

**Propagation acoustique  
en milieu turbulent:  
Calcul par transformée de Fourier rapide  
du moment d'ordre deux\***

*Computation by an FFT Algorithm  
of the Mutual Coherence Function of an Acoustic Wave  
Propagating in a Turbulent Medium*

*Ausbreitung einer Schallwelle in einem turbulenten Feld:  
Berechnung der Korrelationsfunktion  
mit einer zweidimensionalen FFT*

par Ph. Blanc-Benon, S. Chaize et D. Juvé

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique,  
U.A.C.N.R.S. 263, École Centrale de Lyon – B.P. 163,  
69131 Ecully Cedex, France

**1. Introduction**

Le moment d'ordre deux en deux points du champ de pression acoustique transmis après traversée d'un volume

de turbulence est une caractéristique importante dans diverses applications et notamment dans les techniques d'imagerie acoustique. Dans la littérature les estimations théoriques de ce moment d'ordre deux à partir de l'approximation parabolique de l'équation stochastique d'Helmholtz sont limitées à quelques types d'ondes (onde plane, onde sphérique, faisceau gaussien) pour lesquelles une intégration numérique simple est possible (Tatarski [1], Fante [2]).

Nous présentons ici une méthode de calcul du moment d'ordre deux utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide ce qui permet d'envisager le calcul pour n'importe quel type d'onde. Les résultats concernent plus particulièrement la répartition d'intensité moyenne et la cohérence spatiale de l'onde transmise dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

---

\* Texte présenté aux 7<sup>èmes</sup> Journées d'Études sur la Propagation Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 3-6 juin 1986.

## 2. L'approximation parabolique

### 2.1. Les hypothèses de l'approximation parabolique

Considérons une onde monochromatique  $p(x)$  qui se propage suivant la direction  $x$

$$p(x) = p(x, \varrho) = U(x, \varrho) \exp(i k_0 x) \quad (1)$$

( $\varrho$  désigne un vecteur du plan perpendiculaire à la direction de propagation). En écrivant que  $p(x, \varrho)$  est solution de l'équation stochastique de Helmholtz on montre que  $U(x, \varrho)$  vérifie:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \varrho) + 2i k_0 \frac{\partial}{\partial x} U(x, \varrho) + \Delta_\varrho U(x, \varrho) + k_0^2 \varepsilon(x, \varrho) U(x, \varrho) = 0 \quad (2)$$

( $\Delta_\varrho$  est le laplacien transversal  $\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ). En négligeant le terme  $\partial^2 U(x, \varrho)/\partial x^2$  devant  $2i k_0 \partial U(x, \varrho)/\partial x$  nous obtenons l'équation parabolique:

$$2i k_0 \frac{\partial}{\partial x} U(x, \varrho) + \Delta_\varrho U(x, \varrho) + k_0^2 \varepsilon(x, \varrho) U(x, \varrho) = 0 \quad \text{si } x \geq 0, \\ U(x, \varrho) = U_0(x, \varrho) \quad \text{si } x < 0. \quad (3)$$

Cette transformation n'est possible que si l'échelle de variation en  $x$  du champ  $U(x, \varrho)$  est grande devant la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  et si l'énergie rétrodiffusée par le volume de turbulence traversé est négligeable. L'éq. (3) impose une dépendance fonctionnelle du champ  $U(x, \varrho)$  par rapport aux fluctuations d'«indices» du milieu  $\varepsilon(x, \varrho)$  provoquées par la turbulence. La solution dépend donc de la modélisation adoptée pour le terme  $\varepsilon(x, \varrho) U(x, \varrho)$ . Nous avons retenu la méthode proposée par Tatarski [1] qui utilise une description en fonction des moments successifs du champ  $U(x, \varrho)$  et suppose que la variable aléatoire  $\varepsilon(x, \varrho)$  est un bruit blanc gaussien delta corrélé suivant la direction de propagation:

$$\langle \varepsilon(x_1, \varrho_1) \varepsilon(x_2, \varrho_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) A(\varrho_1 - \varrho_2). \quad (4)$$

Dans le cas où la turbulence est homogène et isotrope la fonction  $A(\varrho)$  est reliée au spectre tridimensionnel des fluctuations d'«indices»  $\Phi_\varepsilon(K)$  par:

$$A(\varrho) \equiv A(\varrho) = 16 \pi^2 \int_0^\infty K J_0(K \varrho) \Phi_\varepsilon(K) dK \quad (5)$$

où  $J_0$  désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro.

