

**MOMENT D'ORDRE DEUX EN DEUX POINTS  
D'UNE ONDE ACOUSTIQUE SPHÉRIQUE  
APRÈS TRAVERSÉE  
D'UNE TURBULENCE CINÉMATIQUE**

par Ph. BLANC-BENON (\*)

**RÉSUMÉ**

Le moment d'ordre deux en deux points d'une onde acoustique traversant une turbulence cinématique est fonction de l'onde incidente et de la modélisation du spectre des fluctuations de vitesse  $\varphi_n$ . On présente ici des estimations théoriques pour les cas des ondes plane et sphérique, avec pour  $\varphi_n$  une forme de Von Karman. Ces évaluations sont comparées avec des mesures de corrélations spatiales et spatio-temporelles mettant en évidence l'importance de la prise en compte de l'échelle externe de turbulence.

**SUMMARY**

The mutual coherence function of a spherical wave propagating in a turbulent medium has been computed using a modified Von Karman model for the spectrum of the velocity fluctuations. The experimental

---

(\*) Laboratoire d'Acoustique, École Centrale de Lyon, B.P. n° 163, 69131 Ecully Cedex.

results for the space-time correlations of the transmitted field are in good agreement with the theoretical estimates, and display the importance of the outer scale of turbulence.

## 1. INTRODUCTION

La cohérence spatio-temporelle du champ de pression acoustique transmis après traversée d'un volume de turbulence est une caractéristique qui intervient dans diverses applications et notamment dans les techniques d'imagerie acoustique.

Les résultats présentés ici concernent le cas d'une onde sphérique ( $f=25$  et  $40$  kHz) qui traverse un jet d'air turbulent suivant une perpendiculaire à la vitesse moyenne de l'écoulement sur une distance de  $1$  m. La source émettrice est placée à  $0,25$  m du volume de turbulence. La vitesse moyenne  $\bar{U}$  du jet dans la section de mesure située à  $1,5$  m de la buse est variable de  $5$  à  $14$  m/s. L'échelle intégrale des fluctuations de vitesse est de  $6,7$  cm et l'intensité relative de la turbulence  $u/\bar{U}$  est de l'ordre de  $0,24$ . Le champ transmis est caractérisé par des mesures de corrélations spatiales et spatio-temporelles.

Les conditions expérimentales de nos essais (nombre de Mach  $u/c_0$  inférieur à  $10^{-2}$ , longueur d'onde acoustique  $\lambda$  nettement inférieure à l'échelle de corrélation spatiale de la turbulence  $l$ , distance de propagation  $x$  de l'ordre de  $15l$ ) impliquent que la diffusion des ondes acoustiques par la turbulence a lieu pour l'essentiel au voisinage de l'axe de propagation et que l'énergie rétrodiffusée est négligeable. Les phénomènes mis en jeu par l'interaction d'une onde acoustique avec l'écoulement turbulent peuvent alors être représentés par l'approximation parabolique de l'équation stochastique de Helmholtz [1].

## 2. L'APPROXIMATION PARABOLIQUE

Le champ de pression acoustique transmis  $p(\mathbf{X}, t)$  peut s'écrire :

$$(1) \quad p(\mathbf{X}, t) = \text{Re} \{ \mathcal{U}(x, \boldsymbol{\rho}, t) \exp(ik_0 x) \exp(ik_0 c_0 t) \},$$

$x$  désignant la distance de propagation,  $\rho$  un vecteur du plan perpendiculaire à la direction de propagation,  $h_0$  le nombre d'onde acoustique et  $c_0$  la vitesse du son dans le milieu au repos. La fonction de cohérence transversale est définie à partir du moment d'ordre deux en deux points de l'amplitude complexe du champ  $\mathcal{U}(x, \rho, t)$  soit :

$$(2) \quad \Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau) = \left\langle \mathcal{U} \left( x, \rho_s + \frac{1}{2} \rho_d, t \right) \mathcal{U} \left( x, \rho_s - \frac{1}{2} \rho_d, t + \tau \right) \right\rangle,$$

où  $\rho_s = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$  et  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$  ( $\rho_1$  et  $\rho_2$  coordonnées des points d'observation). L'évolution de la fonction  $\Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau)$  est régie par l'équation :

$$(3) \quad \left\{ 2 ik_0 \frac{\partial}{\partial x} + 2 \nabla_{\rho_s} \cdot \nabla_{\rho_d} + \frac{ik_0^3}{2} (\mathcal{A}(0) - \mathcal{A}(\rho_d - U\tau)) \right\} \Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau) = 0.$$

