la fonction discrète $\mathbf{u}^d(\mathbf{x})$, quand \mathbf{x} parcourt les noeuds de la grille Ω_0 . Il est possible de montrer que le choix des $\alpha_i(\mathbf{k})$ est unique, et est donné par l'expression,

$$\alpha_i(\mathbf{k}) = \frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} u_i^d(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.23)$$

où Ω_0^* correspond à l'ensemble Ω_0 , auquel les plans $x_1 = L$, $x_2 = L$ et $x_3 = L$, ont été retranchés [40].

En s'appuyant sur la définition (3.14), le calcul de la transformée de Fourier de la vitesse interpolée $v_i(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \widehat{v}_i(\mathbf{k}) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k}' \in \square} \alpha_i(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}' \in \square} \alpha_i(\mathbf{k}') \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \alpha_i(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

montre que les composantes spectrales $\widehat{v}_i(\mathbf{k})$ coïncident avec les coefficients $\alpha_i(\mathbf{k})$ de l'interpolation. On remarque par ailleurs que le second membre de l'expression (3.23) correspond au calcul de la composante de Fourier du signal discret, pour le nombre d'onde \mathbf{k} , au sens de la transformée de Fourier discrète. Ainsi, les coefficients $\alpha_i(\mathbf{k})$ sont égaux aux coefficients de Fourier du signal discret. Il est alors possible de conclure que les contenus spectraux de la fonction discrète et de la fonction interpolée sont identiques.

Une autre propriété intéressante de l'interpolation trigonométrique concerne le cas où les valeurs de la solution discrète et de la solution continue filtrée coïncident aux points de maillage, soit $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x})$ pour toutes les positions \mathbf{x} de la grille Ω_0 . La fonction interpolée

\mathbf{u}_0 est alors égale à la solution filtrée $\bar{\mathbf{u}}$ sur l'ensemble du domaine continu Ω . Il vient en effet pour les composantes spectrales de $\mathbf{u}_0 = (v_i)$ la relation

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{k}) &= \frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} \bar{u}_i(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{\Delta^3}{V} \sum_{\mathbf{k}' \in \square} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} \widehat{u}_i(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

qui implique que dans l'espace physique $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ sont égaux pour tout \mathbf{x} du domaine continu Ω .

La fonction continue \mathbf{u}_0 déduite de la solution discrète \mathbf{u}^d sera nommée par la suite solution numérique interpolée.

L'interpolation trigonométrique proposée ici semble donc être un choix pertinent. L'opérateur \mathcal{C} fournit en effet une fonction continue qui coïncide avec la fonction discrète aux points de maillage Ω_0 . Par ailleurs, le contenu spectral de la fonction discrète est conservé lors de l'interpolation. À noter que l'ensemble $\square = [-k_c, k_c]^3$ peut s'interpréter cette fois-ci comme les nombres d'onde qu'il est possible de représenter correctement sur une grille de maille Δ .

L'opérateur \mathcal{C} est maintenant appliqué à l'équation discrétisée (3.7), pour donner l'expression,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} - \mathcal{C} \mathcal{N}^d \mathbf{u}^d = \mathcal{C} \mathcal{M}^d \mathbf{u}^d \quad (3.26)$$

qui est définie dans l'espace \mathcal{H}_0 des fonctions continues dont le support spectral est limité à l'ensemble des nombres d'onde \square . Il reste à traiter le problème de la commutation des opérateurs discrets \mathcal{N}^d et \mathcal{M}^d avec l'interpolation \mathcal{C} . Si l'on suppose que les algorithmes numériques sont linéaires, il est possible de les étendre à des fonctions continues de manière évidente. Considérons par exemple le terme non-linéaire $\mathcal{N}^d \mathbf{u}^d$ qui s'apparente à la dérivée spatiale d'un produit de vitesse. Pour la composante suivant x_i , on a,

$$(\mathcal{N}^d \mathbf{u}^d)_i(\mathbf{x}) = u_i^d \frac{\delta}{\delta x_j} (u_j^d), \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (3.27)$$

où $\delta/\delta x_j$ représente l'opérateur aux différences finies dans la direction x_j , défini uniquement pour les points de la grille Ω_0 . Dans le cas d'un algorithme aux différences finies sur trois points, l'équation (3.27) devient,

$$(\mathcal{N}^d \mathbf{u}^d)_i(\mathbf{x}) = u_i^d(\mathbf{x}) \frac{1}{2\Delta} [u_j^d(x_j + \Delta) - u_j^d(x_j - \Delta)], \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (3.28)$$

L'extension de l'opérateur discret \mathcal{N}^d à des fonctions continues est notée \mathcal{N}_0 , et est construit en élargissant le domaine de validité de la relation discrète (3.28), à l'ensemble du domaine continu Ω :

$$(\mathcal{N}_0 \mathbf{u}_0)_i(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}) \frac{1}{2\Delta} [v_j(x_j + \Delta) - v_j(x_j - \Delta)], \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.29)$$

où $\mathbf{u}_0 = (v_1, v_2, v_3)$ est une fonction continue de \mathcal{H}_0 . Cette méthode conduit aux relations

$$\mathcal{C} \mathcal{N}^d = \mathcal{N}_0 \mathcal{C} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{C} \mathcal{M}^d = \mathcal{M}_0 \mathcal{C} \quad (3.31)$$

où \mathcal{N}_0 et \mathcal{M}_0 sont les extensions des opérateurs discrets à des fonctions continues.

Finalement, le problème discret (3.7-3.8) devient dans \mathcal{H}_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} - \mathcal{N}_0 \mathbf{u}_0 = \mathcal{M}_0 \mathbf{u}_0 \quad (3.32)$$

avec les conditions limites de périodicité,

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}_0(0, x_2, x_3) = \mathbf{u}_0(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{u}_0(x_1, 0, x_3) = \mathbf{u}_0(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{u}_0(x_1, x_2, 0) = \mathbf{u}_0(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.33)$$

Erreur totale

La mise en place d'un espace Hilbertien intermédiaire \mathcal{H}_0 et des opérateurs \mathcal{P} et \mathcal{C} a permis de récrire le problème continu (3.5-3.6) et le problème discret (3.7-3.8) sous des formes compatibles. Il est maintenant possible de chercher le système qui régit la différence $\mathbf{e} = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0$ entre la solution continue projetée $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}$ et la solution numérique interpolée \mathbf{u}_0 . Après transformations, la différence entre les équations (3.19) et (3.32) fournit la relation,

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathcal{N}_0 \mathbf{e} = [\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} - \mathcal{N}_0\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}] + [-\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \mathcal{P}\overline{\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}} - \mathcal{M}_0\mathbf{u}_0] \quad (3.34)$$

Le second membre est laissé sous cette forme car une formulation explicite des termes qui apparaissent dans cette équation sera obtenue par identification dans la section 3.1.2. Les conditions limites pour \mathbf{e} se déduisent des conditions limites (3.20) et (3.33) pour $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u}_0 . La différence de deux fonctions périodiques reste en effet périodique, le vecteur différence \mathbf{e} admet donc des conditions de périodicité aux frontières du domaine Ω :

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{e}(0, x_2, x_3) = \mathbf{e}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{e}(x_1, 0, x_3) = \mathbf{e}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{e}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{e}(x_1, x_2, L) \end{cases} \quad (3.35)$$

Le problème des conditions initiales pour le vecteur différence \mathbf{e} est maintenant traité. La résolution numérique est amorcée en donnant les valeurs du vecteur vitesse discret \mathbf{u}^d aux noeuds de la grille Ω_0 . Ces valeurs sont déduites du champ de vitesse continu, qui est supposé connu au temps correspondant au début de la simulation. On a donc initialement une coïncidence entre la solution discrète et la solution continue filtrée et projetée, *i.e.* $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x})$, aux points du maillage $\mathbf{x} \in \Omega_0$. Par construction de l'opérateur d'interpolation \mathcal{C} , cela implique que $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}$ et la vitesse numérique interpolée \mathbf{u}_0 sont égales à tous les points du domaine continu Ω . En d'autres termes, la différence $\mathbf{e} = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0$ est initialement nulle pour tout \mathbf{x} de Ω .

Si le second membre de l'équation (3.34) est maintenant supposé nul, la différence $\mathbf{e} = \mathcal{P}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0$ restera égale à zéro pour tout t , puisque les termes non-linéaires $\mathcal{N}_0\mathbf{e}$ sont égaux à zéro si $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Par conséquent, la solution continue projetée $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}$ et la solution numérique

interpolée \mathbf{u}_0 seront égales pour tout t . L'égalité de $\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}$ et de \mathbf{u}_0 implique que les valeurs de la solution continue filtrée $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ et celles de la solution discrète $\mathbf{u}^d(\mathbf{x})$ sont identiques aux noeuds de la grille Ω_0 . Ce cas, dans lequel la solution discrète et la solution continue filtrée coïncident exactement, est considéré comme le cas idéal. L'erreur totale est donc définie par l'expression,

$$\mathbf{E} = [\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} - \mathcal{N}_0\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}] + [-\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \mathcal{P}\overline{\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}} - \mathcal{M}_0\mathbf{u}_0] \quad (3.36)$$

qui traduit l'écart de la valeur du second membre de l'équation (3.34) par rapport à zéro.

3.1.2 Formulation explicite

Une formulation explicite de l'erreur totale est maintenant proposée. Le système continu (3.5-3.6) des équations de Navier-Stokes filtrées, et le modèle discret (3.7-3.8) associé, sont reformulés explicitement dans l'espace Hilbertien intermédiaire \mathcal{H}_0 , l'ensemble des fonctions continues possédant un support spectral limité à \square . L'erreur totale est alors déterminée en identifiant les équations ainsi obtenues avec les termes de l'équation (3.36), qui gouverne la différence entre la solution filtrée projetée et la solution numérique interpolée.

Système continu

Pour un fluide incompressible, les équations de Navier-Stokes filtrées se mettent sous la forme,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial \mathcal{T}_{in}}{\partial x_n} \end{aligned} \quad (3.37)$$

où,

$$\mathcal{T}_{in} = \bar{u}_i \bar{u}_n - \overline{u_i u_n} \quad (3.38)$$

est le tenseur de sous-maille. L'opération de filtrage est par ailleurs définie par le produit de convolution,

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}) = (G \star u_i)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.39)$$

où G est le noyau du filtre. Le nombre d'onde de coupure, choisi arbitrairement, est ici égal à $k_c = \pi/\Delta$, où 2Δ est la longueur de coupure du filtre et Δ est la taille des mailles. Les équations de Navier-Stokes filtrées sont maintenant reformulées dans l'espace spectral en s'appuyant sur la relation (3.14), qui définit la transformée de Fourier sur l'espace \mathcal{H} des fonctions continues. En utilisant l'équation de continuité pour éliminer la pression, il vient après transformations [5],

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t}(\mathbf{k}) + iP_{imn}(\mathbf{k}) \widehat{u_m u_n}(\mathbf{k}) + \nu k^2 \widehat{u}_i(\mathbf{k}) = ik_n \widehat{\mathcal{T}_{in}}(\mathbf{k}) \quad (3.40)$$

où,

$$P_{imn}(\mathbf{k}) = \begin{cases} (k_n P_{im} + k_m P_{in})/2 & \text{si } \mathbf{k} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.41)$$

avec $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$. Les propriétés du produit de convolution permettent de reformuler l'opération de filtrage dans l'espace spectral. Il vient en effet,

$$\widehat{u}_i(\mathbf{k}) = \widehat{G} \star u_i(\mathbf{k}) = \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (3.42)$$

où $\widehat{G}(\mathbf{k})$ est la fonction de transfert du filtre, définie ici à partir du noyau G par,

$$\widehat{G}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.43)$$

Cette identité est réintroduite dans l'équation (3.40), et fournit,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \right] + iP_{imn}(\mathbf{k}) \widehat{u}_m \widehat{u}_n(\mathbf{k}) + \nu k^2 \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) = ik_n \widehat{T}_{in}(\mathbf{k}) \quad (3.44)$$

Le terme produit est ensuite développé pour donner,

$$\begin{aligned} \widehat{u}_m \widehat{u}_n(\mathbf{k}) &= \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ &= \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \end{aligned} \quad (3.45)$$

où $\alpha_v = 8\pi^3/V$ est une constante de normalisation qui interviendra lors du passage à la limite d'un domaine infini, et la fonction $\delta(\mathbf{k})$ est définie par,

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \begin{cases} V/8\pi^3 & \text{si } \mathbf{k} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.46)$$

Par ailleurs, la fonction de transfert du filtre est par construction telle que $\widehat{G}(\mathbf{k}) = 0$ si $\mathbf{k} \notin \square$. Les nombres d'onde en dehors de l'ensemble \square sont en effet plus grands que le nombre d'onde de coupure k_c du filtre. Il est ainsi possible de réduire la somme sur les vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' de (3.45), à une somme pour \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' qui parcourent l'ensemble \square . En effet, si \mathbf{k}' ou \mathbf{k}'' n'appartient à \square , le terme dans la somme est nul. Le produit des vitesses filtrées $\widehat{u}_m \widehat{u}_n(\mathbf{k})$ est finalement mis sous la forme,

$$\widehat{u}_m \widehat{u}_n(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \quad (3.47)$$

Le tenseur de sous-maille est ensuite développé dans l'espace spectral. En s'appuyant sur sa définition il est possible d'écrire la relation,

$$\widehat{T}_{in}(\mathbf{k}) = \widehat{u}_i \widehat{u}_n(\mathbf{k}) - \widehat{u}_i \widehat{u}_n(\mathbf{k}) \quad (3.48)$$

Le premier produit a déjà été traité, et est donné par l'équation (3.47). Le deuxième terme quadratique est développé de manière similaire. L'opération de filtrage est écrite sous forme spectrale : $\widehat{u}_i \widehat{u}_n(\mathbf{k}) = \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i \widehat{u}_n(\mathbf{k})$, et le produit $\widehat{u}_i \widehat{u}_n$ est détaillé pour faire apparaître la contribution de chaque composante de vitesse dans l'espace de Fourier,

$$\widehat{u}_i \widehat{u}_n(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \widehat{G}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \widehat{u}_i(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \quad (3.49)$$

où il n'est pas possible de restreindre l'étendue de la somme sur les vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' . En effet, les composantes spectrales de la vitesse qui interviennent dans la somme ne sont pas filtrées. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte toutes les valeurs possibles des nombres d'onde \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' . Le tenseur de sous-maille s'écrit ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}}_{in}(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ - \alpha_v^2 \widehat{G}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \end{aligned} \quad (3.50)$$

On propose cependant ici d'utiliser une formulation plus compacte. La restriction à l'ensemble \square dans la première somme est supprimée (ce qui est permis car $\widehat{G}(\mathbf{k}) = 0$ si $\mathbf{k} \notin \square$). Le terme de sous-maille peut alors être écrit en ne faisant intervenir qu'une seule somme :

$$\widehat{\mathcal{T}}_{in}(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \quad (3.51)$$

En recombinaison l'équation (3.44) qui gouverne l'évolution de la composante spectrale filtrée $\widehat{u}_i(\mathbf{k})$ de la vitesse avec les termes quadratiques (3.47) et le tenseur de sous-maille (3.51), on obtient les équations de Navier-Stokes filtrées reformulées dans l'espace spectral :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \right] + i \alpha_v^2 P_{imn}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ + \nu k^2 \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) = ik_n \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \end{aligned} \quad (3.52)$$

Cette équation est l'analogie de l'équation continue filtrée, introduite dans la section 3.1.1 et formellement donnée par l'expression (3.5), qui est rappelée ici :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \mathcal{N} \bar{\mathbf{u}} = [-\mathcal{N} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N} \mathbf{u}}]$$

Les différents termes de cette expression peuvent être identifiés à ceux de l'équation (3.52). Afin de fournir une formulation explicite des termes non-linéaires :

$$(\mathcal{N} \bar{\mathbf{u}})_i(\mathbf{k}) = -i \alpha_v^2 P_{imn}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') - \nu k^2 \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (3.53)$$

De la même façon, il vient pour les termes de sous-maille,

$$(-\mathcal{N} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N} \mathbf{u}})_i(\mathbf{k}) = ik_n \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \quad (3.54)$$

La définition de l'erreur totale \mathbf{E} est cependant basée sur les termes des équations de Navier-Stokes filtrées et projetées sur l'espace \mathcal{H}_0 , données formellement par la relation (3.19) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P} \bar{\mathbf{u}}) - \mathcal{P} \mathcal{N} \bar{\mathbf{u}} = \mathcal{P} [-\mathcal{N} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N} \mathbf{u}}]$$

où le projecteur \mathcal{P} est défini par la relation (3.17). Il est donc nécessaire de calculer la projection des termes quadratiques $\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}$ et des termes de sous-maille $[-\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}}]$. Cette opération équivaut à une troncature spectrale qui ne préserve que les composantes spectrales dont le nombre d'onde appartient à l'ensemble $\square = [-kc, +kc]^3$. Dans l'espace de Fourier, l'application de l'opérateur \mathcal{P} revient à multiplier $\hat{u}_i(\mathbf{k})$ par la fonction $H(\mathbf{k})$, qui est non nulle si \mathbf{k} est un élément de \square :

$$H(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{k} \in \square \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.55)$$

La composante spectrale dans la direction x_i de la projection $\mathcal{P}\mathbf{u}$ d'un vecteur vitesse \mathbf{u} s'écrit ainsi,

$$(\mathcal{P}\mathbf{u})_i(\mathbf{k}) = H(\mathbf{k})\hat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (3.56)$$

On en déduit l'expression suivante pour les termes non-linéaires projetés :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}})_i(\mathbf{k}) = & -i\alpha_\nu^2 H(\mathbf{k}) P_{imn}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \hat{G}(\mathbf{k}') \hat{G}(\mathbf{k}'') \hat{u}_m(\mathbf{k}') \hat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ & - \nu k^2 H(\mathbf{k}) \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

et la projection des termes de sous-maille conduit à la relation,

$$(-\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}}})_i(\mathbf{k}) = i\alpha_\nu^2 H(\mathbf{k}) k_n \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left[\hat{G}(\mathbf{k}') \hat{G}(\mathbf{k}'') - \hat{G}(\mathbf{k}) \right] \hat{u}_m(\mathbf{k}') \hat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \quad (3.58)$$

Systeme discret

L'obtention d'une solution des équations de Navier-Stokes filtrées incompressibles (3.37) s'appuie sur une résolution numérique ayant pour objectif de fournir une solution discrète \mathbf{u}^d qui approche la solution continue $\bar{\mathbf{u}}$. Le vecteur vitesse discret \mathbf{u}^d est définie sur la grille Ω_0 , et est solution du modèle discrétisé :

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_i^d}{\delta x_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i^d}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta x_j} (u_i^d u_j^d) + \frac{\delta p^{*d}}{\delta x_i} - \nu \frac{\delta^2 u_i^d}{\delta x_k^2} &= -\alpha_f (1 - G^d) \star u_i^d + \frac{\delta}{\delta x_j} (\mathcal{T}_{ij}^d) \end{aligned} \quad (3.59)$$

où \mathcal{T}_{ij}^d est le terme donné par la modèle du tenseur de sous-maille, qui prend en compte les effets des échelles non-résolues durant la résolution, en s'appuyant sur le champ de vitesse résolu \mathbf{u}^d .

Les dérivées spatiales dans l'espace discrétisé Ω_0 sont notées $\delta/\delta x_i$, et sont déterminées avec des schémas aux différences finies centrés sur $2n + 1$ points. Le calcul de la dérivée suivant x_i d'une fonction discrète f^d s'appuie alors sur les valeurs de f^d aux noeuds voisins du point considéré. L'algorithme peut s'écrire,

$$\frac{\delta f^d}{\delta x_i} = \frac{1}{\Delta} \sum_{r=-n}^n a_r f^d(x_i + r\Delta) \quad (3.60)$$

où a_r sont les coefficients du schéma, et où Δ est la taille des mailles.

L'opération de filtrage est introduite au second membre des équations de quantité de mouvement dans (3.59) par le biais d'un terme de la forme,

$$\alpha_f(1 - G^d) \star f^d = \frac{\alpha_f}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{r=-n}^n d_r f^d(x_i + r\Delta) \quad (3.61)$$

où f^d est une fonction discrète, et G^d le noyau du filtre. Les constantes d_r sont les coefficients de l'algorithme de filtrage, qui utilise n points de part et d'autre du noeud considéré, ceci dans chaque direction x_i , afin de déterminer la valeur de la variable filtrée. Le paramètre α_f est de la forme σ/τ_f , où σ est une constante prise entre zéro et un qui caractérise l'intensité du filtrage, et τ_f est un temps caractéristique. D'un point de vue pratique, lors de simulations numériques, σ est proche de 1, et τ_f correspond au pas de temps Δt choisi pour le calcul, qui est relié à la taille des mailles Δ par le nombre CFL :

$$\text{CFL} = \frac{U\Delta t}{\Delta} \quad (3.62)$$

où U est une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié. Ainsi, le paramètre α_f peut se reformuler suivant,

$$\alpha_f = \frac{\sigma U}{\Delta \cdot \text{CFL}} \quad (3.63)$$

Le dernier point concernant le modèle numérique porte sur l'implémentation des conditions de périodicité (3.8) aux frontières du domaine discret Ω_0 . La méthode retenue ici repose sur une extension périodique du domaine de calcul. La dérivée d'une variable est calculée en utilisant un schéma aux différences finies centré. Aux frontières du domaine, cet algorithme peut faire appel à des points qui sont en dehors de la grille. Les points manquants sont alors remplacés par des points issus de l'autre extrémité du domaine de calcul. Cette approche permet d'imposer implicitement les conditions périodiques lors de la résolution numérique.

En s'appuyant sur la procédure décrite dans la section 3.1.1, le système (3.59) correspondant au modèle numérique est maintenant interpolé dans l'espace \mathcal{H}_0 en appliquant l'opérateur \mathcal{C} .

La première étape consiste à étendre les opérateurs discrets de dérivation, $\delta/\delta x_i$, et de filtrage, $(G^d \star f^d)$, à des fonctions continues. La méthode a été décrite dans la section 3.1.1, et consiste à étendre le domaine de validité des relations discrètes (3.60) et (3.61), qui définissent les différences finies et le filtrage, à l'ensemble des points du domaine continu Ω . L'algorithme aux différences finies s'écrit alors,

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} = \frac{1}{\Delta} \sum_{r=-n}^n a_r f(x_i + r\Delta) \quad (3.64)$$

où f est une fonction continue. Cette expression permet par ailleurs d'introduire le nombre d'onde effectif \tilde{k}_i du schéma. En effet, en s'appuyant sur la définition (3.14) pour la transformée de Fourier, le schéma aux différences finies équivaut dans l'espace spectral à l'opération :

$$\widehat{\frac{\delta f}{\delta x_i}}(\mathbf{k}) = i \left[\frac{-i}{\Delta} \sum_{r=-n}^n a_r e^{irk_i\Delta} \right] \widehat{f}(\mathbf{k}) \quad (3.65)$$

Par analogie avec l'opérateur de dérivation usuel $\partial/\partial x_i$, pour lequel on a $\widehat{\partial/\partial x_i} = ik_i$, le nombre d'onde effectif \tilde{k}_i est défini par,

$$\tilde{k}_i \Delta = -i \sum_{r=-n}^n a_r e^{irk\Delta} \quad (3.66)$$

afin de pouvoir écrire que $\widehat{\delta/\delta x_i} = i\tilde{k}_i$.

De la même manière, le filtrage discret étendu à des fonctions continues est de la forme,

$$(G^d \star f)(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{r=-n}^n d_r f(x_i + r\Delta) \quad (3.67)$$

Dans l'espace spectral, cette relation devient,

$$\widehat{(G^d \star f)}(\mathbf{k}) = \underbrace{\left[1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{r=-n}^n d_r e^{irk_i\Delta} \right]}_{\widehat{G}^d(\mathbf{k})} \widehat{f}(\mathbf{k}) \quad (3.68)$$

où apparaît la fonction de transfert $\widehat{G}^d(\mathbf{k})$ du filtre. On supposera par la suite que le filtre discret coïncide avec le filtre continu. Ainsi pour $\mathbf{k} \in \square$, la relation $\widehat{G}^d(\mathbf{k}) = \widehat{G}(\mathbf{k})$ sera vérifiée.

L'opérateur d'interpolation \mathcal{C} peut maintenant être appliqué au système discret (3.59) pour former un système continu défini dans \mathcal{H}_0 . Ce système s'écrit dans l'espace spectral,

$$\frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial t}(\mathbf{k}) + iP_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \widehat{v}_m \widehat{v}_n(\mathbf{k}) + \nu \tilde{k}^2 \widehat{v}_i(\mathbf{k}) = -\alpha_f \left[1 - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{v}_i(\mathbf{k}) + i\tilde{k}_j \widehat{\mathcal{T}}_{in}^0(\mathbf{k}) \quad (3.69)$$

pour $\mathbf{k} \in \square$, et où \mathcal{T}_{in}^0 est l'extension au domaine continu Ω du tenseur de sous-maille discret \mathcal{T}_{in}^d . On rappelle par ailleurs que les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u}_0 = \mathcal{C}\mathbf{u}^d$, interpolé à partir du vecteur vitesse discret \mathbf{u}^d , sont notées (v_1, v_2, v_3) pour plus de lisibilité.

Le terme quadratique $\widehat{v}_m \widehat{v}_n(\mathbf{k})$ est développé afin de faire apparaître explicitement les contributions de chaque composante spectrale de la vitesse. En utilisant les relations (3.22) et (3.23) qui définissent la vitesse numérique interpolée \mathbf{u}_0 , il vient pour ce produit,

$$\begin{aligned} \widehat{v}_m \widehat{v}_n(\mathbf{k}) &= \frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} v_m(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

où la constante α_v vaut $8\pi^3/V$. À noter que la somme sur les vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' est limitée à l'ensemble \square . Le vecteur $\mathbf{u}_0 = (v_1, v_2, v_3)$ est en effet un élément de \mathcal{H}_0 . Ses composantes spectrales sont donc nulles pour les nombres d'onde qui n'appartiennent pas à \square . La permutation des sommes conduit ensuite à écrire le produit sous la forme,

$$\widehat{v}_m \widehat{v}_n(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \underbrace{\left[\frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}} \right]}_{S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')} \quad (3.71)$$

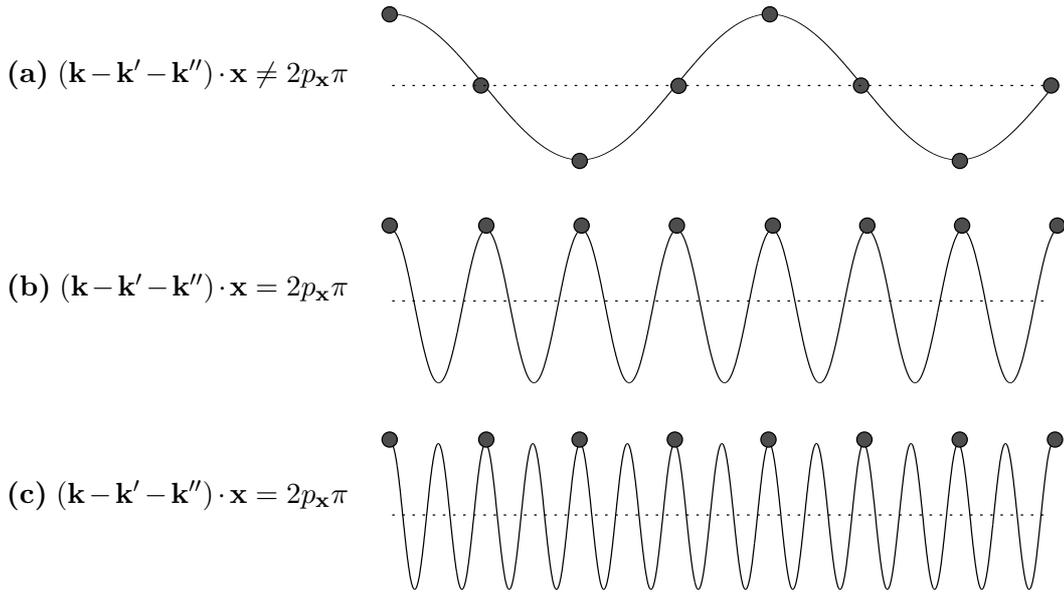


Figure 3.1: Représentation schématique pour différentes valeurs de $\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''$ de l'exponentielle complexe $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}}$ qui intervient dans la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$. —, valeurs de l'exponentielle si \mathbf{x} varie continuellement ; •, valeurs de l'exponentielle aux points de maillage $\mathbf{x} \in \Omega_0^*$. (a) L'argument de l'exponentielle $(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}$ n'est pas un multiple de 2π en chaque point de maillage, et la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est nulle. (b) La quantité $(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}$ est un multiple de 2π en chaque point de maillage, et la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est non nulle. (c) *Idem* que (b) mais avec une longueur d'onde plus petite pour l'exponentielle complexe.

On va maintenant montrer que le terme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ permet de prendre en compte les problèmes d'aliasing. Un développement analytique est d'abord présenté. Les résultats seront ensuite interprétés de manière qualitative afin d'établir le lien entre $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ et l'aliasing.

La fonction dans la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est une exponentielle complexe, qui est par construction périodique sur la grille Ω_0 , et ceci dans les trois directions (x_i). La somme des valeurs d'une fonction de ce type sur les points de maillage de Ω_0^* est donc nulle, sauf si l'exponentielle vaut toujours la même valeur en chaque noeud, c'est à dire 1, sa valeur en $x = 0$. Dans ce cas, l'argument de l'exponentielle est un multiple de 2π . En d'autres termes, la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est non nulle si $(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x} = 2p_x\pi$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_0^*$, où p_x est un entier relatif, qui est *a priori* différent en chaque noeud \mathbf{x} .

L'exponentielle complexe $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}}$ est représentée de manière schématique sur la figure 3.1, pour différentes valeurs de $\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''$. Sur la figure 3.1.a, l'argument $(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}$ de l'exponentielle complexe n'est pas un multiple de 2π en chaque noeud du maillage et la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est nulle. La figure 3.1.b illustre un cas pour lequel $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est non nul. On observe en effet que les noeuds de la grille coïncident toujours avec les maximums de l'exponentielle $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}}$. La situation est identique sur la figure 3.1.c, mais avec une exponentielle de longueur d'onde plus petite. Les points de maillage coïncident alors avec un maximum sur deux de la fonction $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}}$.

Pour formaliser ces observations le vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''$ est maintenant introduit.

L'expression $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est alors non nulle pour les vecteurs \mathbf{a} tels que,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 2p_x\pi, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0^* \quad (3.72)$$

Comme la grille Ω_0^* est uniforme, la position du noeud en \mathbf{x} peut être repérée par un triplet d'entier (n_1, n_2, n_3) tel que $\mathbf{x} = (n_1, n_2, n_3)\Delta$, où Δ est la taille des mailles. L'équation (3.72) est de cette manière équivalente à la relation,

$$n_1 \left[a_1 \frac{\Delta}{2\pi} \right] + n_2 \left[a_2 \frac{\Delta}{2\pi} \right] + n_3 \left[a_3 \frac{\Delta}{2\pi} \right] = p_x, \quad \text{pour } n_1, n_2, n_3 \in [0, N-2] \quad (3.73)$$

où N est le nombre de points de la grille dans les trois directions, et (a_1, a_2, a_3) sont les composantes du vecteur \mathbf{a} . La seule façon d'obtenir l'égalité (3.73) pour tout (n_1, n_2, n_3) est de prendre pour les composantes de \mathbf{a} des multiples de $2\pi/\Delta$. Dans le cas contraire, le premier membre de l'équation (3.73) ne peut en effet pas être un entier relatif.

Ainsi, pour les vecteurs nombre d'onde \mathbf{a} dont les composantes sont des multiples de $2\pi/\Delta$, on aura,

$$e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0^* \quad (3.74)$$

c'est à dire,

$$\frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0^*} e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\Delta^3}{8\pi^3} (N-1)^3 = \frac{V}{8\pi^3} \quad (3.75)$$

Afin d'appliquer ce résultat à la somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$, l'ensemble Λ des nombres d'onde \mathbf{a} dont les composantes sont des multiples de $2\pi/\Delta$ est introduit avec la définition,

$$\Lambda = \{ \mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (p2k_c, q2k_c, r2k_c), \text{ avec } (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \} \quad (3.76)$$

où $k_c = \pi/\Delta$. La somme $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ est donc non nulle si le vecteur $\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}''$ est égal à un élément de Λ , *i.e.*,

$$\frac{\Delta^3}{8\pi^3} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \quad (3.77)$$

où l'on rappelle que la fonction $\delta(\mathbf{k})$ est définie par,

$$\delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} V/8\pi^3 & \text{si } \mathbf{k} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le terme quadratique $\widehat{v_m v_n}(\mathbf{k})$ donné par (3.71) s'écrit alors,

$$\widehat{v_m v_n}(\mathbf{k}) = \alpha_V^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} \widehat{v_m}(\mathbf{k}') \widehat{v_n}(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \quad (3.78)$$

Il apparaît ainsi que le produit $\widehat{v_m v_n}$ fait intervenir pour un nombre d'onde fixé \mathbf{k} une grande variété de combinaison de nombres d'onde \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' . Par exemple, pour $\mathbf{a} = 0$, on retrouve une interaction triadique classique du type $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$. Cependant, si $\mathbf{a} \neq 0$, le couplage entre les nombres d'onde \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' pour former la composante de nombre d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{a}$, est dû à l'aliasing.

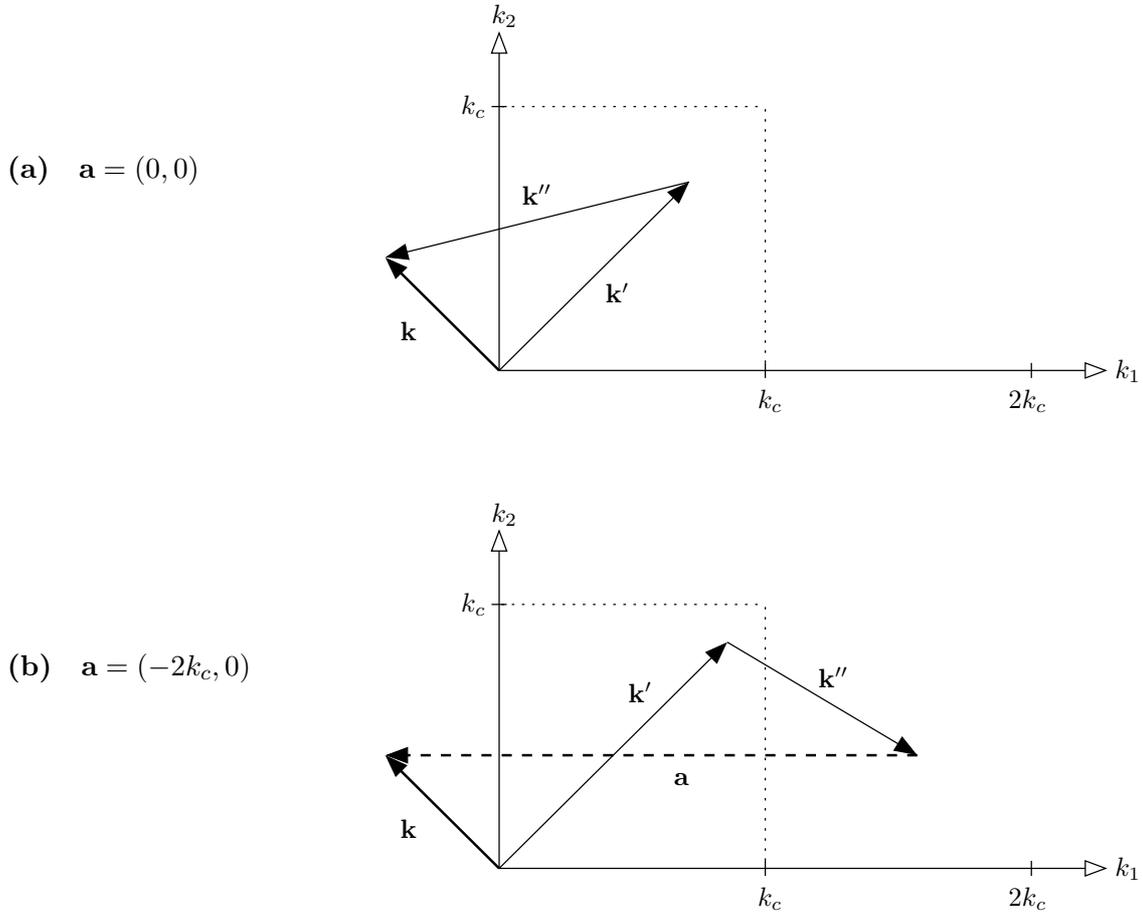


Figure 3.2: Illustration du phénomène d'aliasing en deux dimensions. L'égalité vectorielle $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{a}$ est tracée dans le plan des vecteurs nombre d'onde (k_1, k_2) , pour deux valeurs du vecteur \mathbf{a} . (a) interaction quadratique classique quand $\mathbf{a} = (0, 0)$, et (b) interaction quadratique avec de l'aliasing pour $\mathbf{a} = (-2k_c, 0)$.

Ce phénomène est illustré sur la figure 3.2 en deux dimensions. Les nombres d'onde \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' et \mathbf{a} sont tracés dans le plan (k_1, k_2) des nombres d'onde. Le nombre d'onde de coupure du maillage k_c a aussi été indiqué. Le cas $\mathbf{a} = 0$ est présenté sur la figure 3.2.a. Le produit $\widehat{v}_m \widehat{v}_n(\mathbf{k})$ combine alors les nombres d'onde \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' pour donner le nombre d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$. Cette interaction est typique d'une interaction quadratique. La figure 3.2.b montre une situation pour laquelle $\mathbf{a} = (-2k_c, 0) \neq 0$. De manière générale, l'interaction quadratique de deux nombres d'onde \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' transfère de l'énergie vers le nombre d'onde $\mathbf{k}' + \mathbf{k}''$. Dans la figure 3.2.b on remarque cependant que la somme $\mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ est en dehors des nombres d'onde que le maillage peut supporter, représenté par la surface $[-k_c, k_c] \times [-k_c, k_c]$ en deux dimensions. Le phénomène d'aliasing, qui découle directement d'une sous-discretisation des nombres d'onde plus grand que le nombre d'onde de coupure k_c , transforme alors le nombre d'onde $\mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ en un nombre d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{a}$ qui est correctement discrétisé par le maillage, avec $\mathbf{a} = (-2k_c, 0)$ dans le cas de la figure 3.2.b. On parle pour chaque valeur de \mathbf{a} de mode d'aliasing.

Si on reconsidère maintenant la relation (3.78) dans laquelle les différents modes d'aliasing interviennent, on peut noter que la somme sur les vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' se limite à l'ensemble \square des nombres d'onde résolus par le maillage. Les valeurs possibles du vecteur \mathbf{a} sont donc réduites. Plus précisément, chacune de ses composantes est nécessairement comprise entre $-2k_c$ et $2k_c$. Des composantes avec une amplitude plus grande imposeraient en effet aux vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' d'être en dehors des nombres d'onde résolus de \square . La somme sur le vecteur \mathbf{a} dans l'expression (3.78) du produit $\widehat{v_m v_n}(\mathbf{k})$ est ainsi réduite au cas $\mathbf{a} = 0$, qui n'est pas un mode d'aliasing, et à l'ensemble $\Lambda_0 \subset \Lambda$ donné par,

$$\Lambda_0 = \left\{ \mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (2pk_c, 2qk_c, 2rk_c), \text{ avec } (p, q, r) \in \{-1; 0; 1\}^3, \right. \\ \left. \text{et } (p, q, r) \neq (0, 0, 0) \right\} \quad (3.79)$$

qui représente tous les modes d'aliasing possibles sur une grille tridimensionnelle de maille Δ .

Finalement, le produit de deux composantes de vitesse s'écrit dans l'espace spectral :

$$\widehat{v_m v_n}(\mathbf{k}) = \alpha_v^2 \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') + \alpha_v^2 \sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square}} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \quad (3.80)$$

où la première somme prend en compte les interactions quadratiques physiques, et la deuxième somme celles qui sont numériques et dues à l'aliasing.

La forme explicite (3.80) des termes quadratiques est ensuite réinjectée dans l'équation (3.69), qui correspond au modèle discret interpolé dans \mathcal{H}_0 et exprimé dans l'espace spectral. Il vient alors l'équation,

$$\frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial t}(\mathbf{k}) + i\alpha_v^2 P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ + i\alpha_v^2 P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square}} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \\ + \nu \tilde{k}^2 \widehat{v}_i(\mathbf{k}) + \alpha_f \left[1 - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{v}_i(\mathbf{k}) = i\tilde{k}_n \widehat{T}_{in}^0(\mathbf{k}) \quad (3.81)$$

qui est analogue à la relation (3.32) introduite dans la section 3.1.1 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} - \mathcal{N}_0 \mathbf{u}_0 = \mathcal{M}_0 \mathbf{u}_0$$

Par identification des termes de cette équation avec ceux de l'expression (3.81), le terme non-linéaires peuvent être formulés explicitement de la façon suivante :

$$(\mathcal{N}_0 \mathbf{u}_0)_i(\mathbf{k}) = -i\alpha_v^2 P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ - i\alpha_v^2 P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square}} \widehat{v}_m(\mathbf{k}') \widehat{v}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \\ - \alpha_f \left[1 - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{v}_i(\mathbf{k}) - \nu \tilde{k}^2 \widehat{v}_i(\mathbf{k}) \quad (3.82)$$

De la même manière, il vient pour le terme correspondant au modèle de sous-maille,

$$(\mathcal{M}_0 \mathbf{u}_0)_i(\mathbf{k}) = i\tilde{k}_n \widehat{T}_{in}^0(\mathbf{k}) \quad (3.83)$$

Erreur totale

Il est maintenant possible d'obtenir une formulation explicite de l'erreur totale. Les développements de la section 3.1.1 ont montré qu'elle était définie par l'expression,

$$\mathbf{E} = [\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} - \mathcal{N}_0\mathcal{P}\bar{\mathbf{u}}] + [-\mathcal{P}\mathcal{N}\bar{\mathbf{u}} + \mathcal{P}\bar{\mathcal{N}}\bar{\mathbf{u}} - \mathcal{M}_0\mathbf{u}_0] \quad (3.84)$$

Les termes du second membre ont ensuite été reliés aux composantes spectrales de vitesse dans cette section. En particulier, les équations (3.57), (3.58), (3.82) et (3.83) définissent $\mathcal{P}\mathcal{N}$, $(-\mathcal{P}\mathcal{N} + \mathcal{P}\bar{\mathcal{N}})$, \mathcal{N}_0 et \mathcal{M}_0 , et permettent d'écrire que l'erreur totale se décompose suivant quatre erreurs d'origines distinctes :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{fd} + \mathbf{E}_{alias} + \mathbf{E}_{sf} + \mathbf{E}_{sgs} \quad (3.85)$$

où,

$$\begin{aligned} E_{fd,i}(\mathbf{k}) = i\alpha_v^2 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \\ + \nu(\tilde{k}^2 - k^2) H(\mathbf{k}) \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.86)$$

avec,

$$\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) = P_{imn}(\mathbf{k}) - P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \quad (3.87)$$

Le terme \mathbf{E}_{fd} représentent les erreurs commises lors de l'utilisation de différences finies pour évaluer les dérivées spatiales. Le deuxième terme,

$$E_{alias,i}(\mathbf{k}) = i\alpha_v^2 H(\mathbf{k}) P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square}} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{k}') \widehat{u}_n(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \quad (3.88)$$

est associé aux erreurs induites par les problèmes d'aliasing du système discret. Un terme qui traduit les erreurs directement connectées à la dissipation du filtre, est aussi introduit,

$$E_{sf,i} = -\alpha_f H(\mathbf{k}) \left[1 - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \quad (3.89)$$

Finalement, le dernier terme prend en compte les erreurs de modélisation de sous-maille,

$$E_{sgs,i} = iH(\mathbf{k}) \left[k_n \widehat{T}_{in}(\mathbf{k}) - \tilde{k}_n \widehat{T}_{in}^0(\mathbf{k}) \right] \quad (3.90)$$

3.2 Densité spectrale de puissance de l'erreur totale dans l'hypothèse d'une turbulence homogène isotrope

3.2.1 Formulations basées sur le spectre de l'énergie cinétique

Erreur de différentiation

La densité spectrale de puissance de l'erreur de différentiation est définie par la relation,

$$\mathcal{E}_{fd}(k) = 4\pi k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8\pi^3}{V} \langle E_{fd,i}(\mathbf{k}) E_{fd,i}^*(\mathbf{k}) \rangle \right\}_{S_k} \quad (3.91)$$

où $\langle \cdot \rangle$ correspond à une moyenne d'ensemble, l'exposant $*$ indique le conjugué d'une variable, et $\{\cdot\}_{S_k}$ est une moyenne sur la surface de la sphère S_k de rayon $|\mathbf{k}|$ dans l'espace des nombres d'onde. La densité spectrale est basée sur l'énergie volumique de l'erreur de différentiation,

$$\frac{8\pi^3}{V} \langle E_{fd,i}(\mathbf{k}) E_{fd,i}^*(\mathbf{k}) \rangle \quad (3.92)$$

qui est moyennée sur la sphère de rayon $|\mathbf{k}|$, pour que l'orientation du vecteur nombre d'onde \mathbf{k} n'intervienne pas dans la densité spectrale. On fait ensuite tendre la dimension L du domaine vers l'infini, et le résultat est multiplié par $4\pi k^2$ pour obtenir l'énergie de l'erreur sur la sphère de rayon k .

Après développement, la norme de l'erreur de différentiation peut se mettre sous la forme d'une somme de trois termes :

$$\langle E_{fd,i}(\mathbf{k}) E_{fd,i}^*(\mathbf{k}) \rangle = S_1(\mathbf{k}) + S_2(\mathbf{k}) + S_3(\mathbf{k}) \quad (3.93)$$

définis par les relations suivantes,

$$S_1(\mathbf{k}) = \alpha_v^4 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \in \square}} \langle \hat{u}_m(\mathbf{k}_1) \hat{u}_n(\mathbf{k}_2) \hat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \hat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle \\ \times \hat{G}(\mathbf{k}_1) \hat{G}(\mathbf{k}_2) \hat{G}(\mathbf{k}_3) \hat{G}(\mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \quad (3.94)$$

$$S_2(\mathbf{k}) = \mathcal{I}m \left[2\nu i \alpha_v^2 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) (\tilde{k}^2 - k^2) \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square} \langle \hat{u}_m^*(\mathbf{k}') \hat{u}_n^*(\mathbf{k}'') \hat{u}_i(\mathbf{k}) \rangle \right. \\ \left. \times \hat{G}(\mathbf{k}') \hat{G}(\mathbf{k}'') \hat{G}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \right] \quad (3.95)$$

$$S_3(\mathbf{k}) = \nu^2 H(\mathbf{k}) |\tilde{k}^2 - k^2|^2 G(\mathbf{k})^2 \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) \rangle \quad (3.96)$$

La poursuite des développements analytiques nécessite maintenant de pouvoir décrire plus précisément les couplages entre les composantes spectrales de la vitesse. Ghosal [40] résout le problème de fermeture des moments d'ordre élevé de la vitesse à l'aide de l'hypothèse de Millionshchikov, qui fait une approximation Gaussienne pour la densité de probabilité des fluctuations de vitesse [79]. Les corrélations quadruples de vitesse sont alors directement reliées aux moments d'ordre deux par l'expression,

$$\langle u_m(\mathbf{x}_1) u_n(\mathbf{x}_2) u_p(\mathbf{x}_3) u_q(\mathbf{x}_4) \rangle = \langle u_m(\mathbf{x}_1) u_n(\mathbf{x}_2) \rangle \langle u_p(\mathbf{x}_3) u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \\ + \langle u_m(\mathbf{x}_1) u_p(\mathbf{x}_3) \rangle \langle u_n(\mathbf{x}_2) u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \\ + \langle u_m(\mathbf{x}_1) u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \langle u_n(\mathbf{x}_2) u_p(\mathbf{x}_3) \rangle \quad (3.97)$$

et les moments d'ordre trois sont nuls.

La première conséquence de ces hypothèses est que le terme $S_2(\mathbf{k})$ dans (3.93) est égal à zéro, puisqu'il ne dépend que des corrélations triples de vitesse. Si la turbulence est maintenant supposée homogène, il est possible d'introduire le tenseur spectral $\Phi_{ij}(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k})$ des champ de vitesse, qui est défini comme la transformée de Fourier spatiale des corrélations doubles de vitesse,

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_j(\mathbf{x}) \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (3.98)$$

Il vient alors pour le troisième terme $S_3(\mathbf{k})$,

$$S_3(\mathbf{k}) = \nu^2 H(\mathbf{k}) |\tilde{k}^2 - k^2|^2 G(\mathbf{k})^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \quad (3.99)$$

Afin d'évaluer la somme $S_1(\mathbf{k})$, qui implique des corrélations quadruples de vitesse, il est nécessaire de reformuler dans l'espace spectral l'hypothèse (3.97) sur les moments d'ordre quatre. En appliquant la transformée de Fourier spatiale à la relation (3.97), et en utilisant la définition du tenseur spectral des vitesses, il vient l'expression (*cf.* l'annexe C) :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_m(\mathbf{k}_1) \widehat{u}_n(\mathbf{k}_2) \widehat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \widehat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \Phi_{mn}(\mathbf{k}_2) \Phi_{pq}^*(\mathbf{k}_4) \\ &\quad + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_3) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k}_4) \\ &\quad + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \Phi_{mq}^*(\mathbf{k}_4) \Phi_{np}^*(\mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (3.100)$$

qui lie les moments d'ordre quatre aux moments d'ordre deux dans l'espace de Fourier [40], et où la fonction $\delta(\mathbf{k})$ est définie par l'équation (3.46). Cette relation est réinjectée dans la somme $S_1(\mathbf{k})$. Après simplification et passage à la limite d'un domaine infini, on obtient l'expression,

$$\frac{8\pi^3}{V} S_1(\mathbf{k}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 2H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \int_{\square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}') \Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right]^2 d\mathbf{k}' \quad (3.101)$$

dont la dérivation est donnée dans l'annexe C.

Les développements précédents conduisent finalement à écrire, pour une turbulence homogène isotrope, la densité spectrale de l'erreur de différentiation sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{fd}(k) &= \left\{ 8\pi k^2 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \int_{\square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}') \Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right. \\ &\quad \left. \times \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right]^2 d\mathbf{k}' + 4\pi k^2 \nu^2 H(\tilde{k}^2 - k^2)^2 G(\mathbf{k})^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \right\}_{S_k} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Une technique de résolution de l'intégrale rencontrée dans (3.102) a été proposée Ghosal [40] et est décrite dans l'annexe C. La méthode repose cependant sur une hypothèse de symétrie sphérique de l'intégrande. En pratique, le spectre $\widehat{G}(\mathbf{k})$ du noyau du filtre dépend de l'orientation du vecteur nombre d'onde. Afin de poursuivre le développement analytique de l'erreur de différentiation, on supposera donc par la suite que le filtre est isotrope, c'est à dire que $\widehat{G}(\mathbf{k})$ est seulement fonction du module de \mathbf{k} . La dissipation sera alors légèrement surestimée. L'objectif étant ici de comparer les erreurs fournies par différentes méthodes numériques, on considérera que cette hypothèse est néanmoins acceptable. La fonction de transfert $\widehat{G}(\mathbf{k})$ du filtre, initialement donnée par l'équation (3.68) :

$$\widehat{G}(\mathbf{k}) = 1 - \sum_{i=1}^3 \sum_{r=-n}^n d_r e^{ir k_i \Delta} \quad (3.103)$$

est ainsi remplacée par l'expression,

$$\widehat{G}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 - \sum_{r=-n}^n d_r e^{ir |\mathbf{k}| \Delta} & \text{si } |\mathbf{k}| < k_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.104)$$

qui permet de déduire une formulation explicite de l'erreur :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{fd}(k) = 2\nu^2 G(\mathbf{k})^2 E(k) \left\{ |\tilde{k}^2 - k^2|^2 \right\}_{S_k} + [A_1(k) + A_2(k)] \left\{ \sum_{i,m,n} |\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})|^2 \right\}_{S_k} \\ + 2A_3(k) \left\{ \sum_{i,m,n,p} \frac{k_m k_p}{k^2} \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipn}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \right\}_{S_k} \\ + A_4(k) \left\{ \sum_{i,m,n,p,q} \frac{k_m k_p k_n k_q}{k^4} \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \right\}_{S_k} \end{aligned} \quad (3.105)$$

où,

$$A_i(k) = F_{G^2,i}(k) \quad (3.106)$$

Les fonctions $F_{G^2,i}(k)$ seront calculées par des relations données dans l'annexe C.

Erreur d'aliasing

La densité spectrale de puissance de l'erreur d'aliasing est définie par,

$$\mathcal{E}_{alias}(k) = 4\pi k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8\pi^3}{V} \langle \mathbf{E}_{alias,i}(\mathbf{k}) \mathbf{E}_{alias,i}^*(\mathbf{k}) \rangle \right\}_{S_k} \quad (3.107)$$

Les différentes étapes nécessaire à l'obtention d'une formulation explicite de $\mathcal{E}_{alias}(\mathbf{k})$ sont identiques à celles utilisées pour la densité spectrale de puissance de l'erreur de différentiation. Les erreurs $\mathbf{E}_{fd,i}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{E}_{alias,i}(\mathbf{k})$ ont en effet des formes similaires. Il vient ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{alias}(k) = 8\pi k^2 \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda_0} \left\{ P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) P_{ipq}^*(\tilde{\mathbf{k}}) \int_{\square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}') \Phi_{nq}(\mathbf{k} + \mathbf{a} - \mathbf{k}') \right. \\ \left. \times [\hat{G}(\mathbf{k}') \hat{G}(\mathbf{k} + \mathbf{a} - \mathbf{k}')]^2 d\mathbf{k}' \right\}_{S_k} \end{aligned} \quad (3.108)$$

qui prend la forme explicite,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{alias}(k) = \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda_0} \left\{ [A_1(K) + A_2(K)] \sum_{i,m,n} |P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}})|^2 \right. \\ + 2A_3(K) \sum_{i,m,n,p} \frac{K_m K_p}{K^2} P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) P_{ipn}^*(\tilde{\mathbf{k}}) \\ \left. + A_4(K) \sum_{i,m,n,p,q} \frac{K_m K_p K_n K_q}{K^4} P_{imn}(\tilde{\mathbf{k}}) P_{ipq}^*(\tilde{\mathbf{k}}) \right\}_{S_k} \end{aligned} \quad (3.109)$$

où le terme $A_i(k)$ est défini par la relation (3.106), et $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{a}$. La somme sur le vecteur \mathbf{a} qui parcourt l'ensemble Λ_0 impose de calculer $3^3 - 1 = 26$ termes, correspondant à l'ensemble des modes d'aliasing qui peuvent intervenir sur la grille Ω_0 . Cependant, par symétrie, la

somme peut être réduite à trois termes. L'ensemble Λ_0 est en effet composé de trois types d'éléments :

$$\begin{aligned}
6 \text{ modes 1D} & \quad \begin{bmatrix} (0, 0, \pm 2k_c) \\ (0, \pm 2k_c, 0) \\ (\pm 2k_c, 0, 0) \end{bmatrix} \\
12 \text{ modes 2D} & \quad \begin{bmatrix} (0, \pm 2k_c, \pm 2k_c) \\ (\pm 2k_c, 0, \pm 2k_c) \\ (\pm 2k_c, \pm 2k_c, 0) \end{bmatrix} \\
8 \text{ modes 3D} & \quad \begin{bmatrix} (\pm 2k_c, \pm 2k_c, \pm 2k_c) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Par intégration sur la sphère S_k , deux éléments d'une même classe produisent une contribution à l'erreur identique. Ainsi, l'équation (3.109) se simplifie suivant,

$$\mathcal{E}_{alias}(k) = 6\mathcal{E}_{alias}^{1D}(k) + 12\mathcal{E}_{alias}^{2D}(k) + 8\mathcal{E}_{alias}^{3D}(k) \tag{3.111}$$

où $\mathcal{E}_{alias}^{1D}(k)$, $\mathcal{E}_{alias}^{2D}(k)$ et $\mathcal{E}_{alias}^{3D}(k)$ sont les contributions à l'erreur d'un des modes 1D, 2D et 3D, respectivement.