### 2.2. Evolution du moment d'ordre deux en deux points

Le moment d'ordre deux en points d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation  $x$  est défini par la relation:

$$\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d) = \langle U(x, \varrho_s + \frac{1}{2} \varrho_d) U^*(x, \varrho_s - \frac{1}{2} \varrho_d) \rangle \quad (6)$$

où  $\varrho_s = (\varrho_1 + \varrho_2)/2$  et  $\varrho_d = \varrho_1 - \varrho_2$  ( $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  coordonnées des points d'observation dans le plan  $x$ ). L'évolution de la fonction  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  est régie par l'équation:

$$\left\{ 2i k_0 \frac{\partial}{\partial x} + 2 \nabla_{\varrho_d} \cdot \nabla_{\varrho_s} + i \frac{k_0^3}{2} (A(0) - A(\varrho_d)) \right\} \\ \times \Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d) = 0 \quad \text{si } x \geq 0 \quad (7)$$

avec la condition initiale  $\Gamma(x=0, \varrho_s, \varrho_d) = \Gamma_0(\varrho_s, \varrho_d)$ .

Dans le cas général la solution de l'éq. (7) est obtenue par Tatarski [1] en utilisant une transformation de Fourier par rapport à la variable  $\varrho_s$ . Soit  $\tilde{\Gamma}$  la transformée de Fourier de  $\Gamma$

$$\tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d) \exp(-i \mathbf{K}_d \cdot \varrho_s) d\varrho_s. \quad (8)$$

L'équation qui gouverne l'évolution de  $\tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$  s'écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) + \frac{1}{k_0} \mathbf{K}_d \cdot \nabla_{\varrho_d} \tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) + \frac{k_0^2}{4} (A(0) - A(\varrho_d)) \tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = 0. \quad (9)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du 1er ordre que l'on résout par la méthode des caractéristiques. L'équation des caractéristiques est

$$\frac{d}{du} \varrho(u) = \frac{\mathbf{K}_d}{k_0} \quad (10)$$

d'où

$$\varrho(u) = \varrho(x) - \frac{x-u}{k_0} \mathbf{K}_d. \quad (11)$$

Le long de cette caractéristique l'éq. (9) devient:

$$\frac{d\tilde{\Gamma}}{du} = -\frac{k_0^2}{4} (A(0) - A(\varrho_d)) \tilde{\Gamma}(u, \mathbf{K}_d, \varrho(u)) \quad (12)$$

soit après intégration

$$\tilde{\Gamma}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = \tilde{\Gamma}\left(0, \mathbf{K}_d, \varrho_d - \frac{x}{k_0} \mathbf{K}_d\right) \cdot \exp\left\{-\frac{k_0^2}{4} \int_0^x (A(0) - A\left(\varrho_d - \frac{x-u}{k_0} \mathbf{K}_d\right)) du\right\}. \quad (13)$$

Le moment d'ordre deux en deux points  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  se calcule à partir de (13) à l'aide d'une transformée de Fourier inverse par rapport à la variable  $\mathbf{K}_d$ . Soit:

$$\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{\Gamma}\left(0, \mathbf{K}_d, \varrho_d - \frac{x}{k_0} \mathbf{K}_d\right) \cdot \exp(i \mathbf{K}_d \cdot \varrho_s - H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)) d\mathbf{K}_d \quad (14)$$

avec

$$H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = \frac{k_0^2}{4} \int_0^x \left( A(0) - A\left(\varrho_d - \frac{z}{k_0} \mathbf{K}_d\right) \right) dz,$$

$$\tilde{\Gamma}(0, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d) \exp(-i \mathbf{K}_d \cdot \varrho_s) d\varrho_s.$$

