N° d'ordre NNT : **2017LYSEC07** **ANNÉE 2017**

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de l'École Centrale de Lyon

École Doctorale N° 162
Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité de Doctorat : Acoustique

Soutenue publiquement le 27/01/2017, par :

Simon BOULEY

Modélisations analytiques du bruit tonal d'interaction rotor / stator par la technique de raccordement modal

Jury

Pr.	ANTONI	Jérôme	LVA	Co-directeur de thèse
Pr.	AURÉGAN	Yves	LAUM	Rapporteur
Dr.	INGENITO	Johanna	Liebherr Aerospace	Examinatrice
Dr.	LAFITTE	Anthony	Safran Aircraft Engines	Examinateur
Pr.	MOREAU	Stéphane	Université de Sherbrooke	Président du jury
Ing.	POLACSEK	Cyril	ONERA	Examinateur
Dr.	POSSON	Hélène	Airbus Operations SAS	Invitée
Pr.	ROGER	Michel	LMFA	Directeur de thèse
Pr.	SCHRAM	Christophe	VKI	Rapporteur

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509
École Centrale de Lyon

草の穂の一匹の蟻にも大空

Sur la pointe d'une herbe
devant l'infini du ciel
une fourmi

Hōsai Ozaki
1885 - 1926

Therefore psychologically we must keep all the theories in our heads, and every theoretical physicist who is any good knows six or seven different theoretical representations for exactly the same physics.

The Character of Physical Law (1965)
chapter 7, *Seeking New Laws*

Richard P. Feynman
1918 – 1988

En ce temps-là le monde regorgeait de tout ; les gens se multipliaient, le monde mugissait comme un taureau sauvage et le grand dieu fut réveillé par la clameur. Eulil entendit la clameur et il dit aux dieux assemblés :
« Le vacarme de l'humanité est intolérable, et la confusion est telle qu'on ne peut plus dormir. »
Ainsi les dieux furent-ils d'accord pour exterminer l'humanité.

L'Épopée de Gilgameš / Le Poème du Supersage

Édité par Nancy Katharine Sandars et Hubert Comte
les Éditeurs français réunis, 1975

RÉSUMÉ

Le bruit tonal d'interaction rotor-stator, généré par l'impact des sillages issus des pales d'un rotor sur la grille d'aubes d'un stator redresseur, contribue de manière déterminante au bruit d'origine aérodynamique des turbomachines axiales carénées, qui équipent une large part des systèmes de propulsion aéronautique et de conditionnement d'air. La prédiction du bruit par l'utilisation de simulations numériques demeure onéreuse, notamment dans les premières phases de conception lorsque de nombreuses configurations doivent être testées. Dans cette optique, l'approche analytique choisie dans cette thèse apporte une alternative tout à fait appropriée. Les modèles analytiques basés sur une fonction de réponse aéroacoustique de profil isolé ne permettent pas de reproduire l'effet de grille engendré par le nombre important d'aubes de stator. Inversement, de fortes approximations sont nécessaires pour décliner les fonctions de réponse de grilles d'aubes existantes dans des configurations tridimensionnelles. Le formalisme proposé, basé sur la méthode de raccordement modal, permet d'introduire simplement l'effet de grille dans une géométrie annulaire d'étage rotor-stator. Un modèle de réponse de grille rectilinéaire bidimensionnel est tout d'abord présenté pour la transmission d'ondes acoustiques à travers le stator ainsi que pour la génération de bruit par l'impact de rafales hydrodynamiques. Dans ce cadre, une analyse linéaire et non visqueuse est considérée, pour laquelle les modes acoustique et tourbillonnaire d'un gaz sont couplés par le biais des frontières rigides. Les perturbations de vitesses liées aux sillages sont modélisées comme des rafales convectées. Leur impact sur la grille de stator génère des ondes acoustiques se propageant en amont, en aval ainsi que dans les espaces inter-aubes du stator, vu comme un réseau périodique de guides d'ondes. Les sections de bords d'attaque et de fuite des aubes sont considérées comme des interfaces sur lesquelles la continuité des fluctuations de pression, de vitesse axiale et de vorticité est vérifiée. Un système d'équations est ainsi obtenu, puis résolu par des projections sur les bases modales du conduit et des inversions matricielles. Le champ acoustique rayonné est ainsi déterminé uniformément dans tout le domaine. Les résultats issus de ces modélisations sont comparés à ceux des fonctions de réponse de grilles d'aubes rectilinéaires issues de la littérature, montrant un très bon accord avec les modèles basés sur la technique de Wiener-Hopf. Le formalisme est par la suite étendu aux grilles annulaires par l'ajout de fonctions de Bessel comme fonctions de forme radiale exprimant les effets tridimensionnels. Finalement, une procédure est présentée pour rendre compte de l'hétérogénéité des aubes de stator, caractéristique des nouvelles architectures de turbomachines. Cette méthodologie est basée sur l'emploi conjoint du principe du dipôle de bord d'attaque et de la fonction de réponse aéracoustique de la grille de stator à l'aide de la technique de raccordement modal. Le principe de dipôle de bord identifie le chargement instationnaire des aubes induit par l'impact de rafales hydrodynamiques, calculé par le formalisme d'Amiet, avec la trace du champ de pression acoustique produit par un dipôle placé au voisinage du bord de l'aube. Les prédictions issues de ce modèle, appliqué dans un cadre bidimensionnel, sont ensuite comparées à des mesures obtenues pendant la campagne d'essais du projet SEMAFOR.

Mots-clés : Aéroacoustique, turbomachine axiale, bruit d'interaction rotor-stator, bruit tonal, effet de grille, technique de raccordement modal.

ABSTRACT

The rotor-stator wake-interaction tonal noise, generated by the impingement of rotor wakes on outlet guide vanes, plays a crucial role in the aerodynamic noise of axial-flow ducted fan stages. The latter are widely used in most aeronautic propulsion and air-conditioning systems. The noise prediction by means of numerical simulations remains expensive, especially at the preliminary design stage when numerous configurations must be tested. In this respect, the analytical approach chosen in this thesis provides a well suited alternative. The analytical modeling based on an isolated-airfoil response function can not reproduce the cascade effect introduced by the large number of stator vanes. Conversely, drastic approximations are required to extend the current cascade response functions to three-dimensional configurations. The proposed modeling based on the mode-matching technique simply introduces the cascade effect in an annular rotor-stator stage. A rectilinear cascade response function is firstly presented to account for the acoustic transmission through the stator along with the wake-interaction noise. In this context, a linearized and non-viscous analysis is carried out, in which the acoustic and vortical modes of a gas are coupled at rigid physical boundaries. The velocity perturbations issued from the wakes are written as a sum of convected gusts. Their impingement on the cascade of vanes generates acoustic waves propagating upstream, downstream of the cascade, as well as inside the inter-vane channels of the stator, seen as a periodic array of bifurcated waveguides. The duct cross sections at the leading-edge and the trailing-edge of the vanes are seen as interfaces on which the continuity of the fluctuating pressure, axial velocity and vorticity is fulfilled. A system of linear equations is obtained, then solved by means of modal projections and matrix inversions. The acoustic field is then uniformly calculated in the whole domain. Comparisons with rectilinear cascade response functions show a very good agreement with predictions based on the Wiener-Hopf technique. The configuration of an annular cascade is addressed by introducing the Bessel functions as radial shape functions, expressing three-dimensional effects. Finally, a procedure is presented to account for the heterogeneity of the stator vanes, typical of modern fan architectures. This approach is based on the combinaison of the leading-edge dipole principle and the cascade response function derived from the mode-matching technique. The edge-dipole principle identifies Amiet's solution for the unsteady loading and the radiation of a dipole approached very close to the edge of a half plane. The predictions provided by this modeling, applied in a two-dimensional configuration, are finaly compared to measurements performed in the test campaign of the SEMAFOR project.

Keywords : Aeroacoustics, axial-flow fan stage, rotor-stator interaction noise, tonal noise, cascade effect, mode-matching technique.

REMERCIEMENTS

Ce travail de doctorat a débuté en octobre 2013 et s'est déroulé au sein du groupe Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Il a été réalisé grâce au soutien financier du Labex CeLyA (Centre Lyonnais d'Acoustique) de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ANR-11-IDEX-0007). Qu'ils en soient ici remerciés.

Je souhaite en premier lieu remercier Michel Roger, professeur à l'ECL, d'avoir encadré cette thèse. Je suis extrêmement reconnaissant de la confiance et du soutien qu'il m'a accordé lors de ces trois années. Sa pédagogie et l'originalité de ses idées ont considérablement enrichi mes travaux de thèse ainsi que ma compréhension de l'aéroacoustique. Je remercie également Jérôme Antoni, professeur à l'INSA Lyon et co-directeur de cette thèse, qui malgré les nouvelles orientations de mon travail a toujours soutenu avec intérêt mes avancées.

Je tiens à remercier Yves Aurégan, professeur à l'Université du Maine, et Christophe Schram, professeur à l'Institut von Karman de dynamique des fluides pour leurs évaluations précises et attentives de ce mémoire. Mes remerciements vont également à Stéphane Moreau, professeur à l'Université de Sherbrooke, d'avoir présidé le jury et à Johanna Ingenito, ingénieure à Liebherr Aerospace, à Anthony Lafitte, ingénieur à Safran Aircraft Engines, ainsi qu'à Cyril Polacsek, ingénieur à l'ONERA, pour leur intérêt à l'égard de ce travail et pour l'avoir jugé avec objectivité. Je tiens particulièrement à remercier Hélène Posson, ingénieure à Airbus, pour son aide continue et son expertise lors de l'élaboration de ces modèles analytiques.

J'ai eu le privilège de travailler en équipe sur la majeure partie de cette thèse et je suis extrêmement reconnaissant de l'aide apportée par Benjamin François, post-doctorant au LMFA, sans qui ce mémoire aurait été de moitié plus court. La possibilité de discuter et de tester de nouvelles idées en permanence a été un formidable appui pour l'avancée des travaux. De même, mener en commun l'élaboration d'un modèle analytique original tout en approfondissant chacun certains aspects aura été une grande source de motivation.

Mes remerciements vont naturellement à Antonio Pereira, post-doctorant au LVA puis au LMFA, et à Arthur Finez, ingénieur à MicrodB, avec qui j'ai pu mener plusieurs campagnes expérimentales au sein du projet SEMAFOR. J'ai pu bénéficier de leurs connaissances et de leur compétences en techniques de localisation acoustique et en méthodes inverses. Ma compréhension de la décomposition modale en conduit doit beaucoup aux explications précises et pédagogues d'Antonio.

Je souhaite remercier l'ensemble des membres du Centre Acoustique pour leur accueil et les très nombreuses discussions, scientifiques ou non, que j'ai pu avoir chacun d'entre eux. Je tiens particulièrement à remercier Véronique Lenoir et Carine Zambardi, chargées d'aide au pilotage du Labex CeLyA, pour leur aide essentielle à la préparation de mes déplacements scientifiques et à l'organisation

de la Journée des Doctorants CeLyA en 2015, dont j'avais la charge. Toute ma gratitude va à Marie-Gabrielle Perriaux, secrétaire du Centre Acoustique, pour son soutien tout au long de cette thèse, particulièrement crucial lors de ces derniers mois. Je souhaite remercier Pascal Souchotte, ingénieur C-Innov, pour son implication lors des campagnes d'essai du projet SEMAFOR, tout comme Pierre Roland, ingénieur C-Innov, pour son soutien informatique et pour m'avoir enseigné l'art subtil des mots fléchés de Force 4. J'associe à ces remerciements Dominique Berthet et Michel Teissieux pour leur gentillesse et l'attention qu'ils portent à la vie des doctorants du J12. Je souhaiterais également remercier Christophe Picard, chef de projet MicrodB et Thibaut Le Magueresse, ingénieur MicrodB, pour m'avoir ouvert les portes de l'acoustique lyonnaise.

Je remercie très chaleureusement l'ensemble des doctorants, post-doctorants et stagiaires que j'ai côtoyé au cours des trois dernières années. Merci tout d'abord à mes collègues du bureau d'aéroacoustique *analytique*, Nassim, Miguel, Gyuzel et Justine pour leur soutien, les discussions continues sur la nature véritable du bruit d'objets qui tournent et pour l'entraide cruciale au moment du rendu des articles de conférence. Je remercie naturellement dans l'ordre désordonné Michael, Romain, Ababacar, Roberto, Cyril, Vianney, Marion, Bertrand, Anouk, Aurélien, Christophe, Mathieu, Adrien, Maria, Sophie, Virginie, Johan, Michael, Pierre, Paul, Pierre, Thomas, Étienne, Annabelle, Renata, Han, Sarah, Julien auxquels j'associe Didier, Édouard et Vincent. Mes compétences en pâtisserie et en squash n'auront jamais été aussi grandes que ces trois dernières années.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et mes amis pour m'avoir accompagné tout au long de mes études dans mes escapades jurassiennes, bisontines, mancelles, montréalaises, grenobloises, lilloises et enfin lyonnaises. Le parcours a été long, parfois compliqué mais je n'ai jamais reçu que leur confiance et leur soutien. Je pense à mes parents, mes grands-parents et mes beaux-parents, mon grand frère et ma belle-sœur, mon neveu né une semaine après le début de ma thèse et ma nièce née une semaine avant sa conclusion.

Merci à Constance de faire de moi un homme heureux.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **v**

Remerciements **ix**

Nomenclature **xxviii**

Introduction **1**

1 Principes de base et revue bibliographique **5**
1.1 Turbomachines . . . 5
1.1.1 Turboréacteur à double flux . . . 5
1.1.2 Ventilateur en conduit . . . 7
1.1.3 Ventilation de la cabine d'un avion . . . 9
1.2 Sources de bruit d'une turbomachine axiale . . . 10
1.2.1 Sources de bruit tonal . . . 11
1.2.2 Sources de bruit à large bande . . . 13
1.3 Approches numériques . . . 14
1.4 Analyse de Chu et Kovásznay . . . 15
1.4.1 Équations générales de la dynamique des gaz . . . 15
1.4.2 Principe de l'analyse . . . 17
1.5 Considérations sur la géométrie d'un étage rotor/stator . . . 21
1.5.1 Théorie linéarisée du profil mince . . . 21
1.5.2 Effet de grille . . . 22
1.5.3 Angle de calage . . . 24
1.5.4 Approche par bandes de rayon . . . 25
1.5.5 Décomposition modale de Tyler et Sofrin . . . 27
1.6 Modélisations analytiques d'une grille d'aubes de stator . . . 28
1.7 Technique de raccordement modal . . . 31
1.7.1 Formulation générale . . . 31
1.7.2 Conditions de saut à une interface . . . 33
1.7.3 Principe de trace . . . 35

2 Approche bidimensionnelle - Transmission acoustique **39**
2.1 Diffraction d'une onde acoustique sur un réseau de canaux semi-infinis . . . 39
2.1.1 Définition des potentiels acoustiques . . . 40
2.1.2 Équations de raccordement . . . 45
2.1.3 Techniques de résolution . . . 46
2.1.4 Validation paramétrique . . . 49

2.2 Rayonnement acoustique depuis un réseau de canaux semi-infinis sous excitation périodique . . . 55
2.2.1 Expression des potentiels acoustiques . . . 56
2.2.2 Équations de raccordement . . . 57
2.2.3 Techniques de résolution . . . 57
2.2.4 Validation paramétrique . . . 59
2.3 Implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski instationnaire . . . 64
2.3.1 Équations additionnelles . . . 65
2.3.2 Technique de résolution . . . 67
2.3.3 Bilan de puissance . . . 68
2.4 Raccordement modal pour une grille d'aubes de corde finie . . . 68
2.4.1 Formulation des champs modaux . . . 69
2.4.2 Équations de raccordement . . . 70
2.4.3 Procédure itérative de raccordement multiple . . . 70
2.4.4 Initialisation : Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque . . . 71
2.4.5 Raccordement modal sur l'interface de bord de fuite . . . 71
2.4.6 Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque . . . 72
2.5 Validation du modèle . . . 72
2.5.1 Comparaison avec la technique de Wiener-Hopf . . . 72
2.6 Études paramétriques . . . 75
2.6.1 Convergence itérative . . . 75
2.6.2 Condition de Kutta-Joukowski instationnaire . . . 76
2.6.3 Effet de la fréquence sur le champ acoustique . . . 78
2.6.4 Effet du nombre de Mach sur le champ acoustique . . . 81
2.6.5 Effet de la solidité sur le champ acoustique . . . 82
2.6.6 Effet de l'angle de propagation . . . 85
2.7 Raccordement modal pour une grille d'aubes avec un angle de calage . . . 88
2.7.1 Cas sans écoulement moyen - interface de bord d'attaque . . . 88
2.7.2 Cas sans écoulement moyen - interface de bord de fuite . . . 93
2.7.3 Cas sans écoulement - configuration avec deux interfaces . . . 96
2.7.4 Diffraction acoustique en présence d'un écoulement moyen uniforme . . . 96
2.7.5 Résultats . . . 97
2.8 Conclusion . . . 100

3 Approche bidimensionnelle - Génération acoustique 101
3.1 Modélisation des sillages . . . 102
3.1.1 Sillage d'une pale de rotor . . . 102
3.1.2 Champ de vitesse tourbillonnaire généré par un rotor . . . 104
3.1.3 Champ de vitesse tourbillonnaire dans les canaux inter-aubes . . . 106
3.1.4 Champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator . . . 108
3.2 Expressions des champs potentiels acoustiques générés . . . 108
3.3 Équations de raccordement . . . 109
3.3.1 Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque . . . 109
3.3.2 Raccordement modal sur l'interface de bord de fuite . . . 110
3.4 Validation du modèle . . . 110
3.4.1 Définition du cas-test . . . 110
3.4.2 Résultats . . . 111
3.5 Bruit d'interaction rotor/stator . . . 115
3.5.1 Première fréquence de passage des pales . . . 116
3.5.2 Deuxième fréquence de passage des pales . . . 118
3.5.3 Troisième fréquence de passage des pales . . . 119
3.6 Conclusion . . . 120

4 Approche tridimensionnelle - Transmission acoustique **123**
4.1 Motivations . . . 123
4.2 Approche par bandes de rayon . . . 123
4.3 Propagation guidée dans un espace annulaire . . . 126
4.3.1 Solutions à l'équation de Helmholtz convectée . . . 127
4.3.2 Conditions de coupure modale . . . 132
4.3.3 Relation de dispersion . . . 135
4.3.4 Interprétation géométrique de la propagation guidée . . . 136
4.4 Expression des potentiels acoustiques . . . 138
4.5 Équations de raccordement . . . 139
4.5.1 Raccordement modal à l'interface de bord d'attaque . . . 140
4.5.2 Raccordement modal à l'interface de bord de fuite . . . 142
4.6 Résultats . . . 143
4.6.1 Validation paramétrique . . . 143
4.6.2 Cas test . . . 147
4.7 Implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski instationnaire tridimensionnelle . . . 151
4.7.1 Saut de pression nul au bord de fuite . . . 151
4.7.2 Rafales hydrodynamiques en aval du stator . . . 153
4.7.3 Équation de raccordement au bord de fuite . . . 157
4.7.4 Résultats . . . 159
4.8 Conclusion . . . 165

5 Approche tridimensionnelle - Génération acoustique **167**
5.1 Modélisation des sillages . . . 167
5.1.1 Champ de vitesse tourbillonnaire généré par un rotor . . . 167
5.1.2 Champ de vitesse tourbillonnaire dans les canaux inter-aubes . . . 170
5.1.3 Continuité du champ de vorticité . . . 170
5.1.4 Champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator . . . 175
5.2 Expression des potentiels acoustiques . . . 175
5.3 Équations de raccordement . . . 176
5.3.1 Raccordement modal à l'interface de bord d'attaque . . . 176
5.3.2 Raccordement modal à l'interface de bord de fuite . . . 178
5.4 Résultats . . . 180
5.4.1 Validation paramétrique . . . 180
5.4.2 Bruit d'interaction rotor-stator . . . 184
5.5 Conclusion . . . 191

6 Bruit tonal d'interaction avec stator hétérogène **193**
6.1 Bruit d'interaction avec le tourbillon d'aspiration . . . 194
6.1.1 Mise en évidence du tourbillon . . . 194
6.1.2 Apport d'un dispositif de réduction des distorsions sur le banc SEMAFOR . . . 195
6.2 Modélisation d'un stator hétérogène par la technique de raccordement modal . . . 196
6.2.1 Amplitude du dipôle de bord d'attaque . . . 198
6.2.2 Rayonnement d'un dipôle en champ libre . . . 203
6.2.3 Résultats . . . 206
6.2.4 Application à une grille d'aubes bidimensionnelle . . . 208
6.2.5 Application au ventilateur SEMAFOR . . . 212
6.3 Campagne expérimentale . . . 215
6.3.1 Description du banc d'essai . . . 215
6.3.2 Technique de décomposition modale . . . 218
6.3.3 Rétro-propagation numérique . . . 224
6.3.4 Comparaison entre le modèle analytique et les mesures . . . 230
6.4 Conclusion . . . 237

Conclusion **239**

A Décomposition modale de Floquet **244**

B Projection modale des équations de continuité **245**
B.1 Projection sur la base modale associée au réseau de canaux . . . 245
B.1.1 Application du projecteur à la base modale associée à un canal . . . 245
B.1.2 Application du projecteur à la base modale associée au milieu non borné . . . 246
B.2 Projection sur la base modale associée au milieu non borné . . . 247
B.2.1 Application du projecteur à la base modale associée au milieu non borné . . . 247
B.2.2 Application du projecteur à la base modale associée à un canal . . . 248
B.3 Projection modale pour la continuité de la vorticité . . . 249
B.3.1 Application du projecteur à la base modale associée à un canal . . . 249
B.3.2 Application du projecteur à la base modale associé au milieu non borné . . . 249

C Puissance acoustique en conduit **251**
C.1 Cadre bidimensionnel . . . 252
C.1.1 Ondes incidentes, réfléchies et transmises . . . 252
C.1.2 Ondes dans les canaux . . . 253
C.2 Cadre tridimensionnel . . . 254
C.2.1 Ondes incidentes, réfléchies et transmises . . . 254
C.2.2 Ondes dans les canaux . . . 255
C.3 Relation entre pression et potentiel . . . 256

D Description des sillages du rotor **257**
D.1 Détermination des harmoniques de sillages w_n . . . 257

E Principe de l'équivalence dipôle de bord d'attaque - modèle d'Amiet **259**
E.1 Modèle d'Amiet - Contribution de bord d'attaque . . . 259
E.2 Réglage du dipôle équivalent . . . 268
E.2.1 Formulation de Green . . . 268
E.2.2 Amplitude du dipôle équivalent . . . 274

Bibliographie **279**

TABLE DES FIGURES

1.1 Évolution de la directivité et des niveaux relatifs des différentes sources en fonction du taux de dilution : (a) faible taux de dilution (turboréacteur à simple flux). (b) : fort taux de dilution (turboréacteur à double flux). Sources de bruit : (1) : compresseur ; (2) : turbine, combustion ; (3) : jet ; (4) : chocs ; (5) : soufflante. [151]. 6
1.2 Importance relative des différences sources de bruit sur un avion de type quadriréacteur long-courrier, pour les trois points de contrôle de la certification de l'OACI [63]. 6
1.3 Représentation d'un turboréacteur à double flux à haut taux de dilution, d'après [133]. (1) : nacelle ; (2) : soufflante ; (3) : stator redresseur (OGV) ; (4) : IGV (*Inlet Guide Vanes*) ; (5) : compresseur basse pression ; (6) : compresseur haute pression ; (7) : chambre de combustion ; (8) : turbine haute pression ; (9) : turbine basse pression ; (10) : tuyère ; (11) : revêtement insonorisant. Les flux primaire et secondaire sont représentés par les flèches rouge et bleue, respectivement. 7
1.4 Roues mobiles de machines axiale (a) et centrifuge (b) [92]. 8
1.5 Représentation typique de l'étage rotor-stator d'un ventilateur axial. 8
1.6 Système de ventilation de la cabine d'un avion. 10
1.7 Spectre typique d'un étage rotor-stator de turbomachine axiale en régime subsonique, d'après Goldstein [41]. 10
1.8 Bruit d'interaction rotor-stator : interaction de sillages (a) et interaction potentielle (b). 11
1.9 Paramètres géométriques de définition d'un profil. 21
1.10 Représentation du problème de Sears [150] : calcul des fluctuations de portance induites par la convection des perturbations de vitesse normale w, à la vitesse d'écoulement W_0, sur un segment rigide, sans épaisseur. 22
1.11 Représentation du problème de Sears en configuration de grille d'aubes dans un étage rotor-stator de turbomachine axiale. Coupe cylindrique bidimensionnelle au rayon R_0. 22
1.12 Représentation du taux de recouvrement $\Gamma = d/c$. (a) : Recouvrement négatif ($d < 0$) pour un rotor en tête de pale. (b) : Recouvrement positif ($d > 0$) et important ($\Gamma \simeq 1$) pour un stator. 23
1.13 a : Étage rotor-stator de turbomachine. Représentation bidimensionnelle d'une coupe cylindrique de rayon R_0. b : Grille d'aubes modélisée comme une rangée de plaques planes avec un angle de calage non nul, représentatif du bord d'attaque des aubes du stator. 24
1.14 a : Étage rotor-stator de turbomachine. Représentation bidimensionnelle d'une coupe cylindrique de rayon R_0. b : Grille d'aubes modélisée comme une rangée de plaques planes avec un angle de calage nul, représentatif du bord de fuite des aubes du stator. 25
1.15 Représentation de l'approche par bandes de rayon. Découpage de la configuration annulaire en bandes (a) au rayon moyen r_i et identification à un ensemble de grilles rectilinéaires (b). La méthode introduit un parallélisme entre les aubes adjacentes et modifie les conditions aux limites radiales. 26

1.16 Représentation des modes de Tyler et Sofrin. Les lignes rouges et noires représentent les aubes du stator et les pales du rotor, respectivement. La ligne bleue indique la pale de référence. . . . 28
1.17 Représentation générique d'un problème aux limites. Les champs ϕ_i ($i \in [a, b, c]$) sont solutions d'une équation aux dérivées partielles, soumis aux conditions aux limites d'impédances Z_i. La continuité de quantités physiques sur l'interface Σ permet de résoudre le problème. . . . 31
1.18 (a) : Diffraction d'une onde acoustique par un réseau de canaux bifurqués. (b) : Calcul des pertes par transmission d'un conduit d'impédance variable. . . . 32
1.19 Interface de bord d'attaque d'une grille d'aubes de stator. Représentation bidimensionnelle déroulée. . . . 33
1.20 Loi de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction d'une onde acoustique. . . . 35
1.21 Représentation du principe de trace pour une grille d'aubes mobiles. . . . 36
1.22 Condition de 2π-périodicité sur l'angle θ. Le périmètre de la coupe cylindrique est égal à un nombre entier de longueurs d'onde, représentant le nombre de lobes d'un mode azimutal. $|n| = 10$. . . . 37

2.1 Réflexion et transmission d'une onde acoustique à l'interface entre un milieu non borné et un réseau de canaux bifurqués. . . . 39
2.2 Représentation de la propagation d'une onde oblique dans un canal bidimensionnel. . . . 41
2.3 Représentation enroulée de la propagation d'une onde oblique 2π-périodique. $|n|$ est égal à 10. . . . 45
2.4 Cartographie de pression acoustique instantanée calculée à partir de la technique de raccordement modal pour une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite. Les paramètres de calcul sont détaillés en Tab. 2.1. . . . 50
2.5 Profils de la partie réelle de la pression acoustique (a) et de la vitesse axiale (b) normalisées dans la direction axiale à mi-largeur de canal ($z/a = 0.5$). . . . 50
2.6 Profils des parties réelle et imaginaire de la différence de pression acoustique normalisée (a) et de vitesse axiale (b) dans la direction tangentielle de part et d'autre de l'interface ($z = 0^{\pm}$). . . . 51
2.7 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r en fonction de l'ordre modal s. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle. Les barres d'histogrammes bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. . . . 52
2.8 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel transmis ϕ_d^0 en fonction de l'ordre modal q. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle. Les barres d'histogrammes bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. . . . 53
2.9 (a) : Erreur du bilan de puissance acoustique (%) à l'interface en fonction du nombre de mode N_q. (b) : Nombre de conditionnement de la matrice inversible en fonction du nombre de mode N_q. . . . 55
2.10 Réflexion et transmission d'une suite d'ondes acoustiques à l'interface entre un réseau de canaux bifurqués et un milieu non borné. . . . 56
2.11 Cartographie de pression acoustique instantanée calculée à partir de la technique de raccordement modal pour la transmission d'un ensemble d'ondes déphasées d'amplitude de pression unitaire depuis un réseau de canaux vers un espace libre. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite. . . . 60
2.12 Profils des parties réelles de la pression acoustique (a) et de la vitesse axiale (b) normalisées dans la direction axiale à mi-largeur de canal ($z/a = 0.5$), correspondant au champ de la Fig. 2.11. . . . 60

2.13 Profils des parties réelle et imaginaire des différences de pression acoustique (a) et de vitesse axiale (b) normalisées dans la direction tangentielle de part et d'autre de l'interface ($z = 0.^{\pm}$). 61
2.14 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_u^0 en fonction de l'ordre modal q. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués comme projecteur. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle comme projecteur. Les barres bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. 61
2.15 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel transmis ϕ_t en fonction de l'ordre modal s. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués comme projecteur. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle comme projecteur. Les barres bleus et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. 62
2.16 (a) : Erreur du bilan de puissance acoustique (%) à l'interface et (b) : nombre de conditionnement de la matrice inversible en fonction du nombre de modes N_q. 64
2.17 Lignes de courant autour d'une plaque mince en incidence, (a) : selon la théorie potentielle ; (b) avec une condition de Kutta au bord de fuite. Les lignes bleues représentent les lignes de séparations. 65
2.18 Modélisation (selon Howe [60]) des perturbations de vorticité introduites par la condition de Kutta en aval des aubes. 66
2.19 Représentation d'une grille d'aubes de corde finie déroulée. Notations des ondes incidente et diffractées. 69
2.20 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal (a-c) et par la technique de Wiener-Hopf (b-d) pour $M = 0$ (a-b), $M = 0.2$ (c-d). L'écoulement va de gauche à droite. 73
2.21 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal (a-c-e) et par la technique de Wiener-Hopf (b-d-f) pour $M = 0.4$ (a-b), $M = 0.6$ (c-d), $M = 0.8$ (e-f). L'écoulement va de gauche à droite. 74
2.22 Profils du champ de pression instantané normalisé dans la direction de l'écoulement en $z/a = 0.5$ (centre du canal inter-aube) pour $M = 0.4$ (a) et $M = 0.8$ (b), obtenus avec la technique de Wiener-Hopf (symboles noirs), la technique de raccordement modal (ligne noire) et la technique de raccordement modal sans la condition de Kutta (ligne grise). 75
2.23 Parties réelles du saut de pression instationnaire normalisé sur une aube de référence pour $M = 0.4$ (a) et $M = 0.8$ (b) telles que prédites par la technique de raccordement modal (ligne) et la technique de Wiener-Hopf (symboles). 75
2.24 Amplitudes modales (parties réelle (ligne) et imaginaire (pointillé), et valeur absolue (symbole)) des modes réfléchi R_s (a) et transmis T_s (b) d'ordre $s = 0$ en fonction du nombre d'itérations g entre les deux interfaces du stator. 76
2.25 Champs de vitesse axiale instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal. Parties réelles des composantes acoustique $\mathbf{v}^{ac} \cdot \mathbf{e}_x$ (a) et hydrodynamique générée par la condition de Kutta $\mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_x$ (b). 77
2.26 Champ de vitesse axiale totale $((\mathbf{v}^{ac} + \mathbf{v}_K^h) \cdot \mathbf{e}_x)$ instantané normalisé obtenu par la technique de raccordement modal. 77
2.27 Profils du champ de vitesse axiale instantané normalisé le long de l'interface de bord de fuite en $x = c^{\pm}$. (a) : Composantes acoustique $\mathbf{v}_t^{ac} \cdot \mathbf{e}_x$ (ligne bleue pointillée), hydrodynamique générée par la condition de Kutta $\mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_x$ (ligne pointillée rouge) et totale $(\mathbf{v}_t^{ac} + \mathbf{v}_K^h) \cdot \mathbf{e}_x$ (ligne continue) en aval du stator en $x = c^+$. (b) : Profils des champs de vitesse à l'interface dans les canaux inter-aubes $(\mathbf{v}_u^{ac} + \mathbf{v}_d^{ac}) \cdot \mathbf{e}_x$ en $x = c^-$ (symboles noirs) et en aval du stator $(\mathbf{v}_t^{ac} + \mathbf{v}_K^h) \cdot \mathbf{e}_x$ en $x = c^+$ (ligne continue). 78
2.28 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour différentes fréquences : $k \times c = 2$ (a), $k \times c = 4$ (b), $k \times c = 5.4$ (c) et $k \times c = 6$ (d). L'écoulement va de gauche à droite. 79

2.29 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour différentes fréquences : $k \times c = 10$ (a), $k \times c = 10.8$ (b), $k \times c = 11$ (c) et $k \times c = 15$ (d). L'écoulement va de gauche à droite. Valeurs absolues des coefficients modaux des champs ϕ_r (e) et ϕ_t (f) en fonction du nombre de Helmholtz pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-2, -1, 0, 1]$. Les nombres de Helmholtz $k \times c \in [5.371, 10.8, 11]$ correspondent aux fréquences de coupure (lignes en pointillés) des modes $s = -1$, $s = -2$ et $s = 1$, respectivement. 80

2.30 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$ pour différents nombres de Mach : $M = -0.7804$ (a), $M = -0.1283$ (b), $M = 0.4768$ (c) et $M = 0.5915$ (d). . . . 81

2.31 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b) en fonction du nombre de Helmholtz pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-2, -1, 0]$. Les nombres de Mach $M \in [-0.7804, -0.1283, 0.5915]$ correspondent aux fréquences de coupure (lignes en pointillés) des modes $s = -2$ et $s = -1$ (Mach négatif et Mach positif), respectivement. 82

2.32 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour une grille dont la solidité $\sigma_s = c/a$ varie : $\sigma_s = 0.5$ (a), $\sigma_s = 1$ (b), $\sigma_s = 1.5$ (c) et $\sigma_s = 2$ (d). 83

2.33 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a-c) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b-d) en fonction de la solidité de la grille d'aubes. (a-b) $\sigma_s = 0.5$ et (c-d) $\sigma_s = 2$. Les barres bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. Parties réelle (e) et imaginaire (f) du saut de pression instationnaire normalisé sur une aube de référence pour différentes solidités de grille $\sigma_s \in [0.5, 1, 1.5, 2]$. 84

2.34 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b) en fonction de l'angle de propagation Θ_i pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-1, 0]$. Les angles $\Theta_i \in [-34.91, 34.81]$ correspondent à la fréquence de coupure (lignes en pointillés) du mode $s = -1$. 85

2.35 Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$, un nombre de Mach nul et différents angles de propagation incidente : $\Theta_i = 0°$ (a), $\Theta_i = 35°$ (b), $\Theta_i = 57.9°$ (c) et $\Theta_i = 90°$ (d). 86

2.36 Représentation des angles incident et réfléchi 87

2.37 Angle de propagation en fonction de l'ordre modal azimutal. 88

2.38 Réflexion et transmission d'une onde acoustique incidente à l'interface entre un milieu non borné et un réseau de canaux bifurqués, en présence d'un angle de calage Ψ. . . . 89

2.39 Réflexion et transmission d'un réseau déphasé d'ondes acoustiques incidentes à l'interface entre un réseau de canaux bifurqués et un milieu non borné, en présence d'un angle de calage Ψ. 94

2.40 Cartographie de pression acoustique instantanée générée par la diffraction d'une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire par une grille d'aubes non calées. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite. 97

2.41 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel ϕ_t (b) en fonction de l'ordre modal $n + sV$. Les barres d'histogramme bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. 98

2.42 Cartographie de pression acoustique instantanée générée par la diffraction d'une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire par une grille d'aubes calées ($\Psi = 20°$). L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite. 98

2.43 Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel ϕ_t (b) en fonction de l'ordre modal $n + sV$. Les barres d'histogramme bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement. 99

2.44 Transmission acoustique d'une onde oblique à l'interface de bord d'attaque d'un stator, avec un angle de calage égal à 20° et un écoulement de nombre de Mach $M = 0.3$. Résultats obtenus avec le théorème de Green (a) et la technique de raccordement modal complète (b). Les artéfacts numériques dans le triangle pour la formulation utilisant le théorème de Green sont dûs à l'interpolation des couleurs. [137]. 99

3.1 Impact de rafales hydrodynamiques issues des pales du rotor sur la grille d'aubes du stator. Représentation bidimensionnelle déroulée. 101
3.2 Défaut de vitesse dans le sillage d'une pale en rotation. 102
3.3 Défaut de vitesse dans le sillage d'une pale en rotation. 103
3.4 Représentation de l'amplitude $w_0(\tilde{x})/W_e$ (a) et de la largeur du sillage $b(\tilde{x})/S$ (b), en sillage lointain pour une pale de rotor selon le modèle de Lakshminarayana (Eq. 3.4), en fonction de la distance au bord de fuite de la pale et du coefficient de trainée C_d. . 104
3.5 Représentation tridimensionnelle d'un sillage issu d'une pale de rotor, d'après le modèle de Lakshminarayana (Eq. 3.4) pour un coefficient de trainée $C_d = 0.05$. 105
3.6 Harmoniques de sillages w_n en fonction de l'ordre modal n. Les paramètres du sillage sont déterminés par le modèle de Lakshminarayana pour un coefficient de trainée $C_d = 0.05$, une distance au bord de fuite de la pale égale à $\tilde{x}/c_r = 1$, pour un rotor composé de $B = 17$ pales. Le rayon R_0 de la coupe cylindrique est égal à 0.1 m. 106
3.7 Cas-test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997) - section bruit de turbomachines 111
3.8 Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test basse fréquence : $\overline{k_x} = 5\pi/2$. 112
3.9 Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test basse fréquence : $\overline{k_x} = 5\pi/2$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement. 112
3.10 Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test haute fréquence : $\overline{k_x} = 13\pi/2$). 113
3.11 Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test haute fréquence : $\overline{k_x} = 13\pi/2$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement. 113
3.12 Parties réelle et imaginaire du saut de pression adimensionné sur une aube de référence pour le cas basse fréquence $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$ (a) et haute fréquence $u = \overline{k_x} = 13\pi/2$ (b) issues de la technique de raccordement modal (ligne continue), la technique de Wiener-Hopf (ligne pointillée) et le code LINSUB (symboles). 114
3.13 Champ de vorticité instantané de la rafale prescrite dans la technique de raccordement modal pour $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$. 114
3.14 Profils du champ de vorticité de la rafale prescrite dans la technique de raccordement modal pour $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$, dans la direction de l'écoulement à $z/a = 0.5$ (a) et le long de l'interface de bord d'attaque ($x = 0$) (b). 115
3.15 Étage d'une turbomachine axiale utilisé dans les systèmes de conditionnement d'air en aéronautique, composé d'un rotor tournant dans le sens anti-horaire et d'un stator. . . 115
3.16 Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la première FPP ($n = 1$). 116
3.17 Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la première FPP ($n = 1$). Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont coupés. 117
3.18 Atténuation τ_s en fonction de la distance axiale et de l'ordre modal $nB + sV$. 117
3.19 Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la deuxième FPP ($n = 2$). 118

3.20 Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la deuxième FPP ($n = 2$). Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont coupés. . 119
3.21 Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la troisième FPP ($n = 3$). 119
3.22 Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la troisième FPP ($n = 3$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement. 120

4.1 Puissances acoustiques transmises (gauche) et réfléchies (droite) adimensionnées par la puissance incidente, en fonction de l'ordre modal azimutal m de l'onde excitatrice. Les calculs ont été réalisés avec l'approche par le rayon caustique à l'aide des modèles de Smith (lignes vertes) et du raccordement modal (lignes rouges), ainsi qu'avec le code numérique Lin3D (lignes bleues). Le modèle d'impédance pour la déviation de l'écoulement est appliqué au bord d'attaque (LE, *Leading Edge*) et au bord de fuite (TE, *Trailing Edge*). Résultats issus de l'article [8], reproduits avec l'autorisation des auteurs. 125
4.2 Puissances acoustiques transmises (gauche) et réfléchies (droite) adimensionnées par la puissance incidente, en fonction de l'ordre modal azimutal m de l'onde excitatrice. Les calculs ont été réalisés avec l'approche par bandes de rayon et les modèles de Smith (lignes vertes) et du raccordement modal (lignes rouges), ainsi qu'avec le code numérique Lin3D (lignes bleues). Le modèle d'impédance pour la déviation de l'écoulement est appliqué au bord d'attaque (LE, *Leading Edge*) et au bord de fuite (TE, *Trailing Edge*). Résultats issus de l'article [8], reproduits avec l'autorisation des auteurs. 126
4.3 Représentation d'une grille d'aubes tridimensionnelle. Notation des ondes incidente et diffractées. 126
4.4 Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c pour des ordres radiaux $j = 0$ (a) et $j = 1$ (b). 130
4.5 Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c. (a) : Composante liée à la fonction de Bessel de première espèce $(\cos(\tau_{nj})J_n(K_{nj}r))$. (b) : Composante liée à la fonction de Bessel de seconde espèce $(-\sin(\tau_{nj})Y_n(K_{nj}r))$. 130
4.6 Surface d'égale phase hélicoïdale $n\theta + \mathcal{R}\mathrm{e}\{k^+_{nj}x\}$ lors de la propagation d'un mode tournant dans un conduit annulaire. 132
4.7 Pulsations de coupure ω_c en fonction du nombre de Mach ($M \in [0.1, 0.3, 0.6]$) et des ordres modaux azimutal n et radial $j = 0$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. 133
4.8 Pulsations de coupure ω_c pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$ et un nombre de Mach $M = 0.5$. 133
4.9 Atténuation τ_{nj} modale en fonction de la distance axiale et des ordres modaux (n, j) pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$ et un écoulement de nombre de Mach $M = 0.5$. $kR_c = 1.11$. 134
4.10 Relation de dispersion des modes $(1, 0)$ et $(2, 0)$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$, de rayon au carter $R_c = 0.1$ m et un nombre de Mach nul. 135
4.11 Relation de dispersion des modes $(1, 0)$ et $(2, 0)$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$, de rayon au carter $R_c = 0.1$ m et un nombre de Mach $M = 0.5$. 136
4.12 Propagation acoustique dans un plan méridien du conduit annulaire d'une onde d'ordre modal azimutal nul. 137
4.13 Représentation de l'effet de peau : réflexions d'un rayon acoustique d'ordre n élevé par la paroi externe du conduit annulaire (a). Propagation acoustique dans une bande de rayon définie par le rayon caustique r_c (b). Les rayons acoustiques sont projetés dans un seul plan axial. 137
4.14 Représentation de la coupure modale dans une section droite du conduit. (a) : Résonance radiale ($n = 0$) et (b) : résonance tournante ($n \neq 0$). 138

4.15 Différence de puissance acoustique $\Delta\mathcal{P}$ (%) à l'interface de bord d'attaque en fonction des nombres de modes azimutaux N_s et radiaux N_t. 143
4.16 Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 4$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 12$ (e-f). 145
4.17 Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-largeur d'un canal inter-aubes avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 4$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 12$ (e-f). 146
4.18 Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure (a-b) et à mi-largeur de canal inter-aubes (c-d) avec la technique de raccordement modal lorsqu'une onde acoustique de nombre d'onde azimutal $n = 45$ est diffractée par la grille d'aubes. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont $N_s = 321$ et $N_t = 8$. 147
4.19 Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_c$ (a) ; Coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b). 148
4.20 Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c pour des ordres azimutaux $n \in [11, -4]$ et un ordre radial nul 148
4.21 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal. Coupe axiale (c) des champs incident (a) et réfléchi (b) à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 149
4.22 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 150
4.23 Représentation de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. Les sillages lâchés forment des nappes de vorticité tridimensionnelles en aval du stator. 151
4.24 Champs de pression acoustique instantanée normalisés calculés avec la condition de Kutta-Joukowski instationnaire pour un rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. (a) : coupe cylindrique au rayon $r = 3\ R_c/4$, (b) : coupe méridienne à l'angle $\theta = \pi/V$. 159
4.25 Coupes axiales du champ de pression acoustique réfléchi ϕ_r instantané normalisé à une distance $x = -c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. 160
4.26 Coupes axiales du champ de pression acoustique transmis ϕ_t instantané normalisé à une distance $x = 3\ c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. 160
4.27 Sauts de pression instationnaire sur une aube de référence obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. 161
4.28 Sauts de pression instationnaire le long de l'envergure d'une aube de référence, au bord de fuite (ligne) et à mi-corde (pointillé) obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. 161
4.29 Champ de vorticité en aval du stator introduit par la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. (a) coupe axiale à une distance $x = 3\ c/2$, (b) coupe cylindrique à un rayon $r = 3\ R_c/4$. 162
4.30 Champs de pression acoustique instantanée normalisée calculés avec la condition de Kutta-Joukowski instationnaire pour un rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. (a) : coupe cylindrique au rayon $r = 3\ R_c/4$, (b) : coupe méridienne à l'angle $\theta = \pi/V$. 162

4.31 Coupes axiales du champ de pression acoustique réfléchi ϕ_r instantané normalisé à une distance $x = -c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. 163
4.32 Coupes axiales du champ de pression acoustique transmis ϕ_t instantané normalisé à une distance $x = 3\ c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. 163
4.33 Sauts de pression instationnaire sur une aube de référence obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. 164
4.34 Sauts de pression instationnaire le long de l'envergure d'une aube de référence, au bord de fuite (ligne) et à mi-corde (pointillé) obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. 164
4.35 Champ de vorticité en aval du stator introduit par la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. (a) coupe axiale à une distance $x = 3\ c/2$, (b) coupe cylindrique à un rayon $r = 3\ R_c/4$. 165

5.1 Impact de rafales hydrodynamiques tridimensionnelles issues des pales du rotor sur la grille d'aubes de stator. Représentation bidimensionnelle déroulée d'une coupe au rayon r. 167
5.2 Coupe axiale du champ de vitesse tourbillonnaire axiale $\mathbf{v}_i^h(r,\theta)\cdot\mathbf{e}_x$ induit par les pales du rotor. 169
5.3 Parties réelle et imaginaire des amplitudes modales W_{n_ij} des sillages du rotor. 169
5.4 Représentation du champ de vorticité incidente pour une configuration typique de machine tournante axiale (projet IDEALVENT) (a) : Coupe axiale de la composante radiale. (b) : Profils des composantes axiale, radiale et azimutale à mi-envergure en aval d'une pale de rotor. 174
5.5 Comparaison des champs de vorticité de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure (gauche) dans la direction azimutale et à mi-largeur de canal dans la direction radiale (droite) avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f). 181
5.6 Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustiques (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f). 182
5.7 Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustiques (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-largeur d'un canal inter-aubes avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f). 183
5.8 Coupe axiale du champ de vorticité radiale du mode hydrodynamique ($n = 1$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$. 184
5.9 Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b). 185
5.10 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe axiale (c) des champs incident (a), réfléchi (b), à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont tous coupés. . . . 185
5.11 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 186
5.12 Coupe axiale du champ de vorticité radiale du mode hydrodynamique ($n = 2$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$. 187

5.13 Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; Coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b). 187
5.14 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe axiale du champ acoustique ϕ_r (a), à $z = -0.5\ c$. (b) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont tous coupés. 188
5.15 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. 188
5.16 Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (a) et ($|\mathbf{T}|$) (b). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 189
5.17 Coupe axiale du champ de vorticité radial du mode hydrodynamique ($n = 3$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$. 189
5.18 Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b). 190
5.19 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe axiale (c) des champs incident (a) et réfléchi (b), à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 190
5.20 Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 191

6.1 Visualisation du tourbillon d'entrée d'air sur le banc SEMAFOR de l'École Centrale de Lyon, grâce à une technique de génération de fumée. Vue de face. Les deux instantanés confirment le caractère erratique du tourbillon. 194
6.2 Vues de face (a) et de trois-quarts arrière (b) du TCS installé sur le banc SEMAFOR. 195
6.3 Exemple de spectres bruts mesurés par un capteur de paroi sur le banc SEMAFOR, dans la configuration initiale d'une aspiration libre (rouge) et après installation du TCS (bleu). (a) : Spectre complet. (b) : Zoom autour de la fréquence de passage des pales. . 196
6.4 Principe d'équivalence du dipôle de bord d'attaque. (a) : Fonction de Green du demi-plan, avec écoulement. (b) : Formulation d'Amiet pour l'impact d'une rafale sur un profil. 197
6.5 Représentation et notations d'un dipôle placé au bord de fuite d'un demi-plan en présence d'un écoulement axial et uniforme. 198
6.6 Modèle d'Amiet. Notations pour la contribution de bord d'attaque. 200
6.7 Sauts de pression instationnaire obtenus avec la fonction de Green d'un demi-plan ΔP (lignes) et la formulation d'Amiet $(L_1 c)/\varepsilon$ (pointillés) pour des vitesses d'écoulement $W_x = -0.01$ m/s, $k\varepsilon = 0.2$ (a) et $W_x = -100$ m/s, $k\varepsilon = 0.05$ (b) $f = 3000$ Hz, $c_0 = 340$ m/s, $c_0 = 0.1$ mm. (a) $W_x = -0.01$ m/s, $k\varepsilon = 0.2$; (b) $W_x = -100$ m/s, $k\varepsilon = 0.05$, d'après [12]. 201
6.8 Exemple de résultat du champ acoustique généré par la présence de deux monopôles en opposition de phase au bord d'une plaque semi-infinie et présence d'un écoulement moyen de vitesse $W_x = -100$ m/s, d'après [12]. L'écoulement va de la droite vers la gauche. 201
6.9 Sauts de pression instationnaire obtenus avec la fonction de Green du demi-plan ΔP (ligne), la solution d'Amiet $(L_1 c)/\varepsilon$ (pointillé) et la simulation numérique Δp_N (gras) pour une vitesse d'écoulement $W_x = -0.01$ m/s (a) et $W_x = -100$ m/s (b), d'après [12]. 202
6.10 (a) : Simulation numérique (méthode des éléments finis) du champ acoustique généré par un dipôle placé au bord d'un profil de corde finie. Champ de pression instantané. (b) : Comparaison du chargement instationnaire prédit par la solution d'Amiet $(L_1 + L_2)c/\varepsilon$, et par la solution numérique ΔP_N dans le cas du profil de corde finie ($c = 0.1$ m) avec un écoulement de vitesse $W_x = -0.01$, d'après [12]. 203

6.11 Champ de pression généré par 4 dipôles (a), identique pour les deux formulations ; Profils de pression le long d'une coupe axiale arbitraire, obtenus avec la formulation en ondes planes (ligne) et la fonction de Green (pointillé) (b). 207
6.12 Valeur absolue de l'amplitude modale a_j en fonction de l'ordre modal j. Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. 208
6.13 Champs de pression générés par un dipôle ($W_x = 36$ m/s) placé juste devant une grille d'aubes ($V = 23$) au centre de la figure. La fréquence d'excitation du dipôle est $f = 3$ kHz (a) et $f = 9.5$ kHz (b). 209
6.14 Coefficients modaux des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un dipôle ($f = 9.5$ kHz, $W_x = 36$ m/s) placé devant une grille d'aubes ($V = 23$). Configuration de la Fig. 6.13-b. 210
6.15 Champ de pression généré par 23 dipôles homogènes (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par un réseau de 23 dipôles et un réseau de 3 dipôles (c) ($f = 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 212
6.16 Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau homogène de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 213
6.17 Champ de pression généré par 23 dipôles (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par la superposition des deux (c) ($f = 2 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 213
6.18 Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 2 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 214
6.19 Champ de pression généré par 23 dipôles (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par un réseau de 23 dipôles et un réseau de 3 dipôles (c) ($f = 3 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 214
6.20 Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 3 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1. 215
6.21 Étage rotor-stator du banc SEMAFOR vu de face (a) et antenne aléatoire de microphones (b). 215
6.22 Canon du microphone (vue extérieure) (a) et petit haut-parleur excité en large bande (b). Un microphone de référence est placé à l'extrémité du tube flexible. 216
6.23 Fonction de réponse en fréquence du facteur d'étalonnage. Amplitude (a) et phase (b) pour un microphone quelconque. 217
6.24 Méthode d'étalonnage individuelle. (a) : Calcul de la fonction de transfert du résonateur de Helmholtz. (b) : Étalonnage du microphone de référence. 217
6.25 Optimisation de la répartition des microphones en utilisant le nombre de conditionnement de la matrice de transfert, en fonction de la fréquence. Sélection de l'ensemble de microphones pour lequel le nombre de conditionnement est le plus faible sur toute la plage de fréquence (courbe en rouge). 218
6.26 Nombre de conditionnement κ de la matrice de projection modale $\mathbf{\Phi}$ en fonction de la fréquence. Le conditionnement se détériore lorsque le nombre de modes passants devient égal au nombre de microphones. Vers 3FPP (8500 Hz), une régularisation devient nécessaire. 219
6.27 Spectres de pression mesurés dans le conduit. Courbe bleue : Autospectre du microphone 1. Courbe rouge : Interspectre entre les microphones 1 et 2. 220

6.28 Décomposition modale à la première FPP de la turbomachine. Amplitudes modales du champ acoustique se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). 221
6.29 Décomposition modale à la deuxième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales du champ acoustique se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). 221
6.30 Décomposition modale à la troisième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales des champs acoustiques se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). Solution régularisée. 222
6.31 Décomposition modale à la troisième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales des champs acoustiques se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). Solution non régularisée. 222
6.32 Résultats de la décomposition modale. (a) : Coefficients modaux à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence 2FPP (5400 Hz). (b) : Coefficients modaux à la fréquence 2BPF (5664Hz). (c) : Cohérence modale à la fréquence $f = 5400$ Hz. (d) : Cohérence modale à la fréquence 2BPF. 223
6.33 Résultats de la décomposition modale. (a) : Coefficients modaux à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence 3FPP (5400 Hz). (b) : Coefficients modaux à la fréquence 3BPF (8504Hz). (c) : Cohérence modale à la fréquence $f = 8400$ Hz. (d) : Cohérence modale à la fréquence 3BPF. 224
6.34 Modélisation par éléments finis du conduit en aval de la turbomachine. 225
6.35 Exemple de champ acoustique simulé sous l'excitation du mode plan dans la section d'entrée annulaire. 226
6.36 Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la première FPP. 226
6.37 Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la deuxième FPP. 227
6.38 Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la troisième FPP. 227
6.39 Valeurs singulières de la matrice insterspectrale modale à la première fréquence de passage des pales, en dB. 228
6.40 Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (2833 Hz). 229
6.41 Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (5666 Hz). 229
6.42 Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (8500 Hz). 230
6.43 Amplitude et phase de la matrice interspectrale modale $\hat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}}$ pour la 3ème FPP. 231
6.44 Valeurs singulières s_i pour la troisième FPP. 231
6.45 Valeur absolue de la première composante singulière C_1 pour la troisième FPP. 232
6.46 Valeur absolue des coefficients modaux $|p_{nj}|$ pour la troisième FPP. 232
6.47 Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles ($f = 2833$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 0.5. 234
6.48 Puissance acoustique modale azimutale et radiale issue des résultats expérimentaux pour la 2ème FPP (5666 Hz). 234
6.49 Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles ($f = 5666$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 1. 235
6.50 Puissance acoustique modale azimutale et radiale issue des résultats expérimentaux pour la 3ème FPP (8500 Hz). 235

6.51 Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles (f = 8500 Hz, W_x = 36 m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes (V = 23). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 8. 236

E.1 Modèle d'Amiet. Notations pour la contribution de bord d'attaque. 259
E.2 Représentation et notations d'un dipôle placé au bord de fuite d'un demi-plan en présence d'un écoulement axial et uniforme. 268
E.3 Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x,\omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la distance x_0. 276
E.4 Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x,\omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la fréquence d'excitation f. 277
E.5 Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x,\omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la vitesse de l'écoulement moyen W_x. 278

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Paramètres du cas test pour l'interface de bord d'attaque. 49
2.2 Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi en fonction de l'ordre modal s et de la base modale utilisée comme projecteur. 52
2.3 Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel transmis en fonction de l'ordre modal q et de la base modale utilisée comme projecteur. 53
2.4 Systèmes linéaires possibles en fonction des nombres de modes et de la base de projection utilisée. 54
2.5 Paramètres du cas test pour l'interface de bord de fuite. 59
2.6 Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi en fonction de l'ordre modal q et de la base modale utilisée comme projecteur. 62
2.7 Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel transmis en fonction de l'ordre modal s et de la base modale utilisée comme projecteur. 63
2.8 Paramètres du cas test pour une grille d'aubes calées. 97

3.1 Valeurs des constantes de corrélations du modèle de Lakshminarayana, pour un profil isolé, placé dans une grille fixe et dans un rotor. 104

4.1 Paramètres du cas test défini dans l'article de Behn *et al.* [8]. 124
4.2 Paramètres du cas test - Validation tridimensionnelle. 143
4.3 Paramètres d'entrée du cas-test de diffraction tridimensionnelle. 147
4.4 Nombre N_j de vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ utilisés pour la projection modale, dont les valeurs propres sont supérieurs à λ_s. Le nombre de modes azimutaux est $N_q = 11$. 153
4.5 Paramètres du cas test pour l'implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski. . . 159