Erreur de filtrage

La densité spectrale de puissance associée à l'erreur de filtrage est donnée par l'expression,

$$\mathcal{E}_{sf}(k) = 4\pi k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8\pi^3}{V} \langle \mathbf{E}_{sf,i}(\mathbf{k}) \mathbf{E}_{sf,i}^*(\mathbf{k}) \rangle \right\}_{S_k} \tag{3.112}$$

où la norme de l'erreur de filtrage s'écrit dans l'hypothèse d'une turbulence homogène isotrope,

$$\langle \mathbf{E}_{sf,i}(\mathbf{k}) \mathbf{E}_{sf,i}^*(\mathbf{k}) \rangle = \alpha_f^2 H(\mathbf{k}) \left\{ [1 - \widehat{G}(\mathbf{k})] \widehat{G}(\mathbf{k}) \right\}^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \tag{3.113}$$

Le passage à la limite fournit directement la relation,

$$\mathcal{E}_{sf}(k) = 2\alpha_f^2 \left\{ [1 - \widehat{G}(\mathbf{k})] \widehat{G}(\mathbf{k}) \right\}^2 E(k) \tag{3.114}$$

dans laquelle l'équation $\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = E(k)(k^2\delta_{ij} - k_i k_j)/4\pi k^4$, reliant le tenseur spectral au spectre de l'énergie cinétique $E(k)$ pour une turbulence homogène isotrope, a été utilisée.

Le paramètre α_f est donné par le rapport entre σ , qui est pris proche de 1, et τ_f , qui correspond au pas de temps Δt choisi pour le calcul. Ce pas de temps est ici connecté à la taille des mailles Δ par le nombre de CFL :

$$\text{CFL} = \frac{u' \Delta t}{\Delta} \tag{3.115}$$

où u' est une vitesse caractéristique des fluctuations de vitesse. Celle-ci est évaluée à partir de l'énergie cinétique totale q avec,

$$u' = \sqrt{\frac{2}{3}q}, \quad \text{et} \quad q = \int_0^\infty E(k) dk \tag{3.116}$$

Le paramètre α_f peut ainsi être reformulé suivant,

$$\alpha_f = \frac{\sigma u'}{\Delta \cdot \text{CFL}} \tag{3.117}$$

Erreur de modélisation

La densité spectrale de puissance associée à l'erreur de modélisation du terme de sous-maille s'écrit,

$$\mathcal{E}_{sgs}(k) = 4\pi k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8\pi^3}{V} \langle E_{sgs,i}(\mathbf{k}) E_{sgs,i}^*(\mathbf{k}) \rangle \right\}_{S_k} \quad (3.118)$$

Le calcul de $\mathcal{E}_{sgs}(k)$ a pour fonction première de permettre la détermination de la précision d'un modèle de sous-maille. Cependant, il est aussi envisageable d'utiliser ce terme pour évaluer la précision des méthodes numériques. Si le modèle de sous-maille est supposé nul, *i.e.* si $\widehat{T}_{in}^0(\mathbf{k}) = 0$, la densité spectrale $\mathcal{E}_{sgs}(k)$ peut en effet s'interpréter comme une borne supérieure acceptable pour les erreurs numériques [40].

En s'appuyant sur les résultats obtenus pour l'erreur de différentiation et l'erreur d'aliasing, la densité spectrale de l'erreur de modélisation se met sous la forme,

$$\mathcal{E}_{sgs}(k) = 8\pi k^2 \left\{ k_n k_q \int \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}') \Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right]^2 d\mathbf{k}' \right\}_{S_k} \quad (3.119)$$

Le développement du carré faisant intervenir l'amplitude du filtre \widehat{G} :

$$\left[\widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right]^2 = \widehat{G}(\mathbf{k}')^2 \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 - 2\widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \widehat{G}(\mathbf{k})^2 \quad (3.120)$$

permet de scinder le second membre de (3.119) en trois intégrales du même type que celui décrit dans l'annexe C. On en déduit la formulation explicite,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{sgs}(k) = [B_1(k) + B_2(k)] & \left\{ \sum_{i,m,n} k_n^2 \right\}_{S_k} + 2B_3(k) \left\{ \sum_{i,m,n,p} \frac{k_m k_p}{k^2} k_n^2 \right\}_{S_k} \\ & + B_4(k) \left\{ \sum_{i,m,n,p,q} \frac{k_m k_p k_n k_q}{k^4} k_n k_q \right\}_{S_k} \end{aligned} \quad (3.121)$$

avec les fonctions B_i données par,

$$B_i(k) = F_{G^2,i}(\mathbf{k}) - 2\widehat{G}(\mathbf{k}) F_{G,i}(k) + \widehat{G}(\mathbf{k})^2 F_{Id,i}(k) \quad (3.122)$$

où la fonction identité $Id(k) = k$ a été introduite. Les fonctions F sont données dans l'annexe C.

3.2.2 Résultats

Les densités spectrales des erreurs numériques développées dans la section précédente sont maintenant évaluées pour différents algorithmes de différences finies et de filtrage sélectif. Un spectre de Von-Kármán de l'énergie cinétique turbulente est introduit et est utilisé pour calculer les densités spectrales des erreurs d'une méthode numérique d'ordre bas, d'un algorithme optimisé dans l'espace de Fourier, et d'un schéma standard d'ordre élevé. Afin d'effectuer une étude plus systématique des erreurs numériques, des limites de précision s'appuyant sur les densités spectrales des erreurs sont ensuite déterminées pour une large gamme de méthodes numériques. Ces limites seront reformulées pour chaque schéma en terme d'efficacité, définie ici comme le rapport entre la précision de l'algorithme et le nombre d'opérations à effectuer pour obtenir cette précision.

Spectre de Von-Kármán

L'énergie cinétique turbulente est décrite à l'aide d'un spectre de Von-Kármán de la forme [5],

$$E(k) = \frac{a(k/k_e)^4}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/6}} \quad (3.123)$$

où les constantes $k_e = 0.65 \text{ m}^{-1}$ et $a = 1.50 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$ sont choisies telles que le spectre $E(k)$ atteigne son maximum en $k = 1 \text{ m}^{-1}$, et que l'énergie cinétique totale q soit égale à $1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, avec,

$$q = \int_0^\infty E(k) dk \quad (3.124)$$

Le choix de la longueur de coupure Δ du filtre, qui coïncide avec la taille des mailles, est ensuite arbitraire, mais doit être tel que le nombre d'onde de coupure $k_c = \pi/\Delta$ se situe bien dans la zone inertielle du spectre. Dans cette étude, k_c est pris égal à la valeur utilisée par Ghosal [40], soit $k_c = 8$. Par conséquent, la taille des mailles est égale à $\pi/8$.

Densité spectrale des erreurs

Les densités spectrales des erreurs de différentiation $\mathcal{E}_{fd}(k)$, d'aliasing $\mathcal{E}_{al}(k)$, de filtrage $\mathcal{E}_{sf}(k)$ et de modélisation $\mathcal{E}_{sgs}(k)$ ont été calculées pour trois configurations de méthodes numériques. Afin d'illustrer les erreurs numériques pour une méthode d'ordre faible, la première configuration est défini par un schéma standard aux différences finies sur 3 points d'ordre 2, associé à un filtrage sélectif standard sur 3 points du même ordre. Afin d'évaluer la précision des méthodes d'ordre élevé, les spectres des erreurs ont également été calculés pour un algorithme standard aux différences finies sur 11 points d'ordre 10, avec un filtre standard sur 11 points d'ordre 10, et pour les différences finies et le filtre sélectif optimisés sur 11 points de Bogey & Bailly [14].

Les densités spectrales des erreurs de différentiation, d'aliasing, de filtrage et de modélisation, obtenues pour les différents algorithmes numériques considérés, sont tracées en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$, sur les figures 3.3.a, 3.3.b, 3.3.c et 3.3.d, respectivement.

La densité spectrale de l'erreur de différentiation sur la figure 3.3.a montre que les schémas sur 11 points, standards ou optimisés, produisent des erreurs nettement plus faibles que les schémas sur 3 points. En particulier, pour les nombres d'onde plus petits que $k\Delta = \pi/2$, l'écart entre les spectres d'erreurs est de plusieurs ordres de grandeur. Si on compare les résultats des algorithmes sur 11 points standards et optimisés, on observe que pour les nombres d'onde relativement grands ($\pi/4 < k\Delta < \pi/2$), l'erreur de différentiation des schémas optimisés est plus faible que celle des schémas standards. Pour des nombres d'onde plus petits, $k\Delta < \pi/4$, la tendance s'inverse car les schémas standards ont un ordre formel plus élevé. Le schéma aux différences finies standard est en effet d'ordre 10, tandis que les différences finies optimisés sont d'ordre 4. L'erreur des schémas optimisés reste cependant très faible, inférieure à 10^{-8} .

Les erreurs d'aliasing, sur la figure 3.3.b, présentent un comportement opposé aux erreurs de différentiation. La densité spectrale $\mathcal{E}_{al}(k)$ la plus petite est obtenue pour les schémas standards sur 3 points. Les spectres d'erreur déterminés pour les algorithmes sur 11 points standards et optimisés sont très proches, avec un écart par rapport au spectre des schémas sur

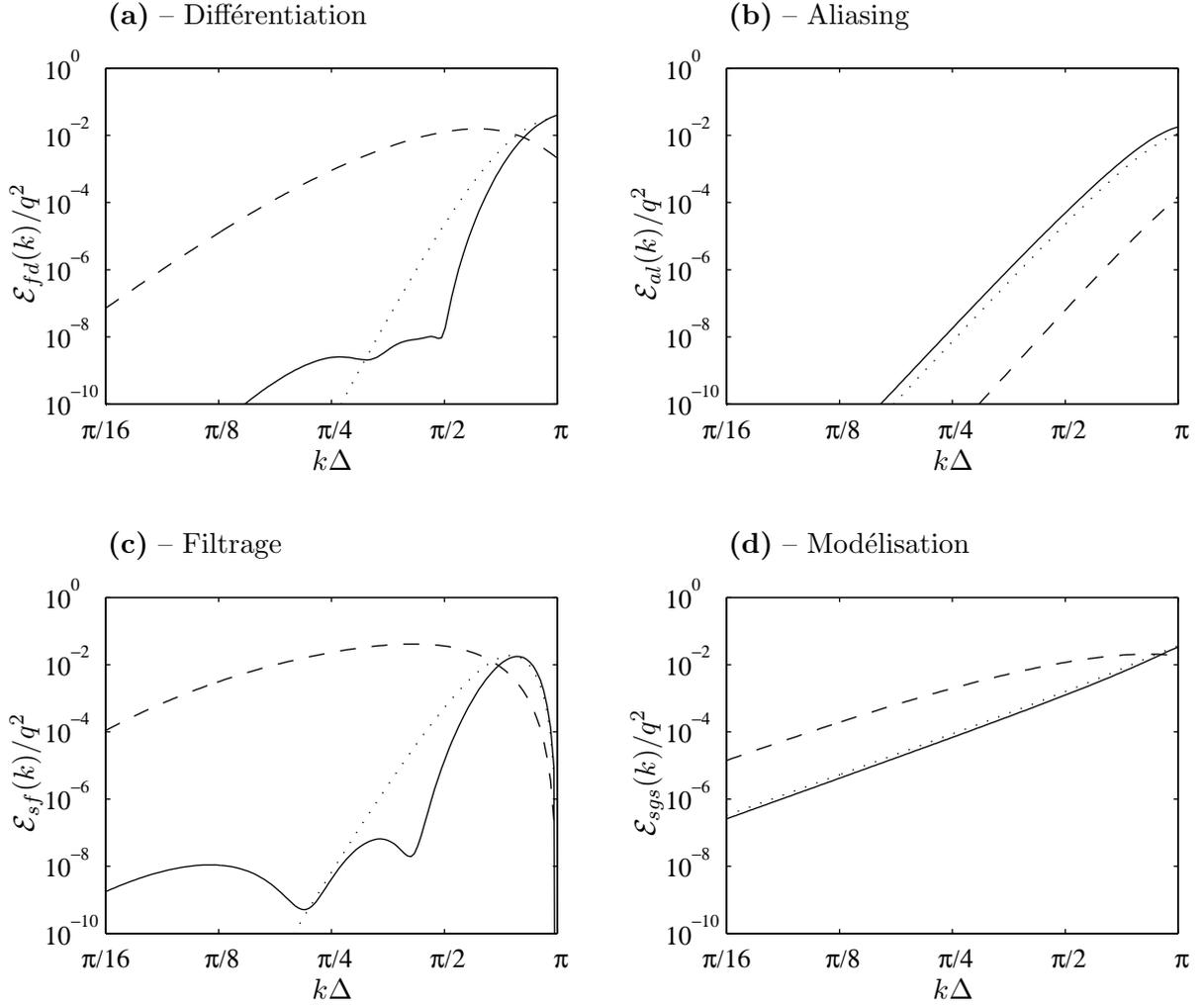


Figure 3.3: Densité spectrale des erreurs numériques en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$, pour les différences finies et le filtre sélectif : — — —, standards sur 3 points; ·····, standards sur 11 points; ———, optimisés sur 11 points de Bogey & Bailly [14]. (a) erreurs de différentiation $\mathcal{E}_{fd}(k)$; (b) erreurs d'aliasing $\mathcal{E}_{al}(k)$; (c) erreurs de filtrage $\mathcal{E}_{sf}(k)$; (d) erreurs de modélisation $\mathcal{E}_{sgs}(k)$. Les densités spectrales sont normalisées par le carré de l'énergie cinétique totale q .

3 points d'environ deux ordres de grandeur. Un raisonnement s'appuyant sur la dissipation des filtres sera proposé par la suite pour interpréter ces observations.

La figure 3.3.c donne les densités spectrales $\mathcal{E}_{sf}(k)$ des erreurs de filtrage. On remarque que l'erreur de filtrage est importante pour les schémas standards sur 3 points, dont le filtre est particulièrement dissipatif. Pour les algorithmes sur 11 points, les erreurs de filtrage sont majoritairement concentrées sur les nombres d'onde proches de la coupure du maillage, pour $\pi/2 < k\Delta < \pi$. À noter que pour $k\Delta$ compris entre $\pi/4$ et $\pi/2$, les algorithmes standards sur 11 points présentent une erreur de filtrage plus élevée que celle des schémas optimisés. Pour les nombres d'onde plus petits, tels que $k\Delta < \pi/4$, l'erreur de filtrage des algorithmes sur 11 points standards et optimisés est faible, et plus petite d'environ cinq ordres de grandeur que les erreurs des schémas standards sur 3 points.

On considère enfin la figure 3.3.d, où sont représentées les densités spectrales de l'erreur de modélisation. La densité spectrale de l'erreur de modélisation a été introduite dans la section 3.2.1 comme une borne supérieure acceptable des erreurs numériques. On remarque néanmoins que pour les schémas standards sur 3 points, les erreurs de différentiation et de filtrage sont du même ordre de grandeur que l'erreur de modélisation, et ceci sur l'ensemble du spectre. Les algorithmes sur 3 points semblent donc produire des erreurs numériques trop importantes pour une SGE. Les schémas sur 11 points, qu'ils soient standards ou optimisés, sont plus précis, et les erreurs de différentiation, de filtrage et d'aliasing dues à ces schémas sont plus faibles que les erreurs de modélisation sur une large gamme de nombres d'onde. Par exemple, pour les schémas optimisés, l'écart entre les erreurs numériques et les erreurs de modélisation est significatif pour les nombres d'onde $k\Delta < \pi/2$, discrétisés par plus de 4 points par longueur d'onde. Ce nombre d'onde correspond à la limite de précision obtenue en se basant sur la fonction de transfert du filtre et le nombre effectif du schéma aux différences finies [14].

Interprétation des erreurs d'aliasing

La densité spectrale de l'erreur d'aliasing $\mathcal{E}_{alias}(k)$ est fournie par la formulation (3.109). Afin d'interpréter les résultats de la figure 3.3.b, qui donne $\mathcal{E}_{alias}(k)$ pour différentes méthodes numériques, il est cependant plus simple de considérer l'expression de l'erreur d'aliasing $E_{alias,i}(\mathbf{k})$ donnée par l'équation (3.88). De cette manière il est en effet possible d'émettre l'hypothèse que l'erreur d'aliasing et la somme,

$$\Sigma(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \square}} \widehat{G}(\mathbf{k}') \widehat{G}(\mathbf{k}'') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{a}) \quad (3.125)$$

ont des tendances similaires quand le nombre d'onde \mathbf{k} varie. Pour simplifier le raisonnement, on considère maintenant que le système est monodimensionnel. Sur une grille 1-D, seulement deux modes d'aliasing sont possibles : $a = +2k_c$ et $a = -2k_c$. L'ensemble des nombres d'onde que le maillage peut supporter est par ailleurs réduit à l'intervalle $[-k_c, k_c]$. Il vient alors pour la somme $\Sigma(\mathbf{k})$:

$$\Sigma(k) = \sum_{\substack{a = \pm 2k_c \\ k', k'' \in [-k_c, k_c]}} \widehat{G}(k') \widehat{G}(k'') \delta(k - k' - k'' - a) \quad (3.126)$$

Supposons maintenant que le filtre est spectral, avec un nombre d'onde de coupure $k_l < k_c$. La fonction de transfert $G(k)$ du filtre est alors définie par l'expression,

$$G(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| < k_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.127)$$

En s'appuyant sur la définition de $\Sigma(k)$, il apparaît que pour un nombre d'onde k donné, les erreurs d'aliasing sont associées à l'interaction des couples de nombres d'onde k' et k'' tels que $k = k' + k'' \pm 2k_c$. Il est possible de montrer que pour les nombres d'onde non filtrés, de module inférieur au nombre d'onde de coupure du filtre, *i.e.* $|k| < k_l$, les nombres d'ondes k'

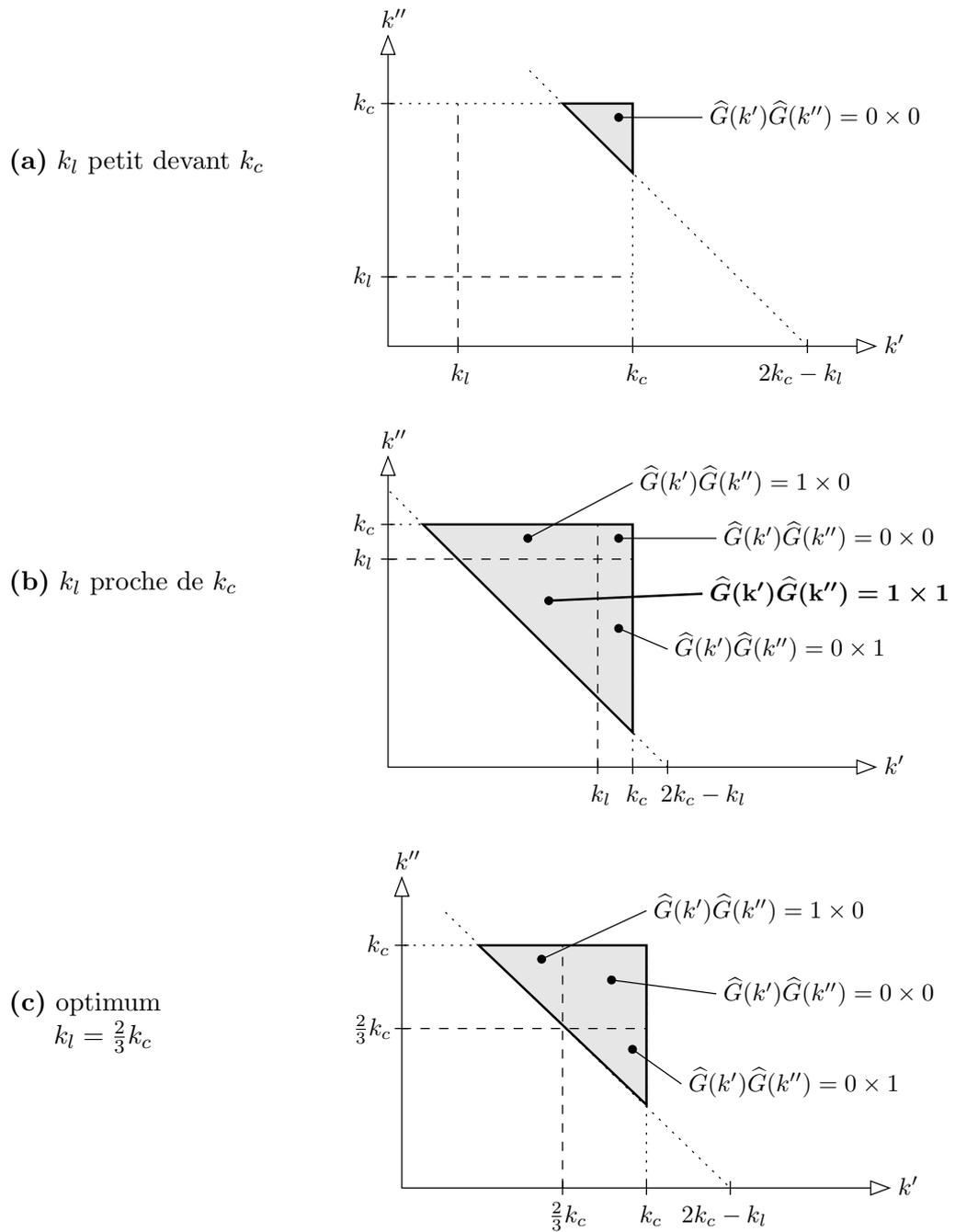


Figure 3.4: Illustration dans le cas monodimensionnel des erreurs d'aliasing et de la règle des $2/3$ de Orszag [22]. Pour les nombres d'onde k tels que $|k| < k_l$, les nombres d'onde k' et k'' positifs contribuant à l'erreur d'aliasing sont tracés dans le plan (k', k'') , pour différentes valeurs de k_l . Les nombres d'onde k' et k'' négatifs sont obtenus par symétrie par rapport à l'origine. (a) k_l petit devant k_c ; (b) k_l proche de k_c ; (c), choix optimal, $k_l = (2/3)k_c$.

et k'' qui interviennent dans la somme $\Sigma(k)$ sont alors tels que,

$$\begin{cases} k' + k'' < -2k_c + k_l \\ k' + k'' > 2k_c - k_l \\ k', k'' \in [-k_c, k_c] \end{cases} \quad (3.128)$$

Ces conditions définissent deux surfaces triangulaires situées dans les premier et troisième cadrans du plan (k', k'') .

Les figures 3.4.a, 3.4.b et 3.4.c donnent une vue schématique de ces surfaces dans le plan (k', k'') , pour k_l petit devant k_c , pour k_l proche de k_c , et pour le cas $k_l = 2/3k_c$, respectivement. Seulement une surface a été représentée. Le deuxième triangle peut être déterminé par symétrie par rapport à l'origine.

Pour k_l petit, sur la figure 3.4.a, les nombres d'ondes k' et k'' qui peuvent produire de l'aliasing sont tous supérieurs à k_l . Le produit $\widehat{G}(k')\widehat{G}(k'')$ est donc toujours nul dans $\Sigma(k)$. Ainsi, pour les nombres d'onde $|k| < k_l$ qui ne sont pas atténués par le filtre, l'erreur d'aliasing sera nulle.

Si k_l est supposé proche de k_c comme sur la figure 3.4.b, les surfaces triangulaires représentant des nombres k' et k'' créant de l'aliasing sont plus étendues. On observe trois zones pour lesquelles au moins un des deux vecteurs k' et k'' est supérieur au nombre d'onde de coupure k_l . Dans ces zones, le produit $\widehat{G}(k')\widehat{G}(k'')$ est alors nul. Il existe cependant une partie du triangle sur laquelle k' et k'' sont tous deux inférieurs à k_l , et pour laquelle la somme $\Sigma(k)$ n'étant pas nulle, des erreurs d'aliasing peuvent apparaître pour les nombres d'onde non filtrés.

La figure 3.4.c illustre un choix optimal de la coupure spectral k_l . La valeur de $k_l = (2/3)k_c$ est le plus grand nombre d'onde de coupure qu'il est possible de prendre, tout en ayant au moins un des deux nombres d'ondes k' et k'' qui soit supérieur à k_l , et qui implique alors que $\widehat{G}(k')\widehat{G}(k'') = 0$. Ce choix de $k_l = (2/3)k_c$ est en accord avec la règle des 2/3 de de-aliasing de Orszag [22].

Ces observations permettent de déterminer qualitativement l'influence de la forme du filtre sur l'erreur d'aliasing. L'erreur sera d'autant plus petite que la dissipation du filtre est grande, c'est à dire que k_l est petit. Un nombre d'onde de coupure supérieur à $(2/3)k_c$ induira par ailleurs des erreurs d'aliasing, l'erreur maximale étant atteinte pour un filtre spectral qui serait passe-bas jusqu'à la coupure du maillage ($k_l = k_c$).

En d'autres termes, plus la fonction de transfert $\widehat{G}(k)$ du filtre diffère de zéro pour $|k| > (2/3)k_c$, plus les erreurs d'aliasing sont importantes.

Limites de précision

Afin d'étudier de façon plus systématique l'influence du choix des méthodes de discrétisation sur les erreurs numériques, une limite de précision κ est construite à partir de la densité spectrale de l'erreur \mathcal{E} avec la définition,

$$\mathcal{E}(k) < 10^{-7}, \text{ si } |k| < \kappa \quad (3.129)$$

Trois limites de précision, κ_{fd} , κ_{al} et κ_{sf} , sont ainsi respectivement associées aux erreurs de différentiation \mathcal{E}_{fd} , d'aliasing \mathcal{E}_{al} et de filtrage \mathcal{E}_{sf} . Le taux d'efficacité des méthodes numériques est ensuite déterminée en divisant κ par le nombre $2n + 1$ de points du schéma.

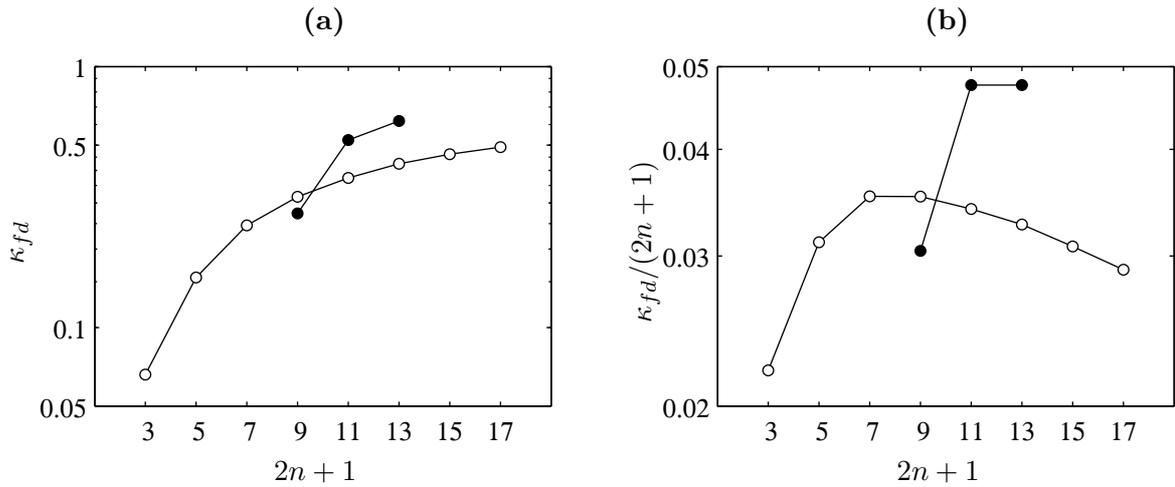


Figure 3.5: (a) Limite de précision de différentiation κ_{fd} , et (b) taux d'efficacité de différentiation $\kappa_{fd}/(2n+1)$, des schémas standards centrés et des schémas optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14], en fonction du nombre de points $2n+1$ des algorithmes. —○—, schémas standards; —●—, schémas optimisés.

Le coût, en terme de nombre d'opérations à effectuer pour une limite de précision κ , est ainsi pris en compte. Une méthode numérique sera alors d'autant plus efficace que $\kappa/(2n+1)$ est grand.

Les limites de précision et les taux d'efficacité pour la différentiation, l'aliasing et le filtrage ont été calculés pour des schémas aux différences finies standards possédant de 3 à 17 points, associés à un filtre standard ayant le même nombre de points. Les taux d'efficacité des différences finies optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14] ont également été déterminés. Les filtres utilisés avec ces différences finies sont les filtres optimisés possédant le même nombre de points.

Les limites de précision de différentiation κ_{fd} des algorithmes standards et optimisés sont tracées sur la figure 3.5.a, en fonction du nombre de points $2n+1$ des schémas. On observe que la limite de précision augmente avec la taille des molécules de discrétisation, que les schémas soient standards ou optimisés. Les algorithmes optimisés sur 11 et 13 points présentent par ailleurs des limites plus grandes que celles obtenues pour l'ensemble des schémas standards. Ces résultats sont prévisibles car l'augmentation du nombre de points d'un algorithme ou l'optimisation des coefficients d'un schéma sont justement utilisées pour améliorer la précision des méthodes numériques. Les conclusions sont cependant différentes quand le coût informatique est pris en compte.

Le taux d'efficacité de différentiation $\kappa_{fd}/(2n+1)$ est tracé sur la figure 3.5.b pour les schémas standards et optimisés, en fonction du nombre de points $2n+1$ des algorithmes. Pour $2n+1 \leq 7$, l'efficacité des schémas standards augmente avec le nombre de points. Le rapport des taux d'efficacité est par exemple de 1.6 entre les schémas sur 7 points et ceux sur 3 points. Il apparaît ensuite que les schémas sur 7 et 9 points ont un taux d'efficacité identique. Ces méthodes numériques sont donc équivalentes en terme de coût informatique nécessaire à l'obtention d'une précision donnée du point de vue de la différentiation. Au-delà de $2n+1 = 9$, l'efficacité décroît avec le nombre de points de l'algorithme. Cette tendance

traduit le fait que l'utilisation de schémas avec un nombre plus élevé de points augmente la limite de précision, mais que cette augmentation ne suffit pas à compenser le surcoût informatique engendré par l'ajout de points aux molécules de discrétisation. Du point de vue des erreurs de différentiation, parmi les schémas standards, ceux sur 7 et 9 points sont ainsi les plus efficaces.

Les taux d'efficacité de différentiation des schémas optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14] sont également donnés sur la figure 3.5.b. Pour les schémas sur 9 points, l'efficacité est inférieure à celle des schémas standards sur 7 et 9 points. On observe cependant que les schémas optimisés sur 11 et 13 points ont un taux d'efficacité identique, qui est supérieur à ceux obtenus pour les algorithmes standards. Le rapport entre le taux d'efficacité des schémas optimisés et le taux d'efficacité la plus grande des schémas standards (pour $2n + 1 = 7$ ou 9) est de 1.3. Le gain est donc significatif.

Ce résultat peut être illustré en terme de temps de calcul. Supposons par exemple qu'une simulation effectuée avec des schémas standards sur 9 points sur un maillage de maille Δ_9 , fournisse une solution avec une précision de différentiation donnée. Pour obtenir la même précision avec des schémas optimisés sur 11 points, des mailles plus grandes sont utilisées. La taille des mailles, notée Δ_{11} , doit alors être égale à $(\kappa_{fd}^{11o}/\kappa_{fd}^{9s})\Delta_9$, où κ_{fd}^{11o} et κ_{fd}^{9s} sont les limites de précision de différentiation des schémas optimisés sur 11 points et des schémas standards sur 9 points. En trois dimensions, le nombre d'opérations engendrées par le calcul est proportionnel au nombre de points des schémas, multiplié par le nombre de noeuds de la grille, L^3/Δ^3 . Le coût informatique est donc proportionnel à $9/\Delta_9^3$, et $11/\Delta_{11}^3$ pour les calculs avec des algorithmes standards et optimisés. Le rapport entre ces deux quantités, $9/11(\kappa_{fd}^{11o}/\kappa_{fd}^{9s})^3$, vaut ici 3.7. Ainsi, du point de vue des erreurs de différentiation, l'utilisation des schémas optimisés sur 11 points au lieu des schémas standards sur 9 points permet de réduire le nombre d'opérations d'un facteur 3.7.

Les limites de précision d'aliasing κ_{al} et de filtrage κ_{sf} sont maintenant représentées sur les figures 3.6.1a et 3.6.2a pour les schémas standards et optimisés, en fonction du nombre de points $2n + 1$ des algorithmes. À l'instar de la limite de précision de différentiation sur la figure 3.5.b, la limite de précision de filtrage augmente avec la taille des molécules de discrétisation et l'optimisation des coefficients. De manière opposée, la limite de précision d'aliasing des schémas optimisés et standards diminue quand $2n + 1$ augmente. Les erreurs d'aliasing sont en effet d'autant plus faibles que le filtre sélectif est dissipatif. Les schémas d'ordre élevé avec un grand nombre de points engendrent donc plus d'erreurs que les schémas plus petits, comme les algorithmes sur 3 points par exemple.

Les taux d'efficacité de filtrage $\kappa_{sf}/(2n + 1)$ et d'aliasing $\kappa_{al}/(2n + 1)$ sont tracés en fonction du nombre de points $2n + 1$ des schémas, sur la figure 3.6.1b pour les algorithmes standards, et sur la figure 3.6.2b pour les schémas optimisés.

Le taux d'efficacité de filtrage $\kappa_{sf}/(2n + 1)$ des schémas standards présente une tendance similaire au taux d'efficacité de différentiation. Elle augmente en effet dans un premier temps avec le nombre de points des schémas ($3 < 2n + 1 < 11$). Un maxima est ensuite observé pour les algorithmes sur 11 points, dont l'efficacité est cinq fois plus grande que celle des schémas sur 3 points. Pour un nombre de points supérieur à 11, le taux d'efficacité décroît légèrement quand la taille des molécules de discrétisation est augmentée. La figure 3.6.1b donne également le taux d'efficacité d'aliasing $\kappa_{al}/(2n + 1)$ des schémas standards. Une décroissance de l'effi-

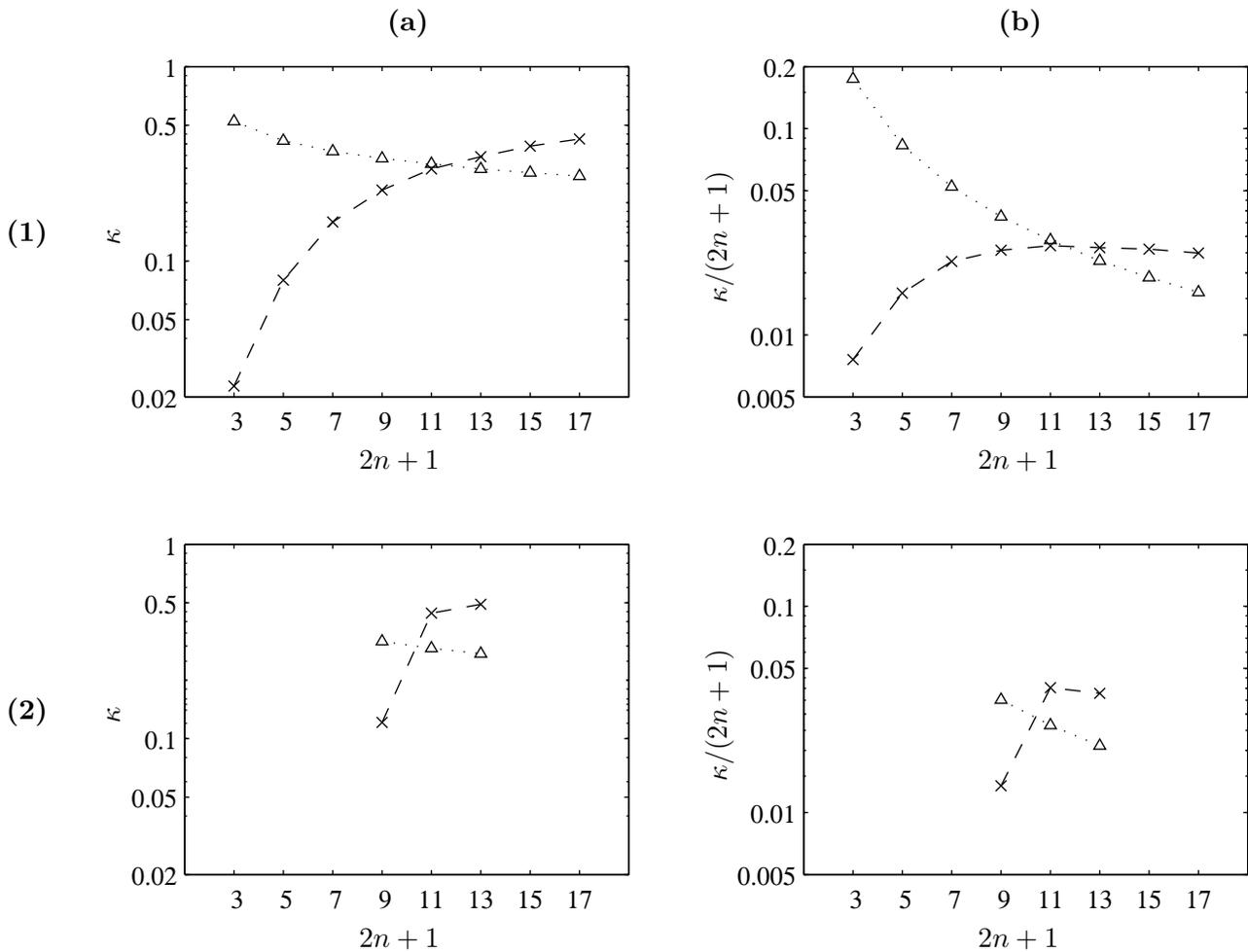


Figure 3.6: (a) Limite de précision d'aliasing κ_{al} et de filtrage κ_{sf} , et (b) taux d'efficacité d'aliasing $\kappa_{al}/(2n+1)$, et de filtrage $\kappa_{sf}/(2n+1)$, pour : (1) les schémas standards centrés et, (2) les schémas optimisés sur 9, 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14], en fonction du nombre de points $2n+1$ des algorithmes. $\cdots\triangle\cdots$, aliasing ; $- \times -$, filtrage.

cacité avec le nombre de points des algorithmes est observée.

Les efficacités de filtrage $\kappa_{sf}/(2n+1)$ et d'aliasing $\kappa_{al}/(2n+1)$ des schémas standards ont ainsi des tendances inversées quand le nombre de points des algorithmes augmente. Par exemple, pour les schémas sur 3 points, la limite de précision est due aux erreurs de filtrage. Dans le cas contraire, pour les schémas moins dissipatifs sur 17 points, la dissipation est faible et l'aliasing devient le facteur limitant. On observe cependant que pour les algorithmes standards sur 11 et 13 points, les taux d'efficacité de filtrage et d'aliasing ont des valeurs similaires. Ces schémas présentent donc un équilibre entre dissipation et aliasing. Les erreurs d'aliasing diminuent en effet avec la dissipation du filtre, mais en contrepartie une dissipation numérique excessive affectera une part significative du contenu spectral de la solution, et tendra à dégrader la précision du calcul.

Les résultats sont similaires pour les schémas optimisés, dont les taux d'efficacité d'aliasing et de filtrage sont tracés sur la figure 3.6.2b. Le taux d'efficacité d'aliasing décroît avec le nombre de points des algorithmes. Les valeurs atteintes sont par ailleurs très proches de celles

obtenues avec les schémas standards.

L'étude du taux d'efficacité de filtrage montre que les schémas optimisés sur 9 points sont moins efficaces que la plupart des schémas standards. À titre indicatif, le rapport entre le taux d'efficacité de filtrage des algorithmes standards sur 9 points, et le taux d'efficacité de ceux optimisés sur 9 points, est de 2 environ. Les schémas optimisés sur 11 et 13 points ont toutefois des efficacités supérieures à celles des algorithmes standards. Le rapport avec l'efficacité de filtrage la plus grande obtenue pour les schémas standards pour $2n + 1 = 11$ est ainsi de 1.5.

Les schémas optimisés sur 11 et 13 points apparaissent donc comme étant bien adaptés à la SGE d'un cube de turbulence, puisqu'ils sont plus efficaces que les schémas standards. Les algorithmes optimisés sur 11 et 13 points présentent néanmoins un déséquilibre entre la dissipation du filtrage et les erreurs d'aliasing. On observe sur la figure 3.6.2b, que les efficacités de filtrage et d'aliasing de ces schémas ne coïncident pas. Il serait donc intéressant de développer des schémas optimisés ne présentant pas ces défauts. En particulier, les filtres pourraient être plus dissipatifs dans la partie haute du spectre, pour $2\pi/3 < k\Delta < \pi$, afin de réduire les erreurs d'aliasing.

3.3 Dissipations visqueuse et numérique

Lors d'une simulation numérique, l'application d'un filtre discret introduit nécessairement une dissipation artificielle sur l'ensemble des échelles résolues. L'impacte sur les grandes échelles est *a priori* faible, puisque l'ordre du filtre assure que la dissipation converge rapidement vers zéro quand le nombre d'onde k tend vers zéro. Pour des nombres d'onde plus grands, proches de la coupure du maillage, l'énergie extraite du calcul par le filtre peut cependant devenir prépondérante par rapport à l'énergie dissipée par la viscosité. Le nombre de Reynolds de l'écoulement étant caractérisé par les phénomènes visqueux, il est donc intéressant de quantifier l'influence relative des dissipations visqueuse et numérique lors d'une simulation des grandes échelles.

Dans cette partie, un bilan d'énergie faisant apparaître les différents mécanismes de dissipation est d'abord dérivé à partir du système discret introduit dans la section 3.1.2. Un spectre de l'énergie cinétique de Von-Kármán & Saffman est alors introduit, afin d'évaluer l'énergie dissipée par le filtrage, en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement.

3.3.1 Bilan de l'énergie cinétique

L'objectif est d'obtenir l'équation qui régit l'évolution de l'énergie cinétique du système discret. Le bilan d'énergie fait en effet intervenir des mécanismes de dissipations visqueuse et numérique.

On considère la simulation des grandes échelles introduite dans la section 3.1, du cube de turbulence limité au domaine Ω . Le point de départ de l'obtention du bilan d'énergie est l'équation (3.59), qui modélise le système discrétisé. Afin de pouvoir manipuler des fonctions continues, cette expression est interpolée dans l'espace \mathcal{H}_0 avec l'opérateur \mathcal{C} . Il vient ainsi,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta x_j} (v_i v_j) + \frac{\delta p^*}{\delta x_i} - \nu \frac{\delta^2 v_i}{\delta x_k^2} = -\alpha_f (1 - G) \star v_i + \frac{\delta}{\delta x_j} (\mathcal{T}_{ij}^d) \quad (3.130)$$

De plus, afin de se concentrer uniquement sur les dissipations visqueuse et numérique, le terme lié au modèle de sous-maille est supposé nul. La résolution numérique est également considérée comme étant idéale. Dans ce cas, les composantes v_i de la solution numérique interpolée sont égales aux composantes de la solution continue filtrée $\bar{\mathbf{u}}$. L'équation (3.130) s'écrit alors,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\delta \bar{p}^*}{\delta x_i} - \nu \frac{\delta^2 \bar{u}_i}{\delta x_k^2} = -\alpha_f D \star \bar{u}_i \quad (3.131)$$

où $D = 1 - G$.

L'obtention du bilan de l'énergie cinétique est décrite en détails dans l'annexe C.4 et fournit finalement l'équation :

$$\frac{\partial \tilde{E}(k)}{\partial t} = \tilde{T}(k) - \underbrace{2\nu \tilde{k}^2 \tilde{E}(k)}_{\mathcal{D}_\nu(k)} - \underbrace{2\alpha_f [1 - \hat{G}(\mathbf{k})] \tilde{E}(k)}_{\mathcal{D}_{sf}(k)} \quad (3.132)$$

où le terme $\tilde{T}(k)$ est associé aux corrélations triples de vitesse. La quantité $\tilde{E}(k) = \hat{G}(\mathbf{k})^2 E(k)$ correspond à la densité spectrale de l'énergie cinétique du champ de vitesse filtrée, où $E(k)$ est la densité spectrale de l'énergie cinétique de la vitesse non filtrée. Ce bilan fait par ailleurs apparaître deux termes linéaires : $\mathcal{D}_\nu(k)$ pour la dissipation visqueuse, et $\mathcal{D}_{sf}(k)$, qui donne accès à la dissipation introduite artificiellement par l'opération de filtrage.

3.3.2 Spectre de Von-Kármán & Saffman

Afin d'étudier l'influence relative des dissipations visqueuse et numérique, un spectre de Von-Kármán & Saffman est retenu ici pour décrire l'énergie cinétique d'une turbulence homogène isotrope, avec,

$$E(k) = A E_e \left(\frac{k}{k_e} \right) E_\eta \left(\frac{k}{k_\eta} \right) \quad (3.133)$$

où,

$$E_e \left(\frac{k}{k_e} \right) = \frac{a(k/k_e)^4}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/6}} \quad (3.134)$$

$$E_\eta \left(\frac{k}{k_\eta} \right) = \exp \left[-\frac{9}{4} \left(\frac{k}{k_\eta} \right)^{4/3} \right] \quad (3.135)$$

La constante de normalisation A est choisie de manière à avoir une énergie cinétique totale q égale à $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. On rappelle que Δ est la taille des mailles, et qu'elle coïncide avec la longueur de coupure du filtre.

Le nombre d'onde k_e correspond aux échelles porteuses de la plus grande partie de l'énergie cinétique, et k_η est associé à l'échelle de Kolmogorov. Le spectre $E(k)$ présente une zone inertielle avec $E(k) \sim k^{-5/3}$ pour $k_e \ll k \ll k_\eta$, et contient également les nombres d'onde qui précèdent cette zone avec $k \sim k^4$ pour $k \rightarrow 0$. Le nombre de Reynolds est construit ici sur l'échelle intégrale et la vitesse caractéristique u' :

$$\text{Re}_{L_f} = \frac{u' L_f}{\nu}, \quad \text{avec} \quad u' = \sqrt{\frac{2}{3} q} \quad (3.136)$$

Tableau 3.1: Paramètres des spectres de Von-Kármán & Saffman de l'énergie cinétique $E(k)$ pour différents nombres de Reynolds. L'échelle de Kolmogorov est fixée à $k_\eta = 10^5 \text{ m}^{-1}$, et l'énergie cinétique totale à $q = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$.

Re_{L_f}	k_e	L_f (m)	$a(\text{m}^3\text{s}^{-2})$
10^3	31.03	2.4×10^{-2}	3.18×10^{-2}
10^4	3.06	2.4×10^{-1}	3.18×10^{-1}
10^5	0.31	2.4	3.18

où l'échelle intégrale L_f est donnée par,

$$L_f = \frac{3\pi}{4} \frac{\int_0^\infty E(k)/k dk}{\int_0^\infty E(k) dk} \quad (3.137)$$

3.3.3 Lois d'évolution des dissipations visqueuses et numériques

L'évolution des dissipations visqueuse et numérique, quand le nombre de Reynolds varie, est maintenant étudiée.

Modification du nombre de Reynolds

Le spectre de l'énergie cinétique (3.133) de Von-Kármán & Saffman est construit à partir de plusieurs paramètres qui influent sur le nombre de Reynolds Re_{L_f} . Dans cette étude, on fait varier le nombre de Reynolds en suivant une procédure analogue à celle utilisée pour la simulation numérique des jets [15]. Pour un jet rond, le nombre de Reynolds de l'écoulement étant calculé avec la vitesse d'éjection U_j et le diamètre de la buse D , *i.e.* $\text{Re}_D = U_j D / \nu$, le nombre de Reynolds peut alors être en effet changé en modifiant le diamètre de la buse, tout en gardant une vitesse d'éjection constante. La grille est aussi définie de manière à discrétiser le diamètre du jet avec un nombre de points fixé.

Par analogie, la valeur du nombre de Reynolds, $\text{Re}_{L_f} = u' L_f / \nu$, du spectre de Von-Kármán & Saffman est imposée par un choix adéquat de l'échelle intégrale L_f , tout en gardant l'énergie cinétique totale q constante (ou encore $u' = \text{cte}$) et en fixant la discrétisation de l'échelle intégrale (soit $L_f / \Delta = \text{cte}$).

Afin d'illustrer cette procédure de modification du nombre de Reynolds, trois configurations d'écoulements sont proposées. L'échelle de Kolmogorov et l'énergie cinétique totale sont fixées à $k_\eta = 10^5 \text{ m}^{-1}$ et $q = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Le nombre d'onde k_e est choisie de manière à obtenir une échelle intégrale L_f , qui conduise à un nombre de Reynolds Re_{L_f} donné. Le maillage est défini en imposant que l'échelle intégrale soit discrétisée par un nombre de points constant, avec $L_f / \Delta = 16$. Les paramètres des spectres fournis à partir de ces critères pour des nombres de Reynolds Re_{L_f} de 10^3 , 10^4 et 10^5 , sont rassemblés dans le tableau 3.1, et les spectres sont tracés sur la figure 3.7.a, en fonction du nombre d'onde k . On observe que le maximum d'énergie, qui est atteint au voisinage de l'échelle intégrale, est situé à un nombre d'onde d'autant plus petit que le nombre de Reynolds est grand.

Les densités spectrales de l'énergie sont en outre représentées sur la figure 3.7.b, en fonction du nombre d'onde normalisé par la taille des mailles $k\Delta$. La coupure du maillage est

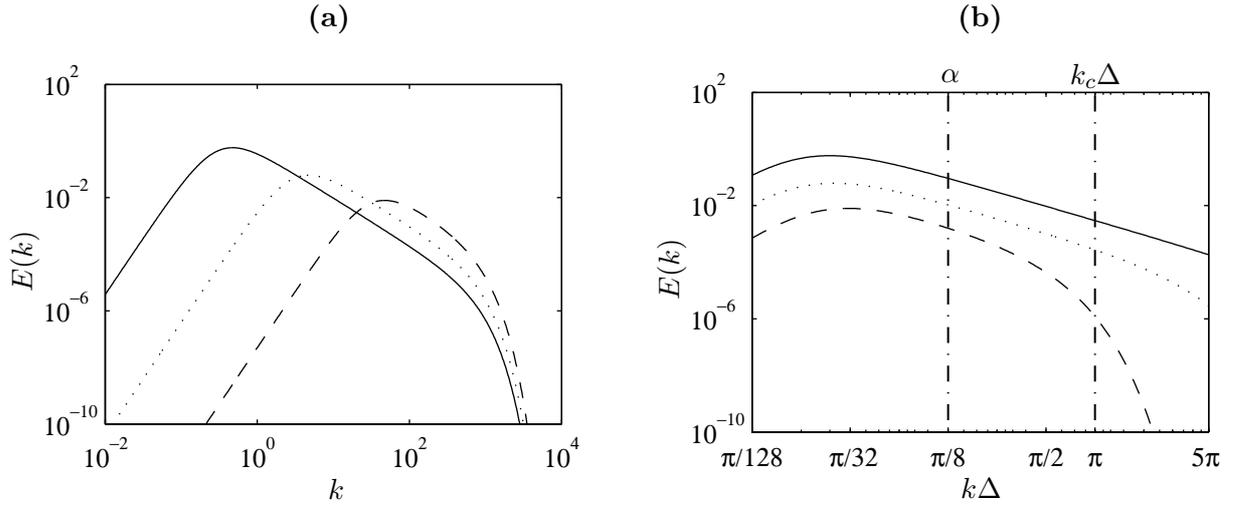


Figure 3.7: Spectres de Von-Kármán & Saffman de l'énergie cinétique $E(k)$ pour différents nombres de Reynolds, en fonction : (a) du nombre d'onde k et, (b) du nombre d'onde $k\Delta$ normalisé par la taille des mailles. — — —, $Re_{L_f} = 10^3$; ·····, $Re_{L_f} = 10^4$; ———, $Re_{L_f} = 10^5$. La coupure du maillage $k\Delta = \pi$ est également indiquée.

également indiquée à $k\Delta = k_c\Delta = \pi$. Les nombres d'onde tels que $k\Delta > \pi$ correspondent aux échelles de sous-maille.

Dissipation visqueuse

La dissipation visqueuse a été obtenue dans le bilan de l'énergie cinétique (3.132), et est définie par la relation,

$$\mathcal{D}_\nu(k) = 2\nu\tilde{k}^2\widehat{G}(k)^2E(k) \quad (3.138)$$

dans laquelle le spectre de Von-Kármán & Saffman (3.133) est introduit,

$$\mathcal{D}_\nu(k) = 2\nu\tilde{k}^2\widehat{G}(k)^2AE_e\left(\frac{k}{k_e}\right)E_\eta\left(\frac{k}{k_\eta}\right) \quad (3.139)$$

L'objectif est de déterminer la dissipation visqueuse pour une discrétisation fixée des échelles turbulentes, c'est à dire pour un nombre de points par longueur d'onde fixé ($k\Delta = \text{cte}$). On s'intéresse donc à l'évolution de la quantité $\mathcal{D}_\nu(\alpha/\Delta)$, où α est une constante telle que $k\Delta = \alpha$, quand Re_{L_f} varie, avec $u' = \text{cte}$, et $L_f/\Delta = \text{cte}$. Par exemple, sur la figure 3.7.b, la constante α est égale à $\pi/8$ et correspond aux échelles qui sont discrétisées par 16 points de maillage.

La dissipation visqueuse pour un nombre de points par longueur d'onde fixé, peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{D}_\nu\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right) = 2\nu\tilde{k}_{\alpha/\Delta}^2\left[\widehat{G}\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)\right]^2AE_e\left(\frac{\alpha}{k_e\Delta}\right)E_\eta\left(\frac{\alpha}{k_\eta\Delta}\right) \quad (3.140)$$

où le nombre d'onde effectif associé au nombre d'onde α/Δ , est noté $\tilde{k}_{\alpha/\Delta}$. Si l'échelle de Kolmogorov est maintenant supposée très petite devant la taille des mailles, la grandeur $k_\eta\Delta$ est alors très grande devant 1, et il est possible de considérer que le coefficient $E_\eta(\alpha/k_\eta\Delta)$ est

constant. De plus, le nombre d'onde k_e caractérise les échelles turbulentes pour lesquelles le spectre atteint son maximum. Ces échelles les plus énergétiques sont également données par l'échelle intégrale L_f . Ce raisonnement conduit à écrire que k_e varie comme le rapport $1/L_f$, ou en d'autres termes $k_e \sim 1/L_f$. Multiplier cette relation par Δ montre alors que $k_e \Delta$ est proportionnel au facteur Δ/L_f , qui est par hypothèse constant. On a donc $E_e(\alpha/k_e \Delta) \sim \text{cte}$. Il vient ainsi pour la dissipation visqueuse la relation d'équivalence,

$$\mathcal{D}_\nu \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim A \tilde{k}_{\alpha/\Delta}^2 \left[\widehat{G} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \right]^2 \quad (3.141)$$

En outre, la constante de normalisation du spectre A est proportionnelle à u'^5/ϵ (cf. [5]), où $\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk$ est la dissipation. Comme par ailleurs on a $\epsilon \sim u'^3/L_f$, soit $\epsilon \sim u'^3 \Delta$, le paramètre A est proportionnel à $u'^2 \Delta$. La dissipation \mathcal{D}_ν pour un nombre de points par longueur d'onde fixé suit ainsi la loi,

$$\mathcal{D}_\nu \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim \Delta \tilde{k}_{\alpha/\Delta}^2 \left[\widehat{G} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \right]^2 \quad (3.142)$$

La fonction de transfert \widehat{G} du filtre, qui est de la forme,

$$\widehat{G} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) = 1 - \sum_{r=-n}^n d_r \exp \left[ir \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \Delta \right] \quad (3.143)$$

ne dépend pas de la taille des mailles Δ . De la même manière, il est possible de montrer que le nombre d'onde effectif $\tilde{k}_{\alpha/\Delta}$ est constant. La dissipation visqueuse est ainsi directement proportionnelle à la taille des mailles, soit $\mathcal{D}_\nu(\alpha/\Delta) \sim \Delta$. Comme la discrétisation de l'échelle intégrale est supposée constante ($L_f/\Delta = \text{cte}$), alors L_f est inversement proportionnelle à Δ , soit pour \mathcal{D}_ν :

$$\mathcal{D}_\nu \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim \frac{1}{L_f} \quad (3.144)$$

Finalement, en s'appuyant sur la définition du nombre de Reynolds $\text{Re}_{L_f} = u' L_f / \nu$, la loi d'évolution de la dissipation visqueuse est donnée par l'inverse du nombre de Reynolds :

$$\mathcal{D}_\nu \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim \frac{1}{\text{Re}_{L_f}} \quad (3.145)$$

pour un nombre de points par longueur d'onde fixé, avec $u' = \text{cte}$, et $L_f/\Delta = \text{cte}$.