Le moment d'ordre deux à l'entrée de la zone de turbulence  $\Gamma(x_e, \rho_s, \rho_d)$  est supposé connu. Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope  $\mathcal{A}(\rho)$  est relié au spectre tridimensionnel des fluctuations d'indice  $\varphi_n(K)$  par la relation :

$$(4) \quad \mathcal{A}(\rho) = \mathcal{A}(\rho) = 16 \pi^2 \int_0^\infty K J_0(K\rho) \varphi_n(K) dK,$$

où  $J_0$  désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro. La solution de l'équation (3) peut être mise sous la forme suivante [1, 2] :

$$(5) \quad \Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Gamma} \left( x_e, K_d, \rho_d - \frac{x}{k_0} K_d \right) \exp [i K_d \cdot \rho_s - \mathcal{H}(x, K_d, \rho_d)] dK_d,$$

$$\mathcal{H}(x, K_d, \rho_d) = \frac{k_0^2}{4} \int_{x_e}^x \left( \mathcal{A}(0) - \mathcal{A} \left( \rho_d - U\tau - \frac{z}{k_0} K_d \right) \right) dz,$$

$$\hat{\Gamma}(x_e, K_d, \rho_d) = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x_e, \rho_s, \rho_d) \exp [-i K_d \cdot \rho_s] d\rho_s.$$

La forme de l'onde acoustique incidente intervient dans le calcul de la cohérence initiale  $\Gamma(x_e, \rho_s, \rho_d)$  tandis que la modélisation du spectre des fluctuations d'onde  $\varphi_n(K)$  influence l'évaluation du terme  $\mathcal{H}(x, K_d, \rho_d)$ .

Dans la littérature, le calcul de  $\mathcal{H}$  est souvent effectué en prenant en compte uniquement les échelles de turbulence associées à la zone inertielle

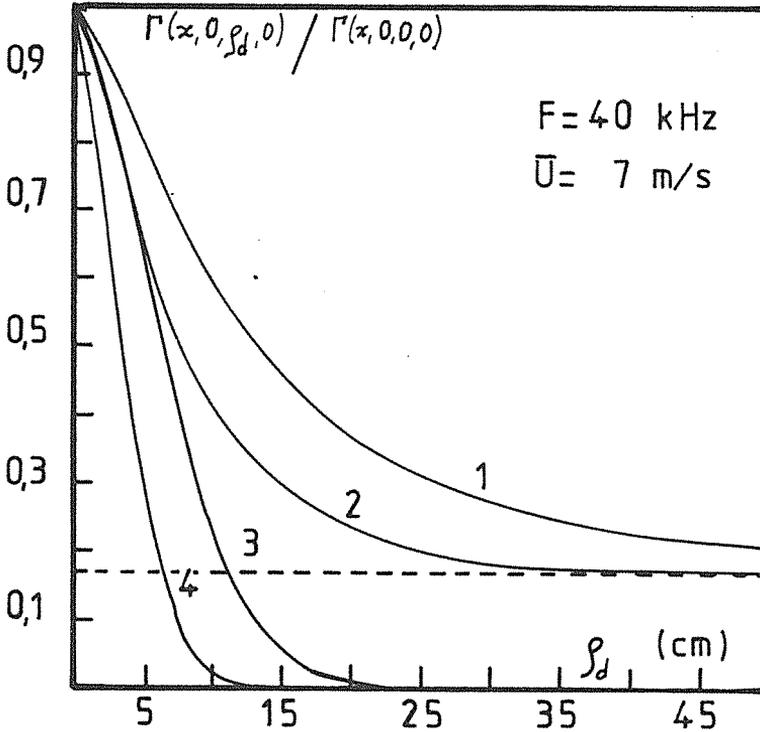


Fig. 1. — Évaluations théoriques de la cohérence spatiale du champ acoustique transmis [courbe 1 : onde sphérique et  $\varphi_n(K)$  spectre de Karman; courbe 2 : onde plane et  $\varphi_n(K)$  spectre de Karman; courbe 3 : onde sphérique et  $\varphi_n(K)$  zone inertielle; courbe 4 : onde plane et  $\varphi_n(K)$  zone inertielle].

