

Classification
 Physics Abstracts
 43.20D—43.20F

Simulation numérique de la propagation des ondes acoustiques à travers une turbulence cinématique

Ph. Blanc-Benon ⁽¹⁾, D. Juvé ⁽¹⁾, M. Karweit ⁽²⁾ and G. Comte-Bellot ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, U.R.A. C.N.R.S. n° 263, Ecole Centrale de Lyon, 69131 Ecully Cedex, France

⁽²⁾ Department of Chemical Engineering, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, U.S.A.

(Reçu le 12 janvier 1989, révisé le 23 mai 1989, accepté le 2 octobre 1989)

Résumé. — Nous présentons une simulation numérique de la propagation d'une onde acoustique à travers une turbulence cinématique. Dans cette méthode un champ aléatoire de vitesse, homogène et isotrope est représenté par un ensemble de modes de Fourier, et le système d'équations des rayons déduit de l'acoustique géométrique est intégré par une méthode de Runge-Kutta. Sur un ensemble de réalisations du champ on détermine les fluctuations des temps d'arrivée de l'onde à une distance donnée de la source. Des comparaisons sont effectuées avec des résultats théoriques (Chernov, 1960) et des expériences réalisées en laboratoire (Blanc-Benon, 1981).

Abstract. — A numerical technique for simulating the behavior of an acoustic wave propagating through a turbulent medium is introduced. A random isotropic velocity field is generated in terms of discrete Fourier modes. The behavior of the wavefront of the propagating wave is obtained by integration of the ray-trace equations. Numerical results are compared with the analytical findings of Chernov (1960) and the experiment of Blanc-Benon (1981).

1. Introduction.

Les ondes acoustiques qui se propagent dans un milieu turbulent subissent d'importantes perturbations dues aux fluctuations aléatoires du milieu. Ces modifications du champ acoustique propagé se traduisent par des variations d'amplitude, de phase et par une fluctuation du temps de parcours des ondes entre une source et un récepteur. L'étude de ces phénomènes a fait l'objet de nombreuses analyses théoriques exposées dans les travaux de Chernov [1], Frisch [2], Tatarski [3]. Ces différents développements reposent sur un grand nombre d'hypothèses, d'une part pour écrire une équation d'onde à partir des lois fondamentales de la dynamique et de la thermodynamique des fluides, et d'autre part, pour résoudre cette équation grâce à une modélisation des effets d'interaction entre l'onde acoustique et le milieu turbulent. Les formulations ainsi obtenues conduisent à des développements analytiques ou numériques dont le domaine de validité est souvent difficile

à préciser. En outre ces solutions sont adaptées à des configurations simples : turbulence homogène en l'absence de gradients thermiques ou cinématiques.

Nous introduisons ici une nouvelle approche du problème à partir d'une simulation numérique directe qui ne suppose aucune modélisation *a priori* des effets d'interaction entre l'onde acoustique et le milieu turbulent. Cette approche comporte deux étapes :

- la génération d'un champ aléatoire de vitesse par une superposition d'un ensemble fini de modes de Fourier convenablement répartis entre les grandes structures et les structures fines de la turbulence ;
- le calcul des rayons acoustiques issus d'une source ponctuelle émettant dans ce milieu turbulent supposé "gelé" pendant le temps de traversée des ondes acoustiques.

Nous présentons dans cet article les résultats obtenus pour la propagation d'une onde acoustique à travers une

turbulence cinématique homogène et isotrope, dans l'approximation géométrique. Les fluctuations de temps de parcours entre une source et un récepteur sont comparées à celles déduites de la théorie de Chernov.

2. Simulation numérique par modes de Fourier aléatoires d'une turbulence homogène isotrope.

Une analyse de Fourier tridimensionnelle permet de représenter une réalisation du champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ d'une turbulence homogène sous la forme (Batchelor, [4]) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) d\mathbf{K} \quad (1)$$

où \mathbf{K} est le vecteur d'onde et $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K})$ est la transformée de Fourier spatiale. L'incompressibilité de la turbulence, exprimée dans l'espace physique par $\text{div}(\mathbf{V}(\mathbf{X})) = 0$, se traduit dans l'espace spectral par la relation algébrique simple :

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{K} = 0, \quad (2)$$

qui montre que pour tout vecteur \mathbf{K} la contribution $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K})$ est située dans le plan perpendiculaire à \mathbf{K} . En reprenant une démarche introduite par Kraichnan [5], et également par Corrsin et Karweit [6], nous discrétisons l'intégrale de Fourier (1) en une somme finie de termes choisis aléatoirement de façon à simuler numériquement un champ de vitesse représentatif d'une turbulence homogène et isotrope. Une réalisation du champ de vitesse est alors représentée comme la somme de N ondes planes transverses ou modes de Fourier. En posant $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}(\mathbf{K}) \exp(i\psi)$, où $\mathbf{U}(\mathbf{K})$ est un vecteur réel, nous avons :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \sum_{\ell=1}^N \mathbf{U}(\mathbf{K}^\ell) \cos(\mathbf{K}^\ell \cdot \mathbf{X} + \psi^\ell) \quad (3)$$