La forme de l'onde acoustique incidente intervient dans le calcul de la cohérence initiale  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$  tandis que la modélisation du spectre des fluctuations  $\Phi_\varepsilon(K)$  influence l'évaluation du terme  $H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$ . Pour un faisceau collimaté gaussien de largeur  $2w_0$  le champ de pression  $U(x, \varrho)$  est donné par la relation (Ishimaru [3])

$$U(x, \varrho) = \frac{1}{1 + i \alpha x} \exp\left(i k_0 x - \frac{k_0 \alpha}{2} \frac{\varrho^2}{1 + i \alpha x}\right), \\ \alpha = \lambda/(\pi w_0^2). \quad (15)$$

On peut alors calculer la transformée de Fourier de  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$  et en tenir compte dans l'éq. (14) qui s'écrit

sous la forme

$$\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d) = \frac{w_0^2}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a\varrho_d^2 - bK_d^2 + c\mathbf{K}_d \cdot \varrho_d + i\mathbf{K}_d \cdot \varrho_s - H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)) d\mathbf{K}_d \quad (16)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2w_0^2}; \quad b = \frac{w_0^2}{8}(1 + \alpha^2 x^2); \quad c = \frac{\alpha x}{2}.$$

En particulier les grandeurs  $\varrho_s$  et  $\varrho_d$  on obtient alors des expressions simples d'une part pour la répartition d'intensité moyenne  $\langle I(x, \varrho_s) \rangle = \Gamma(x, \varrho_s, 0)$  et d'autre part pour la fonction de corrélation spatiale  $\Gamma(x, 0, \varrho_d)$ . Dans la suite nous présentons des évaluations numériques de ces quantités en modélisant le spectre des fluctuations  $\Phi_e(K)$ , qui intervient dans le terme  $H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$ , par un spectre de von Karman:

$$\Phi_e(K) = 0,033 C_e^2 (K^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} \exp(-K^2/K_m^2),$$

$$K_m = 5,91/l_0. \quad (17)$$

$C_e^2$  est le coefficient de structure de la turbulence,  $l_0$  et  $L_0$  sont deux échelles de longueur caractérisant les limites de la zone inertielle de turbulence.

### 3. Calcul numérique du moment d'ordre deux en deux points par transformée de Fourier rapide

L'expression (14) montre que l'évaluation numérique du moment d'ordre deux  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  est envisageable de façon différente d'une intégration numérique classique par une méthode de Gauss, en utilisant la transformée de Fourier rapide. Quatre étapes sont alors nécessaires:

a) Evaluation de la cohérence initiale  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$  et calcul de  $\tilde{\Gamma}(0, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$  par une F.F.T. bidimensionnelle.

b) Evaluation de  $\tilde{\Gamma}(0, \mathbf{K}_d, \varrho_d - \frac{x}{k_0} \mathbf{K}_d)$  à partir d'un décalage

lage  $\varrho'_d = \varrho_d - \frac{x}{k} \mathbf{K}_d$  sur la transformée de Fourier de  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$ .

c) Calcul du terme  $H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$  par une intégration numérique de l'expression  $A(\varrho)$  soit:

$$H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) = 4\pi^2 k_0^2 \int_0^x \int_0^\infty \left( 1 - J_0 \left( K \left| \varrho_d - \frac{z}{k_0} \mathbf{K}_d \right| \right) \right) K \Phi_e(K) dK.$$

d) Assemblage du terme

$$\tilde{\Gamma} \left( 0, \mathbf{K}_d, \varrho_d - \frac{x}{k_0} \mathbf{K}_d \right) \exp[-H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)]$$

et calcul de  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  par une F.F.T. bidimensionnelle inverse.

Le calcul du moment d'ordre deux en deux points  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  par transformée de Fourier dépend donc du choix du pavé d'exploration en  $\varrho_s$  et du nombre d'échantillons  $N$  retenus sur ce pavé. L'approximation obtenue peut différer du moment d'ordre deux réel pour plusieurs raisons:

- la cohérence initiale  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$  est tronquée à un pavé de dimensions  $L_1 \times L_2$ . Il faut donc que cette cohérence soit sinon nulle du moins négligeable à l'extérieur de ce pavé.

- de même la cohérence initiale est échantillonnée sur  $N$  points. Pour ne pas introduire un repliement spectral il faut que le pas d'échantillonnage respecte la structure du spectre spatial de  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$ .
- le terme  $\exp(-H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d))$  qui prend en compte les effets de la turbulence est échantillonné avec un pas  $\Delta K_d$  qui doit permettre de représenter l'influence des nombres d'ondes  $K$  associés à l'échelle externe de turbulence  $L_0$ .