5.1 Paramètres du cas test - Validation de la continuité des champs à l'interface 180

6.1 Nombre de conditionnement κ de la matrice de diffusion directe K aux fréquences de passage de pales. 228

NOMENCLATURE

Lettres romaines

A	Amplitude des rafales hydrodynamiques dans les canaux inter-aubes	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
a	Largeur des canaux inter-aubes d'une grille bidimensionnelle	m
a_j	Amplitude modale d'ordre j du rayonnement d'un dipôle en champ libre	Pa
B	Nombre de pales du rotor	
b	Demi-largeur à mi-hauteur du sillage	m
c	Longueur de corde d'une aube de stator	m
c_0	Célérité du son	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
C_d	Coefficient de trainée d'un profil	
c_g	Vitesse de groupe	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
c_p	Vitesse de phase	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
c_r	Longueur de corde des pales du rotor	m
D	Amplitude modale de l'onde acoustique se propageant vers l'aval dans les canaux inter-aubes	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
f	Fréquence	Hz
f_c	Fréquence de coupure du conduit	Hz
f_α	Fréquence de coupure du mode azimutal d'ordre α	Hz
f_{nj}	Fonction propre radiale du mode de conduit annulaire (n, j)	
G	Fonction de Green	
H	Fonction de Hankel	
J	Fonction de Bessel de première espèce	
$\mathbf{J}$	Fonction coût	
k	Nombre d'onde acoustique total	$\mathrm{m^{-1}}$
$\overline{k}$	Partie propagative du nombre d'onde axial	
$k^{\pm}$	Nombre d'onde acoustique axial	$\mathrm{m^{-1}}$
k_n^+	Nombre d'onde hydrodynamique d'harmonique n	$\mathrm{m^{-1}}$
K_{nj}	Valeur propre radiale du mode de conduit annulaire (n, j)	$\mathrm{m^{-1}}$
L	Nombre de dipôles équivalents dans le réseau hétérogène	

l	Numéro d'un dipôle équivalent dans le réseau hétérogène	
L_1, L_2	Contributions du chargement instationnaire dans le formalisme d'Amiet, au bord d'attaque et au bord de fuite	Pa
l_1^A	Saut de pression instationnaire dans le formalisme d'Amiet	Pa
M	Nombre de Mach	
m	Rang du canal inter-aubes	
N	Nombre de modes	
n	Harmonique de la fréquence de passages des pales	
(n, j)	Ordres modaux azimutal et radial d'une onde acoustique dans un conduit annulaire	
p	Pression acoustique	Pa
ΔP	Saut de pression corrigé généré par un dipôle de bord calculé à partir de la fonction de Green du demi-plan	Pa
Δp	Saut de pression généré par un dipôle de bord calculé à partir de la fonction de Green du demi-plan	Pa
ΔP_N	Saut de pression généré par un dipôle de bord calculé à partir d'une simulation numérique	Pa
$\mathcal{P}$	Puissance acoustique	W
P_h	Champ acoustique généré par un réseau homogène de dipôles diffractés	Pa
p_s	Pression statique	Pa
p_t	Pression totale	Pa
P_τ	Champ acoustique généré par un réseau hétérogène de dipôles diffractés	Pa
p_{d2}	Pression dynamique de sortie	Pa
(q, p)	Ordres modaux azimutal et radial des ondes acoustiques se propageant en amont et en aval dans les canaux inter-aubes	
q_v	Débit-volume	$\mathrm{m^3\,s^{-1}}$
R	Amplitude modale de l'onde acoustique réfléchie	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
(r, θ, z)	Coordonnées dans le repère lié à la grille d'aubes tridimensionnelle	m
R_0	Rayon de coupe cylindrique	m
R_c	Rayon au carter du conduit	m
r_c	Rayon caustique	m
R_m	Rayon au moyeu du conduit annulaire	m
(s, t)	Ordres modaux azimutal et radial des ondes acoustiques diffractées en amont et en aval de la grille	
$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{cc}}$	Matrice de covariance des coefficients modaux	
$\mathbf{S}_{\mathbf{pp}}$	Matrice interspectrale des champs de pression mesurés	
T	Amplitude modale de l'onde acoustique transmise	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
t	Temps	s
U	Amplitude modale de l'onde acoustique se propageant vers l'amont dans les canaux inter-aubes	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
u	Déphasage inter-aubes	

V	Nombre d'aubes du stator	
$\mathbf{V}$	Amplitudes du champ de vitesse hydrodynamique lié à la condition de Kutta-Joukowski instationnaire	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\mathbf{v}$	Champ de vitesse vectoriel	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
V_2	Vitesse moyenne débitante de sortie	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
w	Amplitude de vitesse de l'excitation aérodynamique	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
w_0	Déficit de vitesse maximal sur l'axe du sillage	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
w_n	Harmonique de sillage	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
W_x	Vitesse axiale de l'écoulement moyen	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
$W_{n_i j}$	Harmonique de sillages tridimensionnel d'ordre (n_i, j)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
$(\tilde{x}, \tilde{y})$	Coordonnées dans le repère lié au bord de fuite d'une pale de rotor	m
(X, Y, Z)	Coordonnées dans le repère lié à la grille d'aubes bidimensionnelle avec un angle de calage	m
(x, y, z)	Coordonnées dans le repère lié à la grille d'aubes bidimensionnelle	m
(x_0, z_0)	Coordonnées du dipôle équivalent dans le repère du bord d'attaque (ou de fuite) du profil	m
x_d	Distance entre l'axe radial passant à mi-corde des pales du rotor et le bord d'attaque des aubes du stator	m
Y	Fonction de Bessel de seconde espèce	
(y_1, y_2, y_3)	Coordonnées dans le repère lié à l'aube dans le formalisme d'Amiet	m

Lettres grecques

α	Nombre d'onde acoustique azimutal dans un cadre bidimensionnel	$\mathrm{m^{-1}}$
κ	Nombre de conditionnement	
Λ	Produit scalaire	
λ	Longueur d'onde	m
(μ, ν)	Ordres modaux azimutal et radial du projecteur	
Ξ	Produit scalaire	
ξ	Paramètre de coupure	
ρ	Masse volumique	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
ρ_0	Masse volumique du fluide	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
σ	Rapport de moyeu du conduit annulaire	
σ_s	Solidité de la grille d'aubes	
τ	Facteur d'hétérogénéité de la grille d'aubes	
β	Paramètre de compressibilité	
β_r	Angle de calage des pales du rotor	rad
ϕ	Potentiel de vitesse	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$
φ	Produit scalaire	
χ	Produit scalaire	
Ψ	Angle de calage de la grille	rad

Ψ	Produit scalaire	
$\mathbf{\Omega}$	Champ de vorticité vectoriel	s^{-1}
Ω	Vitesse de rotation angulaire du rotor	$\mathrm{rad\,s}^{-1}$
ω	Pulsation de l'onde acoustique	$\mathrm{rad\,s}^{-1}$
ω_c	Pulsation de coupure de la grille	
ω_n	Pulsation liée à la fréquence de passage des pales d'harmonique n	$\mathrm{rad\,s}^{-1}$
γ	Cohérence modale	
$\mathbf{\Gamma}_\gamma$	Vecteur pression - vitesse axiale	
Θ	Angle de propagation d'une onde acoustique	rad
$\Delta\theta$	Déphasage azimutal lié au vrillage des pales du rotor	rad

Symboles

ac	Relatif à la composante acoustique
d	Relatif à l'onde acoustique se propageant vers l'aval dans les canaux inter-aubes (*downstream*)
h	Relatif à la composante hydrodynamique
i	Relatif à l'onde acoustique incidente
K	Relatif à la condition de Kutta-Joukowski instationnaire
n	Relatif à l'harmonique de la fréquence de passage des pales
r	Relatif à l'onde acoustique réfléchie par la grille
t	Relatif à l'onde acoustique transmise par la grille
u	Relatif à l'onde acoustique se propageant vers l'amont dans les canaux inter-aubes (*upstream*)

Acronymes

ACARE	*Advisory Council for Aeronautics Research in Europe*
ADOPSYS	*Aeroacoustics of Ducted and Open-rotor Propulsion SYStems*
APU	*Auxiliary Power Unit* (Groupe Auxiliaire de Puissance (GAP))
BASS	*Broadband Aeroacoustic Stator Simulation*
CAA	*Computational AeroAcoustics*
CFD	*Computational Fluid Dynamics*
DLR	*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt* (Centre allemand pour l'aéronautique et l'astronautique)
DNS	*Direct Numerical Simulation*
DRP	*Dispersion-Relation-Preserving*
EPNdB	*Effective Perceived Noise level in deciBels*
FMR	Fréquences Multiples de la Rotation (*Buzz Saw Noise* (BSN))
FPP	Fréquence de Passage des Pales (*Blade Passing Frequency* (BPF))
GCV	*Generalized Cross-Validation* (Méthode de validation croisée généralisée
IGV	*Inlet Guide Vanes* (Stator redresseur du flux primaire)

LBM	*Lattice Boltzmann Methods*
LES	*Large-Eddy Simulation*
OACI	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
OGV	*Outlet Guide Vanes* (Stator redresseur du flux secondaire)
PML	*Perfectly Matched Layer*
SEMAFOR	*inverSE Method for the characterization of Aeroacoustic sources generated by turboFan rotOR*
SPL	*Sound Pressure Level* (Niveau de pression acoustique)
TCS	*Turbulence Control Screen*
U-RANS	*Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes*

Opérateurs

$(\cdot)^*$	Complexe conjugué
$(\cdot)^H$	Matrice conjuguée hermitienne
$(\cdot)^T$	Transposée d'un vecteur ou d'une matrice
$(\cdot)^{-1}$	Matrice pseudo-inverse
$\Box$	D'alembertien
δ	Symbole de Kronecker
$\Delta\ x$	Laplacien d'un champ scalaire
Ш	Peigne de Dirac
$\mathcal{I}\text{m}$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
$\lceil\cdot\rfloor$	Matrice diagonale
$\mathbf{x}$	Vecteur
$\text{D}/\text{D}t$	Dérivée particulaire
$\nabla\cdot\mathbf{x}$	Divergence d'un champ vectoriel
$\nabla\times\mathbf{x}$	Rotationnel d'un champ vectoriel
$\nabla\ x$	Gradient d'un champ scalaire
$\mathcal{R}\text{e}$	Partie réelle d'un nombre complexe
$\underline{\underline{x}}$	Tenseur
$\underline{\mathbf{x}}$	Matrice
$\|\cdot\|$	Norme subordonnée
$\text{diag}(\cdot)$	Matrice diagonale

INTRODUCTION

Dès les années 1970, les compagnies aériennes communiquent aux usagers les efforts investis pour réduire les bruits générés par les avions. Voici quelques exemples de slogans publicitaires, cités par R. Murray Schafer dans son ouvrage *Le Paysage Sonore* (*The Soundscape*) [100] :

Des jets qui murmurent.
Eastern Airlines

Envolez-vous dans les doux cieux de United.
United Airlines

Trident II est rapide, sûr, confortable et silencieux.
British European Airways

Traversez l'Atlantique en toute sérénité.
British Overseas Airways Corporation

Nous avons de beaux DC-9 avec des réacteurs placés à l'arrière pour votre tranquillité.
Air Jamaica

Le DC-10 est un avion discret qui vous transporte dans un bruissement d'ailes.
KLM

En effet, la conception des systèmes de propulsion aéronautique doit répondre à un certain nombre d'impératifs industriels parmi lesquels l'optimisation des performances aérodynamiques, la réduction de la consommation de carburant et de l'émission de gaz polluants, mais également celle du rayonnement acoustique de la machine. L'amélioration des nouvelles motorisations, à travers l'évolution continue des turboréacteurs double flux modernes à taux de dilution toujours croissant, a mené à une réduction significative du bruit de jet. Cependant, ces solutions ont été accompagnées d'une augmentation relative des sources de bruit liées à l'étage de soufflante dans le rayonnement acoustique global de la machine et de l'avion. Par ailleurs, le raccourcissement de la nacelle, nécessaire pour alléger le moteur, limite la place disponible pour l'utilisation de matériaux absorbants. De même, l'intégration des bras supports au stator redresseur du flux secondaire modifie considérablement le comportement aéroacoustique de ces nouveaux étages rotor-stator hétérogènes. Par conséquent, la compréhension physique de ces mécanismes de génération du bruit est cruciale. D'un point de vue normatif, l'ACARE (*Advisory Council for Aeronautics Research in Europe*) a fixé un objectif de réduction du bruit aéronautique de 10 EPNdB à l'horizon 2020. Ce contexte souligne la nécessité d'une meilleure compréhension de la production du bruit des moteurs et de ses principes sous-jacents afin de le réduire.

Dans ce contexte, un effort important est porté sur l'étude du bruit généré par l'étage rotor-stator redresseur. En effet, les turbomachines axiales carénées à étages multiples ou à étage unique, qu'il

s'agisse de ventilateurs en conduits ou de compresseurs de turboréacteurs, sont constituées de rotors (tournant) et stators (fixe) qui génèrent un bruit important du fait de leurs interactions aérodynamiques. Pour faire face aux réglementations sans cesse plus draconiennes en matière de nuisances sonores, il convient de réduire ce bruit au maximum, ce qui nécessite en tout premier lieu d'identifier et/ou localiser les mécanismes d'émission du son et de les modéliser. Dans les architectures complexes cette tâche est très ambitieuse ; elle continue à motiver des études très poussées dans la communauté scientifique. Deux voies d'investigation se présentent, trop souvent explorées de façon indépendante, à savoir la caractérisation expérimentale des sources, d'une part, et la modélisation, d'autre part. Le projet SEMAFOR (*inverSE Method for the characterization of Aeroacoustic sources generated by turboFan rotOR*) mené par la coopération du LMFA (École Centrale de Lyon), du LVA (INSA de Lyon) et de MicrodB, projet auquel se rattache cette thèse, se proposait de les envisager de façon conjointe, comme deux axes susceptibles de s'enrichir mutuellement. Le projet a pris fin en juillet 2016

Au-delà de l'observation simple des niveaux de bruit et des signatures spectrales, la caractérisation expérimentale peut nécessiter le recours à des techniques sophistiquées comme l'analyse cohérente de mesures faites sur des réseaux de capteurs. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les méthodes de décomposition modale et les méthodes inverses qui visent à discriminer les sources multiples du bruit les unes des autres et à les localiser. Ces aspects étaient essentiellement développés par les partenaires du projet sur un banc d'essai de ventilateur.

Du point de vue de la modélisation, il convient de remarquer que le recours à la simulation numérique est et restera encore longtemps d'un coût très élevé, nécessitant de plus un haut niveau d'expertise. Ceci n'est pas toujours compatible avec les besoins industriels à court terme. Le développement de modèles analytiques simplifiés mais rapides se présente donc comme une alternative intéressante qui, de surcroît, renseigne sur les mécanismes physiques incriminés dans le bruit. C'est cette approche qui a été suivie dans le projet.

Le propos initial du projet SEMAFOR était finalement de répondre à la problématique suivante.

— D'une part les modèles analytiques sont établis à partir d'une connaissance supposée des excitations aérodynamiques, en général des perturbations du champ de vitesse, qui structurent les sources du bruit. Lorsque les données disponibles sur l'écoulement sont insuffisantes, la prédiction acoustique est peu fiable. Est-il alors possible d'utiliser les résultats d'une technique de mesure sur réseaux de capteurs pour remonter aux excitations par ajustement des paramètres des différentes sources dans les modèles ?

— D'autre part une méthode inverse de localisation des sources nécessite en général des hypothèses sur leur nature, ce qui peut sembler abusif dans la mesure où les sources ne sont pas réellement connues avant leur localisation. Un modèle de source peut-il alors améliorer les performances de la méthode, par exemple en aidant à discriminer des sources multiples ?

Il convient de remarquer que la discrimination des sources par méthodes inverses n'est efficace que selon un compromis entre longueur d'onde et distance entre sources réparties. Ainsi, sur une machine tournante de petite taille conçue avec un nombre de pales important, les sources du bruit de bord de fuite des pales et celles associées à d'autres phénomènes turbulents comme l'interaction avec la couche limite du conduit ou les effets de jeu apparaîtront sous la forme d'une trace continue ; sur cette trace les contributions de chacune des pales pourront difficilement être discriminées. Si en revanche une interaction aérodynamique se produit uniquement lorsqu'une pale passe à un azimut précis, une tache de localisation est attendue à l'endroit correspondant.

Un autre aspect délicat est l'interprétation des résultats des localisations pour ce qui est des sources du bruit de raies, de nature interférentielle. Dans ce cas les différentes pales d'un rotor ou les différentes aubes d'un stator émettent des signaux cohérents entre eux et conduisent à l'établissement de structures de propagation dites modales caractérisées par des angles d'émission particuliers. Cette structure modale doit être prise comme base lors d'un traitement d'antenne sur un réseau de microphones, qu'il soit installé en paroi du conduit ou à l'extérieur. Notamment la vitesse de phase tournante des modes est un aspect fondamental.

Le propos initial de la participation du LMFA au projet SEMAFOR était de développer un modèle de la structure modale des sources pour les principaux mécanismes de bruit préalablement identifiés, d'une part, et de confronter les prédictions correspondantes au traitement de mesures effectuées en aveugle sur un système réel, d'autre part. Les mesures en question s'appuyaient sur la décomposition modale du champ de propagation dans un conduit, et la possibilité de rétro-propager des modes depuis une antenne de capteurs jusqu'à l'endroit présumé des sources. Le savoir-faire en méthodes inverses associé était développé par les autres partenaires du projet. Dans ce contexte la conjugaison des deux aspects peut être envisagée de différentes façons.

— À partir d'un modèle de sources analytique, il est possible de synthétiser un champ de pression théorique dans le conduit et de simuler l'ensemble des signaux que capterait une antenne de microphones de paroi idéale. Le traitement d'antenne appliqué aux signaux théoriques peut alors être comparé au traitement appliqué sur les signaux effectivement mesurés. On en déduit la contribution de chaque mécanisme présupposé au résultat complet.

— À partir d'une matrice de mesures faites sur l'antenne réelle, il est possible de rétro-propager l'information jusqu'à l'endroit présumé des sources ou leur voisinage proche, et de faire la comparaison avec les modèles à ce niveau.

Dans une telle approche certaines données d'entrée des modèles peuvent être inconnues et être alors interprétées comme des paramètres ajustables. C'est le cas notamment lorsque plusieurs modèles correspondant à des sources différentes sont développés indépendamment les uns des autres et sommés pour aboutir à une simulation complète du système. Jouer sur les paramètres de façon à réduire l'écart entre les traitements d'antenne théorique et expérimental contribue ainsi à améliorer le diagnostic ou la discrimination des sources. Le banc d'essai utilisé dans le cadre du projet SEMAFOR est constitué d'un ventilateur axial basse vitesse composé d'un rotor de 17 pales et d'un stator de 23 aubes, représentatif d'une turbomachine axiale et des interactions aérodynamiques qui s'y produisent. Ce ventilateur est relié à un conduit long de quelques mètres dont l'un des segments est instrumenté avec une antenne de microphones permettant de mesurer le champ acoustique généré par l'étage rotor-stator et qui s'y propage. Cependant, pour des raisons structurelles, certaines aubes du stator ont été épaissies, rompant la régularité et l'homogénéité de l'étage. Cette hétérogénéité de la géométrie produit une modification significative du comportement aéroacoustique de la turbomachine qu'il convient de modéliser.

Le travail de thèse présenté dans ce document vise à répondre aux objectifs proposés dans le cadre du projet SEMAFOR. Le premier objectif est le développement d'un modèle analytique de prédiction du bruit tonal dû à l'interaction des sillages issus du rotor avec le stator en prenant en compte l'effet de grille de ce dernier, dans une configuration tridimensionnelle. Compte tenu des conditions expérimentales du banc SEMAFOR, la prise en compte de la géométrie hétérogène du stator en constitue une implémentation nécessaire. Enfin, la comparaison entre les prédictions fournies par les différentes modélisations de sources et les résultats rétro-propagés issus des campagnes de mesure sur le banc d'essai constitue l'objectif final, afin d'améliorer la discrimination des sources et d'apporter des informations inconnues *a priori* tant dans les modèles analytiques que dans les méthodes inverses.

Les turboréacteurs double flux comme les ventilateurs axiaux subsoniques constituent des turbomachines axiales et partagent de nombreux comportements d'un point de vue aéracoustique. Après une description de leur fonctionnement et des sources de bruits associées, les hypothèses et les principes à la base des modèles analytiques développés durant cette thèse sont exposés et discutés dans le premier chapitre (Chap. 1). Une revue bibliographique des modélisations de la génération (tonale) et de la transmission du bruit à travers une grille d'aube est présentée. Enfin, la technique de raccordement modal à la base de l'approche choisie dans cette thèse est décrite dans son principe général.

La technique de raccordement modal appliquée à la transmission du son à travers une grille d'aubes bidimensionnelle est présentée en détail dans le deuxième chapitre (Chap. 2). Il permet de présenter la méthode et les techniques de résolution dans leur intégralité. Les choix de modélisation sont discutés et une validation est réalisée par comparaison avec un modèle classique de la littérature. Une étude paramétrique est proposée afin d'analyser le comportement aéroacoustique de la grille.

Le troisième chapitre (Chap. 3) décrit le modèle du bruit tonal d'interaction de sillages rotor-stator à partir de la méthodologie présentée au chapitre précédent. L'onde acoustique incidente est simplement remplacée par une description harmonique des rafales hydrodynamiques représentatives des sillages du rotor. Une validation du modèle est réalisée sur une configuration issue du second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997). Enfin, la technique proposée est appliquée au cas du banc SEMAFOR dans une configuration bidimensionnelle et homogène.

Le modèle est ensuite utilisé pour modéliser une géométrie tridimensionnelle et annulaire dans le cadre de la transmission acoustique au chapitre 4. Une première étude est présentée où le modèle bidimensionnel est étendu grâce à l'approche par bandes de rayon. Par la suite, la technique de raccordement modal est employée pour rendre compte de la géométrie annulaire à l'aide de fonctions de Green adaptées. Le cinquième chapitre (Chap. 5) aborde la génération du bruit d'interaction de sillages avec un stator annulaire.

Finalement, une procédure est présentée au sixième chapitre (Chap. 6) pour rendre compte de l'hétérogénéité des aubes de stator caractéristique du banc SEMAFOR. Cette méthodologie est basée sur l'emploi conjoint du principe du dipôle de bord d'attaque, représentatif du chargement instationnaire des aubes induit par l'impact de rafales hydrodynamiques et de la fonction de réponse aéracoustique de la grille de stator à l'aide de la technique de raccordement modal. Cette formulation est appliquée dans un cadre bidimensionnel. Les prédictions issues de ce modèle sont ensuite comparées à des mesures obtenues pendant la campagne d'essai du projet SEMAFOR.

CHAPITRE 1

PRINCIPES DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Turbomachines

Le terme de turbomachine désigne généralement une machine dans laquelle existe un transfert d'énergie entre une partie tournante et un fluide. Lorsque l'énergie est transférée du fluide vers le rotor, il s'agit de la famille des turbines et des éoliennes, tandis les machines génératrices comptent parmi elles les compresseurs, les ventilateurs et les soufflantes. Parmi ces dernières, les étages rotor-stator des turboréacteurs d'avions et les ventilateurs axiaux, bien qu'éloignés dans leurs dimensions, partagent de nombreux points de leur comportement aéroacoustique. Par conséquent, il apparaît nécessaire de présenter quelques caractéristiques de ces machines.

1.1.1 Turboréacteur à double flux

La propulsion aéronautique, dominée après la seconde guerre mondiale par l'utilisation des turboréacteurs à simple flux, a été étendue dans les années soixante aux turbopropulseurs et aux turboréacteurs à double flux. Dans ces derniers, une soufflante de grande dimension permet d'entrainer un important débit en entrée, qui ne passe qu'en partie dans les étages de compression. Le flux froid (secondaire), constitué de l'air comprimé par la soufflante, contourne la chambre de combustion jusqu'à la tuyère, puis est mélangé avec le flux chaud (primaire) dans le jet. En augmentant le débit de sortie avec une température de gaz plus basse pour une même poussée du flux primaire, le rendement de la turbomachine s'accroît et la consommation diminue. La proportion entre les débits résultant de l'accélération du flux secondaire (froid) et du flux primaire (chaud) définit le taux de dilution. Cette architecture a permis d'améliorer les performances des nouvelles générations de moteurs tout en réduisant le bruit de jet, qui constituait la source de bruit prépondérante des avions (Fig. 1.1). Par conséquent, le bruit de la soufflante est devenu une des contributions majeures du bruit du turboréacteur et de l'avion en général, comme le montre la Fig. 1.2. Les réglementations de l'OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale) et des aéroports étant de plus en plus contraignantes, la réduction de cette composante du bruit est un axe essentiel de l'activité des motoristes et des avionneurs. Un étage de soufflante de turbomachine est composé de deux éléments principaux que sont la soufflante (rotor) et le stator redresseur, tous deux placés dans la nacelle (Fig. 1.3). L'air aspiré par la soufflante est tout d'abord dirigé vers le circuit primaire et la chambre de combustion. Le reste de l'écoulement d'air est dirigé vers la grille de stator où il redressé avec son éjection, ce qui augmente la poussée. La soufflante est composée d'un ensemble de pales fortement vrillées et dont le nombre avoisine la vingtaine sur les architectures les plus modernes (la quarantaine pour des moteurs moins récents). Le stator est lui constitué d'aubes dont le vrillage est beaucoup plus faible, mais en plus grand nombre, entre 50 et 60 généralement (~ 90). Afin d'augmenter les performances et de réduire la consommation des moteurs, les nouvelles architectures tendent vers des turboréacteurs à haut taux de dilution avec des diamètres de nacelle toujours croissants. Pour réduire le poids apporté par ces géométries, il devient alors nécessaire de diminuer la longueur de la nacelle pour gagner en compacité. En conséquence, le rôle du stator

redresseur (ou OGV, *Outlet Guide Vanes*) est double. En plus de redresser l'écoulement secondaire, certaines de ses aubes constituent les bras supports entre le circuit primaire et la nacelle. Dans ces nouvelles conceptions, certaines aubes peuvent être alors épaissies pour des raisons structurelles ou même constituer de longues bifurcations dans le circuit secondaire [10, 11]. La symétrie de révolution de l'OGV est alors rompue et le stator est dit hétérogène par opposition au stator homogène où toutes les aubes sont identiques et régulièrement espacées. Ces nouvelles architectures ont le bénéfice de réduire significativement la masse du moteur et donc de diminuer la consommation en kérosène, tout en augmentant ses performances. Cependant, la présence de ces hétérogénéités a pour conséquence d'accroître les instabilités de l'écoulement secondaire et les phénomènes d'interaction entre la soufflante et le stator redresseur. Dans ce cas, briser l'homogénéité et la régularité de l'OGV rend invalides de nombreuses hypothèses utilisées dans les modèles de prédictions du bruit et notamment le critère de Tyler et Sofrin [162] (voir Sec. 1.5.5).

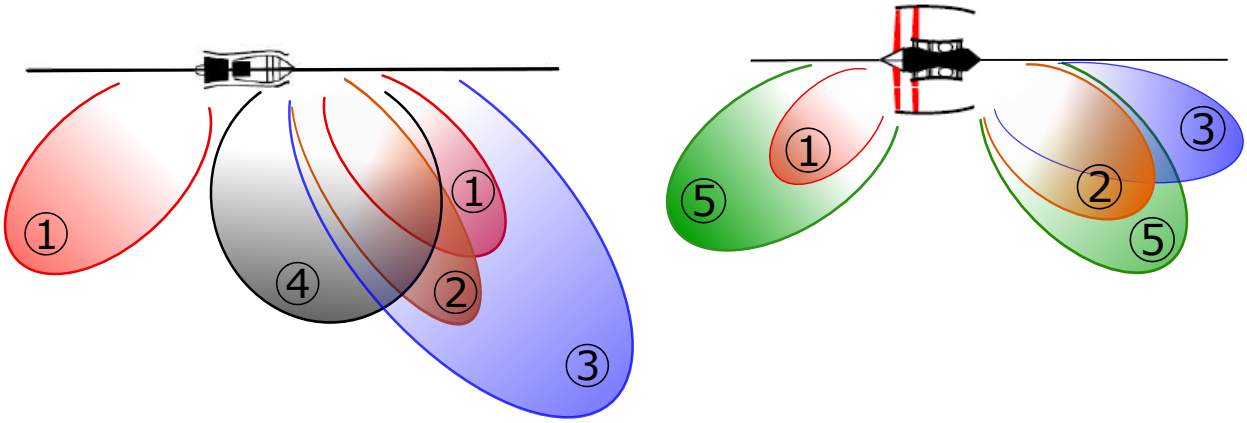


FIGURE 1.1 – Évolution de la directivité et des niveaux relatifs des différentes sources en fonction du taux de dilution : (a) faible taux de dilution (turboréacteur à simple flux). (b) : fort taux de dilution (turboréacteur à double flux). Sources de bruit : (1) : compresseur ; (2) : turbine, combustion ; (3) : jet ; (4) : chocs ; (5) : soufflante. [151].

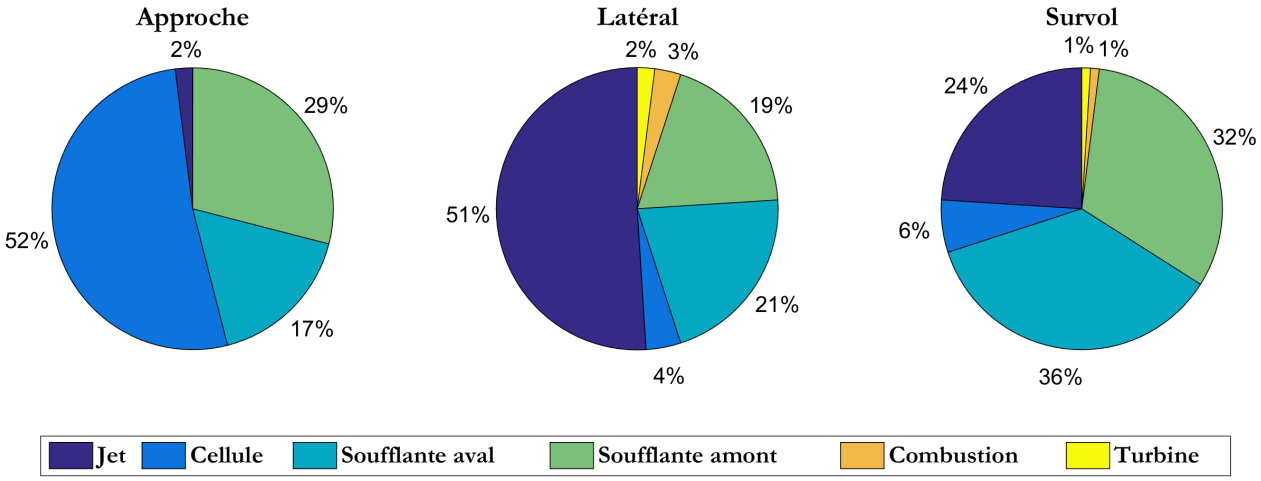


FIGURE 1.2 – Importance relative des différences sources de bruit sur un avion de type quadriréacteur long-courrier, pour les trois points de contrôle de la certification de l'OACI [63].

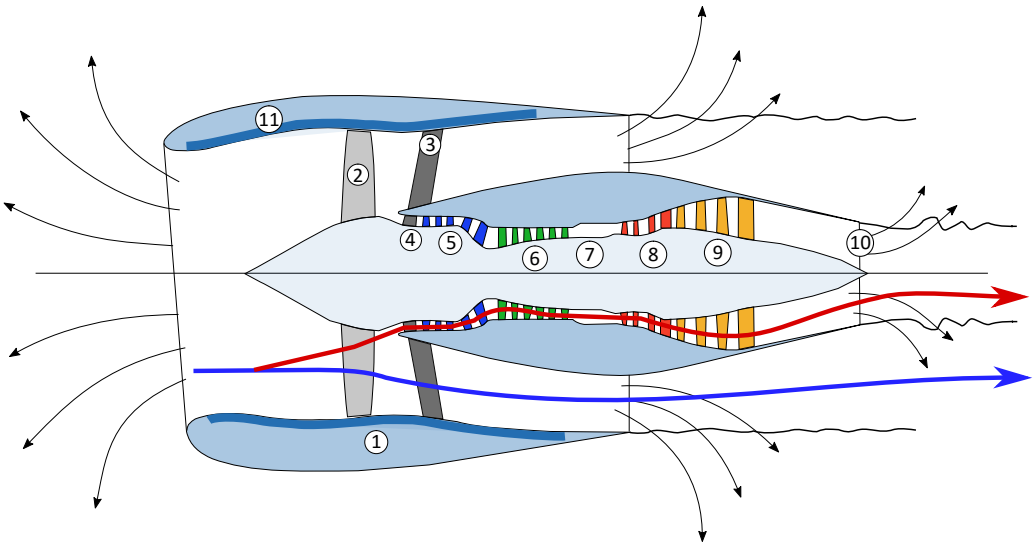


FIGURE 1.3 – Représentation d'un turboréacteur à double flux à haut taux de dilution, d'après [133]. (1) : nacelle ; (2) : soufflante ; (3) : stator redresseur (OGV) ; (4) : IGV (*Inlet Guide Vanes*) ; (5) : compresseur basse pression ; (6) : compresseur haute pression ; (7) : chambre de combustion ; (8) : turbine haute pression ; (9) : turbine basse pression ; (10) : tuyère ; (11) : revêtement insonorisant. Les flux primaire et secondaire sont représentés par les flèches rouge et bleue, respectivement.

1.1.2 Ventilateur en conduit

Le banc d'essai utilisé au cours du projet SEMAFOR, bien qu'il partage en de nombreux points le comportement aéroacoustique d'un étage soufflante-OGV d'un turboréacteur à double flux, rejoint plus précisément la famille des ventilateurs. D'après la norme [105], « un ventilateur est une turbomachine qui reçoit de l'énergie mécanique et l'utilise à l'aide d'une ou de plusieurs roues à aubes de manière à entretenir un écoulement continu d'air ou d'un autre gaz qui le traverse et dont l'élévation de pression ne dépasse pas 30 kPa pour une masse volumique de 1.2 kg / m^3. » Ainsi, un ventilateur est employé dans un système de conditionnement d'air afin de fournir un débit sous une certaine pression, celle-ci servant à vaincre les pertes de charges du circuit. Au-delà de 30 kPa, la machine n'est plus un ventilateur à proprement parler mais un turbocompresseur. Un bref tour d'horizon des différents types de ventilateur est proposé afin de préciser le comportement aéraulique des turbomachines axiales et ce qui les distingue des autres. Ces éléments peuvent être retrouvés dans le livre [46]. Quelques notions de base sont importantes pour la compréhension du fonctionnement de telles machines. Ainsi, la courbe caractéristique d'un ventilateur est sa courbe débit-pression qui représente la pression totale ou statique en fonction du débit-volume, noté q_v (m^3/s). La pression totale Δp_t du ventilateur est la différence entre les pressions totales en sortie et en entrée de la machine, tandis que la pression statique Δp_s est la différence entre la pression totale Δp_t et la pression dynamique de sortie p_{d2}, qui est définie par la relation :

$$p_{d2} = \frac{1}{2}\rho V_2^2, \tag{1.1}$$

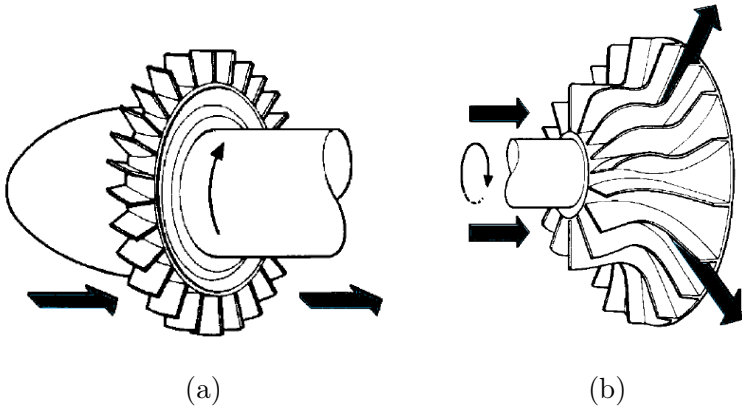
où ρ est la masse volumique et V_2 la vitesse moyenne débitante en sortie du ventilateur. Cette vitesse est par définition le rapport du débit sur la section de sortie du ventilateur. Un point sur cette courbe débit-pression définit un point de fonctionnement du ventilateur. Pour un point particulier, la puissance aéraulique de la machine s'exprime par le produit du débit-volume par la pression totale. La puissance mécanique à la roue est le produit du couple par la vitesse angulaire. Le rapport de la puissance aéraulique sur la puissance à la roue définit le rendement (ou rendement total) du ventilateur. Si la puissance aéraulique est calculée à partir de la pression statique, il s'agit alors du rendement statique. Les conceptions de ventilateurs sont optimisées afin d'atteindre le point de fonctionnement pour lequel le rendement est maximal dans l'application ou l'installation concernée.

Typologie des ventilateurs

Les ventilateurs peuvent être regroupés en trois grandes familles, en fonction de la direction de l'écoulement en entrée et en sortie de machine :

- les hélicoïdes (ou axiaux),
- les centrifuges,
- les tangentiels.

Les ventilateurs hélico-centrifuges forment une famille intermédiaire dont les caractéristiques relèvent des ventilateurs axiaux et centrifuges. Ils ne seront pas détaillés ici.



(a) (b)

FIGURE 1.4 – Roues mobiles de machines axiale (a) et centrifuge (b) [92].

Les ventilateurs hélicoïdes (ou axiaux) Pour les ventilateurs axiaux (Figs. 1.4-a et 1.5), l'écoulement d'air reste globalement parallèle à l'axe de rotation du rotor, en entrée et en sortie de la turbomachine. Ils sont généralement utilisés pour véhiculer des grands débits d'air à des pressions faibles ou moyennes. Trois types de ventilateurs hélicoïdes sont répertoriés par la norme [105] : les hélicoïdes avec et sans redresseur ainsi que les ventilateurs hélices. Les ventilateurs axiaux avec redresseur sont constitués d'un rotor à pales profilées et vrillées, avec un rapport de moyeu (rapport des rayons en pied et en tête de pales) généralement supérieur à 50 %, et d'un stator redresseur. Cet étage est ensuite monté dans un carénage.

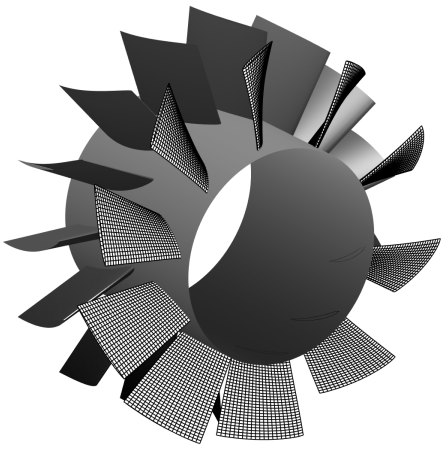


FIGURE 1.5 – Représentation typique de l'étage rotor-stator d'un ventilateur axial.

Le banc SEMAFOR est un ventilateur axial avec stator redresseur dont certaines caractéristiques aéroacoustiques s'identifient à celles d'un turboréacteur à double flux. Les rendements de ces ventilateurs sont généralement élevés, pouvant atteindre des valeurs proches de 90 % dans certains cas [21]. Les pressions sont également plus élevées que sur les autres hélicoïdes à cause du rôle aérodynamique du

stator redresseur et atteignent plusieurs milliers de Pascal. Ces ventilateurs sont utilisés dans l'industrie où ils sont raccordés à des conduits de conditionnement d'air, à l'aspiration ou au refoulement. Ces applications nécessitent une pression statique significative, un débit important et un bon rendement. Les ventilateurs hélicoïdes sans redresseur sont utilisés pour des applications nécessitant des pression modérées (ventilation de bâtiments, refroidissement de moteurs thermiques). Leur rapport de moyeu dépasse peu 50 % et leur rendement total peut atteindre 75-80 %. Leur nombre de pales est compris en 3 et 10 et ils peuvent être montés en paroi d'un baffle, raccordé à un conduit. Les ventilateurs hélices ont entre 2 et 7 pales, souvent élargies en périphérie. La pression statique de ces machines est de l'ordre de 150 Pa, pour des rendements atteignant 65 %. Il sont exclusivement montés en parois pour les systèmes de conditionnement d'air (tour de refroidissement, unité extérieure de climatiseur...)

Les ventilateurs centrifuges Dans le cas des ventilateurs centrifuges (Figs 1.4-b), l'air entre dans la roue parallèlement à son axe de rotation et en ressort radialement. Contrairement aux machines axiales, les centrifuges sont employés pour des applications nécessitant de faibles débits et une pression élevée, apportée par le supplément de pression lié à l'effet centrifuge. Le rapport de la pression statique sur la pression totale générées dans la roue définit un degré de réaction, dont la valeur permet de classer les ventilateurs centrifuges en deux groupes : si le degré de réaction est supérieur à 0.5, alors il s'agit d'un centrifuge à réaction, si cette valeur est inférieure à 0.5, il s'agit d'un centrifuge à action. Le ventilateur centrifuge à réaction est constitué d'une roue où les pales sont courbées dans le sens opposé à la rotation. La roue est généralement insérée dans une volute en forme de spirale logarithmique avec un refoulement perpendiculaire à l'axe du ventilateur. Le rendement de la machine peut atteindre 90 %. Ces ventilateurs sont utilisés dans des applications nécessitant des pressions moyennes ou élevées (ventilateurs de locaux ou d'appareils à forte perte de charge). Les roues des ventilateurs centrifuges à action possèdent des pales inclinées dans le sens de la rotation. Il s'agit de ventilateurs "cage d'écureuil" pour la climatisation des bâtiments ou des véhicules et les appareils de chauffage.

Les ventilateurs tangentiels Les ventilateurs tangentiels sont constitués d'une roue de forme voisine à celle des centrifuges à action. Cependant, alors que la largeur de la roue (étendue axiale) n'excède pas 0.7 D (où D est le diamètre de la roue) pour ces derniers, elle est beaucoup plus importante pour les tangentiels (de 2 à 10 D). Pour ces ventilateurs, l'écoulement reste dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue et le fonctionnement aérodynamique est influencé par la présence d'un tourbillon dont la position dépend du point de fonctionnement et de l'enveloppe. Ces machines sont utilisées pour des applications nécessitant peu de pression et un débit important, comme le conditionnement d'air (unités intérieures de climatiseurs) et les fours domestiques.

1.1.3 Ventilation de la cabine d'un avion

L'élément principal du banc d'essai du projet SEMAFOR est un ventilateur axial subsonique utilisé dans les systèmes de conditionnement d'air pour l'aviation. La section présente vise donc à expliquer brièvement le fonctionnement de la ventilation dans la cabine d'un avion (Fig. 1.6). Pour les premiers vols commerciaux, l'aération des cabines de passagers étaient entièrement fournie par de l'air extérieur. Le pourcentage a diminué de moitié pour les avions plus récents, le reste de l'air de cabine étant filtré et recyclé. Cette évolution a permis notamment un contrôle plus fin de l'humidité relative de l'air de la cabine, mais le filtrage doit être rigoureux pour éviter les problèmes liés à la concentration de dioxyde de carbone dans l'habitacle. En situation de vol, l'air est essentiellement prélevé sur les moteurs de l'avion, notamment sur les étages de compression haute pression pour l'air chaud. Des prélèvements près de la soufflante sont effectués pour les refroidissements. Lorsque l'avion est au sol, l'air est prélevé sur le compresseur de l'APU (*Auxiliary Power Unit*, ou groupe auxiliaire de puissance). L'air est ensuite conditionné pour assurer trois fonctions : la climatisation, la ventilation et la pressurisation. La climatisation est assurée par des échangeurs de chaleur pour obtenir une température ambiante confortable pour les passagers. La ventilation permet d'assurer le renouvellement de l'air en oxygène dans la cabine et d'éliminer les fumées, les gaz toxiques et les odeurs. Enfin, la pressurisation consiste à maintenir à l'intérieur de la cabine une pression acceptable. L'air conditionné est ensuite mélangé avec l'air recyclé et filtré dans l'unité de mélange puis distribué dans les différentes zones de la cabine. L'air

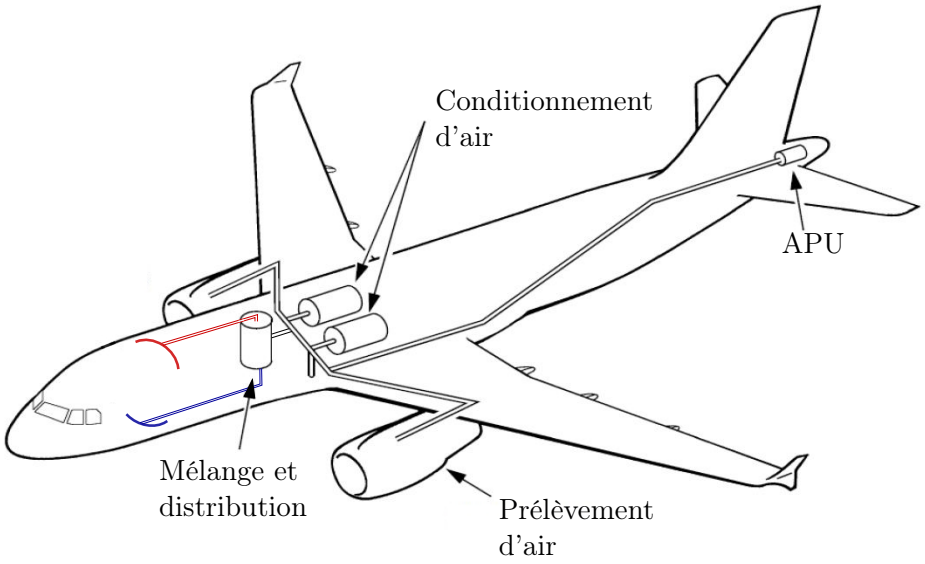


FIGURE 1.6 – Système de ventilation de la cabine d'un avion.

entre généralement dans la cabine par le centre du plafond et près des panneaux des parois latérales, avant d'être évacué par des grilles en bas de ces panneaux. L'objectif du système de répartition de l'air est de fournir une ventilation égale dans toute la cabine. L'air traverse ensuite les soutes avant d'être évacué. Le poste de pilotage est toujours alimenté par de l'air frais uniquement tandis que les soutes électroniques et les offices reçoivent l'air de la cabine, entraîné par des ventilateurs. Le ventilateur du banc SEMAFOR est utilisé dans les avions long-courriers pour cette application.

1.2 Sources de bruit d'une turbomachine axiale

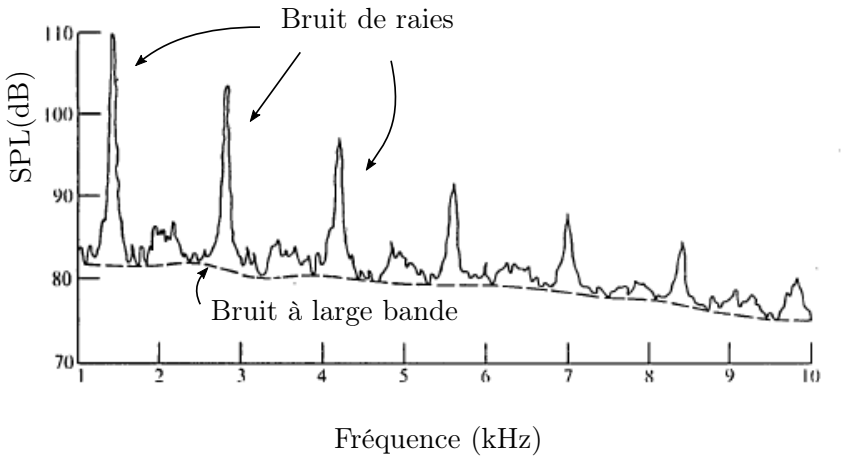


FIGURE 1.7 – Spectre typique d'un étage rotor-stator de turbomachine axiale en régime subsonique, d'après Goldstein [41].

En accord avec les analogies de Lighthill [83] et de Ffowcs-Williams et Hawkings [34], les sources de bruit d'origine aérodynamique dans les turbomachines axiales peuvent être décomposées en trois catégories que sont les sources monopolaire, dipolaire et quadripolaire. Le bruit monopolaire (bruit d'épaisseur) est dû aux fluctuations locales de débit qu'engendre le déplacement du volume d'air par les pales en rotation, du fait de leur forme et de leur épaisseur. Ce mécanisme ne devient significatif que si le nombre de Mach de rotation en bout de pale est supérieur à 0.5. Le bruit quadripolaire provient des contraintes de cisaillement dans l'écoulement turbulent autour des pales. Ce terme ne

devient important que si le nombre de Mach en bout de pale dépasse 0.8. Enfin, le bruit dipolaire est associé aux fluctuations de forces (ou charges aérodynamiques) induites par l'écoulement autour des profils de pales ou d'aubes. Le bruit de charge stationnaire est dû aux efforts aérodynamiques moyens sur les pales et ne devient significatif qu'aux fortes vitesses périphériques. Le bruit de charge instationnaire est le résultat des fluctuations de charge sur les profils. Les origines très diverses de cette composante du bruit sont détaillées dans la suite de cette section. La Fig. 1.7 illustre un spectre du niveau de pression mesuré près d'un étage rotor-stator de turbomachine axiale, en fonction de la fréquence. Deux composantes du bruit sont visibles. La première est constituée de raies, produites par l'interaction périodique de l'écoulement moyen avec les parties tournantes et fixes, ainsi que des interactions aérodynamiques périodiques entre le rotor et le stator. Il s'agit de la composante tonale du bruit de turbomachine, émise à la fréquence de passages des pales (FPP, $f_n = nB\Omega/2\pi$, où n est l'ordre de l'harmonique, B est le nombre de pales (*blades*) du rotor et Ω est la vitesse de rotation du rotor) et ses harmoniques. Il est à noter que les fréquences de ce bruit de raies ne peuvent être définies que pour les parties tournantes. Le bruit à large bande est produit par la nature turbulente de l'écoulement dans la turbomachine et a de nombreuses origines. Il constitue une source de bruit aléatoire (non déterministe) et n'est pas localisé sur le spectre en fréquence.

1.2.1 Sources de bruit tonal

Une description des principales sources de bruit tonal est proposée dans cette section. Elle regroupe le bruit lié à la distorsion de l'écoulement en amont du rotor, de deux aspects complémentaires du bruit d'interaction rotor-stator et la présence, dans le régime transsonique, du bruit généré aux fréquences multiples de rotation (FMR).

Bruit d'interaction rotor-stator

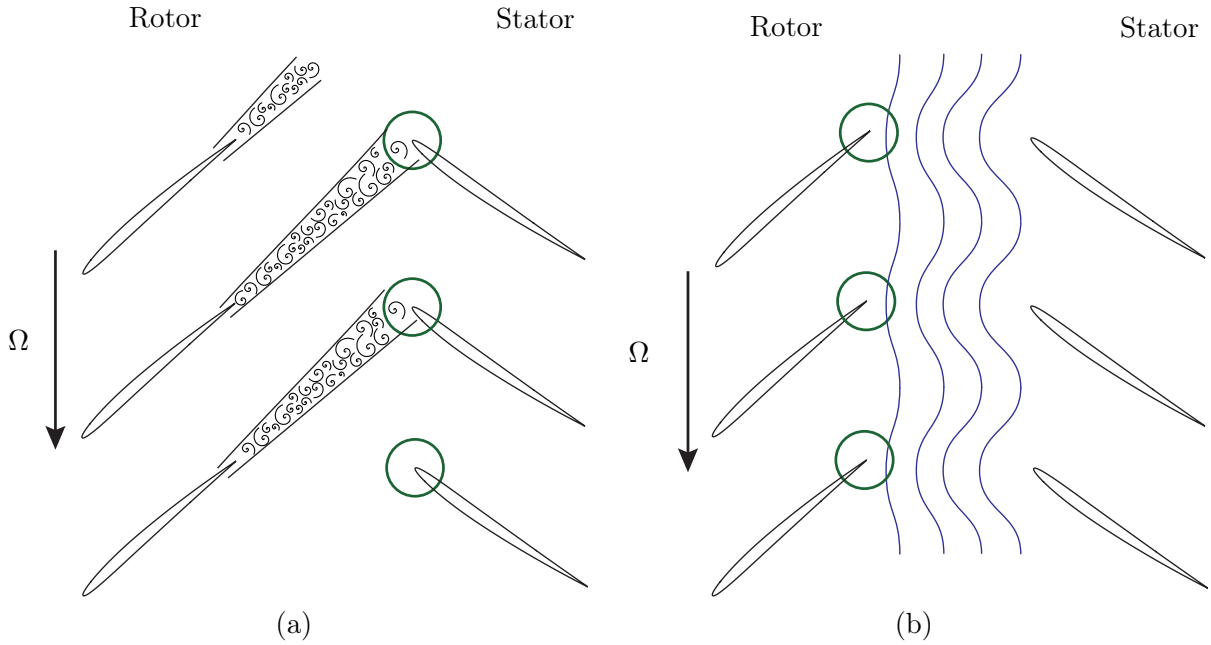


FIGURE 1.8 – Bruit d'interaction rotor-stator : interaction de sillages (a) et interaction potentielle (b).

Dans un étage de turbomachine, la fonction du rotor est de produire un écoulement selon son axe de rotation. Étant donné que seul le flux axial est utilisé (sous forme de poussée), l'énergie cinétique lié à la rotation du fluide induite par les pales du rotor est perdue. Afin de récupérer cette énergie, une grille d'aubes fixe est placée en aval afin de redresser l'écoulement. Il s'agit du stator redresseur, nommé OGV (*Outlet Guide Vanes*) dans le circuit secondaire d'un turboréacteur et IGV (*Inlet Guide Vanes*) dans le circuit primaire. L'étage rotor-stator complet permet d'accroître les performances aérodynamiques de la machine. En revanche, la présence du stator redresseur dans l'écoulement constitue un obstacle

responsable de l'émission d'un bruit supplémentaire. Les sources de bruit liées à l'interaction rotor-stator sont de deux types, l'un lié à l'impact de sillages sur la grille d'aubes et l'autre lié à la remontée potentielle induite par le stator (Fig. 1.8).

Bruit d'interaction de sillages

Les sillages des pales du rotor, produits par la présence des pales dans l'écoulement moyen, forment une structure en hélice dont le pas est essentiellement imposé par l'angle de calage et qui s'enroule en sens inverse de la rotation. Ces sillages sont caractérisés par un déficit de vitesse moyen et une certaine turbulence, responsable d'un bruit à composantes tonale et à large bande. Une fois convectés par l'écoulement moyen, ils viennent balayer les aubes successives du stator. Chaque aube est alors soumise à un écoulement perturbé et devient le siège de fluctuations de charge aérodynamique et produit un bruit de charge instationnaire. Ce mécanisme définit le bruit d'interaction de sillages rotor-stator. La partie périodique du déficit de vitesse, supposé identique d'un sillage à l'autre, est donc responsable d'un bruit de raies, dont la période est celle du passage des sillages. Ainsi les fréquences de ce bruit de raies sont les harmoniques de la fréquences de passage des pales. Le bruit d'interaction de sillages constitue, avec sa transmission acoustique à travers une grille de stator, la source de bruit étudiée dans ce travail de thèse.

Bruit d'interaction potentielle

Chaque aube du stator induit dans son voisinage immédiat une déformation des lignes de courant de l'écoulement, qui en première approximation est conforme à un écoulement potentiel (essentiellement en amont des aubes). Cette déformation peut remonter jusqu'au rotor si ce dernier est très proche. Les pales du rotor subissent alors à leur tour des variations de charge en passant dans ce champ d'écoulement, qui possède la périodicité angulaire des aubes du stator. Des sources acoustiques sont donc induites sur les pales avec comme fréquence fondamentale $2\pi/(V\Omega)$ (V étant le nombre d'aubes). En revanche, le bruit d'interaction potentielle signe encore aux harmoniques de la fréquence de passage des pales du rotor. Il n'a qu'une composante tonale.

Le bruit d'interaction de sillages et le bruit d'interaction potentielle sont ainsi émis aux mêmes fréquences, le premier par le stator et le second par le rotor. Cette coïncidence induit par conséquent des difficultés lors du diagnostic pour distinguer les deux composantes. Cependant, la distorsion potentielle est très vite atténuée lors de sa propagation en amont du redresseur, d'autant plus que les aubes sont minces et peu chargées, alors qu'un sillage a la propriété de persister sur de longues distances. Dès que la distance rotor-stator devient importante, relativement aux dimensions de l'étage, le bruit d'interaction potentielle devient donc négligeable devant le bruit d'interaction de sillages.

Distorsion de l'écoulement en amont du rotor

L'interaction d'une distorsion stationnaire de l'écoulement en entrée de la turbomachine avec le rotor produit un bruit tonal à la fréquence de passage des pales et ses harmoniques. Pour un ventilateur utilisé dans des conditions industrielles, cette distorsion peut venir d'effets d'installation de la machine où l'écoulement d'alimentation n'est pas parfaitement homogénéisé dans le local. Dans un circuit de ventilation, la présence de bifurcations ou d'obstacles en amont de l'étage peut provoquer des variations importantes du champ de vitesse moyenne d'un point à l'autre. Dans le cas des turboréacteurs, cette distorsion amont peut provenir des conditions de vol (direction du vent) ou de la géométrie de la manche d'entrée d'air.

Bruit aux fréquences multiples de la rotation

Lorsque la vitesse en extrémité de pale devient transsonique (régime où une zone apparaît autour du profil dans laquelle la vitesse locale de l'écoulement devient égale à la célérité du son), comme dans un turboréacteur en phase de décollage, de nouvelles raies apparaissent aux harmoniques de la fréquence de rotation de la soufflante. Ces raies appelées FMR (Fréquences Multiples de la Rotation)

ou BSN (*Buzz Saw Noise*) sont dues à des ondes de chocs formées aux bords d'attaque des pales. Du fait de l'irrégularité de calage des certaines pales, ces ondes remontent ensuite l'écoulement jusqu'à l'entrée de la nacelle en suivant un chemin en spirale.

1.2.2 Sources de bruit à large bande

Les sources de bruit à large bande sont liées à l'interaction entre des structures turbulentes (avec une faible cohérence) de l'écoulement et les surfaces solides. Il s'agit essentiellement de l'ingestion de turbulence par le rotor, l'interaction de la part aléatoire des sillages avec la grille d'aubes du stator et les phénomènes liés à la présence de couches limites sur les divers profils. À cela s'ajoutent encore des effets de jeux.

Bruit propre de profil

Le bruit propre désigne l'ensemble des mécanismes de bruit associé à la présence des pales dans un écoulement incident uniforme et faiblement turbulent. Il est directement lié aux caractéristiques de l'écoulement dans les couches limites à l'intrados et l'extrados des pales. Les fluctuations de vitesse dans la couche limite engendrent des fluctuations de pression sur le profil qui peuvent générer du bruit selon plusieurs mécanismes. Ces types de bruit sont produits sur des profils, qu'ils soient en rotation ou fixes. La source de bruit propre prépondérante est constituée du bruit de bord de fuite lorsque l'écoulement est peu turbulent. Dans ce cas, les fluctuations de pression pariétale sont convectées par l'écoulement et atteignent le bord de fuite du profil. Un bruit à large bande est émis par un mécanisme de conversion de l'énergie tourbillonnaire de la couche limite en énergie acoustique [33]. La source de bruit est alors localisée au bord de fuite. Lorsque l'angle entre l'écoulement incident et la pale augmente, un décollement apparaît. En fonction de l'amplitude de ce décollement un bruit à large bande est émis, à plus basse fréquence que pour le bruit de bord de fuite, en raison de la taille plus importante des structures turbulentes lâchées dans l'écoulement. D'autres mécanismes de bruit peuvent exister, comme les ondes d'instabilités de Tollmien-Schlichting en cas de couche limite laminaire ou le bruit d'échappement tourbillonnaire lié à la génération d'allées de tourbillons de von Kármán dans le cas de profils à bords de fuite épais.