Dissipation numérique

Une démarche identique est menée pour la dissipation numérique $\mathcal{D}_{sf}(k)$, qui est donnée par l'expression,

$$\mathcal{D}_{sf}(k) = 2\alpha_f \left[1 - \widehat{G}(k) \right] \widehat{G}(k)^2 E(k) \quad (3.146)$$

soit encore, pour un nombre de points par longueur d'onde fixé,

$$\mathcal{D}_{sf} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) = 2\alpha_f \left[1 - \widehat{G} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \right] \left[\widehat{G} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \right]^2 E \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \quad (3.147)$$

Un raisonnement similaire à celui-ci utilisé pour la dissipation visqueuse, montre que $E(\alpha/\Delta)$ varie comme Δ , tandis que les termes associés au filtrage sont constants. La dissipation numérique suit donc la loi d'évolution :

$$\mathcal{D}_{sf} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim \alpha_f \Delta \quad (3.148)$$

où le coefficient α_f , qui a été défini dans la section 3.2.1, est de la forme σ/τ_f . La constante σ est proche de 1, et τ_f est égal au pas de temps Δt de la simulation, qui est déterminé par le nombre de CFL = $u'\Delta t/\Delta$. Le coefficient α_f est donc inversement proportionnel à la taille des mailles, en effet on a,

$$\alpha_f = \frac{\sigma u'}{\Delta \cdot \text{CFL}} \sim \frac{1}{\Delta} \quad (3.149)$$

Cette relation permet de conclure que la dissipation numérique, pour un nombre de points par longueur d'onde donné, ne varie pas avec le nombre de Reynolds,

$$\mathcal{D}_{sf} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) \sim \text{cte} \quad (3.150)$$

sous réserve que $u' = \text{cte}$, et $L_f/\Delta = \text{cte}$.

Les expressions (3.145) et (3.150) sur l'évolution des dissipations visqueuse et numérique montrent que si le nombre de Reynolds est suffisamment bas, alors il est possible d'avoir $\mathcal{D}_\nu(\alpha/\Delta) \gg \mathcal{D}_{sf}(\alpha/\Delta)$. La dissipation du filtre est dans ce cas négligeable par rapport à la contribution de la dissipation visqueuse, et les transferts d'énergie dans la simulation sont donc très proches de ceux observés dans le cas réel. Cependant, la dissipation visqueuse est d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand, tandis que la dissipation numérique reste sensiblement constante. Il existe donc un seuil pour Re_{L_f} , au delà duquel la dissipation numérique devient prépondérante. Les mécanismes de dissipation dépendent alors directement des propriétés du filtre. Par conséquent, la qualité de la simulation est susceptible d'être dégradée.

3.3.4 Résultats pour des différences finies et des filtres discrets

Les dissipations visqueuse et numérique, qui sont données par les équations,

$$\mathcal{D}_\nu(k) = 2\nu \tilde{k}^2 \widehat{G}(k)^2 E(k) \quad (3.151)$$

$$\mathcal{D}_{sf}(k) = 2\alpha_f \left[1 - \widehat{G}(k) \right] \widehat{G}(k)^2 E(k) \quad (3.152)$$

sont calculées pour différentes méthodes numériques, à plusieurs nombres de Reynolds. Les configurations d'écoulements sont celles définies dans la section 3.3.3, pour les nombres de Reynolds $\text{Re}_{L_f} = 10^3$, $\text{Re}_{L_f} = 10^4$ et $\text{Re}_{L_f} = 10^5$.

Les dissipations visqueuse et numérique sont déterminées pour les méthodes numériques développées par Bogey & Bailly [14] : les différences finies optimisées sur 11 et 13 points respectivement associées aux filtres sélectifs optimisés sur 11 et 13 points sont considérées.

Les spectres de la dissipation visqueuse $\mathcal{D}_\nu(k)$ et de la dissipation numérique $\mathcal{D}_{sf}(k)$ sont tracés sur la figure 3.8, en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$, pour différents nombres de Reynolds. À noter que la dissipation numérique n'est fournie que pour le nombre de Reynolds $\text{Re}_{L_f} = 10^3$. Les spectres de $\mathcal{D}_{sf}(k)$ obtenus pour les nombres de Reynolds $\text{Re}_{L_f} = 10^4$ et $\text{Re}_{L_f} = 10^5$ se superposent en effet parfaitement au spectre pour $\text{Re}_{L_f} = 10^3$, et ne sont donc pas représentés.

Schémas optimisés sur 11 points

Les résultats obtenus avec les schémas optimisés sur 11 points sont tracés sur la figure 3.8.a. On observe que la dissipation numérique $\mathcal{D}_{sf}(k)$ est importante pour les nombres d'onde proche du nombre d'onde de coupure du maillage. Elle est particulièrement élevée pour $k\Delta$ compris entre $\pi/2$ et π , c'est à dire au-delà de la limite de précision des schémas, qui ont été construits de manière à résoudre des ondes possédant au moins quatre points par longueur d'onde [14]. Pour des nombres d'onde tels que $\pi/32 < k\Delta < \pi/2$, la dissipation numérique présente un palier, et reste comprise entre 10^{-5} et 10^{-4} . En-dessous de $k\Delta = \pi/32$, $\mathcal{D}_{sf}(k)$ décroît régulièrement quand le nombre d'onde tend vers zéro.

Les spectres de dissipation visqueuse obtenus pour les trois nombres de Reynolds étudiés sont également donnés sur la figure 3.8.a pour les schémas optimisés sur 11 points. Les spectres ont sensiblement la même allure. La dissipation visqueuse augmente comme $(k\Delta)^6$ pour $k\Delta < \pi/32$, puis comme $(k\Delta)^{2-5/3}$ pour $\pi/32 < k\Delta < \pi/2$. Les spectres sont en effet proportionnels à $\tilde{k}^2 \widehat{G}(k)^2 E(k)$, qui varie comme $k^2 k^4 = k^6$ quand $k \rightarrow 0$. En outre, dans la zone inertielle, pour $k > k_e$, on a $\tilde{k}^2 \widehat{G}(k)^2 E(k) \sim k^{2-5/3}$. Pour des nombres d'onde $k\Delta$ proches de la coupure du maillage, compris entre $\pi/2$ et π , la dissipation visqueuse décroît avec $k\Delta$ pour atteindre zéro en $k\Delta = \pi$. Cette tendance s'explique par le fait que le spectre $\mathcal{D}_\nu(k)$ est proportionnel au nombre d'onde effectif \tilde{k} , qui tend vers zéro quand $k\Delta$ se rapproche de π .

Il est également intéressant de remarquer que quand le nombre d'onde converge vers zéro, l'écart entre dissipation visqueuse et numérique reste constant. L'équation (3.152), qui définit $\mathcal{D}_{sf}(k)$, montre que pour $k \rightarrow 0$, la dissipation numérique varie comme $k^P E(k) \sim k^{P+4}$, où P est l'ordre du filtre sélectif, qui vaut 2 pour le filtre optimisé sur 11 points de Bogey & Bailly [14]. Les dissipation visqueuses et numériques sont donc équivalentes quand le nombre d'onde tend vers zéro, car on a alors $\mathcal{D}_\nu(k) \sim \mathcal{D}_{sf}(k) \sim k^6$.

La loi d'évolution $\mathcal{D}_\nu(k) \sim 1/\text{Re}_{L_f}$, déduite dans la section 3.3.3, est également vérifiée sur la figure 3.8.a. L'écart entre les niveaux des dissipation visqueuses à un nombre $k\Delta$ donné diminue d'un ordre de grandeur quand le nombre de Reynolds est divisé par 10. Par exemple, pour $k\Delta x = \pi/32$, $\mathcal{D}_\nu(k)$ prend les valeurs 10^{-3} , 10^{-4} et 10^{-5} , pour les nombres de Reynolds $\text{Re}_{L_f} = 10^3$, $\text{Re}_{L_f} = 10^4$ et $\text{Re}_{L_f} = 10^5$, respectivement.

Si l'importance relative des dissipation visqueuse et numérique est maintenant étudiée, on note que pour le nombre de Reynolds le plus bas, $\text{Re}_{L_f} = 10^3$, l'énergie extraite aux nombres d'onde supérieurs à $\pi/2$ par le filtre sélectif, est comparable à l'énergie dissipée par la viscosité. Néanmoins, pour $k\Delta < \pi/2$, l'écart entre la dissipation visqueuse et la dissipation numérique est d'au moins un ordre de grandeur. Les nombres d'onde que l'on cherche à résoudre, avec au moins quatre points par longueur d'onde, sont ainsi peu affectés par le filtrage sélectif. Pour $\text{Re}_{L_f} = 10^4$, la dissipation visqueuse est plus faible, et son niveau devient similaire à celle de la dissipation numérique pour les nombres d'onde résolus, tels que $k\Delta < \pi/2$. Le problème est accentué pour le nombre de Reynolds le plus élevé, $\text{Re}_{L_f} = 10^5$. Dans ce cas, la dissipation numérique devient prépondérante sur l'ensemble du spectre. Par exemple, pour $k\Delta = \pi/32$, le rapport entre l'énergie dissipée par le filtre et l'énergie évacuée par la viscosité est d'environ un ordre de grandeur. L'évolution des dissipation visqueuse et numérique sont en outre équivalentes ($\sim k^2 E(k)$) quand le nombre d'onde tend vers zéro. La dissipation numérique est alors prépondérante sur quasiment l'intégralité des échelles résolues. Les

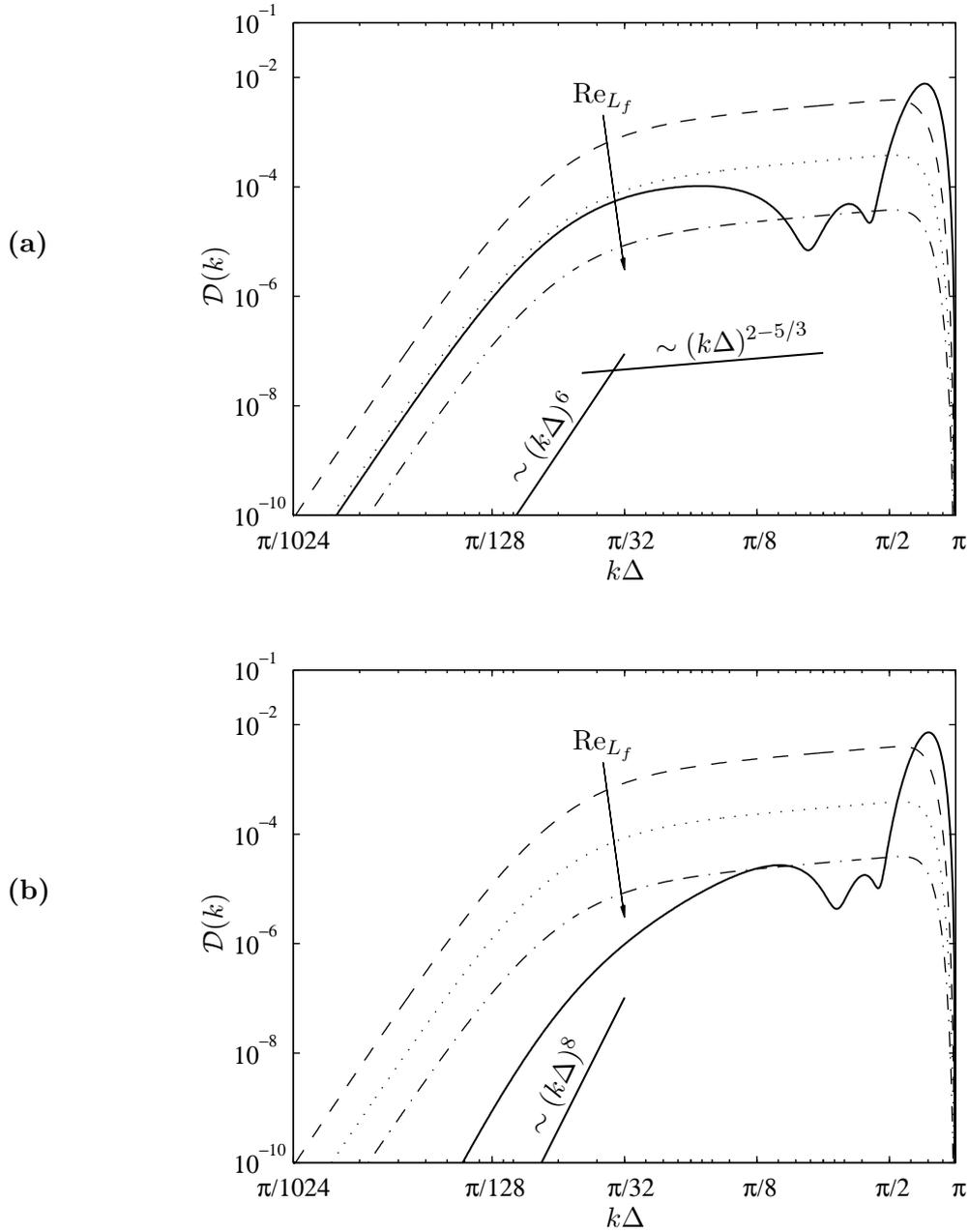


Figure 3.8: Spectres de la dissipation visqueuse $\mathcal{D}_\nu(k)$ et de la dissipation numérique $\mathcal{D}_{sf}(k)$ en fonction du nombre d'onde normalisé $k\Delta$, pour différents nombres de Reynolds Re_{L_f} , obtenus avec les différences finies et les filtres sélectifs : (a), optimisés sur 11 points ; (b), optimisés sur 13 points. —, $\mathcal{D}_{sf}(k)$ pour $\text{Re}_{L_f} = 10^3, 10^4, 10^5$ (les trois spectres coïncident). - - -, $\mathcal{D}_\nu(k)$ pour $\text{Re}_{L_f} = 10^3$; ·····, $\mathcal{D}_\nu(k)$ pour $\text{Re}_{L_f} = 10^4$; - · - ·, $\mathcal{D}_\nu(k)$ pour $\text{Re}_{L_f} = 10^5$. Les flèches indiquent la progression de la dissipation visqueuse quand le nombre de Reynolds augmente.

mécanismes de dissipation impliqués lors de la simulation sont ainsi principalement associés au filtrage sélectif, et la consistance de la résolution pourrait être discutée.

Schémas optimisés sur 13 points

Les spectres des dissipations numérique et visqueuse obtenues pour les schémas optimisés sur 13 points sont fournies sur la figure 3.8.b.

La dissipation numérique possède une allure similaire à celle déterminée pour les schémas optimisés sur 11 points, mais avec un niveau plus faible. Elle est relativement élevée au-delà de $k\Delta = \pi/2$, et présente un palier autour de 10^{-5} pour $k\Delta$ compris entre $\pi/8$ et $\pi/2$. Pour des nombres d'onde plus petits, $k\Delta < \pi/8$, l'énergie dissipée par le filtre décroît régulièrement avec $k\Delta$. La pente de cette diminution est cependant plus importante qu'avec les schémas sur 11 points. Le filtre sur 13 points étant d'ordre 4, la dissipation numérique varie donc comme $k^4 E(k) \sim k^8$, quand le nombre d'onde tend vers zéro.

Les spectres de la dissipation visqueuse sont également présentés sur la figure 3.8.b. La diminution suivant l'inverse du nombre de Reynolds du niveau de la dissipation est vérifiée, et les valeurs obtenues pour les trois nombres de Reynolds Re_{L_f} , sont très proches des résultats correspondant aux schémas optimisés sur 11 points. La dissipation visqueuse varie comme $(k\Delta)^6$ pour $k\Delta < \pi/32$, puis comme $(k\Delta)^{2-5/3}$ pour $\pi/32 < k\Delta < \pi/2$, et est égale à zéro en $k\Delta = \pi$. À noter également que quand le nombre d'onde k tend vers zéro, la décroissance du niveau de la dissipation visqueuse est moins importante que celle de la dissipation numérique. En effet, quand $k \rightarrow 0$, $\mathcal{D}_{sf}(k)$ est équivalent à k^8 , alors que $\mathcal{D}_\nu(k)$ est proportionnel à k^6 . Ainsi, pour des nombres d'onde suffisamment petits, la dissipation numérique des schémas optimisés sur 13 points devient négligeable, grâce l'ordre 4 du filtre sélectif.

On remarque en outre que la dissipation numérique est suffisamment faible pour résoudre correctement les écoulements aux nombres de Reynolds $Re_{L_f} = 10^3$ et $Re_{L_f} = 10^4$. Pour ces valeurs de Re_{L_f} , la dissipation numérique aux nombres d'onde tels que $k\Delta < \pi/2$ est très faible par rapport au niveau d'énergie dissipée par la viscosité. À titre indicatif, pour $k\Delta = \pi/8$, le rapport entre dissipation visqueuse et dissipation numérique est de deux ordres de grandeur pour $Re_{L_f} = 10^3$, et d'un ordre de grandeur pour $Re_{L_f} = 10^3$.

Néanmoins, pour le nombre de Reynolds le plus élevé, $Re_{L_f} = 10^5$, les niveaux de dissipation visqueuse sont plus faibles et peuvent devenir équivalents à ceux de la dissipation numérique sur une partie des nombres d'onde résolus. C'est le cas par exemple sur l'intervalle $\pi/8 < k\Delta < \pi/2$. Les effets du filtrage sélectif deviennent donc significatifs pour ces nombres d'onde, et la dissipation visqueuse n'est plus reproduite correctement par la simulation pour ces nombres d'onde.

3.4 Conclusion

Une étude des erreurs numériques effectuées lors d'une simulation des grandes échelles filtrées explicitement d'un cube de turbulence homogène isotrope et incompressible a été menée.

Des formulations explicites, construites à partir de la densité spectrale de l'énergie cinétique, des erreurs de différentiation, d'aliasing, de modélisation et de filtrage ont été déterminées

et évaluées pour des schémas aux différences finies standards ou optimisés, associés à des filtres discrets de même nature. Les résultats obtenus ont en particulier donné des indications sur les propriétés des algorithmes de discrétisation requises pour minimiser les erreurs numériques lors d'une SGE :

- les problèmes d'aliasing et la dissipation du filtrage sont intimement liés. L'étude des densités spectrales des erreurs d'aliasing et de filtrage de la section 3.2.2 a fait apparaître que les erreurs d'aliasing étaient d'autant plus faibles que la fonction de transfert $\widehat{G}(\mathbf{k})$ du filtre différait de zéro pour $|k| > (2/3)k_c$, où l'on rappelle que k_c est le nombre d'onde de coupure du maillage. D'autre part, les erreurs de filtrage sont directement proportionnelles à la dissipation du filtre. L'algorithme de filtrage idéal correspond donc à un filtre passe-bas effectuant une coupure spectrale au nombre d'onde $k = (2/3)k_c$. Ainsi, pour les nombres d'onde résolus tels que $|k| < (2/3)k_c$, les erreurs d'aliasing et de filtrage sont nulles ;
- de la même manière, les erreurs de différentiation sont réduites en utilisant un schéma de différentiation spatial dont le nombre d'onde effectif \tilde{k} est proche du nombre d'onde initial k . Le schéma idéal est alors un algorithme spectral dont la coupure se situerait au nombre d'onde $k = (2/3)k_c$, de manière à rester cohérent avec le filtrage idéal introduit ci-dessus ;
- la prépondérance de la dissipation numérique en regard de la dissipation visqueuse ne pose plus de problème si le filtre opère une coupure spectral à $k = (2/3)k_c$. Dans ce cas, la dissipation numérique pour les nombres d'onde résolus ($|k| < (2/3)k_c$) est nulle.

De tels algorithmes numériques sont cependant difficile à réaliser dans la pratique. Les méthodes spectrales sont en effet coûteuses du point de vue informatique, et elles se limitent généralement à des géométries simples car l'obtention d'une base orthonormée satisfaisant aux conditions limites du problème (périodicité, parois solides, ...) est souvent délicat.

Dans la pratique, lors d'une SGE, des schémas aux différences finies et des filtres discrets sont implémentés pour calculer les dérivés spatiales et séparer les échelles turbulentes. Comme ces algorithmes ont une gamme d'utilisation limitée, il est nécessaire de faire des compromis, d'une part afin d'équilibrer les différentes erreurs numériques, comme pour l'aliasing et la dissipation du filtre, et d'autre part de manière à optimiser au mieux le coût informatique vis-à-vis de la précision de la résolution.

L'introduction des taux d'efficacité dans la section 3.2.2 a en effet montré que l'optimisation des propriétés dispersives et dissipatives des algorithmes numériques permettait d'accroître à la fois les limites de précision et les taux d'efficacité des méthodes numériques, tandis que l'augmentation de la taille des molécules de discrétisation n'apportait pas d'amélioration systématique. Bien qu'ils présentent un léger déséquilibre entre aliasing et dissipation, les schémas optimisés sur 11 et 13 points de Bogey & Bailly [14] se sont avérés être bien adaptés à la résolution numérique du problème de la SGE d'un cube de turbulence incompressible, puisqu'ils maximisent le rapport entre précision et coût informatique.

Du point de vue des influences relatives des dissipations numérique et visqueuse sur la dissipation totale, le calcul du bilan d'énergie pour le système discret dans la section 3.3 a permis d'établir que la valeur du nombre de Reynolds est un paramètre essentiel. Il apparaît en effet que quand le nombre de Reynolds augmente, la dissipation numérique reste sensiblement constante alors que la dissipation visqueuse devient de plus en plus faible. Étant donné un

algorithme de filtrage discret, il existe un nombre de Reynolds suffisamment grand pour lequel la dissipation numérique deviendra prépondérante. Pour des écoulements à très haut nombre de Reynolds, le filtre doit ainsi être très peu dissipatif pour les échelles résolues afin de ne pas couvrir la dissipation visqueuse.

Développement de schémas optimisés pour le calcul aéroacoustique

Dès les premiers développements de l'aéroacoustique numérique (ou CAA, pour *Computational AeroAcoustic*), la nécessité de disposer de schémas très précis a été mise en avant [139]. Afin de satisfaire aux exigences de la CAA, des schémas peu dispersifs et peu dissipatifs ont ainsi été développés en optimisant leurs propriétés dans l'espace de Fourier.

Pour l'intégration temporelle, les codes de calcul utilisés pour des problèmes de mécanique des fluides utilisent par exemple en général des schémas de Runge-Kutta (RK) d'ordre trois ou quatre en raison de leur relative stabilité [51]. Cependant, le choix d'un algorithme d'avancement en temps de par son seul critère de stabilité s'avère insuffisant en aéroacoustique numérique. Plusieurs équipes de recherche ont ainsi développé des algorithmes de RK dont les coefficients ont été déterminés de manière à minimiser la dispersion et la dissipation sur une gamme de fréquences donnée [14, 24, 51, 99]. Ces schémas de RK sont en outre à stockage réduit puisqu'ils nécessitent l'utilisation de seulement trois registres mémoire par variable. La structure de ces algorithmes implique néanmoins que l'ordre formel ne peut être supérieur à deux pour des opérateurs non linéaires. D'autres schémas de RK ont cependant été proposés, Williamson [161] a ainsi été le premier à développer un algorithme utilisant deux registres mémoire, et qui permette d'augmenter l'ordre en non linéaire. De la même façon, Stanescu & Habashi [121] ont récemment construit des schémas de RK, dont un algorithme ayant les propriétés de dispersion et de dissipation d'un des schémas de Hu [51] en linéaire, tout en étant d'ordre quatre en non linéaire. Le schéma a cependant une stabilité réduite. Un algorithme de RK à stockage réduit, optimisé pour les opérateurs linéaires, d'ordre quatre en non linéaire, et avec une limite de stabilité élevée a donc été développé dans ce travail afin de compléter les outils d'intégration temporelle actuellement disponibles.

De manière similaire, des algorithmes optimisés de différentiation spatiale et de filtrage sélectif ont été proposés par plusieurs équipes de recherche. On notera l'existence des schémas DRP, *Dispersion-Relation-Preserving*, de Tam & Webb [135], ou les schémas implicites de Lele [60]. Bogey & Bailly [14] ont également récemment développé des différences finies et des filtres sélectifs explicites, précis pour des ondes discrétisées par au moins quatre points par longueur d'onde. Ces exemples d'algorithmes se rapportent cependant à des schémas centrés utilisés sur des grilles uniformes, et des méthodes numériques possédant les mêmes propriétés peuvent être requises pour des zones spécifiques du domaine de calcul.

En particulier, l'implémentation des conditions limites de rayonnement ou de paroi solide nécessite généralement l'utilisation de schémas décentrés qui réduisent localement l'ordre de précision. Afin d'éviter une dégradation de la qualité de la résolution, l'utilisation de schémas décentrés optimisés est donc recommandée. Visbal & Gaitonde [151] ont ainsi développé des différences finies décentrées implicites, et Gaitonde & Visbal [34] ont proposé des filtres

sélectifs décentrés qui ont permis d'effectuer des calculs acoustiques et aérodynamiques dans des configurations complexes [35, 153]. Tam & Dong [137] ont par ailleurs fourni des différences finies explicites, décentrées et optimisées dans l'espace de Fourier pour l'implémentation de conditions de parois. Ces algorithmes ont par exemple été utilisés pour simuler le bruit de screech d'un jet supersonique [114]. En s'appuyant sur des procédures d'optimisation similaires, Lockard *et al.* [67] et Zhuang & Chen [165] ont également construit des schémas aux différences finies décentrés. Cependant, on ne dispose pas actuellement de filtres sélectifs explicites décentrés et optimisés. Le développement de tels algorithmes est néanmoins un point important, car les filtres décentrés standards sont particulièrement instables [152].

Dans cette optique, des différences finies et des filtres sélectifs explicites sur sept et onze points, dont les propriétés de dispersion et de dissipation sont optimisées dans l'espace de Fourier, sont proposés ici. Ils sont construits de manière à résoudre avec précision des perturbations avec au moins cinq points par longueur d'onde.

Le développement de l'algorithme de RK à stockage réduit, optimisé pour les opérateurs linéaires et d'ordre quatre en non linéaire, est traité dans la section 4.1. Le calcul des coefficients de l'algorithme est abordés dans la section 4.1.1. Afin d'illustrer la précision du schéma, des cas test de propagation linéaire et non linéaire sont ensuite résolus dans la section 4.1.2. Les schémas décentrés peu dispersifs et peu dissipatifs sur sept et onze points sont ensuite décrits dans la section 4.2. Les propriétés des différences finies et les filtres sélectifs sont exposées dans les sections 4.2.1 et 4.2.2, et un cas test de propagation acoustique incluant des conditions limites de paroi solide est résolu dans la section 4.2.3.

4.1 Algorithme de Runge-Kutta optimisé d'ordre quatre à stockage réduit

4.1.1 Construction de l'algorithme de Runge-Kutta

L'objectif est d'intégrer numériquement à l'aide d'un algorithme de RK le système différentiel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, t) \quad (4.1)$$

où l'opérateur F est une fonction du temps t et de la fonction inconnue $u(t)$. Plusieurs types d'algorithmes de RK ont été formulés afin d'augmenter la précision de l'intégration, et de réduire les besoins en mémoire [14, 51, 121].

Pour avancer temporellement de $u^n = u[n\Delta t]$ à $u^{n+1} = u[(n+1)\Delta t]$, Hu *et al.* [51] proposent d'utiliser l'algorithme à s étapes tel que :

$$u^{n+1} = u^n + \sum_{j=1}^s \gamma_j \Delta t^j F^j(u) \quad (4.2)$$

avec la convention $F^j = \overbrace{F \circ \dots \circ F}^j$. Les γ_j sont les coefficients de l'algorithme, et Δt est le pas de temps. L'ordre formel de ce type de schéma d'intégration temporelle ne peut pas être supérieur à 2 si F est un opérateur non linéaire. Pour augmenter l'ordre, la formulation à

Tableau 4.1: Limites de stabilité, de dissipation et de dispersion des algorithmes de RK en pas de temps par période, $T/\Delta t = 2\pi/\omega\Delta t$.

	Stabilité $ G(\omega\Delta t) < 1$	Dissipation $1 - G(\omega\Delta t) < 5 \times 10^{-4}$	Dispersion $ \omega^* \Delta t - \omega\Delta t /\pi < 5 \times 10^{-4}$
RK44	2.22	9.65	8.40
RK46–Stanescu	3.80	5.32	3.13
RK26–Bogey	1.59	3.29	4.10
RK46–NL	1.65	3.19	5.03

stockage réduit de Williamson [161] peut cependant être utilisée :

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha_i \omega_{i-1} + \Delta t F(u_{i-1}, t_i) \\ u_i = u_{i-1} + \beta_i \omega_i \quad ; \quad i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (4.3)$$

où s est le nombre d'étapes, Δt le pas de temps, $u_0 = u^n$, $u^{n+1} = u_s$, $\omega_0 = 0$ et $t_i = (n + c_i)\Delta t$. Les α_i et β_i sont les coefficients de l'algorithme, et pour un schéma explicite on pose $\alpha_1 = 0$.

Les coefficients γ_j de l'algorithme (4.2) sont optimisés dans l'espace de Fourier. Le schéma ainsi obtenu, nommé RK46–L, est d'ordre quatre en linéaire, mais d'ordre deux en non linéaire. Les valeurs de γ_j sont ensuite utilisées pour calculer les coefficients α_i et β_i de l'algorithme (4.3), noté RK46–NL, qui est d'ordre quatre que l'opérateur soit linéaire ou non linéaire.

Optimisation pour un opérateur linéaire

On suppose que l'opérateur F est linéaire et qu'il ne dépend pas de la variable temporelle t . En s'appuyant sur la méthode de Hu *et al.* [51], la transformée de Fourier de (4.2) donne le facteur d'amplification de l'algorithme :

$$G(\omega\Delta t) = \frac{\hat{u}^{n+1}(\omega\Delta t)}{\hat{u}^n(\omega\Delta t)} = 1 + \sum_{j=1}^s \gamma_j (i\omega\Delta t)^j \quad (4.4)$$

qui est mis sous la forme $|G(\omega\Delta t)|e^{i\omega^* \Delta t}$ pour pouvoir être comparé au facteur exact $e^{i\omega\Delta t}$. Pour une pulsation ω , à chaque pas de temps Δt , le signal est dissipé de $1 - |G(\omega\Delta t)|$, et l'erreur sur la phase est de $\omega\Delta t - \omega^* \Delta t$.

L'ordre quatre est assuré en imposant $\gamma_j = 1/j!$, pour $j = 1$ à $j = 4$. Les deux coefficients restants γ_5 et γ_6 sont choisis de manière à minimiser l'erreur intégrale

$$\int_{\pi/16}^{\pi/2} \left[1 - |G(\omega\Delta t)| + \frac{|\omega\Delta t - \omega^* \Delta t|}{\pi} \right] \frac{d(\omega\Delta t)}{\omega\Delta t} \quad (4.5)$$

avec les contraintes

$$\begin{aligned} |1 - G(\omega\Delta t)| &> 0 \\ \frac{d \ln(1 - |G|)}{d(\omega\Delta t)} &\geq -5 \end{aligned} \quad (4.6)$$

pour $0 \leq \omega\Delta t \leq \pi$, afin d'assurer la stabilité du schéma et de limiter les variations du facteur d'amplification $|G(\omega\Delta t)|$. La dispersion et la dissipation sont ainsi réduites sur l'intervalle

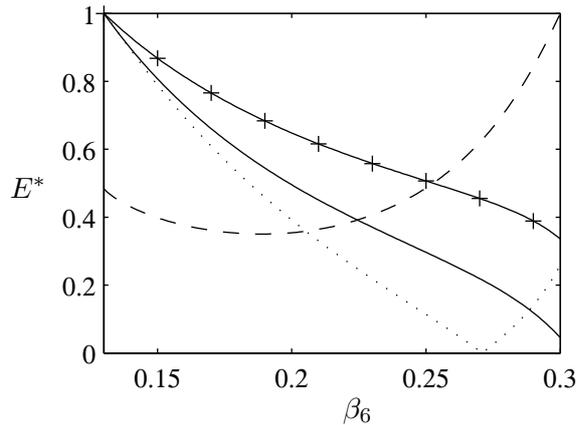


Figure 4.1: Erreurs normalisées E^* obtenues pour les cas test d'intégration temporelle, en fonction de β_6 . — A_1 , A_2 , - - - A_3 , —+— A_4 .

$\pi/16 < \omega\Delta t < \pi/2$, *i.e.* pour des ondes ayant entre trente deux et quatre pas de temps par période T .

Les coefficients γ_j de l'algorithme RK46-L ainsi obtenu sont donnés dans le tableau D.1 de l'annexe D.

Conditions d'ordre en non linéaire et optimisation en non linéaire

Les coefficients γ_j et les conditions d'ordre [121] qui assurent l'ordre formel en non linéaire, conduisent à un système d'équations sur les coefficients α_i et β_i de l'algorithme RK46-NL. Cependant, un des paramètres reste indéterminé et doit être imposé. Des cas test ont été résolus pour fixer la valeur de β_6 . Ces problèmes sont définis dans l'annexe D, et les erreurs obtenues, normalisées par les erreurs maximales, sont tracées sur la figure 4.1. On observe que la précision dépend à la fois du cas test et de la valeur de β_6 . On choisit alors comme compromis la valeur $\beta_6 = 0.27$. Les coefficients de l'algorithme RK46-NL pour cette valeur de β_6 sont donnés dans le tableau D.1 de l'annexe D.

Dispersion et dissipation de l'algorithme RK46-NL

La stabilité de l'algorithme est d'abord vérifiée. Les limites de stabilité, obtenues quand le facteur d'amplification vaut $|G(\omega\Delta t)| = 1$, sont reportées dans le tableau 4.1 pour le RK standard d'ordre quatre à quatre étapes (RK44), le RK d'ordre quatre à six étapes de Stanescu & Habashi [121] (RK46-Stanescu), le RK d'ordre deux à six étapes développé par Bogey & Bailly [14] (RK26-Bogey), et pour le schéma d'ordre quatre à six étapes construit ici (RK46-NL).

La limite de stabilité de l'algorithme RK44 est d'environ 2 pas de temps par période. Les algorithmes RK26-Bogey et RK46-NL ont des limites de stabilité identiques, égales à $\omega\Delta t = 3.9$, c'est à dire à 1.6 pas de temps par période, tandis que la limite du schéma RK46-Stanescu est proche de $\omega\Delta t = 1.6$, *i.e.* 3.8 pas de temps par période. La limite de stabilité de l'algorithme RK46-NL est donc deux fois plus grande que celle de l'algorithme

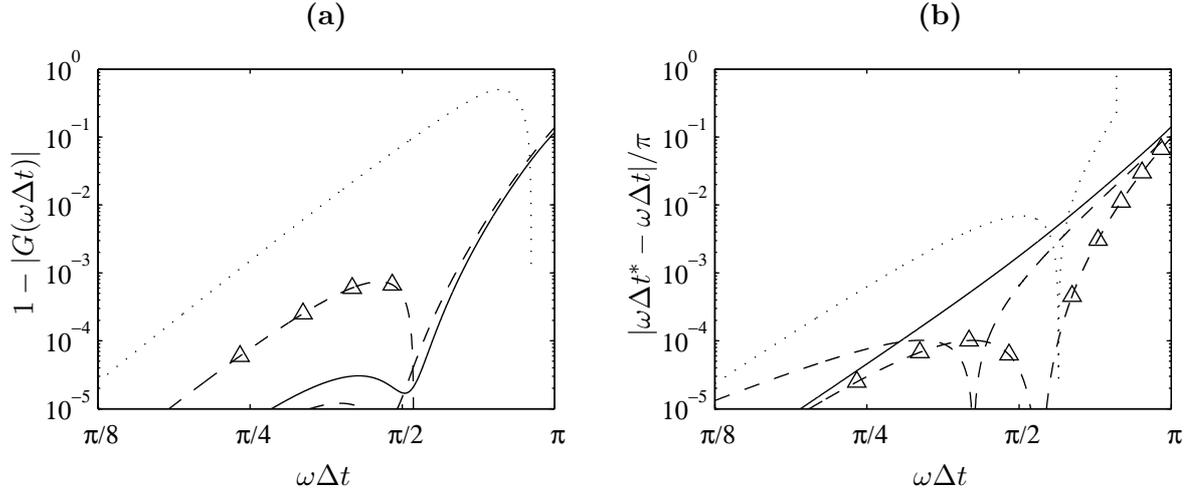


Figure 4.2: Propriétés dissipatives et dispersives des algorithmes de RK. (a) Dissipation, et (b) dispersion en fonction de la pulsation $\omega\Delta t$ des algorithmes : \cdots RK44, RK standard, ordre 4 à 4 étapes ; $- \triangle -$ RK46–Stanescu, RK de Stanescu & Habashi [121], ordre 4 à 6 étapes ; $- - -$ RK26–Bogey, RK de Bogey & Bailly [14], ordre 2 à 6 étapes ; $—$ RK46–NL, RK d’ordre 4 à 6 étapes.

RK46–Stanescu.

La dissipation $1 - |G(\omega\Delta t)|$ et la dispersion (erreur sur la phase) $|\omega\Delta t - \omega^*\Delta t|/\pi$ sont maintenant représentées sur les figures 4.2.a et 4.2.b, en fonction de $\omega\Delta t$, en échelles logarithmiques. L’algorithme RK44 est le plus dissipatif, avec par exemple deux ordres de grandeur de différence par rapport aux algorithmes RK26–Bogey ou RK46–NL pour $\omega\Delta t < \pi/2$, *i.e.* pour plus de quatre pas de temps par période. Le taux de dissipation des schémas RK26–Bogey et RK46–NL est inférieur à 5×10^{-4} jusqu’à $\omega\Delta t = \pi/2$. Sur cette gamme de pulsations, l’algorithme de RK46–Stanescu fournit une dissipation plus grande d’un ordre de grandeur. Pour des pulsations plus hautes, l’algorithme RK46–Stanescu est par ailleurs instable, et les schémas RK26–Bogey et RK46–NL ont une dissipation du même ordre de grandeur.

Sur la figure 4.2.b, les dispersions des algorithmes RK46–Stanescu, RK26–Bogey et RK46–NL sont similaires et inférieures à 5×10^{-4} pour $\omega\Delta t < \pi/2$. Par exemple, pour $\omega\Delta t = \pi/4$, l’erreur due à la dispersion est réduite d’environ un ordre de grandeur par rapport à l’algorithme RK44.

Ces résultats sont reportés dans le tableau 4.1 en terme de limites de précision. Deux critères sur la dissipation et la dispersion sont utilisés : $1 - |G(\omega\Delta t)| < 5 \times 10^{-4}$ et $|\omega^*\Delta t - \omega\Delta t|/\pi < 5 \times 10^{-4}$. La limite de dissipation de l’algorithme RK44 est d’environ dix pas de temps par période, et sa limite de dispersion est de huit pas de temps par période. Pour le schéma RK46–Stanescu, les limites de dissipation et de dispersion sont respectivement de cinq pas de temps par période, et de trois pas de temps par période. Les algorithmes RK26–Bogey et RK46–NL ont une limite de dissipation identique de trois pas de temps par période, et une limite de dispersion de quatre et cinq pas de temps par période, respectivement. La limite globale de précision de l’algorithme RK46–NL est donc de l’ordre de quatre pas de temps par période.

4.1.2 Cas test

Afin d'illustrer les propriétés du schéma de RK développé ici, deux cas test sont résolus : la convection linéaire monodimensionnelle d'un paquet d'onde, et la propagation non linéaire d'une impulsion de pression de forme Gaussienne.

Propagation linéaire

Pour le premier cas test, l'équation d'advection 1-D est résolue :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad c = 1 \quad (4.7)$$

avec un pas de temps déduit de la taille des mailles par $\Delta t = \text{CFL} \times \Delta x / c$. La perturbation initiale à $t = 0$ est définie par la fonction,

$$u(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{8\Delta x}\right) \exp\left[-\ln(2) \left(\frac{x}{3\Delta x}\right)^2\right]$$

qui est tracée sur la figure 4.3.a. Le contenu spectral est dominé par le nombre d'onde $k\Delta x = \pi/4$, qui correspond à une onde discrétisée par 8 points par longueur d'onde.

Les dérivées spatiales sont évaluées avec un schéma aux différences finies d'ordre 50, de manière à ce que les erreurs dues aux calculs des dérivées spatiales soient petites comparées aux erreurs liées à l'intégration temporelle. L'intégration temporelle est effectuée avec le RK standard d'ordre quatre à quatre étapes (RK44), le RK d'ordre quatre à six étapes de Stanescu & Habashi [121] (RK46–Stanescu), le RK d'ordre deux à six étapes développé par Bogey & Bailly [14] (RK26–Bogey), et avec l'algorithme d'ordre quatre à six étapes RK46–NL. Le problème est résolu pour des nombres de CFL compris entre 0.1 et 1.3, jusqu'à $t = 800$. L'onde est donc convectée sur une distance de 100 longueurs d'onde. L'erreur numérique est calculée avec la norme L_1 :

$$E_{num} = \frac{1}{N} \sum |u_c - u_e| \quad (4.8)$$

où u_c et u_e sont respectivement la solution calculée et la solution exacte, et $N = 1200$ est le nombre de points du maillage.

L'erreur numérique E_{num} est tracée sur la figure 4.3.b en fonction du nombre de CFL. Les conclusions de l'analyse de stabilité menée dans la section 4.1.1 sont confirmées ici. Le calcul avec l'algorithme RK46–Stanescu diverge à $\text{CFL} = 0.75$, tandis que les calculs avec les algorithmes RK26–Bogey et RK46–NL sont stables jusqu'à un nombre de CFL de 1.3.

Pour des nombres de CFL inférieurs à 0.6, l'erreur peut être liée à l'ordre formel des algorithmes. Quand le nombre de CFL décroît, l'erreur du schéma d'ordre deux RK26–Bogey décroît en effet plus lentement que l'erreur des algorithmes d'ordre quatre RK44, RK46–Stanescu et RK46–NL. Sur l'intervalle $0.2 < \text{CFL} < 0.6$, l'erreur des calculs avec les schémas RK46–Stanescu et RK46–NL sont par ailleurs très proches. À titre indicatif, pour un nombre de CFL égal à 0.3, l'amélioration sur la précision est d'environ un ordre de grandeur comparée aux algorithmes RK44 et RK26–Bogey.

Pour des nombres de CFL supérieurs à 0.6, la maximisation de l'ordre formel ne suffit plus à assurer la précision du schéma puisque le pas de temps est relativement grand. L'erreur est alors donnée par les propriétés dissipatives et dispersives de l'algorithme. Ainsi, l'erreur

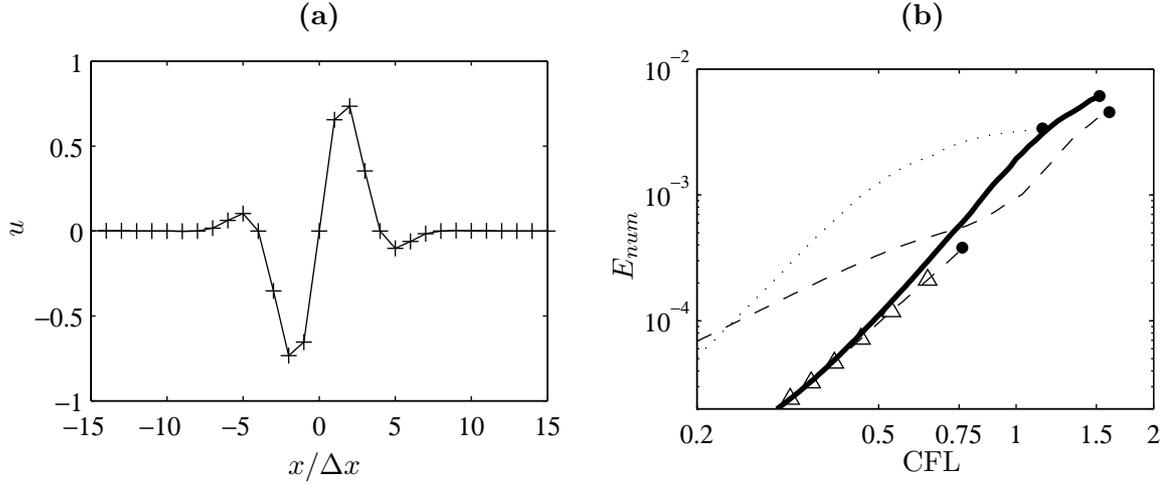


Figure 4.3: Cas test de propagation linéaire. (a) Perturbation initiale, et (b) erreur numérique en fonction du nombre de CFL avec les algorithmes : RK44, RK standard, ordre 4 à 4 étapes; -△- RK46-Stanescu, RK de Stanescu & Habashi [121], ordre 4 à 6 étapes; --- RK26-Bogey, RK de Bogey & Bailly [14], ordre 2 à 6 étapes; — RK46-NL, RK d'ordre 4 à 6 étapes. (● : limite de stabilité pour le cas test).

commise par l'algorithme RK44 est plus importante que celle due aux schémas RK46-NL et RK26-Bogey.

Propagation non linéaire

Le second cas test est un problème de propagation non linéaire. Les équations d'Euler 1-D sont résolues sous leur forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \quad \text{with} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e_t + p) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

où ρ est la masse volumique, u la vitesse, p la pression, et l'énergie totale est donnée par $\rho e_t = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$ avec $\gamma = 1.4$. Les dérivées spatiales sont calculées avec des différences finies d'ordre 30 avec $\Delta x = 1$. Le domaine de calcul contient $N = 800$ points, et est suffisamment étendu pour qu'il ne soit pas nécessaire d'implémenter des conditions limites de champ libre. Comme précédemment, l'intégration temporelle est effectuée avec le RK standard RK44, le RK d'ordre quatre à six étapes RK46-Stanescu, le RK d'ordre deux à six étapes RK26-Bogey, et avec l'algorithme d'ordre quatre à six étapes RK46-NL. En outre, pour illustrer la nécessité d'utiliser la formulation à stockage réduit de Williamson [161] pour assurer l'ordre quatre en non linéaire, le cas test est aussi résolu avec l'algorithme RK46-L de la section 4.1.1.

La perturbation initiale est une impulsion de pression de forme Gaussienne, avec une amplitude suffisamment importante pour qu'interviennent des effets non linéaires lors de la

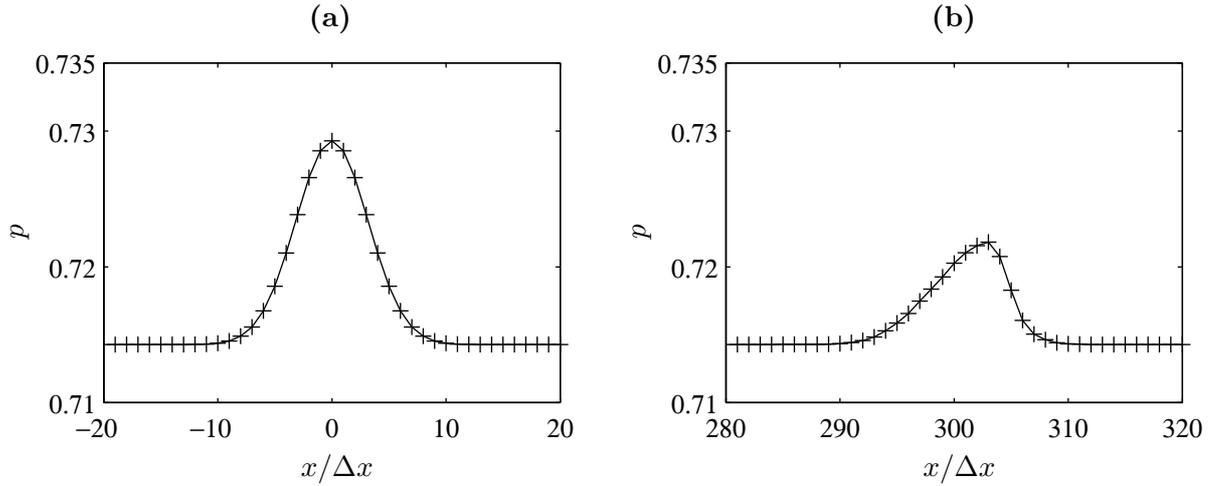


Figure 4.4: Cas test de propagation non linéaire. (a) Perturbation initiale, et (b) solution de référence à $t = 300$.

propagation :

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ u = 0 \\ p = \frac{1}{\gamma} + \Delta p e^{-\alpha x^2} \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\alpha = 0.05$, et $\Delta p = 0.015$. Cette perturbation est propagée jusqu'à $t = 300$ pour différents nombres de $\text{CFL} = c\Delta x/\Delta t$, avec une vitesse du son $c = 1$. La solution calculée pour $\text{CFL} = 0.01$ est utilisée comme solution de référence. La perturbation initiale et la solution de référence sont représentées sur la figure 4.4. Un raidissement du front d'onde est visible sur la solution de référence, à $t = 300$. L'erreur est évaluée avec la norme L_1 suivant,

$$E_{num} = \frac{1}{N} \sum |p_c - p_{ref}| \quad (4.11)$$

où p_c et p_{ref} sont les pressions calculée et de référence.

L'erreur numérique E_{num} obtenue pour les différents schémas de RK est tracée sur la figure 4.5 en fonction du nombre de CFL. Comme pour le cas test de propagation linéaire, l'algorithme RK46–Stanescu est le moins stable. Le calcul diverge aux environs de $\text{CFL} = 0.8$, tandis que les autres schémas peuvent être utilisés jusqu'à $\text{CFL} = 1.3$. Pour des nombres de CFL inférieurs à 0.5, l'erreur numérique est donnée par l'ordre de l'algorithme. Les algorithmes d'ordre quatre, RK46–Stanescu et RK46–NL, sont ainsi les plus précis pour $\text{CFL} < 0.5$. Comparée à l'algorithme RK44, la différence est d'environ un ordre de grandeur à $\text{CFL} = 0.3$. On observe par ailleurs que pour ce cas test non-linéaire, le schéma RK46–L est d'ordre deux, alors qu'il est d'ordre quatre en linéaire. Pour un nombre de $\text{CFL} > 0.5$, l'erreur n'est plus liée à l'ordre des algorithmes, mais aux propriétés de dissipation et de dispersion des schémas. Les erreurs des schémas RK26–Bogey, RK46–NL et RK46–L sont donc très proches étant donné que leurs propriétés de dissipation et de dispersion sont similaires.

On observe donc pour ce cas test que l'erreur est donnée par l'ordre du schéma pour des petits nombres de CFL et par la dissipation et la dispersion pour des nombres de CFL plus

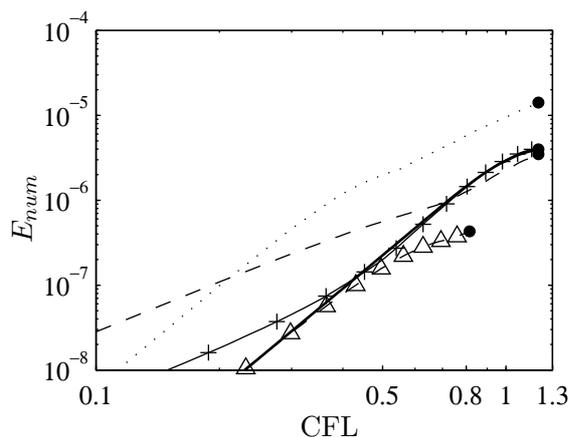


Figure 4.5: Cas test de propagation non linéaire. Erreur numérique en fonction du nombre de CFL avec les algorithmes : \cdots RK44, RK standard, ordre 4 à 4 étapes; $- \triangle -$ RK46–Stanescu, RK de Stanescu & Habashi [121], ordre 4 à 6 étapes; $- - -$ RK26–Bogey, RK de Bogey & Bailly [14], ordre 2 à 6 étapes; $—+—$ RK46–L, RK d’ordre 4 (en linéaire) à 6 étapes; — RK46–NL, RK d’ordre 4 à 6 étapes. (\bullet : limite de stabilité pour le cas test).

grands. L’algorithme RK46–NL est ainsi précis sur une large gamme de nombre de CFL grâce à l’optimisation de ses caractéristiques pour un système linéaire et à son ordre formel égal à quatre.