Remarquons que la direction du vecteur \mathbf{K}^ℓ change avec l'indice ℓ . Ainsi, pour chaque réalisation de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, les projections K_i sur un axe donné X_i sont incommensurables, et le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ n'est pas périodique. L'homogénéité de la turbulence, associée à l'invariance par translation des propriétés statistiques du champ, est assurée en choisissant la variable ψ^ℓ équirépartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. L'isotropie, associée à l'invariance par rotation, impose qu'aucune direction n'est privilégiée tant pour le vecteur d'onde \mathbf{K}^ℓ (variables θ et φ dont les densités de probabilité sont telles que $p(\theta) = \sin\theta/2$ avec $0 < \theta < \pi$ et $p(\varphi) = 1/2\pi$ avec $0 < \varphi < 2\pi$) que pour le vecteur $\mathbf{U}(\mathbf{K}^\ell)$ (variable α équirépartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$) situé dans le plan perpendiculaire à \mathbf{K}^ℓ (Fig. 1). Dans notre simulation,

(¹) Le fait de choisir le module de chaque mode de Fourier comme constant, et non comme une variable aléatoire gaussienne d'écart-type égal à la valeur efficace des fluctuations de vitesse, ne semble pas modifier de façon notable les résultats de simulation.

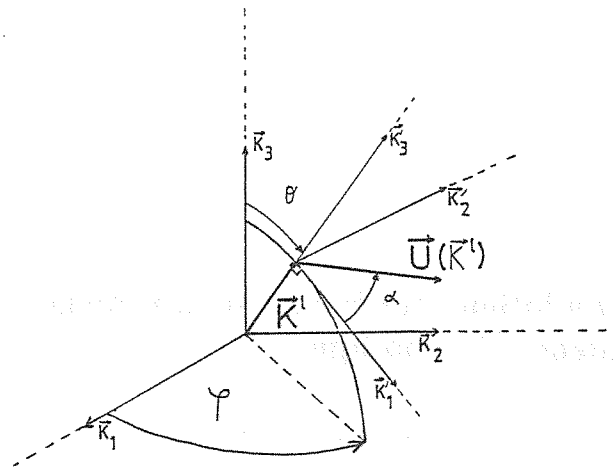


Fig. 1. — Représentation d'un mode de Fourier $\mathbf{U}(\mathbf{K}^\ell)$ dans l'espace spectral.

[Wavevector geometry of a single Fourier velocity mode.]

nous avons choisi par souci de simplicité de considérer le module U_{mag} du vecteur $\mathbf{U}(\mathbf{K}^\ell)$ comme une grandeur certaine (¹), dont la variation avec le module K^ℓ du vecteur d'onde \mathbf{K}^ℓ est imposée par la répartition spectrale $E(K)$ de l'énergie cinétique turbulente. Pour $E(K)$ nous avons retenu un modèle analytique de von Karman qui permet une description très satisfaisante des résultats expérimentaux (Hinze, [7]) : la formule utilisée est alors la suivante :

$$E(K) = \frac{55 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{9\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \bar{v}^2 \frac{\left(\frac{K}{K_0}\right)^4}{K_0 \left(1 + \frac{K^2}{K_0^2}\right)^{\frac{17}{6}}} \quad (4)$$

où Γ est la fonction gamma. K_0 est un nombre d'onde relié à l'échelle longitudinale de corrélation spatiale L_f par :

$$\frac{1}{K_0} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \sqrt{\pi}} L_f = 1,339 L_f \quad (5)$$

et où \bar{v}^2 est la valeur quadratique des fluctuations de vitesse telle que :

$$\int_0^\infty E(K) dK = \frac{3}{2} \bar{v}^2 \quad (6)$$

Le module U_{mag} de chaque mode de Fourier aléatoire vérifie la relation :

$$U_{\text{mag}}^2(K^\ell) = E(K^\ell) \Delta K^\ell \quad (7)$$

où ΔK^ℓ est l'écart entre deux nombres d'onde successifs.

Aux petits nombres d'onde K , associés aux grandes structures, le spectre $E(K)$ croît selon une loi de puissance en

K^4 . Pour les valeurs de K supérieures à K_0 on obtient une décroissance en $K^{-5/3}$, qui correspond à la zone inertielle de turbulence de Kolmogorov (Batchelor, [4]). Sous cette forme le modèle de von Karman ne permet pas de représenter la zone dissipative du spectre, associée aux structures fines de la turbulence. La prise en compte de ces structures est possible en introduisant une décroissance exponentielle sous la forme $\xi(K) = E(K) \exp(-K^2/K_m^2)$ où K_m est relié à l'échelle interne de turbulence ℓ_0 ($K_m = 5.91/\ell_0$), elle-même reliée au taux de dissipation de la turbulence (Hinze [7], Monin et Yaglom [8]). Cependant lorsque K_0 et K_m sont très séparés (existence d'une zone inertielle importante), et lorsqu'on ne s'intéresse pas aux propriétés de ces structures fines, la modélisation du spectre $E(K)$ par une relation du type (4), avec une coupure pour une valeur ek_{\max} convenablement placée, est suffisante. En pratique cette valeur ek_{\max} est choisie égale au nombre d'onde pour lequel on obtient une décroissance du spectre de 30 dB par rapport au maximum, la pertinence de ce choix étant contrôlée *a posteriori*.