### 5. Simulations numériques

Pour valider la méthode de calcul par FFT du moment d'ordre deux en deux points  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$ , nous avons étudié le cas d'un faisceau collimaté gaussien pour lequel l'intensité moyenne  $\langle I(x, \varrho_s) \rangle$  et la cohérence spatiale  $\Gamma(x, 0, \varrho_d)$  s'obtiennent à partir de l'expression (16) avec une intégration numérique classique. Les simulations numériques ont été effectuées sur un VAX 780. Les transformées de Fourier rapides bidimensionnelles sont calculées sur un maillage de  $32 \times 32$  points. L'expression (16) est intégrée numériquement en utilisant une méthode de Gauss à 8 points. Les différentes simulations présentées ci-après ont été obtenues avec des valeurs des paramètres correspondant aux conditions expérimentales de nos essais (4). La fréquence d'émission acoustique  $f_0$  est de 50 kHz, la largeur du faisceau incident  $w_0$  est de 5 cm. Le milieu turbulent correspond à une turbulence thermique pour laquelle l'échelle intégrale des fluctuations de température est de 7,6 cm et le taux des fluctuations de température est de 1,7%.

Pour évaluer l'étendue spectrale de la fonction  $\tilde{\Gamma} \exp(-H)$  nous donnons sur la Fig. 1 l'évolution des

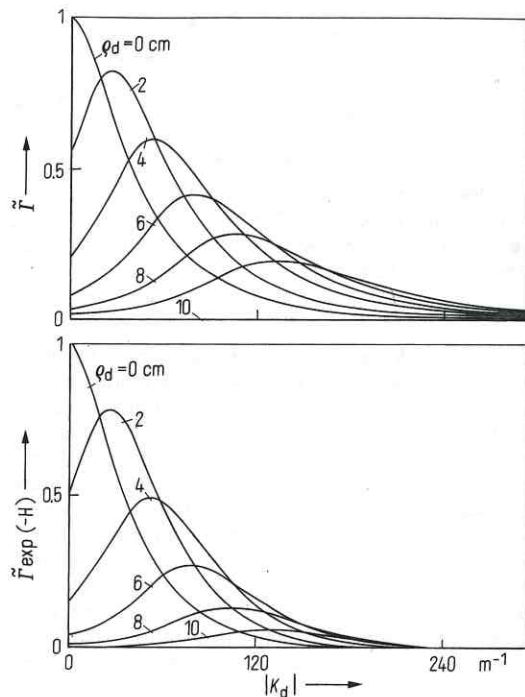


Fig. 1. Evolution dans le plan  $x = 1$  m des fonctions  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Gamma} \exp(-H)$  pour un faisceau collimaté gaussien avec différentes séparations  $\varrho_d$ .

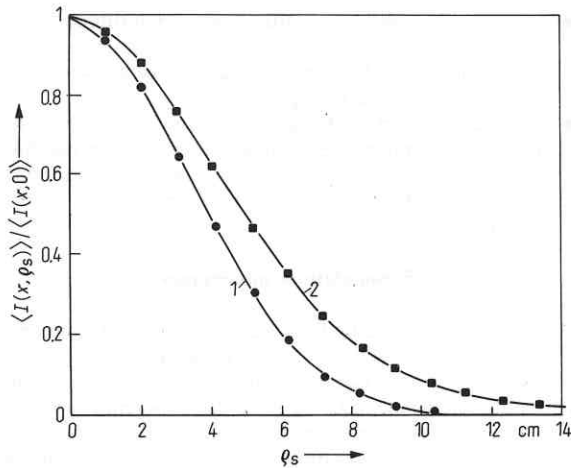


Fig. 2. Répartition transversale de l'intensité acoustique transmise dans le plan  $x = 1$  m (— méthode de Gauss; ●, ■ F.F.T.),  $f = 50$  kHz. Courbe 1: milieu au repos; courbe 2: milieu turbulent.