Bruit d'interaction de sillages turbulents

En complément de la composante tonale du bruit d'interaction de sillages, l'impact de la part turbulente des sillages du rotor sur les aubes du stator redresseur génère des fluctuations de charge aléatoires. Ce chargement faiblement cohérent excite l'ensemble du spectre et génère par conséquent un bruit à large bande. D'un point de vue général, le mécanisme d'interaction rotor-stator constitue la source prépondérante du bruit de soufflante dans un turboréacteur, notamment en phase d'approche [62], du fait du rayonnement vers l'aval des composantes à la fois tonale et à large bande du bruit.

Bruit de turbulence amont

La turbulence ingérée par le rotor de la turbomachine peut également avoir un effet significatif sur le niveau de bruit rayonné. Les fluctuations de vitesse de l'écoulement turbulent à l'entrée du rotor provoquent des fluctuations aléatoires de charge sur pales et un bruit à large bande est alors rayonné. Il s'agit ainsi d'un bruit de bord d'attaque, où sont localisées les sources. Il a été montré que la forme du spectre acoustique dépend de la taille des échelles intégrales de turbulence de l'écoulement aspiré. Si l'échelle intégrale de turbulence est petite devant l'espacement entre deux pales, chacune d'entre elles émet un bruit décorrélé de celui des pales adjacentes, générant un bruit spectre étalé. En revanche, si l'échelle intégrale de turbulence dans la direction axiale est grande devant l'écart entre deux pales, ce qui se produit par l'effet d'aspiration du rotor, les sources acoustiques ne sont plus décorrélées d'une pale à l'autre. Le bruit résultant est alors toujours à large bande mais avec des remontées centrées sur les fréquences de passage des aubes.

Bruit de couches limites

La présence du conduit dans lequel est placé l'étage rotor-stator contribue également à la génération d'un bruit à large bande. En effet, la convection et l'interaction de couches limites au moyeu et au carter avec le rotor en pied et en tête de pale participe à cette production de bruit. Ce phénomène est particulièrement sensible à l'épaisseur de la couche limite, qui peut devenir assez grande dans le cas de turboréacteurs. En revanche, il s'agit d'un mécanisme secondaire qui ne contribue que partiellement au bruit global rayonné par l'étage rotor-stator.

Bruit de jeu

Le bruit de jeu est lié à la présence d'un écoulement de jeu en tête de pale, dû à la différence de pression entre l'intrados et l'extrados. Cet écoulement se structure ensuite sous la forme d'un échappement tourbillonnaire créant des sources à large bande lors de leur interaction avec la paroi du conduit [45] et le stator redresseur.

1.3 Approches numériques

Dans le cas de la prédiction du bruit tonal ou à large bande de l'interaction rotor-stator, les simulations numériques doivent permettre de modéliser précisément les mécanismes de génération et de propagation du bruit. Toutefois, la différence des fluctuations aérodynamiques et acoustiques nécessite des tailles de mailles et des pas de temps très faibles pour capter la physique du problème. Le maillage doit être également suffisamment grand pour pouvoir contenir tout le domaine des sources, dans le cas où le domaine ne peut pas être réduit grâce à certaines symétries présentes dans la géométrie. Colonius et Lele [20] ont fait la synthèse des différentes méthodes, des enjeux et des limites posés par les calculs numériques du bruit lié aux écoulements. Dans le cas du bruit à large bande, les méthodes directes (DNS, *Direct Numerical Simulation*, LES, *Large-Eddy Simulation*) sont très précises mais également très coûteuses en temps de calcul et ne peuvent être appliquées actuellement qu'à des configurations simplifiées. Les méthodes hybrides, moins coûteuses, consistent à découpler les calculs aérodynamiques (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) et acoustiques. L'acoustique est alors vue comme un post-traitement du calcul de l'écoulement. Plusieurs couplages sont possibles dans le cadre des méthodes hybrides. Pour la partie aérodynamique, alors que le bruit à large bande nécessite la résolution de la turbulence, à plus ou moins grosse échelle, la composante périodique de la turbulence peut être déterminée à partir d'un calcul U-RANS (*Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes*). Les méthodes RANS et U-RANS sont fondées sur le principe de décomposition des grandeurs de l'écoulement en un champ moyen et un champ fluctuant. Dans la méthode RANS, les équations de Navier-Stokes sont ensuite moyennées pour ne calculer que le champ moyen. L'ensemble des phénomènes turbulents est modélisé selon une description statistique quelle que soit l'échelle spatiale. En revanche, l'instationnarité de la méthode U-RANS introduit la dépendance temporelle des équations de Navier-Stokes, permettant de caractériser les phénomènes périodiques, parmi lesquels figure l'interaction tonale rotor-stator. La propagation acoustique de la méthode hybride peut ensuite être déterminée grâce à une analogie acoustique (celle de Goldstein par exemple [24, 22]) ou un code CAA (*Computational AeroAcoustics*) utilisant les méthodes aux différences finies, aux éléments finis ou aux éléments de frontières. Enfin, l'approche numérique basée sur la méthode LBM (*Lattice Boltzmann Methods*) a été employée par Casalino *et al.* [15] ou récemment par Sanjosé *et al.* [144] pour modéliser le bruit d'interaction rotor-stator en présence d'un stator hétérogène. Ces méthodes constituent d'excellents outils pour étudier en profondeur les mécanismes de bruit qu'engendrent les interactions aérodynamiques présentes dans une turbomachine. En revanche, le coût de calcul est actuellement trop important pour qu'elles soient utilisées comme outils de préconception, notamment lors des études paramétriques préliminaires. C'est pourquoi les approches analytiques restent, dans ce cadre, tout à fait adaptée et seront détaillées dans la suite de ce travail de thèse.

1.4 Analyse de Chu et Kovásznay

Dans le cadre de l'élaboration d'une méthode de prédiction du bruit tonal d'interaction rotor-stator, les principes théoriques à la base de tout développement ultérieur doivent être d'abord présentés. Dans leur article de 1957, *Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas* [18], Boa-Teh Chu et Leslie Kovásznay portent leur analyse sur les équations de la dynamique des gaz linéarisées et montrent que dans un milieu compressible, visqueux et conducteur de chaleur, trois modes de fluctuations existent, chacun lié à un type de perturbation : les modes tourbillonnaire, entropique et acoustique. Dans certaines conditions (écoulement, configuration géométrique), des interactions bilatérales se produisent dont l'analyse permet d'apporter un éclairage important à la compréhension des phénomènes physiques liés à la mécanique des fluides. Ce chapitre rappelle tout d'abord les équations générales de la dynamique des gaz [143], les hypothèses simplificatrices utilisées et plus particulièrement l'analyse portée sur le couplage entre le mode tourbillonnaire et le mode acoustique, fondamental en aéroacoustique.

1.4.1 Équations générales de la dynamique des gaz

L'analyse menée ici prendra pour objet des particules fluides dans un gaz, dans une description eulérienne. Ces particules fluides seront caractérisées par des variables cinématiques et thermodynamiques. Plusieurs équations peuvent être écrites, dont la combinaison forment les équations de Navier-Stokes. La conservation de la masse d'une particule fluide, en présence de sources de masse volumique m s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = m,} \tag{1.2}$$

avec la dérivée particulaire :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla,$$

où ρ et $\mathbf{v}$ sont les champs de masse volumique et de vitesse, respectivement.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho\mathbf{f},} \tag{1.3}$$

où $\mathbf{f}$ désigne la densité volumique de forces et $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy dans le fluide. Il s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{I}}} + \underline{\underline{\tau}}.$$

p est la pression statique du fluide et représente les contraintes de compression non visqueuse tandis que $\underline{\underline{\tau}}$ représente les contraintes d'origine visqueuse. Par ailleurs, la loi de comportement pour un fluide newtonien donne :

$$\underline{\underline{\tau}} = \xi(\nabla\cdot\mathbf{v})\underline{\underline{\mathbb{I}}} + 2\mu\underline{\underline{D}},$$

où ξ et μ sont les coefficients de viscosité de Lamé, μ étant la viscosité dynamique du fluide et $\underline{\underline{D}}$ le tenseur des taux de déformation, défini par :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{v} + (\nabla\cdot\mathbf{v})^T).$$

$(\bullet)^T$ représente la matrice transposée. Le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations, des relations supplémentaires sont tirées de la thermodynamique. La loi de Fourier impose pour le flux de chaleur $\mathbf{q}$ entre deux particules fluides la forme suivante :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \tag{1.4}$$

où λ est la conductibilité thermique et T la température absolue.

Enfin, l'équation de l'entropie s peut s'écrire, en présence d'une source de chaleur volumique Q :

$$\boxed{\rho T \frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} + Q,} \tag{1.5}$$

où $\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}}$ est un terme de dissipation interne (irréversibilité mécanique) dû au travail intérieur de la viscosité.

Pour un gaz parfait, les variables p, ρ et s sont reliées par les équations d'état :

$$\boxed{p = \rho r T,} \tag{1.6}$$

$$\boxed{s = c_v \log\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right),} \tag{1.7}$$

où r est la constante thermodynamique du gaz considérée ($r = R/M$), où R est la constante des gaz parfaits et M est la masse molaire du gaz. $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des capacités thermiques massiques à pression constante c_p et à volume constant c_v, tel que $r = c_p - c_v$ (relation de Mayer). L'équation d'état, sous l'hypothèse d'un gaz isentropique, permet aussi d'introduire la célérité locale du son c définie par la relation :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}. \tag{1.8}$$

Si m, $\mathbf{f}$ et Q sont des fonctions connues, les cinq équations encadrées, avec les conditions aux limites, sont suffisantes pour déterminer les cinq inconnues p, ρ, T, s et $\mathbf{v}$.

Hypothèse simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices sont considérés en l'absence de sources de masse m, de forces volumiques $\mathbf{f}$ et de chaleur Q.

Écoulement non visqueux Si l'écoulement est considéré non visqueux, alors les coefficients de Lamé ξ et μ sont nuls et par conséquent $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{I}}}$. Ces composantes ne sont jamais nulles dans la réalité, mais dans les cas considérés, leurs effets sont supposés assez faibles pour être négligés devant d'autres. Cette hypothèse induit également la réduction de l'équation de quantité de mouvement (1.3) à l'équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{D}\rho\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p, \tag{1.9}$$

Écoulement isentropique Lorsque l'écoulement est tel que le comportement du fluide est à la fois non visqueux et non conducteur de chaleur, alors ξ, μ et λ sont nuls. L'équation 1.5 montre alors qu'il n'y a aucune disspation d'énergie et il vient :

$$\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{1.10}$$

ce qui signifie que l'entropie des particules fluides se conserve au cours de leur évolution. L'écoulement est dit isentropique. S'il est de plus uniforme, il est dit homoentropique. En première approximation, la propagation des ondes acoustiques peut être considérée comme un processus isentropique, qui assure la réversibilité des processus thermodynamiques.

Écoulement incompressible Si la masse volumique de chaque particule de fluide reste invariable le long de sa trajectoire, l'écoulement est par définition incompressible, d'où :

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{1.11}$$

La relation (1.11) implique seulement que la densité de chaque particule ne change pas durant son mouvement. Par conséquent si le fluide est homogène (ou hétérogène) à un instant initial il restera homogène (ou hétérogène). Si le fluide est homogène (ce qui sera considéré dans ce travail) et incompressible, on admet que la masse volumique est constante et égale à $\rho = \rho_0$. L'équation de la conservation de la masse d'un écoulement incompressible est simplifiée :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.12}$$

Un champ de vitesse incompressible est donc à divergence nulle et de ce fait il est dit solénoïdal. Par ailleurs, cette propriété établit qu'il est possible d'exprimer le vecteur vitesse à l'aide d'un vecteur potentiel $\mathbf{\Psi}$ tel que :

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{\Psi}, \tag{1.13}$$

puisque la divergence du rotationnel d'un vecteur est égale à zéro. Une autre propriété des écoulements incompressibles est que le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est relié au champ de rotationnel du champ de vitesse $\mathbf{\Omega}$, appelé tourbillon ou vorticité par l'expression :

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \tag{1.14}$$

Écoulement irrotationnel Le champ de vitesse de l'écoulement est irrotationnel dans les régions où :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1.15}$$

Il doit alors dériver d'un champ potentiel scalaire ϕ appelé potentiel de vitesse et défini à une constante près :

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \tag{1.16}$$

car le rotationnel d'un gradient est nul. Un écoulement irrotationnel est par conséquent aussi appelé écoulement potentiel. La propagation d'une onde acoustique dans un milieu homogène est un exemple d'écoulement irrotationnel. De plus, le théorème de Helmholtz-Hodge, également appelé théorème fondamental du calcul vectoriel, assure que tout champ vectoriel se décompose en une composante irrotationnelle et une composante solénoïdale, soit la somme du gradient d'un champ scalaire et du rotationnel d'un champ vectoriel. Ainsi, pour tout champ de vitesse $\mathbf{v}$, il existe un champ potentiel ϕ et un champ potentiel vecteur $\mathbf{\Psi}$ tels que :

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}. \tag{1.17}$$

1.4.2 Principe de l'analyse

Un champ de perturbations sur un état moyen constitué par le milieu gazeux homogène et au repos est considéré (le cas d'un milieu en translation uniforme est identique puisqu'un changement de repère galiléen permet de se ramener au milieu au repos). Les fluctuations ($p - p_0$, $s - s_0$, etc ...) et l'intensité de ces fluctuations ($(p - p_0)/p_0$, $(s - s_0)/s_0$, etc ...) sont exprimées par rapport à l'état moyen du milieu désigné par l'indice 0. Un paramètre sans dimension α est ensuite introduit, caractéristique de l'intensité de la perturbation. Par exemple, celui-ci peut être pris tel que $\alpha \sim |p - p_0|/|p_0|$, $\alpha \sim |v|/|c_0|$, où c_0 est la célérité du son dans un milieu au repos : $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$. Les variables sont ensuite exprimées comme des séries entières de α. Ainsi, le champ de pression peut être écrit sous la forme :

$$p = p_0 + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots \tag{1.18}$$

où $p^{(n)}$ est de l'ordre de α^n. Dans la suite, l'hypothèse que $\xi = \frac{2}{3}\mu$ est considérée.

En réécrivant les équations fondamentales sous cette formulation, et en regroupant les termes de mêmes ordres en α, le système d'équations suivant est obtenu :

$$\frac{\mathrm{D}\rho^{(n)}}{\mathrm{D}t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)} = F_1^{(n)}, \tag{1.19}$$

$$\rho_0 \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}^{(n)}}{\mathrm{D}t} + \nabla p^{(n)} - \mu_0 \nabla^2 \mathbf{v}^{(n)} - \frac{1}{3}\mu_0 \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)} \right) = \mathbf{F}_2^{(n)}, \tag{1.20}$$

$$\frac{p_0}{R}\frac{\mathrm{D}s^{(n)}}{\mathrm{D}t} - \lambda_0 \nabla^2 T^{(n)} = F_3^{(n)}, \tag{1.21}$$

$$\frac{p^{(n)}}{p_0} - \frac{\rho^{(n)}}{\rho_0} - \frac{T^{(n)}}{T_0} = F_4^{(n)}, \tag{1.22}$$

$$\frac{s^{(n)}}{R} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{T^{(n)}}{T_0} + \frac{p^{(n)}}{p_0} = F_5^{(n)}. \tag{1.23}$$

Les fonctions $F_i^{(n)}$, pour $n > 1$ représentent la non-linéarité des équations originelles. Pour $n = 1$:

$$F_1^{(1)} = m, \quad \mathbf{F}_2^{(1)} = \rho \mathbf{f}, \quad F_3^{(1)} = Q, \quad F_4^{(1)} = F_5^{(1)} = 0.$$

Dans cette formulation, pour toute valeur de n, la partie linéaire de l'opérateur différentiel est placée au membre de gauche et les termes non linéaires ou les termes sources regroupés à droite. Ainsi, seuls les termes sources à l'ordre 1 vont correspondre à des sources réelles de masse, de quantité de mouvement et de chaleur. Les termes sources aux ordres supérieurs traduiront une non-linéarité relative à des interactions bilatérales. Finalement, les variables de température et de masse volumique sont éliminées au profit de la pression et de l'entropie et le nombre de Prandtl $\mu c_p/\lambda$ est supposé égal à 3/4.

Les nouvelles équations s'expriment comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)} + \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\mathrm{D}p^{(n)}}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s^{(n)}}{\mathrm{D}t} = \frac{m^{(n)}}{\rho}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}^{(n)}}{\mathrm{D}t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p^{(n)} - \nu_0 \Delta \mathbf{v}^{(n)} - \frac{\nu_0}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(n)}) = \mathbf{f}^{(n)}, \tag{1.25}$$

$$\frac{\mathrm{D}s^{(n)}}{\mathrm{D}t} - \frac{4}{3}\nu_0 \Delta s^{(n)} - \frac{4}{3}(\gamma - 1)\nu_0 \frac{c_p}{\rho_0 c_0^2}\Delta p^{(n)} = \frac{Q^{(n)}}{\rho_0 T_0}, \tag{1.26}$$

où $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$ représente la viscosité cinématique du gaz.

Décomposition au premier ordre

À l'ordre 1, le système d'équations linéarisées s'exprime :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\mathrm{D}p^{(1)}}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s^{(1)}}{\mathrm{D}t} = \frac{m}{\rho}, \tag{1.27}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}^{(1)}}{\mathrm{D}t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p^{(1)} - \nu_0 \Delta \mathbf{v}^{(1)} - \frac{\nu_0}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)}) = \mathbf{f}, \tag{1.28}$$

$$\frac{\mathrm{D}s^{(1)}}{\mathrm{D}t} - \frac{4}{3}\nu_0 \Delta s^{(1)} - \frac{4}{3}(\gamma - 1)\nu_0 \frac{c_p}{\rho_0 c_0^2}\Delta p^{(1)} = \frac{Q}{\rho_0 T_0}. \tag{1.29}$$

En vertu du théorème de Helmholtz-Hodge, le champ de vitesse peut être décrit en introduisant deux nouvelles variables, la vorticité $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ et la divergence du champ de vitesse $\zeta = \nabla \cdot \mathbf{v}$. Les équations futures seront établies uniquement pour l'ordre $n = 1$, les exposants seront donc supprimés. La démarche de Chu et Kovásznay consiste à déduire un système d'équations sur ces nouvelles variables, puis à décomposer chacun des champs retenus en trois sous-systèmes notés de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_t + \boldsymbol{\Omega}_p + \boldsymbol{\Omega}_s,$$
$$p = p_t + p_p + p_s,$$

et ainsi de suite. Cette notation est choisie car elle permet d'identifier trois types de phénomènes physiques connus et concentre les effets respectifs de la viscosité (par l'intermédiaire du rotationnel de la vitesse), de la compressibilité (par la divergence de la vitesse) et de la conductibilité thermique. Trois groupes d'équations peuvent être formulés :

1$^{\text{er}}$ groupe

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}_t}{\mathrm{D}t} - \nu_0 \Delta \boldsymbol{\Omega}_t = \nabla \times \mathbf{f}, \tag{1.30}$$
$$p_t = 0, \quad s_t = 0, \quad \zeta_t = 0, \tag{1.31}$$
$$\nabla \times \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\Omega}_t, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0. \tag{1.32}$$

Ce premier groupe s'identifie aux équations décrivant la production, la convection et la dissipation de petites perturbations rotationnelles dans un milieu visqueux incompressible. Il s'agit du mode de vorticité ou mode tourbillonnaire. Il ne produit pas de fluctuations de pression au premier ordre. En effet, celles-ci sont proportionnelles au carré des fluctuations de vitesse, et sont donc négligeable lorsque les fluctuations de vorticité sont faibles. De le même manière, il n'y a pas de génération d'entropie. Par ailleurs, le champ de vitesse est solénoïdal, tel qu'il devrait l'être pour un écoulement incompressible. Ce mode est relié au cadre de la théorie de la turbulence, en tant que branche de la mécanique des fluides.

2$^{\text{ème}}$ groupe

$$\nabla \times \mathbf{v}_p = \boldsymbol{\Omega}_p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_p = \zeta_p, \tag{1.33}$$
$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{D}^2 p_p}{\mathrm{D}t^2} - \Delta p_p - \frac{4}{3}\frac{\gamma\nu_0}{c_0^2}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\Delta p_p = \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} - \frac{4}{3}\nu_0\Delta\right) m - \rho_0 \mathbf{f} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{Q}{T_0}, \tag{1.34}$$
$$\frac{\mathrm{D}s_p}{\mathrm{D}t} - \frac{4}{3}\nu_0 \Delta s_p = \frac{4}{3}(\gamma - 1)\frac{\nu_0 c_p}{\rho_0 c_0^2}\Delta p_p, \tag{1.35}$$
$$\zeta_p = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\mathrm{D}p_p}{\mathrm{D}t} + \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s_p}{\mathrm{D}t} + \frac{m}{\rho_0}. \tag{1.36}$$

Ce second groupe s'identifie aux équations décrivant la production, la propagation et l'absorption d'ondes de compression dans un milieu visqueux, compressible et conducteur de chaleur. Le type de mouvement associé est le mode acoustique. Ce mode s'accompagne de fluctuations d'entropie à cause de la dissipation des ondes acoustiques, mais le champ de vitesse associé demeure irrotationnel au premier ordre. Ce mode est relié au cadre de l'acoustique linéaire, comprise ici comme une autre branche de la mécanique des fluides.

3$^{\text{ème}}$ groupe

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \boldsymbol{\Omega}_s = 0, \quad p_s = 0, \tag{1.37}$$
$$\frac{\mathrm{D}s_s}{\mathrm{D}t} - \frac{4}{3}\nu_0 \Delta s_s = \frac{Q}{\rho_0 T_0}, \tag{1.38}$$
$$\zeta_s = \nabla \cdot \mathbf{v}_s = \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s_s}{\mathrm{D}t}. \tag{1.39}$$

Enfin, ce dernier groupe s'identifie aux équations décrivant la production, la convection et la diffusion d'hétérogénéités de température ou d'entropie dans un milieu conducteur de chaleur. Il s'agit du mode entropique. Ce mode ne génère pas de fluctuation de pression au premier ordre et s'accompagne uniquement d'une faible fluctuation de vitesse irrotationnelle chargée de compenser la variation de densité. Ce mode est relié au domaine des transferts thermiques.

Hypothèses simplificatrices

Dans le cas où le domaine considéré ne contient pas de frontières solides, les trois groupes d'équations sont indépendants et les trois modes de fluctuations d'un gaz sont découplés. Chacun évolue au premier ordre comme si les autres n'existaient pas et peut donc être considéré seul. En dépit de ce découplage, les équations demeurent très difficiles à résoudre. Chu et Kovásznay ont montré en revanche que les différents termes n'ont pas la même importance. Grâce à un évaluation des ordres de grandeur, ils ont montré que les effets de dissipation et de diffusion peuvent être négligés si le temps d'observation reste court compte tenu des caractéristiques du milieu (ce qui est équivalent à un domaine dont la taille est raisonnable en termes de longueurs d'onde) d'une part, et si la longueur caractéristique des fluctuations reste grande devant le libre parcours moyen des particules dans le gaz d'autre part. Dans ces conditions, dans un domaine dépourvu de sources, un ensemble d'équations très simples peut être obtenu :

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}_t}{\mathrm{D}t} = \mathbf{0}, \tag{1.40}$$

$$\frac{\mathrm{D}s_s}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{1.41}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2 p_p}{\mathrm{D}t^2} - c_0^2 \Delta p_p = 0. \tag{1.42}$$

Les équations (1.40) et (1.41) représentent des perturbations de vorticité et d'entropie dites figées, qui n'évoluent que très lentement au cours du temps et sont essentiellement convectées, transportées par le flux moyen. Cette hypothèse est notamment employée en mécanique des fluides pour interpréter les mesures de turbulence par fil chaud, et se trouve à la base des théories linéarisées de l'aérodynamique non stationnaire. L'équation (1.42) s'identifie à l'équation des ondes, base de l'acoustique linéaire. Les perturbations acoustiques, sont principalement des fluctuations de pression irrotationnelles et isentropiques.

Le découplage analysé par Chu et Kovásznay ne concerne que des perturbation très faibles dans un milieu par ailleurs homogène. Lorsque l'on considère un écoulement de base non uniforme, cisaillé par exemple, le découplage des équations au premier ordre ne peut plus être démontré. De la même façon, les trois modes de fluctuations d'un gaz ne restent découplés au premier ordre que tant qu'aucune autre relation n'ajoute de contrainte sur les variables associées. Un couplage peut donc être introduit en présence de conditions au limites, qu'elles soient formulées en termes de vitesse ou de température. Ce couplage peut avoir lieu lorsque la frontière est une paroi rigide. Le champ total des fluctuations de vitesse doit s'annuler à la paroi, ce qui impose un lien entre les fluctuations de vitesse acoustique et tourbillonnaire si ces deux modes sont présents. Si la couche limite est négligée, c'est l'annulation de la vitesse normale à la paroi qui est imposée, ce qui revient à écrire une condition de glissement, ou de rigidité. L'impact d'un écoulement tourbillonnaire et la réflexion d'une onde acoustique sur une surface solide sont représentatifs de ce type de couplage entre deux modes de fluctuations. Ce couplage entre mode tourbillonnaire et mode acoustique est à la base de l'aérodynamique non stationnaire des profils minces.

L'étude qui précède ne vaut que pour des perturbations suffisamment faibles pour justifier la seule linéarisation, ceci délimitant le cadre des travaux engagés durant cette thèse. Des perturbations de plus grandes amplitudes nécessitent un développement aux ordres supérieurs, impliquant des interactions

bilatérales non linéaires entre les trois modes de fluctuations. Ces analyses permettent de mettre en lumière un grand nombre de phénomènes, allant de la dynamique du tourbillon en turbulence, la formation d'ondes de choc, la thermoacoustique ou encore le bruit de mélange des écoulements turbulents, analysé par ailleurs par Lighthill [83, 84].

1.5 Considérations sur la géométrie d'un étage rotor/stator

Les modélisations analytiques nécessitent d'établir un ensemble d'hypothèses sur la géométrie du problème afin de pouvoir obtenir des solutions analytiques suffisamment simples pour fournir un outil de prédiction rapide. La section suivante présente les éléments permettant de schématiser la géométrie tout en traduisant l'essentiel de la physique.

1.5.1 Théorie linéarisée du profil mince

Un profil aérodynamique est défini par un contour fermé indéformable à deux dimensions, conçu de telle sorte qu'une fois placé dans un écoulement et le régime permanent atteint, il subisse une force moyenne principalement perpendiculaire à cet écoulement et proportionnelle à son énergie acoustique spécifique $\rho_0 W_0^2/2$ (ρ_0 étant la densité du fluide et W_0 la vitesse de l'écoulement). Le profil est défini par un bord d'attaque qui fait front à l'écoulement, un bord de fuite par lequel l'écoulement le quitte et une loi d'épaisseur δ définie à partir de la ligne de cambrure moyenne (Fig. 1.9). Le segment joignant les points extrêmes de la ligne moyenne est appelé corde, notée c. L'inclinaison de l'écoulement par rapport à la tangente à la ligne moyenne au bord d'attaque définit l'angle d'attaque α (ce dernier peut également être défini par rapport à la corde). En fonctionnement subsonique, l'intrados est en surpression tandis que l'extrados est en dépression. La résultante des efforts définit la portance du profil par sa composante perpendiculaire à la direction de l'écoulement incident, et la trainée par sa composante parallèle.

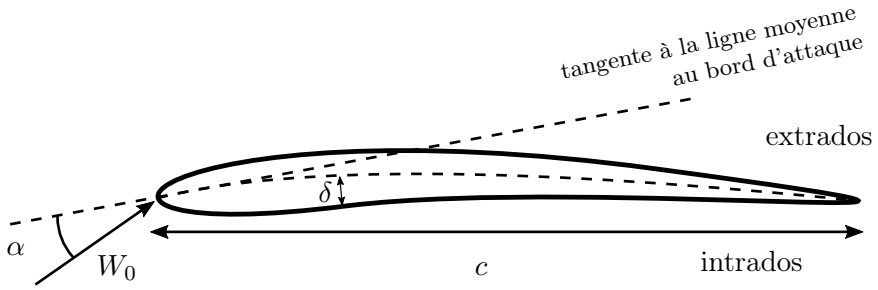


FIGURE 1.9 – Paramètres géométriques de définition d'un profil.

Dans le cas des profils minces utilisés dans les architectures de machines tournantes, une application de l'analogie de Ffowcs-Williams et Hawkings [34] indique que l'essentiel du bruit généré d'origine aérodynamique se ramène à des sources dipolaires, constituées par les forces aérodynamiques et réparties le long du profil. Il s'agit alors de bruit de charge, en gardant à l'esprit que la portance est la force aérodynamique majeure à considérer. Une analyse dimensionnelle montre que pour des nombres de Mach faibles, la contribution des fluctuations de charge est beaucoup plus importante que celle de la charge moyenne, et ce d'autant plus que la fréquence augmente. En revanche, pour des nombres de Mach proches des régimes transsoniques, c'est la charge stationnaire qui détermine le bruit aux plus basses fréquences. Il s'agit là d'une différence notable illustrant les comportements aéroacoustiques distincts d'un rotor de ventilateur ou d'une pale d'hélicoptère, par exemple.

Lorsque l'on considère une machine tournante subsonique carénée, le bruit de charge stationnaire sur les pales du rotor correspond à des modes tournants se propageant dans le conduit. Ces modes sont dits attachés au rotor, car ils tournent dans le même sens et à la même vitesse que le rotor. Tant que le nombre de Mach de rotation en périphérie $\Omega R_c/c_0$ reste inférieur à β, tous les modes attachés

sont coupés. Ω est la vitesse de rotation du rotor, R_c est le rayon au carter, $\beta^2 = 1 - M^2$, $M = W_x/c_0$ étant le nombre de Mach axial. Cela signifie que lorsque le mouvement relatif des pales par rapport à l'écoulement moyen est subsonique, le bruit de charge stationnaire ne se propage pas. Les phénomènes de coupure des modes acoustiques dans les conduits sont détaillés en Sec. 4.3.2.

Un résultat important est obtenu lorsque le profil est peu chargé. Si l'angle d'attaque, la cambrure et l'épaisseur peuvent être considérés comme faibles et si l'amplitude des perturbations incidentes est faible également, il y a un découplage entre l'aérodynamique stationnaire et l'aérodynamique instationnaire. Ce résultat, issu du travail de von Kármán et Sears [164] montre que les paramètres géométriques du profil en déterminent le charge moyenne (notamment les courbes d'évolution des coefficients de portance et de trainée), tandis que les fluctuations autour de la charge moyenne s'établissent indépendamment de ces paramètres, comme si le profil était une plaque plane, rigide et sans épaisseur à incidence nulle. La détermination de la charge instationnaire sur un profil indépendamment de la charge stationnaire constitue classiquement le problème de Sears [150], illustré en Fig. 1.10. Dans ce cadre, les perturbations incidentes n'interviennent qu'en tant que variations de l'angle d'attaque.

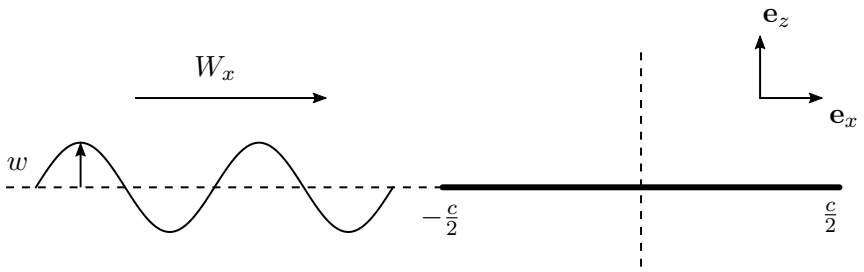


FIGURE 1.10 – Représentation du problème de Sears [150] : calcul des fluctuations de portance induites par la convection des perturbations de vitesse normale w, à la vitesse d'écoulement W_0, sur un segment rigide, sans épaisseur.

Ce découplage est une propriété asymptotique, valide tant que les paramètres géométriques demeurent petits. L'étude des turbines, constituées d'épaisses aubes à forte cambrure échappe à son domaine de validité. En revanche, il peut être appliqué aux profils minces rencontrés dans les ventilateurs, les soufflantes de turboréacteurs ou les compresseurs, etc. La conséquence principale est que le bruit généré par la plupart des pales de telles architectures peut être prédit avec une bonne approximation sans connaître leur géométrie exacte, ce qui est un avantage significatif du point de vue de la modélisation.

1.5.2 Effet de grille

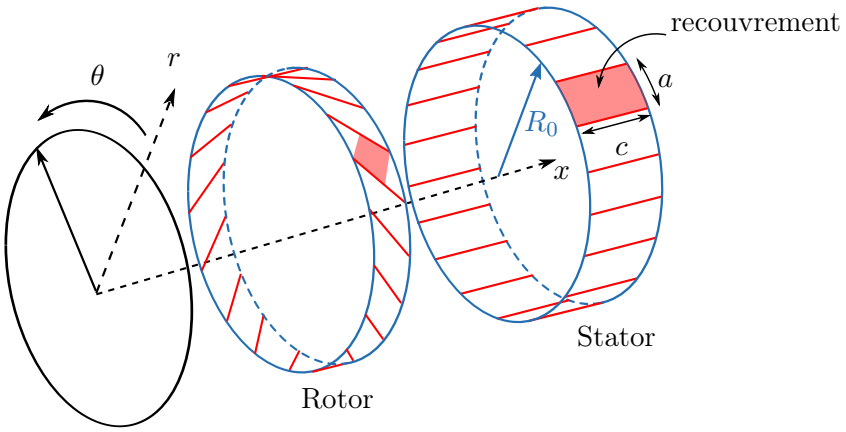


FIGURE 1.11 – Représentation du problème de Sears en configuration de grille d'aubes dans un étage rotor-stator de turbomachine axiale. Coupe cylindrique bidimensionnelle au rayon R_0.

La réponse aéroacoustique d'un profil soumis à une rafale hydrodynamique (Fig. 1.10) peut être déterminée en combinant le calcul de la charge instationnaire induite (théorie de Sears [150], formulation d'Amiet-Schwarzschild [3, 4] ou technique de Wiener-Hopf) et son rayonnement acoustique par l'analogie de Ffowcs-Williams et Hawkings [34]. Cependant, en raison de grand nombre d'aubes et de pales des étages de turbomachines, la réponse aéroacoustique d'une aube dans une telle architecture ne peut plus être décrite indépendamment de son environnement. En effet, le recouvrement entre aubes adjacentes introduit un effet dit de grille, dont l'importance a été reconnue par un grand nombre d'auteurs (Goldstein [41], Atassi et Hamad [6], Hall et Silkowski [49] et Peake et Parry [113] par exemple). L'effet de grille est double : d'une part, la réponse aérodynamique d'une aube est modifiée par la présence des aubes adjacentes et d'autre part, le rayonnement acoustique généré par une aube est diffracté et/ou réfléchi par les aubes adjacentes. Dans le cadre d'une théorie compressible et linéarisée, distinguer ces deux aspects peut être difficile du fait de l'équivalence entre l'acoustique et l'aérodynamique instationnaire compressible (identité des équations). Ils sont généralement combinés de manière implicite dans les modèles compressibles. L'effet de grille dépend essentiellement de l'angle de calage, de la solidité c/a et du nombre d'aubes de l'étage de turbomachine considéré. Il est synthétisé par le rapport du recouvrement entre aubes adjacentes et de la longueur de corde $\Gamma = d/c$, comme l'illustre la Fig. 1.12.

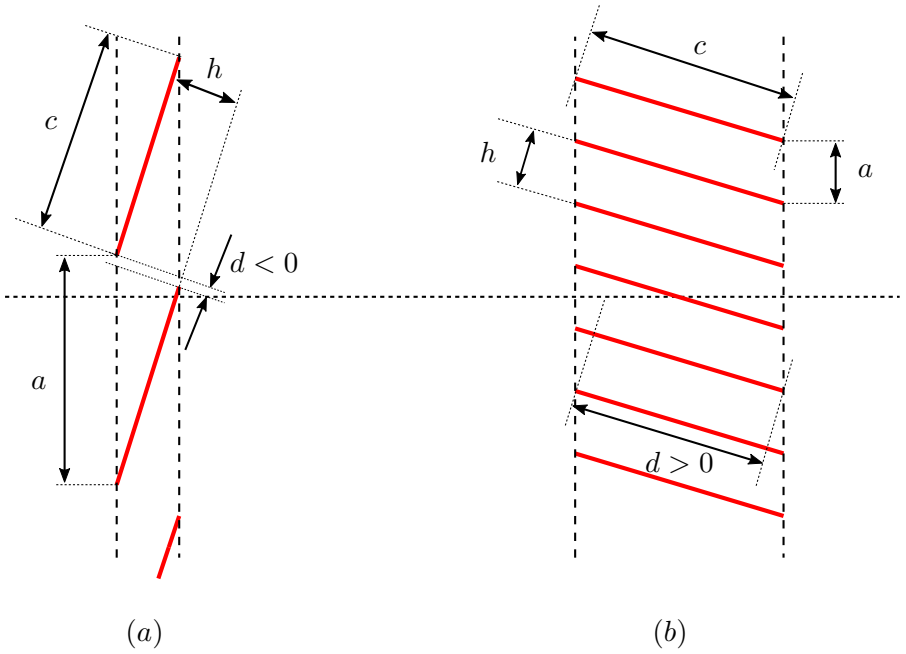


FIGURE 1.12 – Représentation du taux de recouvrement $\Gamma = d/c$. (a) : Recouvrement négatif ($d < 0$) pour un rotor en tête de pale. (b) : Recouvrement positif ($d > 0$) et important ($\Gamma \simeq 1$) pour un stator.

Comme l'indique la Fig. 1.12, l'effet de grille n'est pas aussi significatif pour le rotor que pour le stator d'une turbomachine, plus particulièrement en tête de pales du rotor, à cause du vrillage qui se traduit par une plus forte inclinaison des pales par rapport à l'axe. Dans cette configuration (Fig. 1.12-a), le rapport de recouvrement est nul (ou négatif) et les pales génèrent du bruit de même qu'un profil isolé. Ceci se justifie intuitivement par le fait que les sources équivalentes, considérées comme une répartition de dipôles le long de la corde ne rayonnent pas dans la direction des pales adjacentes. Au contraire, lorsque le recouvrement est important, comme pour le stator, l'effet de grille est significatif et doit être pris en compte (Fig. 1.12-b). Pour exemple, le cas du bruit tonal généré par l'impact des sillages du rotor sur le stator est considéré, celui-ci constitue le mécanisme d'interaction principal de l'étage de turbomachine. Dans le modèle de profil isolé, la diffraction des ondes acoustiques générées et le confinement par les aubes adjacentes est ignoré : toutes les aubes contribuent individuellement au champ acoustique total. Même si les sources équivalentes sont concentrées au bord d'attaque, la réflexion de leur rayonnement par les aubes recouvrants le bord d'attaque d'une aube de référence n'est pas prise en compte. De plus, les nombreuses réflexions dans les espaces inter-aubes sont significatives

dans la prédiction du bruit transmis en aval du stator. Le nombre d'aubes de stator est couramment plus important que le nombre de pales du rotor et le vrillage du stator est généralement moins prononcé que celui du rotor. Ces deux caractéristiques impliquent que le recouvrement est important pour le stator, et par conséquent l'effet de grille doit être pris en compte pour le modéliser, tandis qu'une réponse de profil isolé peut se justifier pour représenter un rotor.

Par ailleurs, les sources du bruit tonal associées aux interactions rotor-stator sont parfaitement corrélées, que ce soit le long d'un profil ou entre les aubes d'une grille, puisqu'elles résultent de phénomènes périodiques. Comme le montre le critère de Tyler et Sofrin [162], détaillé en Sec. 1.5.5, les sources interfèrent de manière constructives ou destructives, privilégiant la propagation de certains modes dans le conduit. Par conséquent, toute erreur de phase ou d'amplitude dans la description des sources peut mener à des écarts d'estimation du bruit généré. Les corrélations aube-à-aube, mais également les répartitions d'amplitude et de phase sur chaque aube doivent être précisément décrites. À l'inverse, les sources de bruit à large bande sont par nature aléatoires, liées à la turbulence de l'écoulement. Elles sont par conséquent faiblement corrélées le long du profil et ne le sont généralement pas d'une aube sur l'autre. En conséquence, des approximations sur la géométrie d'un étage de turbomachine peuvent être pertinentes pour le bruit à large bande, tandis qu'elle ne sont plus justifiées pour le bruit tonal, l'effet de grille en étant un exemple.

En conclusion, la réponse d'une grille de stator déroulée, décrite comme un réseau de canaux bifurqués, à une excitation acoustique dépend *a priori* des différentes échelles de longueur et de leur rapport. Ainsi les valeurs du rapport de la longueur d'onde acoustique sur la longueur de corde λ/c, du rapport de la longueur d'onde acoustique sur la distance inter-aubes λ/a et de la solidité c/a décrivent différents comportements acoustiques. Typiquement, si $\lambda/c \gg 1$ et $\lambda/a \gg 1$, les canaux inter-aubes sont acoustiquement compacts. Dans ce cas, l'onde incidente est transmise en aval de la grille pratiquement dans son intégralité avec une très faible réflexion. Si $\lambda/a > 2$, seule l'onde plane peut se propager dans les canaux. Pour d'autres valeurs arbitraires, de multiples diffractions apparaissent entre les deux interfaces et produisent des motifs plus ou moins complexes.

1.5.3 Angle de calage

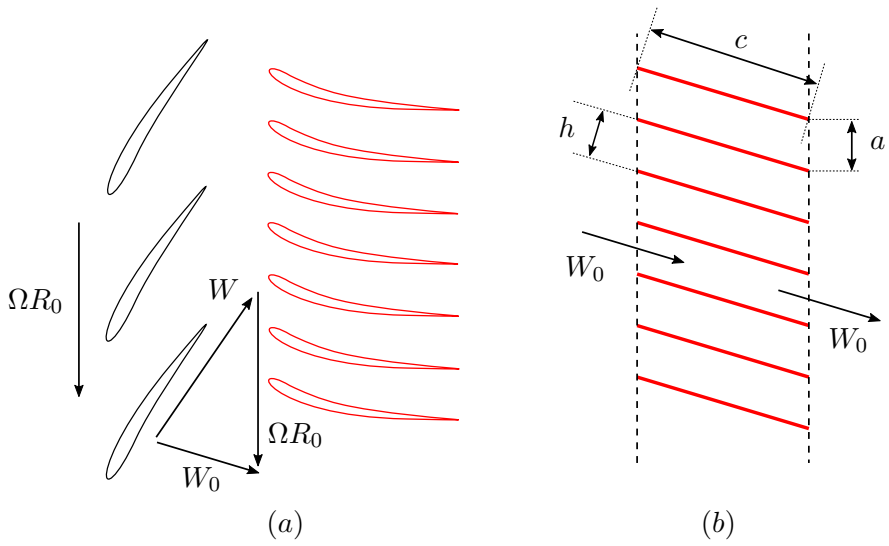


FIGURE 1.13 – a : Étage rotor-stator de turbomachine. Représentation bidimensionnelle d'une coupe cylindrique de rayon R_0. b : Grille d'aubes modélisée comme une rangée de plaques planes avec un angle de calage non nul, représentatif du bord d'attaque des aubes du stator.

Tant que le cadre de la théorie linéarisée (Sec. 1.5.1) demeure valide, un profil mince peut être modélisé comme une plaque plane rigide afin d'obtenir des solutions analytiques pour le comportement aéroacoustique. Si le stator doit être représenté comme une rangée de plaques planes, la définition de

son angle de calage équivalent devient discutable. Pour un rotor, l'angle de calage varie principalement en fonction du vrillage des pales. Mais la cambrure est en général peu prononcée en tête de pale, donc la définition d'une inclinaison de plaque plane équivalente se justifie. Pour un stator dont le vrillage est faible mais la cambrure plus prononcée, deux choix alternatifs et complémentaires sont possibles, dont la pertinence dépend principalement de la position de l'observateur par rapport à l'étage.

Lorsqu'une rafale aérodynamique interagit avec un profil, le chargement instationnaire induit se concentre au bord d'attaque. Par conséquent le stator peut être modélisé par une grille de plaques calées de telle sorte qu'elles soient alignées avec la ligne de cambrure moyenne des aubes au bord d'attaque. Cette approche correspond à la Fig. 1.13. Les sources dipolaires équivalentes ont dès lors une inclinaison réaliste pour la prédiction de leur rayonnement en amont du stator. Dans cette configuration, la vitesse absolue selon le triangle des vitesse en sortie du rotor est quasiment parallèle à la corde du profil pour le point de fonctionnement optimal. De plus, les modèles analytiques basés sur l'hypothèse du profil faiblement chargé (problème de Sears, illustré en Fig. 1.10) requièrent un écoulement moyen uniforme et parallèle aux plaques planes. Dans ce cas, la vitesse moyenne W_0 est inclinée dans tout le domaine, ce qui correspond à un écoulement tournant dans la géométrie annulaire. La rotation de l'écoulement n'a plus de sens en aval du stator, son rôle étant précisément de le redresser.

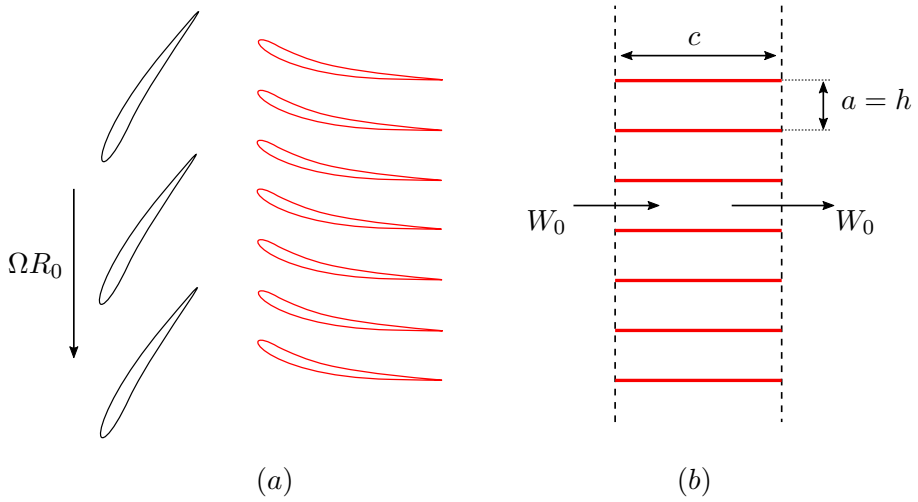


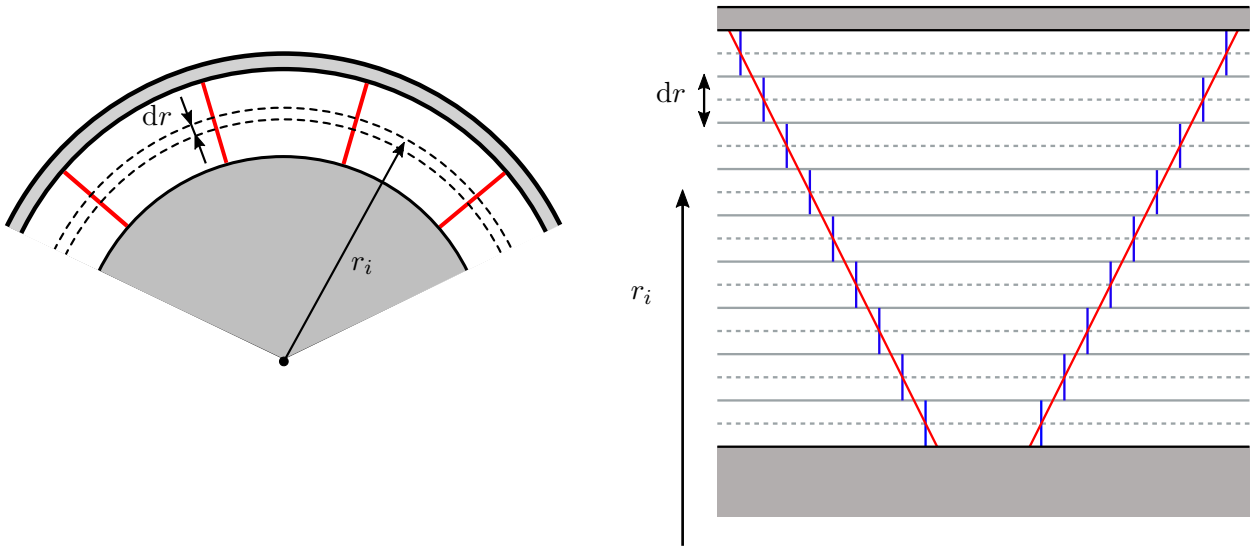
FIGURE 1.14 – a : Étage rotor-stator de turbomachine. Représentation bidimensionnelle d'une coupe cylindrique de rayon R_0. b : Grille d'aubes modélisée comme une rangée de plaques planes avec un angle de calage nul, représentatif du bord de fuite des aubes du stator.

Vu depuis l'aval, le stator doit rendre l'écoulement axial, par conséquent les aubes sont idéalement alignées avec l'axe. Une modélisation du stator par une grille d'aubes non calées est donc justifiable (Fig. 1.14). Néanmoins, cette configuration ne respecte pas l'inclinaison des sources dipolaires au bord d'attaque et n'est plus compatible avec un triangle des vitesses réaliste. Par compatibilité avec le problème de Sears, l'écoulement sera considéré axial dans tout le domaine d'étude. Cette approche fait donc l'hypothèse d'une grille d'aubes faiblement cambrées, avec un angle de calage réduit. Le taux de recouvrement étant égal à $\Gamma = d/c = 1$, le stator équivaut à un réseau périodique de guides d'ondes axiaux bifurqués. Ces deux approches doivent être vues comme complémentaires selon le point de vue adopté, aucune des deux ne décrivant totalement une géométrie réaliste d'aubes de stator.

1.5.4 Approche par bandes de rayon

Une configuration réaliste d'un étage rotor-stator de turbomachine axiale, en prenant en compte le vrillage ainsi que des angles de flèche, de dévers et de calage, est bien trop compliquée pour pouvoir être décrite avec des moyens analytiques. Une méthode classique pour modéliser l'étage est de recourir à l'approche par bandes de rayon (*strip-theory approach*). La grille d'aubes tridimensionnelle est tout d'abord décomposée en une série de bandes annulaires centrée autour de plusieurs rayons moyens r_i, avec i le rang de la bande. Chaque bande est ensuite déroulée, puis assimilée à une grille d'aubes

rectilinéaire dont la configuration (excitation, angles de calage, écoulement moyen, longueur de corde...) est imposée par la grille d'aubes annulaire au rayon r_i. La grille d'aubes est ainsi décrite localement, dans le sens de l'envergure. Le chargement instationnaire sur les aubes à chaque rayon moyen est calculé à partir d'un modèle de réponse de grille d'aubes rectilinéaire ; il est considéré comme une répartition de sources dipolaires dans l'analogie acoustique. Le saut de pression instationnaire sur toute l'envergure est ensuite utilisé en accord avec une fonction de Green adaptée au conduit annulaire pour en calculer le rayonnement acoustique. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'inclure dans le modèle des effets tridimensionnels comme le vrillage des pales et des aubes, des variations radiales de la géométrie et de l'écoulement moyen. Cependant, comme le pointent Posson *et al.* [121] ainsi que Peake et Parry [113], l'approche par bandes de rayon comporte un certain nombre de limitations. Premièrement, la configuration déroulée d'une grille d'aubes annulaire introduit un parallélisme entre les aubes adjacentes qui n'est pas réaliste. En particulier, ceci tend à accentuer les effets de résonance entre les aubes. De la même manière, les conditions aux limites radiales, représentées par des parois rigides parallèles dans les modèles de grille rectilinéaire induisent des modifications du saut de pression instationnaire par rapport à celui obtenu en présence de parois annulaires. Par ailleurs, l'approche par bandes de rayon ne permet pas de prendre en compte la dispersion en ordre radial, ce qui signifie que la grille ne peut générer que des modes diffractés dont le nombre d'onde radial est identique à celui du mode incident (qu'il soit acoustique ou hydrodynamique). Pourtant, comme le montre Envia [29], la dispersion modale dans le sens de l'envergure est un aspect primordial de la transmission acoustique à travers une grille d'aubes annulaire. Négliger cet effet induit notamment une surestimation excessive des pertes par transmission acoustique, l'énergie acoustique n'étant pas redistribuée correctement entre tous les modes radiaux. Finalement, cette approche introduit des sauts artificiels en phase comme en amplitude entre les bandes, ceci modifiant les propriétés de coupure modale d'un segment à un autre. Par exemple, un mode peut être passant près du carter et être coupé près du moyeu. Pour apporter une réponse à certaines de ces limitations, Posson *et al.* [121] suggèrent l'emploi de corrections aux fonctions de réponse de grille rectilinéaire. Les comparaisons avec des modèles tridimensionnels s'appuyant sur la théorie des surfaces portantes (Namba [102], Schulten [146]) et un code Euler linéarisé (Atassi *et al.* [7]) sur un cas test du troisième *Computational AeroAcoustic (CAA) workshop* [103] a montré que cette approche est adaptée pour des conduits annulaires étroits mais montre des écarts significatifs pour des petits rapports de moyeu, que ce soit en termes de saut de pression ou de rayonnement acoustique.



(a) (b)

FIGURE 1.15 – Représentation de l'approche par bandes de rayon. Découpage de la configuration annulaire en bandes (a) au rayon moyen r_i et identification à un ensemble de grilles rectilinéaires (b). La méthode introduit un parallélisme entre les aubes adjacentes et modifie les conditions aux limites radiales.

1.5.5 Décomposition modale de Tyler et Sofrin

J.M. Tyler et T.G. Sofrin, dans leur article de 1962 : *Axial flow compressor noise studies* [162], analysent les mécanismes de propagation et de génération du bruit au sein des compresseurs axiaux. Après avoir détaillé les conditions de propagation et de coupure du champ acoustique dans des conduits rectangulaires et annulaires, leur article aborde de manière phénoménologique le bruit généré par l'interaction entre un rotor et un stator de compresseur. L'approche de Tyler et Sofrin consiste à considérer le champ acoustique généré par l'interaction rotor/stator comme la superposition de modes tournants. Prenant tout d'abord l'exemple de l'interaction entre le rotor et un stator composé d'une seule aube, ils expriment la pression générée $p(r,\theta,t)$ mesurée dans le plan (r,θ) et dans le repère du stator, par une double décomposition dans l'espace de Fourier :

$$p(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mn}(r)\cos(m\theta - n\omega t + \phi_{mn}), \tag{1.43}$$

où n est l'harmonique temporelle, m le nombre de lobes (périodes angulaires), où encore l'ordre azimutal du mode, $\omega = B\Omega$, B étant le nombre de pales et Ω la vitesse de rotation du rotor. a_{mn} et ϕ_{mn} sont respectivement l'amplitude et la phase du mode désigné par ses indices (m,n). Les auteurs considèrent ensuite une grille composée de V aubes, espacées de $\Delta\theta = 2\pi/V$. Le temps mis par une pale pour passer de la position d'une aube à la suivante est $\Delta t = \Delta\theta/\Omega = 2\pi/V\Omega$. La pression générée par l'interaction du rotor et d'une aube numérotée 1 s'écrit, pour le mode (m,n) :

$$p^1_{mn} = a_{mn}(r)\cos[m\theta - n\omega t + \phi_{mn}]. \tag{1.44}$$

Pour la suivante, numérotée 2, la pression s'écrit :

$$p^2_{mn} = a_{mn}(r)\cos[m(\theta-\Delta\theta) - n\omega(t-\Delta t) + \phi_{mn}]. \tag{1.45}$$

En généralisant à toutes les aubes, la relation suivante est obtenue :

$$p^{1+q}_{mn} = a_{mn}(r)\cos[m(\theta-q\Delta\theta) - n\omega(t-q\Delta t) + \phi_{mn}]. \tag{1.46}$$

En sommant ensuite la contribution des V aubes du stator, il vient :

$$p_{mn} = \sum_{q=0}^{V-1} p^{1+q}_{mn} = \sum_{q=0}^{V-1} a_{mn}(r)\cos[m(\theta-q\Delta\theta) - n\omega(t-q\Delta t) + \phi_{mn}]. \tag{1.47}$$

L'équation 1.47 peut être réécrite en prenant en compte les interférences entre toutes les contributions :

$$p_{mn} = V a_{mn}(r)\cos[m\theta - nB\Omega t + \phi_{mn}], \tag{1.48}$$

où m est restreint aux valeurs suivantes :

$$\boxed{m = nB + kV, \quad k \in \mathbb{Z}.} \tag{1.49}$$

L'équation (1.48) peut également s'écrire :

$$p_{mn} = V a_{mn}(r)\cos[m(\theta - \frac{nB}{m}\Omega t) + \phi_{mn}]. \tag{1.50}$$

Ce mode peut être identifié à un motif spatial composé de m lobes tournant à la vitesse angulaire $\Omega_m = nB\Omega/m$. L'interaction rotor/stator génère des modes azimutaux spécifiques, dont seuls ceux qui possèdent une vitesse de rotation suffisante peuvent se propager. L'existence de tels motifs peut être montrée qualitativement avec un exemple impliquant peu de pales et d'aubes. La Fig. 1.16 illustre sous la forme de diagrammes l'interaction d'un rotor de 8 pales (en noir au centre, dont une pale de référence est en bleu) avec un stator de 6 aubes (en rouge, sur l'extérieur). Pour $n = 1$, l'Eq. 1.48 prédit l'existence d'un mode avec $8 - 6 = +2$ lobes tournant dans le même sens que le rotor, avec

une vitesse de rotation égale à $\Omega_m = 8/2\ \Omega = 4\ \Omega$. Dans le premier diagramme, la position de la pale de référence coïncide avec celle de l'aube plus à la droite, et une coïncidence similaire existe du côté opposé. Ces coïncidences sont représentées par les parties ombrées du motif à deux lobes. Les différents diagrammes montrent les positions intermédiaires du rotor et des coïncidences lorsque le rotor effectue une rotation d'un quart de tour. Il peut être observé que pendant ce laps de temps, le mode a fait une révolution complète, illustrant le fait que sa vitesse de rotation est quatre fois celle du rotor.