Nous avons estimé la validité de notre technique de simulation d'un champ de vitesse par comparaison avec des résultats expérimentaux acquis pour une turbulence de grille (Comte-Bellot et Corrsin [9]). Dans ce cas les nombres d'onde K ont été choisis dans l'intervalle 1-1000 m^{-1} avec une répartition logarithmique qui permet d'avoir un nombre important de modes pour les faibles valeurs de K et de décrire ainsi correctement la forme du spectre. Sur la figure 2 nous avons reporté le spectre expérimental de Comte-Bellot et Corrsin ainsi que le spectre simulé avec 30 modes de Fourier, une valeur K_0 de 31, 12 m^{-1} et une vitesse turbulente $(\bar{V}^2)^{1/2}$ de 0,222 m/s, ces dernières valeurs correspondant aux données expérimentales. Le modèle spectral de von Karman (Eq. (4)) permet une description cor-

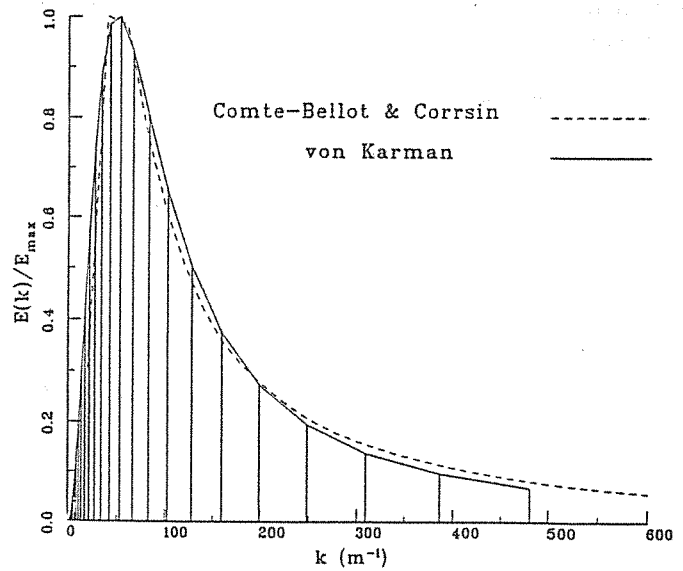


Fig. 2. — Comparaison entre le spectre d'énergie cinétique simulé avec 30 modes de Fourier pour le modèle de von Karman et le spectre des expériences de Comte-Bellot et Corrsin.

[Comparison of the experimental velocity spectrum of Comte-Bellot and Corrsin and the theoretical spectrum calculated with 30 Fourier modes.]

recte. Dans le tableau ci-dessous nous donnons les principales caractéristiques du champ simulé avec 5000 réalisations (variance \bar{V}_i^2 , coefficient de dissymétrie $\bar{V}_i^3 / (\bar{V}_i^2)^{3/2}$, coefficient d'aplatissement $\bar{V}_i^4 / (\bar{V}_i^2)^2$, pour $i = 1, 2, 3$) ainsi que leurs valeurs théoriques pour une turbulence homogène isotrope.

	Simulation (30 modes. 5000 réalisations)			valeurs théoriques
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	
$\bar{V}_i^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	$4,89 \times 10^{-2}$	$5,24 \times 10^{-2}$	$4,97 \times 10^{-2}$	$4,928 \times 10^{-2}$
$\bar{V}_i^3 / (\bar{V}_i^2)^{3/2}$	$-1,63 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-2}$	$1,66 \times 10^{-2}$	0
$\bar{V}_i^4 / (\bar{V}_i^2)^2$	3,03	2,99	2,97	3

Pour les échelles de corrélations spatiales longitudinale L_f et transversale L_g du champ simulé nous obtenons respectivement 0,0284 m et 0,0143 m. Ces valeurs correspondent aux données expérimentales $L_f = 0,024$ m et $L_g = 0,0127$ m et sont dans le rapport 2, valeur théorique dans le cas d'une turbulence homogène isotrope.