4.2 Schémas explicites décentrés optimisés dans l’espace de Fourier

4.2.1 Différences finies

La dérivée spatiale d’une fonction f sur une grille uniforme (x_i) peut être approchée au point x_i avec le schéma aux différences finies décentré :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-P}^Q a_j f(x_i + j\Delta x) \quad (4.12)$$

où Δx est la taille des mailles, et les paramètres a_j sont les coefficients de l’algorithme. L’approximation utilise P points à gauche de x_i , et Q points à droite de x_i . La transformée de Fourier spatiale du schéma (4.12) conduit au nombre d’onde effectif k^* du schéma,

$$k^* \Delta x = -i \sum_{j=-P}^Q a_j e^{ijk\Delta x} \quad (4.13)$$

En suivant par exemple les travaux de Tam & Webb [135], on se propose ici de déterminer les coefficients a_j en minimisant la dispersion et la dissipation de l’algorithme. Dans un premier temps, afin d’assurer un ordre de précision minimum, les termes de la série de Taylor de

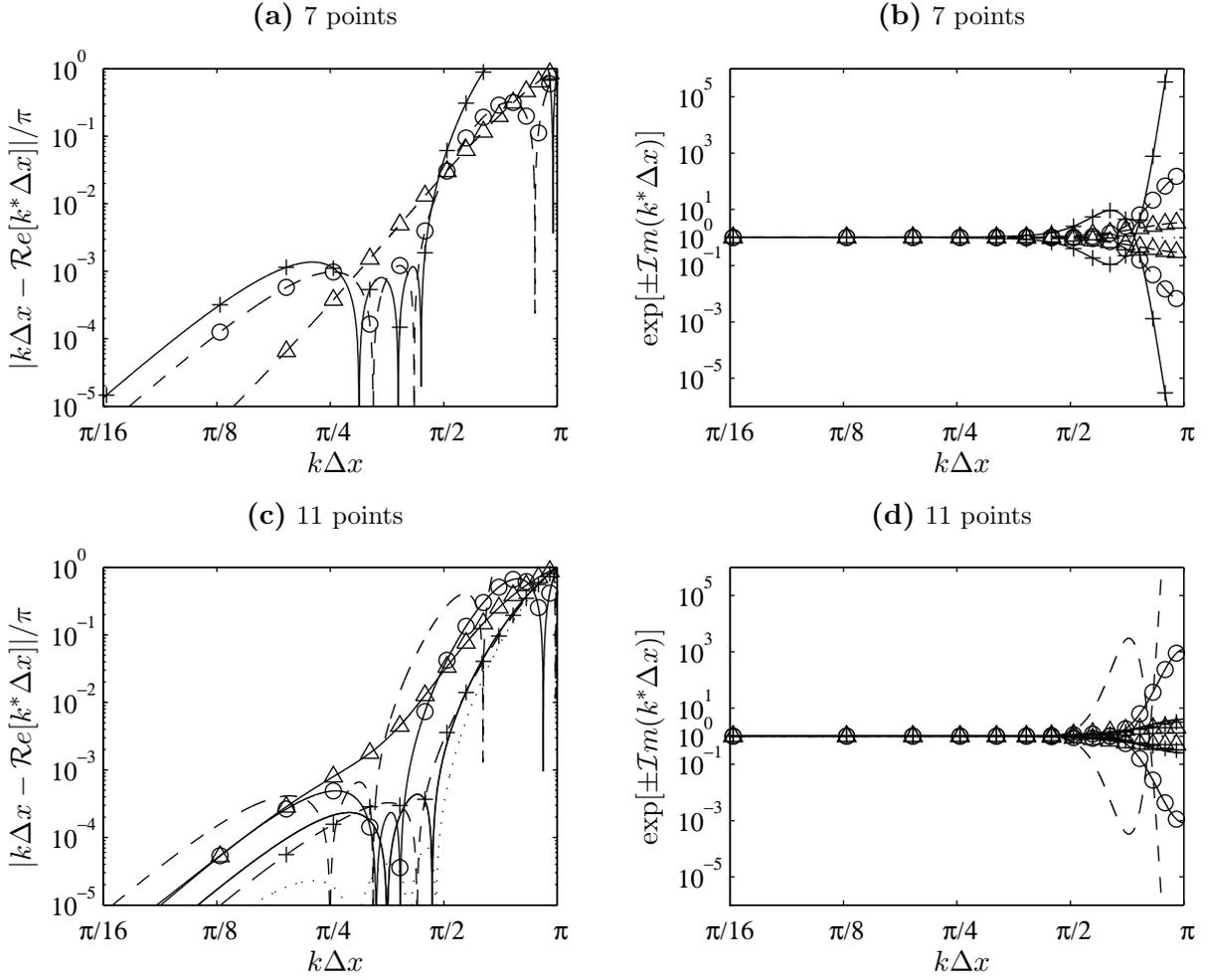


Figure 4.7: Différences finies décentrées. (a) Dispersion, et (b) dissipation des schémas sur sept points : \triangle - FD₂₄, \circ - FD₁₅, \times - FD₀₆; (c) dispersion, et (d) dissipation des schémas sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: \cdots FD₅₅, — FD₄₆, -- FD₃₇, $\text{—}\triangle$ FD₂₈, $\text{—}\circ$ FD₁₉, -- FD₀₁₀.

Sur les figures 4.7.b et 4.7.d, le facteur d'amplification $e^{-\mathcal{I}m(k^*\Delta x)}$ des différences finies décentrées est très proche de 1 pour $k\Delta x < \pi/2.5$. Ainsi, sur cette gamme de nombres d'onde, l'amplitude des perturbations est peu affectée par ces schémas. Les nombres d'onde plus grands, proches de la coupure du maillage, sont au contraire atténués ou amplifiés. En effet, au voisinage $k\Delta x \sim \pi$, on observe que $e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x)} < 1$, et $e^{-\mathcal{I}m(k^*\Delta x)} > 1$. Par conséquent, les ondes se propageant vers les x négatifs sont amplifiées, tandis que celles se propageant vers les x positifs sont atténuées.

Des critères de précision, définis par $|k\Delta x - \mathcal{R}e(k^*\Delta x)|/\pi < 5 \times 10^{-3}$ et $|1 - e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x)}| < 5 \times 10^{-3}$, sont maintenant introduits afin d'illustrer respectivement les erreurs de dispersion et de dissipation. Ces limites de précision sont fournies pour les différences finies sur onze points dont le tableau 4.2. Les limites du schéma centré optimisé sur onze points de Bogey & Bailly [14] sont également indiquées à titre de comparaison.

Il s'avère que les schémas décentrés FD₄₆ et FD₃₇ ont des limites de dispersion de l'ordre de

Tableau 4.2: Limites de dispersion et de dissipation des différences finies décentrées sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$.

	Dispersion	Dissipation
	$ k\Delta x - \mathcal{R}e(k^*\Delta x) /\pi < 5 \times 10^{-3}$	$ 1 - e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x)} < 5 \times 10^{-3}$
	$\lambda/\Delta x$	$\lambda/\Delta x$
FD ₅₅	3.51	0
.....		
FD ₄₆	3.77	4.46
FD ₃₇	3.82	4.30
FD ₂₈	5.15	6.04
FD ₁₉	4.60	6.87
FD ₀₁₀	5.59	10.12

Tableau 4.3: Limites de dissipation et de dispersion des filtres sélectifs décentrés sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$.

	Dissipation	Dispersion
	$1 - G(k\Delta x) < 5 \times 10^{-3}$	$ \phi_G(k\Delta x) /\pi < 5 \times 10^{-3}$
	$\lambda/\Delta x$	$\lambda/\Delta x$
SF ₅₅	4.00	0
.....		
SF ₄₆	4.34	2.12
SF ₃₇	5.91	5.51
SF ₂₈	4.80	7.33
SF ₁₅	14.82	7.25

quatre points par longueur d'onde, qui sont donc proches de celle du schéma centré optimisé sur 11 points. Les schémas FD₂₈, FD₁₉ et FD₀₁₀, qui ont une asymétrie plus prononcée, sont plus dispersifs : leurs limites de dispersion se situent au voisinage de cinq points par longueur d'onde.

De manière similaire, les limites de dissipation vont de $\lambda/\Delta x = 4.30$ pour le schéma FD₃₇ à $\lambda/\Delta x = 6.87$ pour le schéma FD₁₉. La limite de dissipation des différences finies FD₀₁₀, qui sont complètement décentrées, est d'environ dix points par longueur d'onde. Ce schéma n'est cependant utilisé que pour un seul point de maillage. La limite de précision de l'ensemble des schémas décentrés optimisés sur onze points est donc de l'ordre de cinq points par longueur d'onde.

Ces limites de précision en dispersion et en dissipation montrent que les schémas aux différences finies décentrés optimisés sur onze points résolvent correctement les ondes avec au moins cinq points par longueur d'onde. L'étude de la dissipation des schémas décentrés a montré que les longueurs d'onde plus petites peuvent être amplifiées et déstabiliser le calcul. Ces nombres d'onde, qui sont proches de la coupure du maillage, doivent alors être dissipés par l'application d'un filtrage sélectif.

4.2.2 Filtres sélectifs

Le filtrage d'une fonction f sur une grille uniforme (x_i) peut être effectué avec l'algorithme :

$$f^d(x_i) = f(x_i) - \sigma \sum_{j=-P}^Q d_j f(x_i + j\Delta x) \quad (4.15)$$

où f^d est la fonction filtrée, Δx la taille des mailles, et σ est une constante prise entre 0 et 1 qui définit l'intensité du filtrage. Les paramètres d_j sont les coefficients du filtre. Dans ce qui suit, lors du calcul des coefficients d_j et de l'étude des propriétés du filtre, l'intensité du filtrage est fixée à sa valeur maximale, c'est à dire $\sigma = 1$.

La transformée de Fourier spatiale de l'équation (4.15) conduit à la fonction de transfert,

$$G(k\Delta x) = 1 - \sum_{j=-P}^Q d_j e^{ijk\Delta x} \quad (4.16)$$

L'ordre formel du filtre est imposé à l'aide d'un développement de Taylor quand $k \rightarrow 0$ de la relation précédente. Un filtre d'ordre 2 est ainsi construit en imposant que $G(k) = 1 + \mathcal{O}(k\Delta x^2)$, quand $k\Delta x$ tend vers zéro. L'algorithme de filtrage doit par ailleurs atténuer complètement les oscillations maille-à-maille. En d'autres termes, la fonction de transfert est telle que $G(\pi) = 0$. Ces contraintes étant posées, les coefficients d_j sont alors déterminés en minimisant l'erreur intégrale :

$$\int_{\pi/16}^{\pi/2} \left[(1 - \alpha) |1 - G(k\Delta x)| + \alpha |\phi_G(k\Delta x)| \right] \frac{d(k\Delta x)}{k\Delta x} \quad (4.17)$$

où ϕ_G est l'argument de la fonction de transfert, et la constante α est choisie arbitrairement entre 0 et 1, en fonction du filtre. Ce paramètre d'ajustement permet d'équilibrer les contributions des erreurs de dissipation et de dispersion lors de l'optimisation. La procédure d'optimisation inclut aussi le critère,

$$|G(k\Delta x)| < 1, \quad \text{pour } k\Delta x > 0 \quad (4.18)$$

qui garantit la stabilité du filtre. L'erreur intégrale est ainsi évaluée sur l'intervalle de nombre d'onde $\pi/16 \leq k\Delta x \leq \pi/2$, *i.e.* entre 32 et 4 points par longueur d'onde.

En s'appuyant sur la méthode exposée précédemment, des filtres décentrés d'ordre deux, sur sept et onze points ont été développés dans le présent travail. Leurs coefficients sont donnés en annexe D dans les tableaux D.4 et D.5, et les filtres sont notés avec la même convention que les différences finies décentrés, c'est à dire SF_{PQ} comme le montre la figure 4.6. La procédure d'optimisation n'a cependant pas fourni de filtre complètement décentré sur sept ou onze points qui soit satisfaisant. Un filtre complètement décentré sur quatre points sera néanmoins proposé à la fin de cette section. De plus, le filtre sur onze points SF_{19} fourni par la méthode d'optimisation est trop dissipatif. Le filtre sur sept points SF_{15} sera donc utilisé à la place du schéma SF_{19} .

Le taux de dissipation $1 - |G(k\Delta x)|$ et l'erreur de dispersion $|\phi_G(k\Delta x)|$ des filtres sur sept et onze points sont présentés sur les figures 4.8.a et 4.8.b, et sur les figures 4.8.c et 4.8.d, en

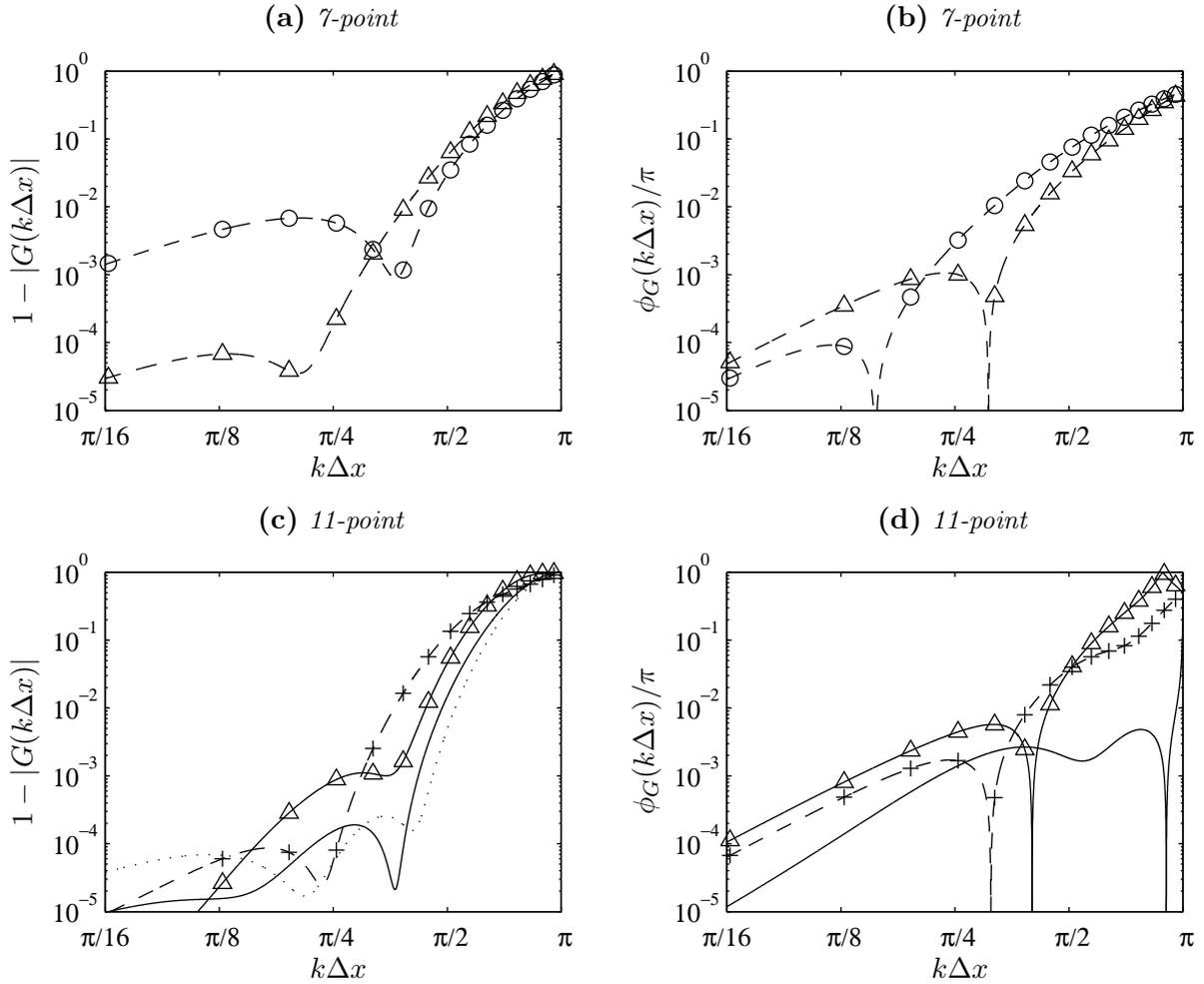


Figure 4.8: Filtres sélectifs décentrés. (a) Dissipation, et (b) dispersion des filtres sélectifs décentrés sur sept points : $- \triangle -$ SF₂₄, $- \circ -$ SF₁₅; (c) dissipation, et (d) dispersion des filtres sélectifs sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: \cdots SF₅₅, — SF₄₆, $- + -$ SF₃₇, $\text{—} \triangle \text{—}$ SF₂₈.

échelles logarithmiques, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$. Les propriétés du filtre centré sur onze points de Bogey & Bailly [14] sont aussi tracées pour comparaison.

Comme le montrent les figures 4.8.a et 4.8.c, l'amplitude des petits nombres d'onde n'est pas affectée significativement par le filtrage. Pour tous les schémas décentrés optimisés, excepté le filtre SF₁₅ qui est légèrement plus dissipatif, le taux de dissipation est en effet inférieur à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x = \pi/2.5$, *i.e.* pour des perturbations avec au moins cinq points par longueur d'onde. Le taux de dissipation du filtre SF₁₅ reste malgré tout proche de 5×10^{-3} pour des nombres d'onde tels que $\pi/16 \leq k\Delta x \leq \pi/2.5$. Par ailleurs, pour tous les filtres décentrés, le taux de dissipation est important pour les ondes telles que $k\Delta x \sim \pi$, afin de supprimer les oscillations maille-à-maille.

L'erreur de dispersion, présentée sur les figures 4.8.b et 4.8.d, est inférieure à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x < \pi/2.5$, *i.e.* pour les nombres d'onde qui sont très peu affectés par la dissipation des filtres. Pour $k\Delta x$ proche de π , l'erreur est plus importante, mais ces nombres d'onde sont

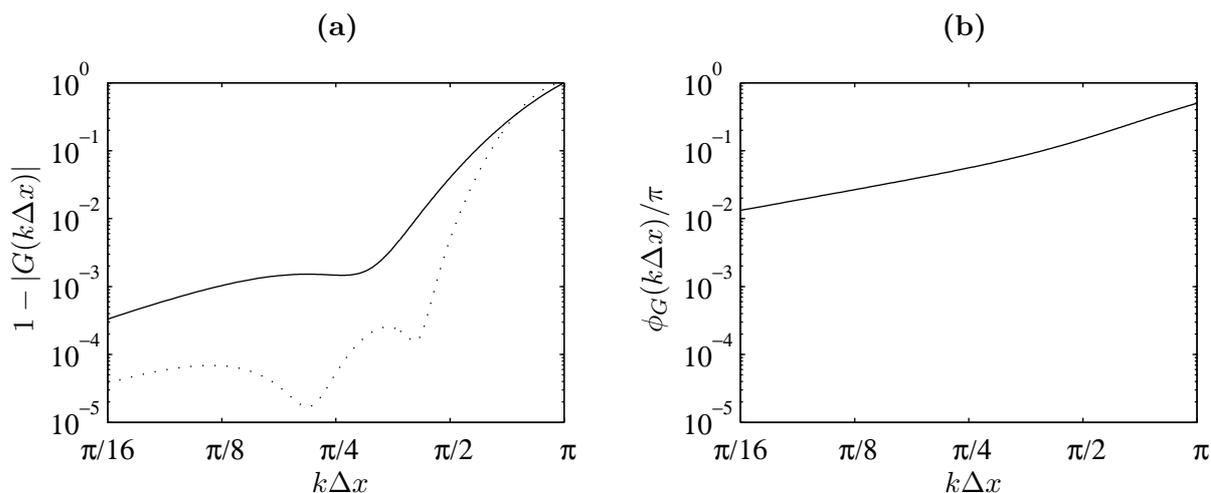


Figure 4.9: (a) Dissipation, et (b) dispersion du filtre sélectif complètement décentré SF₀₃, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: SF₅₅, — SF₀₃.

supprimés par le filtre.

Les propriétés des filtres décentrés sont reportées dans le tableau 4.3, où les limites de précision pour la dissipation et la dispersion sont évaluées à l'aide des critères $1 - |G(k\Delta x)| < 5 \times 10^{-3}$ et $|\phi_G(k\Delta x)|/\pi < 5 \times 10^{-3}$.

Les limites de dissipation des filtres SF₄₆, SF₃₇ et SF₂₈ s'étendent de quatre à six points par longueur d'onde. Le filtre SF₁₅ est plus dissipatif avec une limite proche de quatorze points par longueur d'onde. Ce filtre n'est cependant utilisé qu'à un seul point de maillage, et son taux de dissipation est proche de 5×10^{-3} pour $k\Delta x \leq \pi/3$, comme le montre la figure 4.8.a. La limite de précision en dispersion du filtre SF₄₆, qui est quasiment symétrique, est proche de deux points par longueur d'onde. Elle est environ de cinq points par longueur d'onde pour le filtre SF₃₇, et d'environ sept points par longueur d'onde pour les schémas SF₂₈ et SF₁₅. La limite de précision globale des filtres décentrés peut être finalement fixée à cinq points par longueur d'onde puisque ceux-ci ne sont implémentés que sur un nombre réduit de points du domaine de calcul.

D'un point de vue pratique, il est nécessaire de disposer d'un filtre complètement décentré afin d'éviter les instabilités numériques. La procédure d'optimisation décrite ci-dessus a cependant fourni des filtres complètement décentrés sur sept et onze points qui se sont avérés trop dissipatifs. Un filtre d'ordre deux sur quatre points, noté SF₀₃, a malgré tout été développé dans ce travail en mettant uniquement l'accent sur le taux de dissipation durant l'optimisation. Ses coefficients sont donnés en annexe D dans le tableau D.6, et les propriétés du filtre dans l'espace spectral sont tracées sur la figure 4.9.

Comme le montre l'erreur de dispersion de la figure 4.9.b, le filtre SF₀₃ est moins précis en phase comparé aux autres filtres décentrés. La précision en amplitude est néanmoins similaire à celle des schémas décentrés présentés précédemment. Le taux de dissipation, tracé sur la figure 4.9.a, est en effet inférieur à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x = \pi/2.5$. La limite de précision en amplitude basée sur le critère $1 - |G(k\Delta x)| < 5 \times 10^{-3}$ est ainsi de $\lambda/\Delta x = 5.41$. Pour les nombres d'onde plus petits, la dissipation de ce filtre est malgré tout plus grande d'un

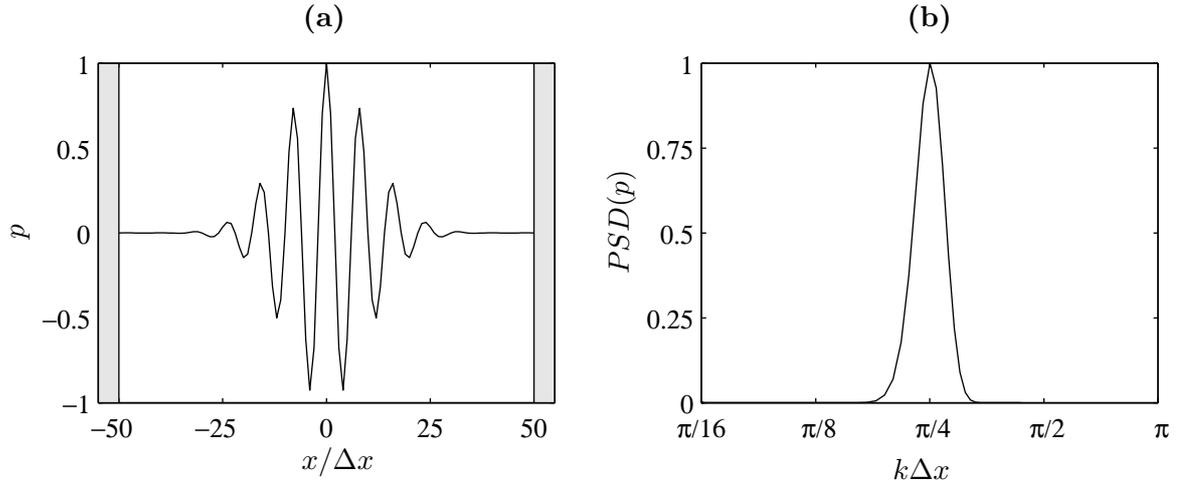


Figure 4.10: (a) Perturbation initiale de pression, et (b) densité spectrale de puissance de la perturbation initiale, pour le cas test d'acoustique linéaire. Les bandes grises représentent les parois solides.

ordre de grandeur par rapport à celles des autres filtres décentrés. Le filtre SF_{03} sera donc implémenté par la suite avec une intensité de filtrage σ dix fois plus faible que celle utilisée pour les autres filtres du domaine de calcul.

4.2.3 Propagation linéaire monodimensionnelle

Un problème d'acoustique linéaire 1-D est considéré sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

sur un domaine de calcul qui s'étend de $x = -50$ à $x = 50$, avec une discrétisation uniforme de taille de maille $\Delta x = 1$. Des conditions de parois solides sont implémentées aux frontières du domaine, où l'on impose :

$$v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \text{à} \quad x = \pm 50 \quad (4.20)$$

Numériquement, la dérivée spatiale $\partial p/\partial x$ est mise à zéro, et le gradient $\partial u/\partial x$ est calculé à partir des points intérieurs du domaine.

La perturbation initiale est définie à $t = 0$ par,

$$\begin{cases} u = 0 \\ p = \cos\left(\frac{2\pi x}{a\Delta x}\right) \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{x}{b\Delta x}\right)^2\right] \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $a = 8$, et $b = 12$. Le signal de pression correspondant est fourni par la figure 4.10.a et sa densité spectrale de puissance sur la figure 4.10.b. on note que la perturbation à $t = 0$ est dominée par une onde discrétisée par huit points par longueur d'onde.

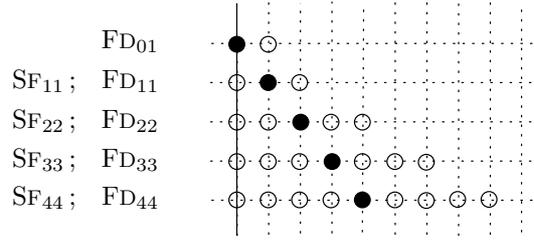


Figure 4.11: Nomenclature des différences finies et des filtres sélectifs standards centrés, et du schéma aux différences finies complètement décentré FD_{01} .

Le système (4.19) est résolu jusqu'à $t = 200$. À cet instant du calcul, la composante de la perturbation initiale qui se propage vers les x positifs, et celle qui se propage vers les x négatifs se rejoignent après deux réflexions sur les parois pour former une onde identique à l'onde initiale. L'intégration temporelle est prise en charge par un schéma de Runge-Kutta optimisé à six étapes [14], et les différences finies et le filtre sélectif centrés sur onze points de Bogey & Bailly [14] sont utilisés pour les points intérieurs. Le nombre de CFL est pris égal à 0.8, et conduit à un pas de temps $\Delta t = 0.8$. Deux valeurs de l'intensité du filtrage sont considérées, $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$.

La résolution du problème est abordée dans un premier temps en utilisant des schémas aux différences finies et des filtres standards centrés près des parois. Ces schémas sont des algorithmes obtenus en maximisant l'ordre de précision. Au dernier point du domaine de calcul, les schémas centrés ne peuvent plus être utilisés et un schéma décentré sur deux points est donc implémenté. Une vue schématique de ces algorithmes est donnée sur la figure 4.11. Les schémas décentrés développés dans les sections 4.2.1 et 4.2.2 sont ensuite progressivement substitués aux algorithmes centrés afin d'illustrer leurs précisions respectives. On notera que ce calcul n'utilise pas de filtre complètement décentré au premier et au dernier points du domaine de calcul. Finalement, l'erreur est évaluée avec la norme L_2 suivant,

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum (p - p_e)^2}{\sum p_e^2}} \quad (4.22)$$

où p et p_e sont respectivement la solution calculée et la solution exacte.

Les solutions calculées sont présentées sur la figure 4.12. Les figures 4.12.1a et 4.12.1b montrent les solutions obtenues en utilisant uniquement des schémas centrés. La perturbation est fortement atténuée pour les deux intensités de filtrage $\sigma = 0.2$, et $\sigma = 0.8$. Sur les figures 4.12.2a et 4.12.2b, les schémas centrés FD_{01} , FD_{11} et SF_{11} sont remplacés par les schémas décentrés FD_{010} , FD_{19} et SF_{15} . Les solutions calculées sont alors en bon accord avec la solution exacte. Cependant, contrairement au cas avec $\sigma = 0.2$, la solution calculée avec $\sigma = 0.8$, pour laquelle le filtrage est plus fort, est légèrement atténuée. Finalement, les solutions obtenues en utilisant uniquement des schémas décentrés sont présentées sur les figures 4.12.3a et 4.12.3b. Avec cette configuration de schémas aux parois, une augmentation de l'intensité du filtre de $\sigma = 0.2$ (figure 4.12.3a) à $\sigma = 0.8$ (figure 4.12.3b) n'affecte pas la solution calculée de manière significative. L'intensité du filtrage a donc peu d'effets sur la précision de la solution obtenue.

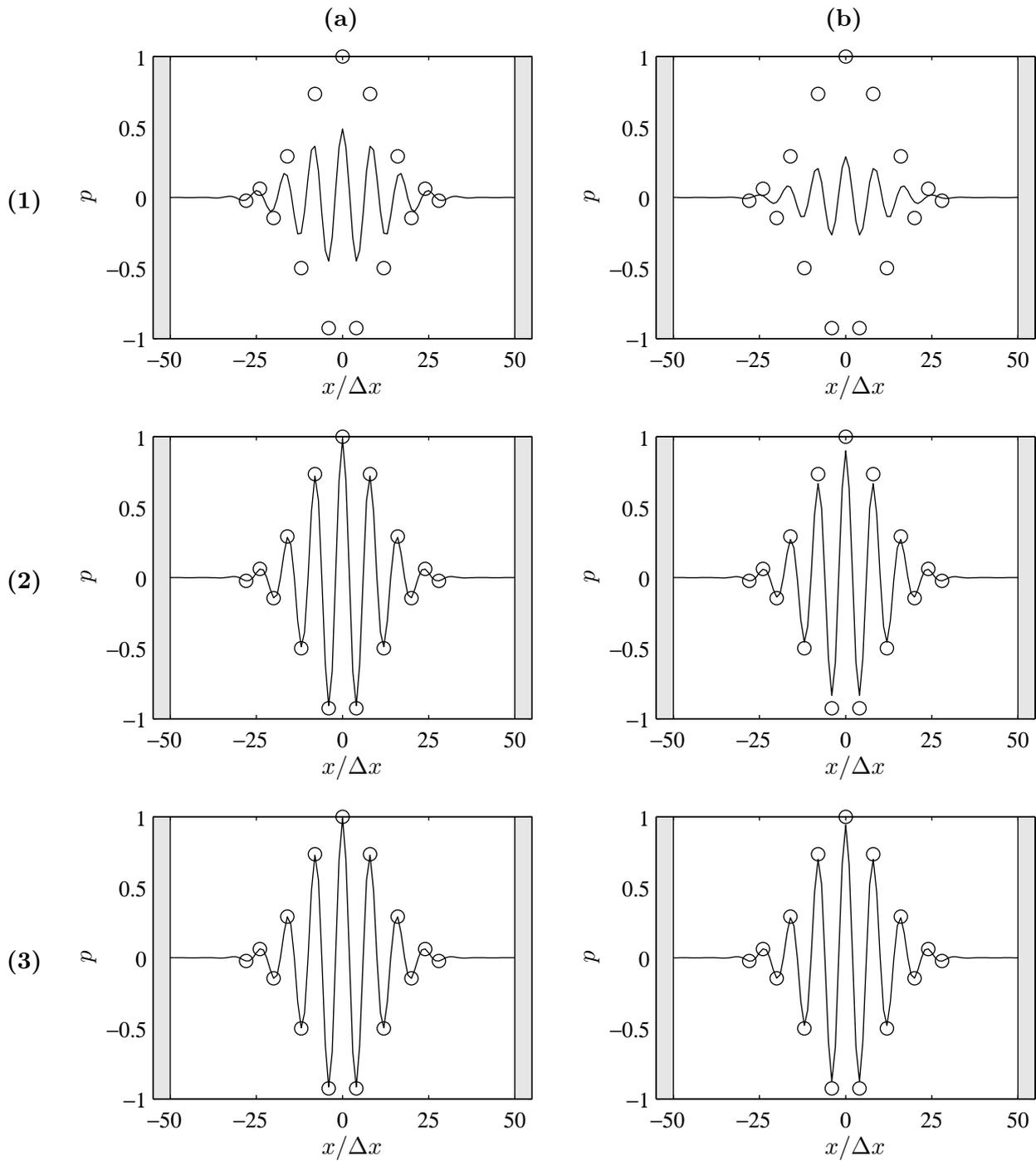


Figure 4.12: Solutions calculées pour le cas test de réflexion acoustique. Les bandes grises représentent les parois solides. **(a)** $\sigma = 0.2$. **(b)** $\sigma = 0.8$. **(1)** différences finies centrées et filtres sélectifs centrés. **(2)** les schémas FD_{01} , FD_{11} et SF_{11} sont remplacés par les algorithmes FD_{010} , FD_{19} et SF_{15} . **(3)** schémas décentrés optimisés. —, solution calculée; \circ , solution exacte.

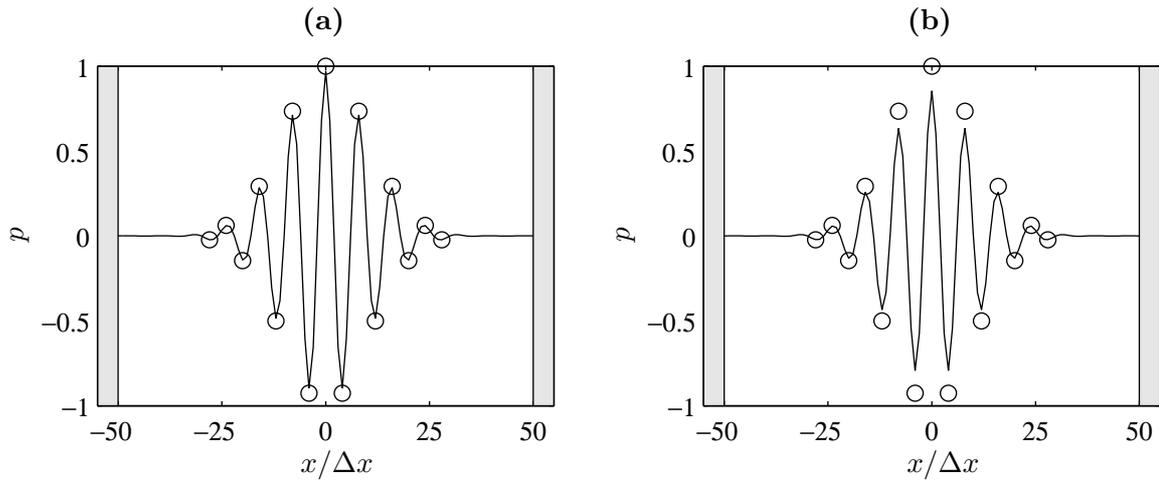


Figure 4.13: Solutions calculées pour le cas test de réflexion acoustique résolu avec les schémas décentrés et le filtre S_{F03} . Les bandes grises représentent les parois solides. **(a)** $\sigma = 0.2$, **(b)** $\sigma = 0.8$. Dans les deux cas, l'intensité du filtrage à la paroi est égale à $\sigma/10$. —, solution calculée; o, solution exacte.

L'erreur numérique obtenue pour le cas test est reportée dans le tableau 4.4 pour différentes configurations de différences finies et de filtres sélectifs. De la colonne de gauche à celle de droite, les schémas centrés sont progressivement remplacés par des schémas décentrés optimisés. L'utilisation de schémas centrés et des schémas FD_{01} et FD_{10} aux extrémités du domaine induit une erreur numérique importante comme le montrent les deux colonnes les plus à gauche. La substitution des différences finies FD_{01} par les différences finies FD_{10} ne semble pas améliorer la précision du calcul, ce qui suggère que l'essentiel de l'erreur est dû aux schémas centrés. L'implémentation des schémas FD_{19} et S_{F15} à la place des algorithmes FD_{11} et S_{F11} se traduit par un gain important en terme de précision. L'erreur décroît en effet d'environ un ordre de grandeur pour $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$ (troisième colonne à partir de la gauche). Quand les schémas décentrés FD_{28} et S_{F28} sont ensuite introduits, l'erreur reste identique à celle de la configuration précédente (quatrième colonne à partir de la gauche). Le remplacement des schémas FD_{33} et S_{F33} par les schémas FD_{37} et S_{F37} divise l'erreur par trois pour $\sigma = 0.2$, et par deux pour $\sigma = 0.8$ (cinquième colonne à partir de la gauche). Il n'y enfin a pas d'amélioration significative lorsque les schémas FD_{46} et S_{F46} sont introduits (colonne la plus à droite). Finalement, pour le cas test considéré, l'utilisation des schémas décentrés optimisés à la place des schémas centrés standard induit un gain sur la précision d'au moins un ordre de grandeur pour $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$.

Le cas test est maintenant résolu en utilisant le filtre complètement décentré S_{F03} au premier et dernier point du domaine de calcul. Les autres points au voisinage de la paroi sont traités en utilisant les différences finies et les filtres décentrés optimisés sur onze points comme sur les figures 4.12.3a et 4.12.3b. En pratique, le filtre S_{F03} est implémenté uniquement pour des raisons de stabilité. D'après la figure 4.9.a, pour $k\Delta x < \pi/2.5$, le taux de dissipation du filtre complètement décentré est cependant plus grand d'un ordre de grandeur que celui du filtre S_{F55} . Ainsi, afin d'éviter une atténuation excessive des perturbations, l'intensité du filtrage utilisée pour le schéma S_{F03} , notée σ_w , est prise dix fois plus petite que l'intensité σ

aux autres points de maillage.

Deux calculs sont présentés ici : l'un avec $\sigma = 0.2$, et l'autre avec $\sigma = 0.8$, conduisant respectivement à $\sigma_w = 0.02$, et $\sigma_w = 0.08$ pour l'intensité du filtrage à la paroi. Les résultats sont présentés sur la figure 4.13.a pour $\sigma = 0.2$, et sur la figure 4.13.b pour $\sigma = 0.8$. Pour $\sigma = 0.2$, la perturbation calculée se superpose très bien à la solution exacte. La solution obtenue avec $\sigma = 0.8$, sur la figure 4.13.b, est toujours en bon accord avec la solution exacte. La dissipation de la perturbation est faible, et la précision est du même ordre de grandeur que celle obtenue pour la solution de la figure 4.12.3b, qui a été calculée avec $\sigma = 0.8$ à l'aide des schémas décentrés optimisés et sans filtre complètement décentré à la paroi.

4.3 Conclusion

Un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre, à stockage réduit et optimisé dans l'espace de Fourier a été construit. L'algorithme a une limite de stabilité élevée et l'étude de ses propriétés en dissipation et en dissipation a montré qu'il est précis à partir de quatre pas de temps par période. L'ordre quatre est en outre assuré que le système à résoudre soit linéaire ou non linéaire. Des cas test de propagation linéaire ou non linéaire ont ainsi été résolus. Il s'avère que la précision est garantie pour les basses fréquences par l'ordre quatre du schéma tandis que l'optimisation dans l'espace de Fourier pour un système linéaire permet de résoudre avec précision les hautes fréquences.

Des différences finies et des filtres sélectifs explicites décentrés ont également été développés en minimisant leurs erreurs de dispersion et de dissipation dans l'espace spectral. Ces schémas sont précis jusqu'à cinq points par longueur d'onde. Un cas test de réflexion acoustique a montré que l'utilisation de ces schémas décentrés optimisés conduit à une amélioration significative de la précision comparé aux schémas centrés standards. Les algorithmes numériques décentrés présentés dans ce chapitre ont par exemple été utilisés par Barré [7] pour traiter des conditions limites de paroi, l'objectif étant de prendre en compte la présence d'une tuyère lors de la simulation des grandes échelles d'un jet subsonique. De la même manière, Marsden [73] a implémenté ces schémas décentrés afin d'effectuer le calcul direct du bruit généré par un profil d'aile.

À noter par ailleurs que l'annexe E propose des schémas aux différences finies et des filtres sélectifs de raccordement qui permettent de connecter deux maillages uniformes de taille de maille Δx et $2\Delta x$. Ces algorithmes peuvent être par exemple mises en place pour déterminer le champ acoustique lointain généré par un écoulement turbulent.

Tableau 4.4: Cas test de réflexion acoustique. Norme L_2 de l'erreur pour différentes configurations de différences finies et de filtres sélectifs aux frontières du domaine. Colonne la plus à gauche : utilisation de schémas centrés, excepté FD_{01} au point de paroi; colonne la plus à droite : utilisation des schémas décentrés optimisés; de gauche à droite : les schémas décentrés optimisés sont progressivement substitués aux schémas centrés. Les schémas décentrés optimisés sont notés en gras.

	FD_{44} & SF_{44}	FD_{44} & SF_{44}	FD_{44} & SF_{44}	FD_{44} & SF_{44}	FD_{44} & SF_{44}	FD_{46} & SF_{46}
	FD_{33} & SF_{33}	FD_{33} & SF_{33}	FD_{33} & SF_{33}	FD_{33} & SF_{33}	FD_{37} & SF_{37}	FD_{37} & SF_{37}
	FD_{22} & SF_{22}	FD_{22} & SF_{22}	FD_{22} & SF_{22}	FD_{28} & SF_{28}	FD_{28} & SF_{28}	FD_{28} & SF_{28}
	FD_{11} & SF_{11}	FD_{11} & SF_{11}	FD_{19} & SF_{15}	FD_{19} & SF_{15}	FD_{19} & SF_{15}	FD_{19} & SF_{15}
	FD_{01}	FD_{010}	FD_{010}	FD_{010}	FD_{010}	FD_{010}
$\sigma = 0.2$	0.53	0.35	0.02	0.03	0.01	0.01
$\sigma = 0.8$	0.72	0.85	0.10	0.10	0.06	0.05

Simulation des grandes échelles du screech d'un jet plan sous-détendu

Ce dernier chapitre est consacré à la simulation des grandes échelles (SGE) compressible d'un jet plan tridimensionnel par des méthodes d'ordre élevé, l'objectif étant d'obtenir lors d'un même calcul le développement aérodynamique de l'écoulement et le champ acoustique rayonné. On s'attache en particulier dans ce travail à reproduire le bruit de screech. La mise en place de la simulation et les paramètres numériques sont détaillés dans la section 5.1. Le développement turbulent et le champ acoustique de la SGE sont alors comparés aux données expérimentales dans la section 5.2. Des visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique issus de la SGE sont ensuite présentées afin d'interpréter les sources de bruit à l'origine du screech selon le mécanisme de fuite des chocs (*shock-leakage*) proposé par Suzuki & Lele [125]. Une étude qualitative de l'interaction entre les chocs et les structures tourbillonnaires est ainsi proposée dans la section 5.3.

5.1 SGE compressible d'un jet plan sous-détendu

5.1.1 Stratégie pour la SGE et méthodes numériques

Les méthodes numériques et la stratégie mise en place pour la SGE sont présentées en détail dans le chapitre 2. Les équations de Navier-Stokes filtrées données par l'expression (2.28) sont donc résolues afin d'effectuer la SGE d'un jet plan sous-détendu. Des algorithmes d'ordre élevé sont utilisés pour les discrétisations spatiales et temporelles et pour le filtrage sélectif. Des conditions aux limites de périodicité sont implémentées dans la direction z , cependant que des conditions non-réfléchissantes sont mises en place suivant les directions x et y . Une zone éponge est également placée à l'extrémité aval du domaine de calcul pour atténuer progressivement les perturbations aérodynamiques. La tuyère du jet, qui est un élément nécessaire à l'apparition du screech, est prise en compte par deux plaques planes adiabatiques, séparées par une distance h qui définit la hauteur du jet. À l'intérieur de la buse, la méthode des caractéristiques est utilisée pour spécifier les conditions d'entrée. Une vue schématique du domaine de calcul et du système de coordonnées Cartésiennes est fournie sur la figure 5.1[†].

[†]Dans la suite de ce chapitre, on parlera pour la direction x de direction *longitudinale* ou *axiale*, tandis que l'adjectif *transversal* sera associé à la direction y . La direction *de l'envergure* ou direction *latérale* correspondra à la direction z , et le *plan médian* se référera au plan $(x, y, z = 0)$.

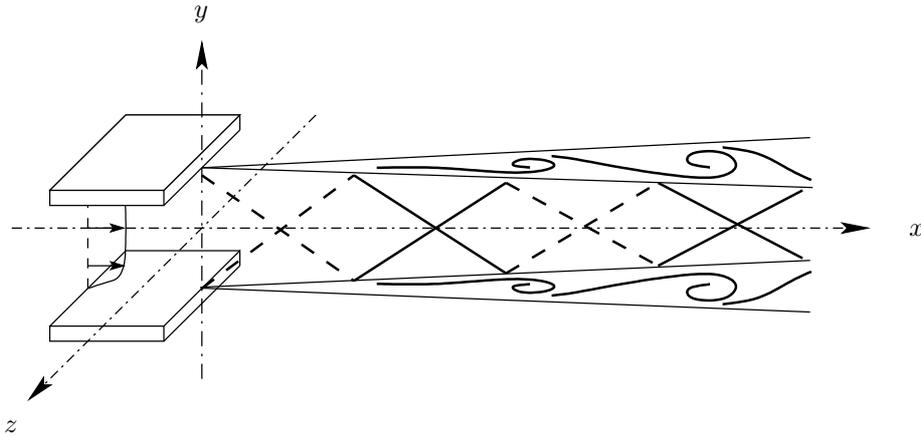


Figure 5.1: Vue schématique du domaine de calcul et de l'écoulement. Le système de coordonnées Cartésiennes (x, y, z) est également indiqué.

5.1.2 Paramètres de simulation

Conditions d'entrée

Le jet est supposé issu d'une tuyère convergente. La vitesse d'éjection en sortie de tuyère est alors sonique, et le nombre de Mach d'éjection $M_d = U_e/c_e$ est égal à 1, en notant U_e et c_e la vitesse sur l'axe et la vitesse du son au niveau de la sortie de la buse. Le milieu ambiant dans lequel le jet se développe est considéré comme étant au repos. Il est immobile et est caractérisé par une pression $p_\infty = 10^5$ Pa et une densité $\rho_\infty = 1.22 \text{ kg.m}^{-3}$. La température d'éjection T_e est ensuite choisie de manière à avoir une température d'arrêt isentropique T_r , ou température du réservoir, égale à 288 K, avec :

$$T_e = T_r \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_d^2 \right)^{-1} \quad (5.1)$$

Pour que le jet soit sous-détendu et qu'il se forme des cellules de choc, la pression d'éjection p_e est imposée supérieure à la pression ambiante, avec $p_e/p_\infty = 2.09$. Le nombre de Mach équivalent du jet M_j est alors déduit de la relation :

$$M_j = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_d^2 \right) \left(\frac{p_e}{p_\infty} \right)^{1-1/\gamma} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (5.2)$$

qui fournit $M_j = 1.55$ (*cf.* l'annexe A pour une définition de M_j). Krothapalli *et al.* [59] observent en effet que pour un jet rectangulaire de rapport longueur/largeur important, le maximum de rayonnement du screech est atteint pour cette valeur de M_j . La pression en sortie de tuyère p_e étant fixée, la vitesse d'éjection U_e sur l'axe est donnée par l'expression $U_e = M_d \sqrt{\gamma p_e / \rho_e}$, qui fait intervenir la densité ρ_e sur l'axe en sortie de buse, qui est déterminée à l'aide de l'équation des gaz parfaits : $\rho_e = p_e / (r T_e)$.

Dans une section de la tuyère, les variables de l'écoulement varient peu au voisinage de l'axe. Cependant, à proximité des surfaces solides, il est nécessaire d'introduire un profil de couche limite pour respecter la condition de non-glissement. Ainsi, près des parois, le profil

Tableau 5.1: Paramètres de simulation pour le calcul du screech d'un jet plan sous-détendu.

M_j	p_e/p_∞	h (mm)	h_l	δ_θ/h	Re_h	Δ_m	Δt (s)
1.55	2.09	3	$h/4$	3×10^{-2}	6×10^4	$h/40$	8.6×10^{-8}

de la vitesse longitudinale est une approximation de la couche limite laminaire de Blasius définie par l'expression,

$$\frac{u}{U_e} = \begin{cases} \eta(2 - 2\eta^2 + \eta^3) & \text{si } \eta < 1 \\ 1 & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

où η est la distance à la paroi, normalisée par l'épaisseur de la couche limite δ . Les autres composantes de la vitesse, v et w , sont choisies nulles. Au-dehors des couches limites, la vitesse longitudinale u est uniforme et égale à U_e et les composantes transversales de la vitesse sont nulles, soit $v = w = 0$.

L'épaisseur de la couche limite δ est un paramètre essentiel du jet. Les mesures de Zaman [163] effectuées sur les couches limites en sortie de buse de différents jets ronds subsoniques montrent que pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 , l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ de la couche limite est très faible, de l'ordre de $\delta_\theta/D \sim 10^{-3}$, si D est le diamètre du jet. Numériquement, il est très coûteux de mailler une couche limite aussi fine. L'épaisseur de quantité de mouvement est alors fixée pour la simulation à $\delta_\theta/h \sim 10^{-2}$ afin de pouvoir utiliser un maillage de taille raisonnable

Le profil de densité est finalement déterminé grâce à la relation de Crocco-Busemann [160],

$$\rho = \left[\frac{1}{\rho_w} - \left(\frac{1}{\rho_w} - \frac{1}{\rho_e} \right) \frac{u}{U_e} - \frac{\gamma - 1}{2} M_d^2 \left(\frac{u}{U_e} - 1 \right) \frac{u}{U_e} \right]^{-1} \quad (5.4)$$

qui fait intervenir la densité sur la paroi de la tuyère ρ_w . Pour une surface solide adiabatique, la température sur la paroi T_w est égale à la température d'arrêt isentropique. On en déduit ainsi pour la masse volumique la relation $\rho_w = p_e/rT_r$.

La hauteur h du jet est de 3 mm, et l'épaisseur h_l de la lèvre de la tuyère est identique à celle du montage expérimental de Raman & Rice [95], c'est à dire $h_l = h/4$. Le nombre de Reynolds est construit sur la vitesse équivalente U_j , elle-même définie par $U_j = M_j c_j$. La vitesse du son $c_j = \sqrt{\gamma r T_j}$ dépend de la température T_j dans le jet équivalent, qui est évaluée en substituant T_j à T_e , et M_j à M_d dans la relation (5.1). Finalement, $Re_h = U_j h / \nu$ est égal à 6×10^4 .

Le tableau 5.1 résume les paramètres utilisés pour la simulation.

Maillage et paramètres numériques

Le maillage utilisé est Cartésien et est constitué de $525 \times 257 \times 121 \sim 16.3 \times 10^6$ points, avec une discrétisation de la hauteur du jet par 40 points. La taille de maille la plus petite est définie par $\Delta_m = h/40$ et conduit à discrétiser la couche limite dans la buse avec 7 points. Une vue de la grille utilisée est donnée sur la figure 5.2. Dans la direction longitudinale, la taille de maille Δx est prise égale à $5/3\Delta_m$. La buse s'étend sur $0.6h$ à l'intérieur du

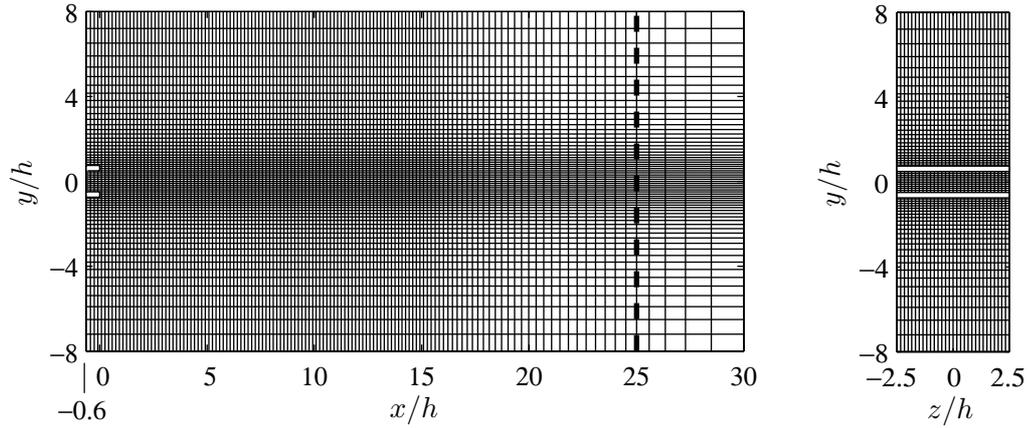


Figure 5.2: Vu du maillage Cartésien irrégulier, dans les plans (xy) et (yz) , utilisé pour la simulation du jet plan sous-détendu. Seulement un point sur quatre de la grille ont été représenté pour plus de clarté. La ligne en tiret indique le commencement de la zone éponge, et les surfaces blanches représentent les lèvres de la tuyère.

domaine, et le maillage est uniforme entre $x/h = 0$ et $x/h = 15$. Les mailles sont ensuite étirées avec un taux de 0.8% jusqu'à $x/h = 25$. Au-delà de ce point, le taux d'étirement est de 6% sur les vingt derniers points pour construire la zone éponge. Suivant l'axe des y , au centre du domaine, pour $|y/h| < 0.9$, le maillage est uniforme avec $\Delta y = \Delta_m$. Au-delà de $y/h = \pm 0.9h$ les mailles sont étirées avec un taux de 2% jusqu'à $y/h = \pm 8$. Dans la direction z de l'envergure, le maillage est uniforme, avec $\Delta z = 5/3\Delta_m$. Le domaine couvre ainsi une étendue de $5h$ suivant cette direction.

Finalement, le domaine de calcul util, *i.e.* en dehors de la zone éponge, a les dimensions suivantes : $25.6h \times 16h \times 5h$. Il donne accès au champ proche acoustique, et est suffisamment étendu dans la direction de l'écoulement pour que le jet atteigne un régime subsonique en aval.

Le pas de temps est basé sur le nombre de CFL = $(U_j + c_j)\Delta t/\Delta_m$ qui est pris égal à 1. On en déduit ainsi que $\Delta t \simeq 8.6 \times 10^{-8}$ s. Il sera alors nécessaire de calculer 600 itérations pour simuler une période du screech. La simulation présentée dans ce chapitre a été effectuée sur 80000 itérations, afin de disposer d'une centaine de périodes du screech et de s'assurer que les grandeurs statistiques ont bien convergé. Le filtrage sélectif est appliqué une fois par itération avec un coefficient $\sigma = 0.9$.

5.2 Résultats et validation

5.2.1 Instantané des champs de vorticité et de pression

Une vue instantanée du champ de vorticité ω_z suivant l'envergure est représentée sur la figure 5.3 sur l'ensemble du domaine de calcul. Une large gamme d'echelles turbulentes est visible. En particulier, des petites echelles caractéristiques des écoulements   haut nombre de Reynolds sont présentes. Des isocontours de pression sont également tracés dans le plan $z/h = -2.5$. On observe de part et d'autre du jet des fronts d'onde se propageant vers l'amont. Ce rayonnement acoustique est typique du bruit généré par le screech, et il sera montré dans

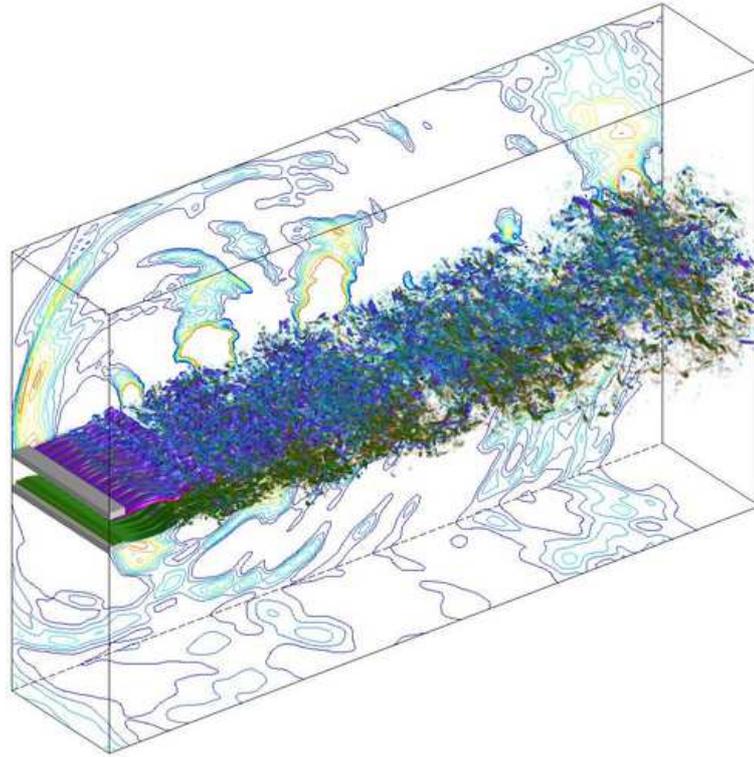


Figure 5.3: Visualisation du champ instantané de vorticité ω_z suivant l'envergure, dans l'ensemble du domaine. Les fluctuations de pression instantanées sont également tracées dans les plans $z/h = -2.5$ et $y/h = -8$. Les lèvres de la tuyère sont représentées en gris.

la section 5.2.4 que le phénomène est effectivement périodique et qu'il oscille à une fréquence fondamentale f_s , qui correspond à un nombre de Strouhal $St = f_s h / U_j$ égal à 0.126.