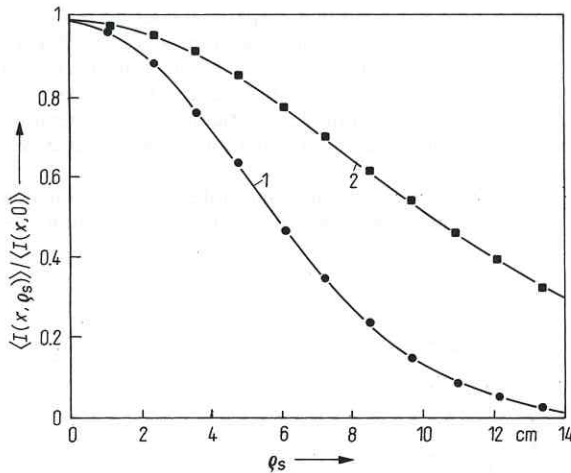


Fig. 3. Répartition transversale de l'intensité acoustique transmise dans le plan  $x = 2$  m (— méthode de Gauss; ●, ■ F.F.T.),  $f = 50$  kHz. Courbe 1: milieu au repos; courbe 2: milieu turbulent.

fonctions  $\tilde{I}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)$  et  $\tilde{I}(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d) \exp[-H(x, \mathbf{K}_d, \varrho_d)]$  en fonction de  $|\mathbf{K}_d|$ . Lorsque la séparation latérale est non nulle on observe un décalage du maximum de ces fonctions. On notera que l'influence de la turbulence, qui est liée au terme  $\exp(-H)$  se traduit d'une part par une diminution du niveau et d'autre part par un rétrécissement du support de la fonction  $\tilde{I} \exp(-H)$  qui tend vers zéro plus vite que la fonction dans le milieu au repos.

Sur les Figs. 2 et 3 nous avons reporté la répartition d'intensité  $\langle I(x, \varrho_s) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$ , pour deux distances de propagation  $x = 1$  m et  $x = 2$  m, soit respectivement  $147 \lambda$  et  $294 \lambda$  ( $\lambda$  longueur d'onde acoustique). Nous avons envisagé les cas du milieu non perturbé (courbe 1) et du milieu turbulent pour lequel le spectre des fluctuations  $\Phi_e(K)$  est modélisé par un spectre de von Karman (éq. (17)) (courbe 2). Pour la distance de 1 m la fenêtre en  $\mathbf{K}_d$  est de  $600 \text{ m}^{-1}$  correspondant à un pas en  $\varrho_s$  de  $1.01 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Pour la distance de 2 m, compte tenu de

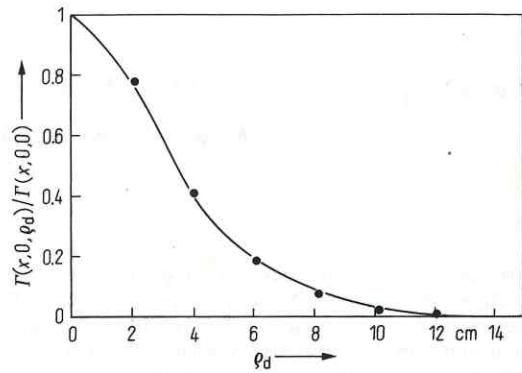


Fig. 4. Cohérence spatiale transversale pour un faisceau collimaté gaussien après 1 m de traversée en milieu turbulent (— méthode de Gauss; ● F.F.T.),  $f = 50$  kHz.

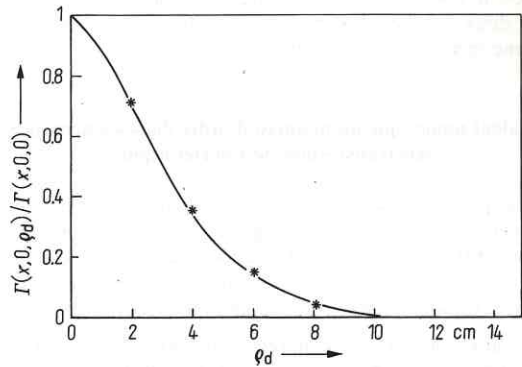


Fig. 5. Cohérence spatiale transversale pour un faisceau collimaté gaussien après 2 m de traversée en milieu turbulent (— méthode de Gauss; \* F.F.T.),  $f = 50$  kHz.