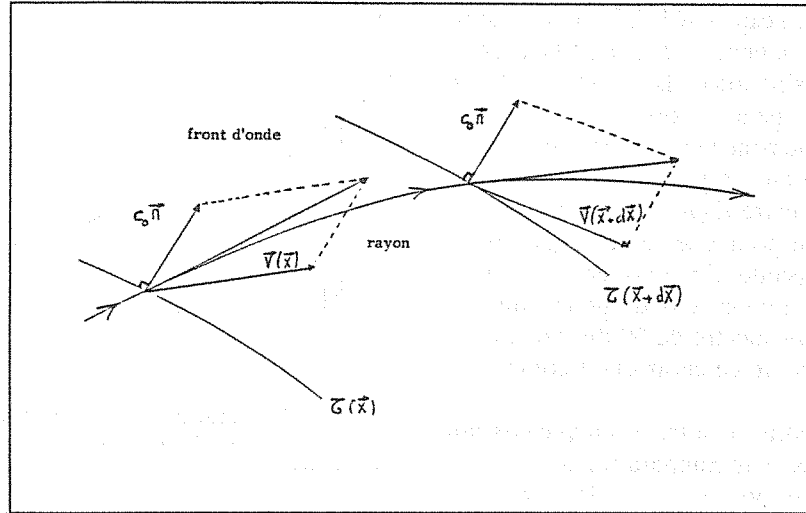
Cette simulation directe par modes de Fourier a été ensuite appliquée au cas de la turbulence qui correspond aux conditions de l'étude expérimentale de Blanc-Benon [10]

relative à la propagation d'une onde acoustique à travers un jet plan turbulent pleinement développé. Dans ce cas, le nombre d'onde turbulent K est pris dans l'intervalle 1-2000 m^{-1} . La décomposition est effectuée sur 60 modes avec une échelle intégrale L_f de 0,067 m correspondant à une valeur K_0 de 11,15 m^{-1} . La valeur efficace des fluctuations de vitesse fixée par l'expérience est comprise entre 1 m/s et 3 m/s. Pour cette configuration on dispose, entre autres, de résultats expérimentaux portant sur les fluctuations de phase après traversée d'une turbulence cinématique sur une distance d'un mètre.

3. Equations des rayons pour un milieu inhomogène en mouvement.

Dans le cadre de la théorie de l'acoustique géométrique

la propagation d'une onde à partir d'une source ponctuelle s'effectue le long de trajectoires ou rayons dépendant des propriétés locales du milieu (Candel, [11]).



Les rayons acoustiques sont obtenus en intégrant le système différentiel suivant à six équations (Pierce, [12]) :

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = c_0^2 \frac{S_i}{\Omega} + V_i \\ \frac{dS_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 S_j \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

où $\Omega = 1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$, c_0 est la célérité du son dans le milieu au repos. Les X_i sont les coordonnées du point courant sur le rayon, les V_i sont les composantes du vecteur vitesse \mathbf{V} et les S_i sont celles du vecteur lenteur $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \text{grad}(\tau(\mathbf{X}))$ perpendiculaire au front d'onde $\tau(\mathbf{X}) = t_0$. Le système d'équations (8) permet de prendre en compte la propagation d'une onde acoustique dans un milieu inhomogène indépendant du temps. Pour notre étude nous faisons donc l'hypothèse habituelle de turbulence "gelée" (Monin et Yaglom, [8]), en considérant que le temps de traversée de la turbulence par l'onde acoustique (L/c_0) est nettement inférieur au temps d'évolution de ces structures ($L_t/\sqrt{V^2}$).

Le milieu turbulent est alors caractérisé par un ensemble de tirages aléatoires des trois composantes de la vitesse \mathbf{V} dans la zone de propagation considérée.

En tenant compte de la simulation du champ $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ par sommation de modes de Fourier aléatoires, le système

d'équations (8) se transforme en :

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = c_0^2 \frac{S_i}{\Omega} + \sum_{l=1}^N U_l(\mathbf{K}^l) \cos(\mathbf{K}^l \cdot \mathbf{X} + \psi^l) \\ \frac{dS_i}{dt} = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^3 S_j K_j^l U_l(\mathbf{K}^l) \sin(\mathbf{K}^l \cdot \mathbf{X} + \psi^l) \end{cases} \quad (9)$$

Le système de six équations à six inconnues ($X_i, S_i, i = 1, 2, 3$) est résolu par une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, méthode classique d'intégration de systèmes d'équations différentielles à conditions initiales ([13]). Notons qu'avec l'emploi des modes de Fourier les gradients spatiaux de vitesse ne sont ni approchés ni interpolés numériquement mais déduits analytiquement des N modes utilisés, ce qui n'induit donc aucune erreur numérique. Les équations des rayons acoustiques (8) font apparaître l'influence des gradients de vitesse du milieu et il faut estimer si la coupure du spectre $E(K)$ qui convient à la description de la turbulence est adaptée aussi au cas de l'acoustique. L'analyse théorique effectuée par Tatarski [3] montre que pour les fluctuations de phase les grandes structures associées aux petits nombres d'onde ont un effet prépondérant (il n'en serait pas de même pour les fluctuations d'intensité), et que la zone dissipative du spectre $E(K)$ a un effet négligeable. D'un point de vue numérique la stabilité de notre calcul vis-à-vis de cette coupure aux grands nombres d'onde a été contrôlée en multipliant et en divisant par deux la valeur ek_{\max} retenue pour simuler la turbulence cinématique, sans qu'aucune modification significative apparaisse.

Sur un ensemble de réalisations, la distorsion des ondes acoustiques par le champ de vitesse aléatoire est alors caractérisée par la statistique des temps d'arrivée de l'onde acoustique à une distance donnée de la source.