de turbulence. Ceci permet alors de donner une expression analytique pour la fonction  $\Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau)$  pour différents types d'onde (onde plane, onde sphérique, faisceau gaussien). Par ailleurs, Fante [3] pour le faisceau gaussien et Lutomirski et Yura [4] pour l'onde sphérique ont en outre considéré l'échelle externe de turbulence  $L_0$  en modélisant  $\varphi_n(K)$  par un spectre de Von Karman :

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_n(K) = 0,033 C_n^2 (K^2 + 1/L_0^2)^{-11/6} \exp[-K^2/K_m^2], \\ C_n^2 = 1,91 (u/c_0)^2 L_0^{-2/3}; \quad K_m = 5,91/l_0, \end{cases}$$

$l_0$  et  $L_0$  sont deux échelles de longueur caractérisant les limites de la zone inertielle de turbulence. Dans le cas d'une onde incidente sphérique la

solution de l'équation (5) s'écrit :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau) = \frac{1}{x^2} \exp \left[ i \frac{k_0}{x} \rho_s \cdot \rho_d - H \right], \\ H = 4 \pi^2 k_0^2 \int_{x_e}^x dz \int_0^\infty \left( 1 - J_0 \left( K \left| \rho_d \frac{z}{x} - U \tau \right| \right) \right) \varphi_n(K) K dK. \end{array} \right.$$

Pour une onde plane, la solution est indépendante de  $\rho_s$  et s'obtient par une intégration directe de l'équation (3) soit :

$$(8) \Gamma(x, \rho_d, \tau) = \exp \left[ 4 \pi^2 k_0^2 (x - x_e) \times \int_0^\infty (1 - J_0(K |\rho - U \tau|)) \varphi_n(K) K dK \right].$$

Afin de mettre en évidence l'importance du paramètre  $L_0$  nous comparons ici les évaluations numériques obtenues pour la fonction  $\Gamma(x, \rho_s, \rho_d, \tau)$  à partir d'un spectre de Karman [6] avec celles ne tenant compte que de la zone inertielle de turbulence. Ces calculs sont effectués pour une onde plane et une onde sphérique. Par ailleurs nous donnons des résultats expérimentaux concernant des cas particuliers de la cohérence spatio-temporelle. Pour les estimations théoriques et les mesures qui suivent, nous avons pris des points d'observation symétriques par rapport à l'axe d'émission acoustique.

### 3. RÉSULTATS

#### 3.1. Étude des corrélations spatiales

Pour une séparation des points de mesure  $\rho_d$  perpendiculaire à la vitesse moyenne de l'écoulement, la fonction d'intercorrélation :

$$R_{p_1 p_2} = \langle p(X_1, t) p(X_2, t + \tau) \rangle$$

est maximale pour un écart  $\tau$  nul. L'étude de la fonction  $R_{p_1 p_2}(\rho_d, 0)$  permet donc d'analyser l'influence de l'écoulement turbulent sur la cohérence spatiale du champ acoustique transmis. Sur la figure 1 nous indiquons les résultats obtenus pour la fonction  $\Gamma(x, \rho_s=0, \rho_d, \tau=0)$  avec une fréquence d'émission  $f$  de 40 kHz et une vitesse moyenne  $\bar{U}$  de 7 m/s. Les courbes (1; 3) et (2; 4) correspondent respectivement à une onde sphérique