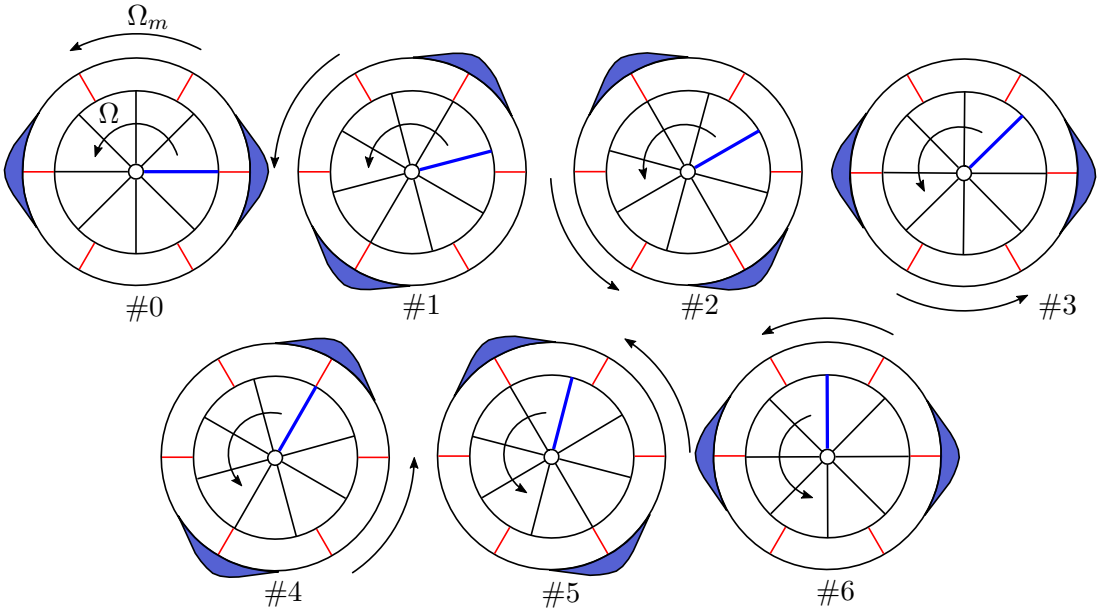


FIGURE 1.16 – Représentation des modes de Tyler et Sofrin. Les lignes rouges et noires représentent les aubes du stator et les pales du rotor, respectivement. La ligne bleue indique la pale de référence.

1.6 Modélisations analytiques d'une grille d'aubes de stator

La diffraction d'une onde acoustique par une grille rectilinéaire, formée de plaques parallèles d'épaisseur négligeable, dans une configuration bidimensionnelle a été étudiée par de nombreux auteurs. Parmi d'autres, Twersky [161] a tout d'abord développé une expression pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un réseau infini de cylindres à l'aide de fonctions de Green adaptées. Miles [93] a combiné cette méthode avec les résultats de Rayleigh [127] et Lamb [77] de la diffraction d'un cylindre unique pour obtenir des expressions explicites des coefficients de transmission et de réflexion. Dans cet article, Miles applique ensuite cette méthode à une grille de plaques inclinées, sans considérer d'écoulement, avec une hypothèse de faible solidité, exprimée mathématiquement par l'expression $ka << kd < \pi$, a étant la demi-longueur de corde et d la distance entre deux centres de plaques, k le nombre d'onde acoustique. Achenbach et Li [2] ont apporté une formulation exacte au problème considéré par Miles, en employant des fonctions de Green adaptées pour obtenir une équation intégrale portant sur la discontinuité en pression au travers de chaque plaque. Cette équation est résolue en décrivant ce saut de pression en polynômes de Chebyshev et en résolvant le système d'équations résultant. Cependant, à cause de l'intégration de fonctions oscillantes, il devient difficile d'obtenir des résultats précis pour tous les angles de calages. Par ailleurs, ces études ont été réalisées dans une optique purement acoustique, et n'intègrent ni d'écoulement moyen ni d'interaction de sillages, comme c'est le cas dans les turbomachines.

Dans les années 1970, le développement des turbomachines et le nombre croissant de ses applications, particulièrement dans le domaine de l'ingénierie aéronautique, a mené à des efforts considérables pour comprendre et modéliser la production du bruit par les systèmes rotor/stator. De nombreuses études analytiques et numériques ont été réalisées pour modéliser des grilles rectilinéaires formées de plaques minces en configuration bidimensionnelle. Ainsi, après avoir élaboré un modèle de grille simplifié à l'aide d'une méthode par disque semi-actif [70], Kaji et Okazaki [71] ont considéré le problème de la transmission acoustique au travers d'une grille bidimensionnelle avec une méthode de points de

singularité basée sur le potentiel d'accélération acoustique. La discontinuité du potentiel d'accélération acoustique, traduisant le saut de pression acoustique induit par la présence des aubes, est représentée par un ensemble de dipôles normaux répartis sur chaque aube, ré-émettant sous l'effet de l'onde acoustique incidente. Une équation intégrale relie la vitesse de l'onde acoustique incidente aux coefficients de la série de dipôles, équation qui est ensuite résolue numériquement. Les auteurs introduisent ici les terminologies de configurations sub-résonnantes et super-résonnantes. La configuration sub-résonnante correspond au cas où la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence de coupure de la grille. Le champ diffracté n'est composé que d'une onde transmise, de même angle de propagation que l'onde incidente et d'une onde réfléchie dont l'angle est relié à celui de l'onde incidente par le principe de trace (voir Sec. 1.7.3). Lorsque la fréquence d'excitation dépasse la fréquence de coupure, la configuration devient super-résonnante et le champ diffracté voit l'apparition de nouvelles ondes acoustiques. La même méthode a été utilisée pour modéliser la génération du bruit d'interaction rotor/stator dans un article ultérieur [69]. Une méthode similaire a été utilisée par Carta [14] pour traiter uniquement des phénomènes de résonance acoustique ou de coupure dans les grilles d'aubes. Whitehead [165], puis Smith [152] ont également développé une technique de surface portante, qui permet d'obtenir le chargement instationnaire, le champ de vorticité et le champ acoustique en amont et en aval d'une grille rectilinéaire pour tout type de perturbations incidentes, hydrodynamique ou acoustique, ou encore à des oscillations de flexion ou de torsion des aubes. La méthode de Whitehead, basée sur les travaux de Lane et Friedman [79], s'appuie sur le saut de pression, dont la transformée de Fourier est solution d'une équation intégrale, résolue numériquement par une méthode de collocation. Pour sa part, Smith développe une approche qui ne porte pas sur le saut de pression de part et d'autre de chaque aubes. Ces dernières sont modélisées par des rangées de tourbillons attachés dont la force est égale au saut de vitesse axiale en bord de fuite des pales, engendré par la libération de tourbillons afin de satisfaire la condition de Kutta. Connaissant la vitesse des perturbations incidentes, il reste à déterminer la distribution de ces tourbillons permettant de produire la vitesse satisfaisant la condition de rigidité des aubes et la continuité de la pression dans le sillage convecté en aval de la grille d'aubes. De même, une équation intégrale est obtenue sur la distribution de tourbillons, permettant d'obtenir finalement le saut de pression. Cette équation est résolue numériquement par collocation. Le modèle est ainsi équivalent à celui de Whitehead. Ce dernier a repris le modèle de Smith pour l'implémenter dans le code numérique LINSUB (*LINearised SUBsonic unsteady flow in cascade*) [166]. Les premières tentatives de modélisation de grille rectilinéaire tridimensionnelle ont été apportées par Goldstein [41], puis par Atassi et Hamad [6], qui prennent en compte une variation en envergure des rafales et des parois rigides de la grille. Ces dernières permettent de se rapprocher d'une configuration annulaire déroulée, en simulant les parois rigides du moyeu et du carter de la turbomachine. Enfin, des méthodes de surface portante ont été étendues pour traiter le cas d'une grille d'aubes annulaire, présentées par Namba [101, 102] et Schulten [146, 147]. Ces modèles supposent un écoulement moyen axial uniforme et peuvent s'appliquer aux stators à calage nul. Ils ne prennent cependant pas en compte le vrillage des aubes et les variations radiales de l'écoulement. Kodama et Namba [76] ont par la suite étendu leur modèle à la prise en compte de la flèche des aubes et Schulten [148] a proposé une nouvelle représentation de la fonction de Green en conduit annulaire qui tolère également un angle de flèche.

Alternativement, la technique de Wiener-Hopf a été utilisée de manière extensive pour fournir des solutions explicites au problème de la grille rectilinéaire bidimensionnelle. La technique de Wiener-Hopf a été développée pour résoudre des équations intégrales [58], mais est plus largement utilisée dans le cadre des équations à dérivées partielles dans des domaines décomposables en plusieurs sous-parties qui possèdent différentes conditions aux limites. Elle exploite les propriétés de fonctions transformées (typiquement la transformation de Fourier) dans le cadre de l'analyse complexe. Cette méthode a d'abord été utilisée dans le domaine de l'électromagnétisme pour traiter des cas de diffraction d'ondes électromagnétiques par une grille de plaques conductrices semi-infinies ([13, 57, 56]). La méthode a par la suite été appliquée à l'étude de la transparence acoustique et à la génération de bruit d'interaction. Mani et Horvay [88] traitent de la transmission acoustique à travers un réseau infini de plaques semi-infinies, en négligeant le couplage entre le bord d'attaque et le bord de fuite, à l'aide d'une solution approchée basée sur la technique de Wiener-Hopf. Koch [74] a ensuite étendu cette analyse aux grilles

de corde finie et donne ainsi les coefficients de réflexion et de transmission des ondes acoustiques se propageant en amont et en aval de la grille. Ces formulations deviennent néanmoins très coûteuses en temps de calcul en hautes fréquences, à mesure que le nombre de modes passants s'accroit. Dans ce contexte, Peake [111] a introduit dans le modèle de Koch l'impact d'une rafale hydrodynamique, donnant le chargement instationnaire sur les pales. Il a également développé des approximations hautes fréquences qui permettent de rapides évaluations des fonctions nécessaires à la technique de Wiener-Hopf [112]. Glegg [40] fournit une expression directe du champ acoustique diffracté qui ne nécessite pas le calcul du chargement sur les aubes. Cette formulation est valable pour des grilles rectilinéaires tridimensionnelles, excitées par des ondes acoustiques ou des rafales hydrodynamiques qui prennent en compte les variations en envergure. Enfin, Posson [124] a étendu cette approche pour fournir l'expression exacte du champ acoustique dans les canaux inter-aubes ainsi que le saut de pression sur les aubes, avec des écoulements subsoniques. Le modèle a ensuite été étendu aux grilles d'aubes annulaires par Posson *et al.* [121, 120] à l'aide de l'approche par bandes de rayon.

Finalement, le problème de la transmission acoustique au travers d'une grille d'aubes a également été traité par le biais de la méthode de raccordement modal, généralement utilisée pour les problèmes aux limites. Cette méthode, largement employée dans le domaine de l'électromagnétisme, a été décrite en détail par Mittra et Lee [95] et utilisée pour la première fois par Whitehead [167] pour les cas de diffraction d'ondes électromagnétiques. La méthode de raccordement modal est parfaitement appropriée quand la géométrie du problème peut être identifiée comme la jonction de plusieurs régions. La première étape de cette procédure implique la définition des champs solutions d'une équation aux dérivées partielles sous la forme de sommes de modes adaptés aux différentes régions. Si les bases modales des sous-domaines sont connues (par l'équation différentielle et leurs conditions aux limites), le problème se résume à la détermination des amplitudes modales associées aux champs dans chaque sous-domaine. Cette représentation modale s'accompagne de l'application de conditions de continuité aux interfaces entre les régions du problème. Cette procédure, en liaison avec les propriétés d'orthogonalité des modes (propriété des bases), mène à un système linéaire infini sur les amplitudes modales. Après troncature modale, le système peut être résolu par inversion matricielle ou en employant le théorème des résidus. Dans les années 1970, cette méthode a été introduite dans le domaine de l'acoustique par Lansing et Zorumski [80] pour étudier la réduction sonore apportée par l'emploi de revêtements absorbants acoustiques dans le cadre de l'aéronautique. La même méthode a été utilisée pour l'optimisation des revêtements par Unruh [163], Motsinger *et al.* [99], Sawdy *et al.* [145], Tsai [160] ou encore plus récemment par McAlpine [90] sur des configurations modernes de turboréacteurs à double flux. Linton et Evans [85] apparaissent comme les premiers à appliquer le formalisme mathématique décrit par Mittra et Lee à la diffraction d'une onde acoustique par un réseau bidimensionnel de plaques minces et de corde finie, sans prendre en compte ni d'écoulement ni d'angle de calage. Sous l'hypothèse d'une importante solidité et utilisant le théorème des résidus, ils présentent des expressions pour la réflexion et la transmission acoustique et comparent leurs résultats à l'approximation de Miles [93], avec laquelle ils sont complémentaires. Leur article cite le modèle de Koch employant la technique de Wiener-Hopf [74] comme étant similaire, cependant l'absence de condition de Kutta dans la technique de raccordement modal ne permet pas alors cette comparaison. Il s'agit là du premier rapprochement entre les techniques de raccordement modal et de Wiener-Hopf dans le domaine de l'aéroacoustique. Ce travail a mené à l'étude des modes piégés, ou modes de Parker [109], des résonances acoustiques dans des guides d'onde bidimensionnels (Evans [30]), dans des réseaux de plaques minces avec écoulement (Duan [26]) et dans des guides d'onde cylindriques (Duan *et al.* [27]). Nayfeh et Huddleston [104] ont examiné plus particulièrement la configuration des modes de Parker au voisinage d'une plaque de corde finie, placée dans un guide d'onde bidimensionnel, sans écoulement, avec une résolution par raccordement modal. Par la suite, Duan [26] ajouta un écoulement subsonique à ce problème, résolu par raccordement modal et l'usage du théorème des résidus. Des résultats numériques sont donnés et comparés à ceux de Koch [75], montrant de très bons accords, et fournissent par conséquent une première preuve de l'équivalence entre la méthode de raccordement modal et la technique de Wiener-Hopf dans le cadre de l'aéroacoustique. Roger [135], puis Roger *et al.* [142] ont appliqué la technique de raccordement modal à une configuration bidimensionnelle simplifiée d'un compresseur centrifuge en coordonnées polaires, en assimilant les aubes du diffuseur radial à des plaques radiales et rigides. Ainsi, des modes acoustiques

spiraux dans un écoulement spiral ont été introduits. Ingenito et Roger [65] ont également traité du problème de la transmission du son à l'interface entre un réseau de canaux semi-infinis et un conduit annulaire en présence d'un écoulement uniforme et axial. Ingenito a par la suite détaillé cette approche dans son mémoire de doctorat [64] et fourni la base des développements réalisés durant cette thèse. Par ailleurs, la technique de raccordement modal a été utilisée dans de nombreux problèmes d'acoustique, comme les silencieux dissipatifs (Kirby [73]), les réseaux complexes de guides d'ondes pour la propagation acoustique urbaine (Molerón *et al.* [96]), ainsi que pour les conduits lentement variables dans les turboréacteurs à double flux (Ovenden et Rienstra [107]) et récemment pour la propagation du son à travers des conduits d'échappement avec un écoulement cisaillé satisfaisant l'équation de Pridmore-Brown (Oppeneer *et al.* [106]).

1.7 Technique de raccordement modal

Les principes de la technique de raccordement modal, à la base des travaux présentés dans cette thèse, sont détaillés dans cette section. Les conditions de saut à l'interface et le principe de trace, permettant d'écrire les relations de raccordement entre les différents sous-domaines, sont également précisés.

1.7.1 Formulation générale

La technique de raccordement modal est une des méthodes les plus utilisées pour formuler et résoudre des problèmes aux limites, constitués d'une équation différentielle (généralement aux dérivées partielles) dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées aux limites du domaine de résolution. Cette méthode, largement employée dans le champ de l'électromagnétisme, a été décrite en détail par Mittra et Lee [95] et utilisée pour la première fois par Whitehead [167] pour traiter différents cas de diffraction d'ondes électromagnétiques par des réseaux de guides d'ondes bifurqués. Elle est parfaitement appropriée quand la géométrie du problème peut être identifiée comme la jonction de plusieurs régions. Il s'agit par ailleurs d'une méthode valable dans le domaine fréquentiel et lorsque l'équation différentielle est linéaire.

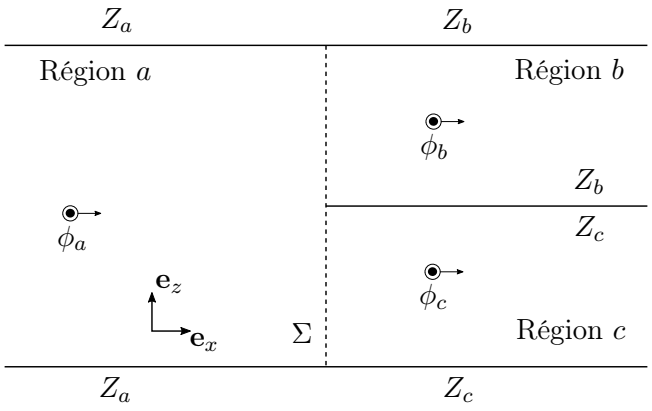


FIGURE 1.17 – Représentation générique d'un problème aux limites. Les champs ϕ_i ($i \in [a, b, c]$) sont solutions d'une équation aux dérivées partielles, soumis aux conditions aux limites d'impédances Z_i. La continuité de quantités physiques sur l'interface Σ permet de résoudre le problème.

La première étape de cette procédure implique la définition des champs solutions d'une équation aux dérivées partielles sous la forme de sommes de modes adaptés aux différentes régions. En électromagnétisme ou en aéroacoustique, c'est l'équation de Helmholtz qui doit être résolue. Le problème est généralement exprimé sur le potentiel vecteur du champ magnétique dans le premier cas et sur le potentiel scalaire d'un écoulement irrotationnel (potentiel acoustique) dans le second. En fonction du problème, différentes conditions aux limites peuvent être nécessaires : les valeurs du champ solution (condition de Dirichlet), celles de ses dérivées (condition de Neumann) ou les deux (condition mixte ou de Robin) doivent satisfaire des conditions d'impédance (condition de rigidité, impédance complexe

pour un matériau absorbant) ou de périodicité aux frontières du domaine. Lorsque les solutions sont formulées à partir des champs potentiels, les conditions de Neumann s'expriment à l'aide du champ magnétique d'une part et des champs de pression acoustique et de vitesse d'autre part. Connaissant les conditions aux limites du domaine d'indice i, la solution de l'équation aux dérivées partielles s'exprime comme une somme de solutions propres (ou fonctions de Green) dans une base modale choisie. Par exemple, pour une équation aux dérivées partielles d'ordre n, dans un cadre bidimensionnel (x, z) :

$$\left(a_n^i \frac{\partial^n}{\partial x^n} + b_n^i \frac{\partial^n}{\partial z^n} + \ldots + a_1^i \frac{\partial}{\partial x} + b_1^i \frac{\partial}{\partial z} + c^i\right) \phi_i(x, z) = 0, \tag{1.51}$$

le champ solution s'écrira comme une somme de modes :

$$\phi_i(x, z) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu}^i f^i(x, \mu) g^i(z, \nu). \tag{1.52}$$

Les fonctions $f(x)g(z)$ forment une base modale qui peut être choisie arbitrairement tant qu'elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions aux limites. Son choix sera effectué en fonction du nombre de modes (μ, ν) nécessaires pour résoudre le problème et sa compatibilité avec les bases modales des domaines adjacents. Si les bases modales des sous-domaines sont connues, le problème se résume à la détermination des amplitudes modales $(\alpha_{\mu\nu})$ associés aux champs dans chaque sous-domaine. Cette représentation modale s'accompagne de l'application de conditions de continuité aux frontières (Σ) entre les régions du problème, basées sur les lois de conservation de quantités physiques. La continuité de telles quantités peut être considérée comme un nouvel ensemble de conditions aux limites. Un ensemble d'équations de raccordement exprimées par des sommes modales est obtenu. Mathématiquement, une base est une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice d'un espace vectoriel. Si elle est de plus orthogonale, il en résulte que le produit scalaire entre deux modes, représentant les vecteurs de cet espace, est nul. Une procédure de projection modale est donc effectuée grâce à cette propriété, menant à un système linéaire infini porté sur les amplitudes modales. Après troncature modale, le système peut être résolu par inversion matricielle ou en employant le théorème des résidus. La technique de raccordement modal est adaptée à un très grand nombre de problèmes, comme celui de la diffraction d'une onde acoustique par un réseau de canaux bifurqués, qui sera amplement détaillé par la suite, ou comme le calcul des pertes par transmission dans les conduits avec des portions traitées par des matériaux absorbants, qui forment des sujets d'intérêt majeur dans l'aéroacoustique des turboréacteurs (Fig 1.18).

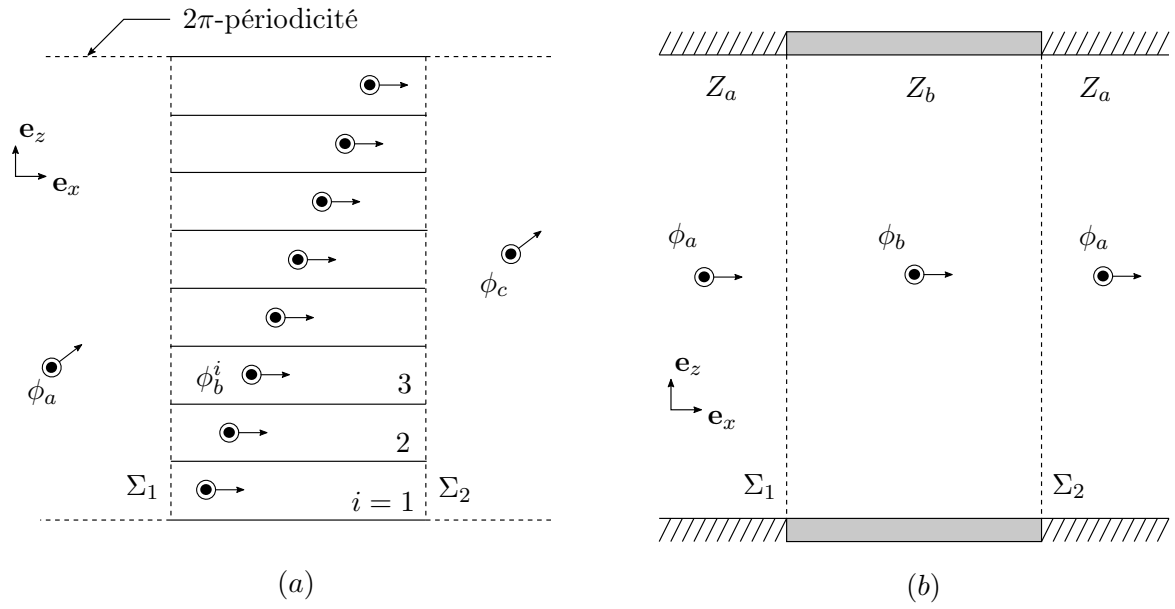


FIGURE 1.18 – (a) : Diffraction d'une onde acoustique par un réseau de canaux bifurqués. (b) : Calcul des pertes par transmission d'un conduit d'impédance variable.

1.7.2 Conditions de saut à une interface

Dans le cadre de la technique de raccordement modal telle qu'elle est utilisée dans un contexte de turbomachines, les coupes transversales du conduit contenant les bords d'attaque et de fuite des aubes du stator sont considérées comme des interfaces sur lesquelles les fluctuations de certaines quantités physiques sont raccordées pour satisfaire les lois de conservation de la dynamique des fluides. Ce principe s'applique dans le système de coordonnées cylindriques, tant que les bords des aubes sont contenus dans les mêmes coupes transverses, ou dans une représentation déroulée et cartésienne de la grille d'aubes, pour une coupe cylindrique de rayon $r = R_0$. Dans le cas présent, le stator est décrit comme un réseau périodique de guides d'ondes bifurqués de longueur finie égale à la corde, avec des aubes plates sans calage, et l'écoulement est supposé purement axial. À l'interface, les conditions de saut proviennent d'équations de conservation habituellement utilisées en mécanique des fluides appliquée aux machines tournantes adiabatiques [142]. Il s'agit de la conservation du débit massique et soit de la rothalpie (dans le repère tournant associé à un rotor), soit de l'enthalpie totale (ou d'arrêt) dans le repère fixe associé à un stator [91].

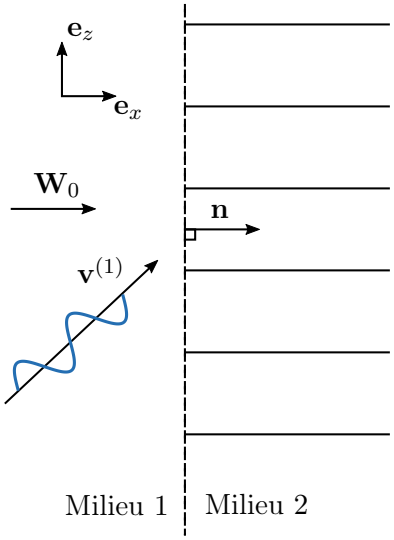


FIGURE 1.19 – Interface de bord d'attaque d'une grille d'aubes de stator. Représentation bidimensionnelle déroulée.

La conservation du débit massique mène à l'équation :

$$[\rho \mathbf{W}]_1^2 \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{1.53}$$

où les crochets représentent la différence de la quantité considérée entre les côtés 1 et 2 de l'interface, le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ normal à l'interface pointant du côté 1 vers le côté 2. Les grandeurs $(\rho, \mathbf{W})$ sont les champs de densité et de vitesse absolus dans le repère du stator : $\rho = \rho_0 + \rho^{(1)}$ et $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{v}^{(1)}$ où $(\rho_0, \mathbf{W}_0)$ les valeurs de champs moyens, et $(\rho^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)})$ les fluctuations de premier ordre. Les champs de vitesse s'expriment dans cette configuration par

$$\mathbf{W}_0 = W_x\ \mathbf{e}_x, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Par ailleurs, la conduction thermique ainsi que la viscosité sont négligées. Ainsi, dans le repère du stator, l'enthalpie totale est conservée (la rothalpie dans le repère du rotor) :

$$\left[H + \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2} \right]_1^2 = 0, \quad \|\mathbf{W}\| = \sqrt{\left((\mathbf{W}_0 + \mathbf{v}^{(1)}) \cdot \mathbf{e}_x\right)^2 + \left(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z\right)^2}. \tag{1.55}$$

Dans le cas d'un gaz parfait isentropique, l'enthalpie H s'écrit comme une fonction de la température :

$$H = c_p T, \quad \text{où} \quad T = T_0 + \frac{p^{(1)}}{\rho_0 c_p}, \tag{1.56}$$

où c_p est la capacité thermique massique du gaz à pression constante. La conservation du débit massique s'écrit :

$$\begin{aligned} [\rho \mathbf{W}]_1^2 \cdot \mathbf{n} &= \left[(\rho_0 + \rho^{(1)})(\mathbf{W}_0 + \mathbf{v}^{(1)}) \cdot \mathbf{e}_x \right]_1^2 \\ &= \left[\rho_0 \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x + \rho^{(1)} \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x + \rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x \right]_1^2. \end{aligned}$$

Les champs moyens sont considérés identiques de chaque côté de l'interface et une linéarisation mène à la relation :

$$\begin{aligned} [\rho \mathbf{W}]_1^2 \cdot \mathbf{n} &= \left[\rho^{(1)} \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x + \rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{p^{(1)}}{c_0^2} \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x + \rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x \right]_1^2. \end{aligned}$$

En considérant le nombre de Mach $M = (\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)/c_0$, une première équation est obtenue sous la forme

$$\left[p^{(1)} M^2 + \rho_0 (\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x) \ (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x) \right]_1^2 = 0. \tag{1.57}$$

Une linéarisation permet d'exprimer le champ de vitesse $\|\mathbf{W}\|$:

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \Big((\mathbf{W}_0 + \mathbf{v}^{(1)}) \cdot \mathbf{e}_x \Big)^2 + \Big(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z \Big)^2 = (\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)^2 + 2(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x).$$

La conservation de l'enthalpie totale s'écrit donc :

$$\left[H + \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2} \right]_1^2 = \left[c_p \left(T_0 + \frac{p^{(1)}}{\rho_0 c_p} \right) + \frac{(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)^2}{2} + (\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x) \right]_1^2. \tag{1.58}$$

De même, puisque les champs moyens sont identiques de part et d'autre de l'interface :

$$\left[p^{(1)} + \rho_0 (\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x) \right]_1^2 = 0. \tag{1.59}$$

La combinaison des équations (1.57) et (1.59) permet d'écrire :

$$\left[(1 - M^2) p^{(1)} \right]_1^2 = 0. \tag{1.60}$$

L'équation (1.60) induit la continuité des fluctuations de pression ($p^{(1)}$), et par conséquent la continuité des fluctuations de vitesse axiale ($\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_x$). Ces conditions de continuité seront utilisées pour déterminer la réflexion et la transmission d'une onde acoustique lors de son impact sur un stator, avec ou sans écoulement. Par ailleurs, puisque les équations linéarisées de la dynamique des fluides pour un écoulement homogène coïncident avec l'équation des ondes convectées (Chap. 1.4), ces conditions de continuité restent valables pour formuler la réponse aéroacoustique d'une interface de grille d'aubes à l'impact de perturbations tourbillonnaires sans champ de pression associé.

1.7.3 Principe de trace

Loi de Snell-Descartes

Le principe de trace (ou *trace-velocity matching principle* [118, 25, 126]) employé dans la technique de raccordement modal est à la base de la loi de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction d'une onde électromagnétique à l'interface entre deux milieux d'indices différents. Appliqué au domaine de l'acoustique, deux milieux 1 et 2 sont considérés, dans lesquels les vitesses du son, respectivement c_1 et c_2, diffèrent. Si une onde plane incidente se propage jusqu'à l'interface, le point de réflexion dans le milieu 1 génère une perturbation dans le milieu 2.

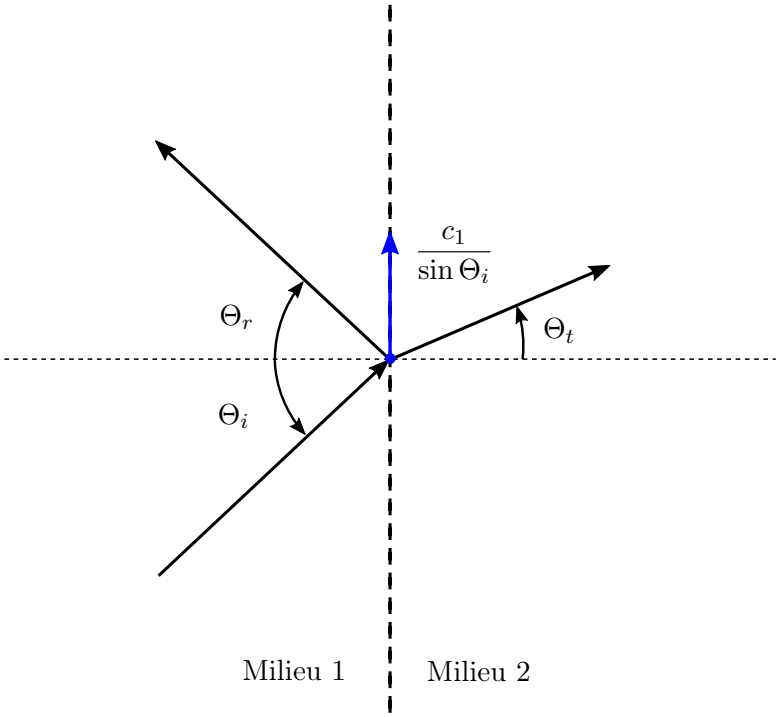


FIGURE 1.20 – Loi de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction d'une onde acoustique.

Considérant la vitesse du son c_1 et l'angle de propagation Θ_i d'une onde plane oblique selon la normale à l'interface, la vitesse de la perturbation le long de l'interface, définissant la vitesse de phase, est égale à $c_1/\sin\Theta_i$. Θ_i étant compris entre 0° et 90°, la vitesse de phase est toujours supersonique. Une onde se propageant avec un angle nul a donc une vitesse de phase infinie. Le principe de trace indique que la vitesse de trace (ou vitesse de phase) induite sur une interface par une onde incidente oblique impose celles des ondes transmises et réfléchies de part et d'autre de cette interface. Par conséquent, en notant Θ_r et Θ_t les angles de propagation des ondes réfléchie et transmise, les vitesses de trace des ondes incidente, réfléchie et transmise doivent satisfaire la condition suivante :

$$\frac{c_1}{\sin\Theta_i} = \frac{c_1}{\sin\Theta_r} = \frac{c_2}{\sin\Theta_t}. \tag{1.61}$$

Ceci impose premièrement que $\Theta_i = -\Theta_r$, comme le rappelle la loi de la réflexion de Snell-Descartes. De plus, selon l'angle Θ_i et le rapport des vitesses c_1/c_2, la perturbation se transmet dans le milieu 2 soit avec une vitesse de phase supersonique, qui induit une transmission de l'onde, soit avec une vitesse de phase subsonique, l'angle de transmission Θ_t étant égal à 90°, ce qui traduit une réflexion totale de l'onde. Dans ce cas, l'onde transmise est atténuée exponentiellement depuis l'interface. Il s'agit de la loi de réfraction de Snell-Descartes.

Application à une grille d'aubes mobiles

Le principe de trace, qui traduit la continuité du champ sonore à la traversée de l'interface, est appliqué ici pour définir la structure des ondes réfléchies et transmises à l'entrée d'un réseau périodique

de canaux droits parallèles.

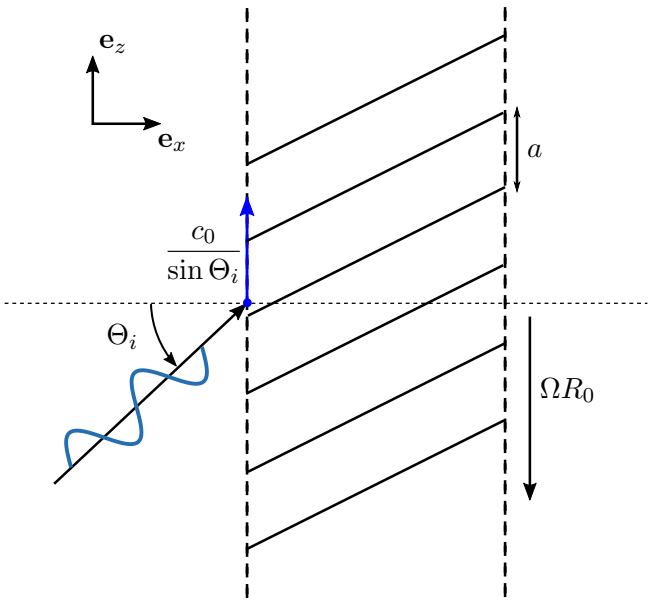


FIGURE 1.21 – Représentation du principe de trace pour une grille d'aubes mobiles.

Dans un cadre bidimensionnel, une onde plane oblique progressant sous l'angle d'incidence Θ_i est considérée, celle-ci se déplaceant vers le front d'une grille d'aubes mobiles, inclinées ou non, régulièrement espacées, selon la figure 1.21. La grille représente le développement plan d'une coupe cylindrique de rayon R_0, avec a la distance entre deux aubes consécutives. Elle est supposée en mouvement de translation uniforme dans le sens des z décroissants à la vitesse $U = \Omega R_0$, où Ω est la vitesse de rotation du rotor représenté par la grille. La vitesse de trace induite à l'interface ($x = 0$) dans le sens des z croissants est égal à $U_t = c_0/\sin\Theta_i$, avec les conventions de la figure 1.21. Le potentiel acoustique associé à l'onde incidente est de la forme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_z z - k_x x)}$, k_z et k_x désignant les nombres d'onde tangentiel et axial.

Dans le cas d'une représentation en grille d'aubes, une condition de 2π-périodicité sur l'angle $\theta = z/R_0$ doit être satisfaite par l'onde incidente, qui représente une onde hélicoïdale. Ainsi, le périmètre de la coupe cylindrique doit être égal à un nombre entier de longueurs d'onde projetées suivant z, ce qui se traduit par $2\pi R_0 = n\lambda_z$, où $\lambda_z = 2\pi/k_z$ est la longueur d'onde azimutale et $|n|$, un entier, est le nombre de lobes (Fig. 1.22). Par conséquent, $k_z = n/R_0$. De plus, la vitesse de trace est égale à la vitesse de phase tangentielle du mode n, soit $U_t = \omega R_0/n$. Notons également que l'espace inter-aubes est tel que $a = 2\pi R_0/V$, si V est le nombre d'aubes de la grille. Du fait de la périodicité selon z, le champ acoustique en un point d'un canal inter-aubes à un instant t est identique à celui qui sera obtenu au point équivalent du canal suivant à l'instant $t + \delta t$ tel que $U_t\ \delta t + \Omega R_0 \delta t = 2\pi R_0/V$. Cette propriété s'écrit donc :

$$\delta t = \frac{2\pi n}{V(\omega + n\Omega)}.$$

Par ailleurs, à un instant donné, un point de l'interface de coordonnée tangentielle $z + a$ est affecté d'une phase relative $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z a}$ par rapport au point de coordonnée z. Effectivement, pour une onde incidente de la forme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_z z)}$, sa valeur en $z + a$ devient $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z + k_z a)}$. La phase relative est donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z a}$, or par la condition de périodicité $k_z R_0 = n$, elle s'écrit également $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n/V}$.

Dans ce cas précis, la pulsation relative dans un repère mobile lié à la grille d'aubes est égale à $\omega_r = \omega + n\Omega$. La nature des ondes réfléchies par le front de grille résulte à la fois de la modulation de la périodicité de l'onde incidente par celle de la grille, et de la vitesse de rotation Ω. Si l'on fait l'hypothèse d'une onde réfléchie de la forme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega^* t - k_x^* x - k_z^* z)}$, avec $k_z^* z = n^* \theta$, la pulsation ω^* doit s'accorder avec

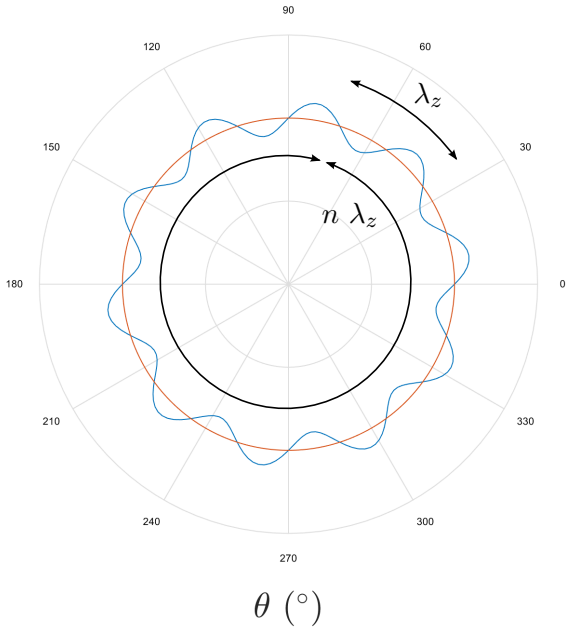


FIGURE 1.22 – Condition de 2π-périodicité sur l'angle θ. Le périmètre de la coupe cylindrique est égal à un nombre entier de longueurs d'onde, représentant le nombre de lobes d'un mode azimutal. $|n| = 10$.

la même pulsation relative ω_r propre à la grille d'aubes, ce qui implique la relation $\omega^* + n^*\Omega = \omega + n\Omega$, soit $\omega^* = \omega + (n - n^*)\Omega$. Par ailleurs, la continuité de la vitesse de phase azimutale impose que les déphasages dans la direction tangentielle entre deux points aux centres de canaux adjacents sont identiques pour toutes les ondes, égaux à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n/V}$. Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^*}$ représentent ces déphasages pour les ondes incidentes et réfléchies entre deux canaux, avec $\varphi = 2\pi n/V$ et $\varphi^* = 2\pi n^*/V$, le principe de trace induit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^*}$, soit également $\varphi^* = \varphi + s2\pi$, $s \in \mathbb{Z}$. La 2π-périodicité implique finalement que $n^* = n + sV$ et $\omega^* = \omega - sV\Omega$.

Les ondes réfléchies s'écrivent donc sous la forme d'une somme de modes :

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} A^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega^* t - k_x^* x - k_z^* z)}, \quad \text{avec} \quad k_z^* = \frac{n + sV}{R_0} = \frac{n}{R_0} + s\frac{2\pi}{a} \tag{1.62}$$

Cette formulation est strictement équivalente à celle basée sur une décomposition modale de Floquet [36], exposée en annexe A. Pour une onde incidente qui ne satisfait pas la condition de 2π-périodicité, de nombre d'onde tangentiel k_z et une grille rectilinéaire quelconque, la réflexion s'effectuera sur une somme de modes dont les nombres d'ondes tangentiels seront $k_z^* = k_z + s\ 2\pi/a$, sans contrainte particulière sur la largeur des canaux a.

Ainsi, la réflexion s'effectue *a priori* sur toute une série d'ondes obliques (correspondant à des modes angulaires), indépendamment des propriétés de coupure inhérentes à la propagation guidée. Chaque mode réfléchi a un ordre décalé d'un multiple du nombre d'aubes par rapport à l'ordre du mode incident et sa fréquence est également modulée. Chaque canal est déphasé d'un facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z a}$ égal à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n/V}$ si une condition de 2π-périodicité est appliquée dans la direction azimutale. Les déphasages entre canaux successifs se répercutent ensuite à la sortie de la grille. Il en résulte que la transmission en aval met à contribution les mêmes modes multiples, avec les mêmes fréquences modulées.

Le cas d'une grille d'aubes fixe représentant un stator se déduit du raisonnement précédent en posant simplement $\Omega = 0$. La dispersion fréquentielle n'a alors plus lieu ($\omega^* = \omega_r = \omega$) mais la dispersion modale angulaire demeure.

CHAPITRE 2

APPROCHE BIDIMENSIONNELLE - TRANSMISSION ACOUSTIQUE

2.1 Diffraction d'une onde acoustique sur un réseau de canaux semi-infinis

La technique de raccordement modal est tout d'abord employée pour traiter, dans un cadre bidimensionnel, la diffraction d'une onde acoustique oblique par un réseau de canaux droits semi-infinis, comme montré sur la Fig. 2.1. Le repère Cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ indique les directions axiale et tangentielle, respectivement. Une onde plane oblique se propage à la pulsation ω, avec un angle de propagation Θ_i par rapport à la direction axiale dans un milieu non borné dans la direction transverse à l'écoulement vers un réseau de canaux droits semi-infinis, parallèles entre eux et à la direction axiale. Les parois des canaux sont parfaitement rigides et sans épaisseur. L'onde plane se propage dans le demi-espace $x < 0$ alors que le réseau de canaux occupe le demi-espace $x > 0$, l'interface entre les deux milieux étant située en $x = 0$. Le canal dont le rang est indiqué par l'indice m occupe la position $(x > 0,\ m\ a < z < (m+1)\ a)$, a étant la largeur d'un canal. La vitesse moyenne de l'écoulement est subsonique, uniforme et axiale, de nombre de Mach $M = c_0\ \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{e}_x$.

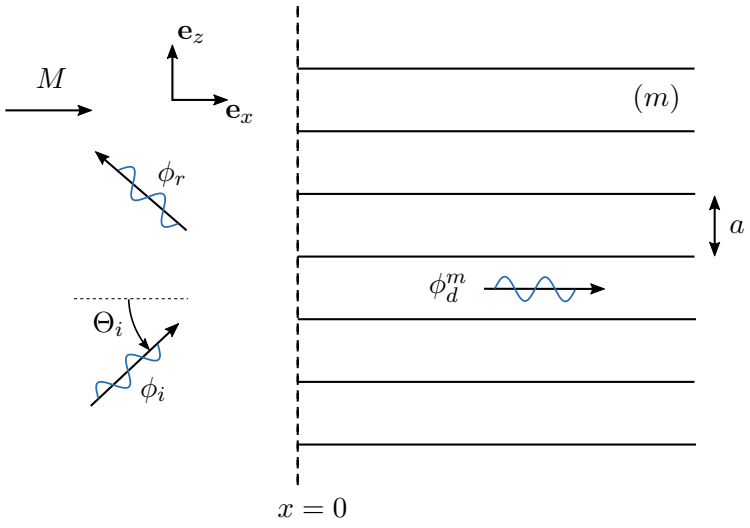


FIGURE 2.1 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique à l'interface entre un milieu non borné et un réseau de canaux bifurqués.

À l'interface $(x = 0)$, l'onde incidente monochromatique donne naissance à une série d'ondes réfléchies en accord avec le principe de trace (Sec. 1.7.3), traduite sous la forme d'une décomposition modale de Floquet (Annexe A), et à une transmission dans les canaux bifurqués sous la forme de séries de modes de propagation guidée. Les champs acoustiques transmis sont identiques dans tous les canaux mais déphasés d'une quantité déterminée par le principe de trace.

2.1.1 Définition des potentiels acoustiques

La première étape de la technique de raccordement modal est d'exprimer les champs acoustiques dans chaque sous-domaine comme une somme de modes satisfaisant l'équation des ondes ainsi que les conditions aux limites propres au sous-domaine. L'équation d'onde acoustique est l'application de l'opérateur d'alembertien (Eq. 2.1) au champs de pression, de vitesse ou de potentiel acoustique, de manière indifférente. L'opérateur est noté :

$$\Box = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{2.1}$$

Dans la technique de raccordement modal, le champ potentiel est privilégié, ayant un lien direct de dérivation avec la pression (temporelle) et la vitesse (spatiale) acoustiques. Il permet ainsi facilement d'écrire les conditions aux limites de Neumann, faisant intervenir les dérivées du champ en question, tout en conservant la physique du problème.

Formulation sans écoulement ($M = 0$)

En absence d'écoulement, le potentiel acoustique $\phi(x, z, t)$ satisfait l'équation des ondes, qui formulée en l'absence de source acoustique, s'exprime par la relation :

$$\Box\phi(x, z, t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi(x, z, t)}{\partial t^2} - \Delta\phi(x, z, t) = 0. \tag{2.2}$$

Une solution harmonique est considérée, dont la dépendance temporelle est notée $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ par convention. $\omega = 2\pi f$ est la pulsation, f étant la fréquence de l'onde. L'équation de Helmholtz est ainsi obtenue, dont la formulation dans un cadre bidimensionnel s'exprime :

$$\frac{\partial^2\phi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x, z)}{\partial z^2} + k^2\phi(x, z) = 0, \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \tag{2.3}$$

Une solution générale de cette équation est constituée d'ondes progressives et régressives :

$$\phi(x, z) = (A_x^+ \ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_x x} + A_x^- \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x})(A_z^+ \ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_z z} + A_z^- \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}). \tag{2.4}$$

Le potentiel incident ϕ_i est considéré comme une onde plane monochromatique unitaire se propageant en amont de l'interface, dans le sens des x positifs et sous l'angle Θ par rapport à l'axe x. Son expression est :

$$\phi_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ z}, \quad x \leq 0, \tag{2.5}$$

avec le nombre d'onde tangentiel $\alpha_i = k \ \sin\Theta_i$ et le nombre d'onde axial $k_i^+ = k \ \cos\Theta_i$. Le nombre d'onde total $k = \omega/c_0$ est tel que $k^2 = \alpha_i^2 + {k_i^+}^2$. Ainsi, le nombre d'onde axial peut également s'écrire $k_i^+ = \sqrt{k^2 - \alpha_i^2}$.

Le potentiel de l'onde réfléchie s'écrit, en accord avec le principe de trace (Sec. 1.7.3), sous la forme d'une décomposition modale de Floquet :

$$\phi_r = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- z}, \quad x \leq 0, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad R_s \in \mathbb{C}, \tag{2.6}$$

avec le nombre d'onde tangentiel du mode d'ordre s, $\alpha_s = \alpha_i + s \ 2\pi/a = k \ \sin\Theta_i + s \ 2\pi/a$, où a est la largeur des canaux, représentant le motif périodique du réseau. Le nombre d'onde axial s'écrit $k_s^- = -\sqrt{k^2 - \alpha_s^2}$ ou $k_s^- = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_s^2 - k^2}$ selon le paramètre de coupure $\xi = k/\alpha_s$. Si celui-ci est supérieur à un, le mode d'ordre s est dit passant, sa vitesse de phase tangentielle est supersonique et le mode se propage en amont de l'interface, le nombre d'onde axial étant réel. Si ce rapport est inférieur à un, le mode est dit coupé, sa vitesse de phase tangentielle étant subsonique. Le nombre d'onde axial

est imaginaire pur et le mode est exponentiellement atténué depuis l'interface. Il est aussi dit évanescent. Une analyse physique de la condition de coupure d'un mode sera développée en configuration tridimensionnelle en Sec. 4.3.2. Le nombre d'onde axial permet de définir l'angle de propagation Θ_s du mode passant d'ordre s tel que $k_s^- = -k\ \cos\Theta_s = -\sqrt{k^2 - \alpha_s^2}$. De même, l'angle de propagation peut être calculé par la relation $\alpha_s = k\ \sin\Theta_i + s\ 2\pi/a = k\ \sin\Theta_s$.

Afin de déterminer les potentiels transmis dans le réseau de canaux inter-aubes, il est nécessaire d'étudier les principales notions liées au phénomène de propagation dans les guides d'ondes. L'exemple d'un canal bidimensionnel infini de largeur a tel que $z \in [0, a]$ est représentatif des canaux inter-aubes (Fig 2.2).

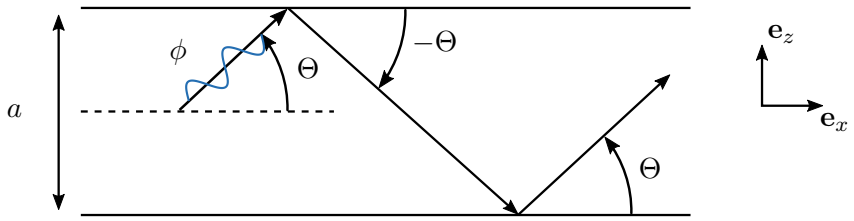


FIGURE 2.2 – Représentation de la propagation d'une onde oblique dans un canal bidimensionnel.

Considérons de nouveau une onde plane monochromatique de pulsation ω se propageant sous l'angle Θ par rapport à l'axe x, en l'absence d'écoulement. Le champ potentiel associé à une telle onde peut s'écrire :

$$\phi(x, z, t) = \frac{A}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_z z)}, \tag{2.7}$$

où A est une constante, $k_x = k\ \cos\Theta$ et $k_z = k\ \sin\Theta$ sont les nombres d'onde axial et tangentiel. Si les parois sont rigides, l'onde plane ne peut exister dans sa réflexion, qui se propage sous l'angle opposé $-\Theta$. La superposition des deux ondes élémentaires conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \frac{A}{2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_z z)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_x x + k_z z)} \right), \\ &= A \cos(k\ \sin\Theta\ z)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_x x)}, \\ &= A \cos(k\ \sin\Theta\ z)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cos\Theta(x - c_p t)}, \quad c_p = \frac{c_0}{\cos\Theta}. \end{aligned}$$

Le champ acoustique présente la structure d'une onde stationnaire dans la direction transversale z, combinée avec une onde progressive dans la direction axiale x.

L'intersection des fronts d'ondes avec la paroi se déplace dans le sens des x croissants à une vitesse supersonique $c_p = c_0/\cos\Theta$. Il s'agit de la vitesse de phase axiale de l'onde progressive. La vitesse de phase tangentielle, employée dans le principe de trace, s'écrit quant à elle $c_0/\sin\Theta$. Ces vitesses traduisent une propriété géométrique du champ mais n'ont pas de lien direct avec la vitesse effective de propagation de l'information portée par l'onde acoustique le long du canal. Celle-ci est identifiée à la projection de la vitesse du son sur l'axe x, notée $c_g = c_0 \cos\Theta$, qui est toujours subsonique et définit la vitesse de groupe de l'onde acoustique.

La condition de rigidité implique l'annulation de la vitesse normale à la paroi. Il s'agit donc une condition aux limites de Neumann que doit satisfaire l'onde stationnaire transversale :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} = 0, \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = a. \tag{2.8}$$

Cette condition implique que la propagation n'est possible que si la relation $\sin(ka\sin\Theta) = 0$ est respectée. Cette contrainte sélectionne une nombre infini de valeurs discrètes pour l'angle de propagation, k et a étant fixés :

$$\sin\Theta_q = q\frac{\pi}{ka}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Les solutions obtenues pour les différentes valeurs de l'angle Θ_q définissent les modes de propagation dans le canal plan. Cette relation peut également s'écrire :

$$a = q\frac{\lambda}{2\sin\Theta_q}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{2.10}$$

La largeur du canal est ainsi égale à un multiple de la demi-longueur d'onde de la trace tangentielle de l'onde. Par conséquent, une résonance transversale du nombre d'onde est nécessaire pour qu'un mode se structure par réflexions successives de l'onde oblique dans le canal. Étant donné que $|\sin\Theta_q| \leq 1$, le mode d'ordre q ne peut se propager que si la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ est supérieure à la fréquence de coupure de ce mode $f_q = qc_0/(2a)$. Si $f < f_q$, le mode d'ordre q est coupé. La condition $f = f_q$ correspond à une résonance transversale totale, k étant égal au nombre d'onde tangentiel. Par conséquent, l'angle de propagation est égal à $\Theta_q = \pi/2$ et $a = q\lambda/2$. La fréquence de coupure correspond ainsi à l'annulation de la vitesse de groupe de l'onde acoustique. Le mode particulier $q = 0$ correspond à une onde plane, pour laquelle le champ est homogène dans la section transverse du canal. Il se propage quelle que soit la fréquence. Par conséquent, si $f < f_c = f_1 = c_0/(2a)$, la propagation ne peut s'effectuer que sous la forme d'une onde plane. f_c est appelée la fréquence de coupure du conduit. En conclusion, le champ acoustique ϕ_c d'une onde monochromatique se propageant dans le sens des x positifs dans un canal de largeur a s'écrit comme une somme de modes :

$$\phi_c(x,z) = \sum_{q=0}^{+\infty} A_q \cos(\alpha_q z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x}, \quad \text{où} \quad \alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad k_q^+ = k\cos\Theta_q = \sqrt{k^2 - \alpha_q^2}, \quad q \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Pour déterminer le potentiel acoustique transmis dans le réseau de canaux bifurqués, le changement de repère $z \to z - ma$ est considéré, où m est le rang du canal. De même l'amplitude modale du potentiel acoustique transmis d'ordre q dans le canal de rang m est notée D_q^m. Le potentiel transmis dans le canal de rang m s'écrit donc :

$$\phi_d^m(x,z) = \sum_{q=0}^{+\infty} D_q^m \cos(\alpha_q(z - ma))\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x}, \quad 0 \leq x, \quad m\ a < z < (1+m)\ a, \quad D_q^m \in \mathbb{C}. \tag{2.12}$$

En accord avec le principe de trace, le déphasage entre deux canaux adjacents est égal à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$, où $u = \alpha_i a = ka\ \sin\Theta$. Par conséquent, le déphasage entre le canal de rang 0 et le canal de rang m s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}$. Il s'ensuit que l'amplitude modale du champ potentiel transmis s'écrit $D_p^m = D_p^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}, \forall\ (q,m)$. Les champs transmis dans les différents canaux sont tous identiques mais seulement déphasés de la même quantité par voie de continuité avec l'onde incidente, par le biais du principe de trace.