4. Application de la méthode des rayons au cas d'un milieu aléatoire.

La propagation d'une onde monochromatique $P(\mathbf{X}) = A(\mathbf{X}) \exp(i\phi(\mathbf{X}))$ dans un milieu aléatoire est en général décrite par l'équation d'onde scalaire à indice de réfraction aléatoire $n(\mathbf{X})$ (Neubert et Lumley, [14]) :

$$\Delta P + k_0^2 n^2(\mathbf{X}) P = 0 \quad (10)$$

Parmi les différentes méthodes de résolution de cette équation stochastique de Helmholtz, l'approximation géométrique (Chernov, [1]) et la méthode des perturbations "douces" (méthode de Rytov (Tatarski, [3])) sont particulièrement adaptées à l'étude des fluctuations de phase de l'onde transmise. Dans le cadre de la théorie des rayons la phase $\phi(\mathbf{X})$ vérifie l'équation iconale (Tolstoy, [15]) :

$$\|\nabla\phi\|^2 = k_0^2 n^2 \quad (11)$$

En intégrant le long des rayons, la solution de l'équation (11) se met sous la forme de l'intégrale curviligne :

$$\phi(\mathbf{X}) - \phi(\mathbf{X}_0) = k_0 \int_{\mathbf{X}_0}^{\mathbf{X}} n(s) ds \quad (12)$$

Si l'on considère que les rayons sont faiblement écartés de leur direction initiale, le trajet entre la source et le récepteur peut être assimilé à une ligne droite et l'expression (12) se réduit donc à une intégration suivant la direction de propagation entre l'abscisse d'origine x_{10} , et l'abscisse du récepteur x_1

$$\phi(\mathbf{X}) - \phi(\mathbf{X}_0) = k_0 \int_{x_{10}}^{x_1} n(x'_1) dx'_1 \quad (13)$$

Chernov montre alors que la variance des fluctuations de phase $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ est reliée aux fluctuations μ de l'indice $n = 1 + \mu$ par :

$$\langle \Delta\phi^2 \rangle = 2 \langle \mu^2 \rangle D k_0^2 \mathcal{L} \quad (14)$$

où D est la distance de propagation dans le milieu aléatoire supposé homogène et \mathcal{L} l'échelle de corrélation spatiale des fluctuations d'indice définie par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\langle \mu^2 \rangle} \int_0^\infty \langle \mu(x_1) \mu(x_1 + dx_1) \rangle dx_1 \quad (15)$$

A partir de la formule (14) on déduit la variance des fluctuations de temps de parcours $\langle t'^2 \rangle$ le long des rayons soit :

$$\langle t'^2 \rangle = 2 \frac{\langle \mu^2 \rangle}{c_0^2} D \mathcal{L} \quad (16)$$

Pour une turbulence cinématique, en supposant que la fluctuation de vitesse V_1 dans la direction de propagation de l'onde x_1 fournit la contribution prépondérante à l'interaction acoustique turbulente, Tatarski [3] montre que μ est donné par la relation $\mu = -v_1/c_0$. L'équation (16) s'écrit alors :

$$\langle t'^2 \rangle = 2 \frac{\langle v_1^2 \rangle}{c_0^4} D \mathcal{L} \quad (17)$$

où \mathcal{L} n'est autre que l'échelle intégrale des fluctuations de vitesse L_f définie au paragraphe 2.

5. Résultats des simulations numériques.

5.1 PROPAGATION AXIALE. — En tenant compte uniquement de la composante du champ de vitesse dans la direction de propagation de l'onde acoustique le système (8) se réduit à deux équations à deux inconnues x_1 et S_1 :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = c_0^2 \frac{S_1}{\Omega} + V_1 \\ \frac{dS_1}{dt} = -S_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \end{cases} \quad (18)$$

avec $\Omega = 1 - V_1 S_1$. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre de l'hypothèse utilisée pour le calcul analytique de Chernov, rappelé au paragraphe 4. Dans ce cas test, nous avons étudié l'influence du pas d'intégration en temps δt utilisé dans la méthode de Runge-Kutta. Ce pas est défini à partir du nombre d'onde turbulent maximum ek_{\max} intervenant dans la discrétisation du spectre de l'énergie cinétique $E(K)$ soit :

$$\delta t = \frac{\beta}{c_0 ek_{\max}} \quad (19)$$

où β est une constante de proportionnalité. Dans le tableau ci-dessous nous comparons les valeurs du temps moyen de parcours $\langle t \rangle$ et de l'écart type $\sqrt{\langle t'^2 \rangle}$ des fluctuations $t' = t - \langle t \rangle$, obtenues à différentes distances de propagation x_1 pour 200 réalisations du champ de vitesse et deux valeurs de β . Rappelons que les simulations sont réalisées avec 60 modes de Fourier répartis dans l'intervalle $1-2000 \text{ m}^{-1}$, une échelle intégrale L_f de 0,067 m et une valeur efficace des fluctuations de vitesse de 2m/s. Nous avons finalement retenu $\beta = 1$, soit $\delta t = 1,47 \mu\text{s}$, qui permet un compromis satisfaisant entre la précision et le temps de calcul (100 secondes pour une réalisation sur un micro-ordinateur 80386 (25 MHz).