5.2.2 Champ moyen

Vitesse axiale moyenne

Une cartographie de la vitesse axiale normalisée \bar{u}/U_j dans le plan médian (x, y) est proposée sur la figure 5.4. Cette représentation du champ moyen fait clairement apparaître une structure périodique de cellules de choc qui s'étend dans la colonne du jet et qui résultent de la surpression imposée en sortie de tuyère. On observe que ces cellules de choc sont composées de zones de détente et de compression qui s'accompagnent d'accélération et de ralentissement de l'écoulement, et qui s'affaiblissent progressivement dans la direction aval. En effet, l'interaction entre la couche de mélange et le réseau de chocs devient plus intense quand les structures tourbillonnaires se développent dans la couche de mélange, et les gradients de vitesse et de pression sont par conséquent atténués.

La ligne sonique est également indiquée sur la figure 5.4. Elle correspond aux points où le nombre de Mach moyen est égal à 1 et permet de délimiter le cône supersonique du jet, qui s'étend pour ce calcul jusqu'à $x/h = 22$. Cette position est cependant plus en aval que celle fournie par Krothapalli *et al.* [59] pour un jet rectangulaire à $M_j = 1.52$, qui trouvent expérimentalement que la région supersonique de l'écoulement s'arrête sur l'axe à $x/h = 15$.

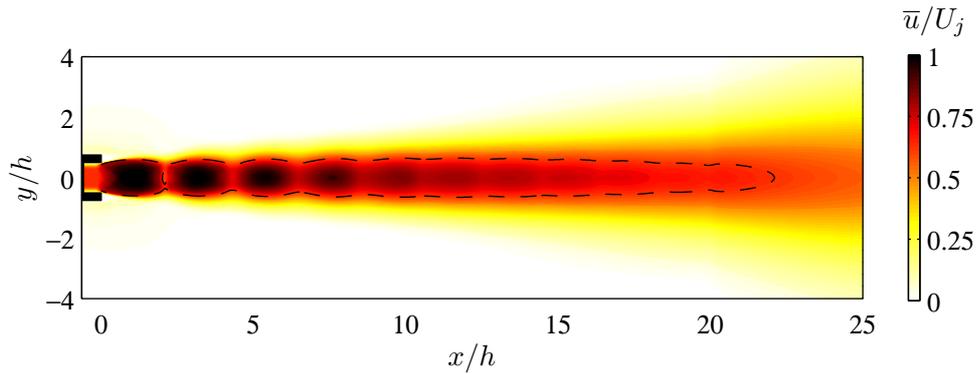


Figure 5.4: Cartographie de la vitesse moyenne longitudinale \bar{u}/U_j , dans le plan médian (x, y) du jet. $- - -$, ligne sonique ($M = 1$). Les rectangles noirs représentent les lèvres de la tuyère.

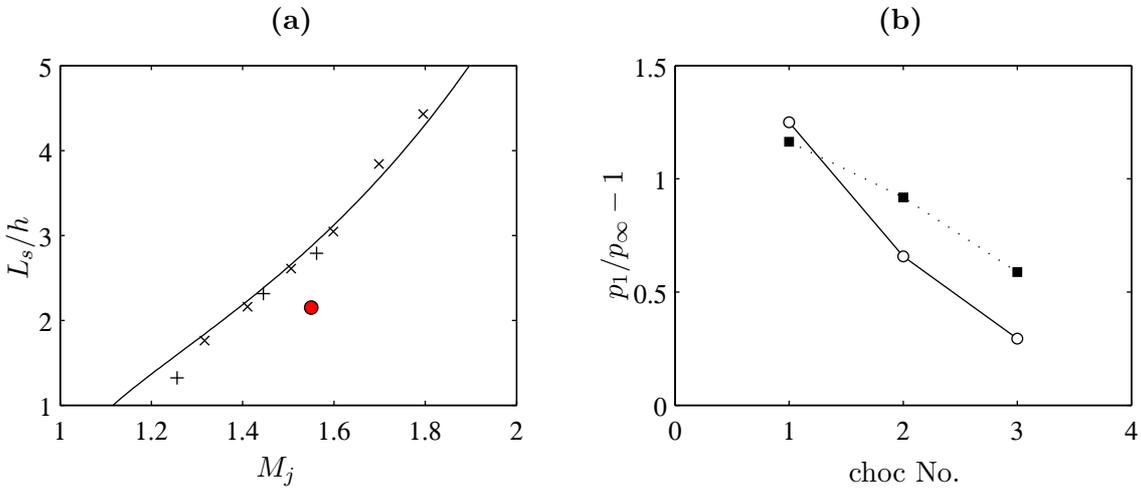


Figure 5.5: (a) Espacement L_s/h entre les cellules de choc en fonction du nombre de Mach équivalent M_j . Mesures sur des jets rectangulaires : \times , Panda *et al.* [87] ; $+$, Raman & Rice [95]. $-$, Formulation analytique de Tam [132] pour un jet plan ; \bullet , présent calcul. (b) Intensité des chocs $p_1/p_\infty - 1$ pour les trois premières cellules (p_1 est la pression maximale atteinte juste en amont du choc). $- \circ -$, mesures de Raman [97] pour un jet rectangulaire à $M_j = 1.55$; $\cdots \blacksquare \cdots$, présent calcul.

Cet écart peut être attribué au développement turbulent du jet. En effet, la couche de mélange de la SGE est probablement plus large que celle du dispositif expérimental de Krothapalli *et al.* [59]. Une couche de mélange plus fine se développe en effet plus rapidement, ce qui tend à dissiper plus rapidement les chocs. La décroissance de la vitesse sur l'axe est alors plus marquée.

Cellules de choc

L'espacement moyen entre les cellules de choc issus du champ moyen de la SGE est présenté sur figure 5.5.a, où l'espacement L_s/h est aussi tracé en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour différentes expériences sur des jets rectangulaires. Il apparaît que l'espacement entre les chocs fourni par le calcul est légèrement plus petit que celui des données

expérimentales. Cette tendance peut néanmoins être associée à l'épaisseur de la couche de mélange. En effet, en s'appuyant sur le modèle de Tam [132], il est possible de considérer que la colonne du jet agit comme un guide d'onde pour les discontinuités, et que les réflexions successives des chocs de compression et des ondes de détente sur la ligne sonique contribuent à former le réseau de cellules de choc. L'espacement entre les chocs est ainsi relié à la hauteur du cône supersonique, qui est relativement petite pour le présent calcul à cause de l'épaisseur initiale de la couche de mélange. En sortie de tuyère, la hauteur du cône supersonique est en effet égale à $h^* \simeq 0.8h$. L'espacement L_s/h^* , qui est alors égal à 2.7, est en bon accord avec les résultats expérimentaux présentés sur la figure 5.5.a. À noter par ailleurs que cette hypothèse est confirmée par le modèle de Morris & Bhat [82], qui montre en particulier que pour des jets circulaires, l'espacement entre les chocs diminue quand la couche de mélange devient plus épaisse.

L'intensité des chocs est maintenant considérée. Cette grandeur est définie comme le rapport entre la pression juste en amont des chocs de compression et la pression ambiante. Les intensités des chocs obtenues dans la simulation sont comparées aux mesures effectuées par Raman [97] sur un jet rectangulaire à un nombre de Mach identique ($M_j = 1.55$). Il apparaît que les valeurs obtenues par le calcul et par l'expérience pour le premier choc sont en bon accord. Les intensités des deuxième et troisième chocs fournies par la simulation sont cependant plus grandes que celles mesurées par Raman [97]. Il semble donc que le processus d'affaiblissement des chocs vers l'aval n'est pas bien reproduit par le calcul. Cette tendance peut être liée d'une part au développement de la couche de mélange, qui est la première cause de dissipation des chocs. Dans la SGE, l'écoulement en sortie de tuyère est en effet laminaire. Or, il est probable que pour les jets étudiés en laboratoire la couche limite dans la buse soit turbulente [163]. Par conséquent, le développement des structures tourbillonnaires plus en aval doit différer de celui obtenu par le calcul présenté dans ce chapitre. De plus, le caractère périodique du jet simulé ne permet pas de reproduire le développement turbulent des jets rectangulaires dans la direction du grand axe, puisqu'il est du à la croissance des couches de mélange latérales. Les mesures de Raman [96] montrent par exemple que le champ moyen de pression associé à un jet rectangulaire choqué présente une structure tridimensionnelle, et que cette tendance est plus particulièrement visible quand on se déplace vers l'aval. Cette observation pourrait expliquer le fait que le calcul reproduit correctement l'intensité du premier choc tandis que les intensités des chocs plus en aval sont surestimées.

Distribution transverse de la vitesse moyenne

La figure 5.6.a fournit l'évolution axiale de la demi-largeur $\delta_{0.5}/h$ du jet. Dans la partie amont de l'écoulement, pour $x/h < 5$, la demi-largeur est modulée par les zones de détente et de compression des deux premières cellules de choc. Entre $x/h = 5$ et $x/h = 15$, la distribution de vitesse s'élargit de manière linéaire. La demi-largeur peut alors être mise sous la forme $\delta_{0.5} = a(x - x_0)$, où a est le taux de croissance et x_0 l'origine fictive du jet. Ainsi, pour $5 < x/h < 15$, le taux de croissance est relativement petit et égal à 0.05. Plus en aval, à $x/h = 20$, des structures tourbillonnaires plus grandes apparaissent dans l'écoulement et le taux de croissance atteint la valeur 0.18. Ce résultat est cohérent avec le taux de 0.16 mesuré par Krothapalli *et al.* [59] pour un jet rectangulaire au nombre de Mach $M_j = 1.52$, dans la

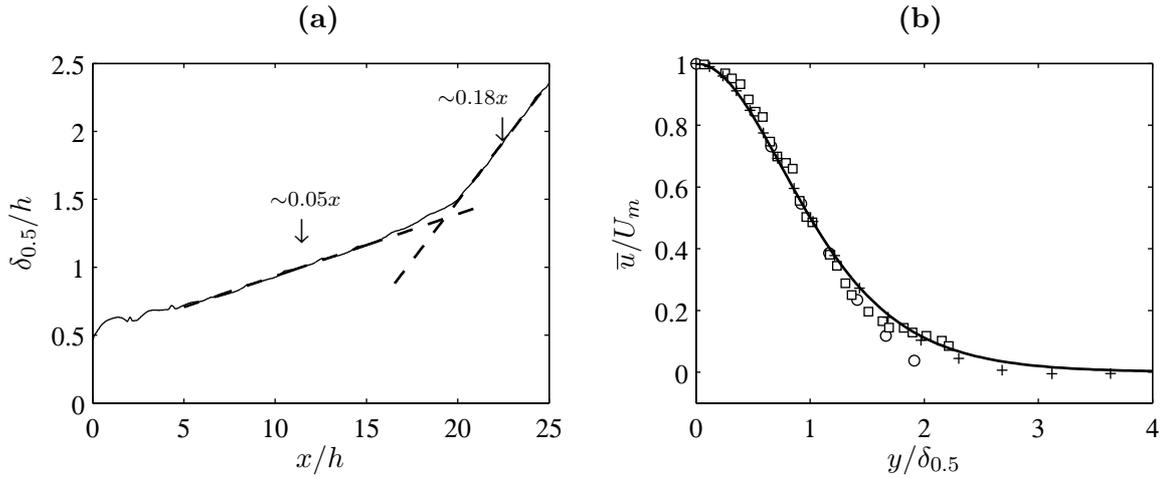


Figure 5.6: (a) Demi-largeur $\delta_{0.5}/h$ du jet en fonction de la position longitudinale x/h . (b) Profil latéral de vitesse longitudinale moyenne normalisée par la vitesse sur l'axe \bar{u}/U_m , en fonction de $y/\delta_{0.5}$. —, profil fournit par la relation (5.5); \circ , profils expérimentaux de Gutmark & Wygnanski [45]; \square , profils expérimentaux de Bradbury [23]. +, présent calcul à $x/h = 25$.

région située entre $x/h = 40$ et $x/h = 80$.

La distribution transverse de la vitesse moyenne axiale \bar{u}/U_m normalisée par la vitesse sur l'axe est donnée sur figure 5.6.b en fonction de $y/\delta_{0.5}$. Les résultats expérimentaux de Gutmark & Wygnanski [45] et de Bradbury [23], ainsi que le profil analytique autosimilaire obtenu pour un jet plan :

$$\frac{\bar{u}}{U_m} = \frac{1}{\cosh^2(0.88y/\delta_{0.5})} \quad (5.5)$$

sont également indiqués sur la figure 5.6.b. Les différents profils se superposent très bien sur l'ensemble du domaine transversal.

5.2.3 Modes d'oscillation de la couche de mélange

Le développement de la couche de mélange dans le jet est maintenant étudié en s'appuyant sur les fluctuations de vitesse fournies par la SGE, l'objectif étant de caractériser les instabilités aérodynamiques présentes dans l'écoulement.

Instabilités dominantes

L'évolution axiale des modes d'instabilité est considérée dans un premier temps. Les spectres des fluctuations de vitesse longitudinale et transversale u' et v' sont ainsi déterminés dans la couche de mélange, le long de la ligne ($x, y = h/2, z = 0$), qui est représentée sur la figure 5.7 indiquant la position des différents points de mesure. L'évolution dans la direction longitudinale de la densité spectrale de puissance de la composante de vitesse u' est donnée sur la figure 5.8.a en fonction de la position x/h , sous la forme d'une cartographie en échelle de couleur logarithmique. Dans la région amont de l'écoulement, pour $x/h < 10$, le mode dominant oscille à la fréquence fondamentale du screech : $St = 0.126$. L'amplitude des perturbations de vitesse de ce mode est de plus modulée de manière significative par

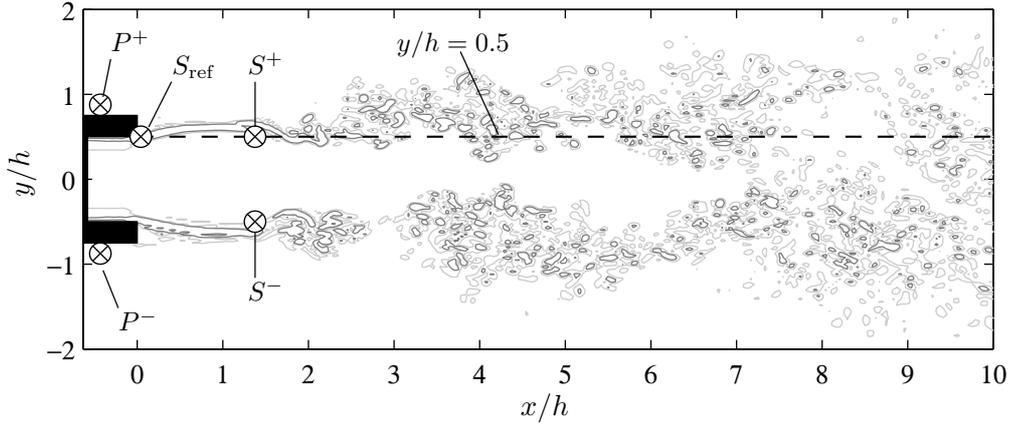


Figure 5.7: Définition des points de mesures dans le plan médian (x, y) du jet.

les cellules de choc, comme l'indiquent les variations prononcées de la densité spectrale au voisinage des chocs. Plus en aval, pour $x/h > 15$, l'instabilité à la fréquence du screech disparaît et laisse place à un mode basse-fréquence avec un contenu spectral relativement large-bande. La fréquence centrale de ce mode décroît par ailleurs légèrement avec la position x/h . Le nombre de Strouhal correspondant est en effet de 0.054 en $x/h = 15$, mais de 0.036 en $x/h = 25$. À noter que ces fréquences ne sont pas des sous-harmoniques du screech.

La figure 5.8.b présente maintenant l'évolution longitudinale de la densité spectrale de puissance des perturbations v' . D'une manière similaire à la composante u' , le mode d'oscillation dominant de la couche de mélange possède une fréquence identique au fondamental du screech. La modulation par le réseau des cellules de choc est cependant plus faible, et ce mode est visible jusqu'à $x/h = 22$. Pour $x/h > 15$, un pic basse-fréquence apparaît, mais contrairement au mode identifié pour u' en aval, le nombre de Strouhal correspondant est sensiblement constant et égal à 0.045.

Symétrie transversale des modes

Les modes d'oscillation de la couche de mélange identifiés ci-dessus peuvent être classés en utilisant l'interprétation de Thomas & Prakash [147] des instabilités d'un jet plan en terme de modes sinueux ou variqueux. Les répartitions de phase des instabilités qui se développent dans la couche de mélange sont donc étudiées à l'aide des interspectres des fluctuations de vitesse longitudinale u' et latérale v' . Les points de mesures se situent dans la zone aérodynamique de l'écoulement, de part et d'autre du jet, aux positions $(x/h, y/h) = (1.3, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (1.3, -0.5)$, symbolisées par S^+ et S^- sur la figure 5.7. L'interspectre des signaux de vitesse longitudinale u' obtenus en ces deux positions est noté P_{uu} . De la même manière, on associe aux fluctuations de vitesse v' un interspectre P_{vv} . Les grandeurs déduites des interspectres sont l'amplitude $|P|$, la cohérence C et la phase φ . Elles sont données sur les figures 5.9.a1, 5.9.a2 et 5.9.a3 pour les perturbations de vitesse longitudinale u' , et sur les figures 5.9.b1, 5.9.b2 et 5.9.b3 pour les fluctuations de vitesse latérale v' .

L'amplitude $|P_{uu}|$ déterminée pour les perturbations de vitesse longitudinale u' fait apparaître quatre pics harmoniques dont le fondamental correspond à la fréquence du screech.

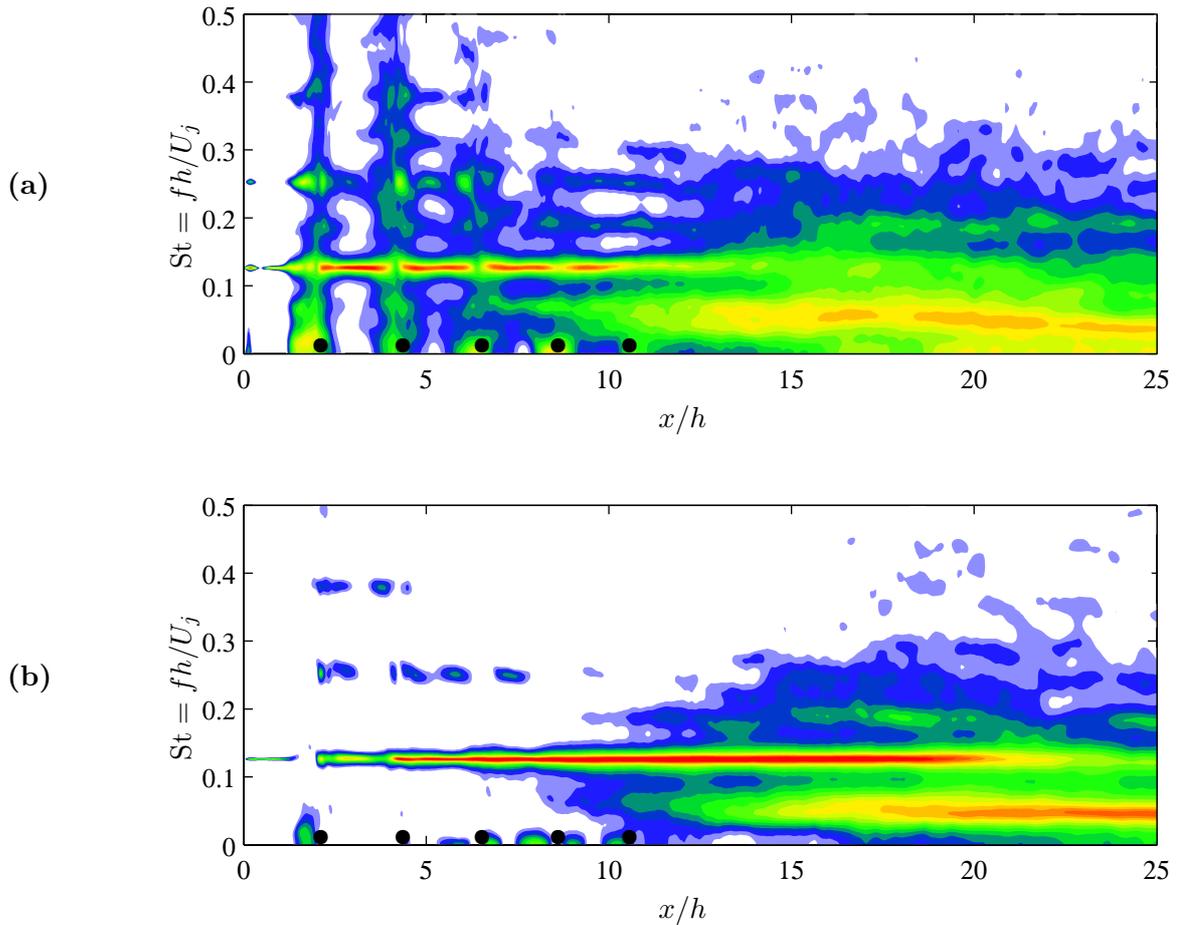


Figure 5.8: Évolution dans la direction longitudinale des densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse dans la couche de mélange, le long de la ligne $(x, y = h/2, z = 0)$, en échelle logarithmique. (a) Perturbations axiales u' , et (b) fluctuations transverses v' . Les positions des chocs sont indiquées par le symbole \bullet .

De plus, la cohérence C_{uu} met en évidence que ces harmoniques sont cohérentes dans les couches de mélange de part et d'autre du jet, puisque C_{uu} atteint pour ces quatre harmoniques des valeurs proches de 1. Finalement, la phase φ_{uu} , qui donne des renseignements sur la différence de phase entre les perturbations qui sont convectées en $y = h/2$ et en $y = -h/2$, montre que le fondamental et le deuxième harmonique du screech sont antisymétriques, tandis que le premier et le troisième harmonique sont symétriques. On a en effet, $\varphi_{uu}(f_s) = -\pi$, $\varphi_{uu}(2f_s) = 0$, $\varphi_{uu}(3f_s) = \pi$ et $\varphi_{uu}(4f_s) = 0$, si f_s est la fréquence dominante du screech.

Si on considère maintenant l'interspectre basé sur les fluctuations de vitesse latérale v' , il s'avère que l'amplitude $|P_{vv}|$ présente une allure similaire à celle obtenue avec u' . Une série de raies coïncidant avec les harmoniques du screech sont effectivement visibles sur la figure 5.9.b1. Les perturbations à ces fréquences sont en outre cohérentes comme le montre C_{vv} qui reste proche de 1 aux nombres de Strouhal correspondant. La phase φ_{vv} de l'interspectre prend néanmoins des valeurs opposées à celles de φ_{uu} . On distingue sur la figure 5.9.b3 que le fondamental et le deuxième harmonique sont symétriques, alors que le premier et le troisième

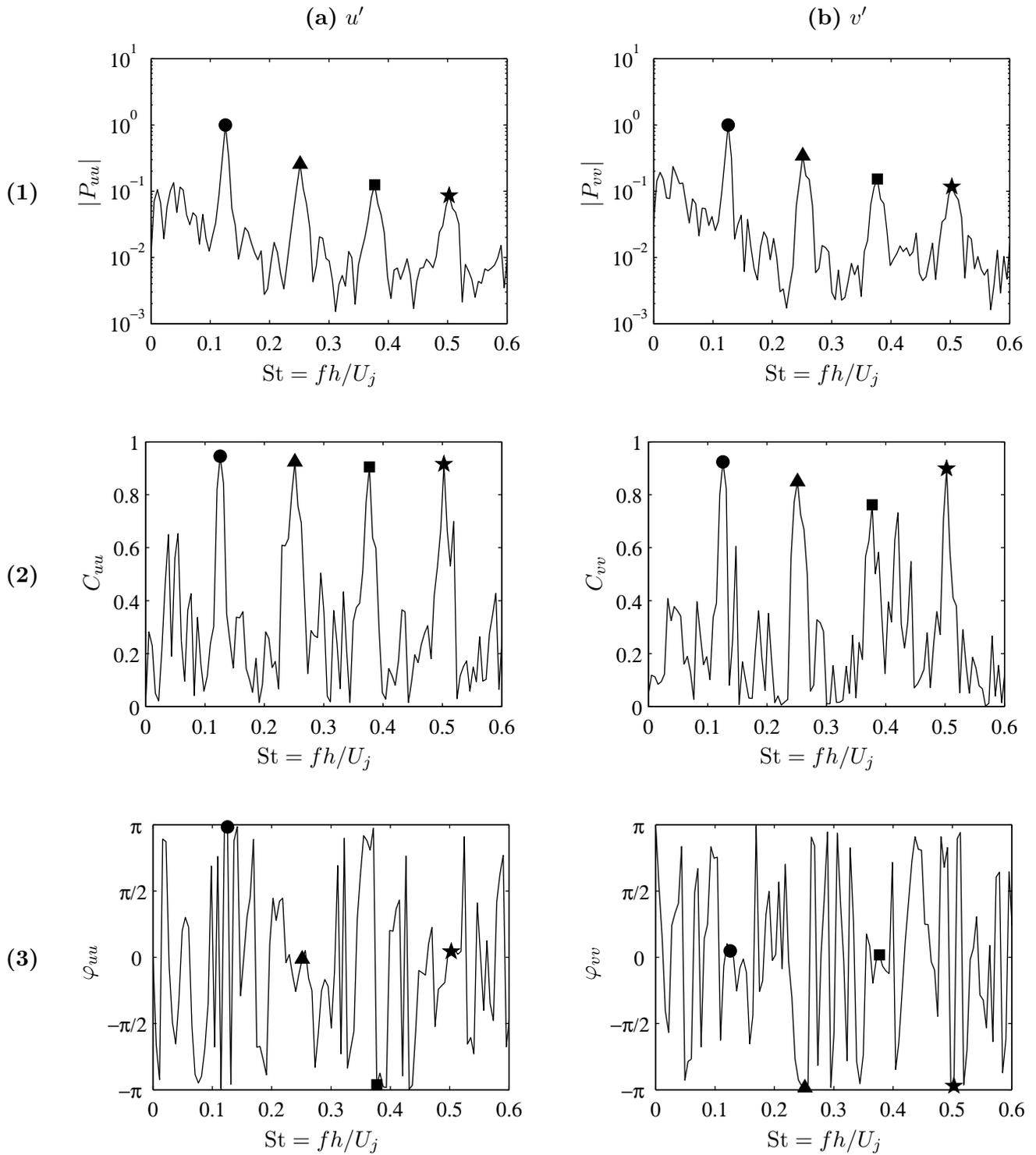


Figure 5.9: Interspectres des fluctuations de vitesses de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (1.3, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (1.3, -0.5)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. ●, Fondamental du screech (f_s); ▲, 1^{er} harmonique ($2f_s$); ■, 2^{ème} harmonique ($3f_s$); ★, 3^{ème} harmonique ($4f_s$). (a), Interspectre des fluctuations de vitesse axiale u' ; (b), interspectre des fluctuations transversales v' . (1), Amplitude $|P|$; (2), cohérence C ; (3), phase φ .

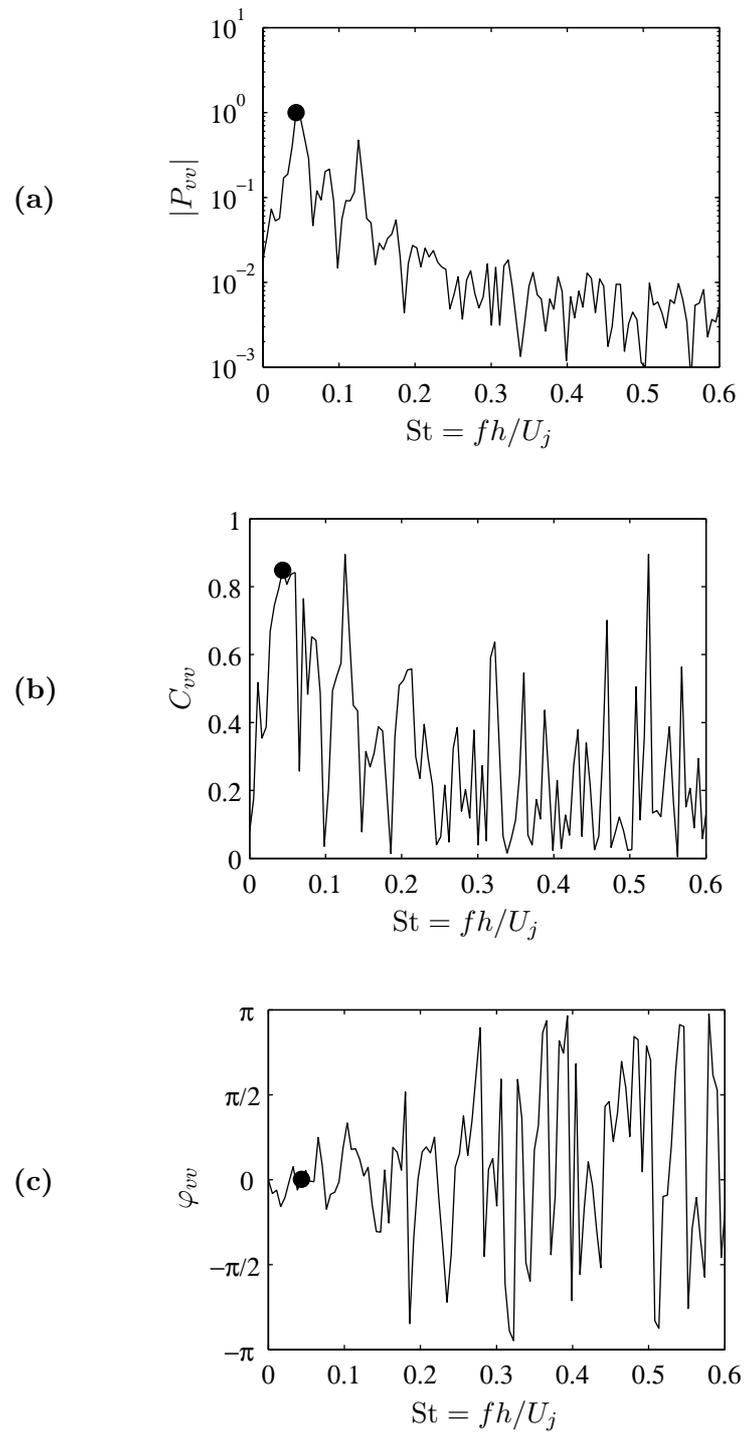


Figure 5.10: Interspectre des fluctuations transversales de vitesse v' de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (22.5, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (22.5, -0.5)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. **(a)**, Amplitude $|P_{vv}|$; **(b)**, cohérence C_{vv} ; **(c)**, phase φ_{vv} . •, $St = 0.045$.

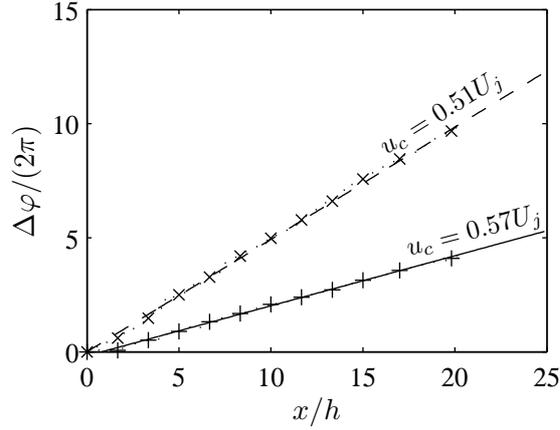


Figure 5.11: Variation de phase $\Delta\varphi/(2\pi)$ des fluctuations de vitesse u' , en fonction de la position longitudinale x/h , pour le fondamental et le premier harmonique du screech, sur la ligne $y = h/2$ ($z/h = 0$). $\cdots+\cdots$, Fondamental (f_s); $\cdots\times\cdots$, premier harmonique ($2f_s$).

harmonique sont antisymétriques, puisque $\varphi_{vv}(f_s) = 0$, $\varphi_{vv}(2f_s) = -\pi$, $\varphi_{uu}(3f_s) = 0$ et $\varphi_{uu}(4f_s) = \pi$.

Ces informations sur les répartitions de phase des fluctuations de vitesse longitudinale et transverse du jet permettent d'identifier les modes d'instabilité du jet soumis au screech. En effet, si u' est antisymétrique et v' est symétrique, alors le mode d'oscillation est un mode sinueux (ou de battement). Par ailleurs, si u' est symétrique et v' est antisymétrique, le mode d'oscillation est un mode variqueux. On en déduit ainsi que les instabilités qui se développent dans la couche de mélange du jet à la fréquence du screech et au deuxième harmonique sont des modes sinueux, alors que les perturbations au premier et troisième harmonique sont celles d'un mode variqueux. Ces résultats sont en accord avec les observations expérimentales de Raman & Rice [95] qui constatent sur un jet rectangulaire à $M_j = 1.44$ des distributions de phase identiques pour les modes de la couche de mélange oscillant aux fréquences f_s , $2f_s$ et $3f_s$.

Une étude similaire peut être menée pour le mode basse-fréquence observé pour les fluctuations de vitesse transversale v' dans la région aval du jet. L'interspectre P_{vv} est ainsi calculé entre les points situés en $(x/h, y/h) = (22.5, 0.5)$ et $(x/h, y/h) = (22.5, -0.5)$. L'amplitude $|P_{vv}|$, la cohérence C_{vv} et la phase φ_{vv} sont respectivement tracées sur les figures 5.10.a, 5.10.b et 5.10.c. L'amplitude $|P_{vv}|$ fait apparaître un pic à $St = fh/U_j = 0.045$. La cohérence à cette fréquence est d'environ 0.85, et est donc suffisamment importante pour pouvoir conclure que les perturbations de vitesse sont corrélées de part et d'autre du jet. La différence de phase φ_{vv} montre ensuite que ce mode d'oscillation basse fréquence est symétrique car $\varphi_{vv} = 0$ à $St = 0.045$. La couche de mélange subit par conséquent un mode d'oscillation de type variqueux mais qui n'implique que la vitesse transverse v' .

Vitesse de convection

La vitesse de phase est ici déterminée en se basant sur les fluctuations u' de la vitesse longitudinale dans la couche de mélange. Les points de mesure se situent sur la ligne $(x, y =$

$h/2$), et les perturbations en $(x/h = 0.05, y/h = 0.5)$ sont utilisées comme référence de phase. La différence de phase $\Delta\varphi$ le long de la ligne de mesure est ensuite déterminée à partir de l'interspectre entre le signal de vitesse obtenu au point x et celui du point de référence. L'évolution de $\Delta\varphi$ est tracée sur la figure 5.11, en fonction de la position x/h , pour le fondamental et le premier harmonique du screech. On observe que la phase croît régulièrement quand on se déplace vers l'aval, ce qui indique l'existence d'un processus de convection. La vitesse de convection moyenne u_c est alors donnée par la relation $u_c = 2\pi f/\alpha$, où f est la fréquence du mode considéré et α la pente de la droite obtenue par régression linéaire de la courbe $\Delta\varphi$. Les résultats de la figure 5.11 fournissent ainsi pour la vitesse de convection du fondamental du screech $u_c = 0.57U_j$, et $u_c = 0.51U_j$ pour le premier harmonique. Ces valeurs sont en accord avec les données expérimentales de Raman & Rice [95] qui donnent $u_c = 0.54U_j$ et $u_c = 0.56U_j$ pour les instabilités au fondamental et au premier harmonique du screech, pour un jet rectangulaire à un nombre de Mach $M_j = 1.44$.

Structure latérale des modes

La structure latérale (dans l'envergure) des perturbations se développant dans la couche de mélange est identifiée en calculant les coefficients de corrélations spatio-temporelle des fluctuations de vitesse. Le coefficient de corrélation latéral déduit des perturbations de vitesse axiale est défini au point \mathbf{x} par l'expression,

$$R_{uu}(\mathbf{x}, r_z, \tau) = \frac{\overline{u'(\mathbf{x}, t)u'(\mathbf{x} + r_z\mathbf{e}_z, t + \tau)}}{\left[\overline{u'^2(\mathbf{x}, t)} \overline{u'^2(\mathbf{x} + r_z\mathbf{e}_z, t)}\right]^{1/2}} \quad (5.6)$$

où \mathbf{e}_z est le vecteur unité associé à la direction z , r_z est l'écart latéral, τ le décalage temporel et $\bar{\cdot}$ désigne une moyenne d'ensemble. Le coefficient $R_{vv}(\mathbf{x}, r_z, \tau)$ est calculé de manière similaire pour les perturbations transverses v' .

Les coefficients R_{uu} et R_{vv} sont déterminés à deux positions axiales. Le premier point de mesure se situe en amont, en $(x/h, y/h, z/h) = (5, 0.5, 0)$, de manière à étudier le mode d'oscillation relié au screech. La deuxième position est en aval, en $(x/h, y/h, z/h) = (22.5, 0.5, 0)$, afin d'identifier les modes basse-fréquence observés sur les spectres des figures 5.8.a et 5.8.b. Les résultats obtenus en $(x/h, y/h, z/h) = (5, 0.5, 0)$ sont donnés sur les figures 5.12.a et 5.12.b pour R_{uu} et R_{vv} , respectivement, tandis que les figures 5.12.c et 5.12.d présentent les coefficients R_{uu} et R_{vv} en $x/h = 22.5$. On notera que pour ces figures, le décalage temporel τ est normalisé par la période du screech T_s , et que r_z est limité à l'intervalle $[-2.5h, 2.5h]$, qui correspond à l'étendue du domaine dans la direction latérale.

Considérons dans un premier temps les résultats en $x/h = 5$. Comme attendu, le maximum de corrélations a lieu en $(r_z, \tau) = (0, 0)$, où $R_{uu} = R_{vv} = 1$. La décroissance des deux coefficients de corrélations quand l'écart latéral ou le décalage temporel augmentent suggère ensuite l'existence de petites structures cohérentes. Cependant, les coefficients de corrélations ne sont pas nuls pour des décalages spatio-temporels importants. Par exemple, pour $\tau = 0$, R_{uu} et R_{vv} restent sensiblement constants et égaux à 0.25 quand r_z/h varie de -2.5 à 2.5 . De plus, quand le décalage temporel augmente, les coefficients de corrélation font apparaître une évolution périodique à la période T_s du screech, et ne montrent pas de variations significatives avec l'écart latéral r_z . Ce comportement indique que le mode d'oscillation de la couche de

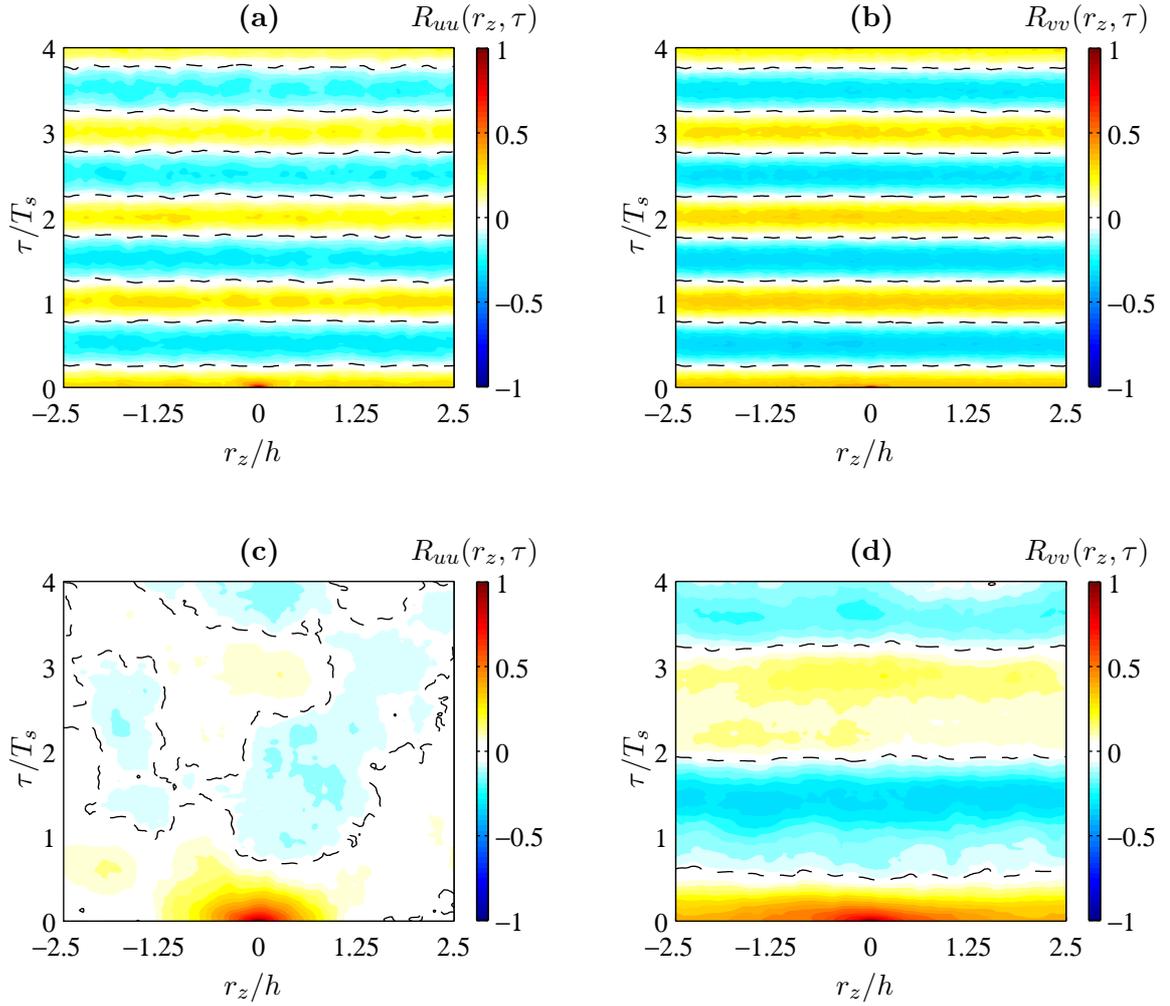


Figure 5.12: Coefficients de corrélation spatio-temporelle des fluctuations de vitesse, dans la couche de mélange, en fonction de l'écart latéral r_z/h et du décalage temporel τ/T_s normalisé par la période du screech. (a) $R_{uu}(r_z, \tau)$ en $x/h = 5$, (b) $R_{vv}(r_z, \tau)$ en $x/h = 5$, (c) $R_{uu}(r_z, \tau)$ en $x/h = 22.5$, et (d) $R_{vv}(r_z, \tau)$ en $x/h = 22.5$, sur la ligne ($y = 0.5h, z = 0$). - - -, R_{uu} ou $R_{vv} = 0$.

mélange à la fréquence du screech est bidimensionnel. Cette instabilité est de plus périodique et fortement corrélée dans le temps, ce qui est cohérent avec l'autoexcitation associée à la boucle de rétroaction du screech.

Les coefficients de corrélations calculés dans la région aval du jet, en $x/h = 22.5$, sont maintenant étudiés. Sur la figure 5.12.c, le coefficient R_{uu} construit sur la vitesse axiale u' est égal à 1 quand $(r_z, \tau) = (0, 0)$. Quand l'écart latéral ou le décalage temporel augmentent, l'amplitude de R_{uu} décroît, mais la région où la corrélation reste importante est plus grande que celle observée en $x/h = 5$. De plus, pour $|r_z| > 1.25$ et $\tau > 0.5$, le coefficient de corrélation est proche de 0 et les perturbations de vitesse sont par conséquent faiblement corrélées. Ainsi, en aval, le mode d'oscillation des fluctuations de vitesse u' est dominé par des perturbations turbulentes qui ne présentent pas de caractéristiques parti-

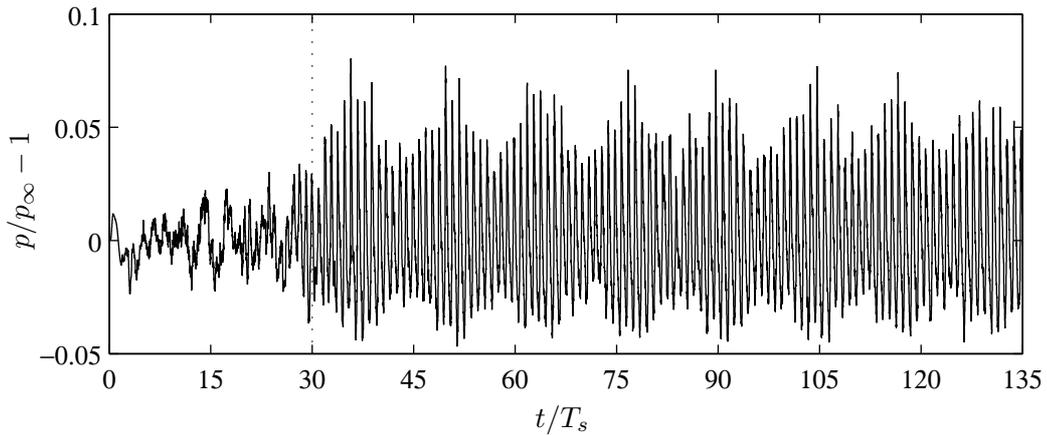


Figure 5.13: Évolution temporelle des perturbations de pression au voisinage de la buse, en $x/h = -0.4$ et $y/h = 0.85$, sur l'ensemble de la simulation, en fonction du temps t normalisé par la période du screech T_s . La ligne en pointillé indique la fin du transitoire.

culières en temps ou en espace. La situation est cependant différente pour le coefficient de corrélation R_{vv} sur la figure 5.12.d. L'allure du coefficient est similaire à celles constatées plus en amont, en $x/h = 5$. La répartition de R_{vv} est en effet périodique en temps, et est sensiblement constante quand l'écart latéral r_z varie. La période du phénomène coïncide par ailleurs avec la fréquence observée sur les spectres de la figure 5.8.b, qui donne un nombre de Strouhal $St = 0.045$. Il faut toutefois remarquer que la corrélation en temps et en espace est plus faible qu'en $x/h = 5$. Ces résultats suggèrent que la région aval de l'écoulement subit un mode variqueux bidimensionnel qui n'implique que la vitesse transversale v' .

5.2.4 Champ acoustique

Champ acoustique amont

L'évolution temporelle des perturbations de pression en amont, au point $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$ représenté par P^+ sur la figure 5.7, est tracée sur la figure 5.13 pendant l'ensemble de la simulation. Une phase transitoire, qui s'étend sur environ 30 périodes du screech, est d'abord observée. Pour $t > 30T_s$, le screech est établi et le signal est ensuite périodique jusqu'à la fin de la simulation.

La densité spectrale de puissance du signal de pression amont correspondant à la portion $30 < t/T_s < 150$ est maintenant tracée sur la figure 5.14 en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. Une série de pics est visible. La raie dominante apparaît à $St = 0.126$ et correspond à la fréquence fondamentale du screech. Les autres pics sont des harmoniques du phénomène et possèdent une énergie qui décroît avec la fréquence. À noter qu'un pic non-harmonique est présent sur la figure 5.14.a au nombre de Strouhal 0.171. La présence de cette raie, qui n'apparaît pas expérimentalement sur des jets rectangulaires, reste difficile à expliquer. Il est malgré tout intéressant de remarquer que le nombre de Strouhal correspondant peut être interprété comme la somme des nombres de Strouhal des deux modes d'oscillation de la couche de mélange observés pour v' en aval (voir la figure 5.8.b). En effet, le mode basse-fréquence oscille à $St = 0.045$, et le mode du screech à $St = 0.126$, ce qui conduit à une

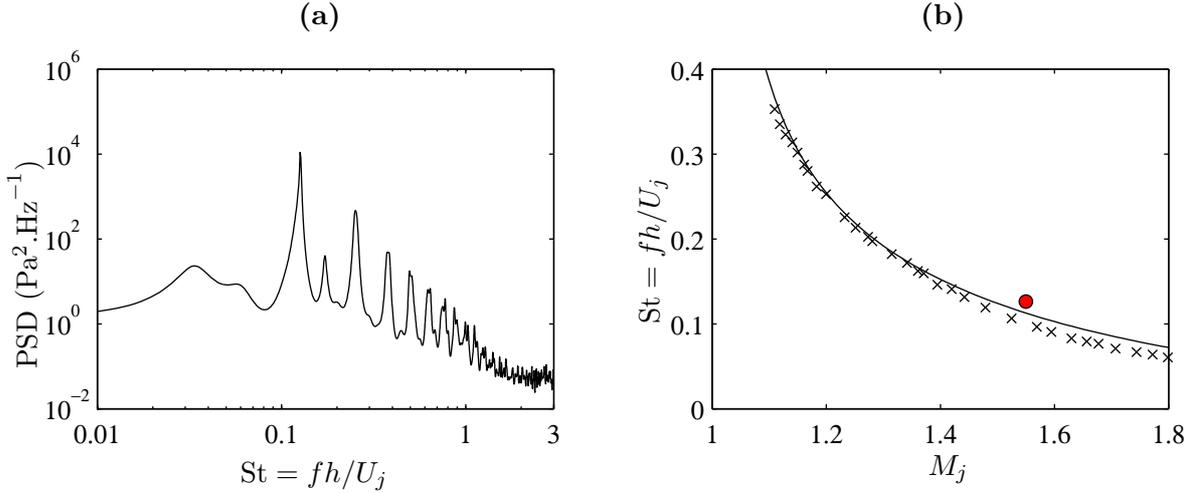


Figure 5.14: (a), Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression au voisinage de la tuyère, en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. (b), Nombre de Strouhal $St = fh/U_j$ de la fréquence fondamentale du screech en fonction du nombre de Mach équivalent M_j . Mesures sur des jets rectangulaires : \times , Panda *et al.* [87]; $+$, Raman & Rice [95]. —, solution de Tam [132] pour un jet plan ($u_c = 0.5U_j$). Présent calcul : \bullet .

somme égale à 0.171. Un couplage non-linéaire entre ces deux modes peut ainsi contribuer au pic non-harmonique rayonné en amont. Le mécanisme de génération de bruit n'a cependant pas été identifié.

Le nombre de Strouhal de la fréquence fondamentale du screech est maintenant indiqué sur la figure 5.14.b en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour le présent calcul et pour des expériences effectuées sur des jets rectangulaires. La solution analytique proposée par Tam [132] est également tracée pour comparaison. Le nombre de Strouhal du screech donné par la simulation est légèrement plus grand que celui fourni par les résultats expérimentaux ou théoriques. En effet, il a été montré dans la section 5.2.2 que l'espacement entre les cellules de choc obtenu avec la SGE est plus petit que l'espacement observés dans les expériences. Par conséquent, une augmentation de la fréquence du screech peut intervenir car la longueur d'onde du phénomène est directement proportionnelle à l'écart entre les chocs (voir la section 1.1.2).

Le niveau de pression acoustique (SPL) du screech est représenté sur la figure 5.15 en fonction du nombre de Mach équivalent M_j , pour les expériences de Panda *et al.* [87] effectuées sur des jets rectangulaires et pour le calcul présenté dans ce chapitre. Une différence de 5 dB est visible entre le niveau fourni par la simulation et les niveaux expérimentaux. Cette écart peut être attribué à l'intensité des chocs. Les résultats expérimentaux suggèrent en effet que la source dominante du screech est localisée pour les jets rectangulaires au voisinage de la troisième cellule de choc [97]. Cependant, il a été mis en évidence dans la section 5.2.2 que la géométrie plane du calcul conduit à des chocs avec des intensités plus fortes. Bien qu'il n'y est pas à l'heure actuelle de lien bien établi entre l'intensité des chocs et l'amplitude du screech [97], cette observation pourrait expliquer les différences observées sur la figure 5.15. Il est également possible d'émettre l'hypothèse que le caractère périodique du calcul suivant l'envergure tend à accroître la cohérence des structures tourbillonnaires dans la direction

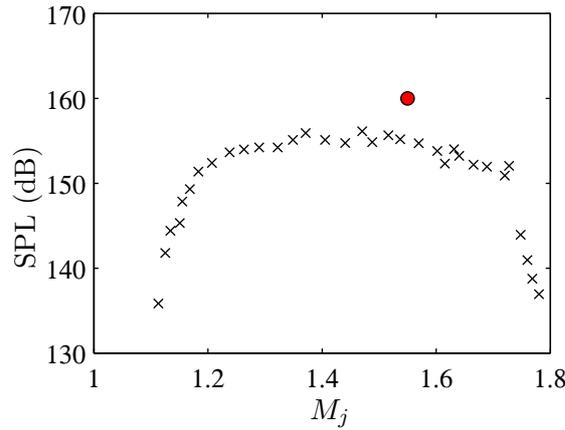


Figure 5.15: Niveau de pression du fondamental du screech en fonction du nombre de Mach équivalent M_j . \times , données expérimentales de Panda *et al.* [87] pour des jets rectangulaires. Présent calcul : \bullet .

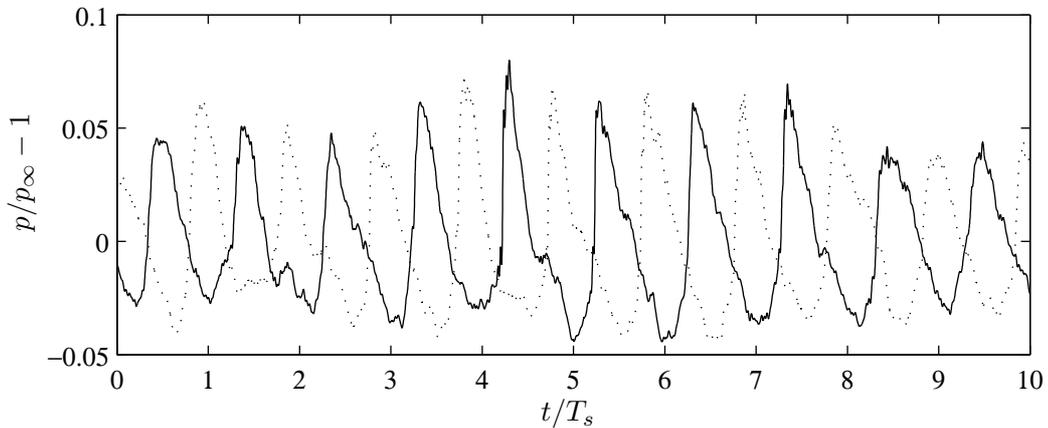


Figure 5.16: Évolution temporelle des perturbations de pression au voisinage de la buse : —, en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$; ·····, en $(x/h, y/h) = (-0.4, -0.85)$.

latérale et peut ainsi conduire à un rayonnement de screech plus intense.