Formulation avec écoulement $(-1 < M < 1)$

Un écoulement de vitesse moyenne $\mathbf{W}$ uniforme et subsonique est considéré. L'équation des ondes devient :

$$\Delta\phi(x,z,t) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{D}^2\phi(x,z,t)}{\mathrm{D}t^2} = 0, \tag{2.13}$$

$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ constitue la dérivée particulaire qui ajoute à la dérivée temporelle un opérateur d'advection et s'exprime comme suit :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{W}\cdot\nabla. \tag{2.14}$$

L'écoulement est considéré comme purement axial, par conséquent, l'opérateur d'advection est égal à $\mathbf{W}\cdot\nabla = W_x\ \partial/\partial x$. Dans la configuration bidimensionnelle, l'équation de Helmholtz convectée s'écrit :

$$\frac{\partial^2\phi(x,z)}{\partial z^2}+(1-M^2)\frac{\partial^2\phi(x,z)}{\partial x^2}+2\mathrm{i}kM\frac{\partial\phi(x,z)}{\partial x}+k^2\phi(x,z)=0, \tag{2.15}$$

où $M=W_x/c_0$ est le nombre de Mach de l'écoulement. Les solutions précédentes demeurent valides dans un repère de coordonnées (x_e,z_e,t_e) lié à l'écoulement. Les grandeurs k_e,ω_e,Θ définissent les nombre d'onde, pulsation et angle de propagation dans le repère de l'écoulement. L'expression de l'onde convectée dans le repère fixe lié au réseau est permise par le changement de variable :

$$x_e=x-W_xt,\quad z_e=z,\quad t_e=t. \tag{2.16}$$

Le potentiel acoustique d'une onde plane monochromatique de pulsation ω_e se propageant sous l'angle Θ par rapport à l'axe x dans le repère de l'écoulement s'écrit dans le repère fixe :

$$\begin{aligned}\phi(x_e,z_e,t_e) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\cos\Theta x_e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\sin\Theta z_e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_e t_e}\\ \phi(x,z,t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\cos\Theta(x-W_xt)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\sin\Theta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_e t}\\ \phi(x,z,t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\cos\Theta x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e\sin\Theta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_e(1+M\cos\Theta)t}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

La présence de l'écoulement modifie la fréquence de l'onde dans le repère fixe. L'Eq. (2.17) indique que la fréquence ω_e dans le repère relatif devient $\omega=\omega_e(1+M\cos\Theta)$, ce qui s'apparente à l'effet Doppler. De même, le nombre d'onde dans le repère fixe s'écrit $k=k_e(1+M\cos\Theta)$. Par conséquent les nombres d'onde axial (k_x) et tangentiel (k_z) s'écrivent :

$$k_x=\frac{k\cos\Theta}{1+M\cos\Theta},\quad k_z=\frac{k\sin\Theta}{1+M\cos\Theta}. \tag{2.18}$$

Le nombre d'onde axial peut être exprimé en fonction du nombre d'onde total $k=\omega/c_0$ et du nombre d'onde tangentiel k_z. Sachant que $k_x=k_e\cos\Theta$, $k_z=k_e\sin\Theta$ et $k=k_e(1+M\cos\Theta)$, il vient :

$$k_x^2+k_z^2=\left[k-Mk_x\right]^2. \tag{2.19}$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont la solution s'écrit :

$$k_x=\frac{1}{\beta^2}\left(-Mk+\overline{k_x}\right),\quad \text{où}\quad \overline{k_x}=\sqrt{k^2-\beta^2k_z^2},\quad \beta^2=1-M^2, \tag{2.20}$$

pour une onde se propageant dans le sens des x positifs. Dans le cas contraire, le nombre d'onde axial est :

$$k_x^-=\frac{1}{\beta^2}\left(-Mk-\overline{k_x}\right). \tag{2.21}$$

Le nombre d'onde axial est donc l'association d'une partie convective et d'une partie propagative $(\overline{k_x})$. La propagation n'est d'ailleurs possible que si $\overline{k_x}\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire quand le paramètre de coupure $\xi=k/(\beta k_z)$ est supérieur à un. Dans un canal bidimensionnel de largeur a, la condition de rigidité induit désormais que :

$$\frac{\sin\Theta_q}{1+M\cos\Theta_q}=q\frac{\pi}{ka}. \tag{2.22}$$

Par conséquent, le nombre d'onde axial s'écrit dans ce cas précis :

$$k_q^+=\frac{-Mk+\overline{k_q}}{\beta^2},\quad \text{où}\quad \overline{k_q}=\sqrt{k^2-\beta^2\alpha_q^2},\quad \beta^2=1-M^2. \tag{2.23}$$

Le mode d'ordre q n'existe que si

$$k>\beta\frac{q\pi}{a},\quad \text{soit encore}\quad f>\beta\frac{qc_0}{2a}. \tag{2.24}$$

Les fréquences de coupure du canal avec écoulement sont celles du canal sans écoulement multipliées par β. Par ailleurs, l'Eq. (2.17) peut également être formulée sous la forme suivante :

$$\phi(x,z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_e \sin\Theta z} \exp\left\{\mathrm{i}k_e \cos\Theta \left[x - \left(W_x + \frac{c_0}{\cos\Theta}\right) t\right]\right\}. \tag{2.25}$$

Il s'ensuit que les nouvelles valeurs de la vitesse de phase et de groupe sont :

$$c_p = W_x + \frac{c_0}{\cos\Theta}, \quad c_g = W_x + c_0 \cos\Theta \tag{2.26}$$

Elles traduisent la composition de la propagation et du mouvement de convection par le fluide. L'écoulement induit également une anisotropie, dans la mesure où le champ acoustique n'a pas les mêmes propriétés selon que la propagation s'effectue vers l'amont ou vers l'aval. Un comportement particulier s'opère lorsque $\cos\Theta < 0$, la vitesse de phase peut être négative tandis que la vitesse de groupe est positive. Il s'agit alors d'une mode inverse : le son se propage vers l'amont par rapport au fluide (en remontant l'écoulement) mais vers l'aval par rapport au référentiel fixe.

Les ondes incidente, réfléchies et transmises sont formulées de la même manière avec ou sans écoulement. Cependant, en raison de l'effet de la convection, les valeurs des nombres d'ondes sont modifiées. Ainsi, le champ potentiel acoustique incident s'écrit :

$$\phi_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ z}, \quad x \leq 0, \tag{2.27}$$

où :

$$\alpha_i = \frac{k \sin\Theta_i}{1 + M\cos\Theta_i}, \quad k_i^+ = \frac{k\cos\Theta_i}{1+M\cos\Theta_i} = \frac{-Mk + \overline{k_i}}{\beta^2}, \quad \overline{k_i} = \sqrt{k^2 - \beta^2\alpha_i^2}.$$

Le potentiel des ondes réfléchies s'écrit :

$$\phi_r = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- z}, \quad x \leq 0, \tag{2.28}$$

où :

$$\alpha_s = \alpha_i + s\frac{2\pi}{a}, \quad k_s^- = \frac{-Mk - \overline{k_s}}{\beta^2}, \quad \overline{k_s} = \sqrt{k^2 - \beta^2\alpha_s^2}.$$

Le potentiel des ondes transmises s'écrit :

$$\phi_d^m(x,z) = \sum_{q=0}^{+\infty} D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left(\alpha_q(z - ma)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x}, \quad 0 \geq x, \quad m\ a < z < (1+m)\ a, \tag{2.29}$$

où :

$$k_q^+ = \frac{-Mk + \overline{k_q}}{\beta^2}, \quad \overline{k_s} = \sqrt{k^2 - \beta^2\alpha_q^2}, \quad u = \alpha_i a = \frac{ka\sin\Theta}{1 + M\cos\Theta}.$$

Formulation 2π-périodique

Dans le cas de la représentation d'une grille d'aubes de stator, une condition de 2π-périodicité doit être satisfaite sur l'angle θ. Pour une coupe cylindrique de la grille à un rayon R_0 entre les rayons au moyeu R_m et au carter R_c, cet angle est égal à $\theta = z/R_0$. Comme expliqué en Sec. 1.7.3, la 2π-périodicité induit que le nombre d'onde tangentiel, appelé aussi nombre d'onde azimutal est égal à $\alpha_i = n/R_0$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $|n|$ est le nombre de lobes du mode considéré. Par conséquent, si le nombre d'aubes considéré est noté V, les variables suivantes sont prescrites :

$$\alpha_i = \frac{n}{R_0}, \quad a = \frac{2\pi R_0}{V}, \quad \alpha_s = \frac{1}{R_0}\left(n + sV\right), \quad u = \frac{2\pi n}{V}. \tag{2.30}$$

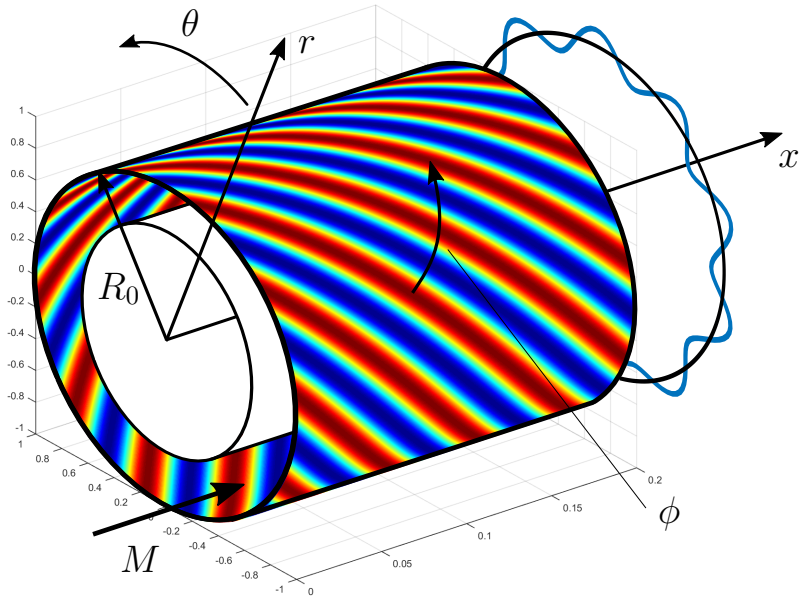


FIGURE 2.3 – Représentation enroulée de la propagation d'une onde oblique 2π-périodique. $|n|$ est égal à 10.

2.1.2 Équations de raccordement

Les conditions de saut à l'interface entre le milieu non borné et le réseau de canaux bifurqués sont détaillées en Sec. 1.7.2. Elles impliquent la continuité des fluctuations de pression et de vitesse axiale acoustiques de part et d'autre de l'interface. Un vecteur $\mathbf{\Gamma}_\gamma$ est introduit, regroupant les champs de pression et de vitesse axiale. L'indice γ représente les ondes acoustiques (ac) incidente (i), réfléchies (r) et transmises (d) dans les canaux inter-aubes :

$$\mathbf{\Gamma}_\gamma(x,z) = \begin{pmatrix} p^{ac}_\gamma(x,z) \\ \mathbf{v}^{ac}_\gamma(x,z)\cdot\mathbf{e}_x \end{pmatrix}, \quad \gamma = i,r,d. \tag{2.31}$$

La continuité de la pression et de la vitesse normale acoustiques à l'interface $(x = 0)$ induite par les conditions de saut (Sec. 1.7.2) se traduit par l'égalité de ces quantités cumulées sur les ondes incidente et réfléchies d'une part et les ondes transmises d'autre part. Les équations de raccordement sont résumées par la relation :

$$\mathbf{\Gamma}_i(0,z) + \mathbf{\Gamma}_r(0,z) = \mathbf{\Gamma}_d(0,z), \quad \forall z. \tag{2.32}$$

Les relations qui lient le potentiel acoustique aux fluctuations de pression et de vitesse acoustiques dans un écoulement uniforme de vitesse $W_x = Mc_0$ s'écrivent :

$$p^{ac} = -\rho_0 \frac{\mathrm{D}\phi(x,z,t)}{\mathrm{D}t} = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi(x,z,t)}{\partial t} + \mathbf{W}\cdot\nabla\phi(x,z,t) \right), \quad \mathbf{v}^{ac} = \nabla\phi(x,z,t). \tag{2.33}$$

Le système d'équations obtenu sur les vecteurs $\mathbf{R} = [R_s]$ et $\mathbf{D}^0 = [D^0_q]$ est constitué par :

1. l'équation de continuité de la pression acoustique à l'interface $(x = 0)$:

$$(k - k_i^+ M)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (k - k_s^- M) R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty} (k - k_q^+ M) D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left(\alpha_q (z - ma)\right). \tag{2.34}$$

2. l'équation de continuité de la vitesse normale à l'interface ($x = 0$) :

$$(\mathrm{i}k_i^+)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}k_s^-)R_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}\cos\left(\alpha_q(z-ma)\right). \tag{2.35}$$

D'après le principe de trace, le déphasage entre les canaux d'ordre 0 et m est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}$, où $u = \alpha_i\ a$. Si les deux Eqs. (2.34) et (2.35) sont divisées par le déphasage $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}$, et compte tenu du fait que $\alpha_\gamma z - mu \equiv \alpha_\gamma(z - ma)$ (mod 2π), $\gamma \in [i, s]$, les expressions n'incluent que l'argument $z - ma$. Un changement de variable $z - ma \to z$ est alors possible et il suffit uniquement de traiter le cas du canal de référence $m = 0$. Les amplitudes modales des canaux adjacents sont déterminées par la relation $D_q^m = D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}$. Le système d'équations à résoudre devient :

$$(k - k_i^+M)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(k - k_s^-M)R_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty}(k - k_q^+M)D_q^0\cos\left(\alpha_q z\right), \tag{2.36}$$

$$(\mathrm{i}k_i^+)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}k_s^-)R_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0\cos\left(\alpha_q z\right). \tag{2.37}$$

2.1.3 Techniques de résolution

La difficulté de ce système d'équations se trouve dans les multiples sommes modales infinies. Cependant, celles-ci sont représentatives des bases modales sur lesquelles les champs potentiels sont exprimés, satisfaisant l'équation des ondes et les conditions aux limites dans chaque sous-domaine. Ces bases présentent notamment la propriété d'orthogonalité, qui pour deux modes distincts μ et ν d'une même base modale s'exprime comme suit :

$$\langle\phi_\mu|\phi_\nu\rangle = 0, \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu, \tag{2.38}$$

où $<|>$ représente un produit scalaire hermitien, à valeur dans les espaces vectoriels complexes, qui s'écrit :

$$\langle\phi_\mu|\phi_\nu\rangle = \int_\Sigma \phi_\mu\phi_\nu^*\mathrm{d}\sigma. \tag{2.39}$$

Ainsi, afin de simplifier les sommes infinies, une technique, héritée de la théorie des réseaux électromagnétiques [95] et largement employée en dynamique des systèmes mécaniques (mécanique vibratoire), consiste à effectuer une projection orthogonale (ou modale) en utilisant la base modale d'un des deux milieux comme projecteur. Elle permet de réduire l'une des sommations impliquées dans les Eqs. (2.36) et (2.37). Par la suite, deux techniques de résolution sont possibles. D'une part, dans le cadre très précis de la diffraction d'une onde acoustique sur un réseau de canaux bifurqués, puis de la transmission d'une onde acoustique d'un réseau vers un milieu non borné (voir Sec. 2.2), l'emploi du théorème des résidus permet d'obtenir les valeurs des coefficients modaux de manière explicite. En appliquant le formalisme de Mittra et Lee [95], Duan [26] appliqua ce théorème à la transmission d'une onde acoustique dans un réseau de canaux bifurqués de longueur finie, afin d'étudier les modes de résonances de Parker. Ingenito et Roger [65], puis Ingenito [64] ont également appliqué le théorème des résidus à la transmission d'une onde acoustique d'une grille d'aubes vers un milieu non borné. Cette méthode consiste à identifier les termes du système d'équations aux résidus d'une fonction complexe, qu'il s'agit de déterminer en fonction du problème considéré. Détaillé par Mittra et Lee pour l'appliquer au réseau de canaux bifurqués, ce théorème est également à la base de la technique de Wiener-Hopf. Bien qu'elle fournisse des solutions explicites au cas traité, cette méthode ne sera pas utilisée dans le cadre de cette thèse. En effet, la détermination de la fonction complexe dont on calcule les résidus est un point délicat. Si elle est possible dans un cadre bidimensionnel et pour la transmission d'une onde acoustique sur un réseau de canaux semi-infinis, elle devient plus lourde dès que l'on s'écarte de ce cadre. L'identification de résidus a ainsi pu être employée par Whitehead [167] pour la diffraction d'une onde électromagnétique sur un réseau de canaux semi-infinis obliques ce qui correspondrait dans

ce cas à un calage non nul. Elle offre donc des possibilités. Pour répondre à nos besoins dans un cadre bidimensionnel, elle devrait être étendue au cas de canaux de longueur finie, ce qui reste envisageable avec l'approche itérative décrite en Sec. 2.4.3. L'obstacle majeur est que l'approche par identification de résidus ne semble pas généralisable dans un contexte tridimensionnel en géométrie annulaire. Par ailleurs, même en configuration bidimensionnelle, l'objectif de ce travail est de modéliser également la génération de bruit par interaction avec des perturbations tourbillonnaires. La nature même de ces perturbations remet en cause la forme de la fonction complexe à déterminer. Enfin, une difficulté supplémentaire apparait en présence d'écoulement, du fait de la nécessité d'imposer une condition de Kutta-Joukowski (voir Sec. 2.3). Il est probable que l'identification de résidus ne soit plus possible dans ce cas. Le développement d'une méthode uniformément valide procédant avec les mêmes techniques de résolution pour chaque configuration étant un des aspects primordiaux de ce travail de thèse, le choix s'est porté vers une méthode de résolution alternative utilisant des inversions matricielles. Tout d'abord, une troncature modale est effectuée pour obtenir un système d'équations de taille finie. Le nombre de modes nécessaires pour obtenir la convergence de la solution, qui a été mathématiquement étudié par Mittra [94], sera discuté en Sec. 2.1.4. Par la suite, une recombinaison des équations permet d'obtenir une équation matricielle synthétique, dont les solutions peuvent être déterminées par la règle de Cramer [95] ou par inversion classique. Cette dernière méthode est choisie pour les vastes applications qu'elle permet. Par ailleurs, Ingenito [64] a montré l'équivalence entre la technique d'identification des résidus et l'inversion matricielle pour la transmission d'une onde acoustique d'une grille d'aubes vers un milieu non borné, par la comparaison des bilans de puissance acoustique pour les deux méthodes.

Les bases modales des deux milieux de part et d'autre de l'interface peuvent être utilisées indifféremment mais l'une ou l'autre peut s'avérer plus appropriée en fonction des termes présents dans le système d'équations. L'application de la projection orthogonale avec les deux bases modales est donc détaillée dans cette section.

Projection orthogonale sur la base modale du réseau de canaux

En considérant tout d'abord la base modale associée au réseau de canaux bifurqués, le projecteur s'écrit :

$$\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)(\bullet)\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \tag{2.40}$$

où $(\bullet)$ désigne la quantité sur laquelle s'applique le projecteur. Après calculs (annexe (B)), le système d'équations obtenu est le suivant :

$$(k - k_i^+ M)\Lambda_{\mu,i} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (k - k_s^- M) R_s \Lambda_{\mu,s} = (k - k_\mu^+ M) D_\mu^0 \frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}), \tag{2.41}$$

$$(\mathrm{i}k_i^+)\Lambda_{\mu,i} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}k_s^-) R_s \Lambda_{\mu,s} = (\mathrm{i}k_\mu^+) D_\mu^0 \frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}). \tag{2.42}$$

où δ représente le symbole de Kronecker et où :

$$\Lambda_{\mu,\nu} = \int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}\alpha_\nu \left[1 - (-1)^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\right]}{\alpha_\nu^2 - \alpha_\mu^2}, & \text{si} \quad \alpha_\mu \neq \alpha_\nu, \\ \dfrac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}), & \text{si} \quad \alpha_\mu = \alpha_\nu, \end{cases} \quad \nu \in [i, s]. \tag{2.43}$$

L'élimination du terme D_μ^0 et la recombinaison des Eqs. (2.41) et (2.42) mènent à l'équation :

$$\sum_{s=\infty}^{+\infty} \left[\frac{(k - k_s^- M)}{(k - k_\mu^+ M)} - \frac{k_s^-}{k_\mu^+}\right] \Lambda_{\mu,s} R_s = \left[\frac{k_i^+}{k_\mu^+} - \frac{(k - k_i^+ M)}{(k - k_\mu^+ M)}\right] \Lambda_{\mu,i}. \tag{2.44}$$

Après troncature modale ($s \in [-N_s; N_s]$, $\mu \in [0, N_\mu - 1]$), cette équation peut être écrite sous la forme matricielle :

$$\underline{\mathbf{\Lambda}_s^1}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}_i. \tag{2.45}$$

Les termes des différentes matrices s'écrivent :

$$\Lambda_s^1(\mu, s) = \left[\frac{(k - k_s^- M)}{(k - k_\mu^+ M)} - \frac{k_s^-}{k_\mu^+}\right]\Lambda_{\mu,s}, \quad \Lambda_i(\mu, 1) = \left[\frac{k_i^+}{k_\mu^+} - \frac{(k - k_i^+ M)}{(k - k_\mu^+ M)}\right]\Lambda_{\mu,i} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = [R_s]\,.$$

La résolution de cette équation par inversion matricielle permet la détermination du vecteur des coefficients de réflexion $\mathbf{R}$. Ensuite, les coefficients modaux de transmission sont déterminés à l'aide de l'Eq. (2.42) :

$$D^0(\mu, 1) = \frac{1}{a(1 + \delta_{\mu,0})}\left[\frac{k_i^+}{k_\mu^+}\Lambda_{\mu,i} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\frac{k_s^-}{k_\mu^+}R_s\Lambda_{\mu,s}\right]. \tag{2.46}$$

Une autre méthode consiste à écrire une équation matricielle synthétique à partir du système d'équations (2.41) et (2.42) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p & \mathbf{F}_p \\ \underline{\mathbf{E}_v} & \underline{\mathbf{F}_v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{D}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p \\ \mathbf{H}_v \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

où :

$$E_p(\mu, s) = (k - k_s^- M)\Lambda_{\mu,s}, \qquad F_p(\mu, \mu) = -(k - k_\mu^+ M)\frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}), \qquad H_p(\mu, 1) = -(k - k_i^+ M)\Lambda_{\mu,i},$$
$$E_v(\mu, s) = (\mathrm{i}k_s^-)\Lambda_{\mu,s}, \qquad F_p(\mu, \mu) = -(\mathrm{i}k_\mu^+)\frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}), \qquad H_v(\mu, 1) = -(\mathrm{i}k_i^+)\Lambda_{\mu,i}.$$

La résolution de cette équation détermine directement les amplitudes modales $\mathbf{R}$ et $\mathbf{D}^0$. Finalement, les amplitudes des modes transmis pour chaque canal de rang m se calculent par la relation :

$$D_\mu^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}D_\mu^0 \quad \text{où} \quad u = \alpha_i\, a. \tag{2.48}$$

Projection orthogonale sur la base modale du milieu non borné

La base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle est cette fois considérée. Le projecteur s'écrit :

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\nu z}(\bullet)\mathrm{d}z, \quad \alpha_\nu = \alpha_i + \nu\frac{2\pi}{a}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.49}$$

Après le calcul des produits scalaires (annexe (B)), le système d'équations (Eqs. (2.36) et (2.37)) devient, $\nu \in \mathbb{Z}$:

$$a(k - k_i^+ M)\delta_{\nu,0} + a(k - k_\nu^- M)R_\nu = \sum_{q=0}^{+\infty}(k - k_q^+ M)D_q^0\varphi_{\nu,q}, \tag{2.50}$$

$$a(\mathrm{i}k_i^+)\delta_{\nu,0} + a(\mathrm{i}k_\nu^-)R_\nu = \sum_{q=0}^{+\infty}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0\varphi_{\nu,q}, \tag{2.51}$$

où :

$$\varphi_{\nu,q} = \int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\nu z}\cos(\alpha_q z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}\alpha_\nu\left[(-1)^q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u} - 1\right]}{\alpha_\nu^2 - \alpha_q^2}, & \text{si} \quad \alpha_q \neq \alpha_\nu, \\ \dfrac{a}{2}(1 + \delta_{q,0}), & \text{si} \quad \alpha_q = \alpha_\nu. \end{cases} \tag{2.52}$$

L'élimination du terme R_ν et la recombinaison des équations (2.50) et (2.51) mènent à l'équation :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{a}\left[\frac{(k-k_q^+M)}{(k-k_\nu^-M)} - \frac{k_q^+}{k_\nu^-}\right] D_q^0\varphi_{\nu,q} = \left[\frac{(k-k_i^+M)}{(k-k_\nu^-M)} - \frac{k_i^+}{k_\nu^-}\right]\delta_{\nu,0}. \tag{2.53}$$

Après troncature modale ($\nu \in [-N_\nu; N_\nu]$, $q \in [0, N_q-1]$), l'équation matricielle équivalent s'écrit :

$$\underline{\mathbf{\Phi}_q^1}\mathbf{D}^0 = \mathbf{\Phi}_i, \tag{2.54}$$

avec les notations :

$$\Phi_q^1(\nu,q) = \frac{1}{a}\left[\frac{(k-k_q^+M)}{(k-k_\nu^-M)} - \frac{k_q^+}{k_\nu^-}\right]\varphi_{\nu,q}, \quad \Phi_i(\nu,1) = \left[\frac{(k-k_i^+M)}{(k-k_\nu^-M)} - \frac{k_i^+}{k_\nu^-}\right]\delta_{\nu,0} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}^0 = \left[D_q^0\right].$$

Le vecteur des amplitudes des modes transmis $\mathbf{D}^0$ est solution de cette équation matricielle. À l'aide de l'Eq. (2.51), les amplitudes des modes réfléchis sont déterminés sous la forme :

$$R_\nu = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{a}\frac{k_q^+}{k_\nu^-}D_q^0\varphi_{\nu,q} - \frac{k_i^+}{k_\nu^-}\delta_{\nu,0}. \tag{2.55}$$

De même, une équation matricielle synthétique peut être écrite à partir des Eqs. (2.50) et (2.51) :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}_p} & \underline{\mathbf{F}_p} \\ \underline{\mathbf{E}_v} & \underline{\mathbf{F}_v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p \\ \mathbf{H}_v \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

où :

$$\begin{aligned} E_p(\nu,q) &= (k-k_q^+M)\varphi_{\nu,q}, & F_p(\nu,\nu) &= -a(k-k_\nu^-M), & H_p(\nu,1) &= a(k-k_i^+M)\delta_{\nu,0}, \\ E_v(\nu,q) &= (\mathrm{i}k_q^+)\varphi_{\nu,q}, & F_p(\nu,\nu) &= -a(\mathrm{i}k_\nu^-), & H_v(\nu,1) &= a(\mathrm{i}k_i^+)\delta_{\nu,0}. \end{aligned}$$

La résolution de cette équation détermine directement les amplitudes modales $\mathbf{D}^0$ et $\mathbf{R}$.

2.1.4 Validation paramétrique

La technique de raccordement modal est employée ici pour étudier la transmission d'une onde acoustique à travers un réseau semi-infini de canaux bifurqués. Un cas test est choisi pour analyser la validité des techniques de résolution, la convergence en nombre de modes et l'équivalence entre les différentes bases de projection. L'onde acoustique satisfait la condition de 2π-périodicité, par conséquent, les nombres d'ondes, distance inter-aubes et déphasage inter-aubes sont définis comme suit :

$$\alpha_i = \frac{n}{R_0}, \quad a = \frac{2\pi R_0}{V}, \quad \alpha_s = \frac{1}{R_0}(n+sV), \quad u = \frac{2\pi n}{V}.$$

Les paramètres du cas d'étude sont précisés dans la Tab. 2.1 :

Paramètres du stator	Onde acoustique incidente
$M = 0.25, \quad V = 10, \quad R_0 = 0.1$ m,	$n = 2, \quad \Theta_i = \pi/4, \quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 1800$ Hz.

TABLE 2.1 – Paramètres du cas test pour l'interface de bord d'attaque.

Pour tous les cas étudiés dans cette thèse, la vitesse du son est fixée à $c_0 = 340$ m/s et la masse volumique du fluide à $\rho_0 = 1.22$ kg/m^3. L'amplitude du potentiel acoustique incident est calculée de telle sorte que son amplitude en pression soit unitaire. Ainsi, le potentiel incident s'écrit :

$$\phi_i = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ z}}{\mathrm{i}\rho_0 c_0(k - k_i^+ M)}, \quad x \leq 0. \tag{2.57}$$

Continuité des champs de pression acoustique et de vitesse axiale à l'interface

La Fig. 2.4 représente un instantané du champ de pression acoustique obtenu lorsqu'un réseau 2π-périodique de $V = 10$ canaux reçoit une onde acoustique incidente composée de $n = 2$ lobes.

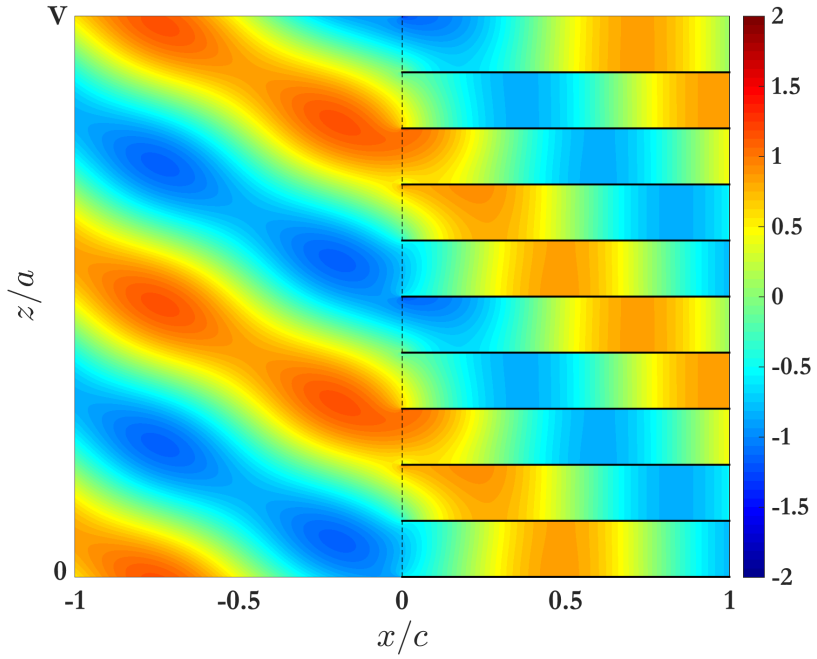


FIGURE 2.4 – Cartographie de pression acoustique instantanée calculée à partir de la technique de raccordement modal pour une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite. Les paramètres de calcul sont détaillés en Tab. 2.1.

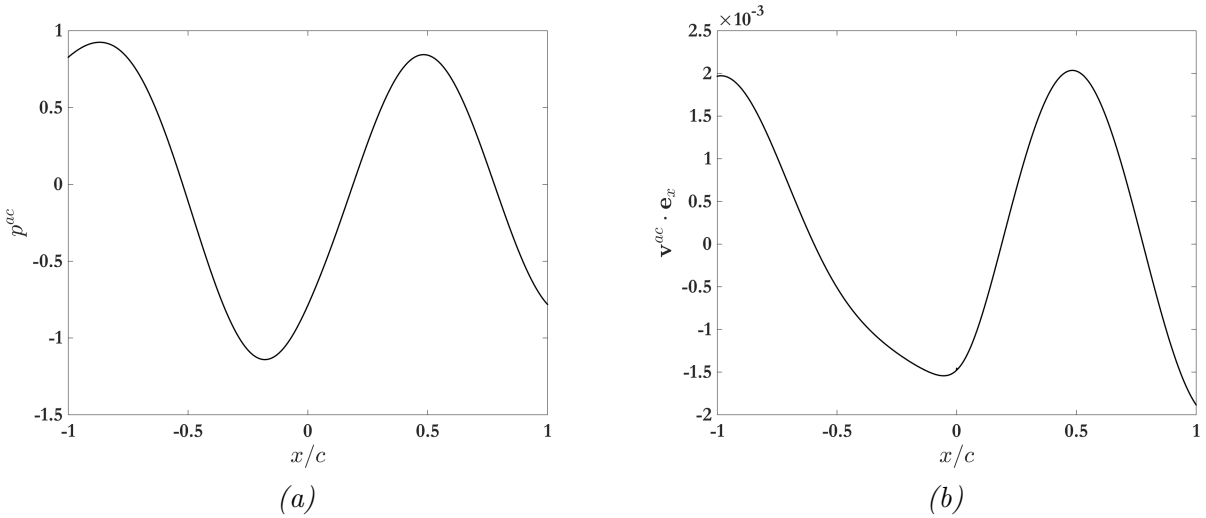


FIGURE 2.5 – Profils de la partie réelle de la pression acoustique (a) et de la vitesse axiale (b) normalisées dans la direction axiale à mi-largeur de canal ($z/a = 0.5$).

La Fig. 2.4 illustre de manière qualitative la continuité du champ de pression instantané dans le domaine de résolution. La Fig. 2.5 montre quantitativement cette continuité avec les profils des parties

réelles de la pression acoustique et de la vitesse axiale dans la direction de l'écoulement, calculés à mi-hauteur d'un canal ($z/a = 0.5$).

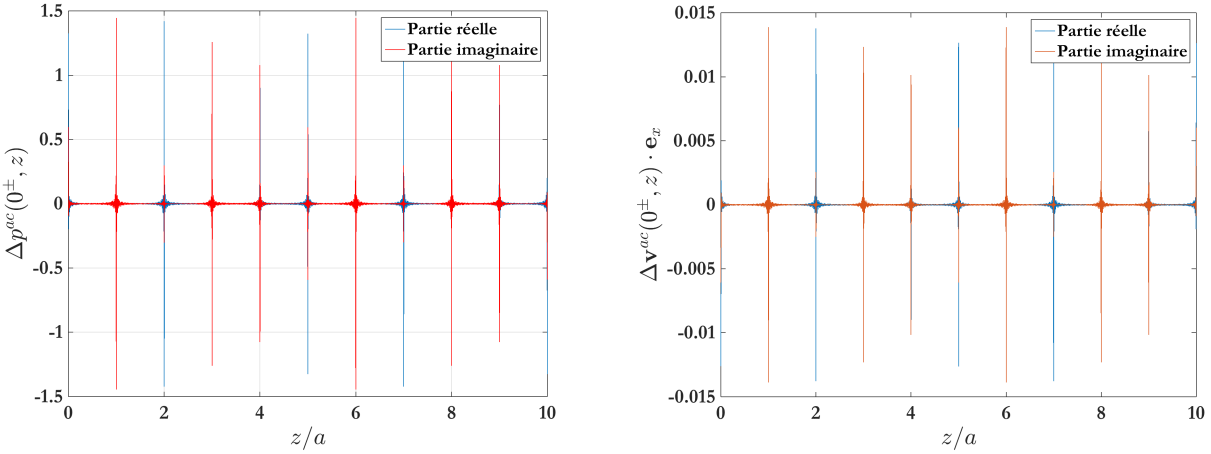


FIGURE 2.6 – Profils des parties réelle et imaginaire de la différence de pression acoustique normalisée (a) et de vitesse axiale (b) dans la direction tangentielle de part et d'autre de l'interface ($z = 0^{\pm}$).

La Fig. 2.6 représente les parties réelle et imaginaire de la différence de pression acoustique (Fig. 2.6-a) et de vitesse axiale (Fig. 2.6-b) dans la direction tangentielle en $z = 0$ de part et d'autre de l'interface, selon la définition :

$$\Delta\Gamma(0^{\pm}, z) = \Gamma_d(0^{+}, z) - (\Gamma_i(0^{-}, z) + \Gamma_r(0^{-}, z)).$$

La figure montre que la différence de pression et de vitesse axiale est nulle sur la largeur de chaque canal excepté au niveau des parois ($z/a \in \mathbb{N}$) où ces quantités sont nulles dans le réseau de canaux bifurqués du fait de la condition de rigidité des plaques, alors qu'elles ne le sont pas en amont de l'interface. Les oscillations qui se produisent de chaque côté des discontinuités représentent un effet de bord identique au phénomène de Gibbs [38]. Celui-ci, très connu dans le domaine de l'analyse de Fourier, est une déformation du signal qui advient à proximité des points de discontinuité des fonctions dérivables par morceaux, ce que constitue la fonction ϕ_d^m. Dans ce cas, augmenter le nombre de modes permet d'affiner le pic de la discontinuité et de réduire la zone d'oscillation, mais pas de la supprimer. Pour autant, cette zone d'oscillations est très localisée et n'est présente qu'au bord d'attaque des plaques. Dans le reste du domaine, l'énergie acoustique est portée par les modes passants en aval ou en amont de l'interface, et le champ n'est pas influencé par ce comportement.

Comparaison des bases modales de projection

Comme cela a été indiqué en Sec. 2.1.3, la technique de résolution nécessite la projection sur une des deux bases modales considérées dans le problème. L'intérêt ici est de montrer que les résultats ne dépendent pas du choix de la base modale employée comme projecteur.

Les Figs. 2.7 et 2.8 représentent les coefficients modaux des potentiels acoustiques réfléchis ($|\mathbf{R}|$) et transmis ($|\mathbf{D}^0|$), en valeur absolue. Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. Tout d'abord, elles indiquent que seuls les modes réfléchis d'ordre $s = 0$ et transmis d'ordre $q = 0$ sont passants. Les autres modes sont coupés, atténués exponentiellement de part et d'autre de l'interface. Même s'ils ne participent pas au rayonnement acoustique, la prise en compte de ces modes est très importante pour assurer la continuité du champ acoustique à l'interface et pour calculer avec exactitude l'amplitude des modes passants. Par ailleurs, l'amplitude des modes décroit très rapidement en fonction de l'ordre modal et l'essentiel de l'énergie acoustique de l'onde incidente se retrouve dans les ondes transmises dans ce cas particulier. En amont de l'interface, le champ acoustique est dominé par l'onde incidente, modulée par la présence du mode réfléchi passant,

également composé de deux lobes ($\alpha_s = \alpha_i$). Celui-ci se propage vers l'amont, de la même manière qu'une réflexion spéculaire, néanmoins modifiée par la présence de l'écoulement. Le calcul exact des angles de propagation des ondes diffractées est précisé en Sec. 2.6.6. Dans le réseau de canaux, le champ acoustique près de l'interface montre une tendance partielle à des oppositions de phases dans la direction tangentielle aux frontières d'un même canal, représentatif du mode $q = 1$. Cependant, seul le mode plan se propage ($q = 0$) plus loin en aval dans les canaux, le champ acoustique n'ayant aucune variation de phase dans la direction tangentielle. Par ailleurs, il apparait très clairement que le déphasage entre chaque canal est imposé par la phase tangentielle de l'onde incidente, illustrant le principe de trace.

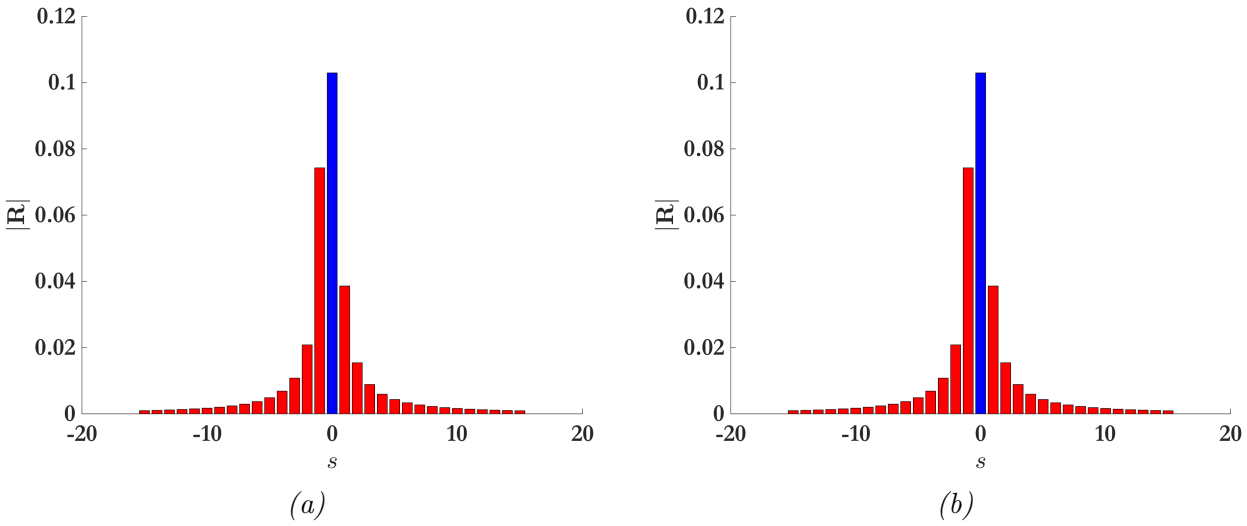


FIGURE 2.7 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r en fonction de l'ordre modal s. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle. Les barres d'histogrammes bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

s	R_s : réseau de canaux ($\times 10^{-2}$)	R_s : milieu non borné ($\times 10^{-2}$)
-5	$-0.4246 - 0.2394$ i	$-0.4241 - 0.2391$ i
-4	$-0.5920 - 0.3487$ i	$-0.5916 - 0.3484$ i
-3	$-0.9109 - 0.5771$ i	$-0.9105 - 0.5769$ i
-2	$-1.6776 - 1.2330$ i	$-1.6773 - 1.2328$ i
-1	$-4.6993 - 5.7523$ i	$-4.6992 - 5.7521$ i
0	$-6.5329 - 7.9558$ i	$-6.5329 - 7.9558$ i
1	$2.8708 + 2.25804$ i	$2.8706 + 2.25802$ i
2	$1.2743 + 0.8691$ i	$1.2740 + 0.8689$ i
3	$0.7549 + 0.4621$ i	$0.7546 + 0.4619$ i
4	$0.5135 + 0.2965$ i	$0.5131 + 0.2962$ i
5	$0.3788 + 0.2108$ i	$0.3783 + 0.2105$ i

TABLE 2.2 – Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi en fonction de l'ordre modal s et de la base modale utilisée comme projecteur.

Ensuite, les Figs. 2.7-a et 2.8-a représentent les amplitudes modales calculées en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués, tandis que les Figs. 2.7-b et 2.8-b indiquent celles calculées en employant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle (milieu amont de l'interface). Ces figures illustrent qualitativement l'identité des résultats quelle que

soit la base modale utilisée. Les Tabs. (2.2, 2.3) indiquent les valeurs complexes des coefficients de réflexion et de transmission pour les 11 modes principaux. Les résultats obtenus avec les deux bases de projection concordent jusqu'au cinquième chiffre significatif pour les modes passants, et jusqu'au quatrième ou troisième chiffre pour les modes coupés.

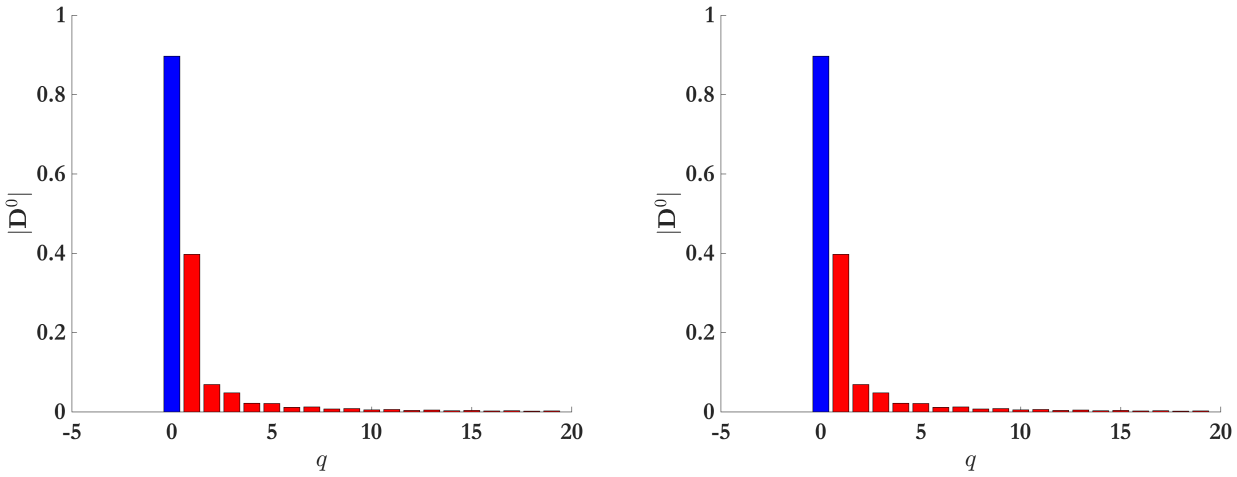


FIGURE 2.8 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel transmis ϕ_d^0 en fonction de l'ordre modal q. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle. Les barres d'histogrammes bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

q	D_q^0 : réseau de canaux ($\times 10^{-1}$)	D_q^0 : milieu non borné ($\times 10^{-1}$)
0	$7.5579 + 4.8321$ i	$7.5579 + 4.8321$ i
1	$1.2197 - 3.7828$ i	$1.2197 - 3.7828$ i
2	$-0.5203 - 0.4555$ i	$-0.5203 - 0.4555$ i
3	$0.3581 - 0.3218$ i	$0.3580 - 0.3217$ i
4	$-0.1375 - 0.1723$ i	$-0.1374 - 0.1722$ i
5	$0.1713 - 0.1272$ i	$0.1713 - 0.1272$ i
6	$-0.0674 - 0.0952$ i	$-0.0673 - 0.0952$ i
7	$0.1043 - 0.0713$ i	$0.1043 - 0.0712$ i
8	$-0.0413 - 0.0622$ i	$-0.0413 - 0.0621$ i
9	$0.0718 - 0.0467$ i	$0.0717 - 0.0467$ i
10	$-0.0284 - 0.0445$ i	$-0.0285 - 0.0445$ i

TABLE 2.3 – Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel transmis en fonction de l'ordre modal q et de la base modale utilisée comme projecteur.

Convergence en nombre de modes

Il est également important de connaitre le nombre de modes nécessaire et suffisant pour garantir la précision du calcul tout en évitant un mauvais conditionnement de la matrice à inverser. En fonction des nombres de modes N_s, N_q et de la base de projection utilisée, le problème mathématique à traiter est différent. Trois types de systèmes linéaires se présentent alors, dont les configurations possibles sont répertoriées en Tab. (2.4). Si le nombre des équations est strictement inférieur au nombre des inconnues, le système linéaire est dit sous-déterminé. Dans ce cas, il possède une infinité de solutions formant un sous-espace vectoriel affine. Si le nombre des équations est égal au nombre des inconnues, le

système linéaire devient déterminé et ne possède qu'une solution. Il s'agit alors d'un système de Cramer. Enfin, si le nombre des équations est strictement supérieur au nombre des inconnues, le système est sur-déterminé. À moins que le rang de la matrice, représentatif du nombre d'équations linéairement indépendantes, soit égal au nombre d'inconnues, ce système ne possède pas de solution. Le système est alors résolu au sens des moindres carrés, avec une solution approchée. Si le système n'est pas déterminé, la matrice est alors rectangulaire, et le système peut être résolu par le calcul de la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose associée au système. Dans le cas d'un système déterminé, la matrice est alors carrée. Le système peut alors être résolu avec les méthodes classiques d'inversion matricielle.

	$N_q < 2\ N_s + 1$	$N_q = 2\ N_s + 1$	$N_q > 2\ N_s + 1$
Base modale réseau	sous-déterminé	déterminé	sur-déterminé
Base modale milieu non borné	sur-déterminé	déterminé	sous-déterminé

TABLE 2.4 – Systèmes linéaires possibles en fonction des nombres de modes et de la base de projection utilisée.

Afin d'obtenir une solution unique et d'avoir un système équivalent quelle que soit la base de projection utilisée, les nombres de modes seront toujours choisis de telle sorte que $N_q = 2\ N_s + 1$. Le système d'équations est alors déterminé. Deux indicateurs sont utilisés pour analyser le comportement de l'inversion matricielle en fonction du nombre de modes N_q, que sont le bilan de puissance acoustique à l'interface et le nombre de conditionnement de la matrice inversible.

Le bilan de puissance établit que la puissance acoustique de l'onde incidente doit être transférée aux ondes réfléchies et transmises à l'interface, selon la relation synthétique suivante :

$$\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_r = \mathcal{P}_d. \tag{2.58}$$

D'après les calculs détaillés en annexe (C), les puissances acoustiques associées aux différentes ondes s'écrivent :

$$\mathcal{P}_i = \frac{kZ_0aV}{2}\ \overline{k_i}, \quad \text{si} \quad \overline{k_i} \in \mathbb{R}, \quad Z_0 = \rho_0 c_0. \tag{2.59}$$

$$\mathcal{P}_r = -\frac{kZ_0aV}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \overline{k_s}\ |R_s|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_s} \in \mathbb{R}. \tag{2.60}$$

$$\mathcal{P}_d = \frac{kZ_0}{2} \times \frac{aV}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} (1 + \delta_{q,0})\ \overline{k_q}\ |D_q^0|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_q} \in \mathbb{R}. \tag{2.61}$$

Un indicateur représentatif de l'erreur du bilan de puissance à l'interface est alors introduit :

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{-\mathcal{P}_r + \mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_i} - 1. \tag{2.62}$$

Lorsque l'erreur du bilan de puissance à l'interface est nulle, l'intégralité de la puissance acoustique incidente a été transférée aux ondes réfléchies et transmises. Le second indicateur est le nombre de conditionnement de la matrice inversible. Le conditionnement d'une matrice inversible A relativement à une norme subordonnée, notée $\| \bullet \|$ est défini par la formule :

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|. \tag{2.63}$$

Le conditionnement dépend de la norme choisie, la norme euclidienne étant habituellement employée. Comme la norme est supposée subordonnée, le conditionnement est supérieur à un :

$$\kappa(A) \geq 1. \tag{2.64}$$

Pour le système linéaire $A \cdot X = B$, où les données sont la matrice A et le vecteur du second membre B, le conditionnement donne une borne de l'erreur relative commise sur la solution X lorsque les données sont perturbées. Si cette borne est très grande, l'erreur induite par cette perturbation peut rendre la solution obtenue inexploitable. Par conséquent, le nombre de conditionnement doit être le plus faible possible pour s'assurer de la pertinence de la solution.

Les Figs (2.9-a) et (2.9-b) illustrent l'erreur de bilan de puissance à l'interface ($\Delta\mathcal{P}$) en pourcentage et le nombre de conditionnement de la matrice inversible en fonction du nombre de modes N_q, respectivement.

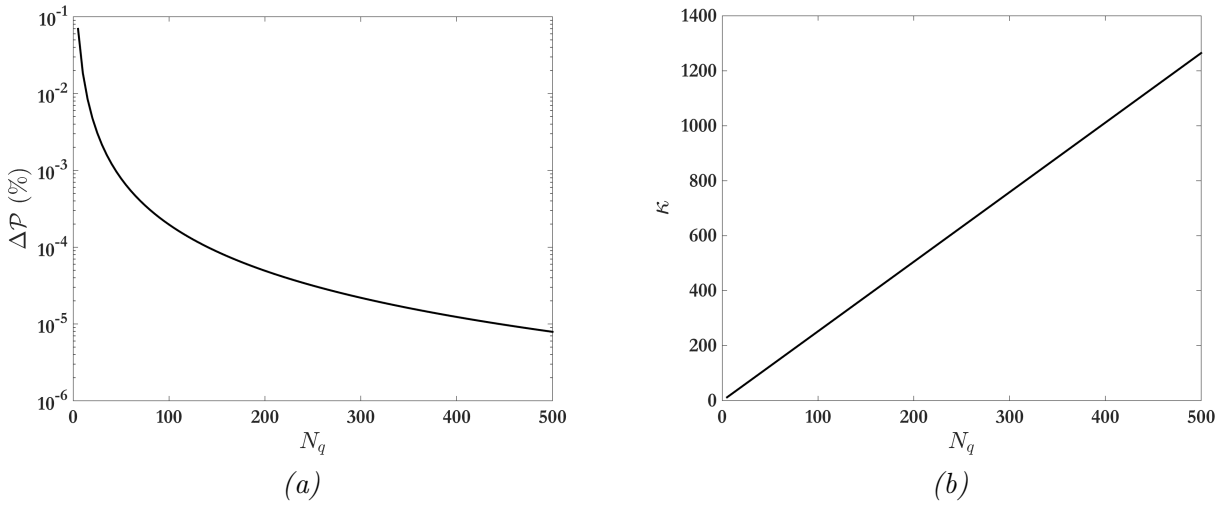


FIGURE 2.9 – (a) : Erreur du bilan de puissance acoustique (%) à l'interface en fonction du nombre de mode N_q. (b) : Nombre de conditionnement de la matrice inversible en fonction du nombre de mode N_q.

La Fig (2.9-a) montre que l'erreur du bilan de puissance acoustique à l'interface diminue significativement en fonction du nombre de modes N_q, passant de l'ordre du dixième de pour cent pour une dizaine de modes à 10^{-5} % pour $N_q = 500$. En revanche, comme l'indique la Fig (2.9-b), le nombre de conditionnement augmente linéairement avec le nombre de modes N_q. Sa valeur varie d'une centaine pour une dizaine de modes à plus de 1200 pour 500 modes. Par conséquent, augmenter le nombre de modes a pour effet d'améliorer la précision de la solution obtenue comme l'indique le bilan de puissance, mais également de rendre cette solution instable par son conditionnement. Si les données d'entrée, telles que le nombre de Mach, les nombres d'ondes par exemple, sont soumises à des variations ou des imprécisions lors de leur calcul, cette solution ne sera pas exploitable. En conclusion, il est préférable de limiter la précision du calcul, toutefois satisfaisant même avec peu de modes, afin d'éviter un mauvais conditionnement de la matrice inversible. De manière tout à fait pratique, le nombre de modes N_q est typiquement choisi inférieur ou égal à 100 pour les applications présentes.

2.2 Rayonnement acoustique depuis un réseau de canaux semi-infinis sous excitation périodique

La technique de raccordement modal est désormais appliquée, dans le même cadre bidimensionnel, au cas complémentaire du rayonnement acoustique depuis un réseau de canaux semi-infinis sous excitation acoustique périodique déphasée, illustré par la Fig. 2.10. L'étude de ce cas, hérité des théories de l'électromagnétisme [95], a été introduit dans le domaine de l'acoustique par Ingenito [64]. Les guides d'ondes sont excités uniformément en amplitude mais sont progressivement déphasés d'un canal à l'autre, d'une quantité e^{imu}, où m est l'indice du guide d'ondes et $u = \alpha a$. La valeur de α diffère si une condition de 2π-périodicité est appliquée dans la direction tangentielle.

Les ondes dans les guides d'ondes se propagent à la pulsation ω dans le demi-espace $x < c$ alors que le milieu non borné dans la direction tangentielle occupe le demi-espace $x > c$. L'origine de la coordonnée axiale est placée à l'interface. Le canal d'ordre m occupe la position ($x < c$, $m\ a < z < (m+1)\ a$), a étant la largeur d'un canal. L'écoulement, de nombre de Mach M est défini comme dans le cas précédent. Si la condition de 2π-périodicité est satisfaite, alors $\alpha = n/R_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Sinon, cette phase est égale à $\alpha = k \sin\Theta/(1 + M\cos\Theta)$.

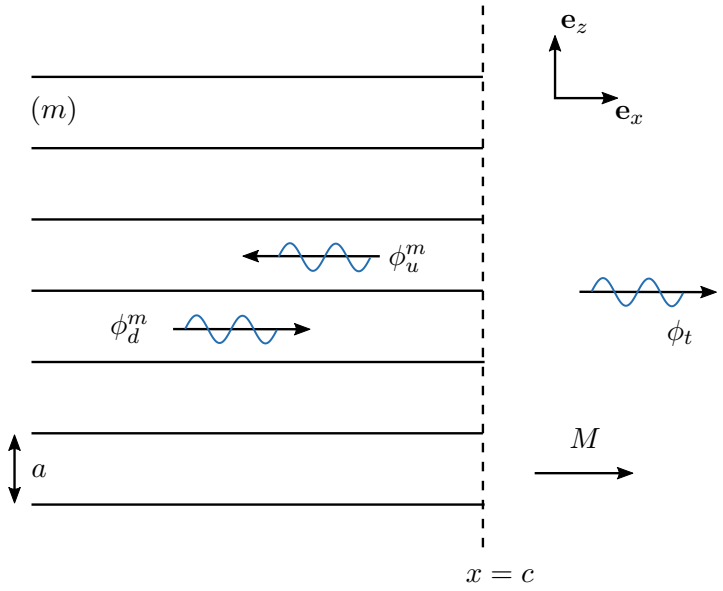


FIGURE 2.10 – Réflexion et transmission d'une suite d'ondes acoustiques à l'interface entre un réseau de canaux bifurqués et un milieu non borné.

À l'interface ($x = c$), les ondes incidentes donnent naissance à des ondes réfléchies dans les canaux bifurqués sous la forme de séries de modes de propagation guidée, et à une transmission, en accord avec le principe de trace (Sec. 1.7.3), traduite sous la forme d'une décomposition modale de Floquet (Annexe A).

2.2.1 Expression des potentiels acoustiques

Les potentiels acoustiques sont solutions de l'équation de Helmholtz convectée (Eq. 2.15). En accord avec les développements présentés en Sec. 2.1 à propos de la propagation guidée, le champ potentiel acoustique associé aux ondes incidentes s'écrit :

$$\phi_d^m(x,z) = \sum_{q=0}^{+\infty} D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left(\alpha_q(z - ma)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x}, \quad c \le x, \quad m\ a < z < (1+m)\ a, \tag{2.65}$$

où :

$$k_q^+ = \frac{-Mk + \overline{k_q}}{\beta^2}, \quad \overline{k_q} = \sqrt{k^2 - \beta^2\alpha_q^2}, \quad \alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad u = \alpha a.$$

Le champ potentiel acoustique associé aux ondes réfléchies par l'interface s'écrit :

$$\phi_u^m(x,z) = \sum_{q=0}^{+\infty} U_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left(\alpha_q(z - ma)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^- (x-c)}, \quad c \le x, \quad m\ a < z < (1+m)\ a, \tag{2.66}$$

où :

$$k_q^- = \frac{-Mk - \overline{k_q}}{\beta^2}.$$

En accord avec le principe de trace, la vitesse de phase tangentielle du champ acoustique transmis en aval de l'interface est imposée par celle de l'onde incidente. Ainsi, le déphasage tangentiel le long de l'interface entre deux canaux est identique pour toutes les ondes considérées. Le champ acoustique associé aux ondes transmises s'écrit alors en accord avec la décomposition modale de Floquet :

$$\phi_t = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^+(x-c)}, \quad x \geq c, \tag{2.67}$$

où :

$$\alpha_s = \frac{u + s2\pi}{a} = \alpha + s\frac{2\pi}{a}, \quad k_s^+ = \frac{-Mk + \overline{k_s}}{\beta^2}, \quad \overline{k_s} = \sqrt{k^2 - \beta^2\alpha_s^2}.$$

2.2.2 Équations de raccordement

Dans cette configuration, pour le canal $m = 0$, les équations de continuité à l'interface ($x = c$) s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}(k - k_q^+ M)D_q^0 \cos(\alpha_q z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + (k - k_q^- M)U_q^0 \cos(\alpha_q z) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(k - k_s^+ M)T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}, \tag{2.68}$$

2. l'équation de continuité de la vitesse normale :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0 \cos(\alpha_q z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + (\mathrm{i}k_q^-)U_q^0 \cos(\alpha_q z) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}k_s^+)T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}. \tag{2.69}$$

2.2.3 Techniques de résolution

Projection orthogonale sur la base modale du réseau de canaux

Le système d'équations obtenu après projection modale (Eq. 2.40)) est le suivant :

$$\left[(k - k_\mu^+ M)D_\mu^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+ c} + (k - k_\mu^- M)U_\mu^0\right]\frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(k - k_s^+ M)T_s\Lambda_{\mu,s}, \tag{2.70}$$

$$\left[(\mathrm{i}k_\mu^+)D_\mu^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+ c} + (\mathrm{i}k_\mu^-)U_\mu^0\right]\frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}k_s^+)T_s\Lambda_{\mu,s}, \tag{2.71}$$

où δ représente le symbole de Kronecker et $\Lambda_{\mu,s}$ dont le calcul est détaillé en annexe B, est défini par l'Eq. (2.43).