Sur la figure 3 nous avons reporté la variance des fluctuations de temps de parcours $\langle t'^2 \rangle$ obtenue par simulation avec différents nombres de réalisations (200, 500, 1000) et pour l'expression de Chernov (Eq. (17)). La distance de propagation dans la turbulence x_1 est normalisée par l'échelle intégrale des fluctuations de vitesse L_f . Afin de donner une estimation de l'écart par rapport à la solution de Chernov nous avons normalisé la variance $\langle t'^2 \rangle$ par la valeur théorique de Chernov calculée pour la distance maximale de propagation dans la turbulence ($x_1/L_f = 26,71$). On observe une convergence des résultats vers la solution théo-

$\frac{x_1}{L_f}$	$\langle t \rangle$ (en s)		$\sqrt{\langle t'^2 \rangle}$ (en s)		Ecart sur $\sqrt{\langle t'^2 \rangle}$
	$\beta = 1$ $\delta t = 1,47 \mu\text{s}$	$\beta = 0,5$ $\delta t = 0,735 \mu\text{s}$	$\beta = 1$ $\delta t = 1,47 \mu\text{s}$	$\beta = 0,5$ $\delta t = 0,735 \mu\text{s}$	
5,536	1,05512 10^{-3}	1,05513 10^{-3}	3,82435 10^{-6}	3,77921 10^{-6}	4,51 10^{-8}
10,712	2,11050 10^{-3}	2,11059 10^{-3}	5,52452 10^{-6}	5,52094 10^{-6}	3,58 10^{-9}
21,424	4,22222 10^{-3}	4,22221 10^{-3}	7,71683 10^{-6}	7,69585 10^{-6}	2,09 10^{-8}

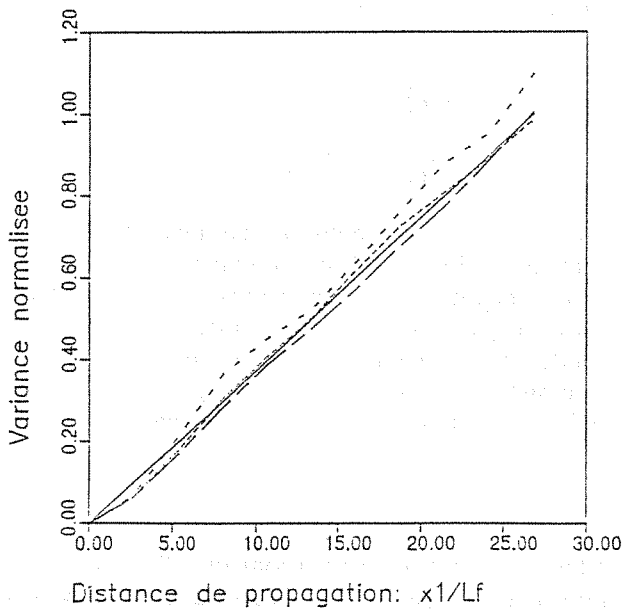


Fig. 3. — Evolution de la variance normalisée des fluctuations de temps en fonction de la distance de propagation : solution de Chernov (—) et simulations numériques unidimensionnelles pour différents nombres de réalisations du champ de vitesse (---) 200 ; (- - -) 500 ; (- - -) 1000) avec : $N = 60$, $\sqrt{V_1^2} = 2 \text{ m/s}$, $L_f = 0,067 \text{ m}$, $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$.

[Arrival-time variances of simulated acoustics rays. Chernov's solution (—) and axial simulations for various numbers of realizations of the turbulent field (---) 200 ; (- - -) 500 ; (- - -) 1000) with : $N = 60$, $\sqrt{V_1^2} = 2 \text{ m/s}$, $L_f = 0.067 \text{ m}$, $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$.]

rique de Chernov lorsque le nombre de réalisations croît, ce qui montre la validité de la méthode de simulation pour ce cas test de propagation acoustique en milieu turbulent.

5.2 PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE. — Nous envisageons maintenant le cas réel où les rayons sont des courbes tridimensionnelles et nous calculons le temps de parcours le

long de ces rayons entre un émetteur et un récepteur situé à une distance D de celui-ci. Sur la figure 4 nous avons reporté les valeurs simulées de la variance de fluctuations du temps de parcours $\langle t'^2 \rangle$, normalisée comme au paragraphe 4, en fonction du rapport D/L_f . Les résultats ont été obtenus en intégrant le système différentiel des six équations (9) qui prend en compte les trois composantes du champ de vitesse turbulent. Le pas d'intégration en temps est de $1,47 \mu\text{s}$, la valeur efficace de la vitesse est de $2,4 \text{ m/s}$. Le nombre de modes de Fourier aléatoires est de 60, répartis de façon logarithmique entre 1 m^{-1} et 2000 m^{-1} . L'échelle intégrale L_f est égale à $0,067 \text{ m}$.