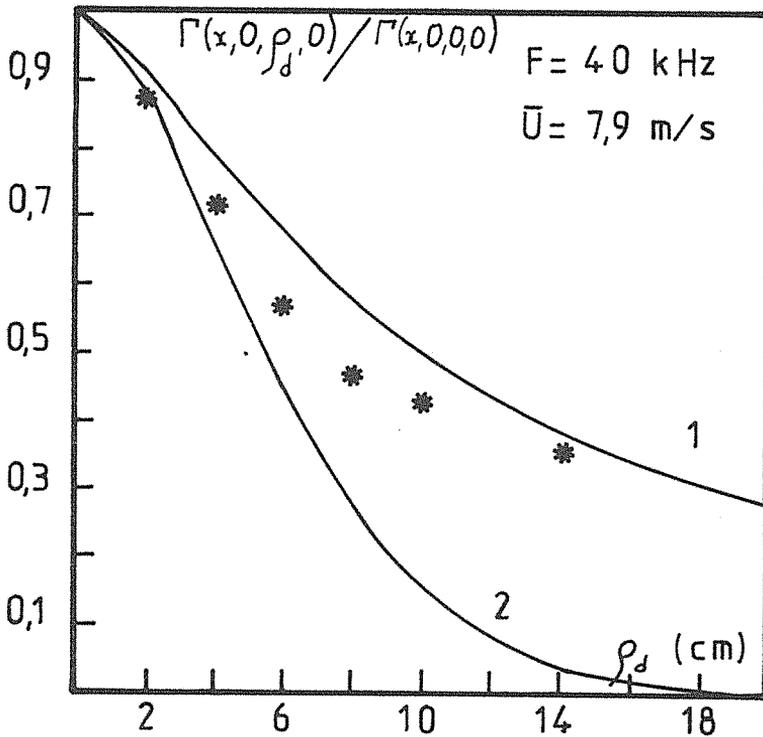


Fig. 2. — Évolution de la cohérence spatiale pour une onde sphérique [courbe 1 :  $\varphi_n(K)$  spectre de Karman; courbe 2 :  $\varphi_n(K)$  zone inertielle].

et à une onde plane. On note que la perte de cohérence est plus rapide dans le cas de l'onde plane. De plus, si dans le calcul de  $\Gamma$  on ne prend en compte que les échelles de turbulence associées à la zone inertielle dans le spectre  $\varphi_n(K)$  (courbes 3 et 4) on ne retrouve pas la valeur limite correspondant au carré de la partie cohérente de l'onde transmise à travers le milieu turbulent. Cette limite est indépendante de la forme de l'onde initiale et sa valeur, déduite du moment d'ordre un [2], est donnée par l'expression :

$$(9) \quad \exp \left[ -\frac{k_0^2}{4} \mathcal{A}(0) (x - x_e) \right].$$

Sur les figures 2 et 3 nous donnons un exemple des résultats expérimentaux obtenus dans le cas de la propagation d'une onde sphérique pour une fréquence de 40 kHz et deux valeurs de la vitesse moyenne  $\bar{U}$  7,9 et 12,2 m/s. On constate que pour évaluer de façon satisfaisante la perte de cohérence spatiale du champ transmis, il est nécessaire de calculer  $\Gamma(x, \rho_s=0, \rho_d, \tau=0)$  avec un spectre de Karman (courbes 1 et 3). L'erreur

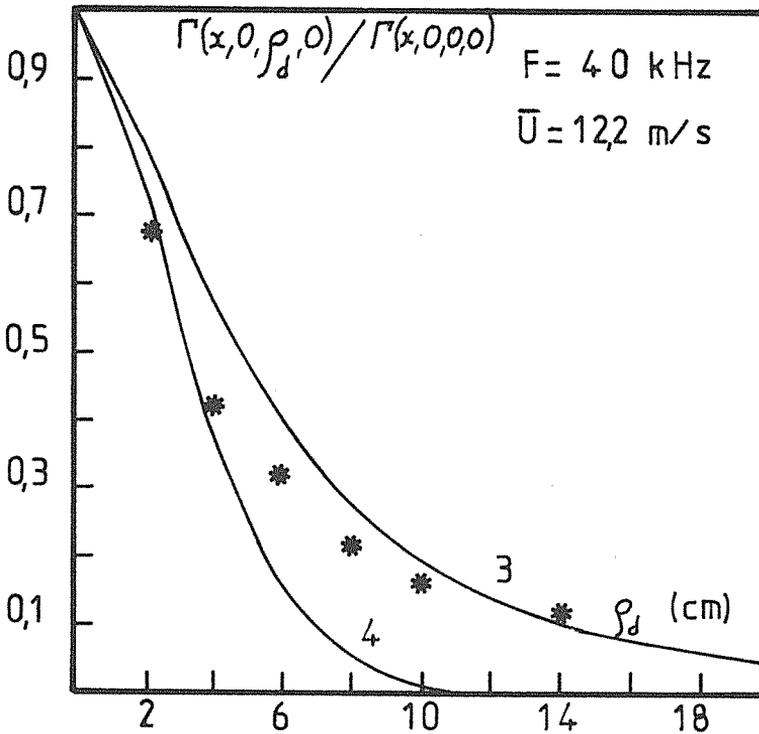


Fig. 3. — Évolution de la cohérence spatiale pour une onde sphérique [courbe 3 :  $\varphi_n(K)$  spectre de Karman; courbe 4 :  $\varphi_n(K)$  zone inertielle].

commise en se limitant à la zone inertielle de turbulence (courbes 2 et 4) est d'autant plus grande que la vitesse moyenne de l'écoulement est faible.