L'élimination du terme U_μ^0 et la recombinaison des Eqs. (2.70) et (2.71) mènent à l'équation :

$$\sum_{s=\infty}^{+\infty}\left[\frac{(k - k_s^+ M)}{(k - k_\mu^- M)} - \frac{k_s^+}{k_\mu^-}\right]\Lambda_{\mu,s}T_s = \left[\frac{(k - k_\mu^+ M)}{(k - k_\mu^- M)} - \frac{k_\mu^+}{k_\mu^-}\right]D_\mu^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+ c}\frac{a}{2}(1 + \delta_{\mu,0}). \tag{2.72}$$

Après troncature modale ($s \in [-N_s; N_s]$, $\mu \in [0, N_\mu - 1]$), cette équation peut être écrite sous forme matricielle :

$$\underline{\mathbf{\Lambda}_s^2}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}_d. \tag{2.73}$$

où :

$$\Lambda_s^2(\mu,s)=\left[\frac{(k-k_s^+M)}{(k-k_\mu^-M)}-\frac{k_s^+}{k_\mu^-}\right]\Lambda_{\mu,s},\quad \Lambda_d(\mu,1)=\left[\frac{(k-k_\mu^+M)}{(k-k_\mu^-M)}-\frac{k_\mu^+}{k_\mu^-}\right]D_\mu^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+c}\frac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0})\quad\text{et}\quad\mathbf{T}=[T_s]\,.$$

La résolution de cette équation par inversion matricielle permet la détermination du vecteur des coefficients de réflexion $\mathbf{T}$. À l'aide de l'Eq. (2.71), les coefficients modaux de réflexion sont déterminés par :

$$U^0(\mu,1)=\frac{2}{a(1+\delta_{\mu,0})}\left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\frac{k_s^+}{k_\mu^-}T_s\Lambda_{\mu,s}\right]-\frac{k_\mu^+}{k_\mu^-}D_\mu^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+c}. \tag{2.74}$$

L'équation matricielle synthétique équivalente s'écrit à partir du système d'équations (2.70) et (2.71) :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}_p & \mathbf{F}_p\\ \underline{\mathbf{E}_v} & \underline{\mathbf{F}_v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{U}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_p\\ \mathbf{H}_v\end{pmatrix}, \tag{2.75}$$

où :

$$\begin{aligned}E_p(\mu,s)&=(k-k_s^+M)\Lambda_{\mu,s}, & F_p(\mu,\mu)&=-(k-k_\mu^-M)\frac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0}),\\ E_v(\mu,s)&=(\mathrm{i}k_s^-)\Lambda_{\mu,s}, & F_p(\mu,\mu)&=-(\mathrm{i}k_\mu^+)\frac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0}),\\ H_p(\mu,1)&=-(k-k_d^+M)\frac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0})D_\mu^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+c}, & H_v(\mu,1)&=-(\mathrm{i}k_d^+)\frac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0})D_\mu^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu^+c}.\end{aligned}$$

La résolution de cette équation détermine directement les amplitudes modales $\mathbf{U}^0$ et $\mathbf{T}$.

Projection orthogonale sur la base modale du milieu non borné

En utilisant le même projecteur que la Sec. 2.1.3 (Eq. (2.49)), le système d'équations (Eqs. (2.68) et (2.69)) devient :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left[(k-k_q^+M)D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+c}+(k-k_q^-M)U_q^0\right]\varphi_{\nu,q}=(k-k_\nu^+M)T_\nu a, \tag{2.76}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left[(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+c}+(\mathrm{i}k_q^-)U_q^0\right]\varphi_{\nu,q}=(\mathrm{i}k_\nu^+)T_\nu a, \tag{2.77}$$

où $\varphi_{\nu,q}$ le produit scalaire défini par l'Eq. 2.52. L'élimination du terme T_ν et la recombinaison des Eqs. (2.76) et (2.77) mènent à l'équation :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left[\frac{(k-k_q^-M)}{(k-k_\nu^+M)}-\frac{k_q^-}{k_\nu^+}\right]U_q^0\varphi_{\nu,q}=\sum_{q=0}^{+\infty}\left[\frac{k_q^+}{k_\nu^+}-\frac{(k-k_q^+M)}{(k-k_\nu^+M)}\right]D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+c}\varphi_{\nu,q}. \tag{2.78}$$

Après troncature modale ($\nu\in[-N_\nu;N_\nu]$, $q\in[0,N_q-1]$), l'équation matricielle équivalente s'écrit :

$$\underline{\mathbf{\Phi}_q^2}\mathbf{U}^0=\mathbf{\Phi}_d. \tag{2.79}$$

où :

$$\Phi_q^2(\nu,q)=\left[\frac{(k-k_q^-M)}{(k-k_\nu^+M)}-\frac{k_q^-}{k_\nu^+}\right]\varphi_{\nu,q},\quad \Phi_d(\nu,1)=\sum_{q=0}^{N_q-1}\left[\frac{k_q^+}{k_\nu^+}-\frac{(k-k_q^+M)}{(k-k_\nu^+M)}\right]D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+c}\varphi_{\nu,q}\quad\text{et}\quad\mathbf{U}^0=\left[U_q^0\right].$$

Le vecteur des coefficients modaux de transmission $\mathbf{U}^0$ est solution de cette équation matricielle. À l'aide de l'Eq. (2.77), les coefficients modaux de transmission sont déterminés :

$$T_\nu = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{a} \left[\frac{k_q^+}{k_\nu^+} D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + \frac{k_q^-}{k_\nu^+} U_q^0 \right] \varphi_{\nu,q}. \tag{2.80}$$

De même, une équation matricielle synthétique peut être écrite à partir des Eq. (2.50) et (2.51) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p & \mathbf{F}_p \\ \underline{\mathbf{E}_v} & \underline{\mathbf{F}_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^0 \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p \\ \mathbf{H}_v \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

où :

$$E_p(\nu,q) = (k - k_q^- M)\varphi_{\nu,q}, \qquad F_p(\nu,\nu) = -(k - k_\nu^+ M)a, \qquad H_p(\nu,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1} (k - k_q^+ M) D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} \varphi_{\nu,q},$$

$$E_v(\nu,q) = (\mathrm{i}k_q^-)\varphi_{\nu,q}, \qquad F_p(\nu,\nu) = -(\mathrm{i}k_\nu^+)a, \qquad H_v(\nu,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1} (\mathrm{i}k_q^+) D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} \varphi_{\nu,q}.$$

Finalement, les amplitudes modales $\mathbf{U}^0$ et $\mathbf{T}$ sont déterminées par inversion matricielle.

2.2.4 Validation paramétrique

De même que pour l'interface de bord d'attaque, une étude paramétrique est menée pour valider les techniques de résolution présentées dans cette section. Le champ acoustique incident ϕ_d^m du cas test est constitué uniquement du mode plan ($q = 0$), dont l'amplitude est calculée afin d'obtenir une pression unitaire :

$$\phi_d^m(x,z) = -\frac{D_0^q \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x}}{\mathrm{i}\rho_0 c_0 (k - k_q^+ M)}, \quad c \leq x, \quad m\ a < z < (1+m)\ a, \quad q = 0. \tag{2.82}$$

Les paramètres du cas sont détaillés dans la Tab. (2.5) :

Paramètres du stator	Onde acoustique incidente
$M = 0.25, \quad V = 20, \quad R_0 = 0.1$ m, $\quad n = 5, \quad \Theta = \pi/4, \quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 12000$ Hz.	

TABLE 2.5 – Paramètres du cas test pour l'interface de bord de fuite.

Continuité des champs de pression acoustique et de vitesse axiale à l'interface

La Fig. 2.11 représente le champ de pression acoustique résultant lorsqu'un ensemble d'ondes acoustiques planes déphasées se propageant dans un réseau 2π-périodique de V canaux bifurqués se transmet dans un milieu non borné. La Fig. 2.14 indique que les trois premiers coefficients modaux du champ acoustique réfléchi ϕ_u^m sont passants, avec une prédominance du mode d'ordre trois, se qui se traduit par des variations transverses du champ de pression dans les canaux inter-aubes. En aval de l'interface, le champ acoustique transmis est composé de deux modes passants, comme l'indique la Fig. 2.15. Le mode dominant d'ordre $s = 0$ correspond à une onde composée de $|n| = 5$ lobes, en accord avec le déphasage inter-aubes αa et le principe de trace. La présence du mode $s = -1$ introduit une onde propagatrice composée de $|n + sV| = 15$ lobes se propageant vers le bas de la figure. Dans la coupe annulaire équivalent, il s'agit d'un mode contra-rotatif modulant le champ acoustique principal, comme le montre la Fig. 2.11.

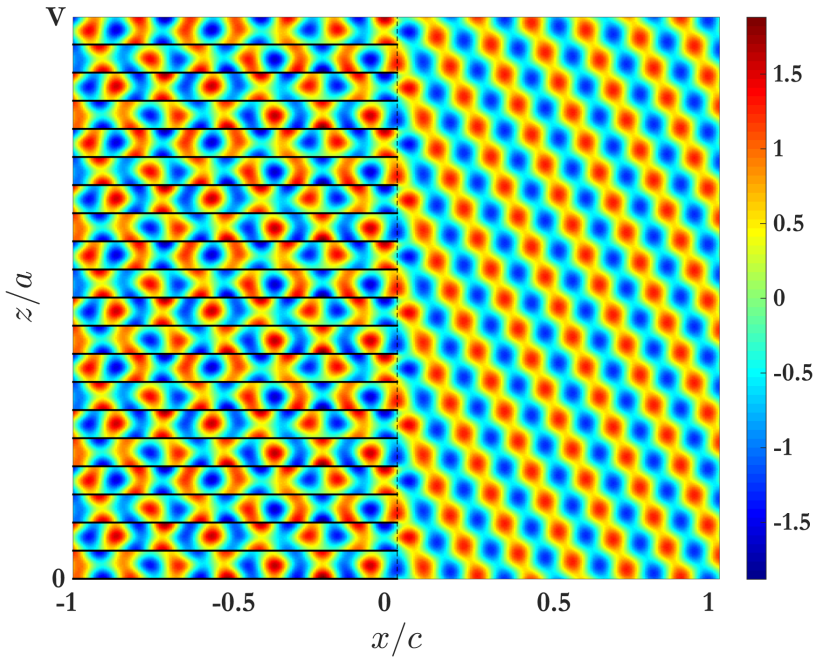


FIGURE 2.11 – Cartographie de pression acoustique instantanée calculée à partir de la technique de raccordement modal pour la transmission d'un ensemble d'ondes déphasées d'amplitude de pression unitaire depuis un réseau de canaux vers un espace libre. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite.

Les Figs. 2.12 et 2.13 confirment la continuité des champs de pression et de vitesse axiale. La Fig. 2.12 présente des profils dans la direction axiale de la partie réelle des champs de pression et vitesse axiale acoustiques, illustrant de manière quantitative le raccordement des quantités physiques de part et d'autre de l'interface. Les profils sont relevés à mi-largeur de canal ($z/a = 0.5$).

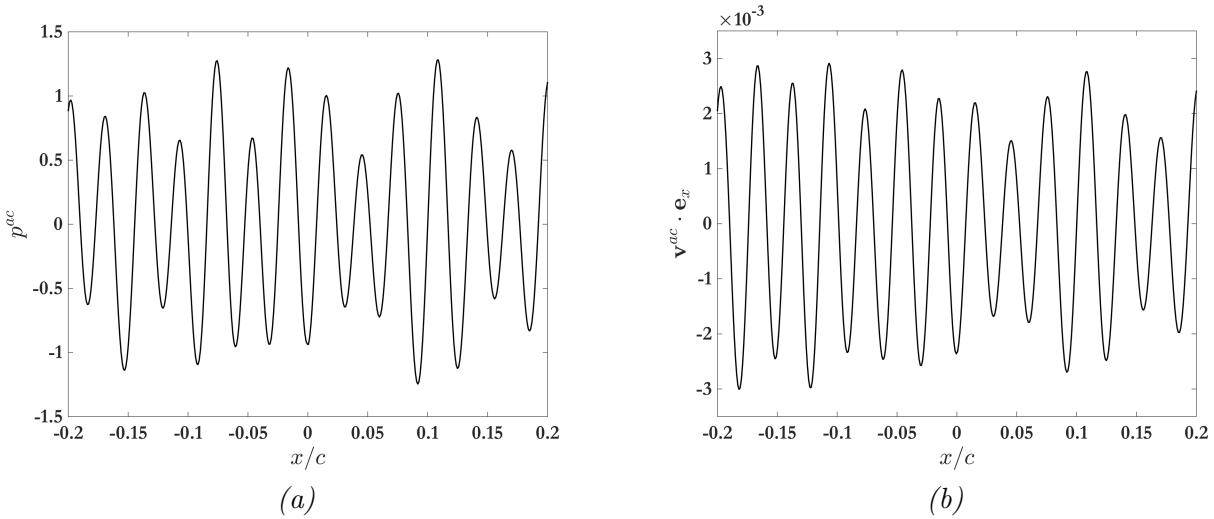


FIGURE 2.12 – Profils des parties réelles de la pression acoustique (a) et de la vitesse axiale (b) normalisées dans la direction axiale à mi-largeur de canal ($z/a = 0.5$), correspondant au champ de la Fig. 2.11.

La Fig. 2.13 représente les parties réelle et imaginaire des différences de pression acoustique (Fig. 2.13-a) et de vitesse axiale (Fig. 2.13-b) dans la direction tangentielle en $z = 0$ de part et d'autre de l'interface selon la définition :

$$\Delta\Gamma(c^{\pm}, z) = \Gamma_t(c^+, z) - (\Gamma_d(c^-, z) + \Gamma_u(c^-, z)).$$

De même que pour la première interface, la continuité des champs est assurée le long des canaux, excepté aux points de discontinuité tels que $z = ma$, où la différence des quantités physiques devient importante. Un nombre de modes élevé permet également de réduire la largeur de ces défauts locaux et d'assurer une meilleure continuité à l'interface.

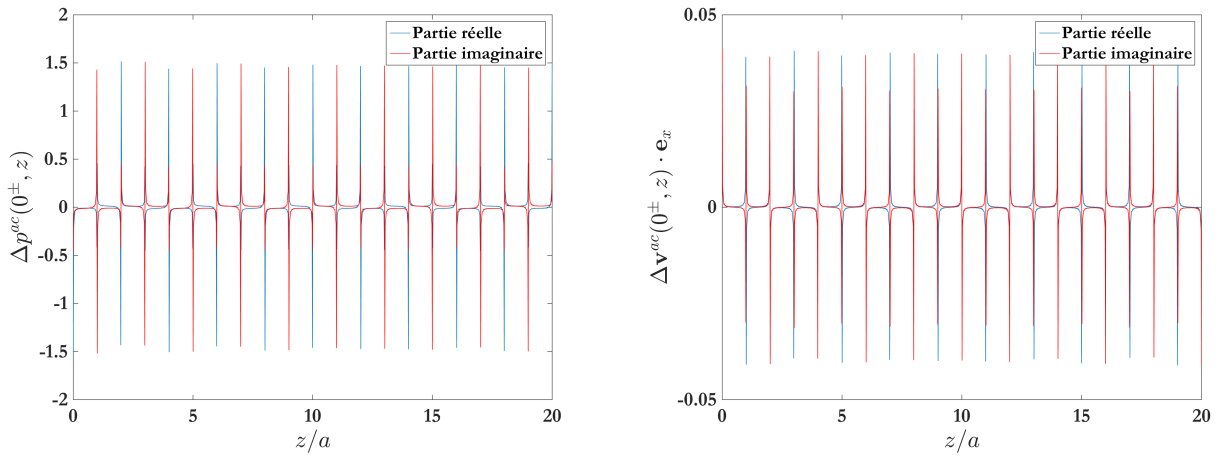


FIGURE 2.13 – Profils des parties réelle et imaginaire des différences de pression acoustique (a) et de vitesse axiale (b) normalisées dans la direction tangentielle de part et d'autre de l'interface ($z = 0.^{\pm}$).

Comparaison des bases modales de projection

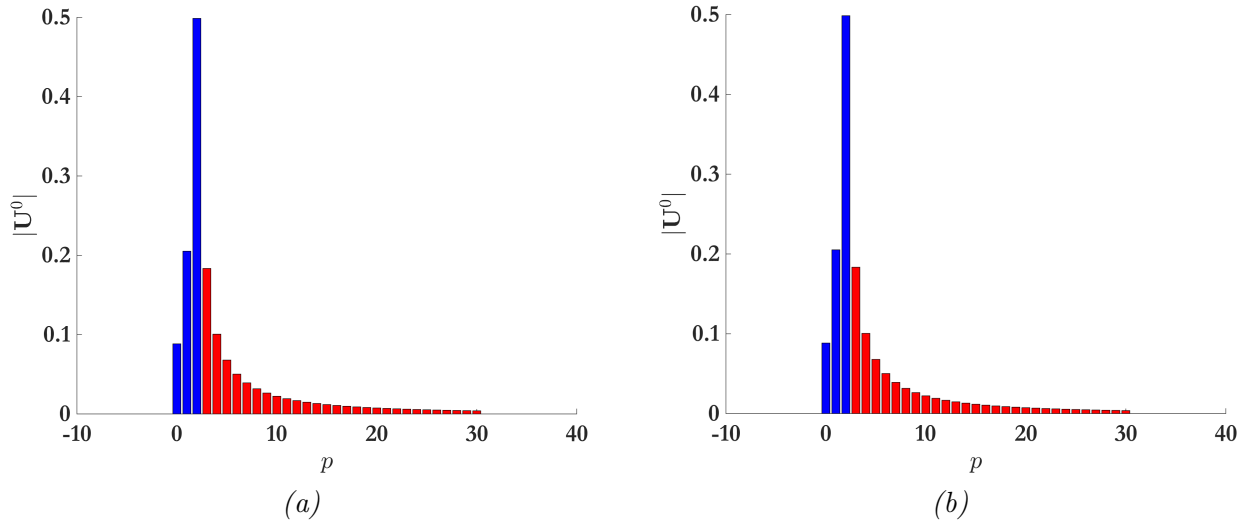


FIGURE 2.14 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_u^0 en fonction de l'ordre modal q. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués comme projecteur. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle comme projecteur. Les barres bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

Deux bases modales de projection peuvent être utilisées pour résoudre le système composé des équations de raccordement. Les Figs. 2.14 et 2.15 illustrent les coefficients modaux relatifs aux champs acoustiques ϕ_u^0 et ϕ_t, respectivement, obtenus avec l'une et l'autre. Ces figures indiquent de manière qualitative la très bonne correspondance des résultats. Les Tabs. (2.6) et (2.7) indiquent les valeurs complexes des coefficients modaux des champs réfléchis et transmis. Elles montrent par ailleurs l'identité des valeurs obtenues indifféremment de la projection utilisée. Ainsi, selon que le mode soit énergétique ou non, les coefficients modaux possèdent quatre ou trois chiffres significatifs en communs.

q	U_q^0 : réseau de canaux ($\times 10^{-1}$)	U_q^0 : milieu non borné ($\times 10^{-1}$)
0	$-0.2536 - 0.8466$ i	$-0.2536 - 0.8466$ i
1	$1.9539 - 0.6278$ i	$1.9538 - 0.6278$ i
2	$-2.3128 - 4.4176$ i	$-2.3126 - 4.4174$ i
3	$-1.1204 - 1.4640$ i	$-1.1202 - 1.4639$ i
4	$-0.7639 + 0.6668$ i	$-0.7637 + 0.6667$ i
5	$-0.4733 - 0.4978$ i	$-0.4731 - 0.4977$ i
6	$-0.3590 + 0.3613$ i	$-0.3588 + 0.3612$ i
7	$-0.2883 - 0.2750$ i	$-0.2882 - 0.2748$ i
8	$-0.2194 + 0.2372$ i	$-0.2193 + 0.2371$ i
9	$-0.1997 - 0.1804$ i	$-0.1995 - 0.1802$ i
10	$-0.1517 + 0.1712$ i	$-0.1515 + 0.1710$ i

TABLE 2.6 – Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi en fonction de l'ordre modal q et de la base modale utilisée comme projecteur.

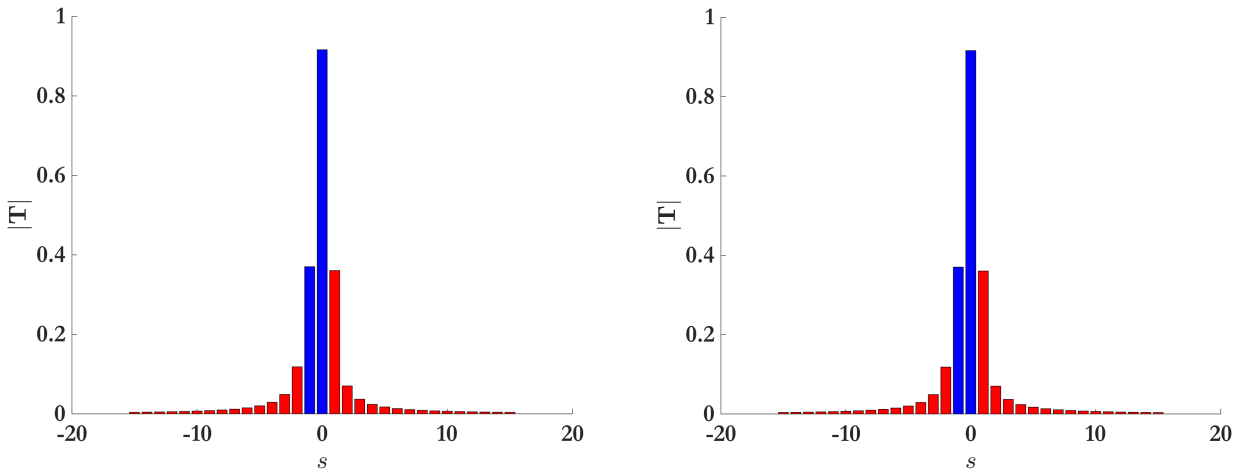


FIGURE 2.15 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel transmis ϕ_t en fonction de l'ordre modal s. (a) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués comme projecteur. (b) : Résultats obtenus en utilisant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle comme projecteur. Les barres bleus et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

s	T_s : réseau de canaux ($\times 10^{-1}$)	T_s : milieu non borné ($\times 10^{-1}$)
-5	$0.0458 + 0.1909$ i	$0.0457 + 0.1907$ i
-4	$0.0734 + 0.2766$ i	$0.0733 + 0.2764$ i
-3	$0.1428 + 0.4604$ i	$0.1428 + 0.4602$ i
-2	$0.4446 + 1.0872$ i	$0.4445 + 1.0870$ i
-1	$-2.7660 + 2.4617$ i	$-2.7659 + 2.4617$ i
0	$6.5064 - 6.4499$ i	$6.5063 - 6.4499$ i
1	$-1.5319 - 3.2520$ i	$-1.5317 - 3.2518$ i
2	$-0.2287 - 0.6563$ i	$-0.2287 - 0.6561$ i
3	$-0.0990 - 0.3485$ i	$-0.0989 - 0.3483$ i
4	$-0.0570 - 0.2270$ i	$-0.0569 - 0.2268$ i
5	$-0.0377 - 0.1637$ i	$-0.0377 - 0.1634$ i

TABLE 2.7 – Comparaison des coefficients modaux du champ potentiel transmis en fonction de l'ordre modal s et de la base modale utilisée comme projecteur.

Comparaison en nombre de modes

L'influence du nombre de modes sur le bilan de puissance acoustique et sur le conditionnement de la matrice à inverser est de nouveau considérée. Comme pour la première interface, les nombres de modes sont choisis afin d'obtenir un système déterminé, ayant une solution unique. Pour l'interface de bord de fuite, le bilan de puissance s'écrit de manière synthétique :

$$\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_u = \mathcal{P}_t. \tag{2.83}$$

D'après les calculs détaillés en annexe (C), la puissance acoustique associée aux différentes ondes s'écrit :

$$\mathcal{P}_d = \frac{kZ_0}{2} \times \frac{aV}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} (1+\delta_{q,0})\ \overline{k_q}\ |D_q^0|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_q} \in \mathbb{R}. \tag{2.84}$$

$$\mathcal{P}_u = -\frac{kZ_0}{2} \times \frac{aV}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} (1+\delta_{q,0})\ \overline{k_q}\ |U_q^0|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_q} \in \mathbb{R}. \tag{2.85}$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{kZ_0 aV}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \overline{k_s}\ |T_s|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_s} \in \mathbb{R}. \tag{2.86}$$

L'indicateur représentatif de l'erreur du bilan de puissance à l'interface est la quantité :

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{-\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_d} - 1. \tag{2.87}$$

La Fig. 2.16-a représente l'erreur du bilan de puissance acoustique en pourcentage tandis que la Fig. 2.16-b indique le nombre de conditionnement de la matrice à inverser en fonction du nombre de modes. Comme précédemment, l'erreur du bilan de puissance se réduit avec le nombre de modes, atteignant la valeur $2 \times 10^{-5}\%$ pour 500 modes. À l'inverse, le nombre de conditionnement croît avec le nombre de modes jusqu'à parvenir à 800 pour $N_q = 500$. En conclusion, la technique de raccordement modal s'avère être performante même avec peu de modes, ce qui permet de limiter les problèmes de conditionnement et d'éviter les instabilités sur les résultats obtenus.

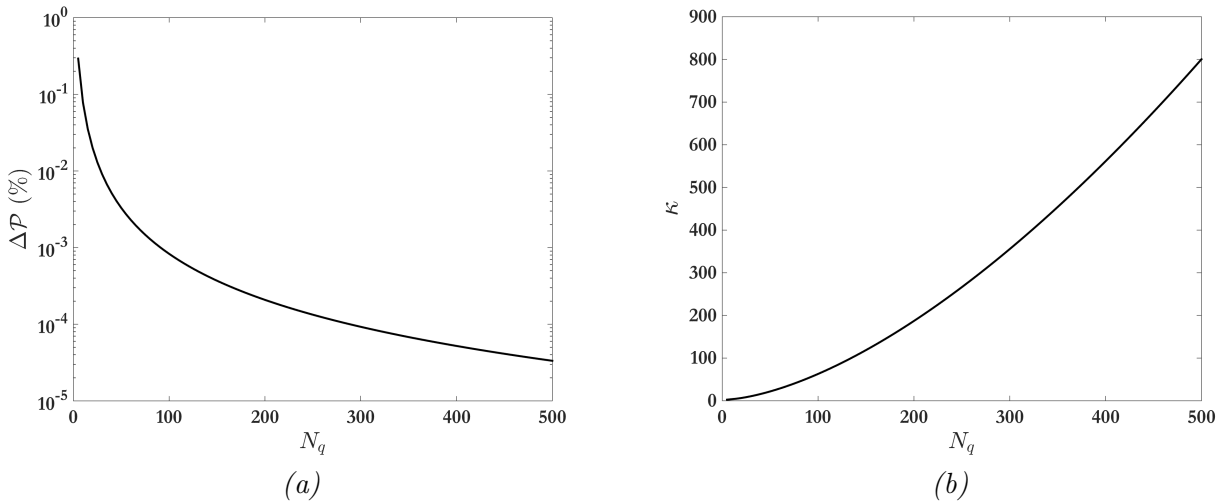
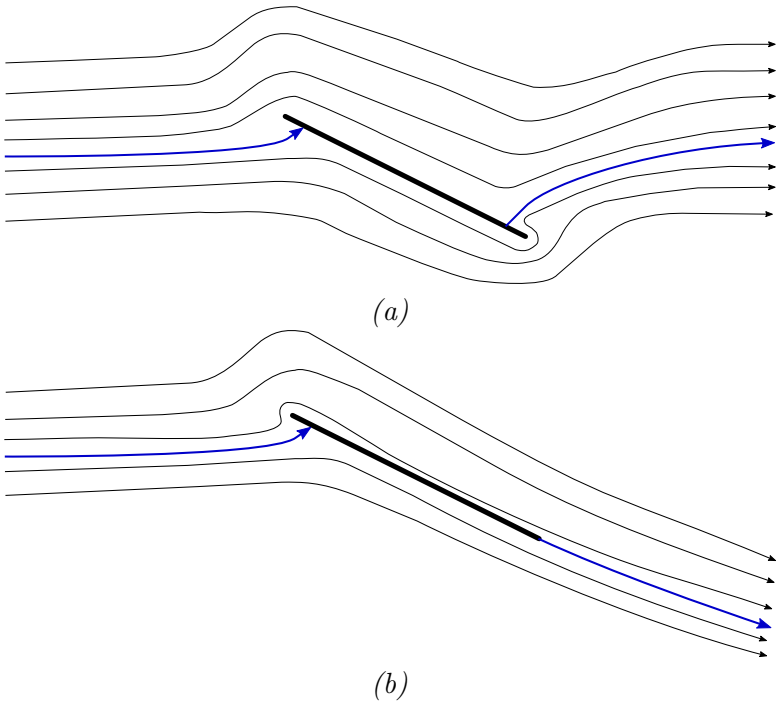


FIGURE 2.16 – (a) : Erreur du bilan de puissance acoustique (%) à l'interface et (b) : nombre de conditionnement de la matrice inversible en fonction du nombre de modes N_q.

2.3 Implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski instationnaire

Dans la technique de raccordement modal, la grille d'aubes de stator est considérée immergée dans un fluide non visqueux et dont la vitesse moyenne est subsonique. Les lois qui régissent son comportement sont celles des écoulement à potentiel autour des corps. La Fig. 2.17-a représente ainsi une plaque en présence d'un tel écoulement. Les lignes de courant courbes s'établissent alors autour du bord d'attaque et du bord de fuite. Il existe deux lignes de séparation, une sur l'intrados un peu en dessous du bord d'attaque, une seconde sur l'extrados un peu au dessus du bord de fuite. Dans ce cas, les lignes de courant sont symétriques, induisant des forces de pression identiques des deux côtés du profil. Cette absence de forces de portance et de trainée constitue le paradoxe de d'Alembert. De plus, en accord avec les lois de l'écoulement potentiel, toute particule fluide doit pouvoir contourner le bord de fuite en restant attachée. En raison du rayon de courbure nul du bord de fuite, la vitesse du fluide devrait être localement infinie et la pression infinie négative. Ces deux comportements, physiquement inconsistant pour un écoulement réel, sont empêchés par la viscosité du fluide. En conséquence, un décollement de l'écoulement réel est initialisé aux bords du profil. La ligne de séparation qui est initialisée au bord d'attaque est forcée de recoller plus en aval sur la plaque. Une zone de fluide mort avec recirculation se forme, qui a pour effet d'épaissir et d'arrondir artificiellement la surface, afin de rendre la courbure des lignes de courant extérieures à la bulle admissible pour le fluide. Le bord de fuite devient le point de départ d'une ligne de courant particulière. Ce comportement n'étant pas prédit par les équations de la théorie potentielle, il doit être imposé. Une circulation est alors introduite, équilibrée par la formation de tourbillons (sillage) qui s'échappent au bord de fuite. Cette circulation est déterminée par la condition de Kutta-Joukowski, qui permet de tenir compte indirectement de la viscosité en théorie potentielle. Si une onde sonore est portée par un écoulement, la condition de Kutta doit également être formulée sur les grandeurs instationnaires que constituent les fluctuations de la pression et de la vitesse des particules fluides. À des fins de consistance physique, une condition de Kutta est implémentée dans la technique de raccordement modal.

Les premières considérations sur la condition de Kutta pour la diffraction du son par le bord de fuite d'un demi-plan dans un écoulement moyen uniforme ont été proposées par Jones [68]. Dans une configuration bidimensionnelle, la solution cherchée doit satisfaire l'équation de Helmholtz convectée, la condition de rigidité aux parois et la condition de rayonnement de Sommerfeld [153], le champ étant continu avec une énergie locale finie. Jones [67] a montré que cette solution est unique mais ne satisfait pas la condition de vitesse finie au bord de la plaque, en raison du comportement non visqueux de l'écoulement. Selon Rienstra [131], cette condition est équivalente à imposer un saut de pression nul



(a)

(b)

FIGURE 2.17 – Lignes de courant autour d'une plaque mince en incidence, (a) : selon la théorie potentielle ; (b) avec une condition de Kutta au bord de fuite. Les lignes bleues représentent les lignes de séparations.

au bord de fuite. Trouver une solution physique consiste alors à introduire un échappement tourbillonnaire en aval des plaques, modélisé par des nappes de vorticité infiniment fines. Du fait de leur nature hydrodynamique et en accord avec l'analyse de Chu et Kovásznay, ces tourbillons sont simplement convectés par l'écoulement moyen. Afin d'estimer l'effet de la condition de Kutta, Jones [68] a comparé les deux solutions et conclu que les champs acoustiques variaient seulement dans le voisinage des sillages.

Howe [59] a montré au contraire que le champ acoustique rayonné est drastiquement réduit en présence de la condition de Kutta si les tourbillons sont convectés à la vitesse de l'écoulement, comme l'ont montré les résultats expérimentaux présentés par Heavens [55]. Même si les nappes de vorticité n'ont pas de champ de pression acoustique associée, le champ acoustique dépend significativement de la présence ou non de la condition de Kutta, comme l'ont remarqué d'autres auteurs (Rienstra [131], Howe [60], Job [66]).

2.3.1 Équations additionnelles

Dans le formalisme de raccordement modal (Fig. 2.18), la condition de Kutta appliquée aux bords de fuites des aubes du stator impose un saut de pression nul des deux côtés d'une aube dans les canaux adjacents lorsque x tends vers c depuis l'amont. Dans un canal inter-aubes d'indice m, les pressions acoustiques des ondes se propageant vers l'amont et l'aval s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} p_d^m \\ p_u^m \end{pmatrix} = \mathrm{i}\rho_0 c_0 \sum_{q=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} (k - k_d^+ M) D_q^m \\ (k - k_d^- M) U_q^m \end{pmatrix} \cos\left(\alpha_q (z - ma)\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^-(x-c)} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le x \le c, \tag{2.88}$$

où :

$$\alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad k_q^{\pm} = \frac{-Mk \pm \overline{k_q}}{\beta^2}, \quad \overline{k_q} = \sqrt{k^2 - \beta^2 \alpha_q^2}.$$

Les sommes des champs de pression dans deux canaux adjacents en $z = ma$ et au bord de fuite ($x = c$) s'écrivent :

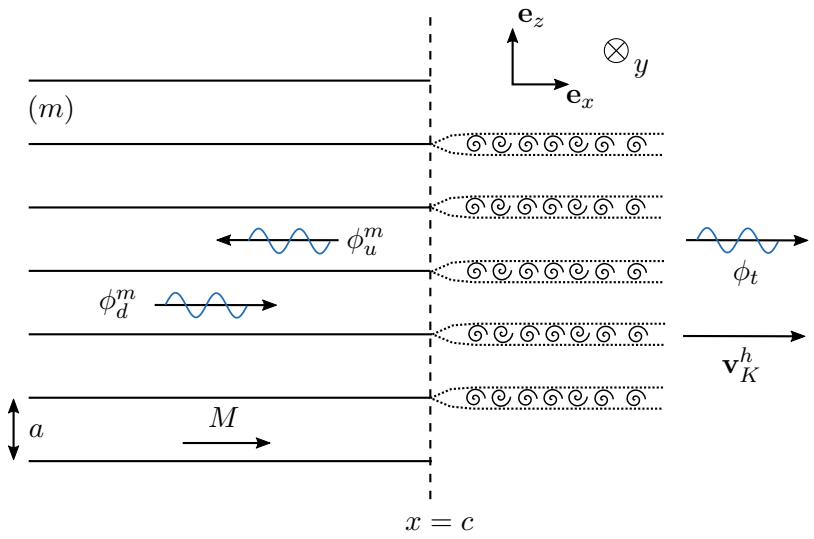


FIGURE 2.18 – Modélisation (selon Howe [60]) des perturbations de vorticité introduites par la condition de Kutta en aval des aubes.

$$p^{m-1}(x=c, z=ma) = \mathrm{i}\rho_0 c_0 \sum_{q=0}^{+\infty} \left[(k-k_d^+ M)D_q^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d^+ c} + (k-k_d^- M)U_q^m\right](-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}, \quad (2.89)$$

$$p^{m}(x=c, z=ma) = \mathrm{i}\rho_0 c_0 \sum_{q=0}^{+\infty} \left[(k-k_d^+ M)D_q^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d^+ c} + (k-k_d^- M)U_q^m\right]. \quad (2.90)$$

L'égalisation au bord de fuite donne l'équation de raccordement suivante :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}(k-k_d^- M)(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})U_q^m = -\sum_{q=0}^{+\infty}(k-k_d^+ M)(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})D_q^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_d^+ c}. \quad (2.91)$$

La résolution des équations de raccordement classiques (Eqs. (2.68) et (2.69)) avec la condition de Kutta (Eq. (2.91)) mène à un système d'équations linéaires sur-déterminé. Une solution approchée peut être trouvée avec une méthode des moindres carrés. Cependant, la condition de Kutta introduit un échappement tourbillonnaire en aval du bord de fuite afin de permettre la recirculation qu'il convient de modéliser. Dans une approche bidimensionnelle, Howe [60] suggère que la vorticité générée par cette condition soit concentrée dans des lignes infiniment fines à $z = ma$ et $c \leq x$. Cette approche reste valide tant que la longueur d'onde hydrodynamique est grande devant l'épaisseur de l'aube et du sillage induit. Cette hypothèse est pertinente quand les aubes sont modélisées par des plaques sans épaisseur. Par conséquent, le champ de vorticité peut représenté par un peigne de Dirac, chaque distribution δ associée à une aube étant déphasée par rapport à celle de l'aube adjacente. Les perturbations de vorticité produites en aval sont simplement convectées par l'écoulement moyen. Ainsi, le champ de vorticité associé à la condition de Kutta instationnaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\Omega}_K(x,z) = \Omega_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)(x-c)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}\delta(z-ma)\mathbf{e}_y, \quad u = a\alpha, \quad c \leq x. \quad (2.92)$$

Ω_0 exprime l'amplitude de la vorticité et représente une nouvelle inconnue. D'un point de vue physique, cela exprime la quantité de vorticité introduite dans l'échappement tourbillonnaire pour annuler la singularité au bord de fuite. Du fait de la périodicité, le peigne de Dirac peut être développé en série de Fourier :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ma\alpha}\delta(z-ma) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(z-ma) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{a} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\mathrm{i}2\pi s z/a\right\}. \quad (2.93)$$

Par conséquent, le champ de vorticité s'écrit comme une somme infinie de rafales obliques :

$$\mathbf{\Omega}_K(x,z) = \frac{\Omega_0}{a}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)(x-c)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}\mathbf{e}_y, \quad \alpha_s = \alpha + s\frac{2\pi}{a}, \quad c \leq x. \tag{2.94}$$

Le champ de vitesse hydrodynamique correspondant $\mathbf{v}_K^h$ admet également un développement en ondes planes, tel que $\mathbf{V}_s = (V_{s,x}, V_{s,z})$ sont les composantes associées à l'ordre s. En accord avec la définition du mode de vorticité, la relation entre vorticité et vitesse s'écrit $\mathbf{\Omega}_K = \nabla \times \mathbf{v}_K^h$ (Eq. 2.95). L'incompressibilité du mode tourbillonnaire impose la divergence nulle du champ de vitesse ($\nabla \cdot \mathbf{v}_K^h = 0$)(Eq. 2.96).

$$\left(\frac{\partial V_{s,z}\mathbf{e}_z}{\partial x} - \frac{\partial V_{s,x}\mathbf{e}_x}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{e}_y = \mathrm{i}\ ((\omega/W_x)V_{s,z} - \alpha_s V_{s,x}) = \mathbf{\Omega}_K\cdot\mathbf{e}_y, \tag{2.95}$$

$$\left(\frac{\partial V_{s,x}}{\partial x} + \frac{\partial V_{s,z}}{\partial z}\right) = \mathrm{i}\ ((\omega/W_x)V_{s,x} + \alpha_s V_{s,z}) = 0. \tag{2.96}$$

La résolution de ce système conduit finalement à écrire le champ de vitesse tourbillonnaire sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}_K^h = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\mathbf{V}_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)(x-c)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}, \quad c \leq x, \tag{2.97}$$

$$\mathbf{V}_s = \frac{\mathrm{i}\Omega_0}{a}\frac{[\alpha_s\mathbf{e}_x - (\omega/W_x)\mathbf{e}_z]}{\alpha_s^2 + (\omega/W_x)^2}. \tag{2.98}$$

L'équation de continuité de la pression acoustique demeure identique à l'Eq. (2.76), étant donné que les perturbations liées à la condition de Kutta instationnaire constituent un mode de vorticité. Par contre, la composante axiale du champ de vitesse hydrodynamique associé à la condition de Kutta doit être incluse dans l'équation de raccordement de la vitesse axiale à l'interface de bord de fuite. En utilisant le produit scalaire défini par l'Eq. (2.49), une nouvelle équation de continuité est obtenue sous la forme :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left[(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + (\mathrm{i}k_q^-)U_q^0\right]\varphi_{\nu,q} = (\mathrm{i}k_\nu^+)T_\nu a + \mathrm{i}\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + (\omega/W_x)^2}\Omega_0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.99}$$

2.3.2 Technique de résolution

L'utilisation de la base modale associée au milieu non borné est privilégiée lorsque la condition de Kutta est implémentée. L'équation de raccordement en pression demeure inchangée, tandis qu'une équation supplémentaire sur le saut de pression instationnaire est nécessaire. L'ajout de l'échappement tourbillonnaire permet, en plus de sa consistance physique, d'ajouter une nouvelle inconnue et de rendre ainsi le système linéaire déterminé. Un même nombre de modes est choisi tel que $N_q = 2\,N_s + 1$. Un nouveau système linéaire prenant en compte les équations de raccordement (Eqs. (2.76), (2.99) et (2.91)) est exprimé, dont la forme matricielle s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_p & \mathbf{F}_p & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E}_v & \mathbf{F}_v & \mathbf{G}_v^K \\ \hline \mathbf{E}_K & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mathbf{U}^0 \\ \hline \mathbf{T} \\ \hline \Omega_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{H}_p \\ \hline \mathbf{H}_v \\ \hline H_K \end{array}\right) \tag{2.100}$$

où :

$$E_p(\nu,q) = (k - k_q^- M)\varphi_{\nu,q}, \qquad F_p(\nu,\nu) = -(k - k_\nu^+ M)a, \qquad H_p(\nu,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1} (k - k_q^+ M) D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{\nu,q},$$

$$E_v(\nu,q) = (\mathrm{i}k_q^-)\varphi_{\nu,q}, \qquad F_p(\nu,\nu) = -(\mathrm{i}k_\nu^+)a, \qquad H_v(\nu,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1} (\mathrm{i}k_q^+) D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{\nu,q}.$$

$$\begin{aligned} E_K(1,q) &= (k - k_q^- M)(1 - (-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}), \qquad G_v^K(\nu,1) = \mathrm{i}\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2 + (\omega/W_x)^2}, \\ H_K(1,1) &= -\sum_{q=0}^{N_q-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}(1 - (-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})(k - k_q^+ M) D_q^0. \end{aligned}$$

Ce système est résolu par inversion matricielle classique. La formulation du champ de vorticité proposée par Howe [60] est également reprise par Posson [119] dans son modèle de grille basé sur la technique de Wiener-Hopf. Par conséquent, le problème est exprimé de manière identique et peut être résolu avec l'une ou l'autre technique. Une comparaison entre les deux modèles devient donc tout à fait pertinente, et est présentée en Sec. 2.5.1.

2.3.3 Bilan de puissance

Comme indiqué dans les sections précédentes, le bilan de puissance acoustique doit satisfaire à l'équation :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_t, \tag{2.101}$$

où $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_r$ et $\mathcal{P}_t$ représentent les puissances acoustiques relatives aux ondes incidente, réfléchies et transmises en amont et en aval du stator, respectivement. Cependant, en présence d'un écoulement, cette relation n'est plus valide. En effet, la production de perturbations de vorticité en aval des aubes, introduit par la condition de Kutta, induit un transfert d'énergie du champ acoustique vers le champ hydrodynamique comme l'ont montré Howe [59, 60], Rienstra [131] et Job [66]. Ainsi,une définition de la puissance tourbillonnaire liée aux sillages induit a été apportée par Howe [60] pour les cas de faibles nombre de Mach. Bien que l'étude de ces transferts énergétiques et la définition d'un nouveau bilan de puissance soient importants, ceci n'a pas été réalisé dans le cadre de cette thèse. Par conséquent, lorsque la condition de Kutta instationnaire est prise en compte, le bilan de puissance ne peut plus être un indicateur de la précision de la méthode.

2.4 Raccordement modal pour une grille d'aubes de corde finie

La technique de raccordement modal appliquée à une grille d'aubes de corde finie synthétise et combine les méthodes de résolution utilisées pour l'impact d'une onde acoustique sur un réseau de canaux semi-infinis d'une part (Sec. 2.1), et pour le rayonnement acoustique depuis un réseau de canaux semi-infinis avec une excitation déphasée d'autre part (Sec. 2.2), tout en prenant en compte la condition de Kutta instationnaire (Sec. 2.3). La Fig. 2.19 illustre l'ensemble des notations relatives à ce cas.

Une onde acoustique incidente de potentiel ϕ_i aborde l'interface de bord d'attaque du stator avec un angle Θ_i. En accord avec les lois de conservation et le principe de trace, elle génère des ondes réfléchies de potentiels ϕ_r en amont de l'interface et transmises ϕ_d^m dans les canaux inter-aubes. Ce dernier champ acoustique se propage en aval jusqu'à l'interface de bord de fuite, générant un champ réfléchi ϕ_u^m dans les canaux inter-aubes et un champ transmis ϕ_t en aval du stator. La condition de Kutta se

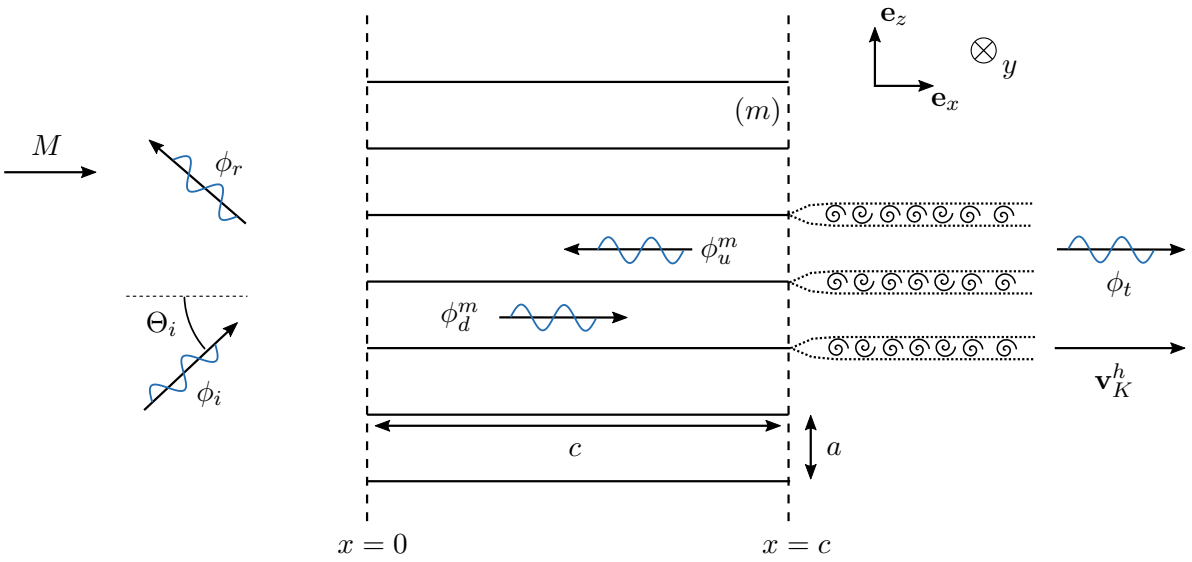


FIGURE 2.19 – Représentation d'une grille d'aubes de corde finie déroulée. Notations des ondes incidente et diffractées.

traduit également par la convection de rafales hydrodynamiques $\mathbf{v}_K^h$ liées à l'échappement tourbillonnaire. Les ondes acoustiques dans les canaux inter-aubes se développent dans un série d'allers-retours entre les deux interfaces jusqu'à atteindre un régime établi.

2.4.1 Formulation des champs modaux

Le cas traité dans cette section étant la combinaison des configurations précédentes, les potentiels associés aux différentes ondes ainsi que le champ de vitesse hydrodynamique associé à la condition de Kutta sont rappelés. Le potentiel incident ϕ_i s'écrit :

$$\phi_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ z}, \quad x \leq 0, \tag{2.102}$$

où :

$$\alpha_i = \frac{k\sin\Theta_i}{1+M\cos\Theta_i}, \quad k_i^+ = \frac{-Mk+\overline{k_i}}{\beta^2}, \quad \overline{k_i} = \sqrt{k^2-\beta^2\alpha_i^2}.$$

Dans le cas où la condition de 2π-périodicité dans la direction tangentielle est satisfaite, alors $\alpha_i = n/R_0$, $n \in \mathbb{Z}$ et où R_0 est le rayon de la coupe cylindrique. Les potentiels des ondes réfléchies ϕ_r et transmises ϕ_t en amont et en aval, respectivement, s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_t \end{pmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} R_s \\ T_s \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^+ (x-c)} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \leq x \\ x \leq c \end{cases}, \quad \forall z. \tag{2.103}$$

où :

$$\alpha_s = \alpha_i + s\frac{2\pi}{a}, \quad k_s^\pm = \frac{-Mk \pm \overline{k_s}}{\beta^2}, \quad \overline{k_s} = \sqrt{k^2-\beta^2\alpha_s^2}.$$

Les potentiels des ondes se propageant en aval ϕ_d^m et en amont ϕ_u^m dans un canal d'indice m s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_d^m \\ \phi_u^m \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} D_q^0 \\ U_q^0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}\cos\left(\alpha_q(z-ma)\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^- (x-c)} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq c, \\ m\ a < z < (1+m)\ a. \end{cases} \tag{2.104}$$

où :

$$k_q^{\pm} = \frac{-Mk \pm \overline{k_q}}{\beta^2}, \quad \overline{k_q} = \sqrt{k^2 - \beta^2 \alpha_q^2}, \quad \alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad u = \alpha_i a.$$

Le champ de vitesse hydrodynamique associé à la condition de Kutta instationnaire s'écrit

$$\mathbf{v}_K^h = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)(x-c)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}, \quad c \leq x, \tag{2.105}$$

$$\mathbf{V}_s = \frac{\mathrm{i}\Omega_0}{a} \frac{[\alpha_s \mathbf{e}_x - (\omega/W_x)\mathbf{e}_z]}{\alpha_s^2 + (\omega/W_x)^2}. \tag{2.106}$$

2.4.2 Équations de raccordement

La continuité de la pression et de la vitesse axiale totale est imposée aux interfaces du stator. Par conséquent, deux ensembles d'équations de raccordement sont écrits en $x = 0$ et $x = c$. Le nouveau vecteur $\mathbf{\Gamma}_\gamma$ considéré regroupe les champs de pression et de vitesse axiale totale. L'indice γ représente les champs acoustiques (ac) et hydrodynamique (h) incident (i), réfléchis (r) et transmis (t) et se propageant vers l'aval (d) et vers l'amont (u) dans les canaux inter-aubes :

$$\mathbf{\Gamma}_\gamma(x,z) = \begin{pmatrix} p_\gamma^{ac}(x,z) \\ (\mathbf{v}_\gamma^{ac}(x,z) + \mathbf{v}_\gamma^h(x,z)) \cdot \mathbf{e}_x \end{pmatrix}, \quad \gamma = i, r, t, d, u. \tag{2.107}$$

Les équations de raccordement s'écrivent de manière synthétique :

$$\mathbf{\Gamma}_i(0,z) + \mathbf{\Gamma}_r(0,z) = \mathbf{\Gamma}_d(0,z) + \mathbf{\Gamma}_u(0,z), \quad \forall z, \tag{2.108}$$

$$\mathbf{\Gamma}_d(c,z) + \mathbf{\Gamma}_u(c,z) = \mathbf{\Gamma}_t(c,z), \quad \forall z. \tag{2.109}$$

À ces équations s'ajoute la relation satisfaisant un saut de pression nul au bord de fuite de part et d'autre des aubes dans les canaux adjacents (Eq. (2.91)). Ces cinq équations font intervenir cinq inconnues ($\mathbf{R}$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{U}^0$, $\mathbf{T}$, Ω_0). Le système complet pourrait être résolu à partir d'une équation matricielle synthétique à inverser. Pourtant, en raison de possibles problèmes de conditionnement, cette méthode ne semble pas être la plus adaptée. De plus, considérer séparément chaque interface offre un intérêt pour comprendre le développement des ondes acoustiques dans les canaux inter-aubes et les multiples diffractions qu'elles engendrent. Cette méthode permet également de différencier les deux interfaces, afin de pouvoir prendre en compte facilement des configurations plus élaborées. Par conséquent, une procédure itérative est choisie pour résoudre ce système linéaire.

2.4.3 Procédure itérative de raccordement multiple

Les deux ensembles d'équations (2.108) et (2.109) auxquelles s'ajoute l'Eq. (2.91) sont résolus en utilisant une procédure itérative qui suit le développement des multiples diffractions des ondes acoustiques dans le stator. L'algorithme suit ainsi le comportement expliqué précédemment. Les itérations de la procédure de résolution sont indicés par l'entier g.

Dans l'étape d'initialisation ($g = 0$), l'Eq. (2.108) est résolue en ne prenant pas en compte les ondes se propageant vers l'amont dans les canaux inter-aubes ($\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$) et les ondes transmises calculées ($\mathbf{D}^0$) deviennent les données d'entrée pour résoudre l'Eq. (2.109). Finalement, les équations se réduisent au système

$$\mathbf{\Gamma}_i(0,z) + \mathbf{\Gamma}_r^0(0,z) = \mathbf{\Gamma}_d^0(0,z), \quad \forall z, \tag{2.110}$$

$$\mathbf{\Gamma}_d^0(c,z) + \mathbf{\Gamma}_u^0(c,z) = \mathbf{\Gamma}_t^0(c,z), \quad \forall z. \tag{2.111}$$

auxquelles s'ajoute l'Eq. (2.91). Elles fournissent une valeur initiale pour toutes les ondes diffractées et pour l'amplitude du champ de vorticité lié à la condition de Kutta. Pour les itérations suivantes,

l'Eq. (2.108) est résolue en utilisant les coefficients modaux des ondes se propageant vers l'amont dans les canaux ($\mathbf{U}^0$) comme données d'entrée. Les équations pour toutes itérations telles que $g > 0$ correspondent au système :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_i(0,z) + \mathbf{\Gamma}_r^g(0,z) &= \mathbf{\Gamma}_d^g(0,z) + \mathbf{\Gamma}_u^{g-1}(0,z), \quad \forall z, && (2.112)\\ \mathbf{\Gamma}_d^g(c,z) + \mathbf{\Gamma}_u^g(c,z) &= \mathbf{\Gamma}_t^g(c,z), \quad \forall z. && (2.113) \end{aligned}$$

auxquelles s'ajoute l'Eq. (2.91). Le processus se poursuit jusqu'à ce que tous les coefficients $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{U}^0$, $\mathbf{T}$ et Ω_0 ont convergé. La convergence est assurée quand les inconnues varient de moins de 0.1% entre deux itérations consécutives (dans la pratique, elle est réalisée après quelques itérations). À chaque étape de la procédure, seuls deux ($\mathbf{R}$, $\mathbf{D}^0$) ou trois ($\mathbf{U}^0$, $\mathbf{T}$ et Ω_0) inconnues doivent être déterminées à chaque interface, ce qui rend le système d'équations linéaires facilement résoluble.

2.4.4 Initialisation : Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque

La base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle uniquement est considérée. Le système linéaire représenté par l'Eq. (2.110) peut être exprimé sous la forme matricielle synthétique suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^1 & \mathbf{F}_p^1 \\ \underline{\mathbf{E}_v^1} & \underline{\mathbf{F}_v^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p^1 \\ \mathbf{H}_v^1 \end{pmatrix}, \tag{2.114}$$

où :

$$\begin{aligned} E_p^1(s,q) &= (k - k_q^+ M)\varphi_{s,q}, & F_p^1(s,s) &= -a(k - k_s^- M), & H_p^1(s,1) &= a(k - k_i^+ M)\delta_{s,0},\\ E_v^1(s,q) &= (\mathrm{i}k_q^+)\varphi_{s,q}, & F_p^1(s,s) &= -a(\mathrm{i}k_s^-), & H_v^1(s,1) &= a(\mathrm{i}k_i^+)\delta_{s,0}. \end{aligned}$$

et :

$$\varphi_{s,q} = \int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_s z}\cos(\alpha_q z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}\alpha_s\left[(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u} - 1\right]}{\alpha_s^2 - \alpha_q^2}, & \text{si} \quad \alpha_q \neq \alpha_s,\\ \dfrac{a}{2}(1 + \delta_{q,0}), & \text{si} \quad \alpha_q = \alpha_s. \end{cases} \tag{2.115}$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir les vecteurs modaux $\mathbf{R}$ et $\mathbf{D}^0$. Ce dernier devient une donnée d'entrée pour la résolution des équations de continuité au bord de fuite.

2.4.5 Raccordement modal sur l'interface de bord de fuite

Pour l'interface de bord de fuite, les Eqs. (2.111) et (2.91) s'expriment comme une équation matricielle à inverser :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^2 & \mathbf{F}_p^2 & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{E}_v^2} & \underline{\mathbf{F}_v^2} & \mathbf{G}_v^K \\ \mathbf{E}_K & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^0 \\ \mathbf{T} \\ \Omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p^2 \\ \mathbf{H}_v^2 \\ H_K \end{pmatrix}, \tag{2.116}$$

où :

$$E_p^2(s,q) = (k - k_q^- M)\varphi_{s,q}, \qquad F_p^2(s,s) = -(k - k_s^+ M)a, \qquad H_p^2(s,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}(k - k_q^+ M)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{s,q},$$

$$E_v^2(s,q) = (\mathrm{i}k_q^-)\varphi_{s,q}, \qquad F_p^2(s,s) = -(\mathrm{i}k_s^+)a, \qquad H_v^2(s,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{s,q}.$$

$$E_K(1,q) = (k-k_q^- M)(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}), \qquad G_v^K(s,1) = \mathrm{i}\frac{\alpha_s}{\alpha_s^2+(\omega/W_x)^2},$$
$$H_K(1,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})(k-k_q^+ M)D_q^0.$$

2.4.6 Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque

Après la phase d'initialisation, la procédure itérative continue au bord d'attaque où les champs ϕ_i et ϕ_u^0 sont des données d'entrée. Le système linéaire peut être écrit sous la forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^1 & \mathbf{F}_p^1 \\ \underline{\mathbf{E}_v^1} & \underline{\mathbf{F}_v^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p^1 \\ \mathbf{H}_v^1 \end{pmatrix}, \tag{2.117}$$

où :

$$E_p^1(s,q) = (k-k_q^+ M)\varphi_{s,q}, \qquad F_p^1(s,s) = -a(\mathrm{i}k_s^-),$$
$$E_v^1(s,q) = (\mathrm{i}k_q^+)\varphi_{s,q}, \qquad H_p^1(s,1) = a(k-k_i^+ M)\delta_{s,0} - \sum_{q=0}^{N_q-1}(k-k_q^- M)U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c}\varphi_{s,q},$$
$$F_p^1(s,s) = -a(k-k_s^- M), \qquad H_v^1(s,1) = a(\mathrm{i}k_i^+)\delta_{s,0} - \sum_{q=0}^{N_q-1}(\mathrm{i}k_q^-)U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c}\varphi_{s,q}.$$

2.5 Validation du modèle

Afin de pouvoir conclure sur la validité de la technique de raccordement modal appliquée à la transmission acoustique dans un cadre bidimensionnel, une comparaison avec un modèle basé sur la technique de Wiener-Hopf est réalisée dans cette section.