On observe sur la figure 4 que les résultats des simulations numériques s'écartent de façon significative des prédictions théoriques de Chernov. La stabilité de nos calculs vis-à-vis des différents paramètres numériques introduits par notre simulation (nombre de réalisations, pas d'intégration du système différentiel, nombre de modes de Fourier aléatoires, coupure ek_{max} du spectre $E(K)$), nous incite à penser que notre méthode fournit une bonne représentation de la réalité et que le calcul de Chernov, dont l'estimation des fluctuations de phase est habituellement considérée comme valide même pour des taux de turbulence élevés, n'est en fait pas suffisamment précis. L'intégration le long des rayons non perturbés ne rend pas compte de la réalité physique et du caractère tridimensionnel des fluctuations de trajectoires. La solution proposée par Chernov [1] correspond en fait à une linéarisation des équations de l'acoustique géométrique en prenant comme petit paramètre du développement les fluctuations d'indice μ (Tatarski, [3]). Notre simulation montre que même pour des valeurs de μ petites ($\mu \simeq 7 \times 10^{-3}$) les termes quadratiques du développement peuvent jouer un rôle non négligeable par leur effet cumulé lors de la propagation.

D'un point de vue expérimental, peu de résultats d'expériences de laboratoire sont disponibles surtout pour les distances de propagation importantes ($D \gg L_f$). Sur la figure 5 nous avons reporté les résultats obtenus par Blanc-Benon [10]. Certes, ils ne sont pas en nombre suffisant pour conclure au bien fondé de notre analyse mais ils montrent clai-

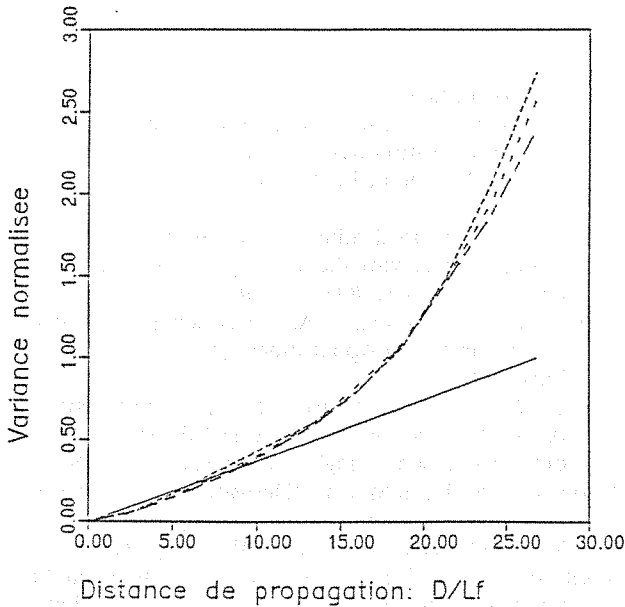


Fig. 4. — Evolution de la variance normalisée des fluctuations de temps en fonction de la distance de propagation : solution de Chernov (—) et simulations numériques tridimensionnelles pour différents nombres de réalisations du champ de vitesse (---) 200 ; (---) 500 ; (---) 1000) avec : $N = 60$, $\sqrt{V^2} = 2,4$ m/s, $L_f = 0,067$ m, $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$.

[Arrival-time variances of simulated acoustics rays. Chernov's solution (—) and tridimensional simulations for various numbers of realizations of the turbulent field (---) 200 ; (---) 500 ; (---) 1000) with : $N = 60$, $\sqrt{V^2} = 2.4$ m/s, $L_f = 0.067$ m $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$.]

rement un écart significatif par rapport aux prédictions de Chernov, et allant dans le même sens que les prédictions numériques. L'écart mis en évidence est d'autant plus important que les fluctuations turbulentes augmentent et qu'ainsi les rayons acoustiques s'écartent davantage d'une propagation en ligne droite.

6. Conclusion.

Dans cette étude nous avons décrit une méthode de simulation d'un champ de turbulence cinématique à partir d'une superposition d'un ensemble de modes de Fourier aléatoires convenablement répartis entre les grandes structures et les structures fines. Cette méthode conduit à une bonne approximation des paramètres statistiques de la turbulence les plus importants (moments du deuxième ordre, valeur efficace des fluctuations de vitesse, échelles de corrélations spatiales).

En se plaçant dans les conditions de l'approximation géométrique, nous avons simulé la propagation d'une onde acoustique à travers un champ aléatoire de vitesse homogène et isotrope, engendré par superposition de modes de Fourier. La distorsion des rayons acoustiques par la turbulence est alors caractérisée par la variance des fluctuations des temps d'arrivée à une distance donnée de la source.