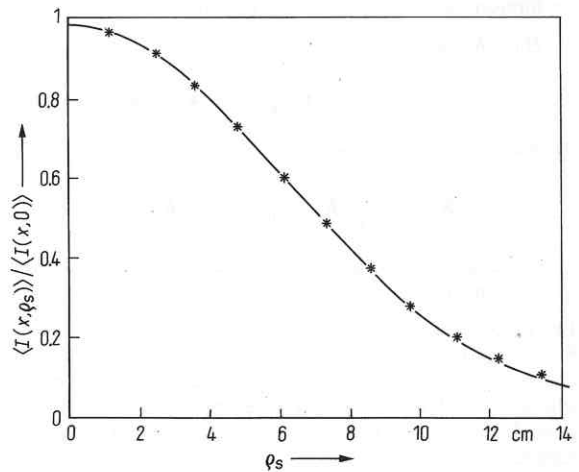


Fig. 6. Répartition transversale de l'intensité acoustique pour un faisceau collimaté gaussien traversant 1 m de milieu non perturbé puis 1 m de milieu turbulent (— méthode de Gauss; \* F.F.T.),  $f = 50$  kHz.

l'élargissement en  $\varrho_s$  du faisceau, nous avons choisi un pas en  $\varrho_s$  de  $1,22 \cdot 10^{-2}$  m associé à une fenêtre en  $K_d$  moins large soit  $500 \text{ m}^{-1}$ . On observe un très bon accord entre le calcul par FFT et l'intégration classique par une méthode de Gauss. Sur les Figs. 4 et 5 nous avons tracé les corrélations spatiales  $\Gamma(x, 0, \varrho_d)/\Gamma(x, 0, 0)$  obtenues simultanément avec l'intensité acoustique étant donné que le calcul par FFT donne directement le moment d'ordre deux  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  pour deux points quelconques. La concordance entre les deux méthodes de calcul est satisfaisante.

Pour compléter ces essais nous avons considéré le cas d'un faisceau gaussien qui se propage dans le milieu au repos du plan  $x = 0$  m au plan  $x = 1$  m et dans le milieu turbulent du plan  $x = 1$  m au plan  $x = 2$  m. Le calcul du moment d'ordre deux  $\Gamma(x, \varrho_s, \varrho_d)$  est alors initialisé dans le plan  $x = 1$  m en calculant la transformée de Fourier  $\tilde{F}(x = 1, K_d, \varrho_d)$  de la fonction de cohérence dans le plan d'entrée de la zone de turbulence. Sur la Fig. 6 nous avons tracé la répartition d'intensité  $\langle I(x, \varrho_s) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$  obtenue avec une fenêtre en  $K_d$  de  $500 \text{ m}^{-1}$  pour le calcul de la FFT bidimensionnelle. Les résultats obtenus par les deux méthodes d'intégration sont analogues.

### 6. Conclusion

Nous avons montré que le calcul du moment d'ordre deux en deux points peut être effectué à partir d'un algorithme fondé sur la transformée de Fourier rapide. L'application de cette méthode présente plusieurs avantages. Tout d'abord on calcule simultanément les réparti-

tions d'intensité et de cohérence spatiale. De plus, même dans le cas où il n'existe pas d'expression analytique de la cohérence initiale  $\Gamma(0, \varrho_s, \varrho_d)$ , le calcul du moment d'ordre deux est tout à fait envisageable dès que l'on connaît la répartition du champ de pression acoustique dans le plan d'entrée de la zone de turbulence (Application au cas d'une source rayonnant comme un piston).

### Remerciements

Les auteurs remercient la D.R.E.T. pour son soutien financier.

(Reçu le 31 décembre 1986; accepté le 31 décembre 1986.)

### Bibliographie

- [1] Tatarski, V. I., The effects of turbulent atmosphere on wave propagation I.P.S.T. Keter Press, Jerusalem 1971.
- [2] Fante, R. L., Mutual coherence function and frequency spectrum of a laser beam propagating through atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Amer.* **64** [1974], 592-598.
- [3] Ishimaru, A., Wave propagation and scattering in random media, Vol. 2. Academic Press, New York 1978.
- [4] Blanc-Benon, Ph., Chaize, S. et Juvé, D., Coherence aspects of acoustic wave transmission through a medium with temperature fluctuations. IUTAM Symposium Aero and Hydro Acoustics, Springer Verlag, Berlin 1986.