2.5.1 Comparaison avec la technique de Wiener-Hopf

Comme mentionné en Sec. 2.3.2 le problème de la diffraction d'ondes acoustiques par une grille d'aubes rectilinéaire peut être résolu de manière différente avec la technique de Wiener-Hopf. L'extension du modèle de Glegg [40] par Posson *et al.* [123, 124] fournit en effet une description uniformément valide du champ acoustique dans tout le domaine. Ce modèle permet également de prendre en compte l'angle de calage de la grille. Il a ainsi été comparé avec les principaux modèles de grille rectilinéaire issus de la littérature (Kaji et Okasaki [71], Koch [74]), dont les cas tests présentent un important angle de calage (60°). Les comparaisons sur les coefficients de transmission et de réflexion ont montré un très bon accord entre les différents modèles. Par conséquent, à titre de première étape dans la procédure de validation, les résultats obtenus avec les techniques de Wiener-Hopf et de raccordement modal sont comparés dans cette section. Les deux techniques sont appliquées à l'étude d'une onde acoustique oblique diffractée par une grille rectilinéaire infinie. Les paramètres principaux sont l'angle de propagation $\Theta_i = 30°$, le nombre de Helmholtz $k \times c = 5$ et la solidité de la grille $\sigma_s = c/a = 1.25$. Dans les cas d'applications à des turbomachines, ces paramètres seraient réglés pour reproduire la 2π-périodicité du stator. Dans chaque cas, la pression acoustique instantanée est normalisée par la pression acoustique incidente $p_i = -\mathrm{i}\rho_0 c_0(k-k_i^+ M)$.

Les Figs. 2.20-a-c et 2.21-a-c-e présentent les champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus avec la technique de raccordement modal pour la même onde incidente et différents nombres de Mach ($M \in [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8]$). Des champs de pression acoustique identiques sont obtenus avec la technique de Wiener-Hopf (Figs. 2.20-b-d et 2.21-b-d-f). L'effet du nombre de Mach est significatif : les fronts d'ondes adjacents des ondes transmises en aval du stator sont étirés par la convection tandis

que ceux des ondes réfléchies en amont se contractent. Cet effet fait apparaître des ondulations en amont de la grille d'aubes, plus prononcées pour $M = 0.6$ et $M = 0.8$. De plus, avec l'augmentation du nombre de Mach, des modes additionnels deviennent passants à cause de l'effet du paramètre β. Par exemple, deux modes diffractés se propagent en amont et en aval de la grille d'aubes à $M = 0.6$ et $M = 0.8$ tandis qu'un seul mode est passant à $M = 0.2$ et $M = 0.4$.

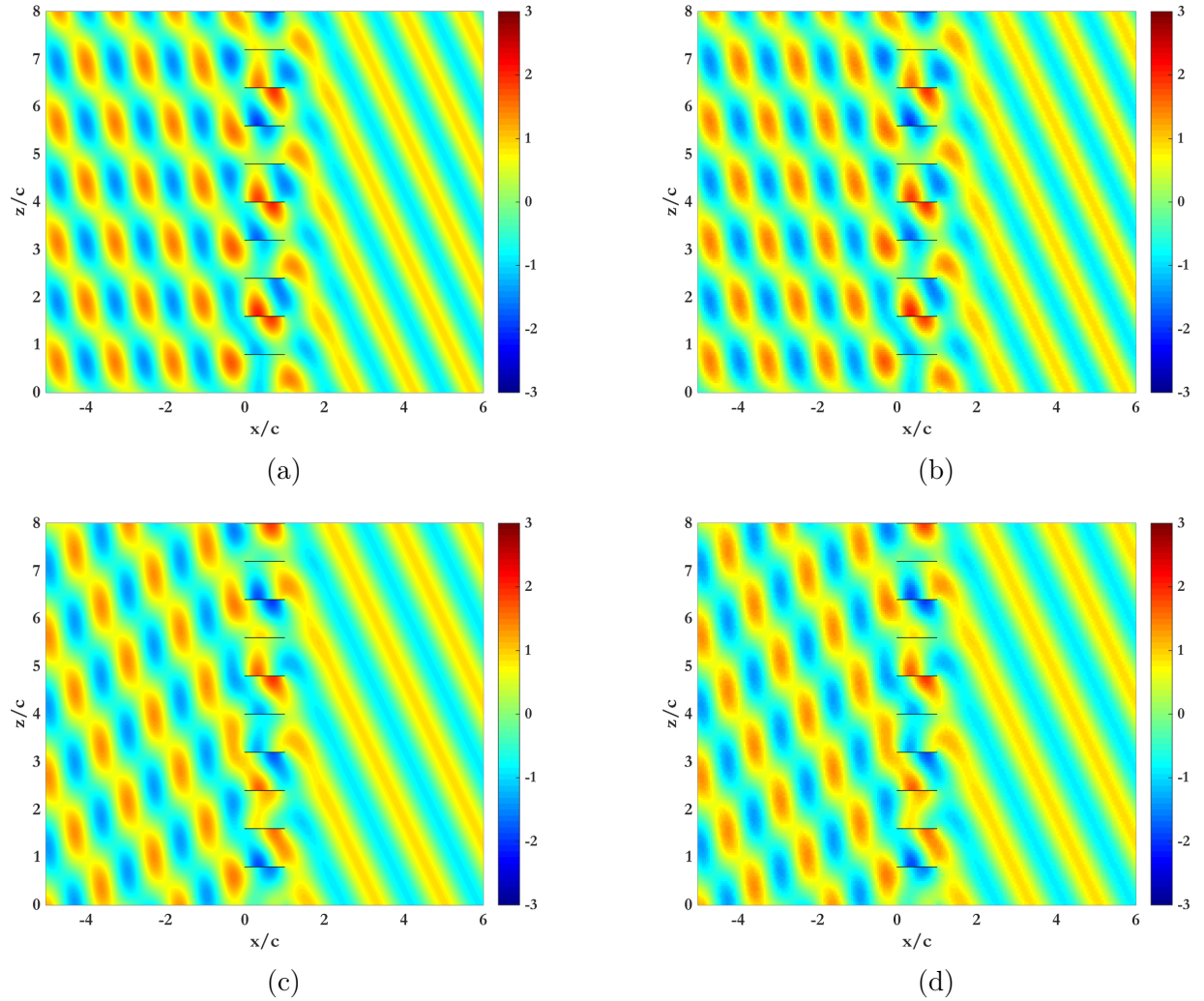


FIGURE 2.20 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal (a-c) et par la technique de Wiener-Hopf (b-d) pour $M = 0$ (a-b), $M = 0.2$ (c-d). L'écoulement va de gauche à droite.

Un excellent accord est obtenu pour tout nombre de Mach subsonique entre les résultats issus des techniques de Wiener-Hopf et de raccordement modal, ce qui garantit que l'implémentation de la dernière est pertinente en termes de convergence itérative et de troncature modale. Ces résultats sont confirmés de manière plus quantitative en représentant des profils du champ de pression instantané le long d'une ligne axiale au centre des canaux inter-aubes ($z/a = 0.5$), calculés par les deux formulations, en Fig. 2.22, et la partie réelle du saut de pression instationnaire normalisé à travers une aube de référence (en $z/a = 1$) $\mathcal{L} = -\Delta p/(\mathrm{i}\rho_0 c_0(k - k_i^+ M))$, en Fig. 2.23. Les deux ensembles de résultats sont presque en parfait accord. De faibles écarts sont visibles sur le saut de pression instationnaire normalisé au très proche voisinage du bord d'attaque, où la technique de raccordement modal comporte une singularité. Celle-ci n'a aucune conséquence loin du bord d'attaque, comme le montrent les Figs. 2.22 et 2.23. La Fig. 2.22 illustre également l'effet de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire dans la technique de raccordement modal. Quand cette condition est désactivée (profils en gris sur la figure), les prédictions dévient fortement des résultats issus de la technique de Wiener-Hopf qui la prend en compte. Les amplitudes des ondes réfléchies et transmises sont significativement surestimées, confirmant

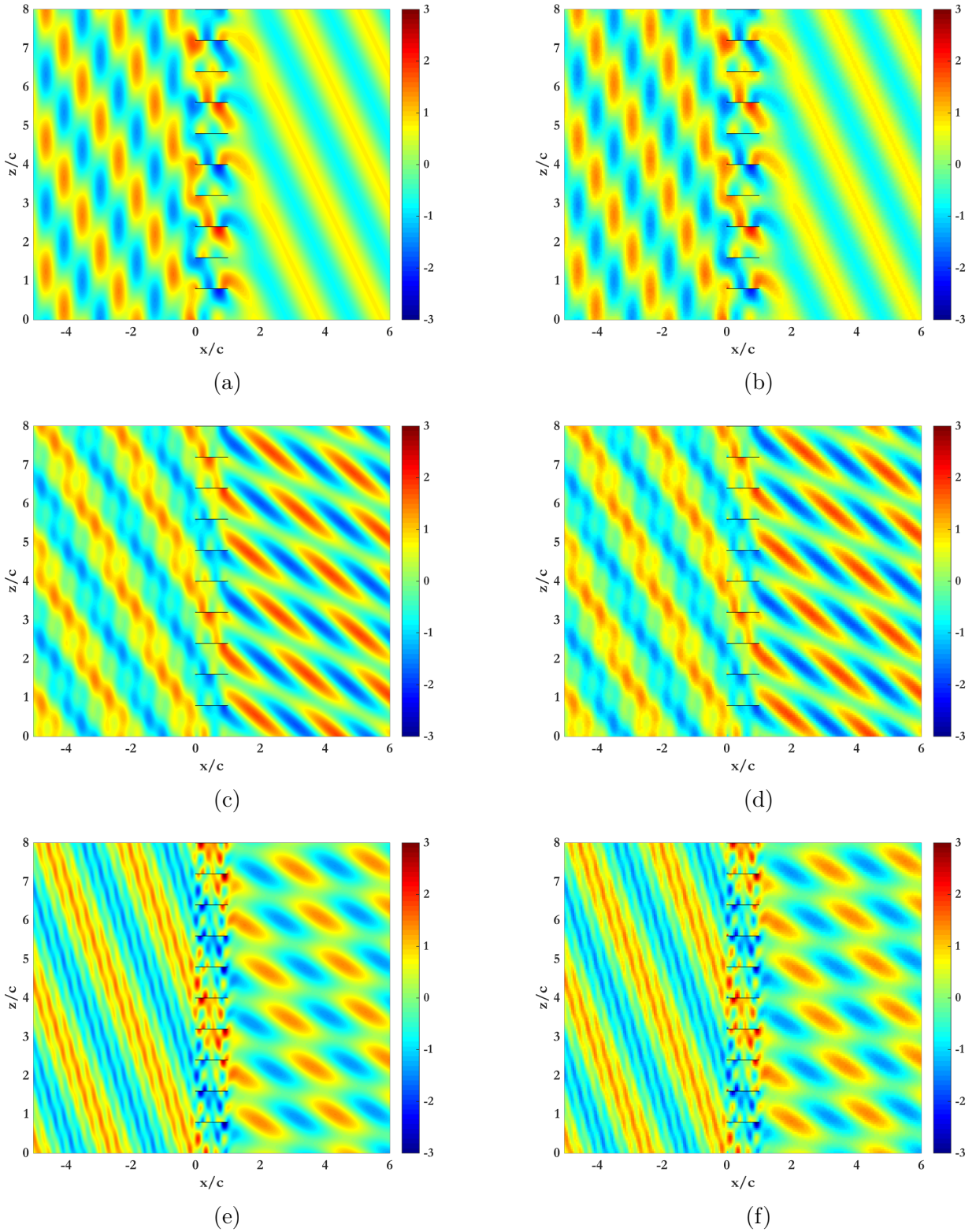
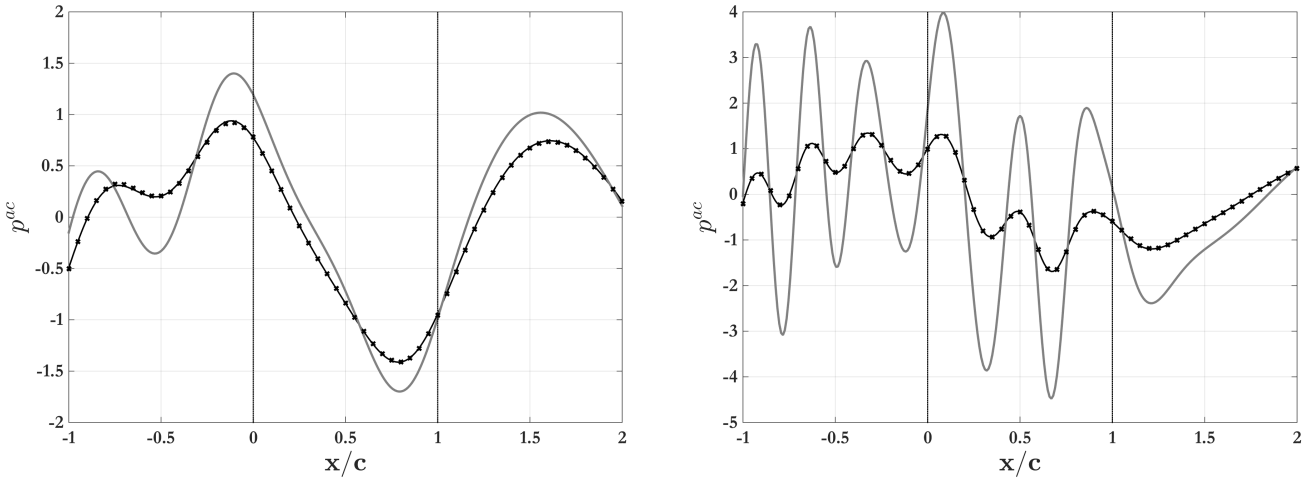


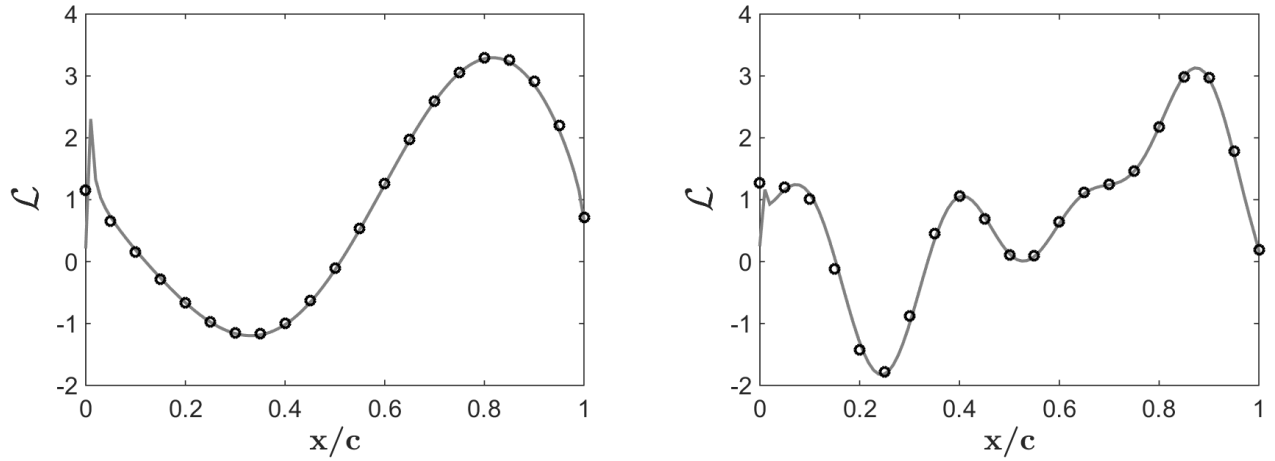
FIGURE 2.21 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal (a-c-e) et par la technique de Wiener-Hopf (b-d-f) pour $M = 0.4$ (a-b), $M = 0.6$ (c-d), $M = 0.8$ (e-f). L'écoulement va de gauche à droite.

l'analyse de Howe [59]. De plus, les écarts augmentent fortement avec le nombre de Mach. En effet, sans condition de Kutta, toute l'énergie acoustique apportée par l'onde incidente est répartie entre les ondes réfléchies et transmises, sans être dissipée par les effets de viscosité. Par conséquent, la condition de Kutta apparaît comme une pièce essentielle dans la formulation mathématique de la technique de raccordement modal.



(a) (b)

FIGURE 2.22 – Profils du champ de pression instantané normalisé dans la direction de l'écoulement en $z/a = 0.5$ (centre du canal inter-aube) pour $M = 0.4$ (a) et $M = 0.8$ (b), obtenus avec la technique de Wiener-Hopf (symboles noirs), la technique de raccordement modal (ligne noire) et la technique de raccordement modal sans la condition de Kutta (ligne grise).



(a) (b)

FIGURE 2.23 – Parties réelles du saut de pression instationnaire normalisé sur une aube de référence pour $M = 0.4$ (a) et $M = 0.8$ (b) telles que prédites par la technique de raccordement modal (ligne) et la technique de Wiener-Hopf (symboles).

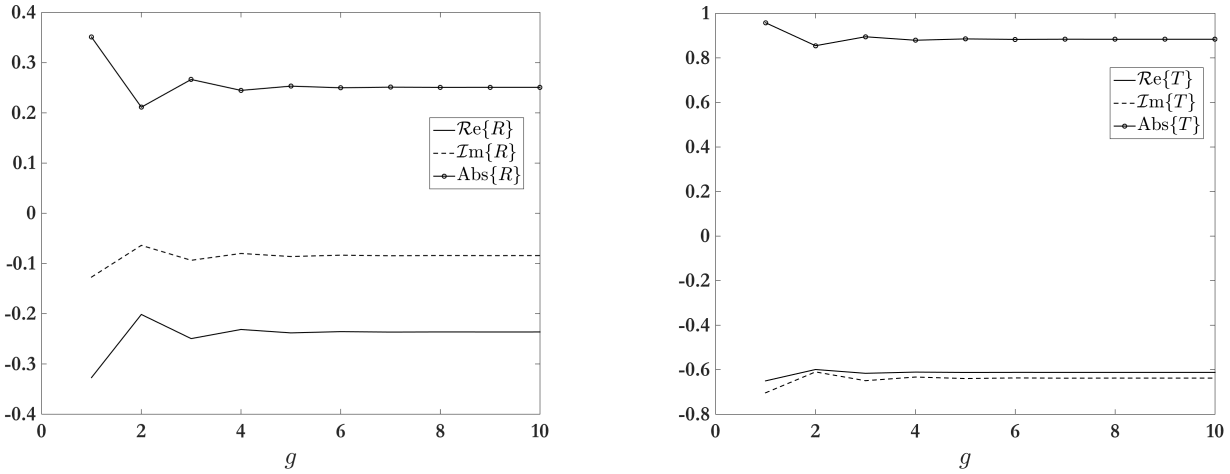
2.6 Études paramétriques

L'influence des paramètres principaux du champ acoustique incident, de l'écoulement moyen et de la grille d'aubes sur le champ acoustique diffracté est étudiée dans cette section. La convergence de la procédure itérative et l'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski sont également examinées.

2.6.1 Convergence itérative

La prise en compte des deux interfaces est réalisée à travers la procédure itérative de raccordement multiple présentée en Sec. 2.4.3. Le calcul itératif se poursuit jusqu'à ce qu'un critère de tolérance soit atteint, sur l'erreur du bilan de puissance acoustique ou lorsque les amplitudes modales ne varient pas plus qu'un taux prédéfini. Une étude de convergence sur l'indice g de la procédure itérative est menée, en estimant que les résultats ont convergé lorsque la variation des amplitudes modale d'une itération

sur la précédente est inférieure à 0.1%. La configuration choisie est celle de la comparaison avec la technique de Wiener-Hopf, détaillée en Sec. 2.5.1, pour un nombre de Mach axial $M = 0.2$. Pour ce cas test, comme le montre la Fig. 2.20-c, seul le mode d'ordre $s = 0$ est passant. La Fig. 2.24 montre les amplitudes des modes réfléchi R_s et transmis T_s pour l'ordre $s = 0$ en fonction de l'indice g, qui correspond au nombre d'itérations effectuées pour résoudre le calcul. Il est visible que la convergence est atteinte après seulement quelques itérations, de l'ordre de 5 ou 6. La procédure itérative découple ainsi les deux interfaces, ce qui permet de les distinguer et de simplifier le calcul matriciel tout en restant très rapide.



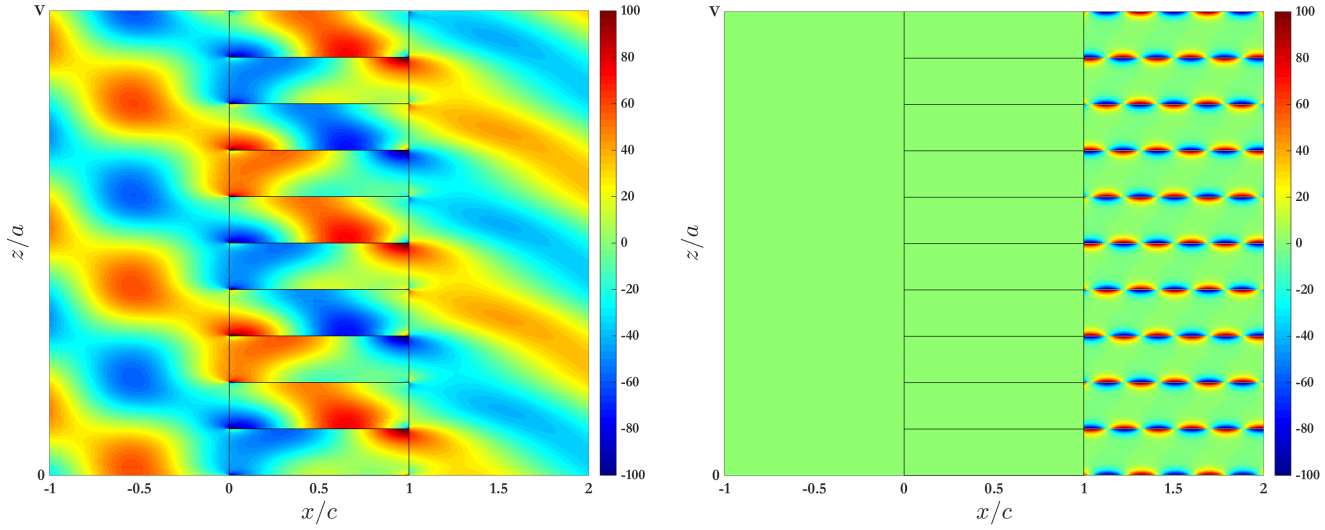
(a) (b)

FIGURE 2.24 – Amplitudes modales (parties réelle (ligne) et imaginaire (pointillé), et valeur absolue (symbole)) des modes réfléchi R_s (a) et transmis T_s (b) d'ordre $s = 0$ en fonction du nombre d'itérations g entre les deux interfaces du stator.

2.6.2 Condition de Kutta-Joukowski instationnaire

La condition de Kutta-Joukowski instationnaire implique une répartition de l'énergie entre les modes acoustique et tourbillonnaire. Par conséquent, la continuité des champs utilisés dans la technique de raccordement modal doit traduire cette nouvelle composition. Le mode tourbillonnaire ne possède pas de champ de pression associé, ainsi la continuité de cette dernière aux interfaces n'est pas modifiée, seule son amplitude est différente, comme cela a été montré en Fig. 2.22. Par contre, le champ de vitesse axiale en aval de la grille d'aubes résulte de l'addition des composantes acoustique $\mathbf{v}_t^{ac}$ et hydrodynamique $\mathbf{v}_K^h$, générée par l'échappement tourbillonnaire lié à la condition de Kutta. La Fig. 2.25 représente les parties réelles des composantes acoustique (Fig. 2.25-a) et hydrodynamique (Fig. 2.25-b) du champ de vitesse axiale normalisé obtenu par la technique de raccordement modal. Les paramètres du calcul sont identiques à l'étape de validation présentée en Sec. 2.5.1 : $\Theta_i = 30°$, $k \times c = 5$, $\sigma_s = c/a = 1.25$, $V = 10$ et $M = 0.3$. La condition de 2π-périodicité sur l'azimut n'est pas imposée dans ce calcul. La Fig. 2.25-a montre que le champ de vitesse acoustique axiale est continu à l'interface de bord d'attaque et qu'il est également majoritairement continu à l'interface de bord de fuite, sauf au voisinage immédiat des aubes où des disparités apparaissent de part et d'autre de l'interface. Le champ de vitesse axiale généré par l'échappement tourbillonnaire, représenté en Fig. 2.25-b, n'est présent qu'en aval du stator, en suivant les sillages convectés dans la direction axiale. De fortes oscillations apparaissent dans le champ de vitesse le long des sillages et il n'est pas non plus continu à l'interface, étant donné qu'il est nul dans la grille d'aubes. La Fig. 2.26 illustre le champ de vitesse axiale totale, combinant les deux composantes acoustique et hydrodynamique. La continuité aux deux interfaces de la grille est désormais assurée, même au voisinage du bord de fuite des aubes.

La continuité à l'interface de bord de fuite est étudiée de manière plus quantitative grâce à la Fig. 2.27. Des profils de la vitesse axiale en aval de la grille ($x = c^+$), calculés le long de l'interface



(a) (b)

FIGURE 2.25 – Champs de vitesse axiale instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal. Parties réelles des composantes acoustique $\mathbf{v}^{ac} \cdot \mathbf{e}_x$ (a) et hydrodynamique générée par la condition de Kutta $\mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_x$ (b).

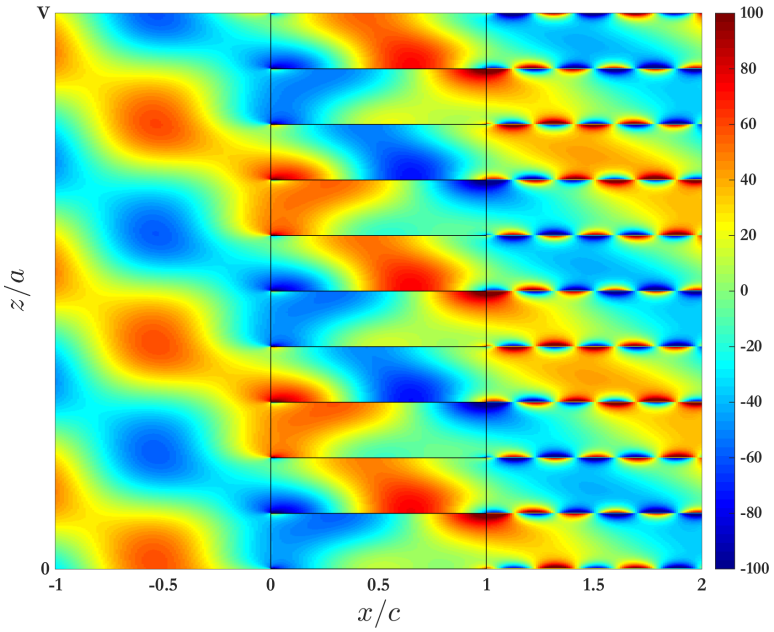
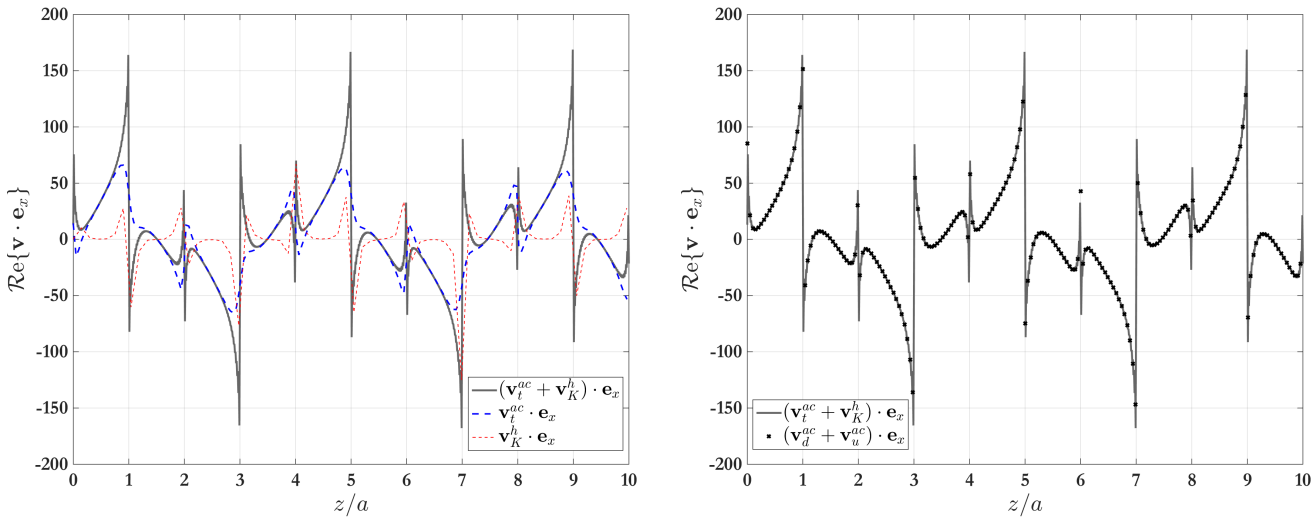


FIGURE 2.26 – Champ de vitesse axiale totale ($(\mathbf{v}^{ac} + \mathbf{v}_K^h) \cdot \mathbf{e}_x$) instantané normalisé obtenu par la technique de raccordement modal.

sont représentés en Fig. 2.27-a où l'addition de la composante acoustique (ligne pointillée bleue) et de la composante hydrodynamique (ligne pointillée rouge) forme le champ de vitesse axiale totale (ligne continue). Il est visible que le champ acoustique en constitue la part majoritaire, notamment au centre des canaux inter-aubes où le champ de vitesse hydrodynamique est nul. Ce dernier n'est en effet notable qu'au voisinage des aubes, traduisant la nature fine de l'échappement tourbillonnaire. Les champs de vitesse axiale totale dans les canaux inter-aubes (symboles noirs) et en aval de la grille (ligne continue) sont comparés à l'interface de bord de fuite en Fig 2.27-b. L'identité des deux courbes montre ainsi que la continuité du champ de vitesse axiale est assurée à l'interface de bord de fuite. De faibles différences sont néanmoins observées à l'emplacement exact des aubes où de fortes variations ont lieu. Les oppositions de phase dans le champ de vitesse s'expliquent par la présence physique des



(a) (b)

FIGURE 2.27 – Profils du champ de vitesse axiale instantané normalisé le long de l'interface de bord de fuite en $x = c^{\pm}$. (a) : Composantes acoustique $\mathbf{v}_t^{ac}\cdot\mathbf{e}_x$ (ligne bleue pointillée), hydrodynamique générée par la condition de Kutta $\mathbf{v}_K^h\cdot\mathbf{e}_x$ (ligne pointillée rouge) et totale $(\mathbf{v}_t^{ac}+\mathbf{v}_K^h)\cdot\mathbf{e}_x$ (ligne continue) en aval du stator en $x = c^+$. (b) : Profils des champs de vitesse à l'interface dans les canaux inter-aubes $(\mathbf{v}_u^{ac}+\mathbf{v}_d^{ac})\cdot\mathbf{e}_x$ en $x = c^-$ (symboles noirs) et en aval du stator $(\mathbf{v}_t^{ac}+\mathbf{v}_K^h)\cdot\mathbf{e}_x$ en $x = c^+$ (ligne continue).

aubes. En conclusion, le champ de vitesse acoustique seul n'est plus continu à l'interface. L'égalité des champs de vitesse de part et d'autre de l'interface de bord de fuite est assurée par l'ajout de la composante hydrodynamique en aval de la grille.

2.6.3 Effet de la fréquence sur le champ acoustique

L'effet de la fréquence sur le champ acoustique diffracté est étudié dans cette section. Une onde acoustique monochromatique se propageant avec un angle $\Theta_i = \pi/6$ est diffractée par une grille d'aubes rectilinéaire de solidité $\sigma_s = 1.25$. L'écoulement moyen est de nombre de Mach $M = 0.4$ et la condition de 2π-périodicité n'est pas imposée. Lorsque l'onde incidente se propage (mode passant) à travers une grille d'aubes, les modes réfléchis et transmis d'ordre $s = 0$ sont toujours propagatifs. La fréquence de coupure de la grille d'aubes est définie comme étant la fréquence minimale $f_c = f_{c,1}$ en dessous de laquelle seul le mode diffracté d'ordre $s = 0$ est propagatif. Dans la terminologie de Kaji et Okazaki [71], cette fréquence sépare les configurations sub-résonnantes et super-résonnantes. Pour la configuration étudiée, cette fréquence de coupure correspond au nombre de Helmholtz $k \times c = 5.371$. Ensuite, chaque mode d'ordre s a une fréquence de coupure $f_{c,s}$ en-dessous de laquelle le mode est coupé. Les Figs. 2.28 et 2.29 montrent les champs de pression acoustique instantanés, adimensionnés par la pression incidente pour différents nombres de Helmholtz $k \times c \in [2, 4, 5.4, 6, 10, 10.8, 11, 15]$. En basse fréquence pour $f < f_c$ (Fig. 2.28-a), le coefficient de transmission T_0 est presque égal à l'unité tandis que les coefficients de réflexion sont extrêmement faibles (Fig. 2.29-e-f). Il s'agit d'un cas de transparence acoustique où seuls les modes $s = 0$ sont passants. Tant que la configuration reste sub-résonnante (Fig. 2.28-a-b), le champ en aval du stator est uniquement composé d'une onde plane de même angle de propagation que l'onde incidente, tandis que le champ en amont est le résultat de la modulation du champ incident par l'onde réfléchie, provoquant des interférences plus ou moins importantes. En absence d'écoulement, son angle de propagation est opposé à celui de l'onde incidente (voir Sec. 2.6.6).

Lorsque la fréquence dépasse la fréquence de coupure f_c, un deuxième mode devient passant, comme illustré par les Figs. 2.28-c-d. L'énergie acoustique se répartit différemment entre les champs en amont et en aval, ainsi que le montrent les coefficients des amplitudes modales des ondes réfléchies et transmises en Figs. 2.29-e-f. Les amplitudes modales des champs acoustiques diffractés deviennent plus importantes

quand la fréquence s'approche de leurs fréquences de coupure respectives $f_{c,s}$. Les motifs d'interférences deviennent plus complexes en amont tandis qu'en aval, la présence des deux modes est visible. Quand la fréquence augmente, l'angle de propagation du mode d'ordre $s = 1$ diminue jusqu'à ce que le motif d'interférence devienne quasiment symétrique en aval du stator pour le cas $k \times c = 10$ (Fig. 2.29-a). Lorsque la fréquence augmente encore, de nouveaux modes deviennent passants ($s = 2$ pour $k \times c = 10.8$ et $s = 3$ pour $k \times c = 11$), modifiant ainsi significativement le champ de pression acoustique tant en amont qu'en aval de la grille d'aubes. L'énergie acoustique se répartit de manière différente en fonction de la fréquence des modes d'ordre faible à des modes plus élevés, ceci définissant des directions de propagation plus ou moins privilégiées. Comme ces résultats le montrent, le comportement acoustique lié à la diffraction acoustique par une grille d'aubes est fortement dépendant de la fréquence, avec l'apparition de nouveaux modes passants, mais également de la fréquence d'excitation par rapport aux fréquences de coupure modale. Cette dernière modifie notamment les angles de propagation des modes nouvellement passants et influe donc sur la directivité acoustique de la grille. De plus, un pic d'amplitude est observé sur les coefficients de réflexion et de transmission pour un mode donné lorsque la fréquence d'excitation est juste en dessous de la fréquence de coupure dudit mode.

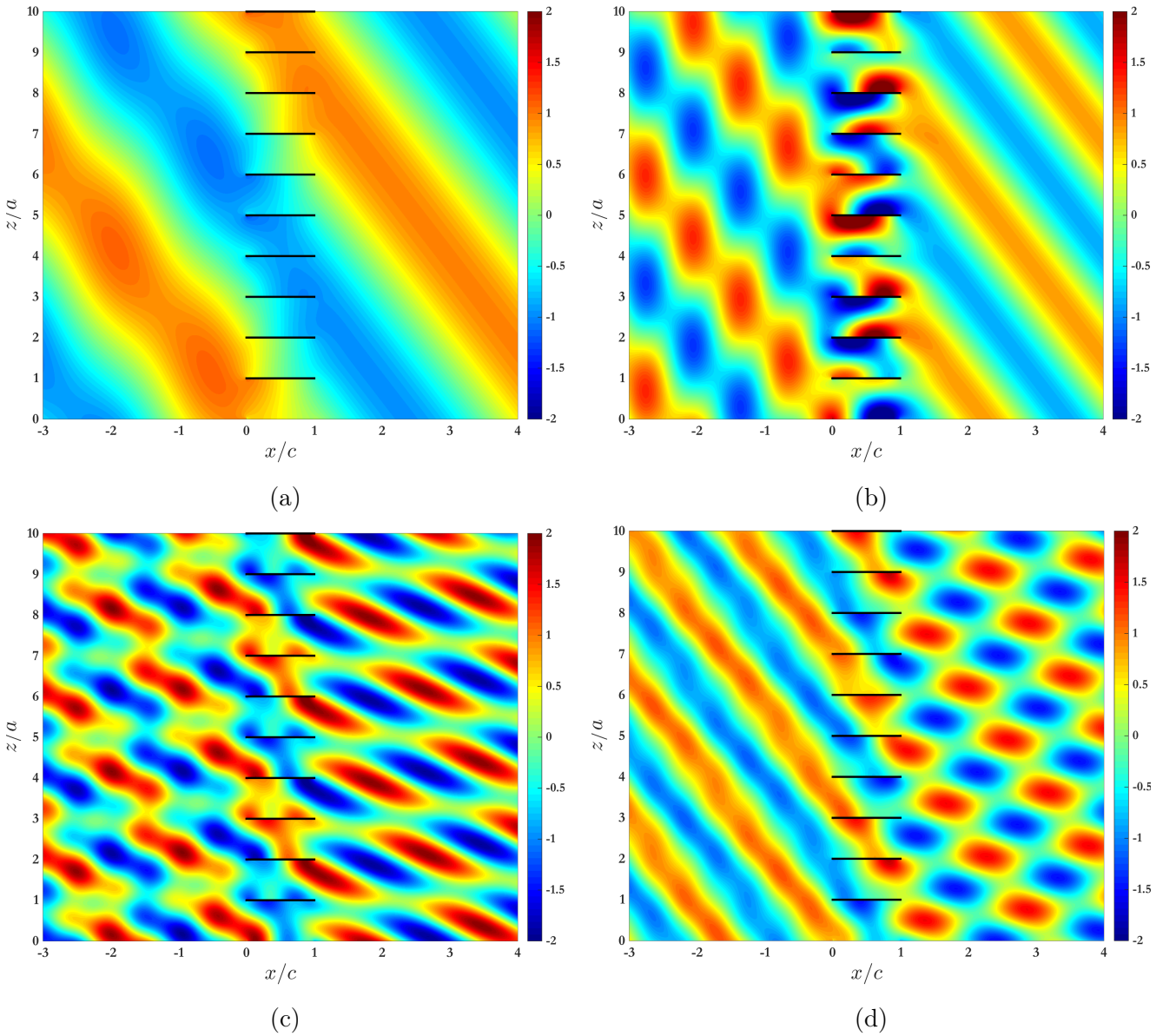


FIGURE 2.28 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour différentes fréquences : $k \times c = 2$ (a), $k \times c = 4$ (b), $k \times c = 5.4$ (c) et $k \times c = 6$ (d). L'écoulement va de gauche à droite.

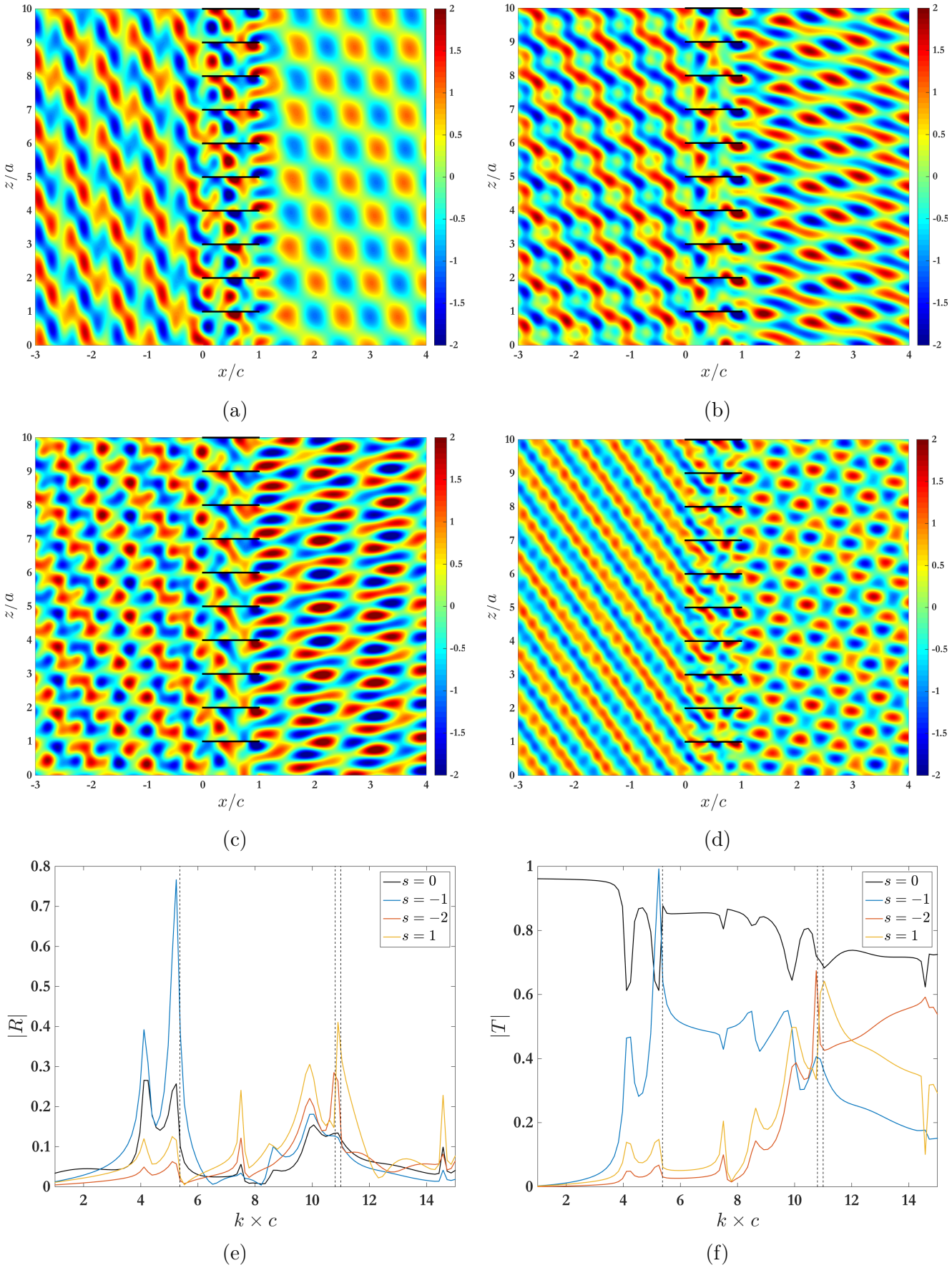


FIGURE 2.29 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour différentes fréquences : $k \times c = 10$ (a), $k \times c = 10.8$ (b), $k \times c = 11$ (c) et $k \times c = 15$ (d). L'écoulement va de gauche à droite. Valeurs absolues des coefficients modaux des champs ϕ_r (e) et ϕ_t (f) en fonction du nombre de Helmholtz pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-2, -1, 0, 1]$. Les nombres de Helmholtz $k \times c \in [5.371, 10.8, 11]$ correspondent aux fréquences de coupure (lignes en pointillés) des modes $s = -1$, $s = -2$ et $s = 1$, respectivement.

2.6.4 Effet du nombre de Mach sur le champ acoustique

L'effet du nombre de Mach sur le champ acoustique diffracté a déjà été illustré sur les comparaisons entre les résultats obtenus avec les techniques de Wiener-Hopf et de raccordement modal en Figs. 2.20 et 2.21. Dans le cas où la 2π-périodicité n'est pas imposée dans la direction transverse à l'écoulement, le nombre d'onde axial et la longueur d'onde axiale d'une onde se propageant sous l'angle Θ s'écrivent :

$$k_x = \frac{k\cos\Theta}{1+M\cos\Theta}, \quad \lambda_x = 2\pi\frac{1+M\cos\Theta}{k\cos\Theta}. \tag{2.118}$$

Dans le cas d'une propagation vers l'aval ($\Theta \in [-\pi/2, \pi/2]$), la longueur d'onde axiale croît avec le nombre de Mach et les fronts d'ondes sont plus espacés, comme illustré sur le champ transmis en aval du stator sur les Figs 2.20 et 2.21. Dans le cas d'une propagation vers l'amont, ($\Theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$), le contraire se produit et les fronts d'ondes se contractent, ce qui peut être observé sur le champ acoustique réfléchi par la grille d'aubes.

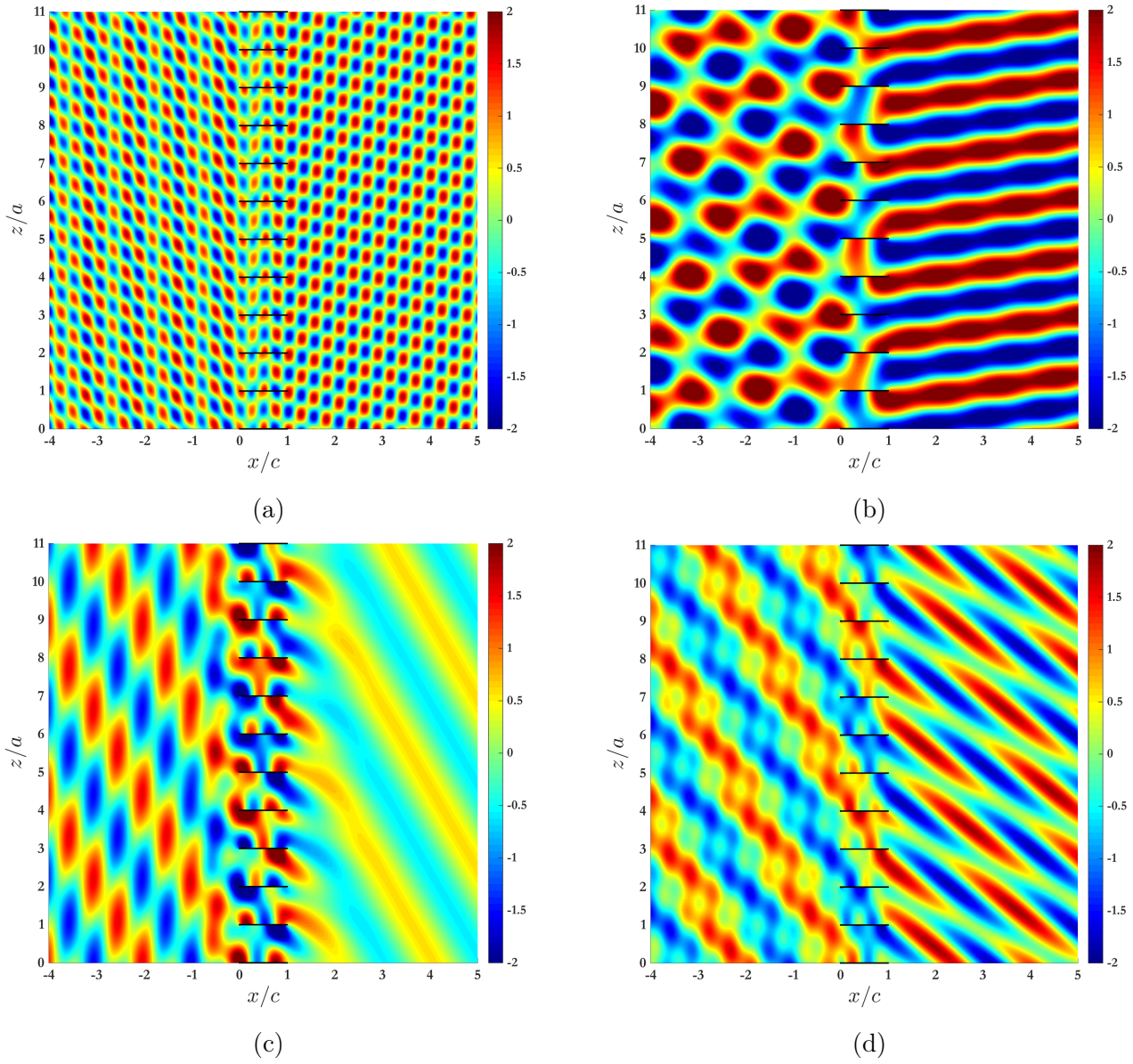
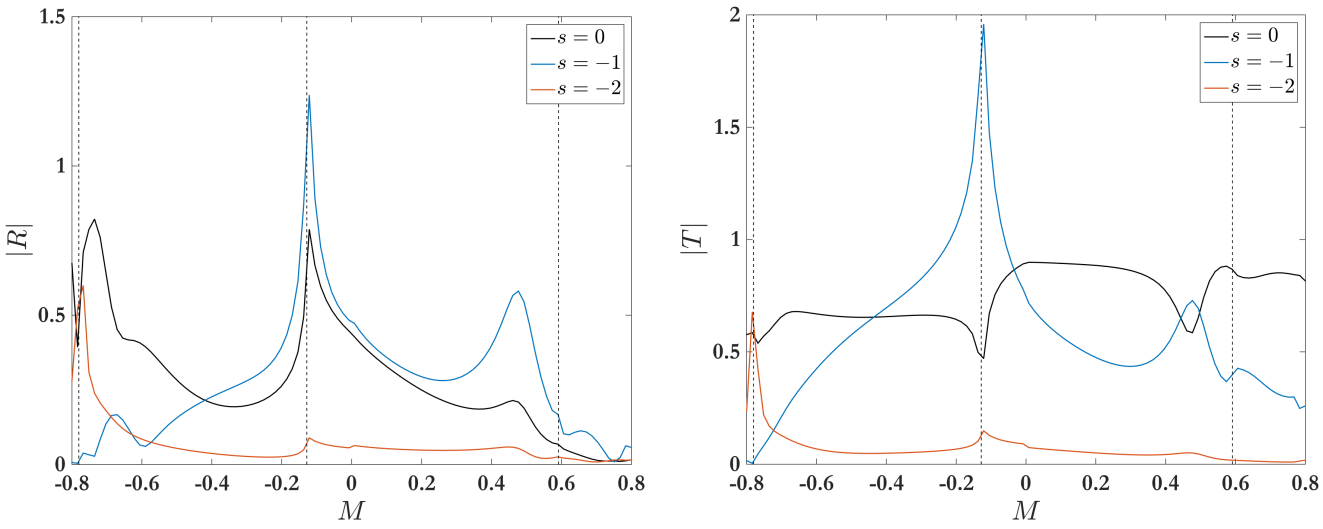


FIGURE 2.30 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$ pour différents nombres de Mach : $M = -0.7804$ (a), $M = -0.1283$ (b), $M = 0.4768$ (c) et $M = 0.5915$ (d).

À l'inverse, le nombre d'onde axial décroît avec le nombre de Mach, ce qui implique une baisse des fréquences de coupure modale avec l'écoulement. Par conséquent, avec l'augmentation du nombre de



(a) (b)

FIGURE 2.31 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b) en fonction du nombre de Helmholtz pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-2, -1, 0]$. Les nombres de Mach $M \in [-0.7804, -0.1283, 0.5915]$ correspondent aux fréquences de coupure (lignes en pointillés) des modes $s = -2$ et $s = -1$ (Mach négatif et Mach positif), respectivement.

Mach, certains modes coupés peuvent devenir passants. L'effet de la vitesse de l'écoulement moyen sur le champ acoustique diffracté est illustré en Figs. 2.30 et 2.31 lorsqu'une onde acoustique se propage avec un angle $\Theta_i = 30°$, un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$ à travers une grille d'aubes dont la solidité est $\sigma_s = 1.25$, avec un écoulement moyen dont le nombre de Mach varie entre $M = -0.8$ et $M = 0.8$. La condition de 2π-périodicité n'est pas imposée dans ce cas test. Une configuration de référence à un nombre de Mach nul est visible en Fig. 2.20-a. Lorsque le nombre de Mach augmente, les motifs de contraction et d'étirement des fronts d'ondes expliqués plus haut sont observés (Fig. 2.30-c). À partir d'un certain nombre de Mach, le mode d'ordre $s = -1$ devient passant et se propage en amont et en aval du stator, comme le montre la Fig. 2.30-d, lorsque le nombre de Mach atteint la valeur $M = 0.5915$ pour cette configuration. Lorsque le nombre de Mach est négatif, l'onde acoustique incidente remonte alors l'écoulement. Lorsque sa vitesse atteint une valeur pour laquelle $M = -0.1283$, le mode diffracté d'ordre $s = -1$ devient passant. Les amplitudes des champs acoustiques réfléchi et transmis pour ce mode deviennent très importantes (Fig. 2.31) ; il est donc dominant dans le champ acoustique. Ce mode dirige ainsi l'orientation du champ de pression en aval et son angle de propagation est proche de $-\pi/2$, la configuration avoisinant la coupure du mode. À Mach $M = -0.7804$, le mode diffracté d'ordre $s = -2$ devient passant. Pour cette vitesse d'écoulement, le mode $s = -1$ devient très faible et les champs acoustiques en amont et en aval de la grille d'aubes sont principalement composés des modes $s = 0$ et $s = -2$, modifiant ainsi les motifs d'interférences.

2.6.5 Effet de la solidité sur le champ acoustique

La solidité ($\sigma_s = c/a$) du stator est un paramètre prépondérant puisqu'elle rend compte de l'effet de grille de celui-ci. Elle permet de quantifier le comportement du stator en tant que réseau de guides d'ondes. Par ailleurs, l'augmentation de la solidité accroît les fréquences de coupure modale et limite par conséquent le nombre de modes passants. La Fig. 2.32 représente les champs acoustiques diffractés lorsqu'une onde de pression unitaire se propage, avec un angle $\Theta_i = 30°$ et un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$. L'écoulement moyen a un nombre de Mach $M = 0.3$ et la condition de 2π-périodicité n'est pas imposée. Lorsque la solidité est égale à 0.5 (Fig.2.32-a), quatre modes sont passants, comme le montrent les amplitudes modales des ondes réfléchies et transmises en Fig. 2.33. Les champs acoustiques en amont et en aval de la grille d'aubes montrent les interférences causées par ces multiples modes. Pour une solidité égale à un, deux modes sont diffractés, illustrés par le motif typique de cette configuration

en Fig. 2.32-b. Lorsque la solidité est supérieure à $\sigma_s = 1.5$, la grille d'aubes devient sub-résonnante et seul le mode $s = 0$ est passant (Fig.2.33). Le champ transmis est composé d'une onde acoustique oblique et le champ acoustique incident en amont du stator est plus ou moins modulé par le champ acoustique réfléchi, comme l'illustrent les champs acoustiques présentés en Fig.2.32-c-d.

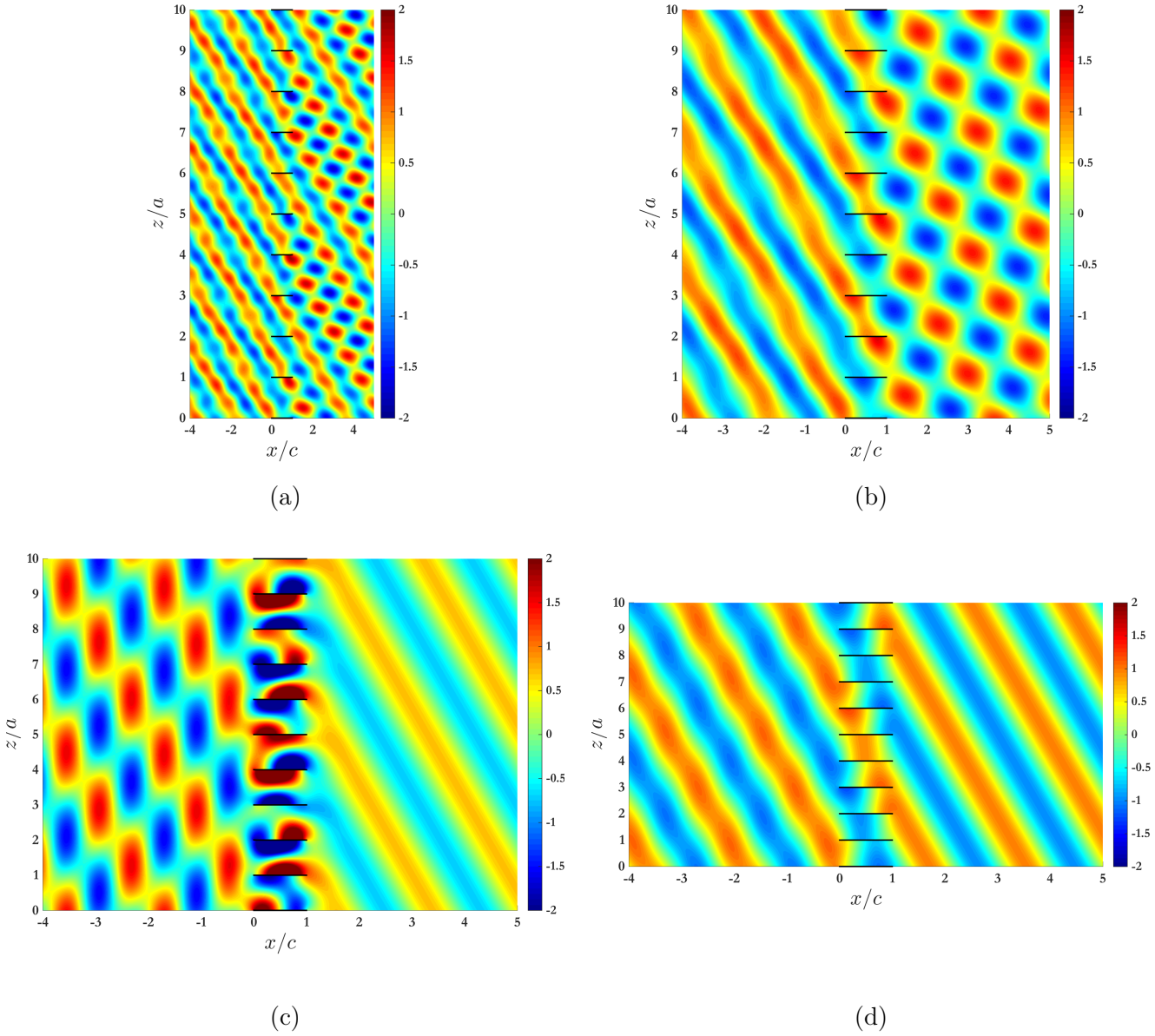


FIGURE 2.32 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour une grille dont la solidité $\sigma_s = c/a$ varie : $\sigma_s = 0.5$ (a), $\sigma_s = 1$ (b), $\sigma_s = 1.5$ (c) et $\sigma_s = 2$ (d).