La différence de phase du screech de part et d'autre du jet est maintenant étudié au voisinage de la tuyère. L'évolution temporelle des signaux de pression mesurés aux positions $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$ et $(x/h, y/h) = (-0.4, -0.85)$ représentées par les points P^+ et P^- sur la figure 5.7, est fournie par la figure 5.16 pour dix périodes du screech. Les fluctuations de pression en ces deux positions sont clairement corrélées et en opposition de phase. Cette tendance est confirmée par le calcul de l'interspectre P_{pp} entre les signaux mesurés en P^+ et P^- . L'amplitude $|P_{pp}|$, la cohérence C_{pp} et la phase φ_{pp} sont respectivement tracées sur les figure 5.17.a, 5.17.b et 5.17.c en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. Quatre pics harmoniques, qui correspondent aux raies du screech, sont visibles sur l'amplitude $|P_{pp}|$ de l'interspectre. De plus, la cohérence C_{pp} montre que les deux signaux de pression sont corrélés. La différence de phase indique finalement que le fondamental (f_s) et le deuxième harmonique ($3f_s$) du screech sont antisymétriques, tandis que le premier ($2f_s$) et troisième harmonique ($4f_s$) sont symétriques. La quantité φ_{pp} est en effet égale à $-\pi$ et π aux fréquences f_s et $3f_s$,

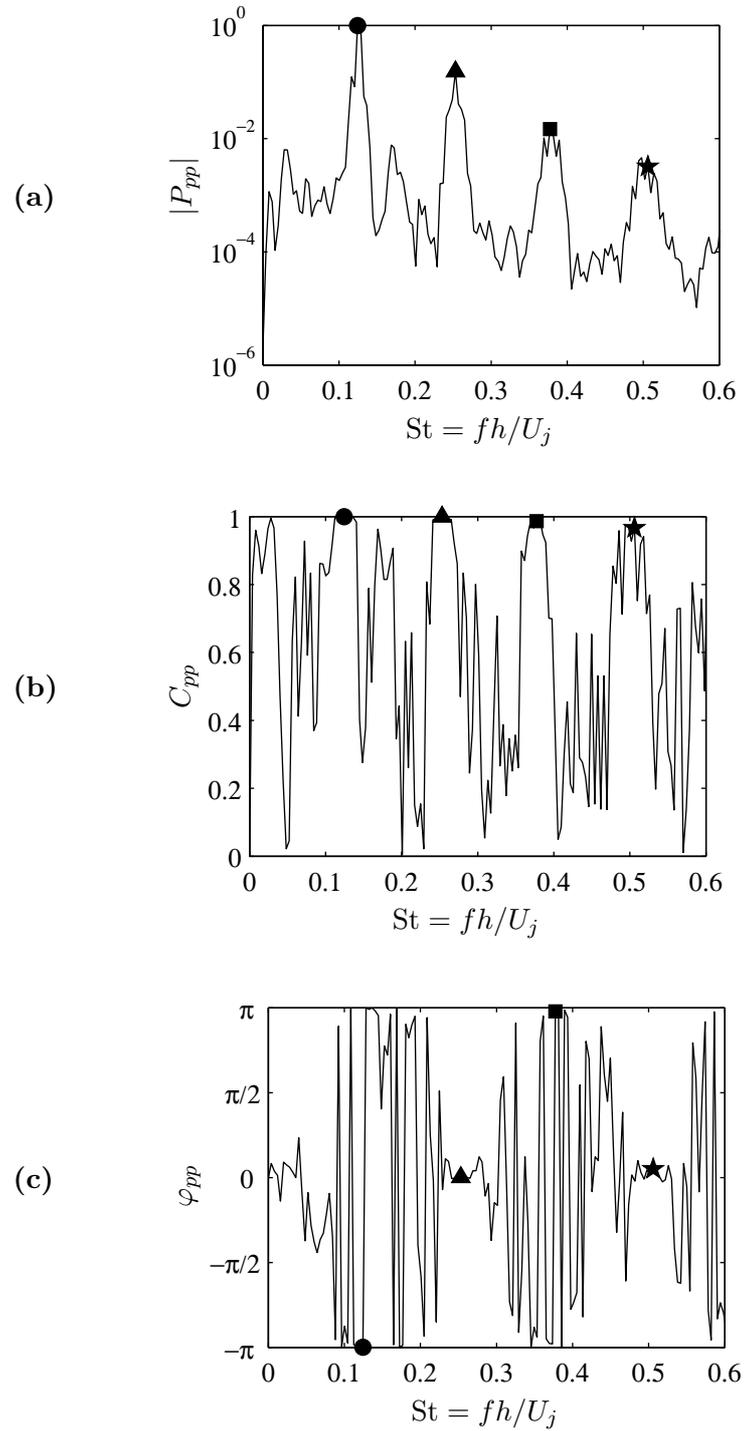


Figure 5.17: Interspectre des fluctuations de pression en amont, de part et d'autre du jet, en $(x/h, y/h) = (-0.4, 0.85)$ et $(x/h, y/h) = (-0.4, -0.85)$, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$. •, Fondamental du screech (f_s); ▲, 1^{er} harmonique ($2f_s$); ■, 2^{ème} harmonique ($3f_s$); ★, 3^{ème} harmonique ($4f_s$). (a), Amplitude $|P_{pp}|$; (b), cohérence C_{pp} ; (c), phase φ_{pp} .

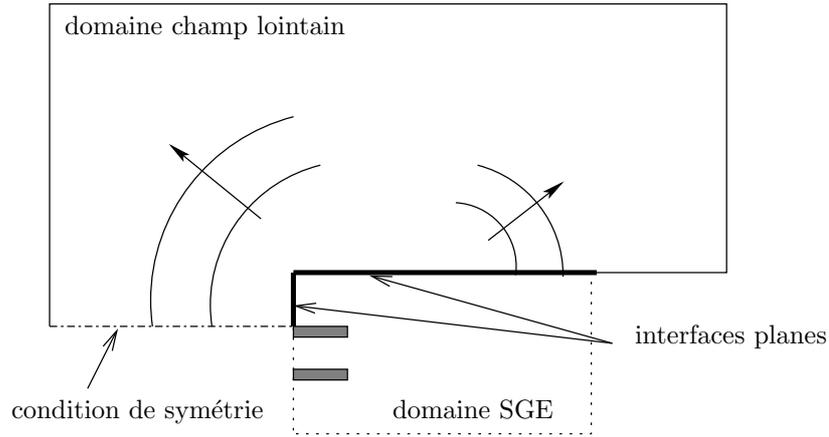


Figure 5.18: Vue schématique du domaine de calcul de l'extrapolation et des surfaces planes utilisées pour introduire les données de la SGE dans le calcul du champ lointain.

et est nulle pour $f = 2f_s$ et $f = 4f_s$. Ces résultats sont en accord avec les mesures de Raman & Rice [95] qui observent que le champ acoustique amont d'un jet rectangulaire est anti-symétrique pour le fondamental, symétrique pour le premier harmonique et antisymétrique pour le deuxième harmonique.

Extrapolation du champ lointain

La SGE donne accès au développement aérodynamique et au champ acoustique proche du jet. Afin d'obtenir le champ acoustique lointain à un coût informatique réduit, les données fournies par la simulation sont extrapolées en utilisant un système d'équations simplifiées qui permet de propager des ondes acoustiques sur de longues distances.

Dans cette optique, les équations tridimensionnelles de l'acoustique linéaire sont résolues dans ce travail au-delà d'une surface d'extrapolation où le champ proche issu de la SGE est imposé. En supposant que les fluctuations sont petites et que le milieu ambiant est au repos, les équations d'Euler linéarisées donnent les équations de l'acoustique linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}'}{\partial z} = 0 \quad (5.7)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= [\rho', \quad \rho_\infty u', \quad \rho_\infty v', \quad \rho_\infty w'] \\ \mathbf{E}' &= [\rho_\infty u', \quad p', \quad 0, \quad 0] \\ \mathbf{F}' &= [\rho_\infty v', \quad 0, \quad p', \quad 0] \\ \mathbf{G}' &= [\rho_\infty w', \quad 0, \quad 0, \quad p'] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le champ moyen est défini par ρ_∞ et p_∞ pour la densité et la pression. Les fluctuations de pression peuvent alors être calculées à l'aide de la relation $p' = c_\infty^2 \rho'$, où $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ est la vitesse moyenne du son moyenne et $\gamma = 1.4$.

Pour résoudre le système (5.7), les méthodes numériques utilisées sont identiques à celles de la SGE, et le domaine est également périodique dans la direction de l'envergure. Le pas

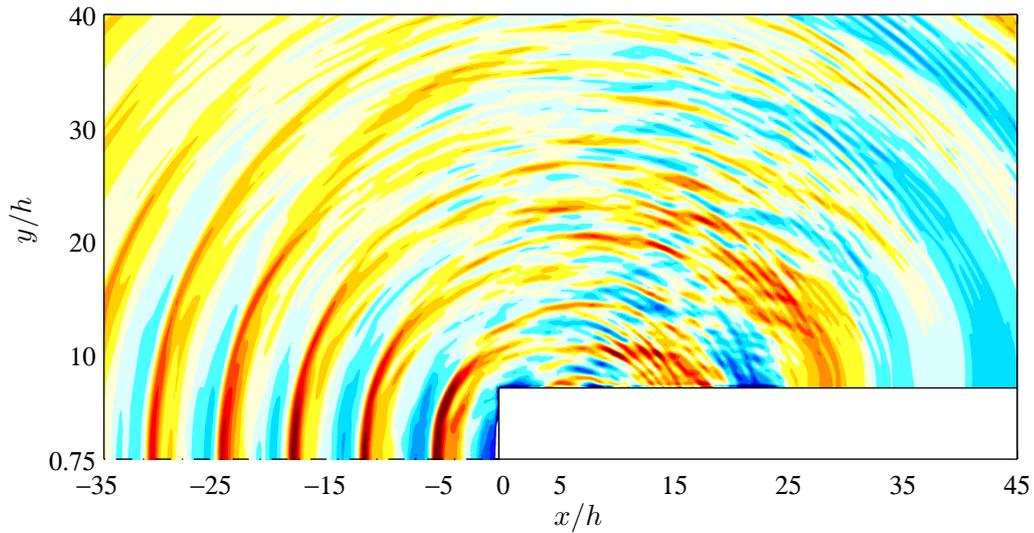


Figure 5.19: Cartographie dans le plan médian (x, y) de la pression instantanée obtenue pour la méthode d'extrapolation du champ lointain. Échelle de couleur de $-0.025p_\infty$ à $0.025p_\infty$.

de temps est doublé par rapport à la SGE et la taille des mailles est six fois plus grande. Le domaine de calcul contient le volume $[-35h, 45h] \times [0, 45h] \times [-2.5h, 2.5h]$ et est constitué de $505 \times 255 \times 61 \sim 7.8 \times 10^6$ de points. Le temps de calcul est environ 20 fois plus court que celui de la SGE.

Comme le montre schématiquement la figure 5.18, les données issues de la SGE sont introduites dans le calcul du champ lointain au niveau de deux interfaces planes. La première surface est dans le plan (x, z) et est située sur le haut du domaine en $y/h = 7$. La deuxième surface est dans le plan (y, z) à $x/h = -0.4$ et est introduite afin de prendre en compte le champ acoustique amont. De plus, de manière à réduire les effets de diffraction associés au bord inférieur du plan vertical, une condition de symétrie est imposée sur la partie inférieure du domaine de calcul du champ lointain. À noter que les données fournies par l'extrapolation ne sont pertinentes pour des petits angles d'observation ($< 30^\circ$). L'interface entre la SGE et l'extrapolation située dans le plan (x, z) s'étend en effet sur l'intervalle $0 < x/h < 25$, alors que le champ lointain est calculé jusqu'à $x/h = 45$. Il existe donc une zone d'ombre pour $x/h > 25$ à proximité de la frontière inférieure du domaine de calcul.

Une vue du champ instantané de pression dans le plan médian (x, y) est présentée sur la figure 5.19. Le rayonnement du fondamental du screech est visible en amont où des fronts d'onde périodiques et basse-fréquence sont observés. Le champ acoustique lointain dans la direction transverse semble être dominé par un contenu fréquentiel plus large-bande avec en particulier des longueurs d'onde plus petites que celle du screech.

Les densités spectrales de puissance des fluctuations de pression est calculée pour différentes positions d'observation en champ lointain. Les points de mesure sont situés dans le plan médian (x, y) sur un cercle de rayon $35h$ et centré sur la position $(x/h, y/h) = (6, 0)$, qui est proche de la troisième cellule de choc. La direction d'observation est donnée par l'angle polaire θ par rapport à la direction aval. Les densités spectrales de puissance des

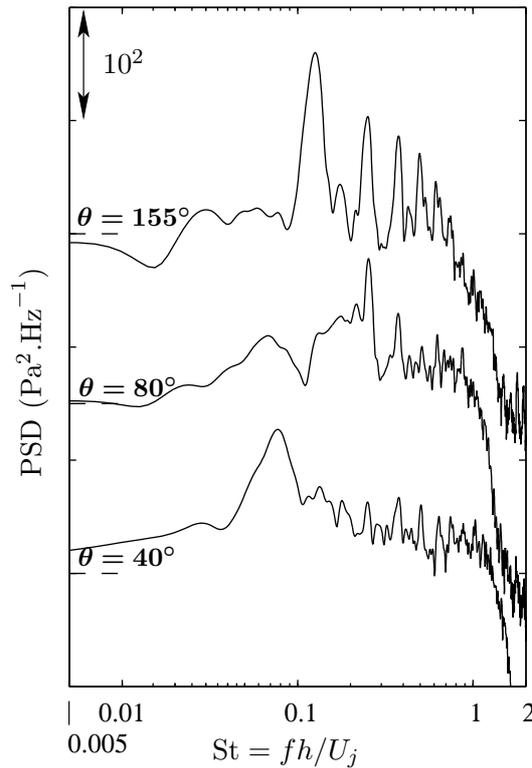


Figure 5.20: Densité spectrale des fluctuations de pression obtenues pour la méthode d'extrapolation du champ, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$, pour différents angles d'observation θ par rapport à la direction aval. Du haut vers le bas : $\theta = 155^\circ$, $\theta = 80^\circ$ et $\theta = 40^\circ$. L'échelle logarithmique est arbitraire.

perturbations de pression sont tracées sur la figure 5.20 en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$, pour $\theta = 155^\circ$, $\theta = 80^\circ$ et $\theta = 40^\circ$. Dans la direction amont, pour $\theta = 155^\circ$, on remarque que le spectre de pression est dominé par les harmoniques associées au rayonnement du screech et qu'il est similaire au spectre déterminé à proximité de la buse sur la figure 5.14.a. Dans la direction transverse, pour $\theta = 80^\circ$, le fondamental du screech n'est plus visible et le premier harmonique est la fréquence discrète qui contribue majoritairement au bruit de raie. La densité spectrale fait également apparaître deux pics large-bande. Le premier se situe aux environs de $St \simeq 0.07$ et est probablement associé au rayonnement des grandes structures turbulentes. Le deuxième pic possède un contenu spectral compris entre $St = 0.1$ et $St = 0.2$, et peut être attribué au bruit de choc. Plus en aval, pour $\theta = 40^\circ$, le rayonnement des grandes structures turbulentes est la source de bruit dominante. Un pic large-bande centré sur $St \simeq 0.07$ est en effet présent sur le spectre de pression alors que l'on ne distingue pas de bruit de raie caractéristique du screech ou de bruit de choc large-bande.

Ces tendances sont confirmées par la figure 5.21 qui donne la densité spectrale de puissance des perturbations de pression en champ lointain sous la forme d'une cartographie fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$ et de l'angle d'observation θ par rapport à la direction aval. La fréquence centrale du bruit de choc fournie par le modèle de Tam [131] (voir la

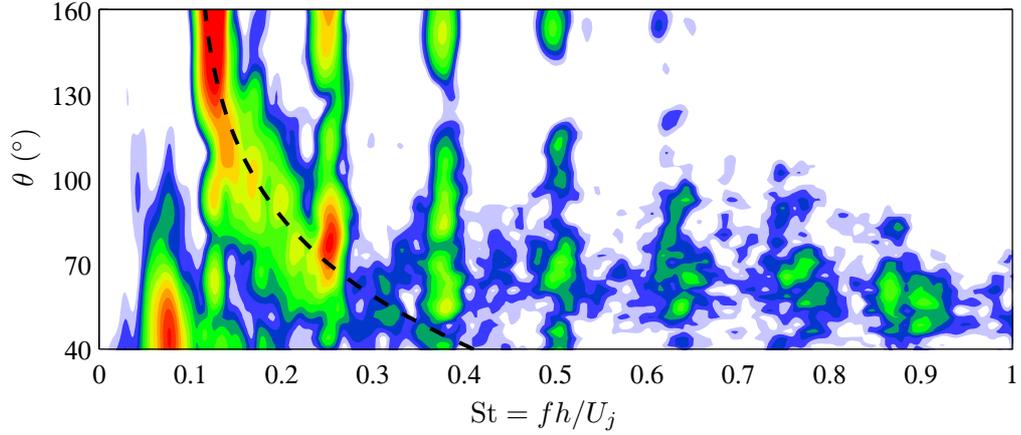


Figure 5.21: Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression en champ lointain, en fonction du nombre de Strouhal $St = fh/U_j$ et de l'angle d'observation θ par rapport à la direction aval, en échelle de couleur logarithmique. - - -, fréquence centrale du bruit de choc donnée par la relation (5.9).

section 1.2.1 de ce manuscrit) :

$$St = \frac{fh}{U_j} = \frac{u_c}{U_j} \frac{h}{L_s} \frac{1}{1 - \frac{u_c}{U_j} \frac{c_j}{c_\infty} M_j \cos \theta} \quad (5.9)$$

est également tracée avec $u_c/U_j = 0.55$. On constate effectivement sur la figure 5.21 que le fondamental du screech rayonne majoritairement vers l'amont (par exemple pour $\theta \simeq 150^\circ$ et $St \simeq 0.13$) tandis que le champ acoustique du premier harmonique est orienté dans la direction transversale, avec $\theta \simeq 80^\circ$. Par ailleurs, le bruit produit par les grandes structures turbulentes apparaît en aval, pour $\theta < 70^\circ$, à un nombre de Strouhal proche de 0.07. La dernière composante du champ acoustique est le bruit de choc. Celui-ci est particulièrement visible pour des angles d'observation compris entre 50° et 130° , où on observe un pic large-bande dont la fréquence centrale augmente quand l'angle θ diminue. En outre, l'évolution avec θ du nombre de Strouhal correspondant se superpose bien à la courbe donnée par la formulation analytique (5.9). D'un point de vue qualitatif, les spectres de pression obtenus par extrapolation du champ lointain sont ainsi en accord avec les données expérimentales. Le screech domine vers l'amont tandis que les grandes structures turbulentes rayonnent majoritairement vers l'aval, à une fréquence plus basse que celle du screech. Le bruit de choc possède de plus une fréquence centrale qui varie avec l'angle d'observation (voir par exemple la figure 1.2 et la référence [140]).

Les directivités des harmoniques du screech sont maintenant déterminées à partir des résultats fournis par l'extrapolation du champ lointain, et en utilisant un réseau de monopoles [85]. Une série de sources est ainsi placée au niveau des cellules de choc et leurs phases relatives sont reliées à la vitesse de convection des structures cohérentes de la couche de mélange. Le rayonnement acoustique résultant est de la forme :

$$p = \exp \left[\frac{2i\pi(c_\infty t - r_0)}{\lambda_n} \right] \sum_j \frac{S_j}{r_j} \exp \left[-2i\pi j \frac{L_s}{\lambda_n} \left(\frac{1}{M_c} - \cos \theta \right) \right] \quad (5.10)$$

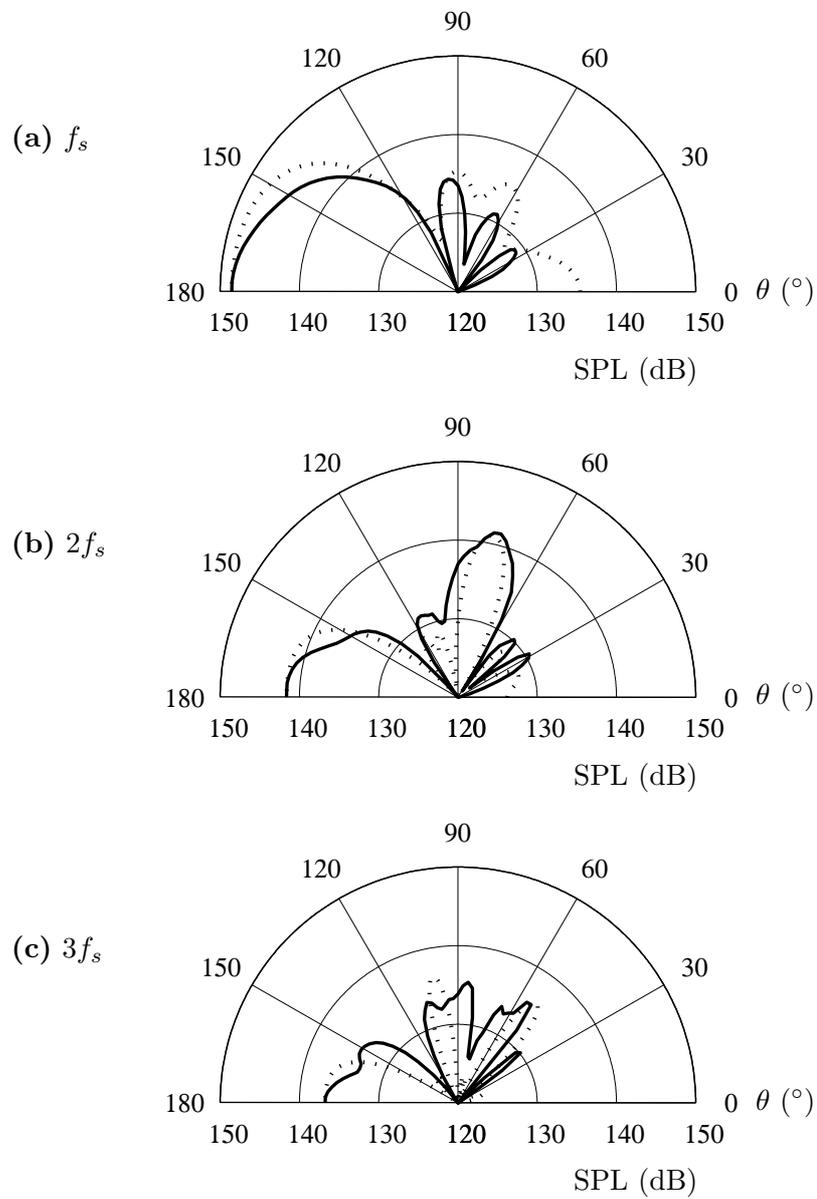


Figure 5.22: Directivité en champ lointain du bruit de screech. Niveau de pression acoustique en fonction de l'angle d'observation θ par rapport à la direction aval. —, Champ lointain extrapolé; ·····, prédiction fournie par un réseau de sources ponctuelles. (a) Fondamental du screech (f_s), (b) 1^{er} harmonique ($2f_s$), (c) 2^{ème} harmonique ($3f_s$).

où L_s est l'espacement entre les chocs, r_0 la distance entre le point d'observation et le point de référence $(x/h, y/h) = (6, 0)$, r_j la séparation entre le point d'observation et la source j , S_j est l'amplitude de la source j , et λ_n , la longueur d'onde du n -ième harmonique du screech, est donnée par le modèle de Tam [132] :

$$\lambda_n = \frac{L_s}{n} \left(1 + \frac{1}{M_c} \right) \quad (5.11)$$

Le nombre de Mach convectif M_c est pris égal à $0.55U_j/c_\infty$, et θ est l'angle polaire par rapport à la direction aval. Six sources sont utilisées ici avec la répartition d'amplitude suivante : $(S_1, \dots, S_6) = (0.5, 0.5, 1, 0.5, 0.25, 0.25)$. La source dominante est ainsi positionnée au niveau de la troisième cellule de choc. On rappelle que les points d'observation se situent dans le plan médian (x, y) sur le cercle de rayon $35h$ de centre $(x/h, y/h) = (6, 0)$.

Les directivités obtenues par la simulation et par la formulation analytique (5.10) sont présentées en fonction de l'angle θ sur les figures 5.22.a, 5.22.b et 5.22.c pour le fondamental du screech, le premier harmonique et le deuxième harmonique, respectivement. Sur les trois figures, les directivités sont en bon accord pour $\theta > 30^\circ$. En effet, la position et l'amplitude relative des lobes donnés par l'extrapolation et par le réseau de sources ponctuelles se superposent correctement. Le fondamental du screech présente un lobe dominant en amont et un lobe secondaire dans la direction transverse. Pour le premier harmonique, deux lobes avec des amplitudes similaires sont visibles, un au voisinage de $\theta \simeq 80^\circ$ et l'autre en amont. Finalement, le deuxième harmonique fait apparaître trois lobes, le plus important étant orienté vers $\theta = 180^\circ$. Pour des petits angles d'observation on remarque par ailleurs que le champ lointain dans la zone d'ombre n'est pas en accord avec la prédiction fournie par la relation (5.10). Cette tendance est particulièrement visible pour la fréquence fondamentale sur la figure 5.22.a, où on constate qu'il manque un lobe en aval. De la même manière, pour le deuxième harmonique, le réseau de sources possède un lobe secondaire vers $\theta \sim 30^\circ$ qui est mal reproduit par l'extrapolation. La directivité calculée tend en effet vers zéro quand θ se rapproche de 0° , alors que le modèle des sources ponctuels prédit un niveau d'environ 125 dB dans cette direction.

5.3 Visualisation de l'écoulement : interaction entre les chocs et les structures cohérentes

Le couplage entre les chocs et les tourbillons de la couche de mélange est maintenant étudié afin d'identifier les mécanismes de génération de bruit à l'origine du screech. L'écoulement est ainsi visualisé en traçant des cartographies du module du gradient de masse volumique $|\nabla\rho|$ dans le plan médian (x, y) . Cette méthode permet en particulier de repérer la position des chocs, où de forts gradients sont présents. La figure 5.23 reproduit une visualisation de ce type. Des isocontours de pression sont également représentés dans le champ proche. Des fronts d'onde se propageant vers l'amont sont visibles de part et d'autre du jet, et correspondent au rayonnement du screech. La troisième cellule de choc, située près de $x/h = 6.5$, semble par ailleurs être le point d'origine de ces ondes acoustiques. L'étude de l'écoulement se limite donc maintenant à la région délimitée par les tirets noirs qui entourent la troisième cellule de choc sur la figure 5.23. Des visualisations de l'interaction entre les chocs et les structures

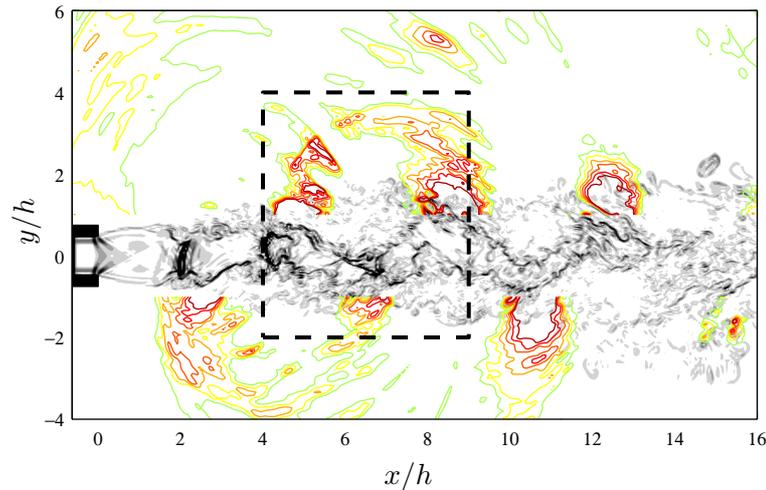


Figure 5.23: Visualisation de l'écoulement et du champ proche de pression dans le plan médian (x, y) . Le module du gradient de masse volumique $|\nabla\rho|$ est tracé en gris (niveaux de gris entre 0 et $6\rho_\infty/h$), et les isocontours de pression sont représentés dans le champ proche (échelle de couleur de p_∞ à $1.1p_\infty$).

tourbillonnaires dans cette région sont fournies sur la figure 5.24. La partie supérieure du champ proche est aussi montrée. Une demi-période du cycle du screech est ainsi représentée de la figure 5.24.1 à la figure 5.24.9.

Structures cohérentes

Comme il a été évoqué ci-dessus, le tracé des gradients de masse volumique permet de localiser les chocs de compression. Cependant, les régions fortement cisailées de l'écoulement, comme la frontière du jet, présentent aussi de forts gradients. Ce type de comportement est visible par exemple sur la figure 5.24.1. Des zones où l'amplitude de $|\nabla\rho|$ est importante apparaissent en effet dans la direction de l'écoulement et mettent en évidence la forme sinueuse du jet, qui est une conséquence du mode d'oscillation dominant de la couche de mélange. On observe par ailleurs des structures cohérentes reliées à l'excitation liée au screech. Par exemple, en $(x/h, y/h) \simeq (6.5, -1)$, les flèches bleues représentent la rotation et la convection d'une structure située dans la partie inférieure du jet. Deux structures similaires sont présentes dans la couche de mélange supérieure, aux environs de $(x/h, y/h) \simeq (4, 1)$ et de $(x/h, y/h) \simeq (9, 1)$. À noter que ces tourbillons sont organisés de façon antisymétrique, et qu'ils sont séparés par des régions de faible vorticité, comme le montre la croix bleue en $(x/h, y/h) \simeq (6.5, 1)$. Ces zones sont importantes car le phénomène de fuite des chocs a lieu *a priori*   leur proximité. L'étude comparative des figures permet de plus d'identifier le processus de convection. Le tourbillon localisé en $(x/h, y/h) \simeq (6.5, -1)$ sur la figure 5.24.1 a par exemple atteint la position $(x/h, y/h) \simeq (9, -1)$ après une demi-période du screech sur la figure 5.24.9. On remarque en outre que l'écoulement sur la figure 5.24.9 est organisé de façon antisymétrique par rapport   la figure 5.24.1. Les flèches bleues sur la figure 5.24.9 symbolisent en particulier une structure antisymétrique de celle de la figure 5.24.1.

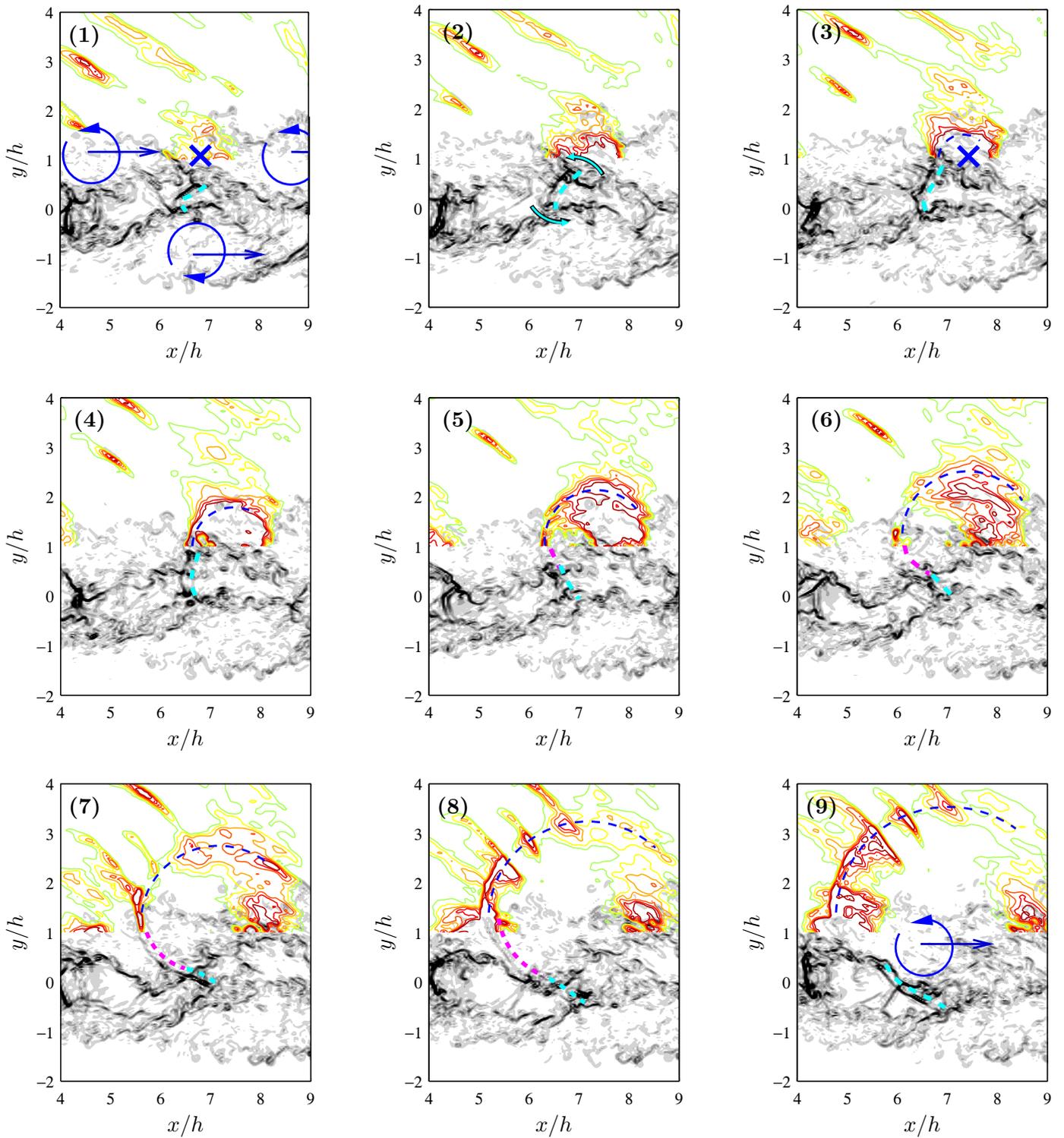


Figure 5.24: Visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique dans le plan médian (x, y) , pour une demi-période du screech. Le module du gradient de masse volumique $|\nabla\rho|$ est tracé en gris (niveaux de gris entre 0 et $6\rho_\infty/h$), et les isocontours de pression sont représentés dans le champ proche (échelle de couleur de p_∞ à $1.1p_\infty$). De (1) à (9) : $t/T_s = 0, 1/16, \dots, 7/16, 8/16$, où T_s est la période du screech. \cdots , choc de compression ; \cdots , onde acoustique générée par le phénomène de *shock-leakage* ; \cdots , gradient de masse volumique en rotation dans une structure cohérente. \odot , structure cohérente. \times , zone de faible vorticité.

Mouvement du choc

Les visualisations proposées sur les figures 5.24.1–5.24.9 donnent aussi la possibilité d’entrevoir la dynamique du choc de la troisième cellule, qui est représentée par des tirets bleus turquoise. Sur toutes les figures, le choc se situe entre $x/h = 6$ et $x/h = 7$ et présente un mouvement de rotation. Sur la figure 5.24.1, le choc est oblique et localisé près de $x/h = 6.5$. Ensuite, sur la figure 5.24.2, le choc est toujours près de $x/h = 6.5$ mais l’extrémité supérieure du choc s’est déplacée vers l’amont et l’extrémité inférieure vers l’aval. Ce mouvement de rotation est symbolisé par les flèches bleues sur la figure 5.24.2. Les figures suivantes, de (5.24.3) à (5.24.9), montrent que ce mouvement persiste durant toute de la demi-période et conduit finalement sur la figure 5.24.9 à un choc avec une configuration antisymétrique par rapport à celle de la figure 5.24.1. Le choc de la figure 5.24.9 est en effet localisé près de $x/h = 6.5$, et est oblique. La pente est cependant l’opposée de celle visible sur la figure 5.24.1

Rayonnement acoustique

Les mécanismes de génération de bruit sont maintenant interprétés en s’appuyant sur le phénomène de fuite des chocs. On s’intéresse plus précisément à l’interaction entre le choc de compression et la région de faible vorticit e initialement localis ee en $(x/h, y/h) \simeq (6.5, 1)$ sur la figure 5.24.1 (voir la croix bleue). Les observations pr ec edentes ont montr e que la r egion de faible vorticit e est convect ee vers l’aval tandis que l’extr emitt e sup erieure du choc se d eplace vers l’amont. Ces deux  el ements se rencontrent et interagissent sur figure 5.24.3. Ce couplage conduit  a la production d’une onde acoustique repr esent ee par les tirets bleus. On rappelle que le m echanisme de fuite des chocs, proposée par Suzuki & Lele [125], sugg ere que les chocs tendent  a p en etrer la couche de m elange au voisinage des zones de faible vorticit e. Un gradient de pression est alors produit et se propage dans le champ proche avec une forme semi-circulaire. Ce m echanisme de production d’ondes acoustiques est effectivement visible sur les figures 5.24.3–5.24.9, o u le front d’onde g en er e sur la figure 5.24.3 forme ensuite une onde acoustique semi-circulaire qui rayonne majoritairement vers l’amont.

Un autre aspect de l’interpr etation g eom etrique de Suzuki & Lele [125] de l’interaction choc/tourbillon est l’influence de la vorticit e locale sur la rotation des fronts d’onde. Ce type de comportement peut être observée sur les visualisations propos ees dans le pr esent travail. En effet, les figures 5.24.1–5.24.9 montrent que le choc p en etrerait alors la couche de m elange, mais il semble de plus que le couplage choc/tourbillon produit une onde qui reste emprisonn ee dans les structures tourbillonnaires. Ce ph enom ene est visible sur les figures 5.24.5–5.24.9, o u l’on remarque   l’int erieur de la structure coh erente un gradient de masse volumique repr esent e par des tirets magenta. Le front d’onde se d eplace vers l’amont mais reste contenu dans le tourbillon en raison du mouvement de rotation induit par la structure coh erente. Il semble de plus être renvoyée vers l’int erieur du jet.

5.4 Conclusion

La simulation des grandes  echelles compressible d’un jet tridimensionnel plan sous-d etendu a  t e effectu ee   l’aide de m ethodes num eriques peu dispersives et peu dissipatives. L’étude des r esultats a d emontr e que le calcul reproduit correctement les caract eristiques du

phénomène de rétroaction à l'origine du bruit de screech. Des visualisations de l'écoulement et du champ acoustique au voisinage de la troisième cellule de choc ont par ailleurs mis en évidence que le mécanisme de fuite des chocs permet d'interpréter les sources acoustiques à l'origine du screech. Il apparaît en effet que le troisième choc de compression pénètre la couche de mélange au niveau des régions de faible vorticité localisées entre les structures cohérentes associées à l'excitation du screech. Le rayonnement acoustique résultant prend la forme d'une onde acoustique semi-circulaire se propageant vers l'amont.

Conclusion

Ce manuscrit de thèse présente la mise en œuvre de la simulation des grandes échelles compressible d'un jet 3-D plan supersonique afin de calculer le rayonnement du bruit de screech par des méthodes numériques d'ordre élevé.

Dans un premier temps, une étude bibliographique a fait ressortir les caractéristiques de la boucle de rétroaction à l'origine du rayonnement intense observé vers l'amont sur les jets où le screech est présent. La structure des cellules de choc, le développement des structures tourbillonnaires de la couche de mélange et le champ proche acoustique ont ainsi été décrits en s'appuyant sur les résultats expérimentaux de la littérature. Il a également été mis en évidence que les sources de bruit du screech sont associées à l'interaction choc/tourbillon, et que le manque actuel de connaissances sur ce couplage limitent les possibilités de modélisation et de prédiction de l'amplitude du phénomène de rétroaction.

L'implémentation pratique de la simulation a été abordée en détail. La modélisation des termes de sous-maille basée sur un filtrage explicite des variables de l'écoulement a été décrite et ce choix a été discuté. Les techniques de discrétisation d'ordre élevé et les conditions limites associées ont aussi été présentées.

Afin de quantifier l'influence du choix des algorithmes numériques sur la qualité d'une simulation, un outil d'analyse des erreurs numériques commises lors d'une simulation des grandes échelles filtrées explicitement a ensuite été proposé. Il s'est avéré en particulier que les schémas peu dispersifs et peu dissipatifs présentent un bon compromis entre précision et coût informatique. Par ailleurs, l'étude de la dissipation numérique introduite artificiellement par le filtrage explicite a montré que le nombre de Reynolds est un paramètre essentiel. En effet, afin de ne pas dépasser en amplitude la dissipation visqueuse, le filtre discret doit avoir une dissipation d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est élevé.

Des schémas d'ordre élevé ont été proposés. Un algorithme de Runge-Kutta à stockage réduit d'ordre quatre à six étapes a été développé, et des schémas aux différences finies et des filtres sélectifs décentrés ont également été calculés pour l'implémentation des conditions limites. Ces algorithmes ont été évalués par de nombreux cas test afin de mettre en évidence le gain en précision qu'ils peuvent apporter.

Finalement, un jet 3-D plan sous-détendu à nombre de Mach équivalent $M_j = 1.55$ et au nombre de Reynolds $Re_h = 6 \times 10^4$ a été simulé. La structure des cellules de choc, le développement turbulent et le rayonnement amont se révèlent être en accord avec les données expérimentales. Des écarts ont malgré tout été observés. Ceux-ci ont néanmoins pu être attribués au fait que la couche de mélange initiale est relativement épaisse ou encore à la géométrie plane périodique du jet. Les mécanismes de génération de bruit du screech ont ensuite été étudiés. Des visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique ont fait apparaître que le choc de compression de la troisième cellule tend à pénétrer la couche de mélange au niveau des zones de faible vorticité localisées entre les structures coh erentes

associées à l'excitation du screech. Ces observations ont confirmé l'hypothèse de génération de bruit par le mécanisme de "fuite" des chocs (*shock-leakage*).

Perspectives

Ce travail de thèse a contribué à fournir un outil numérique permettant de calculer le rayonnement de screech d'un jet 3-D plan. Les perspectives sont nombreuses et portent aussi bien sur les aspects numériques que sur l'étude des mécanismes de génération de bruit des jets supersoniques.

La simulation des grandes échelles est un outil de prédiction performant qui permet d'aborder l'étude d'écoulements à haut nombre de Reynolds. Le cadre théorique de la SGE, et plus particulièrement la modélisation des termes de sous-maille, reste néanmoins la source de nombreuses interrogations. Le formalisme proposé dans le troisième chapitre peut donner accès à une meilleure compréhension des mécanismes de dissipation et de transfert de l'énergie cinétique entre les différentes échelles. Il serait alors envisageable d'élaborer par exemple une procédure de régularisation reposant sur un filtrage avec une intensité adaptée aux caractéristiques locales du champ turbulent.

La résolution numérique des chocs est également un problème ouvert. La suppression ou non du phénomène de Gibbs et l'utilisation de filtres spécifiques aux discontinuités sont des questions délicates. Afin de développer des techniques de discrétisation adaptées au traitement des forts gradients, il serait donc intéressant de disposer d'une série de cas test pour lesquels des critères objectifs sur la qualité de la résolution numérique peuvent être établis. Ces cas test doivent par ailleurs être représentatifs d'une large gamme de phénomènes physiques, comme les interactions du type choc/choc, choc/turbulence ou encore choc/acoustique.

Du point de vue de l'utilisation du calcul acoustique direct pour identifier les sources de bruit d'origine aérodynamique, l'étude présentée dans ce manuscrit peut être poursuivie dans de nombreuses directions. La température du jet est par exemple un paramètre critique de la boucle rétroaction à l'origine du screech car l'amplitude du rayonnement amont décroît quand le jet est chauffé. Il s'agirait donc d'effectuer des simulations de jets supersoniques avec des températures différentes et d'identifier les modifications qui s'opèrent au niveau des mécanismes de production de bruit. Il serait par ailleurs possible de considérer des jets avec des nombres de Mach équivalents proches de 1. En effet, pour des taux de détente relativement faibles, l'amplitude du rayonnement acoustique amont est relativement faible et la répartition de phase des ondes sonores est par ailleurs symétrique de part et d'autre de la tuyère. Il est alors particulièrement intéressant de déterminer si cette chute du niveau peut être reliée au développement turbulent de la couche de mélange ou à la dynamique des cellules de choc, ou encore d'observer le phénomène de fuite des chocs pour une oscillation symétrique du jet.

Afin d'améliorer les capacités de prédiction du solveur, il est envisageable d'effectuer des calculs avec des couches de mélange initialement plus fines, l'objectif étant d'obtenir un développement turbulent proche de celui des jets pratiqués en laboratoire. De plus, la simulation de géométries plus réalistes, comme les jets ronds, permettrait de s'affranchir des artefacts liés à la périodicité du domaine de calcul dans la direction de l'envergure.

Il serait par ailleurs souhaitable d'implémenter une tuyère convergente-divergente à l'aide de méthodes numériques curvilignes. Les conditions de génération du jet seraient alors plus

proches de celles de l'expérience. Il serait également possible de mieux contrôler le taux de turbulence en sortie de buse en utilisant la physique de la couche limite pour amplifier naturellement des excitations appliquées en amont de l'écoulement dans la buse. Un autre axe important de recherche sur le bruit des jets supersoniques porte sur le bruit de choc. Cependant, les données expérimentales sur ce sujet se rapportent généralement à des jets pour lesquels le screech a été supprimé. Il est alors nécessaire de pouvoir mettre en œuvre des techniques numériques qui permettent de contrôler l'établissement de la boucle de rétroaction, comme des conditions de paroi qui absorbent les ondes acoustiques ou des systèmes de contrôle actif.

Structure des cellules de choc des jets supersoniques

Les jets supersoniques sont dans la pratique généralement sous-détendu ou sur-détendu à cause de la difficulté à adapter la pression d'éjection à la pression ambiante. Les écoulements supersoniques sont en effet classiquement issus de tuyères convergentes-divergentes. Le fluide, initialement au repos, est accéléré au travers du convergent pour atteindre une vitesse sonique ($M = 1$) au col. Le nombre de Mach continue à croître dans la partie divergente de la tuyère, et la configuration de l'écoulement dépend ensuite de la différence entre la pression ambiante p_∞ et de la pression p_e en sortie de tuyère. Si p_e est inférieure à p_∞ , des chocs se forment afin de rétablir la pression dans le jet. Pour une différence de pression importante, le choc est droit et se positionne dans le divergent. Pour des rapports de pression plus modérés le choc est oblique et est attaché à la lèvre de la tuyère. Les réflexions du choc sur la frontière du jet forment alors une structure quasi périodique de cellules de choc. Ces jets sont dits sur-détendus. Pour $p_e > p_\infty$, des ondes de détente s'attachent à la lèvre de la tuyère et se réfléchissent sur la frontière du jet pour créer des cellules de choc quasi périodiques. On parle dans ce cas de jets sous-détendus.

Jets sous- et sur-détendus

Un jet supersonique choqué contient des ondes de détente, des ondes de compression et des chocs. Les figures A.1.a et A.1.b donnent des vues schématiques d'un jet sous-détendu et d'un jet sur-détendu, respectivement.

Pour un jet sous-détendu, l'excès de pression à la sortie de la tuyère par rapport à la pression ambiante p_∞ est réduit par une série d'ondes de détente attachées à la lèvre de la tuyère. Les ondes de détente se réfléchissent plus en aval sur la frontière du jet sous la forme d'ondes de compression afin que la pression sur la ligne sonique soit égale la pression ambiante. En outre, au passage des ondes de détente et des ondes de compression, la direction des lignes de courant s'éloigne ou se rapproche de l'axe du jet et le diamètre du jet est ainsi modifié. On observe que les ondes de compression, issues de la réflexion des ondes de détentes sur la frontière convexe du jet, peuvent se focaliser pour créer un choc de compression. La réflexion du choc sur l'axe est régulière pour des faibles taux de sous-détente, mais peut conduire à la formation d'un disque de Mach pour des taux de détente plus élevés. Le choc se réfléchit ensuite sur la frontière du jet sous forme d'onde de détente. Cette position marque la fin de la première cellule de choc. À ce niveau, la configuration de l'écoulement est similaire à celle en sortie de buse : la pression est inférieure à la pression de sortie mais supérieure à p_∞ , et une nouvelle cellule de choc est formée.

Pour un jet sur-détendu, la pression de sortie est inférieure à la pression ambiante. La

pression dans l'écoulement s'ajuste par un choc de compression qui s'attache à la lèvre de la tuyère et s'étend dans le jet (*cf.* figure A.1.b). Après le choc, les lignes de courant se dirigent vers l'axe du jet et le diamètre du jet diminue. Pour des taux de sur-détente suffisamment importants la réflexion du choc sur l'axe peut s'effectuer avec l'apparition d'un disque de Mach. Le choc se réfléchit ensuite sur la frontière du jet et génère des ondes de détentes. Les cellules suivantes sont similaires à celles des jets sous-détendus.

Les jets parfaitement détendus ne contiennent pas de choc puisque la pression en sortie de tuyère coïncide avec la pression ambiante.

Nombre de Mach équivalent

Les jets supersoniques sont généralement décrits à l'aide de deux nombres de Mach : le nombre de Mach d'éjection M_d qui est relié à la vitesse d'éjection en sortie de buse, et le nombre de Mach équivalent M_j qui prend en compte le taux de détente du jet. M_j est en effet défini comme le nombre de Mach d'éjection d'un jet parfaitement détendu dont les conditions de génération seraient identiques à celles du jet choqué considéré. Comme l'illustre la figure A.2, il est possible de prolonger artificiellement la tuyère afin que la pression dans l'écoulement atteigne de façon isentropique la pression ambiante p_∞ . Ainsi, d'après les relations entre pression, densité, et nombre de Mach pour une transformation isentropique, il vient,

$$M_j = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_d^2 \right) \left(\frac{p_e}{p_\infty} \right)^{1-1/\gamma} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

où γ est la chaleur spécifique, p_e la pression d'éjection et p_∞ la pression ambiante.

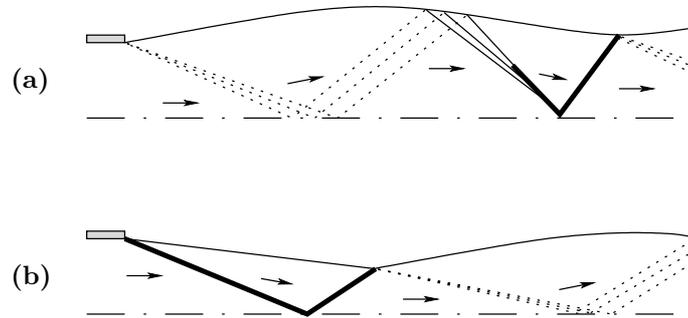


Figure A.1: Structure des cellules de choc des jets : (a) sous-détendus et (b) sur-détendus.
 ondes de détente, — ondes de compression, — choc de compression. Les flèches indiquent la direction des lignes de courant.

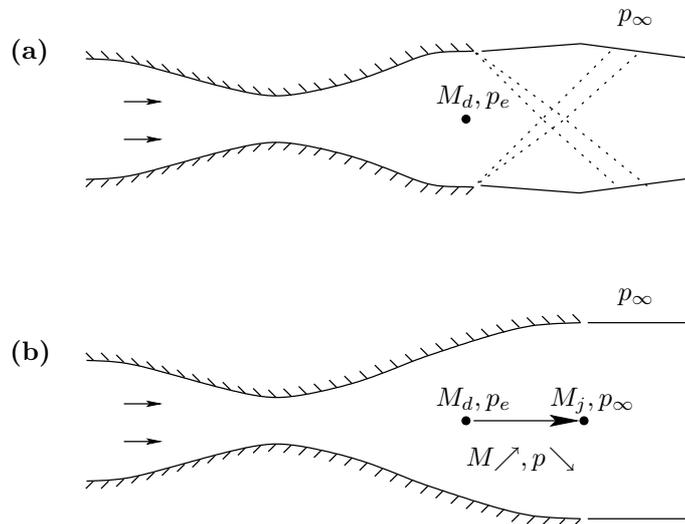


Figure A.2: Illustration du calcul du nombre de Mach équivalent M_j . (a) Jet sous-détendu ; (b) jet parfaitement détendu équivalent dont le nombre de Mach d'éjection vaut M_j .

ANNEXE B

Développement des équations de Navier-Stokes sur une paroi solide

On développe les équations de Navier-Stokes en se plaçant sur une paroi solide. La condition d'adhérence et l'hypothèse de paroi adiabatique permettent de simplifier un certain nombre de termes. En effet, ces conditions se traduisent par

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad q_n = 0 \quad (\text{B.1})$$

si n est l'indice de la direction normale à la paroi. Ces relations impliquent en outre que les dérivées des vitesses tangentiellement à la paroi sont nulles, *i.e.* si k est l'indice de la direction tangentielle à la paroi :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \frac{\partial u_3}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{B.2})$$

et

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Les dérivées spatiales des flux Eulériens et visqueux sont maintenant développées de manière à faire apparaître les dérivées des variables primitives :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1^2 + \rho 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1 u_2 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_2 + \rho u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1 u_3 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_3 + \rho u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2^2 + \rho 2u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_1 u_2 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_2} u_2 + \rho u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2 u_3 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_3 + \rho u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_e}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_1 u_3 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_3} u_3 + \rho u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_2 u_3 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_3} u_3 + \rho u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3^2 + \rho 2u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

avec,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1^3 + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_2^2 + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_3^2 \\ & + \frac{3}{2} \rho u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \rho u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_1 \rho u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ & + u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} p \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rho u_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rho u_3^2 \\ & + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2^3 + \frac{1}{2} u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_3^2 \\ & + u_2 \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{3}{2} \rho u_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2 \rho u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ & + u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} p \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rho u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rho u_3^2 \\ & + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 = & u_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_1^2 + \frac{1}{2} u_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3^3 \\ & + u_3 \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + u_3 \rho u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{3}{2} \rho u_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ & + u_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} p \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rho u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rho u_2^2 \\ & + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} p \end{aligned}$$

Les flux visqueux s'écrivent,

$$\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \\ \Lambda_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ \Lambda_5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 x_3} \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \Lambda_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

avec,

$$\begin{aligned} \Lambda_4 = & \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{4}{3} u_1 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ & - \frac{2}{3} u_1 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{2}{3} u_1 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} \\ & + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \mu + u_2 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ & + u_2 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \mu \\ & + u_3 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} + u_3 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_5 = & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \mu + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_1 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\
& + u_1 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \\
& - \frac{2}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
& + \frac{4}{3} u_2 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{2}{3} u_2 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\
& - \frac{2}{3} u_2 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \mu \\
& + u_3 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + u_3 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_6 = & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \mu + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + u_1 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\
& + u_1 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \mu + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\
& + u_2 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + u_2 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \\
& - \frac{2}{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
& + \frac{4}{3} u_3 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \frac{2}{3} u_3 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} \\
& - \frac{2}{3} u_3 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial q_3}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

Pour une paroi dans le plan (x_1, x_2) les équations se simplifient suivant

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} u_3 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Pour une paroi dans le plan (x_1, x_3) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} u_2 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} - \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Pour une paroi dans le plan (x_2, x_3) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} u_1 + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} - \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Seules les équations sur la masse volumique et l'énergie volumique sont résolues sur la paroi puisque les composantes de la vitesse restent nulles.

Développements théoriques pour l'analyse des erreurs numériques d'une SGE

Cette annexe décrit l'obtention d'un certains nombres de résultats intermédiaires qui sont utilisés dans le chapitre 3 pour déterminer les erreurs numériques commises lors de la simulation des grandes échelles d'un cube de turbulence homogène isotrope et incompressible. Les notations utilisées ici sont les mêmes que celles définies dans le chapitre 3.

C.1 Hypothèse de Millionshchikov dans l'espace spectral

L'hypothèse de Millionshchikov [79] permet de relier directement les moments d'ordre quatre de la vitesse aux moments deux. Cette hypothèse se traduit dans l'espace physique par l'équation,

$$\begin{aligned} \langle u_m(\mathbf{x}_1)u_n(\mathbf{x}_2)u_p(\mathbf{x}_3)u_q(\mathbf{x}_4) \rangle &= \langle u_m(\mathbf{x}_1)u_n(\mathbf{x}_2) \rangle \langle u_p(\mathbf{x}_3)u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \\ &+ \langle u_m(\mathbf{x}_1)u_p(\mathbf{x}_3) \rangle \langle u_n(\mathbf{x}_2)u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \\ &+ \langle u_m(\mathbf{x}_1)u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \langle u_n(\mathbf{x}_2)u_p(\mathbf{x}_3) \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

où $\langle \cdot \rangle$ est une moyenne d'ensemble.

On se place maintenant dans l'espace spectral à l'aide de la transformée de Fourier spatiale définie par la relation,

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{et} \quad \hat{u}_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (\text{C.2})$$

où Ω est le domaine d'étude dans l'espace physique et V son volume. Les coefficients $\hat{u}_i(\mathbf{k})$ sont les composantes spectrales de la vitesse $u_i(\mathbf{x})$ pour le vecteur nombre d'onde \mathbf{k} .