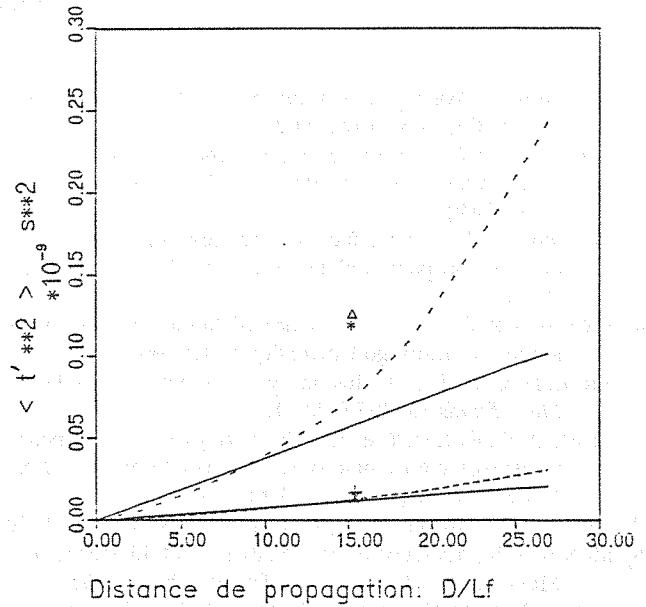


Fig. 5. — Evolution de la variance des fluctuations de temps en fonction de la distance de propagation : solution de Chernov (—) et simulations numériques tridimensionnelles pour 1000 réalisations du champ de vitesse (---) 1 ms, (---) 2,4 m/s) avec : $N = 60$, $L_f = 0,067$ m, $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$. Mesures pour différentes fréquences : (Δ) $f = 31,25$ kHz. (*) $f = 41,66$ kHz. (+) $f = 50$ kHz, (X) $f = 83,33$ kHz.

[Arrival-time variances of simulated acoustics rays. Chernov's solution (—) and tridimensional simulations over 1000 realizations of the turbulent field (---) 1 ms, (---) 2.4 m/s) with : $N = 60$, $L_f = 0.067$ m, $1 \text{ m}^{-1} < K < 2000 \text{ m}^{-1}$. Experimental data : (Δ) $f = 31.25$ kHz. (*) $f = 41.66$ kHz. (+) $f = 50$ kHz, (X) $f = 83.33$ kHz.

Dans le cas où seule la composante du champ de vitesse dans la direction de propagation est prise en compte, les simulations numériques sont en excellent accord avec la théorie simplifiée de Chernov. Lorsque les effets des trois composantes du champ de turbulence sont pris en compte on observe que les résultats s'écartent de façon importante des estimations de Chernov dont l'analyse semble inappropriée dès que les fluctuations de vitesse deviennent importantes.

Diverses extensions de cette méthode de simulation numérique sont envisageables, et pour certaines en cours d'étude. Il est possible de calculer différentes caractéristiques importantes du champ acoustique, et, en particulier, les fluctuations d'intensité en un point. L'approche du problème de propagation en milieu turbulent peut également être développée dans le cadre d'une approximation parabolique de l'équation des ondes. Enfin, la simulation d'une turbulence plus complexe (anisotropie, inhomogénéité) superposée à des gradients moyens (température, vitesse) semble possible, ce qui permettra de traiter des cas de propagation plus proches de la réalité pour lesquels peu de résultats analytiques existent.

Bibliographie

- [1] CHERNOV L., Wave propagation in a random medium (Mc Graw-Hill, New-York) 1960.
- [2] FRISCH U., "Wave propagation in random media", *Prob. meth. appl. math.* 1 (1968) 75-198 (Academic Press, New-York).
- [3] TATARSKI V. I., "The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation" (I.P.S.T. Keter Press Jerusalem) 1971.
- [4] BATCHELOR G. K., "The theory of homogeneous turbulence" (Cambridge University Press) 1960.
- [5] KRAICHNAN R. H., "Diffusion by a random velocity field", *Phys. Fluids* 13 (1970) 22-31.
- [6] CORRSIN S., KARWEIT M. J., "The mixing of scalar stripes by an isotropic ensemble of single velocity modes", *Lect. Notes Phys.* 12 (Springer, Berlin) (1972) 327.
- [7] HINZE J. O., "Turbulence" (Mc Graw Hill, New-York) 1959.
- [8] MONIN A. S., YAGLOM A. M., "Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence" (The Mit Press) 1975.
- [9] COMTE-BELLOT G., CORRSIN S., "Simple Eulerian time correlation of full- and narrow- band velocity signals in grid-generated 'isotropic' turbulence", *J. Fluid Mech.* 48 (1971) 273-337.
- [10] BLANC-BENON Ph., "Effet d'une turbulence cinématique sur la propagation des ondes acoustiques", Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, n° 81-02 (1981).
- [11] CANDEL S., "Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics", *J. Fluid Mech.* 83 (1977) 465-493.
- [12] PIERCE A. D., "Acoustics : An introduction to its Physical Principles and Applications" (Mc Graw-Hill, New-York) 1981.
- [13] PRESS W. H., FLANNERY B. P., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. J. "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing" (Cambridge Press) 1986.
- [14] NEUBERT J. A., LUMLEY J. L. "Derivation of the stochastic Helmholtz equation for sound propagation in a turbulent fluid" *J. Acoust. Soc. Am.* 48 (1970) 1212.
- [15] TOLSTOY I., CLAY C. S. "Ocean acoustics : theory and experiment in underwater sound" (American Institute of Physics) 1987.