### 3. 2. Étude des corrélations spatio-temporelles

Lorsque la séparation des points de mesure  $\rho_d$  est parallèle à la vitesse moyenne de l'écoulement, la fonction d'intercorrélation  $R_{p_1 p_2}$  présente un maximum pour un décalage temporel non nul. A partir de l'écart  $\rho_d$  on définit alors une vitesse de défilement  $U_d = \rho_d / \tau$  [5] qui caractérise l'effet convectif de l'écoulement moyen sur la cohérence spatio-temporelle du champ transmis. A partir de l'équation (7), on peut déterminer pour quelle valeur de  $\tau$  la fonction  $\Gamma(x, \rho_s = 0, \rho_d, \tau)$  est maximale. Nous avons, pour une onde sphérique :

$$(10) \quad \Gamma(x, \rho_s = 0, \rho_d, \tau) = \frac{1}{x^2} \exp \left[ -\frac{k_0^2}{4} \int_{x_e}^x \left( \mathcal{A}(0) - \mathcal{A} \left( \rho_d \frac{z}{x} - \bar{U} \tau \right) \right) dz \right].$$

Le temps  $\tau_M$  pour lequel  $\partial\Gamma/\partial\tau$  s'annule vérifie :

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \int_{x_e}^x \mathcal{A} \left( \rho_d \frac{z}{x} - \bar{U} \tau \right) dz \right] = 0,$$

soit, en faisant le changement de variable  $T = \rho_d (z/x) - \bar{U} \tau$  :

$$(12) \quad \int_{\rho_d(x_e/x) - \bar{U}\tau}^{\rho_d - \bar{U}\tau} d(\mathcal{A}(T)) = 0.$$

Comme l'autocorrélation  $\mathcal{A}(T)$  est une fonction paire, nous obtenons :

$$(13) \quad \tau_M = \rho_d \left( 1 + \frac{x_e}{x} \right) / 2 \bar{U}.$$

Dans le cas où l'onde incidente est plane on trouve, à partir de l'équation (8),  $\tau_M = \rho_d / \bar{U}$ .

TABLEAU

$\bar{U}$ (m/s)	$f=40$ kHz			$f=25$ kHz
	$\rho_d=2$ cm	$\rho_d=4$ cm	$\rho_d=6$ cm	$\rho_d=6$ cm
5,5. ....	1,69	1,69	1,73	1,71
7,9. ....	1,75	1,72	1,77	1,70
9,6. ....	1,75	1,79	1,76	1,63
10,8. ....	1,76	1,93	1,73	1,69
12,2. ....	1,74	1,85	1,75	1,71

Dans le tableau, nous avons reporté les valeurs expérimentales du rapport  $U_d/\bar{U}$ , obtenues pour une émission sphérique. Dans notre étude, nous avons  $x_e=0,25$  m et  $x=1,25$  m ce qui donne une valeur théorique de  $1,67 \bar{U}$  pour la vitesse de défilement  $U_d$ . Nous observons un accord satisfaisant entre la prédiction théorique déduite de l'équation (13) et les résultats expérimentaux.

#### 4. CONCLUSION

Le calcul du moment d'ordre deux en deux points, effectué à partir de l'approximation parabolique, met en évidence l'importance de la modélisation du spectre des fluctuations de vitesse et de la forme de l'onde incidente.

Les résultats expérimentaux obtenus pour une onde sphérique montrent que l'utilisation d'un spectre de Von Karman, intégrant les effets de l'échelle externe de turbulence, permet de prédire de façon satisfaisante la cohérence spatiale du champ acoustique transmis à travers un milieu turbulent ainsi que le défilement de l'image de diffraction à une vitesse différente de celle de l'écoulement moyen.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. TATARSKI, *The effects of turbulent atmosphere on wave propagation*, I.P.S.T., Keter Press, Jerusalem, 1971.
- [2] A. ISHIMARU, *Wave propagation and scattering in random media*, vol. 2, Academic Press, New York, 1978.
- [3] R. L. FANTE, Mutual coherence function and frequency spectrum of a laser beam propagating through atmospheric turbulence, *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 64, n° 2, p. 592-598, 1974.
- [4] R. F. LUTOMIRSKI et H. T. YURA, Wave structure function and mutual coherence function of an optical wave in a turbulent atmosphere, *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 61, n° 4, p. 482-487, 1971.
- [5] B. J. USCINSKI, *The elements of wave propagation in random media*, McGraw-Hill, 1977.