L'objectif est d'exprimer les moments d'ordre quatre des composantes spectrales de la vitesse de la forme :

$$\langle \hat{u}_m(\mathbf{k}_1) \hat{u}_n(\mathbf{k}_2) \hat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \hat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle \quad (\text{C.3})$$

en fonction des moments d'ordre deux de la vitesse. L'exposant $*$ indique le complexe conjugué. La transformée de Fourier donnée par l'équation (C.2) est appliquée au moment (C.3) et fournit alors l'expression,

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_m(\mathbf{k}_1) \hat{u}_n(\mathbf{k}_2) \hat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \hat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle &= \left(\frac{1}{8\pi^3} \right)^4 \left\langle \int_{\Omega} u_m(\mathbf{x}_1) e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}_1} d\mathbf{x}_1 \int_{\Omega} u_n(\mathbf{x}_2) e^{-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}_2} d\mathbf{x}_2 \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\Omega} u_p(\mathbf{x}_3) e^{i\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{x}_3} d\mathbf{x}_3 \int_{\Omega} u_q(\mathbf{x}_4) e^{i\mathbf{k}_4\cdot\mathbf{x}_4} d\mathbf{x}_4 \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

soit encore,

$$\langle \widehat{u}_m(\mathbf{k}_1) \widehat{u}_n(\mathbf{k}_2) \widehat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \widehat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle = \left(\frac{1}{8\pi^3} \right)^4 \iiint \iiint_{\Omega^4} \langle u_m(\mathbf{x}_1) u_n(\mathbf{x}_2) u_p(\mathbf{x}_3) u_q(\mathbf{x}_4) \rangle \times e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_3} e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x}_4} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \quad (\text{C.5})$$

L'hypothèse de Millionshchikov (C.1) formulée dans l'espace physique, est introduite dans l'équation précédente et conduit à la formulation :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_m(\mathbf{k}_1) \widehat{u}_n(\mathbf{k}_2) \widehat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \widehat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle &= \left(\frac{1}{8\pi^3} \right)^4 \iiint \iiint_{\Omega^4} R_{mn}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \\ &\times R_{pq}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3) e^{i\mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3)} e^{i(-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1} e^{i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}_3} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \\ &+ \left(\frac{1}{8\pi^3} \right)^4 \iiint \iiint_{\Omega^4} R_{mp}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) e^{i\mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)} \\ &\times R_{nq}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2)} e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \\ &+ \left(\frac{1}{8\pi^3} \right)^4 \iiint \iiint_{\Omega^4} R_{mq}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1) e^{i\mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)} \\ &\times R_{np}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}_1} e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_2} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

où le tenseur $R_{ij}(\mathbf{r})$ des corrélations doubles de vitesse a été introduit,

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (\text{C.7})$$

L'équation (C.6) permet de faire apparaître le tenseur spectral $\Phi_{mn}(\mathbf{k})$ des corrélations doubles, avec,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_m(\mathbf{k}_1) \widehat{u}_n(\mathbf{k}_2) \widehat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \widehat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \Phi_{mn}(\mathbf{k}_2) \Phi_{pq}^*(\mathbf{k}_4) \\ &+ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_3) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k}_4) \\ &+ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \Phi_{mq}^*(\mathbf{k}_4) \Phi_{np}^*(\mathbf{k}_3) \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

où,

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{C.9})$$

C.2 Limite de la somme $S_1(\mathbf{k})$ pour un domaine infini

Le calcul de la densité spectrale de puissance de l'erreur de différentiation introduite dans le chapitre 3 nécessite de déterminer la limite de la somme,

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{k}) &= \alpha_{\sqrt{V}}^4 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \in \square}} \langle \widehat{u}_m(\mathbf{k}_1) \widehat{u}_n(\mathbf{k}_2) \widehat{u}_p^*(\mathbf{k}_3) \widehat{u}_q^*(\mathbf{k}_4) \rangle \\ &\times \widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k}_2) \widehat{G}(\mathbf{k}_3) \widehat{G}(\mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

quand le volume du domaine étudié Ω tend vers l'infini.

En utilisant l'hypothèse de Millionshchikov, les moments d'ordre quatre dans $S_1(\mathbf{k})$ peuvent être écrits comme des fonctions des moments d'ordre deux [79]. Cette hypothèse se traduit par l'équation (3.100), qui est réinjectée dans $S_1(\mathbf{k})$ pour former l'expression,

$$\begin{aligned}
S_1(\mathbf{k}) = & \alpha_v^4 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \in \square}} \Phi_{mn}(\mathbf{k}_2) \Phi_{pq}^*(\mathbf{k}_4) \widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k}_2) \widehat{G}(\mathbf{k}_3) \widehat{G}(\mathbf{k}_4) \\
& \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \\
+ & \alpha_v^4 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \in \square}} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_3) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k}_4) \widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k}_2) \widehat{G}(\mathbf{k}_3) \widehat{G}(\mathbf{k}_4) \\
& \times \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \\
+ & \alpha_v^4 H(\mathbf{k}) \Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \in \square}} \Phi_{mq}^*(\mathbf{k}_4) \Phi_{np}^*(\mathbf{k}_3) \widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k}_2) \widehat{G}(\mathbf{k}_3) \widehat{G}(\mathbf{k}_4) \\
& \times \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \quad (C.11)
\end{aligned}$$

qui est composée de trois sommes distinctes.

On remarque que le terme dans la première somme est non nul seulement si le produit $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4)$ est également non nul. Une telle situation apparaît quand $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k} = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. La seule valeur de \mathbf{k} pour laquelle les relations précédentes sont vérifiées est $\mathbf{k} = 0$. Ainsi, la première somme dans l'équation (C.11) n'est pas égale à zéro seulement pour le nombre d'onde $\mathbf{k} = 0$. Cependant, par construction des différences finies, le nombre d'onde effectif $\tilde{\mathbf{k}}$ est nul si $\mathbf{k} = 0$, c'est à dire que $\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) = 0$ si $\mathbf{k} = 0$. Par conséquent, la première somme dans (C.11) est toujours égale à zéro.

Considérons maintenant la deuxième somme qui apparaît dans l'équation (C.11) donnant $S_1(\mathbf{k})$. Le produit $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)$ est non nul si $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$. Cette observation permet de restreindre la somme sur $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ et \mathbf{k}_4 à une somme sur seulement deux vecteurs nombre d'onde :

$$\alpha_v^4 [\delta(0)]^2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_1) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k}_2) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right]^2 \quad (C.12)$$

Le terme $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ implique ensuite que seuls les nombres d'onde tels que $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ contribuent à la somme. Ainsi, la somme sur \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 se réduit à,

$$\alpha_v^4 [\delta(0)]^4 \sum_{\mathbf{k}_1 \in \square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_1) \Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right]^2 \quad (C.13)$$

De plus, par définition de $\alpha_v = 8\pi^3/V$ et de $\delta(0) = V/8\pi^3$, le coefficient $\alpha_v^4 [\delta(0)]^4$ est égal à 1. Un raisonnement similaire fournit pour la troisième somme de l'équation (C.11) l'expression simplifiée :

$$\sum_{\mathbf{k}_1 \in \square} \Phi_{mq}^*(\mathbf{k}_1) \Phi_{np}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1) \widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right]^2 \quad (C.14)$$

On a ainsi,

$$S_1(\mathbf{k}) = H(\mathbf{k})\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})\Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}_1 \in \square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_1)\Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1)\widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right]^2 \\ + H(\mathbf{k})\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})\Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})\Phi_{mq}^*(\mathbf{k}_1)\Phi_{np}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1)\widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right]^2 \quad (\text{C.15})$$

Par ailleurs, comme la turbulence est isotrope, la valeur du tenseur spectral des corrélations de vitesse Φ_{ij} ne dépend pas de l'indice j de la deuxième composante de vitesse. En d'autres termes, on a, $\Phi_{mp} = \Phi_{mq}$, et $\Phi_{nq} = \Phi_{np}$. Finalement, la somme $S_1(\mathbf{k})$ se réduit à,

$$S_1(\mathbf{k}) = 2H(\mathbf{k})\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})\Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{k}_1 \in \square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}_1)\Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left[\widehat{G}(\mathbf{k}_1)\widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right]^2 \quad (\text{C.16})$$

Le passage à la limite pour un domaine infini est maintenant abordé. L'objectif est de calculer la valeur de $(8\pi^3/V)S_1(\mathbf{k})$ quand $V \rightarrow \infty$. La somme sur le vecteur nombre d'onde \mathbf{k}_1 converge vers une intégrale sur le domaine \square . De manière symbolique, on peut noter,

$$\frac{8\pi^3}{V} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \square} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int_{\square} d\mathbf{k}_1 \quad (\text{C.17})$$

Finalement, quand le domaine devient infini, la somme $S_1(\mathbf{k})$ tends vers l'expression :

$$\frac{8\pi^3}{V} S_1(\mathbf{k}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 2H(\mathbf{k})\Delta_{imn}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})\Delta_{ipq}^*(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \int_{\square} \Phi_{mp}^*(\mathbf{k}')\Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\widehat{G}(\mathbf{k}')\widehat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right]^2 d\mathbf{k}' \quad (\text{C.18})$$

C.3 Calcul de l'intégrale $J_{f,mpnq}$

Le calcul des spectres de puissance fait intervenir des intégrales de la forme,

$$J_{f,mpnq}(\mathbf{k}) = 8\pi k^2 \int_{\square} f(\mathbf{k}')\Phi_{mp}^*(\mathbf{k}')f(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\Phi_{nq}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (\text{C.19})$$

où l'on supposera que la fonction $f(\mathbf{k})$ ne dépend que du module du vecteur \mathbf{k} . Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, le tenseur spectral des champs de vitesse est directement relié au spectre de l'énergie cinétique $E(k)$ par l'expression,

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \quad (\text{C.20})$$

Cette relation permet de récrire l'intégrale (C.19) sous la forme,

$$J_{f,mpnq}(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2\pi} \iint_{\square \times \square} \frac{E_f(P)E_f(Q)}{P^4 Q^4} [P^2 Q^2 \delta_{mp} \delta_{nq} - P_m Q_p P^2 \delta_{nq} \\ - Q_n Q_q P^2 \delta_{mp} + P_m P_p Q_n Q_q] \delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{k}) d\mathbf{P} d\mathbf{Q} \quad (\text{C.21})$$

avec un spectre modifié,

$$E_f(k) = f(k)E(k) \quad (\text{C.22})$$

Ce type d'intégrale, qui a été traité par Ghosal [40], est donné par la relation,

$$J_{f,mpnq}(\mathbf{k}) = F_{f,1}(k)\delta_{mp}\delta_{nq} + F_{f,2}(k)(\delta_{mn}\delta_{pq} + \delta_{pn}\delta_{mq}) \\ + F_{f,3}(k) \left[\frac{k_mk_p}{k^2}\delta_{nq} + \frac{k_nk_q}{k^2}\delta_{mp} \right] + F_{f,4}(k) \frac{k_mk_pk_nk_q}{k^4} \quad (\text{C.23})$$

avec,

$$\begin{bmatrix} F_{f,1}(k) \\ F_{f,2}(k) \\ F_{f,3}(k) \\ F_{f,4}(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -6 & -15 \\ 7 & -6 & -30 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

où les coefficients I_m sont donnés par les intégrales,

$$I_m = k \int_0^{+\infty} \int_{|\xi-1|}^{\xi+1} E_f(k\xi)E_f(k\eta)W_m(\xi, \eta) d\eta d\xi \quad (\text{C.25})$$

avec des pondérations W_m définies par :

$$W_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi\eta} \quad (\text{C.26})$$

$$W_2(\xi, \eta) = \frac{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2}{4\xi^3\eta^3} \quad (\text{C.27})$$

$$W_3(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi^2 - \eta^2)^2}{4\xi^3\eta} \quad (\text{C.28})$$

$$W_4(\xi, \eta) = \frac{[1 - (\xi^2 - \eta^2)^2]^2}{16\xi^3\eta^3} \quad (\text{C.29})$$

C.4 Bilan de l'énergie cinétique du système discret

On cherche ici à déterminer l'équation qui régit l'évolution de l'énergie cinétique du système

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\delta \bar{p}^*}{\delta x_i} - \nu \frac{\delta^2 \bar{u}_i}{\delta x_k^2} = -\alpha_f D \star \bar{u}_i \quad (\text{C.30})$$

Des développements analytiques similaires à ceux utilisés pour obtenir l'équation de Kármán & Howarth [5] sont appliqués à l'équation (C.30), qui gouverne le champ de vitesse. Une équation sur les corrélations doubles des vitesses est ainsi obtenue :

$$\frac{\partial \tilde{R}_{ij}}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta r_k} [\tilde{T}_{ik,j} + \tilde{T}_{jk,i}] + 2\nu \frac{\delta^2 \tilde{R}_{ij}}{\delta r_k^2} - \alpha_f \langle (D \star \bar{u}_i)(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + (D \star \bar{u}_j)(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \bar{u}_i(\mathbf{x}) \rangle \quad (\text{C.31})$$

où la moyenne d'ensemble est notée par $\langle \cdot \rangle$. Les tenseurs des corrélations doubles et triples des vitesses filtrées ont également été introduits. Ils sont définis par les relations,

$$\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \bar{u}_i(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (\text{C.32})$$

$$\tilde{T}_{ik,j}(\mathbf{r}) = \langle \bar{u}_i(\mathbf{x}) \bar{u}_k(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (\text{C.33})$$

L'équation sur les corrélations doubles (C.31) diffère de l'équation de Kármán & Howarth par l'utilisation d'opérateurs de dérivation discrets ($\delta/\delta r_k$), et par la présence au second

membre d'un terme associé au filtrage sélectif. En s'appuyant sur la définition du produit de convolution ($D \star \bar{u}_i$), il vient,

$$\langle (D \star \bar{u}_i)(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \left\langle \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \int_{\Omega} D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \bar{u}_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right\rangle \quad (\text{C.34})$$

soit encore, en permutant la moyenne d'ensemble et l'intégration,

$$\langle (D \star \bar{u}_i)(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \bar{u}_i(\mathbf{x}') \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{x}' \quad (\text{C.35})$$

Le changement de variable $\mathbf{r}' = \mathbf{x}' - \mathbf{x} - \mathbf{r}$ fournit ensuite la relation,

$$\begin{aligned} \langle (D \star \bar{u}_i)(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \int_{\Omega} D(-\mathbf{r} - \mathbf{r}') \overbrace{\langle \bar{u}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{r}') \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}^{\tilde{R}_{ji}(\mathbf{r}')} d\mathbf{r}' \\ &= (D \star \tilde{R}_{ji})(-\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

qui fait intervenir le tenseur des corrélations doubles des vitesses filtrées. On obtient de la même manière,

$$\langle (D \star \bar{u}_j)(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \bar{u}_i(\mathbf{x}) \rangle = (D \star \tilde{R}_{ij})(\mathbf{r}) \quad (\text{C.37})$$

L'équation (C.31) sur les corrélations doubles des vitesses filtrées est finalement réécrite sous la forme,

$$\frac{\partial \tilde{R}_{ij}}{\partial t} = \tilde{N}_{ijk} + 2\nu \frac{\delta^2 \tilde{R}_{ij}}{\delta r_k^2} - \alpha_f \left[(D \star \tilde{R}_{ji})(-\mathbf{r}) + (D \star \tilde{R}_{ij})(\mathbf{r}) \right] \quad (\text{C.38})$$

où les corrélations triples sont notées $\tilde{N}_{ijk} = \delta_{r_k} [\tilde{T}_{ik,j} + \tilde{T}_{jk,i}]$.

La prochaine étape consiste à écrire la relation précédente dans l'espace spectral. Le tenseur spectral des corrélations doubles des vitesses filtrées est alors défini comme la transformée de Fourier de \tilde{R}_{ij} :

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega} \tilde{R}_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{C.39})$$

Les termes associés au filtrage sélectif dans l'équation sur les corrélations doubles (C.38) peuvent aussi s'écrire dans l'espace spectral. En effet, en utilisant la définition du produit de convolution, on obtient,

$$\frac{1}{8\pi^3} \int (D \star \tilde{R}_{ji})(-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \hat{D}(-\mathbf{k}) \tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) \quad (\text{C.40})$$

$$\frac{1}{8\pi^3} \int (D \star \tilde{R}_{ij})(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \hat{D}(\mathbf{k}) \tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) \quad (\text{C.41})$$

À noter que la symétrie de la fonction de transfert du filtre implique que $\hat{D}(-\mathbf{k}) = \hat{D}(\mathbf{k})$. L'équation (C.38) qui régit les corrélations doubles \tilde{R}_{ij} devient ainsi dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_{ij}}{\partial t} = \hat{N}_{ijk} - 2\nu k^2 \tilde{\Phi}_{ij} - 2\alpha_f \hat{D}(\mathbf{k}) \tilde{\Phi}_{ij} \quad (\text{C.42})$$

où \hat{N}_{ijk} est la transformée de Fourier du terme associé aux corrélations triples des vitesses filtrées.

On cherche maintenant à introduire le spectre de l'énergie cinétique $E(k)$ du champ de vitesse non-filtrée dans l'expression (C.42). Par définition, le tenseur spectral des vitesses filtrées s'écrit,

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \langle \bar{u}_i(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{C.43})$$

En développant les produits de convolution associés au filtrage, on obtient la relation,

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) G(\mathbf{x}'' - \mathbf{x} - \mathbf{r}) \langle u_i(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}'') \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' d\mathbf{r} \quad (\text{C.44})$$

soit, en reformulant l'exponentielle complexe,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} G(\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{x}'') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r}-\mathbf{x}'')} \\ \times R_{ij}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}''-\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

où $R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ est le tenseur des corrélations doubles des vitesses non filtrées. L'introduction du tenseur spectral Φ_{ij} des vitesses non filtrées fournit alors l'équation :

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \left[\widehat{G}(\mathbf{k}) \right]^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \quad (\text{C.46})$$

En outre, pour une turbulence isotrope, le tenseur Φ_{ij} est relié au spectre de l'énergie cinétique par la relation $\phi_{ij}(\mathbf{k}) = E(k)(k^2\delta_{ij} - k_i k_j)/4\pi k^4$. Par conséquent, le tenseur $\tilde{\Phi}_{ij}$ des vitesses filtrées est donné par,

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{E}(k)}{4\pi k^4} (k^2\delta_{ij} - k_i k_j) \quad (\text{C.47})$$

où la quantité $\tilde{E}(k) = \widehat{G}(\mathbf{k})^2 E(k)$ correspond à la densité spectrale de l'énergie cinétique du champ de vitesse filtrée. Cette expression est réintroduite dans l'équation (C.42). En posant $i = j$, on obtient alors une équation de bilan pour l'énergie cinétique des vitesses filtrées, qui prend la forme,

$$\frac{\partial \tilde{E}(k)}{\partial t} = \tilde{T}(k) - \underbrace{2\nu \tilde{k}^2 \tilde{E}(k)}_{\mathcal{D}_\nu(k)} - \underbrace{2\alpha_f \left[1 - \widehat{G}(\mathbf{k}) \right] \tilde{E}(k)}_{\mathcal{D}_{sf}(k)} \quad (\text{C.48})$$

où le terme $\tilde{T}(k)$ est associé aux corrélations triples de vitesse. Ce bilan fait par ailleurs apparaître deux termes linéaires : $\mathcal{D}_\nu(k)$ pour la dissipation visqueuse, et $\mathcal{D}_{sf}(k)$, qui donne accès à la dissipation introduite artificiellement par l'opération de filtrage.

Définitions des cas test d'intégration temporelle et coefficients des algorithmes numériques

D.1 Définition des cas test A_1 d'intégration temporelle

Cas test A_1 – Système d'équations non linéaires non autonomes :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{1}{u} - \frac{ve^{t^2}}{t^2} - t \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{v} - e^{t^2} - 2te^{-t^2}\end{aligned}\tag{D.1}$$

avec les conditions initiales $u(1) = 1$ et $v(1) = e^{-1}$. La solution exacte est $u_e(t) = 1/t$ et $v_e(t) = e^{-t^2}$. Le système est résolu numériquement pour $t \in [1, 1.4]$ avec $\Delta t = 0.1$. L'erreur est définie par $E = |u - u_e| + |v - v_e|$ à $t = 1.4$.

Cas test A_2 – Équation simple :

$$\frac{du}{dt} = -u^{3/2}\tag{D.2}$$

pour $t \in [0, 1]$ avec $u(0) = 1$ et $\Delta t = 0.05$. La solution exacte est $u_e(t) = 1/\sqrt{1+t}$. L'erreur est définie par $E = |u - u_e|$ à $t = 1$.

Cas test A_3 – Équation simple :

$$\frac{du}{dt} = u \cos(t)\tag{D.3}$$

pour $t \in [0, 1]$ avec $u(0) = 1$ et $\Delta t = 0.05$. La solution exacte est $u_e(t) = \exp(\sin(t))$. L'erreur est définie par $E = |u - u_e|$ à $t = 1$.

Cas test A_4 – Équation simple :

$$\frac{du}{dt} = u \frac{1 - u/20}{4}\tag{D.4}$$

pour $t \in [0, 1]$ avec $u(0) = 1$ et $\Delta t = 0.05$. La solution exacte est $u_e(t) = 20/(1 + 19 \exp(-t/4))$. L'erreur est définie par $E = |u - u_e|$ à $t = 1$.

D.2 Coefficients des algorithmes numériques

Les coefficients des algorithmes développés dans ce travail de thèse sont présentés dans les tableaux suivant :

Tab. D.1 - Coefficients γ_i de l'algorithme RK46-L, et coefficients α_i , β_i et c_i de l'algorithme RK46-NL ;

- Tab. D.2 - Coefficients des différences finies décentrées sur sept points.
- Tab. D.3 - Coefficients des différences finies décentrées sur onze points.
- Tab. D.4 - Coefficients des filtres sélectifs décentrées sur sept points.
- Tab. D.5 - Coefficients des filtres sélectifs décentrés sur onze points.
- Tab. D.6 - Coefficients du filtre sélectif décentré sur quatre points S_{F03} .
- Tab. D.7 - Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre six sur sept points.
- Tab. D.8 - Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre dix sur onze points.
- Tab. D.9 - Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur sept points.
- Tab. D.10 - Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur onze points.

Tableau D.1: Coefficients γ_i de l'algorithme RK46-L, et coefficients α_i , β_i et c_i de l'algorithme RK46-NL.

i	γ_i	α_i	β_i	c_i
1	1	0.0	0.032918605146	0.0
2	1/2	-0.737101392796	0.823256998200	0.032918605146
3	1/6	-1.634740794341	0.381530948900	0.249351723343
4	1/24	-0.744739003780	0.200092213184	0.466911705055
5	0.007856772044	-1.469897351522	1.718581042715	0.582030414044
6	0.000959998595	-2.813971388035	0.27	0.847252983783

Tableau D.2: Coefficients des différences finies décentrées sur sept points.

	FD ₂₄	FD ₁₅	FD ₀₆
a_{-2}	0.048264094108		
a_{-1}	-0.488255830845	-0.212932721951	
a_0	-0.366015590723	-1.060320390770	-2.225833963270
a_1	1.048005455857	2.078926116439	4.827779580575
a_2	-0.289325926394	-1.287179452384	-5.001388453836
a_3	0.050392437692	0.685176395471	3.911103941646
a_4	-0.003064639693	-0.245320613994	-2.115267458633
a_5		0.041650667189	0.718882784412
a_6			-0.115276430895

Tableau D.3: Coefficients des différences finies décentrées sur onze points.

i	FD ₄₆	FD ₃₇	FD ₂₈	FD ₁₉	FD ₀₁₀
a_{-4}	0.016756572303				
a_{-3}	-0.117478455239	-0.013277273810			
a_{-2}	0.411034935097	0.115976072920	0.057982271137		
a_{-1}	-1.130286765151	-0.617479187931	-0.536135360383	-0.180022054228	
a_0	0.341435872100	-0.274113948206	-0.264089548967	-1.237550583044	-2.391602219538
a_1	0.556396830543	1.086208764655	0.917445877606	2.484731692990	5.832490322294
a_2	-0.082525734207	-0.402951626982	-0.169688364841	-1.810320814061	-7.650218001182
a_3	0.003565834658	0.131066986242	-0.029716326170	1.112990048440	7.907810563576
a_4	0.001173034777	-0.028154858354	0.029681617641	-0.481086916514	-5.922599052629
a_5	-0.000071772671	0.002596328316	-0.005222483773	0.126598690230	3.071037015445
a_6	-0.000000352273	0.000128743150	-0.000118806260	-0.015510730165	-1.014956769726
a_7		0.0	-0.000118806260	0.000024609059	0.170022256519
a_8			-0.000020069730	0.000156447571	0.002819958377
a_9				-0.000007390277	-0.004791009708
a_{10}					-0.000013063429

Tableau D.4: Coefficients des filtres sélectifs décentrés sur sept points.

	SF ₂₄	SF ₁₅
d_{-2}	0.032649010764	
d_{-1}	-0.143339502575	-0.085777408970
d_0	0.273321177980	0.277628171524
d_1	-0.294622121167	-0.356848072173
d_2	0.186711738069	0.223119093072
d_3	-0.062038376258	-0.057347064865
d_4	0.007318073189	-0.000747264596
d_5		-0.000027453993

Tableau D.5: Coefficients des filtres sélectifs décentrés sur onze points.

i	SF ₄₆	SF ₃₇	SF ₂₈
d_{-4}	0.008391235145		
d_{-3}	-0.047402506444	-0.000054596010	
d_{-2}	0.121438547725	0.042124772446	0.052523901012
d_{-1}	-0.200063042812	-0.173103107841	-0.206299133811
d_0	0.240069047836	0.299615871352	0.353527998250
d_1	-0.207269200140	-0.276543612935	-0.348142394842
d_2	0.122263107844	0.131223506571	0.181481803619
d_3	-0.047121062819	-0.023424966418	0.009440804370
d_4	0.009014891495	0.013937561779	-0.077675100452
d_5	0.001855812216	-0.024565095706	0.044887364863
d_6	-0.001176830044	0.013098287852	-0.009971961849
d_7		-0.002308621090	0.000113359420
d_8			0.000113359420

Tableau D.6: Coefficients du filtre sélectif décentré sur quatre points SF₀₃.

i	SF ₀₃
d_{-3}	0.320882352941
d_{-2}	-0.465
d_{-1}	0.179117647059
d_0	-0.035

Tableau D.7: Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre six sur sept points.

	FD_7^{-2}	FD_7^{-1}	FD_7^0	FD_7^1	FD_7^2
a_{-3}	-0.073881673880	-0.150000000000	-0.050793650790	-0.026041666670	-0.019047619050
a_{-2}	0.250000000000	0.812698412700	0.375000000000	0.214285714300	0.166666666700
a_{-1}	-0.833333333300	-1.500000000000	-1.371428571000	-0.937500000000	-0.800000000000
a_0	0.066666666700	0.333333333300	0.916666666700	0.300000000000	0.083333333300
a_1	0.714285714300	0.600000000000	0.150000000000	0.468750000000	0.666666666700
a_2	-0.138888888900	-0.107142857100	-0.021428571430	-0.020833333300	-0.100000000000
a_3	0.015151515150	0.011111111110	0.001984126984	0.001339285714	0.002380952381

Tableau D.8: Coefficients des différences finies de raccordement d'ordre dix sur onze points.

	FD_{11}^{-4}	FD_{11}^{-3}	FD_{11}^{-2}	FD_{11}^{-1}	
a_{-5}	-0.004504336385	-0.013888888830	-0.026744497310	-0.029761904800	
a_{-4}	0.017857142830	0.085582391090	0.208333333200	0.272793873100	
a_{-3}	-0.071428571350	-0.166666666000	-0.636519036100	-1.071428573000	
a_{-2}	0.257142857000	0.333333332400	0.833333332800	2.273282276000	
a_{-1}	-0.857142856900	-0.933333332000	-1.166666666000	-2.500000020000	
a_0	0.022222219500	0.085714284400	0.235714285200	0.616666667500	
a_1	0.818181818400	0.777777786000	0.694444444800	0.535714285200	
a_2	-0.230769230800	-0.212121212500	-0.176767677000	-0.119047618800	
a_3	0.057142857160	0.051282051370	0.040792540870	0.025252525190	
a_4	-0.009453781515	-0.008333333343	-0.006410256426	-0.003746253734	
a_5	0.000751879699	0.000653594771	0.000490196080	0.000274725274	
	FD_{11}^0	FD_{11}^1	FD_{11}^2	FD_{11}^3	FD_{11}^4
a_{-5}	-0.005683205683	-0.002343750000	-0.001420801421	-0.001041666667	-0.000865800900
a_{-4}	0.059523809520	0.026223776220	0.016666666670	0.012626262630	0.010714290000
a_{-3}	-0.284160284200	-0.136718750000	-0.092352092350	-0.072916666670	-0.063492060000
a_{-2}	0.833333333300	0.454545454500	0.333333333300	0.277777777800	0.250000000000
a_{-1}	-1.847041847000	-1.230468750000	-1.015873016000	-0.911458333300	-0.857142900000
a_0	1.141666667000	0.496031746000	0.241666666700	0.107142857100	0.033333330000
a_1	0.119047619000	0.410156250000	0.609523809500	0.729166666700	0.800000000000
a_2	-0.019841269840	-0.019531250000	-0.095238095240	-0.166666666700	-0.214285700000
a_3	0.003607503608	0.002343750000	0.003968253968	0.026041666670	0.047619050000
a_4	-0.000485625486	-0.000253652597	-0.000288600289	-0.000694444444	-0.005952381000
a_5	0.000033300033	0.000015175796	0.000013875014	0.000022546898	0.000072150070

Tableau D.9: Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur sept points.

	SF_7^{-2}	SF_7^{-1}	SF_7^0	SF_7^1	SF_7^2
d_{-3}	0.000000000000	0.031250000000	-0.050000000000	-0.027343750000	-0.018750000000
d_{-2}	0.031250000000	0.000000000000	0.246093750000	0.150000000000	0.109375000000
d_{-1}	-0.156250000000	-0.156250000000	-0.450000000000	-0.328125000000	-0.262500000000
d_0	0.312500000000	0.312500000000	0.328125000000	0.350000000000	0.328125000000
d_1	-0.312500000000	-0.312500000000	-0.098437500000	-0.164062500000	-0.218750000000
d_2	0.156250000000	0.156250000000	0.028125000000	0.021875000000	0.065625000000
d_3	-0.031250000000	-0.031250000000	-0.003906250000	-0.002343750000	-0.003125000000

Tableau D.10: Coefficients des filtres sélectifs de raccordement sur onze points.

	SF_{11}^{-4}	SF_{11}^{-3}	SF_{11}^{-2}	SF_{11}^{-1}	
d_{-5}	0.000000000000	0.001953125000	0.009945609941	0.027343749990	
d_{-4}	0.001953125000	0.000000000000	-0.035156249990	-0.149184149100	
d_{-3}	-0.017578125000	-0.017578125000	0.009945609941	0.281249999900	
d_{-2}	0.070312500000	0.070312500000	0.072916666650	-0.149184149100	
d_{-1}	-0.164062500000	-0.164062500000	-0.167708333300	-0.109375000000	
d_0	0.246093750000	0.246093750000	0.243750000000	0.218750000000	
d_1	-0.246093750000	-0.246093750000	-0.238715277800	-0.210937500000	
d_2	0.164062500000	0.164062500000	0.156881313200	0.135416666700	
d_3	-0.070312500000	-0.070312500000	-0.066542832180	-0.056344696980	
d_4	0.017578125000	0.017578125000	0.016506410260	0.013767482520	
d_5	-0.001953125000	-0.001953125000	-0.001822916667	-0.001502403847	
	SF_{11}^0	SF_{11}^1	SF_{11}^2	SF_{11}^3	SF_{11}^4
d_{-5}	0.006225476190	-0.002909342448	-0.001860119048	-0.001342773438	-0.001085069444
d_{-4}	-0.023421835937	0.026041666670	0.017456054690	0.013020833330	0.010742187500
d_{-3}	-0.019044285714	-0.101826985700	-0.072544642860	-0.056396484380	-0.047743055560
d_{-2}	0.238418984375	0.225694444400	0.174560546900	0.143229166700	0.125325520800
d_{-1}	-0.487181190476	-0.305480957000	-0.265997023800	-0.234985351600	-0.214843750000
d_0	0.384474492188	0.248263888900	0.261840820300	0.257812500000	0.250651041700
d_1	-0.149023236607	-0.101826985700	-0.159598214300	-0.187988281200	-0.200520833300
d_2	0.068834975818	0.014546712240	0.049874441960	0.085937500000	0.107421875000
d_3	-0.023998783482	-0.002909342448	-0.004156203497	-0.020141601560	-0.035807291670
d_4	0.005245403646	0.000440809462	0.000453404018	0.000895182292	0.005967881944
d_5	-0.000530000000	-0.000033908420	-0.000029064360	-0.000040690104	-0.000108506944

Différences finies et filtres sélectifs de raccordement de maillages

Les problèmes aéroacoustiques impliquent généralement une large gamme d'échelles caractéristiques. Les sources de bruit d'un jet sont par exemple plus petites d'au moins un ordre de grandeur que la longueur d'onde dominante du champ acoustique rayonné. Un étirement du maillage peut alors être mis en œuvre pour tenir compte à la fois des échelles de longueur typiques des perturbations acoustiques et aérodynamiques. La méthode requiert cependant de nombreux points de maillage pour accroître la taille des mailles de manière significative, et elle peut générer des erreurs numériques [14].

Une approche alternative consiste à traiter les problèmes multi-échelles en utilisant un domaine de calcul divisé en plusieurs sous-domaines où la taille des mailles est uniforme. On s'intéresse ici au cas où la taille des mailles est doublée entre deux sous-domaines. Par exemple, Tam & Kurbatskii [143] ont développé dans cette optique des différences finies et des filtres sélectifs de raccordement entre deux sous-domaines sur sept points centrés sur les mailles. Des schémas centrés aux noeuds du maillage sont proposés dans cette annexe pour la discrétisation de la transition entre une grille de maille Δx et une grille de maille $2\Delta x$. Des différences finies et des filtres sélectifs d'ordre élevé sont ainsi construits pour la différentiation spatiale et la suppression des oscillations maille-à-maille.

Dans cette annexe, des schémas aux différences finies de raccordement sur sept et onze points sont développés dans la section E.1 et les filtres sélectifs correspondant sont décrits dans la section E.2. Des cas test illustrant la précision des schémas sont finalement résolus dans la section E.3.

E.1 Différences finies

Une formulation des différences finies sur un maillage non-uniforme (x_i) est introduite. La taille de maille locale est définie comme la distance la plus petite entre le point x_i et ses deux premiers voisins x_{i-1} et x_{i+1} , *i.e.*,

$$\Delta x_i = \min(x_{i+1} - x_i, x_i - x_{i-1}) \quad (\text{E.1})$$

La plus petite longueur d'onde que le schéma est capable de résoudre au point (x_i) est égale à $2\Delta x_i$. La dérivée spatiale en x_i d'une fonction f est ensuite approchée à l'aide du schéma,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x_i} \sum_{j=-N}^N a_j f(x_{i+j}) \quad (\text{E.2})$$

On propose ici de calculer les coefficients a_j en annulant les premiers termes issus de la série de Taylor de $f(x_{i+j})$ en x_i dans l'expression (E.2), de manière à atteindre un ordre de précision

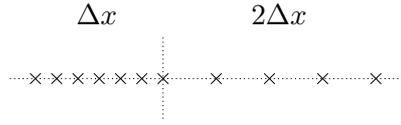


Figure E.1: Région de transition entre deux maillages uniformes de maille Δx et $2\Delta x$.

maximal. Il vient pour le développement asymptotique de $f(x_{i+j})$,

$$f(x_{i+j}) = \sum_{p=0}^{2N} \frac{\beta_{ij}^p \Delta x_i^p}{p!} f^{(p)}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^{2N+1}) \quad (\text{E.3})$$

où $\beta_{ij} = (x_{i+j} - x_i)/\Delta x_i$. Ainsi, d'après (E.2), l'algorithme se développe suivant,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f(x_i)}{\Delta x_i} \sum_{j=-N}^N a_j + \sum_{p=1}^{2N} \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N a_j \frac{\beta_{ij}^p \Delta x_i^{p-1}}{p!} f^{(p)}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^{2N}) \quad (\text{E.4})$$

Afin d'obtenir une précision d'ordre $2N$, les coefficients a_j doivent être solutions du système :

$$\begin{cases} \sum_{j=-N}^N a_j = 0 \\ \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N a_j \beta_{ij}^p = \delta_{p1}, \quad p = 1, \dots, 2N \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

où δ_{p1} est le symbole de Kronecker.

À l'aide du système (E.5), des différences finies d'ordre six sur sept points, et d'ordre dix sur onze points ont été calculés pour raccorder deux maillages uniformes de taille de maille Δx et $2\Delta x$. La figure E.1 illustre le raccord entre ces deux maillages uniformes. Les coefficients de ces algorithmes aux différences finies sont donnés dans les tableaux D.7 et D.8. Les schémas sont notés avec les conventions de la figure E.2 : l'indice indique le nombre de points du schéma, et l'exposant donne le point où la transition entre les deux maillages a lieu.

Les propriétés dispersives et dissipatives des schémas aux différences finies sont obtenues en calculant la transformée de Fourier spatiale de l'équation (E.2). Le nombre d'onde effectif k^* est alors défini par la relation,

$$k^* \Delta x_i = -i \sum_{j=-N}^N a_j e^{i\beta_{ij} k \Delta x_i} \quad (\text{E.6})$$

où k est le nombre d'onde exact. Afin d'illustrer les caractéristiques d'un schéma, on considère l'équation d'advection dans laquelle la dérivée spatiale $\partial/\partial x$ est approchée avec (E.2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{E.7})$$

Il vient pour la relation de dispersion,

$$\omega = k^* c \quad (\text{E.8})$$

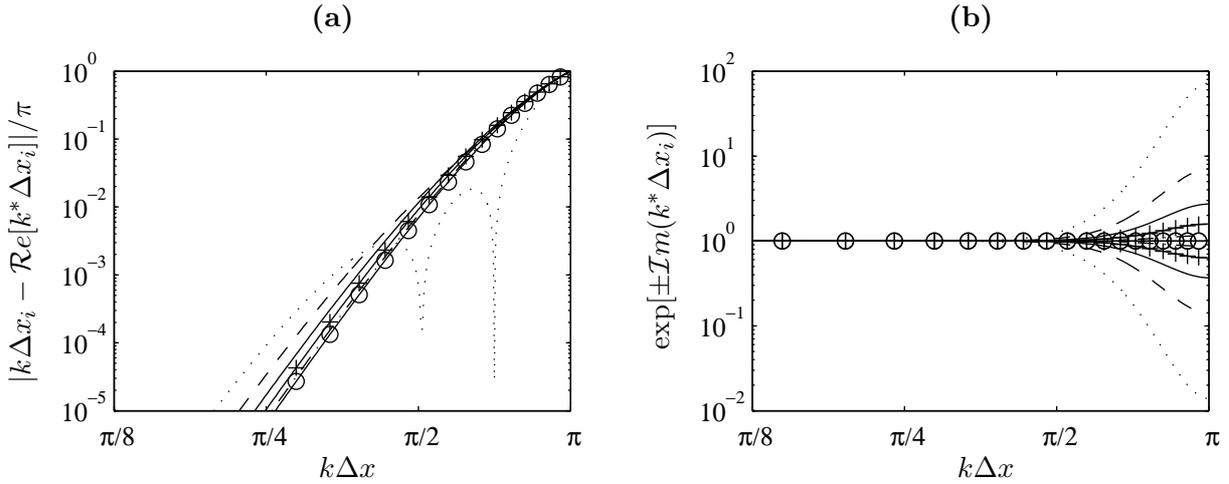


Figure E.3: (a) Erreur de dispersion, et (b) facteur d'amplification des différences finies en Δx de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: —○— FD_{11}^{unif} , - - - FD_{11}^4 , —+— FD_{11}^3 , — FD_{11}^2 , - - - FD_{11}^1 , FD_{11}^0 .

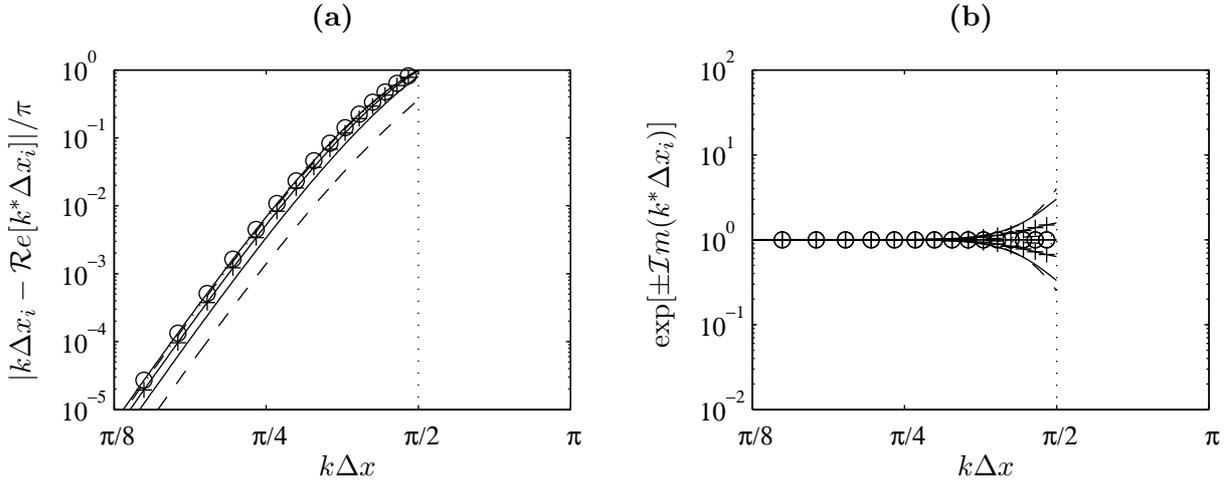


Figure E.4: (a) Erreur de dispersion, et (b) facteur d'amplification des différences finies en $2\Delta x$ de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: —○— FD_{11}^{unif} , —+— FD_{11}^{-1} , - - - FD_{11}^{-2} , — FD_{11}^{-3} , - · - · FD_{11}^{-4} . La ligne en pointillés montre le nombre d'onde de coupure des schémas par rapport à un maillage de maille de taille Δx .

en $2\Delta x$ ($\Delta x_i = 2\Delta x$), en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$, en échelles logarithmiques. Les propriétés des différences finies centrées d'ordre dix obtenues sur une grille uniforme, notées FD_{11}^{unif} , sont aussi tracées pour comparaison. Le nombre d'onde de coupure des schémas en $2\Delta x$ est $k_c \Delta x = \pi/2$. En effet, les oscillations maille-à-maille qui correspondent à deux points par longueur d'onde sur un maillage de maille Δx correspondent à des ondes avec quatre points par longueur d'onde sur un maillage de maille Δx . On observe que les erreurs de dispersion restent inférieures à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x < \pi/2$ pour tous les schémas aux différences finies en Δx , et jusqu'à $k\Delta x < \pi/4$ pour les schémas en $2\Delta x$. Ces limites en nombres d'onde correspondent respectivement à quatre et huit points par longueur d'onde par rapport à un maillage de maille Δx . On peut aussi noter que les oscillations maille-à-

Tableau E.1: Limites de précision en dispersion et en dissipation des différences finies de raccordement sur onze points, en nombres de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$ par rapport à une taille de maille Δx . Les limites du schéma standard centré d'ordre dix sont aussi données quand il est utilisé sur un maillage uniforme de maille Δx ($\text{FD}_{11}^{unif}/\Delta x$) et sur un maillage uniforme de maille $2\Delta x$ ($\text{FD}_{11}^{unif}/2\Delta x$).

	Dispersion	Dissipation
	$ k\Delta x_i - \mathcal{R}e(k^*\Delta x_i) /\pi < 5 \times 10^{-3}$	$ 1 - e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x_i)} < 5 \times 10^{-3}$
	$\lambda/\Delta x$	$\lambda/\Delta x$
$\text{FD}_{11}^{unif}/\Delta x$	4.14	0
.....		
FD_{11}^4	4.19	3.67
FD_{11}^3	4.28	4.24
FD_{11}^2	4.41	4.75
FD_{11}^1	4.56	5.35
FD_{11}^0	3.66	6.23
FD_{11}^{-1}	6.96	7.63
FD_{11}^{-2}	7.68	7.81
FD_{11}^{-3}	8.04	7.54
FD_{11}^{-4}	8.21	6.79
.....		
$\text{FD}_{11}^{unif}/2\Delta x$	8.28	0

maille, c'est à dire $k\Delta x = \pi$ sur une grille de maille Δx , et $k\Delta x = \pi/2$ avec une maille de taille $2\Delta x$, ne sont pas résolues par les différences finies de raccordement.

Le facteur d'amplification $e^{\pm \mathcal{I}m(k^*\Delta x_i)}$ des différences finies sur onze points est maintenant tracé sur la figure E.3.b pour les schémas en Δx et sur la figure E.4.b pour les schémas en $2\Delta x$, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$, en échelles logarithmiques. Pour des petits nombres d'onde, *i.e.* $k\Delta x < \pi/2$ pour les schémas en Δx et $k\Delta x < \pi/4$ pour les schémas en $2\Delta x$, le facteur d'amplification reste proche de 1. Pour des nombres d'onde plus grands, et plus particulièrement pour les oscillations maille-à-maille, le facteur d'amplification est tel que $e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x_i)} < 1$ et $e^{-\mathcal{I}m(k^*\Delta x_i)} > 1$. Les perturbations qui correspondent à ces nombres d'onde se propageant vers les x négatifs sont donc amplifiées tandis que celles se propageant vers les x positifs sont atténuées.

Les limites de précision en phase et en amplitude des schémas sur 11 points sont déterminées respectivement à l'aide des critères $|k\Delta x_i - \mathcal{R}e(k^*\Delta x_i)|/\pi < 5 \times 10^{-3}$ et $|1 - e^{\mathcal{I}m(k^*\Delta x_i)}| < 5 \times 10^{-3}$. Ces limites sont données pour tous les schémas sur 11 points dans le tableau E.1, en nombre de points par longueur d'onde, par rapport à un maillage de maille Δx . Les limites du schéma centré d'ordre dix sur onze points FD_{11}^{unif} sont aussi indiquées quand le schéma est utilisé sur des maillages uniformes de maille Δx et $2\Delta x$. Ce schéma centré n'introduit pas de dissipation puisqu'il est symétrique. L'étude des erreurs de dispersion montre qu'il est cependant précis pour des perturbations avec au moins quatre points par longueur d'onde, c'est à dire $\lambda = 4\Delta x$ sur une grille de maille Δx , et $\lambda = 8\Delta x$ sur une grille de maille $2\Delta x$. Les limites de précision des schémas de raccordement, à la fois pour la phase et l'amplitude, sont très proches : on obtient en effet environ $\lambda = 4\Delta x$ pour

les schémas en Δx et $\lambda = 8\Delta x$ pour les schémas en $2\Delta x$.

Le calcul des limites de précision montre donc que les schémas sur onze points développés dans cette annexe permettent à des ondes discrétisées par au moins huit points par longueur d'onde sur un maillage de maille Δx , ou de manière équivalente par quatre points par longueur d'onde sur une grille de maille $2\Delta x$, d'être propagées correctement au travers de la zone de transition entre les deux maillages uniformes. Les longueurs d'onde plus petites ne sont pas résolues et doivent donc être supprimées à l'aide de filtres sélectifs.

E.2 Filtres sélectifs

Afin de supprimer des oscillations maille-à-maille, le filtrage sélectif d'une fonction f peut être effectué à l'aide de l'algorithme,

$$f^d(x_i) = f(x_i) - \sigma \sum_{j=-N}^N d_j f(x_{i+j}) \quad (\text{E.11})$$

où f^d est la fonction filtrée, d_j sont les coefficients du filtre et σ est une constante prise entre 0 et 1 qui définit l'intensité du filtrage. Dans ce qui suit, lors du calcul des coefficients et de l'étude des propriétés du filtre, l'intensité du filtrage est fixée à sa valeur maximale $\sigma = 1$. La fonction de transfert du filtre est obtenue en appliquant la transformée de Fourier spatiale à l'expression (E.11) :

$$G(k\Delta x_i) = 1 - \sum_{j=-N}^N d_j e^{i\beta_{ij}k\Delta x_i} \quad (\text{E.12})$$

où Δx_i et β_{ij} ont été définis dans la section E.1. Afin de calculer les coefficients d_j , les premiers termes de la série de Taylor de (E.12), obtenus quand $k\Delta x_i \rightarrow 0$

$$G(k\Delta x_i) = 1 - \sum_{j=-N}^N d_j - \sum_{p=1}^{2N-1} \frac{(ik\Delta x_i)^p}{p!} \left[\sum_{j=-N}^N \beta_{ij}^p d_j \right] + \mathcal{O}(k\Delta x_i^{2N}) \quad (\text{E.13})$$

sont annulés. On impose également au filtre de dissiper entièrement les oscillations maille-à-maille. Les contraintes précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} G(k\Delta x_i) = 1 + \mathcal{O}(k\Delta x_i^\gamma), & \text{pour } k\Delta x_i \rightarrow 0 \\ G(\pi) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

et conduisent à un système d'équations qui détermine les coefficients d_j assurant une précision d'ordre γ quand $k \rightarrow 0$.

Pour les filtres en Δx , les coefficients $\beta_{ij} = (x_{i+j} - x_i)/\Delta x_i$ sont entiers et les expressions

(E.13) et (E.14) fournissent le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=-N}^N (-1)^{\beta_{ij}} d_j = 1 \\ \sum_{j=-N}^N d_j = 0 \\ \sum_{j=-N}^N d_j \beta_{ij}^p = 0, \quad p = 1, \dots, 2N - 1 \end{array} \right. \quad (\text{E.15})$$

avec $\gamma = 2N$. Des filtres sélectifs d'ordre six sur sept points et d'ordre dix sur onze points sont construits dans cette annexe à l'aide de ces relations.

Considérons maintenant les schémas en $2\Delta x$. Les coefficients $\beta_{ij} = (x_{i+j} - x_i)/\Delta x_i$ ne sont plus des entiers et la condition $G(\pi) = 0$ est *a priori* complexe. Celle-ci conduit donc à deux équations scalaires sur les coefficients d_j , qui sont alors solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=-N}^N \cos(\beta_{ij}\pi) d_j = 1 \\ \sum_{j=-N}^N \sin(\beta_{ij}\pi) d_j = 0 \\ \sum_{j=-N}^N d_j = 0 \\ \sum_{j=-N}^N d_j \beta_{ij}^p = 0, \quad p = 1, \dots, 2N - 2 \end{array} \right. \quad (\text{E.16})$$

L'ordre de précision est réduit à $\gamma = 2N - 1$. Des filtres sélectifs d'ordre cinq sur sept points et d'ordre neuf sur onze points sont calculés de cette manière.

Les coefficients des schémas sont donnés dans les tableaux D.9 et D.10, et la notation des algorithmes est décrite sur la figure E.2. On notera que le coefficient d_5 du schéma SF_{11}^0 a été optimisé afin que le filtre reste stable avec $|G(k\Delta x_i)| < 1$ pour $k\Delta x_i \in [0, \pi]$. Dans ce cas, l'ordre du filtre est réduit à neuf.

Les propriétés des algorithmes de filtrage sur 11 points sont maintenant étudiées en détail. Les filtres sur 7 points ne seront cependant pas présentés, car ils ont des caractéristiques similaires à celles des filtres sur 11 points.

Afin d'étudier les propriétés des filtres sélectifs dans l'espace de Fourier, la fonction de transfert (E.12) est mise sous la forme,

$$G(k\Delta x_i) = |G| e^{i\phi_G} \quad (\text{E.17})$$

où $|G|$ est le module et ϕ_G la phase, *i.e.* l'argument de G . Les facteurs d'amortissement $1 - |G(k\Delta x_i)|$ des filtres sur 11 points sont tracés sur la figure E.5.a pour les filtres en Δx et sur la figure E.6.a pour les filtres en $2\Delta x$, en fonction de $k\Delta x$, en échelles logarithmiques. Ils sont comparés au facteur d'amortissement du schéma standard centré d'ordre dix sur onze

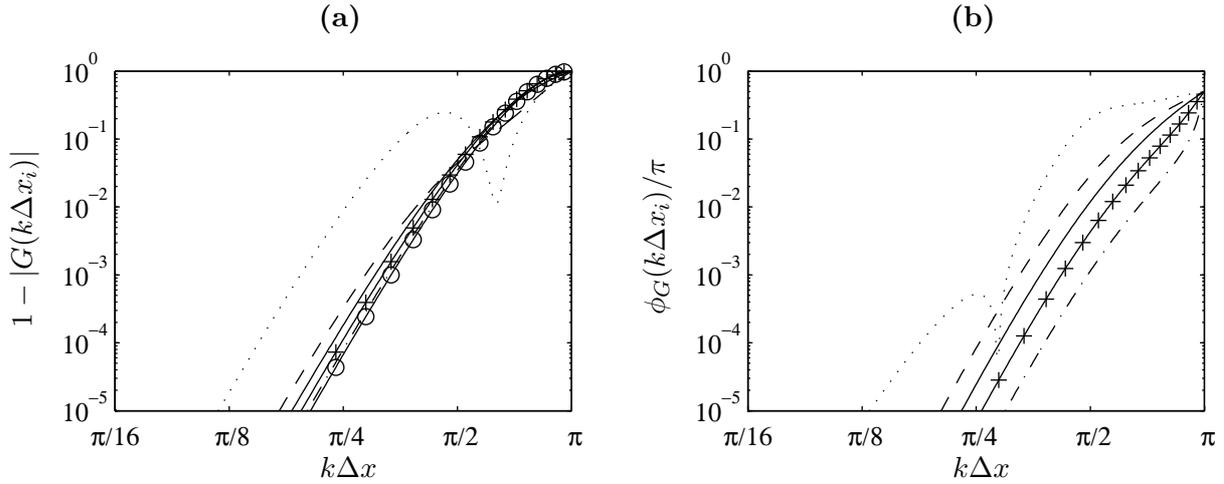


Figure E.5: (a) Facteur d'amortissement, et (b) erreur de phase des filtres sélectifs en Δx de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: —○— SF_{11}^{unif} , - - - SF_{11}^4 , —+— SF_{11}^3 , ——— SF_{11}^2 , - - - SF_{11}^1 , SF_{11}^0 .

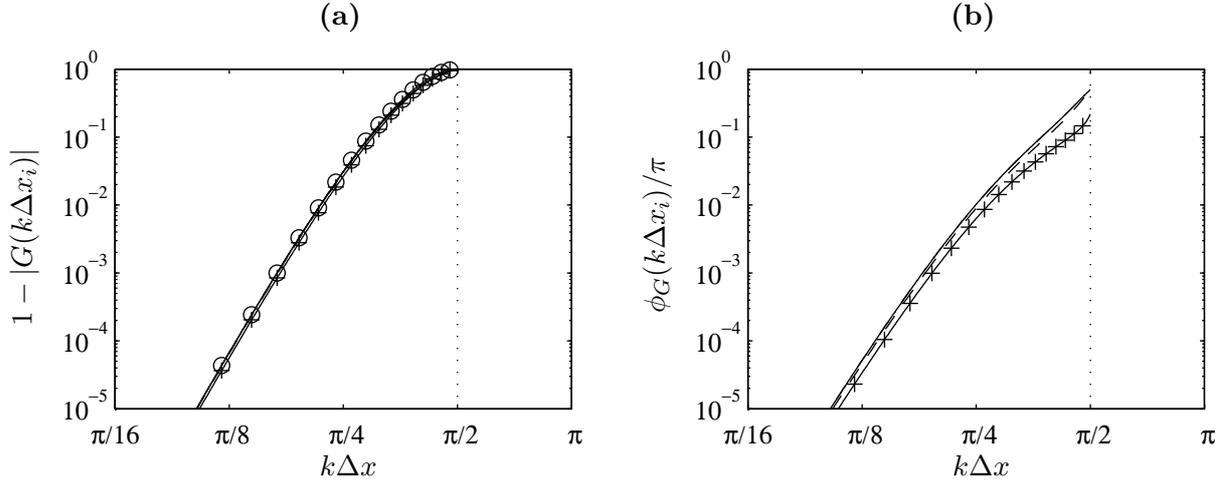


Figure E.6: (a) Facteur d'amortissement, et (b) erreur de phase des filtres sélectifs en $2\Delta x$ de raccordement sur onze points, en fonction du nombre d'onde $k\Delta x$: —○— SF_{11}^{unif} , —+— SF_{11}^{-1} , - - - SF_{11}^{-2} , ——— SF_{11}^{-3} , - · - · SF_{11}^{-4} . La ligne en pointillés montre le nombre d'onde de coupure des filtres par rapport à un maillage de maille Δx .

points utilisé sur une grille uniforme, noté SF_{11}^{unif} . On observe que la dissipation des filtres en Δx et en $2\Delta x$ est proche de celle du filtre centré. L'atténuation des oscillations maille-à-maille est importante tandis qu'elle est négligeable pour les nombres d'onde plus petits. Le taux de dissipation est en effet inférieur à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x < \pi/2.5$ pour les filtres en Δx et jusqu'à $k\Delta x < \pi/5$ pour les filtres en $2\Delta x$. Ces limites en nombre d'onde correspondent respectivement à $\lambda = 5\Delta x$ et $\lambda = 10\Delta x$.

Les erreurs de phase des filtres sur 11 points sont présentées sur les figures E.5.b et E.6.b. Elles sont inférieures à 5×10^{-3} jusqu'à $k\Delta x < \pi/2.5$ pour les filtres en Δx et jusqu'à $k\Delta x < \pi/5$ pour les schémas en $2\Delta x$. Pour les nombres d'onde plus élevés, $k\Delta x \simeq \pi$ pour les filtres en Δx et $k\Delta x \simeq \pi/2$ pour les filtres en $2\Delta x$, la dispersion devient significative mais

Tableau E.2: Limites de précision en dissipation et en dispersion des filtres sélectifs de raccordement sur onze points, en nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x = 2\pi/k\Delta x$ par rapport à une taille de maille Δx . Les limites du filtre standard centré d'ordre dix sont aussi données quand il est utilisé sur un maillage uniforme de maille Δx ($SF_{11/\Delta x}^{unif}$) et sur un maillage uniforme de maille $2\Delta x$ ($SF_{11/2\Delta x}^{unif}$).

	Dissipation	Dispersion
	$1 - G(k\Delta x_i) < 5 \times 10^{-3}$	$ \phi_G(k\Delta x_i) /\pi < 5 \times 10^{-3}$
	$\lambda/\Delta x$	$\lambda/\Delta x$
$SF_{11/\Delta x}^{unif}$	4.99	0
.....		
SF_{11}^4	5.07	3.30
SF_{11}^3	5.22	3.92
SF_{11}^2	5.44	4.48
SF_{11}^1	5.68	5.08
SF_{11}^0	8.58	6.06
SF_{11}^{-1}	9.79	8.30
SF_{11}^{-2}	9.94	8.73
SF_{11}^{-3}	9.97	8.89
SF_{11}^{-4}	9.97	8.89
.....		
$SF_{11/2\Delta x}^{unif}$	9.98	0

ces perturbations sont précisément celles qui sont atténuées par le filtrage.

Les limites de précision en dissipation et en dispersion des filtres sont par ailleurs évaluées à l'aide des deux critères : $1 - |G(k\Delta x_i)| < 5 \times 10^{-3}$ et $|\phi_G(k\Delta x_i)|/\pi < 5 \times 10^{-3}$. Elles sont présentées dans le tableau E.2, en terme de nombre de points par longueur d'onde par rapport à un maillage de maille Δx . La limite de dissipation du filtre centré d'ordre dix sur 11 points est aussi donnée. Ce filtre est précis jusqu'à $\lambda = 5\Delta x$ sur une grille de maille Δx , et jusqu'à $\lambda = 10\Delta x$ sur une grille de maille $2\Delta x$. On constate que les limites de précision des schémas de raccordement sont similaires. Les limites de précision en dissipation et en dispersion sont en effet d'environ $\lambda = 5\Delta x$ pour les schémas en Δx , et d'environ $\lambda = 10\Delta x$ pour les schémas en $2\Delta x$.

Les filtres de raccordement sur onze points atténuent donc significativement les perturbations avec des longueurs d'onde plus petites que $\lambda = 10\Delta x$. Ainsi, les ondes discrétisées par au moins cinq points par longueur d'onde sur un maillage de maille $2\Delta x$, ou discrétisées de manière équivalente par dix points par longueur d'onde sur une grille de maille Δx , ne sont pas significativement affectées par les filtres de raccordement lorsqu'elles traversent la zone de transition entre les maillages de taille de maille Δx et $2\Delta x$.

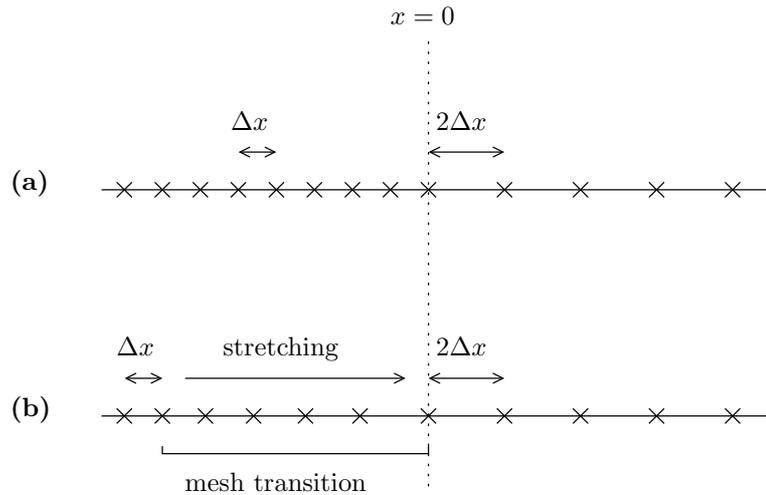


Figure E.7: Systèmes de maillage pour le cas test de convection linéaire : **(a)** le domaine est divisé en deux grilles uniformes de maille Δx et $2\Delta x$, et **(b)** la grille de maille Δx est étirée afin que la taille de maille soit égale à $2\Delta x$ en $x = 0$.

E.3 Cas test

E.3.1 Convection linéaire

Les propriétés des schémas de raccordement sont maintenant illustrées par la résolution de l'équation d'advection,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{E.18})$$

où $\epsilon = 1$ pour une onde se propageant vers les x positifs, et $\epsilon = -1$ pour une onde se propageant vers les x négatifs. La vitesse de propagation c est prise égale à 1. Le maillage n'est pas uniforme : à $x = 0$, la taille des mailles passe brusquement de Δx à $2\Delta x$, comme le montre la figure E.7.a, avec $\Delta x = 1$. La perturbation initiale à $t = 0$ est définie par,

$$u_0(x) = \cos \left[\frac{2\pi}{a\Delta x} (x - x_0) \right] \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{x - x_0}{b\Delta x} \right)^2 \right] \quad (\text{E.19})$$

où $a\Delta x$ est la longueur d'onde dominante, $b\Delta x$ est la demi-largeur de l'enveloppe Gaussienne, et x_0 est la position initiale de la perturbation. La même perturbation est propagée vers les x positifs dans un premier temps, puis vers les x négatifs dans un deuxième cas. Les paramètres pour ces deux cas test sont,

1. onde directe : $\epsilon = 1$, $a = 10$, $b = 12$, $x_0 = -30$;
2. onde rétrograde : $\epsilon = -1$, $a = 10$, $b = 12$, $x_0 = 30$.

La longueur d'onde dominante $a\Delta x = 10\Delta x$ correspond à un signal avec dix points par longueur d'onde par rapport à une maille de taille Δx , *i.e.* cinq points par longueur d'onde sur une grille de maille $2\Delta x$. La demi-largeur de la Gaussienne est choisie afin que la perturbation initiale ne contiennent pas d'onde avec moins de quatre points par longueur d'onde sur le maillage de maille $2\Delta x$. La solution est calculée jusqu'à $t = 60$. L'algorithme optimisé de

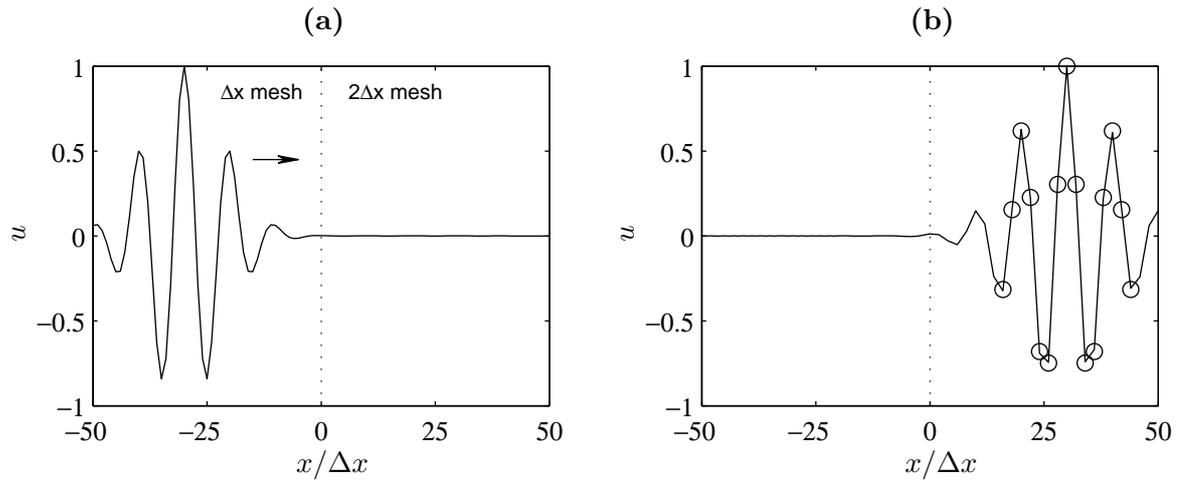


Figure E.8: (a) Perturbation initiale, et (b) solution calculée à $t = 60$ pour une perturbation se propageant vers les x positifs, pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.2$ (\circ solution exacte). La flèche indique la direction de propagation.

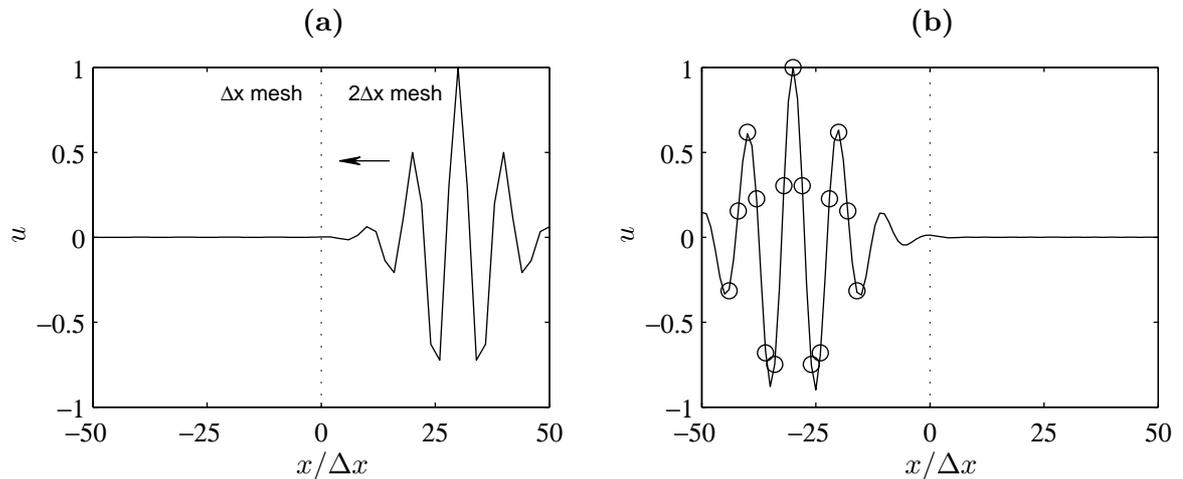


Figure E.9: (a) Perturbation initiale, et (b) solution calculée à $t = 60$ pour une perturbation se propageant vers les x négatifs, pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.2$ (\circ solution exacte). La flèche indique la direction de propagation.

Runge-Kutta à six étapes de Bogey & Bailly [14] est utilisé pour l'intégration temporelle avec un nombre de CFL $= c\Delta t/\Delta x$ égal à 0.8. Deux valeurs de l'intensité du filtrage σ ont été testées : $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$. Dans les régions où la grille est uniforme, des schémas centrés optimisés sur onze points sont utilisés pour la différentiation spatiale et le filtrage sélectif [14]. Ces algorithmes peuvent calculer avec précision des perturbations avec au moins quatre points par longueur d'onde. Les différences finies et les filtres de raccordement sur 11 points sont finalement implémentés pour discrétiser la zone de transition entre les deux maillages uniformes.

Les perturbations initiales et les solutions calculées à $t = 60$ pour $\sigma = 0.2$ sont tracées sur les figures E.8 et E.9, pour les ondes se propageant respectivement vers les x positifs et les x négatifs. On n'observe pas d'effet de dissipation ou de dispersion lorsque la perturbation

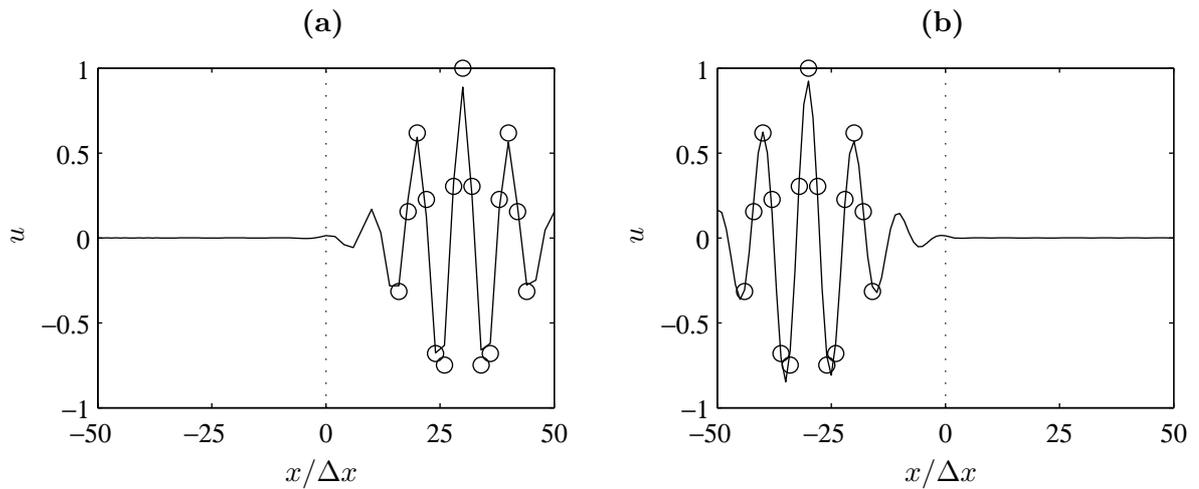


Figure E.10: Solutions calculées à $t = 60$ pour le cas test de l'équation d'advection avec $\sigma = 0.8$, pour (a) une onde se propageant vers les x positifs, et (b) une onde se propageant vers les x négatifs (\circ solution exacte).

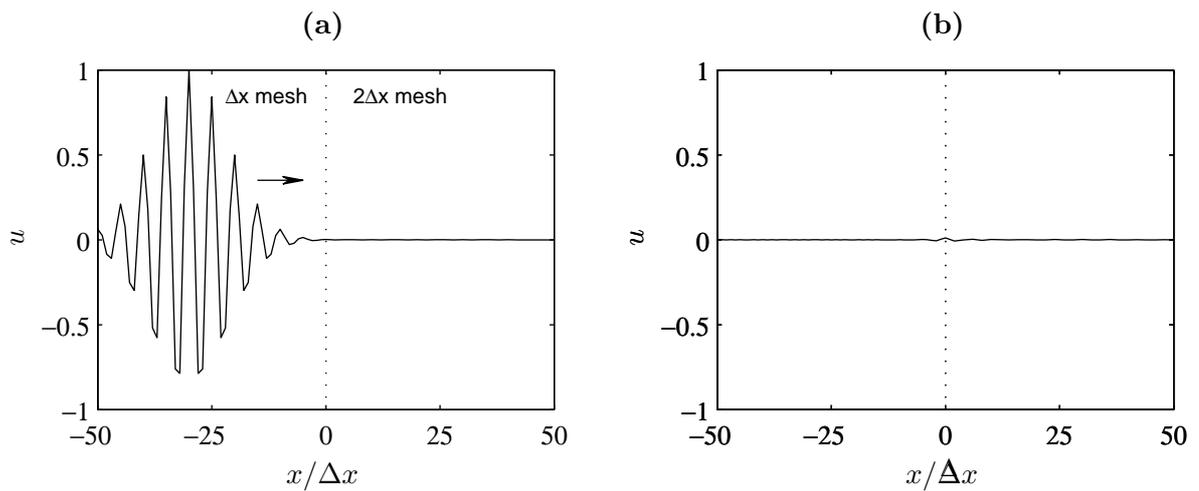


Figure E.11: (a) Perturbation initiale, et (b) solution calculée à $t = 60$ pour une onde qui se propage vers les x positifs et qui n'est pas résolue par la grille de maille $2\Delta x$, avec $\sigma = 0.2$. La flèche indique la direction de propagation.

traverse la zone de transition entre les deux maillages uniformes. En effet, dans les deux sens de propagation, la solution est en très bon accord la solution exacte. Les solutions obtenues pour $\sigma = 0.8$ sont par ailleurs représentées sur la figure E.10.a pour l'onde se propageant vers les x positifs, et sur la figure E.10.b pour celle se dirigeant vers les x négatifs. Dans les deux cas, la perturbation calculée est légèrement dissipée mais reste malgré tout très proche de la solution exacte.

Le problème est maintenant résolu avec les mêmes méthodes numériques et le même maillage décrits ci-dessus, mais avec les paramètres suivants pour la perturbation initiale : $\epsilon = 1$, $a = 10$, $b = 12$, $x_0 = -30$. L'intensité du filtrage est fixé à $\sigma = 0.2$. La perturbation

initiale, qui est fournie par la figure E.11.a, est une onde se propageant vers x positifs dont la longueur d'onde dominante est discrétisée par cinq points sur la grille de maille Δx . Elle est donc correctement résolue sur le maillage de maille Δx , mais pas sur la grille de pas $2\Delta x$ où la perturbation ne contient que 2.5 points par longueur d'onde. Cette onde doit alors être supprimée par les filtres sélectifs de raccordement. La solution calculée à $t = 60$ est représentée sur la figure E.11.b. L'onde qui devrait être théoriquement visible à $x/\Delta x \sim 30$ a été complètement atténuée. On notera également que la suppression de cette perturbation s'est faite sans générer d'oscillations parasites au niveau de la transition entre les deux maillages uniformes.

E.3.2 Comparaison avec la méthode d'étirement du maillage

Un cas test est maintenant résolu en utilisant deux configurations différentes de maillage. Dans un premier calcul, deux maillages uniformes sont raccordés avec les schémas proposés ci-dessus. Le deuxième calcul utilise une grille dont les mailles sont progressivement étirées. L'équation d'advection (E.18) est résolue avec la perturbation initiale (E.19). La perturbation, placée initialement à $x_0 = -100\Delta x$, se propage vers les x positifs, *i.e.* $\epsilon = 1$.

Dans un premier calcul, deux maillages uniformes de maille Δx et $2\Delta x$ sont raccordés en $x = 0$, comme le montre la figure E.7.a. Dans cette configuration, les schémas de raccordement sur 11 points sont utilisés pour discrétiser la zone de transition au voisinage de $x = 0$, et les schémas centrés standards d'ordre dix sont implémentés dans le reste du domaine de calcul.

Deux autres calculs sont effectués en utilisant un étirement du maillage de manière à avoir une taille de maille égale à $2\Delta x$ en $x = 0$ (*cf.* figure E.7.b). Deux taux d'étirement sont utilisés : $r = 1.014$ et $r = 1.071$. La zone étirée de la grille est alors constituée de 50 et 100 points, respectivement. Les différences finies et le filtre sélectif standards d'ordre dix sont ici utilisés sur l'ensemble du domaine de calcul. Pour toutes les configurations, l'algorithme optimisé de Runge-Kutta développé par Bogey & Bailly [14] est utilisé pour l'intégration temporelle avec un nombre de CFL = $c\Delta t/\Delta x$ de 0.8, et le coefficient de filtrage est pris égal à $\sigma = 0.2$.

Le cas test est résolu avec $b = 12$, et a prend successivement les valeurs 10, 12 et 16, afin que la longueur d'onde dominante de la perturbation initiale (E.19) corresponde à un signal avec 5, 6 et 8 points par longueur d'onde sur le maillage de maille $2\Delta x$. La solution est calculée jusqu'à $t = 200$, et l'erreur est donnée par la norme L_2 :

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{x>0} (u - u_e)^2}{\sum_{x>0} u_e^2}} \quad (\text{E.20})$$

où u et u_e sont respectivement la solution calculée et la solution exacte. À noter que la norme L_2 n'est évaluée qu'aux points qui sont communs à toutes les configurations de maillage, c'est à dire ceux avec une abscisse positive.

L'erreur à $t = 200$ est donnée dans le tableau E.3 pour les différents cas test. On observe que l'erreur croît quand le nombre de points par longueur d'onde décroît. Par ailleurs, les calculs avec les schémas de raccordement sont les plus précis pour les trois perturbations initiales. Pour la perturbation avec $\lambda = 16\Delta x$, l'erreur est par exemple deux fois plus petite que l'erreur commise avec les deux configurations avec étirement du maillage. Pour $\lambda = 12\Delta x$

Tableau E.3: Norme L_2 de l'erreur numérique à $t = 200$ pour différentes longueurs d'onde dominante de la perturbation initiale par rapport à une maille Δx , et pour différentes configurations de maillage.

	schémas de raccordement	étirement de 1.4%	étirement de 7.1%
$\lambda = 10\Delta x$	5.7×10^{-3}	6.8×10^{-3}	6.3×10^{-3}
$\lambda = 12\Delta x$	1.3×10^{-3}	2.0×10^{-3}	1.9×10^{-3}
$\lambda = 16\Delta x$	1.3×10^{-4}	2.8×10^{-4}	2.6×10^{-4}

et $\lambda = 10\Delta x$, le gain en précision lié à l'utilisation des schémas de raccordement est inférieur : environ 30% pour $\lambda = 12\Delta x$ et 10% pour $\lambda = 10\Delta x$. Pour les trois perturbations initiales, les erreurs numériques des deux configurations avec étirement sont similaires pour $r = 1.014$ et $r = 1.071$. Un taux d'étirement plus élevé introduit en effet des erreurs numériques plus importantes mais sur un nombre de points inférieur. Ces tendances contradictoires semblent pouvoir expliquer pourquoi l'erreur reste sensiblement constante quand le taux d'étirement est modifié.

E.4 Conclusion

Des différences finies et des filtres sélectifs d'ordre élevé ont été proposés pour raccorder deux maillages uniformes de maille Δx et $2\Delta x$. L'analyse des propriétés de dispersion et de dissipation a montré que ces schémas sont capables de calculer avec précision des perturbations avec au moins cinq points par longueur d'onde. De tels algorithmes peuvent être utilisés par exemple pour calculer le champ acoustique lointain généré par un écoulement turbulent.

Bibliographie

- [1] ADAMS N.A. & STOLZ S., 2002, A subgrid-scale deconvolution approach for shock capturing, *J. Comput. Phys.*, **178**, pp. 391-426.
- [2] AL-QADI I.M.A. & SCOTT J.N., 2003, High-order three-dimensional numerical simulation of a supersonic rectangular jet, *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 12-14, Hilton Head, South Carolina, USA, AIAA Paper 2003-3238.
- [3] ALKISLAR M.B., KROTHAPALLI A. & LOURENCO L.M., 2003, Structure of a screeching rectangular jet : a stereoscopic particle image velocimetry study, *J. Fluid Mech.*, **489**, pp. 121-154.
- [4] ARFKEN G., 1985, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed., Academic Press.
- [5] BAILLY C. & COMTE-BELLOT G., 2003, *Turbulence*, CNRS Editions, Paris.
- [6] BARDINA J., FERZIGER J. & REYNOLD W., 1980, Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation, *13th AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference*, July 14-16, Snowmass, Colorado, USA, AIAA Paper 1980-1357.
- [7] BARRÉ S., 2006, *Étude numérique et expérimentale du bruit aérodynamique avec application aux jets ronds subsoniques*, thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, No. 2006-XX.
- [8] BODONY D.J & LELE S.K., 2005, Generation of Low Frequency Sound in Turbulent Jets, *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 23-25, Monterey, California, USA, AIAA Paper 2005-3041.
- [9] BODONY D.J. & LELE, S.K., 2005, On Using Large-Eddy Simulation for the Prediction of Noise from Cold and Heated Turbulent Jets, *Phys. Fluids*, **17**, 085103.
- [10] BOGEY C., 2000, *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*, thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, No. 2000-11.
- [11] BOGEY C. & BAILLY C., 2002, Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases, *Acta Acustica*, **88**, pp. 463-471.
- [12] BOGEY C., BAILLY C. & JUVÉ D., 2003, Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible LES, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **16**, pp. 273-297, 2003.
- [13] BOGEY C. & BAILLY C., 2003, LES of a high Reynolds high subsonic jet : effects of the inflow conditions on flow and noise, *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 12-13, Hilton Head, South Carolina, USA, AIAA Paper 2003-3170.
- [14] BOGEY C. & BAILLY C., 2003, A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow noise and noise computations, *J. Comput. Phys.*, **194**, pp. 194-214.
- [15] BOGEY C., BAILLY C. & JUVÉ D., 2003, Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible LES, *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **16**(4), pp. 273-297.
- [16] BOGEY C. & BAILLY C., 2005, Decrease of the effective Reynolds number with eddy-viscosity subgrid-scale modeling, *AIAA J.*, **43**(2), pp. 437-439.
- [17] BOGEY C. & BAILLY C., 2005, Effects of inflow conditions and forcing on a Mach 0.9 jet and its radiated noise, *AIAA J.*, **43**(5), pp. 1000-1007.
- [18] BOGEY C. & BAILLY C., 2005, Large Eddy Simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model, *Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-4)*, June 27-29, Williamsburg, Virginia, USA, pp. 817-822.

- [19] BOGEY C. & BAILLY C., 2006, Investigation of downstream and sideline subsonic jet noise using large eddy simulation, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **20**(1), pp. 23-40, 2006.
- [20] BOGEY C. & BAILLY C., 2006, Large eddy simulations of transitional round jets : influence of the Reynolds number on flow development and energy dissipation, *Phys. Fluids*, in press, 2006.
- [21] BORIS J.P., GRINSTEIN F.F., ORAN E.S. & KOLBE R.L., 1992, New insights into large eddy simulation, *Fluid Dynamics Research*, **10**, pp. 199-228.
- [22] BOYD J.P., 2001, *Chebyshev and fourier spectral methods, 2nd edition*, Dover Publications, New-York.
- [23] BRADBURY L.J.S., 1965, The structure of a self-preserving turbulent plane jet, *J. Fluid Mech.*, **23**(1), pp. 31-64.
- [24] CALVO M., FRANCO J.M. & RÁNDEZ L., 2004, A new minimum storage Runge-Kutta scheme for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **201**, pp. 1-12.
- [25] CANDEL S., 1990, *Mécanique des fluides*, Dunod.
- [26] CARPENTER M.H. & CASPER J.H., 1999, Accuracy of shock capturing in two spatial dimensions, *AIAA J.*, **37**(9), pp. 1072-1079.
- [27] CHOW F.K. & MOIN P., 2003, A further study of numerical errors in large-eddy simulations, *J. Comput. Phys.*, **184**, pp. 366-380.
- [28] DAVIES M.G. & OLDFIELD D.E.S., 1962, Tones from a choked axisymmetric jet. I. Cell structure, eddy velocity and source locations, *Acustica*, **12**(4), pp. 257-267.
- [29] DAVIES M.G. & OLDFIELD D.E.S., 1962, Tones from a choked axisymmetric jet. II. The self excited loop and mode oscillation, *acustica*, **12**(4), pp. 267-277.
- [30] DOMARADZKI J.A. & ADAMS N.A., 2002, Direct modelling of subgrid scales of turbulence in large eddy simulations, *J. Turbulence*, **3**, 024.
- [31] DOSANJH D.S. & WEEKS T.M., 1965, Interaction of a starting vortex as well as a vortex sheet with a traveling shock wave, *AIAA J.*, **3**(2), pp. 216-223.
- [32] ERLEBACHER G., HUSSAINI M.Y., SPEZIALE C.G. & ZANG T.A., 1992, Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, **238**, pp. 155-185.
- [33] ERLEBACHER G., HUSSAINI M.Y. & SHU C., 1997, Interaction of a shock with a longitudinal vortex, *J. Fluid Mech.*, **337**, pp. 129-153.
- [34] GAITONDE D.V. & VISBAL M.R., 2000, Padé-type higher-order boundary filters for the Navier-Stokes equations, *AIAA J.*, **38**(11), pp. 2103-2112.
- [35] GAITONDE D.V. & VISBAL M.R., 2003, Advances in the application of high-order techniques in simulation of multi-disciplinary phenomena, *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, **17**(2), pp. 95-106.
- [36] GARNIER E., SAGAULT P. & COMTE P., 1997, ENO and PPM schemes for Direct Numerical Simulation of compressible flows, *First AFOSR International Conference on DNS and LES*, August 4-8, Ruston, USA.
- [37] GARNIER E., MOSSI M., SAGAULT P., COMTE P. & DEVILLE M., On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation, 1999, *J. Comput. Phys.*, **153**, pp. 273-311.
- [38] GERMANO M., PIOMELLI U., MOIN P. & CABOT W.H., 1991, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, **3**(7), pp. 1760-1765.
- [39] GEURTS B., 2003, *Elements of direct and large-eddy simulation*, Edwards.
- [40] GHOSAL S., 1996, An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence, *J. Comput. Phys.*, **125**, pp. 187-206.
- [41] GHOSAL S., 1999, Mathematical and physical constraints on large-eddy simulation of turbulence, *AIAA J.*, **37**(4), pp. 425-433.
- [42] GLOERFELT X., 2001, *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*, thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, No. 2001-26.

- [43] GLOERFELT X., BOGEY C. & BAILLY C., 2003, Numerical evidence of mode switching in the flow-induced oscillations by a cavity, *Int. J. of Aeroacoustics*, **2**(2), pp. 99-124.
- [44] GEURTS B.J., 1997, Inverse modeling for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **9**(12), pp. 3585-3587.
- [45] GUTMARK E. & WYGNANSKI I., 1976, The planar turbulent jet, *J. Fluid Mech.*, **73**(3), pp. 465-495.
- [46] GUTMARK E., SHADOW K.C., WILSON K.J. & BICKER C.J., 1998, Near-field pressure radiation and flow characteristics in low supersonic circular and elliptic jets, *Phys. Fluids*, **31**(9), pp. 2524-2532.
- [47] GUTMARK E., SCHADOW K.C. & BICKER C.J., 1990, Near acoustic field and shock structure of rectangular supersonic jets, *AIAA J.*, **28**(7), pp. 1163-1170.
- [48] HARPER-BOURNE M. & FISHER M.J., 1973, The noise from shock waves in supersonic jets, AGARD Conference Proceedings No. 131 on Noise Mechanisms, AGARD-CP-131, pp. 11-1 to 11-13.
- [49] HIRSCH C., 1988, *Numerical computation of internal and external flows*, John Wiley & Sons, New-York.
- [50] HU T. & MACLAUGHLIN D.K., 1990, Flow and acoustic properties of low Reynolds number underexpanded supersonic jets, *J. Sound Vib.*, **141**(3), pp. 485-505.
- [51] HU F.Q., HUSSAINI M.Y. & MANTHEY J.L., 1996 Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **124**, pp. 177-191.
- [52] HUSAIN H.S. & HUSSAIN F., 1993, Elliptic jets. Part 3. Dynamics of preferred mode coherent structure, *J. Fluid Mech.*, **248**, pp. 315-361.
- [53] IMAMOGLU B. & BALAKUMAR P., 2003, Three dimensional computation of shock induced noise in imperfectly expanded supersonic jets, *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 12-14, Hilton Head, South Carolina, USA, AIAA Paper 2003-3249, 2003.
- [54] KAJI S. & NISHIJIMA N., 1996, Pressure field around a rectangular jet in screech, *AIAA J.*, **34**(10), pp. 1990-1996.
- [55] KIM K.I. & POWERS E.J., 1988, A digital method of modeling quadratically nonlinear systems with a general random input, *IEEE Trns. Acoust. Speech Signal Process.*, **36**(11), pp. 1758-1769.
- [56] KOLBE R., KAILASANATH K., YOUNG T., BORIS J. & LANDSBERG A., 1996, Numerical simulations of flow modification of supersonic jets, *AIAA J.*, **34**(5), pp. 902-908.
- [57] KRAVCHENKO A.G. & MOIN P., 1997, On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows, *J. Comput. Phys.*, **131**, pp. 310-322.
- [58] KROTHAPALLI A., MCDANIEL J. & BAGANOFF D., 1990, Effect of slotting on the noise of an axisymmetric supersonic jet, *AIAA J.*, **28**(12), pp. 2136-2138.
- [59] KROTHAPALLI A., HSIA Y., BAGANOFF D. & KARAMCHETI K., 1986, The role of screech tones in mixing of an underexpanded rectangular jet, *J. Sound Vib.*, **106**(1), pp. 119-143.
- [60] LELE S.K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, **103**, pp. 16-42, 1992.
- [61] LESIEUR M., 1987, *Turbulence in fluids*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [62] LESIEUR M. & MÉTAIS O., 1996, New trends in large-eddy simulations of turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **28**, pp. 45-82.
- [63] LI X.D. & GAO J.H., 2004, Numerical simulation of the generation mechanism of axisymmetric supersonic jet screech tones, *Phys. Fluids*, **17**(8), pp. 1-8.
- [64] LIGHTHILL J., 1978, *Waves in fluids*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [65] LIN D. & POWELL A., 1997, Symmetrical oscillation modes in choked-jet edge tones and screech from rectangular nozzles, *J. Acoust. Soc. Am.*, **102**(2), pp. 1235-1238.

- [66] LIU S., MENEVEAU S. & KATZ J., 1994, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet, *J. Fluid Mech.*, **275**, pp. 83-119.
- [67] LOCKARD D.P., BRENTNER K.S. & ATKINS H.L., 1995, High-accuracy algorithms for computational aeroacoustics, *AIAA J.*, **33**(2), pp. 246-251.
- [68] LOH C.Y., HIMANSU A., WANG X.Y. & JORGENSEN P.C.E., 2001, Computation of an underexpanded 3-D rectangular jet by the CE/SE method, *39th Aerospace Sciences Meeting*, Jan. 8-11, Reno, NV, USA, AIAA Paper 2001-986.
- [69] LOH C.Y., HIMANSU A. & HULTGREN L.S., 2003, A 3-D CE/SE Navier-Stokes solver with unstructured hexahedral grid for computation of nearfield jet screech noise, *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 12-14, Hilton Head, South Carolina, USA, AIAA Paper 2003-3207.
- [70] LUND T.S. & KALTENBACH H.J., 1995, Experiments with explicit filtering for LES using finite-difference method, *Annual Research Briefs 1995*, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., pp. 91-105.
- [71] MACLAUGHLIN D.K., MORRISON G.L. & TROUTT T., 1975, Experiments on the instability waves in a supersonic jet and their acoustic radiation, *J. Fluid Mech.*, **69**, pp. 73-95.
- [72] MARSDEN O., BOGEY C. & BAILLY C., 2005, High-order curvilinear simulations of flows around non-cartesian bodies, *J. Comput. Acous.*, **12**(4), to appear. See also AIAA Paper 2004-2813.
- [73] MARSDEN O., 2006, *Calcul direct du rayonnement acoustique de profils par une approche curviligne d'ordre élevé*, thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, No. 2006-XX.
- [74] MASSEY K., AHUJA K.K., JONES R. III & TAM C.K.W., 1994, Screech tones of supersonic heated free jets, *32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Jan. 10-13, Reno, Nevada, USA, AIAA Paper 1994-0141.
- [75] MATHEW J., LECHNER R., FOYSI H., SESTERHENN J. & FRIEDRICH R., An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows, *Phys. Fluids*, **15**(8), pp. 2279-2289.
- [76] MEINKE M., SCHRÖDER W., KRAUSE E. & RISTER TH., 2002, A comparison of second- and sixth-order methods for large-eddy simulations, *Comput. Fluids*, **31**, pp. 695-718.
- [77] MERLE, 1956, Sur les fréquences des sondes émises par un jet d'air à grande vitesse, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **243**, pp. 490-493.
- [78] MOIN P., SQUIRES K., CABOT W. & LEE S., 1991, A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Phys. Fluids A*, **3**(11), pp. 2746-2757.
- [79] MONIN A. & YOAGLOM A., 1979, *Statistical fluid mechanics, Vol. 2*, MIT Press, Cambridge.
- [80] MORETTI G., 1987, A technique for integrating two-dimensional Euler equations, *Comp. Fluids*, **15**, pp. 59-75.
- [81] MORETTI G., 2002, Thirty-six years of shock fitting, *Comp. Fluids*, **31**, pp. 719-723.
- [82] MORRIS P.J., BHAT T.R.S. & CHEN G., 1989, A linear shock cell model for jets of arbitrary exit geometry, *J. Sound Vib.*, **132**(2), pp. 199-211.
- [83] MORRISON G.L. & MACLAUGHLIN D.K., 1979, Noise generation by instabilities in low Reynolds number supersonic jets, *J. Sound Vib.*, **65**(2), pp. 177-191.
- [84] NAGEL R.T., DENHAM J.W. & PAPATHANASIOU A.G., 1983, Supersonic jet screech tone cancellation, *AIAA J.*, **21**(11), pp. 1541-1545.
- [85] NORUM T.D., 1983, Screech suppression in supersonic jets, *AIAA J.*, **21**(2), pp. 235-240.
- [86] PACK D.C., 1950, A note on Prandtl's formula for the wavelength of a supersonic gas jet, *Q. J. Mech. Appl. Maths*, **3**, pp. 173-181.
- [87] PANDA J., RAMAN G. & ZAMAN K.B.M.Q., 1997, Underexpanded screeching jets from circular, rectangular and elliptic nozzles, *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, May 12-14, Atlanta, GA, USA, AIAA Paper 1997-1623.
- [88] PANDA J., 1998, Shock oscillation in underexpanded screeching jets, *J. Fluid Mech.*, **363**, pp. 173-198.

- [89] PANDA J., 1999, An experimental investigation of screech noise generation, *J. Fluid Mech.*, **378**, pp. 71-96.
- [90] POINSOT T.J. & LELE S.K., 1992, Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows, *J. Comput. Phys.*, **101**, pp. 104-129,
- [91] PONTON M.K. & SEINER J.M., 1992, The effects of nozzle exit lip thickness on plume resonance, *J. Sound Vib.*, **154**(3), pp. 531-549.
- [92] PONTON M.K. & SEINER J.M., 1995, Acoustic study of B helical mode for choked axisymmetric nozzle, *AIAA J.*, **33**(3), pp. 413-420.
- [93] POWELL A., 1953, On the mechanism of choked jet noise, *Proc. Royal Society London, Series B*, **66**, pp. 1039-1056.
- [94] POWELL A., UMEDA Y. & RYUJI I., 1992, Observations of the oscillation modes of choked circular jets, *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**(5), pp. 2823-2836.
- [95] RAMAN G. & RICE E.J., 1994, Instability modes excited by natural screech tones in a supersonic rectangular jet, *Phys. Fluids*, **6**(12), pp. 3999-4008.
- [96] RAMAN G., 1997, Screech tones from rectangular jets with spanwise oblique shock-cell structures, *J. Fluid Mech.*, **330**, pp. 141-168.
- [97] RAMAN G., 1997, Cessation of screech in underexpanded jets, *J. Fluid Mech.*, **336**, pp. 69-90.
- [98] RAMAN G., 1998, Advances in understanding supersonic jet screech : review and perspective, *Prog. Aerospace Sci. Vol.*, **34**, pp. 45-106.
- [99] RAMBOER J., BROECKHOVEN T., SMIRNOV S. & LACOR C., 2006, Optimization of time integration schemes coupled to spatial discretization for use in CAA application, *J. Comput. Phys.*, **213**, pp. 777-802.
- [100] REYNOLDS W.C. & HUSSAIN A.K.M.F., The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments, *J. Fluid Mech.*, **54**, pp. 263-288.
- [101] RIBNER H.S., 1985, Cylindrical sound wave generated by shock-vortex interaction, *AIAA J.*, **23**(11), pp. 1708-1715.
- [102] RICE E.J. & TAGHAVI R., 1992, Screech noise source structure of a supersonic rectangular jet, *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Jan. 6-9, Reno, Nevada, USA, AIAA Paper 1992-0503.
- [103] RIZZETTA D.P., VISBAL M.R. & BLAIDELL G.A., 2003, A time-implicit compact differencing and filtering scheme for large-eddy simulation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **42**(6), pp. 665-693.
- [104] ROACHE P.J., 1976, *Computational fluid dynamics*, Hermosa Publishers.
- [105] ROSFJORD J. & TOMS H.L., 1975, Recent observations including temperature dependence of axisymmetric jet screech, *AIAA J.*, **13**(10), pp. 1384-1386.
- [106] SAGAUT P., 1998, *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, Springer.
- [107] SALVETTI M.V. & BANERJEE S., 1995, A priori tests of a new subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations, *Phys. Fluids*, **7**(11), pp. 2831-2847.
- [108] SALVETTI M.V. & BEUX F., 1998, The effect of the numerical scheme on the subgrid scale term in large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **10**(11), pp. 3020-3022.
- [109] SAMIMY M., KIM J.H., CLANCY P.S. & MARTENS S., 1998, Passive Control of Supersonic Rectangular Jets via Nozzle Trailing-Edge Modifications, *AIAA J.*, **36**(7), pp. 1230-1239.
- [110] SCHAUPP C., SESTERHENN J. & FRIEDRICH R., 2005, On direct numerical simulation of shear layer/compression wave interaction for aeroacoustic investigations, *EuroMech Colloquium 467 : Turbulent Flow and Noise Generation*, July 18-20, Marseille, France.
- [111] SEINER J.M. & YU J.C., 1984, Acoustic near-field properties associated with broadband shock noise, *AIAA J.*, **22**, pp. 1207-1215.

- [112] SHEN H. & TAM C.K.W., 1998, Numerical simulation of the generation of axisymmetric mode jet screech tones, *AIAA J.*, **36**(10), pp. 1801-1807.
- [113] SHEN H. & TAM C.K.W., 2000, Effects of jet temperature and nozzle-lip thickness on screech tones, *AIAA J.*, **38**(5), pp. 762-767.
- [114] SHEN H. & TAM C.K.W., 2002, Three-dimensional numerical simulation of the jet screech phenomenon, *AIAA J.*, **40**(1), pp. 33-41.
- [115] SHERMAN P.M., GLASS D.R. & DULEEP K.G., 1976, Jet flow field during screech, *Appl. Sci. Res.*, **32**, pp. 283-303.
- [116] SHIH C., KROTHAPALLI A. & GOGINENI S., 1992, Experimental observations of instability modes in a rectangular jet, *AIAA J.*, **30**(10), pp. 2388-2394.
- [117] SHIH C., LOURENCO L.M. & KROTHAPALLI, 1995, Investigation of flow at leading and trailing edges of pitching-up airfoil, *AIAA J.*, **33**(8), pp. 1360-1376.
- [118] SHU C., 1997, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, *NASA Langley Research Center*, ICASE Report 97-65.
- [119] SHU C., 1998, Total-Variation-Diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **9**(6), pp. 1073-1084.
- [120] SMAGORINSKY J.S., 1963, General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment, *Mon. Weath. Rev.*, **91**, pp. 99-163.
- [121] STANESCU D. & HABASHI W.G., 1998, 2N-storage low dissipation and dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **143**, pp. 674-681.
- [122] DE STEFANO G. & VASILYEV O.V., 2002, Sharp cutoff versus smooth filtering in large eddy simulation, *Phys. Fluids*, **14**(1), pp. 362-369.
- [123] STOLZ S. & ADAMS N.A., 1999, An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **11**(7), pp. 1699-1701.
- [124] SUDA M., MANNING T.A. & KAJI S., 1993, Transition of oscillations modes of rectangular supersonic jet in screech, *15th Aeroacoustics Conference*, Oct. 25-27, Long Beach, CA, USA, AIAA Paper 1993-4323.
- [125] SUZUKI T. & LELE S.K., 2003, Shock leakage through an unsteady vortex-laden mixing layer : application to jet screech *J. Fluid Mech.*, **490**, pp. 139-167.
- [126] TAM C.K.W., 1975, Supersonic jet noise generated by large scale disturbances, *J. Sound Vib.*, **38**(1), pp. 51-79.
- [127] TAM C.K.W. & TANNA H.K., 1982, Shock associated noise of supersonic jets from convergent-divergent nozzles, *J. Sound Vib.*, **81**(3), pp. 337-358.
- [128] TAM C.K.W., 1984, Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 1. Two-dimensional mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **138**, pp. 249-271.
- [129] TAM C.K.W., JACKSON A.J. & SEINER J.M., 1985 A multiple-scales model of the shock-cell structure of imperfectly expanded supersonic jets, *J. Fluid Mech.*, **153**, pp. 123-149.
- [130] TAM C.K.W., SEINER J.M. & YU J.C., 1986, Proposed relationship between broadband shock associated noise and screech tones, *J. Sound Vib.*, **110**(2), pp. 309-321.
- [131] TAM C.K.W., 1987, Stochastic model theory of broadband shock associated noise from supersonic jets, *J. Sound Vib.*, **116**(2), pp. 265-302.
- [132] TAM C.K.W., 1988, The shock-cell structures and screech tone frequencies of rectangular and non-axisymmetric supersonic jets, *J. Sound Vib.*, **121**(1), pp. 135-147.
- [133] TAM C.K.W. & HU F.Q., 1989, On the three families of instability waves of high-speed jets, *J. Fluid Mech.*, **201**, pp. 447-483.
- [134] TAM C.K.W., 1991, Jet noise generated by large-scale coherent motion, *Aeroacoustics of flight vehicles : theory and practice*, vol. 1 : noise source, HH Hubbard, pp. 311-390.

- [135] TAM C.K.W. & WEBB J.C., 1993, Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **107**, pp. 262-281.
- [136] TAM C.K.W., WEBB J.C. & DONG Z., 1993, A study of the short wave components in computational acoustics, *J. Comput. Ac.*, **1**(1), pp. 1-30.
- [137] TAM C.K.W. & DONG Z., 1994, Wall boundary conditions or high-order finite-difference schemes in computational aeroacoustics, *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **6**, pp. 303-322.
- [138] TAM C.K.W., AHUJA K.K. & JONES III R.R., 1994, Screech tones from free and duct supersonic jets, *AIAA J.*, **32**(5), pp. 917-922.
- [139] TAM C.K.W., 1995, Computational aeroacoustics : issues and methods, *AIAA J.*, **33**(10), pp. 1788-1797.
- [140] TAM C.K.W., 1995, Supersonic jet noise, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **27**, pp. 17-43.
- [141] TAM C.K.W. & DONG Z., 1996 Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, *J. Comput. Ac.*, **4**(2), pp. 175-201.
- [142] TAM C.K.W., 2000, Numerical methods in computational aeroacoustics, AIAA Short Course, Computational Aeroacoustics : Methods and Applications, Lahaina, Hawaii, 10-11 June.
- [143] TAM C.K.W. & KURBATSKII K.A., 2003, Multi-size-mesh multi-time-step dispersion-relation-preserving scheme for multiple-scales aeroacoustics problems, *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, **17**(2), pp. 119-132.
- [144] TAM C.K.W., 2004, Computational aeroacoustics : an overview of computational challenges and applications, *AIAA J.*, **18**(6), pp. 547-567.
- [145] TANNA H.K., 1977, An experimental study of jet noise. Part I : turbulent mixing noise, *J. Sound Vib.*, **50**(3), pp. 405-428.
- [146] TANNA H.K., 1977, An experimental study of jet noise. Part II : shock associated noise, *J. Sound Vib.*, **50**(3), pp. 429-444.
- [147] THOMAS F.O., PRAKASH K.M.K., 1991, An experimental investigation of the natural transition of an untuned jet, *Phys. Fluids A*, **3**, pp. 90-105, 1991.
- [148] THOMPSON K.W., 1987, Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, *J. Comput. Phys.*, **68**, pp. 1-24.
- [149] THOMPSON K.W., 1990, Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II, *J. Comput. Phys.*, **89**, pp. 439-461.
- [150] UMEDA Y. & ISHII R., 1994, Oscillation modes of underexpanded jets issuing from square and equilateral triangular nozzles, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**(4), pp. 1853-1857.
- [151] VISBAL M.R. & GAITONDE D.V., 1999, Higher-order-accurate methods for complex unsteady subsonic flows, *AIAA J.*, **37**(10), pp. 1231-1239.
- [152] VISBAL M.R. & GAITONDE D.V., 2001, Very high-order spatially implicit schemes for computational acoustics on curvilinear meshes, *J. Comput. Acous.*, **9**(4), pp. 1259-1286.
- [153] VISBAL M.R., MORGAN P.E. & RIZZETTA D.P., 2003, An implicit LES approach based on high-order compact differencing and filtering schemes (invited), *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, June 23-26, Orlando, Florida, USA, AIAA Paper 2003-4098.
- [154] VREMAN B., GEURTS B. & KUERTEN J.G.M., 1994, On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model, *Phys. Fluids*, **6**(12), pp. 4057-4059.
- [155] VREMAN B., GEURTS B. & KUERTEN J.G.M., 1995, Subgrid-modelling in LES of compressible flow, *Applied Scientific Journal*, **54**, pp. 191-203.
- [156] VREMAN B., GEURTS B. & KUERTEN J.G.M., 1997, Large eddy simulation of the turbulent mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **339**, pp. 357-390.
- [157] WALKER H.W. & THOMAS F.O., 1997, Experiments characterizing nonlinear shear layer dynamics in a supersonic rectangular jet undergoing screech, *Phys. Fluids*, **9**(9), pp. 2562-2579.

- [158] WALKER H.W., GORDEYEV S.V. & THOMAS F.O., 1997, A wavelet transform analysis applied to unsteady aspects of supersonic jet screech resonance, *Exp. Fluids*, **22**, pp. 229-238.
- [159] WANG M., FREUND J.B. & LELE S.K., 2006, Computation of flow-generated flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38**, pp. 483-512.
- [160] WHITE F.M., 1991, *Viscous fluid flow, 2nd edition*, McGraw-Hill, New-York.
- [161] WILLIAMSON J.H., 1980, Low-storage Runge-Kutta schemes, *J. Comput. Phys.*, **35**, pp. 48-56.
- [162] YANG H.Q. & PRZEKAS A.J., 1992, A comparative study of advanced shock-capturing schemes applied to Burger's equation, *J. Comp. Phys.*, **102**, pp. 139-159.
- [163] ZAMAN K.B.M.Q., 1985, Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation, *J. Fluid Mech.*, **152**, pp. 83-111.
- [164] ZANG T.A., DAHLBURG R.B. & DAHLBURG J.P., 1984, Direct and large-eddy simulations of three-dimensional compressible Navier-Stokes turbulence, *Phys. Fluids A*, **4**(1), pp. 127-140.
- [165] ZHUANG M. & CHEN R.F., 1998, Optimized upwind dispersion-relation-preserving finite difference scheme for computational aeroacoustics, *AIAA J.*, **36**(11), pp. 2146-2148.
- [166] Proceedings of the second Computational AeroAcoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA, CP 23681-0001, 1997.
- [167] Proceedings of the third Computational AeroAcoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, NASA Langley Research Center, Cleveland, Ohio, USA, CP 2000-209790, 2000.

Résumé de la thèse

Ce travail de thèse est consacré au calcul direct du screech des jets supersoniques à partir des équations de Navier-Stokes.

Le bruit des jets supersoniques choqués est constitué de trois composantes majeures : le bruit des structures turbulentes, le bruit de choc et le bruit de screech. Le screech est un rayonnement harmonique intense observé vers l'amont de l'écoulement, résultant d'une boucle de rétroaction. L'interaction des structures turbulentes avec le réseau quasi-périodique des cellules de choc peut en effet produire une onde acoustique qui se propage vers l'amont du jet. La boucle se referme au niveau de la lèvre de la tuyère où la couche de mélange est alors excitée par l'onde acoustique.

Les investigations antérieures de la littérature ont montré la complexité des mécanismes liés au screech. La Simulation des Grandes Échelles (SGE) compressible permet maintenant d'accéder aux détails du développement turbulent d'écoulements réalistes à haut nombre de Reynolds, et au champ acoustique rayonné. La méthode utilisée pour la SGE requiert l'utilisation d'algorithmes peu dissipatifs afin de minimiser la dissipation appliquée aux échelles résolues. Les schémas numériques doivent de plus pouvoir calculer les fluctuations acoustiques très petites par rapport au champ aérodynamique.

La première étape du travail de thèse s'est concentrée sur le développement d'un solveur des équations de Navier-Stokes 3-D, adapté aux écoulements supersoniques. Afin de développer des techniques numériques pour ce type de simulations, des schémas de différenciation spatiale et de filtrage sélectif ont été mis au point pour l'implémentation de conditions aux limites de paroi, et pour le raccordement de maillages entre champ proche et champ lointain. Un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre à stockage réduit a aussi été construit pour une meilleure résolution des effets non-linéaires. La précision des schémas a été minutieusement évaluée par des cas tests représentatifs de l'aéroacoustique numérique.

Le problème de l'influence du choix des algorithmes de discrétisation sur la précision d'une SGE filtrée explicitement a également été abordé. Un outil d'analyse des erreurs numériques commises lors de la SGE d'un cube de turbulence homogène isotrope incompressible a ainsi été développé, et a permis de montrer que les schémas d'ordre élevé peu dispersifs et peu dissipatifs présentent un bon compromis entre précision et coût informatique.

Finalement, un jet 3-D plan sous-détendu à nombre de Mach équivalent $M_j = 1.55$ et au nombre de Reynolds $Re_h = 6 \times 10^4$ a été simulé. La structure du jet choqué et son développement turbulent ont été fidèlement reproduits et le rayonnement acoustique observé en amont pour ce calcul se compare favorablement aux mesures expérimentales en terme de fréquence, de niveau, et de répartition de phase de part et d'autre de la tuyère. Des visualisations de l'écoulement et du champ proche acoustique ont fait apparaître que le choc de compression de la troisième cellule tend à pénétrer la couche de mélange au niveau des zones de faible vorticité localisées entre les structures coh erentes associées   l'excitation de la boucle de rétroaction   l'origine du screech. Ces observations ont confirmé l'hypothèse de génération de bruit par le mécanisme de "fuite" des chocs (*shock-leakage*).