Le saut de pression instationnaire adimensionné en fonction de la solidité de la grille est représenté en Fig. 2.33-e-f. D'importantes variations sont observées pour les parties réelles et imaginaires. Comme le montre la figure, le saut de pression au bord de fuite est nul, du fait de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. Les valeurs de saut de pression les plus élevées sont obtenues pour le cas où la solidité est égale à un, où de fortes résonances sont observées dans les canaux inter-aubes du stator. La solidité a une forte influence sur le champ acoustique, ainsi le choix de ce paramètre peut être piloté en fonction du mode incident. Si celui-ci est gênant pour l'utilisation de la grille, diminuer la solidité peut redistribuer son énergie acoustique sur les modes excités. À l'inverse, la solidité peut être augmentée pour ne laisser qu'un seul mode passant diffracté, dont l'essentiel de la puissance est portée par le champ transmis, le champ réfléchi devenant de plus en plus faible (Fig.2.32-d).

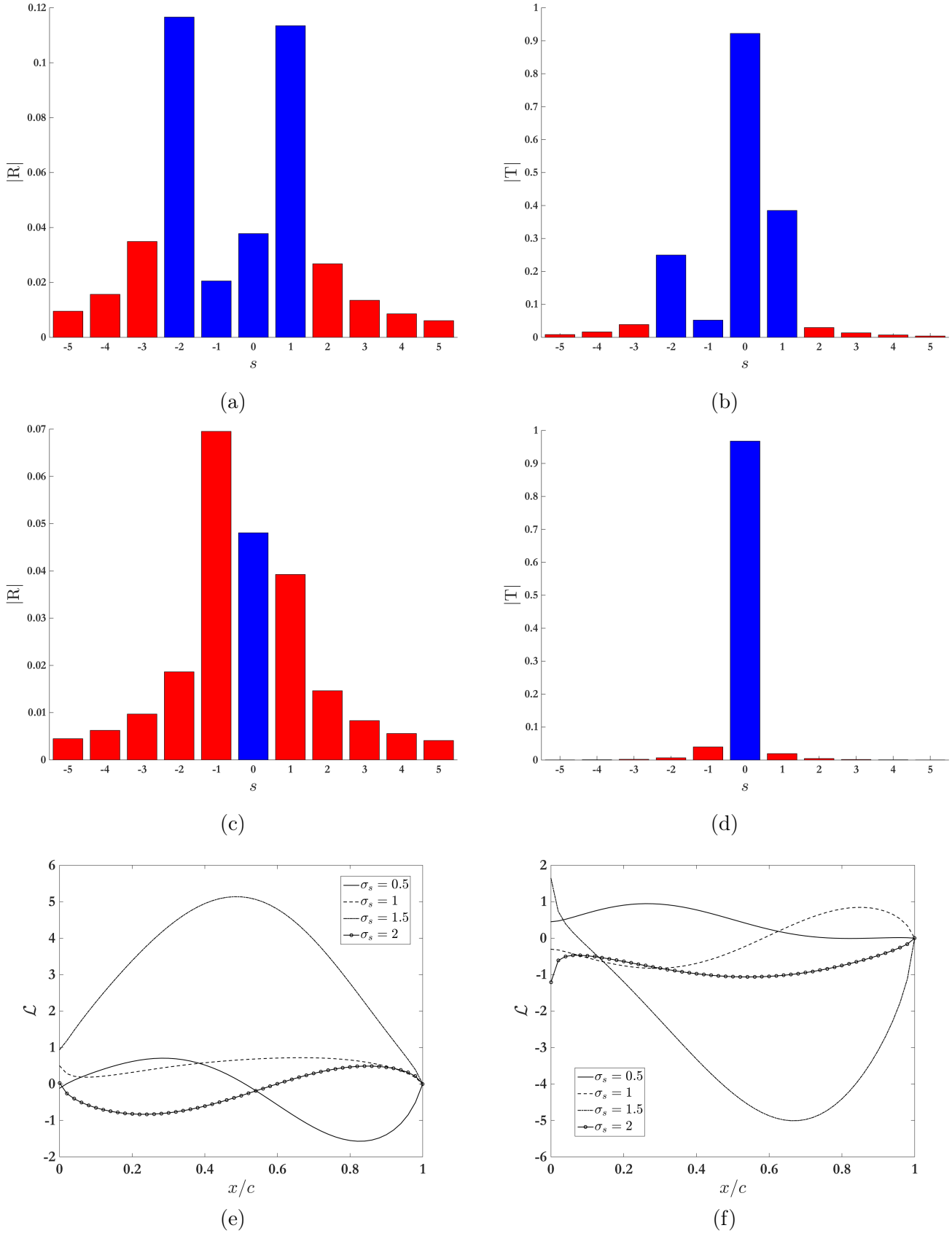
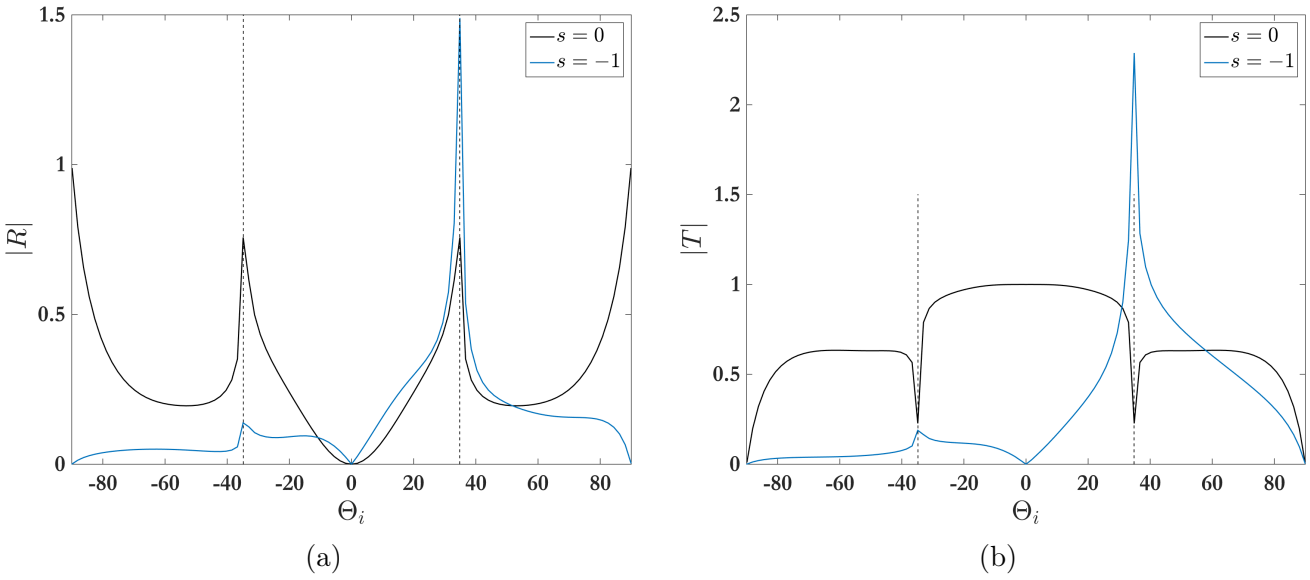


FIGURE 2.33 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a-c) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b-d) en fonction de la solidité de la grille d'aubes. (a-b) $\sigma_s = 0.5$ et (c-d) $\sigma_s = 2$. Les barres bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement. Parties réelle (e) et imaginaire (f) du saut de pression instationnaire normalisé sur une aube de référence pour différentes solidités de grille $\sigma_s \in [0.5, 1, 1.5, 2]$.

2.6.6 Effet de l'angle de propagation

La variation du champ acoustique diffracté en fonction de l'angle de propagation de l'onde incidente est étudiée dans cette section. La grille d'aubes possède dans ce cas test une solidité $\sigma_s = 1.25$ et le nombre de Helmholtz est $k \times c = 5$. Il n'y a pas d'écoulement moyen ($M = 0$) et la condition de 2π-périodicité n'est pas imposée. L'angle de propagation varie entre -90 et 90 degrés. Le nombre de Mach étant nul, il n'y a donc pas d'effet de convection sur les angles de propagation des ondes incidente et diffractées. La Fig. 2.34 montrent les amplitudes modales des champs réfléchi ϕ_r et transmis ϕ_t. Pour l'angle $\Theta_i = 0$, toute l'onde acoustique est transmise, sans aucune réflexion. Le coefficient du mode transmis d'ordre $s = 0$ est égal à un tandis que le coefficient de réflexion du même mode est nul. Les fronts d'ondes sont orthogonaux aux aubes (Fig. 2.35-a). Il s'agit de la configuration *Venetian Blind* selon la dénomination utilisée par Hanson [53], puisque les plaques n'interfèrent absolument pas la propagation des ondes, comme les stores vénitiens. Lorsque l'angle augmente, les fréquences de coupure modale diminuent et le mode $s = -1$ devient passant si l'angle de propagation Θ_i est supérieur à $34.91°$. La configuration étant symétrique, ce même mode devient passant si $\Theta_i < -34.91°$. Des résonances plus ou moins importantes sont visibles pour ces cas particuliers, également amplifiées par le fait que l'angle de calage de la grille est nul. Ces pics de résonance ne seraient pas présents si la configuration était sub-résonnante, et non pas super-résonnante, au sens de Kaji et Okazaki. La Fig. 2.35-b illustre cette situation où le champ transmis est dominé par le mode $s = -1$ dont l'angle de propagation est proche de $-\pi/2$. Lorsque $\Theta_i = 57.9°$, les amplitudes des modes transmis d'ordres $s = 0$ et $s = 1$ sont identiques et le champ acoustique montre un motif symétrique, dépendant des angles de propagation de ces deux modes (Fig.2.35-c). Enfin, si l'angle de propagation de l'onde incidente tend vers $\pi/2$ ou $-\pi/2$, l'amplitude du champ transmis s'annule alors que celle du champ réfléchi tend vers un. Si l'angle $\Theta_i = \pi/2$ (Fig.2.35-d), le champ transmis est nul, tandis que l'amplitude du champ réfléchi est égale à celle du champ incident. Il s'agit de la configuration *Broadside* selon la terminologie de Hanson. Cependant, le champ réfléchi se propage dans la direction opposée à celle du champ incident. Cette opposition de phase a pour conséquence d'annuler le champ acoustique dans tout le domaine amont et est inhérente au fait que l'angle de calage soit nul. De même, une configuration où l'angle de calage est nul ne permet pas de générer d'ondes planes (voir Sec. 2.7). Par conséquent, la configuration *Modal* de Hanson, où les fronts d'ondes de l'onde réfléchie sont orthogonaux aux aubes sans que ceux de l'onde incidente ne le soient n'est pas possible sans angle de calage.



(a) (b)

FIGURE 2.34 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel transmis ϕ_t (b) en fonction de l'angle de propagation Θ_i pour les modes diffractés principaux d'ordres $s \in [-1, 0]$. Les angles $\Theta_i \in [-34.91, 34.81]$ correspondent à la fréquence de coupure (lignes en pointillés) du mode $s = -1$.

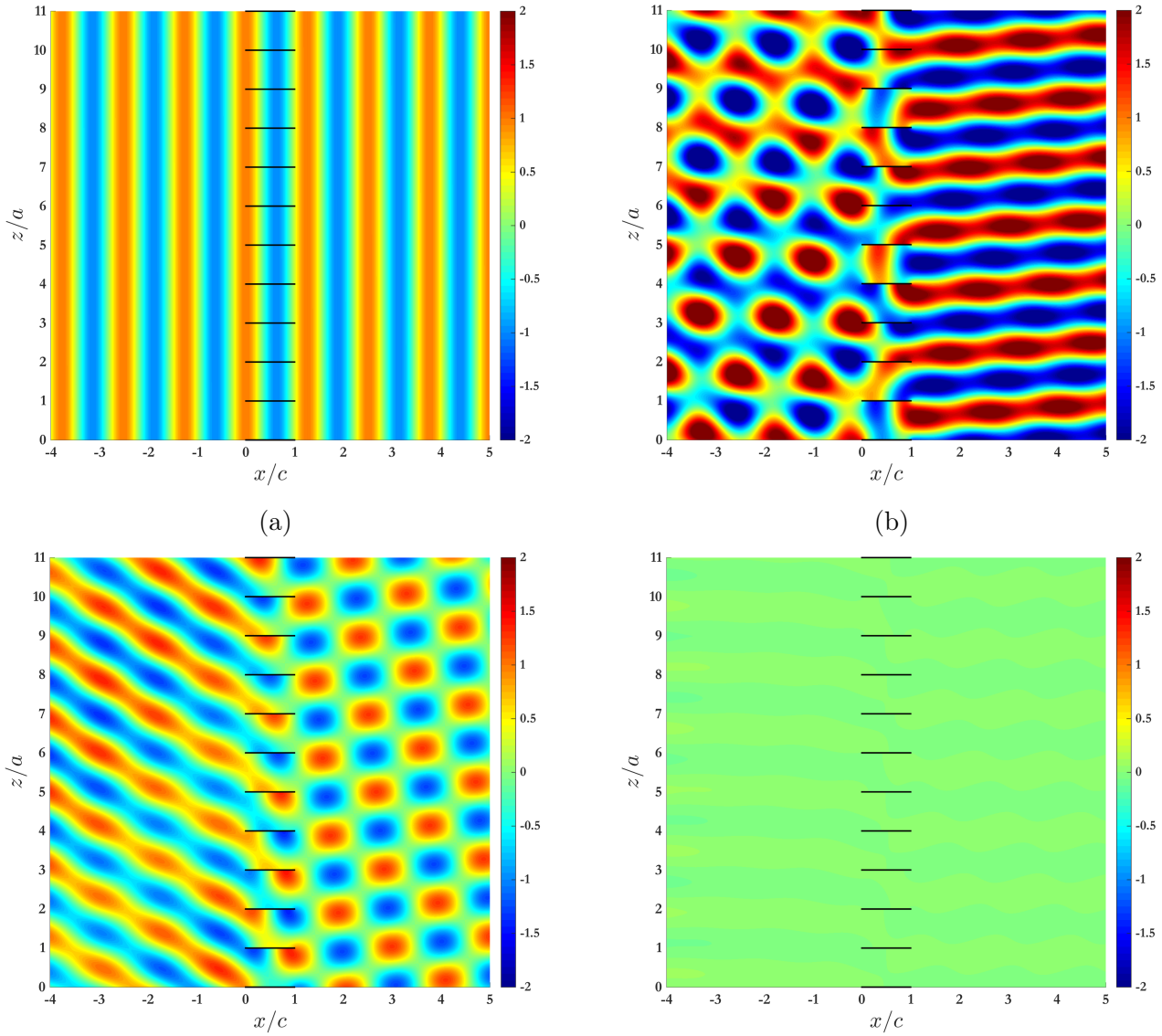


FIGURE 2.35 – Champs de pression acoustique instantanés normalisés obtenus par la technique de raccordement modal pour un nombre de Helmholtz $k \times c = 5$, un nombre de Mach nul et différents angles de propagation incidente : $\Theta_i = 0°$ (a), $\Theta_i = 35°$ (b), $\Theta_i = 57.9°$ (c) et $\Theta_i = 90°$ (d).

Condition de 2π-périodicité

La condition de 2π-périodicité impose une contrainte sur les angles de propagation possibles Θ d'une onde acoustique. Une onde acoustique oblique est considérée :

$$\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ z}. \tag{2.119}$$

La 2π-périodicité impose que $\alpha_i R_0 = n$. Par conséquent, l'égalité suivante est obtenue :

$$n = \frac{kR_0 \ \sin\Theta}{1 + M\cos\Theta}. \tag{2.120}$$

Cette relation induit une équation du second degré sur $\cos\Theta$:

$$(\eta^2 M^2 + 1)\cos^2\Theta + 2M\eta^2\cos\Theta + \eta^2 - 1 = 0, \quad \eta = \frac{n}{kR_0}. \tag{2.121}$$

Le discriminant s'écrit :

$$\Delta = 4(1-\beta^2\eta^2) \geqslant 0.$$

Le cas où le discriminant est négatif correspond à la coupure d'un mode. Le nombre d'onde axial devient complexe, l'onde est dite évanescente et ne se propage pas. Par conséquent, les solutions sont les suivantes :

$$\cos\Theta^{\pm} = \frac{-\eta^2 M \pm \sqrt{1-\beta^2\eta^2}}{1+\eta^2 M^2}.$$

La fonction $\cos\Theta^{\pm}$ est invariante selon le sens de η. Pour les ondes se propageant vers l'aval, $\Theta^{+} \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\cos\Theta^{+} \in \,]0,1[$. Pour les ondes se propageant vers l'amont, $\Theta^{-} \in \,]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, et $\cos\Theta^{-} \in \,]-1,0[$.

Ainsi, l'angle de propagation $\Theta^{\pm}$ s'écrit :

$$\Theta^{\pm} = \arccos\left(\frac{-\eta^2 M \pm \sqrt{1-\beta^2\eta^2}}{1+\eta^2 M^2}\right) \tag{2.122}$$

Pour les ondes diffractées en amont ou en aval de la grille d'aubes, les angles réfléchis Θ_s^{-} et transmis Θ_s^{+} pour chaque mode d'ordre s s'écrivent :

$$\Theta_s^{\pm} = \arccos\left(\frac{-\eta_s^2 M \pm \sqrt{1-\beta^2\eta_s^2}}{1+\eta_s^2 M^2}\right), \quad \eta_s = \frac{n+sV}{kR_0} \tag{2.123}$$

Dans un cas sans écoulement et où seul le mode $s=0$ est passant, les angles diffractés s'écrivent :

$$\cos\Theta = \sqrt{1-\beta^2\eta^2}, \quad \cos\Theta_s^{\pm} = \pm\sqrt{1-\beta^2\eta^2}, \tag{2.124}$$

Ainsi, l'onde transmise a le même angle de propagation que l'onde incidente, et l'angle de propagation de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\cos\Theta_s^{-} = -\cos\Theta = \cos(\pi-\Theta) \quad \text{et} \quad \Theta_s^{-} = \pi - \Theta.$$

La Fig. 2.36 montre que l'angle réfléchi est l'opposé de l'angle incident, ce qui représente une réflexion spéculaire de l'onde acoustique incidente.

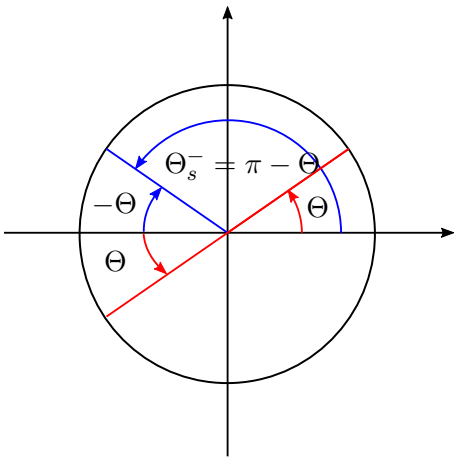


FIGURE 2.36 – Représentation des angles incident et réfléchi

La Fig. 2.37 montre les angles de propagation en fonction de l'ordre modal n pour différentes fréquences d'excitation. Ces fréquences sont choisies égales aux fréquences de coupure des modes $n \in [4, 8, 12, 16, 20]$. Le cas est considéré sans écoulement. Le rayon de la coupe cylindrique est égal à $R_0 = 0.0855$ m. La pulsation de coupure pour une onde d'ordre modal azimutal n s'écrit :

$$\omega_{c,n} = \frac{\beta n c_0}{R_0}, \quad \beta = \sqrt{1 - M^2}.$$

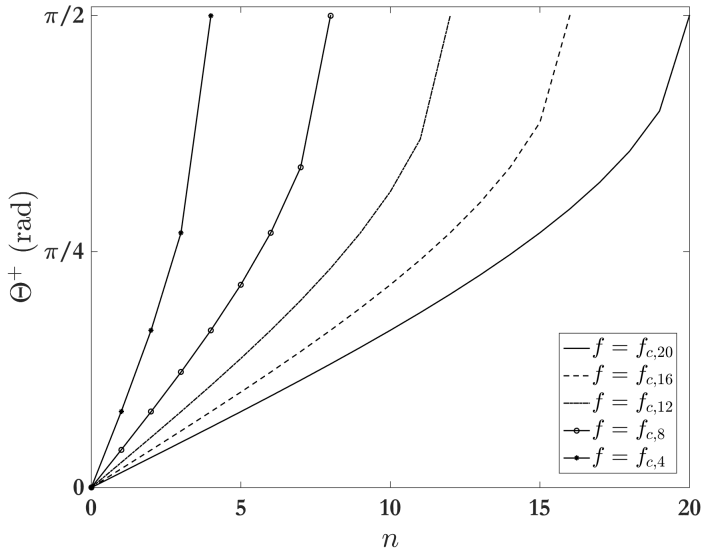


FIGURE 2.37 – Angle de propagation en fonction de l'ordre modal azimutal.

À une fréquence d'excitation $f = f_{c,n}$ donnée, l'angle de propagation augmente en fonction de l'ordre azimutal du mode jusqu'à atteindre $\pi/2$ à l'ordre n, qui représente le mode passant d'ordre le plus élevé. Les modes supérieurs sont coupés par le conduit. La fréquence de coupure d'un mode correspond donc à une rotation sur place de l'onde sans progression axiale, la vitesse de groupe du mode étant nulle. D'un autre point de vue, si un mode n quelconque est considéré, son angle de propagation diminue en fonction de la fréquence. Ainsi, proche de $\pi/2$ lorsqu'il devient passant, cet angle décroit avec l'augmentation de la fréquence, modifiant les motifs d'interférence des champs diffractés.

2.7 Raccordement modal pour une grille d'aubes avec un angle de calage

Cette partie vise à montrer que la technique de raccordement modal permet la prise en compte de l'angle de calage d'une grille d'aubes et détaille les développements présentés par Roger et François [140]. De même que pour le cas sans calage, l'interface de bord d'attaque et l'interface de bord de fuite sont étudiées indépendamment puis reliées ensuite par une procédure itérative. La première étape de cette méthode est ainsi la diffraction d'une onde acoustique incidente oblique sur le bord d'attaque du stator, en considérant un réseau de canaux inter-aubes de largeur constante et de longueur semi-infinie, mais calés comme l'illustre la Fig. 2.38. La technique de résolution est héritée de Whitehead [167], formulée pour la diffraction d'ondes électromagnétiques dans un milieu au repos. La formulation est transposée à des ondes acoustiques dans un milieu sans écoulement tout d'abord, puis en présence d'un écoulement moyen par l'utilisation de la transformation de Prandtl-Glauert [39]. Une extension à la diffraction par le bord de fuite est également développée pour appliquer la technique de raccordement modal à une grille d'aubes de corde finie.

2.7.1 Cas sans écoulement moyen - interface de bord d'attaque

La diffraction acoustique d'une onde acoustique par l'interface de bord d'attaque d'une grille d'aubes calées est résolue par l'approche de Whitehead. Les ondes acoustiques incidente, réfléchies et transmises sont décrites par leur champ de potentiel acoustique. Deux référentiels sont introduits, le premier relatif à l'interface de bord d'attaque (x, z) et le second attaché à une aube de référence

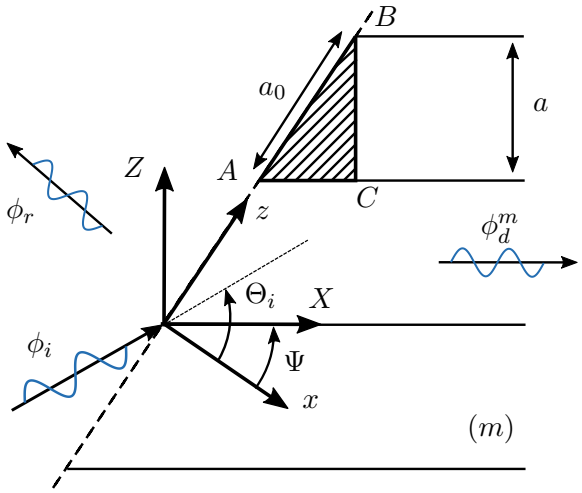


FIGURE 2.38 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique incidente à l'interface entre un milieu non borné et un réseau de canaux bifurqués, en présence d'un angle de calage Ψ.

(X, Z). Leurs origines sont identiques et placées au bord d'attaque de l'aube de référence (Fig. 2.38). L'angle de calage et l'angle de propagation de l'onde incidente sont notés Ψ et Θ_i, respectivement. En ayant recours à une identité de Green [95], la technique utilisée par Whitehead permet d'obtenir les amplitudes modales des champs diffractés en amont de l'interface et dans les canaux, mais ne permet pas la connaissance du champ acoustique à l'intérieur du triangle formé par les sommets ABC.

Formulation des potentiels

L'onde incidente s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_i &= A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}, \\ \alpha_i &= k \sin\Theta_i, \qquad k_i^+ = k\cos\Theta_i = \sqrt{k^2 - \alpha_i^2}. \end{aligned} \tag{2.125}$$

Dans le cas où la 2π-périodicité est respectée, le nombre d'onde tangentiel devient :

$$\alpha_i = \frac{n}{r_0} = \frac{n2\pi}{a_0 V}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

V est le nombre de canaux inter-aubes, $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde total. La distance AB entre deux aubes est égale à $a_0 = a\sec\Psi = a/\cos\Psi = 2\pi r_0/V$ si r_0 est le rayon de la coupe cylindrique le long de l'interface incluant tous les bords d'attaque de la grille. Le déphasage entre deux canaux adjacents s'écrit $u = a_0\alpha_i = ak\sin\Theta_i\sec\Psi$. Si la 2π-périodicité est satisfaite, le déphasage devient $u = 2\pi n/V$.

Le champ acoustique potentiel associé aux ondes réfléchies s'écrit comme une somme de modes, en accord avec le principe de trace :

$$\begin{aligned} \phi_r &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- x}, \quad x \le 0, \\ \alpha_s &= \frac{u + s2\pi}{a_0}, \quad k_s^- = -\sqrt{k^2 - \alpha_s^2}. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Le champ acoustique potentiel dans un canal de rang m s'écrit :

$$\phi_d^m = \sum_{q=0}^{+\infty} D_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left[\alpha_q \left(Z - ma\right)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ (X - ma\tan\Psi)}, \tag{2.127}$$

$$\alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad k_q^+ = \sqrt{k^2 - \alpha_q^2}, \quad (m+1)a\tan\Psi \leq X, \quad m\ a < Z < (1+m)\ a.$$

Pour un canal de référence $m = 0$, il devient :

$$\phi_d^0 = \sum_{q=0}^{+\infty} D_q \cos\left(\alpha_q Z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ X}. \tag{2.128}$$

Application du théorème de Green

Dans le cas d'une grille d'aubes sans angle de calage, la continuité de la pression et de la vitesse acoustique permet d'établir des équations de continuité et de résoudre le problème. Si la grille d'aubes possède un angle de calage non nul, il n'y a pas *a priori* d'expression modale explicite du champ acoustique à l'intérieur du triangle ABC et les équations de raccordement classiques ne peuvent pas être formulées. Afin de contourner ce problème, la technique de résolution utilisée par Whitehead a recours à une identité de Green (voir Goldstein [41] ou Mittra et Lee [95]) sur le triangle ABC. En l'absence de sources acoustiques dans cette zone, l'égalité suivante est satisfaite :

$$\int_C \left(G\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = 0. \tag{2.129}$$

Le contour C correspond au contour du triangle ABC, les normales n sont orientées vers l'extérieur et ds est un élément du contour. Les fonctions G sont des fonctions de Green qui satisfont l'équation de Helmholtz et sont choisies pour que l'intégration sur le segment AC soit nulle. Ces fonctions s'écrivent :

$$G^{\pm p}(X, Z) = \cos\left(\alpha_p Z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_p^{\pm} X}, \quad k_p^{\pm} = \pm\sqrt{k^2 - \alpha_p^2}, \quad \alpha_p = \frac{p\pi}{a}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{2.130}$$

Le théorème de Green (Eq. 2.129) est ainsi appliqué sur le triangle ABC. Le contour C est alors décomposé en trois segments AB, BC et CA.

Chemin CA Sur ce chemin, la condition de rigidité impose que :

$$\frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.$$

Ainsi, l'intégrale est nulle sur cette portion.

Chemin BC Le chemin BC est tel que $X = a\ \tan\Psi$ et $Z \in [0, a]$.

$$\frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} = \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial X} = \mathrm{i}k_p^{\pm} \cos\left(\alpha_p Z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_p^{\pm} X}, \tag{2.131}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi_d^0}{\partial X} = \sum_{q=0}^{+\infty} \mathrm{i}k_q^+ D_q^0 \cos\left(\alpha_q Z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ X}. \tag{2.132}$$

L'intégrande s'écrit alors :

$$\left(G^{\pm p}\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) = \mathrm{i} \sum_{q=0}^{+\infty} D_q^0 \cos\left(\alpha_p Z\right) \cos\left(\alpha_q Z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_q^+ + k_p^{\pm})X} (k_q^+ - k_p^{\pm}). \tag{2.133}$$

Sachant que (annexe B) :

$$\int_0^a \cos\left(\alpha_p Z\right) \cos\left(\alpha_q Z\right) \mathrm{d}Z = \frac{a}{2}(1 + \delta_{q,0})\delta_{p,q},$$

l'intégrale sur le chemin BC donne :

$$\int_0^a \left(G^{\pm p} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) \mathrm{d}Z = \frac{\mathrm{i}a}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} D_q^0 (1+\delta_{q,0}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_q^+ + k_p^\pm)X} (k_q^+ - k_p^\pm). \tag{2.134}$$

En $X = a\ \tan\Psi$, selon le sens de la fonction G, deux solutions sont obtenues :

$$\int_0^a \left(G^{+q} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{+q}}{\partial n} \right) \mathrm{d}Z \Big|_{X=a\ \tan\Psi} = 0, \tag{2.135}$$

$$\int_0^a \left(G^{-q} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{-q}}{\partial n} \right) \mathrm{d}Z \Big|_{X=a\ \tan\Psi} = \mathrm{i}a(1+\delta_{q,0}) k_q^+ D_q^0. \tag{2.136}$$

Chemin AB Le chemin AB est tel que $x = 0$, $z \in [0, a_0]$ et $n = -x$.

$$\int_{AB} \left(G^{\pm p} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \int_{AB} \left(G^{\pm p} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) \Big|_{x=0} \mathrm{d}z,$$

$$\begin{aligned} \phi = \phi_i + \phi_r &= A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- x}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \mathrm{i}A_i k_i^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}k_s^- R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- x}. \end{aligned}$$

Les variables du repère (X, Z) peuvent être formulées dans le repère (x, z) :

$$\begin{aligned} X &= \cos\Psi x + \sin\Psi z, \\ Z &= -\sin\Psi x + \cos\Psi z. \end{aligned}$$

Exprimées dans le repère (x, z), les fonctions de Green $G^{\pm p}$ et leurs dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned} G^{\pm p} &= \frac{1}{2} \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \cos\ \Psi - \alpha_p \sin\ \Psi \right) x + \mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi + \alpha_p \cos\ \Psi \right) z \right] \\ &+ \frac{1}{2} \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \cos\ \Psi + \alpha_p \sin\ \Psi \right) x + \mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi - \alpha_p \cos\ \Psi \right) z \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\pm q}}{\partial n} \Big|_{x=0} &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \left[k_p^\pm \cos\ \Psi - \alpha_p \sin\ \Psi \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi + \alpha_p \cos\ \Psi \right) z \right] \\ &- \frac{\mathrm{i}}{2} \left[k_p^\pm \cos\ \Psi + \alpha_p \sin\ \Psi \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi - \alpha_p \cos\ \Psi \right) z \right]. \end{aligned}$$

La fonction intégrande s'écrit dès lors :

$$\begin{aligned} \left(G^{\pm p} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) \Big|_{x=0} &= \frac{\mathrm{i}}{2} \left[k_p^\pm \cos\ \Psi - \alpha_p \sin\ \Psi - k_i^+ \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi + \alpha_p \cos\ \Psi + \alpha_i \right) z \right] \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2} \left[k_p^\pm \cos\ \Psi + \alpha_p \sin\ \Psi - k_i^+ \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi - \alpha_p \cos\ \Psi + \alpha_i \right) z \right] \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \left[k_p^\pm \cos\ \Psi - \alpha_p \sin\ \Psi - k_s^- \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi + \alpha_p \cos\ \Psi + \alpha_s \right) z \right] \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \left[k_p^\pm \cos\ \Psi + \alpha_p \sin\ \Psi - k_s^- \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(k_p^\pm \sin\ \Psi - \alpha_p \cos\ \Psi + \alpha_s \right) z \right]. \end{aligned}$$

L'intégration s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{AB}\left(G^{\pm p}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n}\right)\Big|_{x=0}\mathrm{d}s &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi-\alpha_p\sin\ \Psi-k_i^{+}\right]I_A\\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2}\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi+\alpha_p\sin\ \Psi-k_i^{+}\right]I_B\\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}R_s\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi-\alpha_p\sin\ \Psi-k_s^{-}\right]I_C\\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}R_s\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi+\alpha_p\sin\ \Psi-k_s^{-}\right]I_D,\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}I_A &= \int_0^{a_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_i\right)z\right]\mathrm{d}z=\frac{(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1}{\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_i\right)},\\ I_B &= \int_0^{a_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi-\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_i\right)z\right]\mathrm{d}z=\frac{(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1}{\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi-\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_i\right)},\\ I_C &= \int_0^{a_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_s\right)z\right]\mathrm{d}z=\frac{(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1}{\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_s\right)},\\ I_D &= \int_0^{a_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi-\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_s\right)z\right]\mathrm{d}z=\frac{(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1}{\mathrm{i}\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi-\alpha_p\cos\ \Psi+\alpha_s\right)}.\end{aligned}$$

L'intégrale est reformulée comme suit :

$$\int_{AB}\left(G^{\pm p}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n}\right)\Big|_{x=0}\mathrm{d}s=I_1+I_2,$$

où :

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi-\alpha_p\sin\ \Psi-k_i^{+}\right]I_A+\frac{\mathrm{i}}{2}\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi+\alpha_p\sin\ \Psi-k_i^{+}\right]I_B,\\ I_2 &= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}R_s\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi-\alpha_p\sin\ \Psi-k_s^{-}\right]I_C+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}R_s\left[k_p^{\pm}\cos\ \Psi+\alpha_p\sin\ \Psi-k_s^{-}\right]I_D.\end{aligned}$$

Les développements des termes I_1 et I_2 mènent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}I_1 &= A_i\left[(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1\right]\frac{k^2\cos\ \Psi\sin\ \Psi+k_p^{\pm}\alpha_i\cos\ \Psi-k_p^{\pm}k_i^{+}\sin\ \Psi-k_i^{+}\alpha_i}{\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_i\right)^2-\left(\alpha_q\cos\ \Psi\right)^2},\\ I_2 &= \left[(-1)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\right)}-1\right]\sum_{s=-\infty}^{+\infty}R_s\frac{k^2\cos\ \Psi\sin\ \Psi+k_p^{\pm}\alpha_s\cos\ \Psi-k_p^{\pm}k_s^{-}\sin\ \Psi-k_s^{-}\alpha_s}{\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi+\alpha_s\right)^2-\left(\alpha_q\cos\ \Psi\right)^2}.\end{aligned}$$

Intégration sur le contour total Finalement, l'intégration sur le contour total s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_C\left(G\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s &= \int_{AB}\left(G\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+\int_{BC}\left(G\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+\int_{CA}\left(G\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s\\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.137}$$

Si $ak_p^{\pm}\tan\ \Psi+u\neq p\pi,\forall p$, deux équations sont obtenues, selon le signe de la fonction $G^{\pm p}$:

- Si $G^{\pm p} = G^{+p}$:

$$A_i \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^+ \alpha_i \cos\ \Psi - k_p^+ k_i^+ \sin\ \Psi - k_i^+ \alpha_i}{\left(k_p^+ \sin\ \Psi + \alpha_i\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^+ \alpha_s \cos\ \Psi - k_p^+ k_s^- \sin\ \Psi - k_s^- \alpha_s}{\left(k_p^+ \sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} = 0.$$

- Si $G^{\pm p} = G^{-p}$:

$$A_i \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^- \alpha_i \cos\ \Psi - k_p^- k_i^+ \sin\ \Psi - k_i^+ \alpha_i}{\left(k_p^- \sin\ \Psi + \alpha_i\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} R_s \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^- \alpha_s \cos\ \Psi - k_p^- k_s^- \sin\ \Psi - k_s^- \alpha_s}{\left(k_p^- \sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} = \frac{-\mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_p^+}{\left[(-1)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^- \tan\ \Psi + u\right)} - 1\right]} \delta_{p,q} D_p^0.$$

Formulation matricielle Ainsi, l'application du théorème de Green mène à un système linéaire d'équations sur les coefficients modaux des ondes réfléchies $\mathbf{R} = [R_s]$ et transmises dans les canaux $\mathbf{D}^0 = [D_q^0]$. Après troncature modale, deux équations matricielles sont obtenues :

$$\underline{\mathbf{A}_1^+}\mathbf{R} + \mathbf{B}_1^+ = \mathbf{0}, \tag{2.138}$$

$$\underline{\mathbf{A}_1^-}\mathbf{R} + \mathbf{B}_1^- = \mathbf{C}_1^- \mathbf{D}. \tag{2.139}$$

où :

$$A_1^{\pm}(q,s) = \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_q^{\pm} \alpha_s \cos\ \Psi - k_q^{\pm} k_s^- \sin\ \Psi - k_s^- \alpha_s}{\left(k_q^{\pm} \sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2}, \tag{2.140}$$

$$B_1^{\pm}(q,1) = A_i \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_q^{\pm} \alpha_i \cos\ \Psi - k_q^{\pm} k_i^+ \sin\ \Psi - k_i^+ \alpha_i}{\left(k_q^{\pm} \sin\ \Psi + \alpha_i\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2}, \tag{2.141}$$

$$C_1^{\pm}(q,1) = \frac{-\mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^{\pm}}{\left[(-1)^q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_q^{\pm} \tan\ \Psi + u\right)} - 1\right]}. \tag{2.142}$$

La résolution de l'Eq. (2.138) par inversion matricielle permet d'obtenir des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r. Les coefficients modaux du champ potentiel transmis dans le canal inter-aubes de référence ϕ_d^0 sont obtenus à partir de l'Eq. (2.139).

2.7.2 Cas sans écoulement moyen - interface de bord de fuite

La diffraction d'une onde acoustique se propageant dans les canaux inter-aubes est décrite pour une grille d'aubes possédant un angle de calage. Le milieu est considéré au repos, sans écoulement moyen (Fig. 2.39).

Formulation des potentiels acoustiques

Soit c la corde des aubes du stator, les champs acoustiques potentiels relatifs aux ondes se propageant dans un canal inter-aubes de référence ($m = 0$) vers l'aval ϕ_d^0 et vers l'amont ϕ_u^0 s'écrivent :

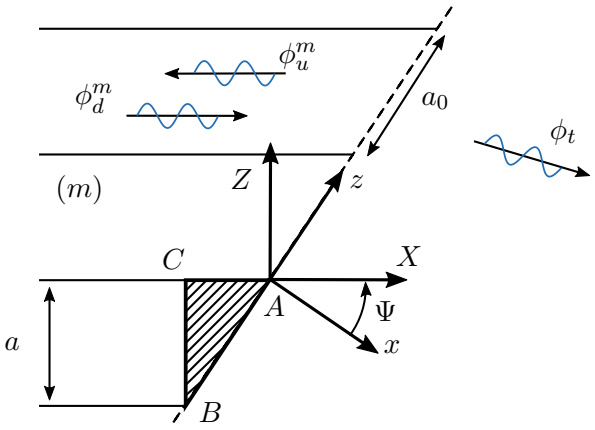


FIGURE 2.39 – Réflexion et transmission d'un réseau déphasé d'ondes acoustiques incidentes à l'interface entre un réseau de canaux bifurqués et un milieu non borné, en présence d'un angle de calage Ψ.

$$\begin{pmatrix} \phi_d^0 \\ \phi_u^0 \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} D_q^0 \\ U_p^0 \end{pmatrix} \cos(\alpha_q Z) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ X} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^- (X-c)} \end{pmatrix}, \tag{2.143}$$

où :

$$\alpha_q = \frac{q\pi}{a} \quad k_q^{\pm} = \pm\sqrt{k^2 - \alpha_q^2}.$$

Le champ acoustique potentiel associé à l'onde transmise en aval de la grille de stator s'écrit :

$$\phi_t = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^+ (x-c^*)}, \tag{2.144}$$

où :

$$\alpha_s = \frac{u + s2\pi}{a_0}, \quad k_s^+ = \sqrt{k^2 - \alpha_s^2} \quad \text{et} \quad c^* = c\cos\Psi.$$

Application du théorème de Green

Comme pour l'interface de bord d'attaque, le théorème de Green est employé. Les mêmes fonctions de Green sont choisies, vérifiant l'équation de Helmholtz et satisfaisant la condition de rigidité des parois :

$$\begin{aligned} G^{\pm p}(X,Z) &= \cos(\alpha_p Z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_p^{\pm} X}, \quad p \in \mathbb{N}, \\ \alpha_p &= \frac{p\pi}{a}, \quad k_p^{\pm} = \pm\sqrt{k^2 - \alpha_p^2}. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Le théorème de Green est appliqué sur le triangle ABC illustré en Fig. 2.39.

Chemin CA Comme pour le cas précédent, la condition de rigidité aux parois du canal, satisfaite par les fonctions $G^{\pm p}$ et $\phi = \phi_d^0 + \phi_u^0$ induit une intégrale nulle sur ce segment.

Chemin BC Après calculs, l'intégration sur le chemin BC mène au résultat :

$$\begin{aligned} I_{BC}^{\pm} &= \int_0^a \left(G^{\pm p}\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right)\Big|_{X=c} \mathrm{d}Z \\ &= \mathrm{i}\sum_{q=0}^{+\infty} \left[D_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}(k_q^+ - k_p^{\pm}) + U_q(k_q^- - k_p^{\pm}) \right] \int_0^a \cos(\alpha_q Z)\cos(\alpha_p Z)\,\mathrm{d}Z. \end{aligned}$$

Finalement, selon le sens de la fonction $G^{\pm p}$, deux résultats sont obtenus :

$$I_{BC}^{+} = \mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^- U_q \delta_{p,q}, \tag{2.146}$$

$$I_{BC}^{-} = \mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^+ D_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\delta_{p,q}. \tag{2.147}$$

Chemin AB L'intégrale du théorème de Green sur le segment AB se réduit à :

$$\int_{AB} \left(G^{\pm p}\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \int_{AB} \left(G^{\pm p}\frac{\partial \phi_t}{\partial n} - \phi_t \frac{\partial G^{\pm p}}{\partial n} \right)\Big|_{x=c^*} \mathrm{d}z$$

L'intégration est similaire à celle de la configuration avec interface de bord d'attaque pour le champ relatif aux ondes réfléchies, ce qui donne après calculs :

$$I_{AB}^{\pm} = \left[(-1)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi + u\right)} - 1 \right] \sum_{s=-\infty}^{+\infty} T_s \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^{\pm}\alpha_s \cos\ \Psi - k_p^{\pm}k_s^+ \sin\ \Psi - k_s^+\alpha_s}{\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2}.$$

Intégration sur le contour total Sous réserve que $ak_p^{\pm}\tan\ \Psi + u \neq p\pi, \forall p$, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} T_s \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^+\alpha_s \cos\ \Psi - k_p^+k_s^+ \sin\ \Psi - k_s^+\alpha_s}{\left(k_p^+\sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} &= -\frac{\mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^- U_q \delta_{p,q}}{\left[(-1)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^+\tan\ \Psi + u\right)} - 1 \right]}, \\ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} T_s \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_p^-\alpha_s \cos\ \Psi - k_p^-k_s^+ \sin\ \Psi - k_s^+\alpha_s}{\left(k_p^-\sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2} &= -\frac{\mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^+ D_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\delta_{p,q}}{\left[(-1)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^-\tan\ \Psi + u\right)} - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Formulation Matricielle Un système linéaire d'équations sur les coefficients modaux des ondes réfléchies $\mathbf{U}^0 = [U_q^0]$ et transmises $\mathbf{T} = [T_s]$ est obtenu. Après troncature modale, deux équations matricielles synthétisent le problème :

$$\underline{\mathbf{A}_2^+}\mathbf{T} = \mathbf{C}_2^+\mathbf{U}^0, \tag{2.148}$$

$$\underline{\mathbf{A}_2^-}\mathbf{T} = \mathbf{C}_2^-\mathbf{D}^0\mathbf{E}_2^-, \tag{2.149}$$

où :

$$A_2^{\pm}(q,s) = \frac{k^2 \cos\ \Psi \sin\ \Psi + k_q^{\pm}\alpha_s \cos\ \Psi - k_q^{\pm}k_s^+ \sin\ \Psi - k_s^+\alpha_s}{\left(k_p^{\pm}\sin\ \Psi + \alpha_s\right)^2 - \left(\alpha_q \cos\ \Psi\right)^2}, \tag{2.150}$$

$$C_2^{\pm}(q,1) = -\frac{\mathrm{i}a(1+\delta_{q,0})k_q^{\pm}}{\left[(-1)^q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(ak_p^{\pm}\tan\ \Psi + u\right)} - 1 \right]}, \tag{2.151}$$

$$E_2^-(q,1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}. \tag{2.152}$$

Le champ ϕ_d^0 étant supposé connu, la résolution de l'Eq. (2.156) par inversion matricielle permet l'obtention des coefficients modaux du champ potentiel transmis ϕ_r. Les coefficients modaux du champ potentiel réfléchi dans le canal inter-aubes de référence ϕ_u^0 sont directement déduits de l'Eq. (2.155).

2.7.3 Cas sans écoulement - configuration avec deux interfaces

Si une grille d'aubes de corde finie est considérée, le même processus itératif que pour la technique de raccordement classique appliquée à des grilles d'aubes non calées est utilisé. Après la phase d'initialisation, les formulations matricielles au bord d'attaque et au bord de fuite sont résumées par les équations suivantes :

- Bord d'attaque :

$$\underline{\mathbf{A}_1^+}\mathbf{R} + \mathbf{B}_1^+ = \mathbf{C}_1^+\mathbf{U}^0\mathbf{E}_1^+, \tag{2.153}$$

$$\underline{\mathbf{A}_1^-}\mathbf{R} + \mathbf{B}_1^- = \mathbf{C}_1^-\mathbf{D}, \tag{2.154}$$

où :

$$\mathbf{E}_1^+(q,1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^-(c-a\tan\Psi)}.$$

- Bord de fuite :

$$\underline{\mathbf{A}_2^+}\mathbf{T} = \mathbf{C}_2^+\mathbf{U}^0, \tag{2.155}$$

$$\underline{\mathbf{A}_2^-}\mathbf{T} = \mathbf{C}_2^-\mathbf{D}^0\mathbf{E}_2^-. \tag{2.156}$$

2.7.4 Diffraction acoustique en présence d'un écoulement moyen uniforme

Plutôt que d'appliquer le théorème de Green en considérant les fonctions solutions de l'équation de Helmholtz convectée, il a plutôt été choisi de considérer la transformation de Prandtl-Glauert pour obtenir un problème de diffraction acoustique équivalent dans un milieu au repos, avec des paramètres de propagation modifiés. L'écoulement moyen est supposé uniforme de nombre de Mach M, de telle sorte que les potentiels acoustiques soient solutions de l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial Z^2} + (1-M^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\phi}{\partial X} + k^2\phi = 0,$$

dans le système de coordonnées (X,Z), où $\beta^2 = 1-M^2$, avec la condition de rigidité :

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z} = 0, \quad X \in [ma\tan\Psi, c], \quad Z = ma.$$

La transformation de Prandtl-Glauert stipule que $\tilde{X} = X/\beta$, $\tilde{k} = k/\beta$ et $\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{k}M\tilde{X}}$, menant à l'équation de Helmholtz classique :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \tilde{k}^2\Phi = 0,$$

et aux conditions de rigidité :

$$\frac{\partial\phi}{\partial Z} = 0, \quad \tilde{X} \in [ma\tan\tilde{\Psi}, c], \quad Z = ma.$$

introduisant le relation $\tan\tilde{\Psi} = \tan\Psi/\beta$. En présence d'un écoulement moyen et à l'aide de ces variables modifiées, le champ acoustique potentiel de l'onde incidente s'écrit :

$$\phi_i = A_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{k}(\cos\tilde{\Theta}_i\tilde{x}+\sin\tilde{\Theta}_i Z)}.$$

Si l'angle d'incidence de l'onde est noté Θ_i par rapport à l'axe x dans le problème originel de diffraction en présence d'un écoulement moyen, l'angle de propagation modifié par la transformation $\tilde{\Theta}_i$ est défini par les relations suivantes :

$$\sin\tilde{\Theta}_i = \frac{\beta\sin\Theta_i}{1+M\cos\Theta_i}, \quad \cos\tilde{\Theta}_i = \frac{M+\cos\Theta_i}{1+M\cos\Theta_i}.$$

Ainsi, la transformation de Prandtl-Glauert permet de résoudre un problème de diffraction acoustique équivalent, sans écoulement moyen pour une grille d'aubes avec un angle de calage et un nombre d'onde plus importants ($\tilde{\Psi} > \Psi$, $\tilde{k} > k$). La même procédure que celle décrite dans la section précédente peut ainsi être appliquée. Après résolution par la technique initiée par Whitehead, les champs acoustiques diffractés sont obtenus.

2.7.5 Résultats

La technique de raccordement modal basée sur le théorème de Green et la transformation de Prandtl-Glauert est appliquée à deux grilles d'aubes, la première avec un angle de calage nul et la seconde avec un angle de calage égal à $\Psi = 20°$. La condition de Kutta-Joukowski n'est pas implémentée dans cette modélisation. Les deux grilles sont excitées par la même onde acoustique incidente, dont les paramètres sont précisés dans la Tab. 2.8. Les paramètres de la simulation sont choisis afin de pouvoir générer le mode plan ($n + sV = 0$), qui représente une onde acoustique se propageant axialement sans variation transverse.

Géométrie du stator				Onde acoustique incidente	
$M = 0.2$,	$V = 10$,	$R_0 = 0.08$ m,	$\Psi \in [0°,\ 20°]$,	$n = 10$,	$kc = 6.8$.

TABLE 2.8 – Paramètres du cas test pour une grille d'aubes calées.

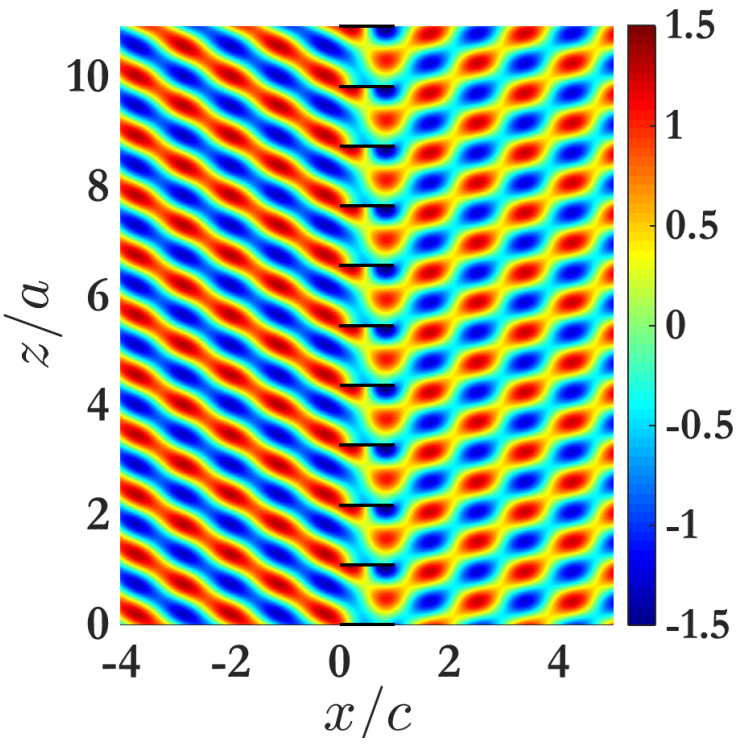
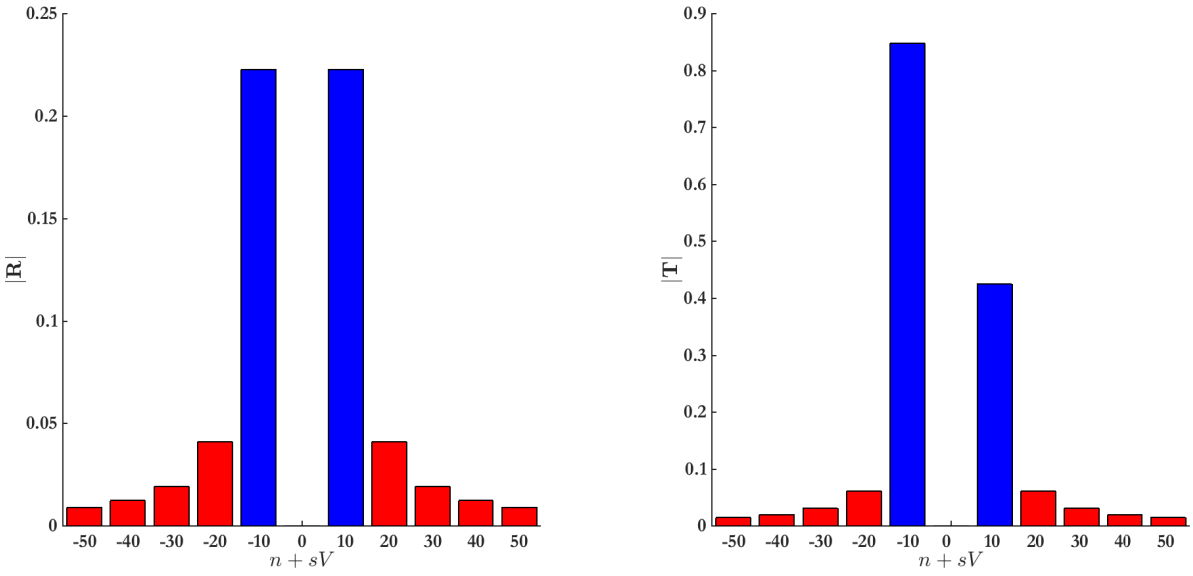


FIGURE 2.40 – Cartographie de pression acoustique instantanée générée par la diffraction d'une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire par une grille d'aubes non calées. L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite.

Les Figs. 2.40, 2.41 et 2.42, 2.43 illustrent les champs de pression acoustique instantanés générés par la diffraction de l'onde acoustique incidente par la grille d'aubes possédant un angle de calage nul puis égal à $\Psi = 20°$, respectivement. Premièrement, des triangles blancs sont présents dans le cas avec calage (Fig. 2.42) et représentent les zones dans lesquelles les champs potentiels acoustiques ne

sont pas calculés. Leurs contours forment les segments sur lesquels s'applique le théorème de Green. Dans le cas sans calage, ces zones se réduisent à des surfaces de taille infinitésimale (Fig. 2.40). Les deux configurations montrent qualitativement les mêmes champs diffractés, avec les modes passants $n+sV \in [-10, 0, 10]$, tandis que les autres sont coupés et atténués exponentiellement selon leur distance à l'interface.



(a) *(b)*

FIGURE 2.41 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel ϕ_t (b) en fonction de l'ordre modal $n+sV$. Les barres d'histogramme bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

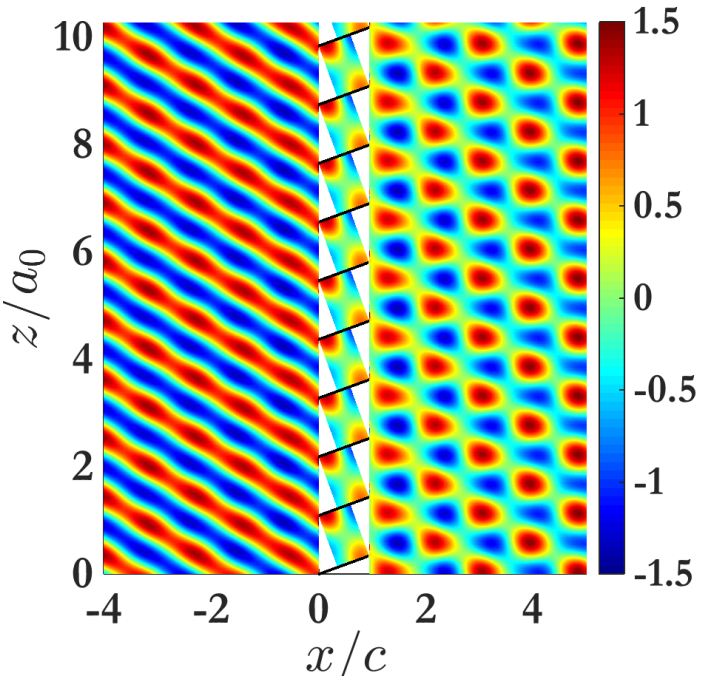
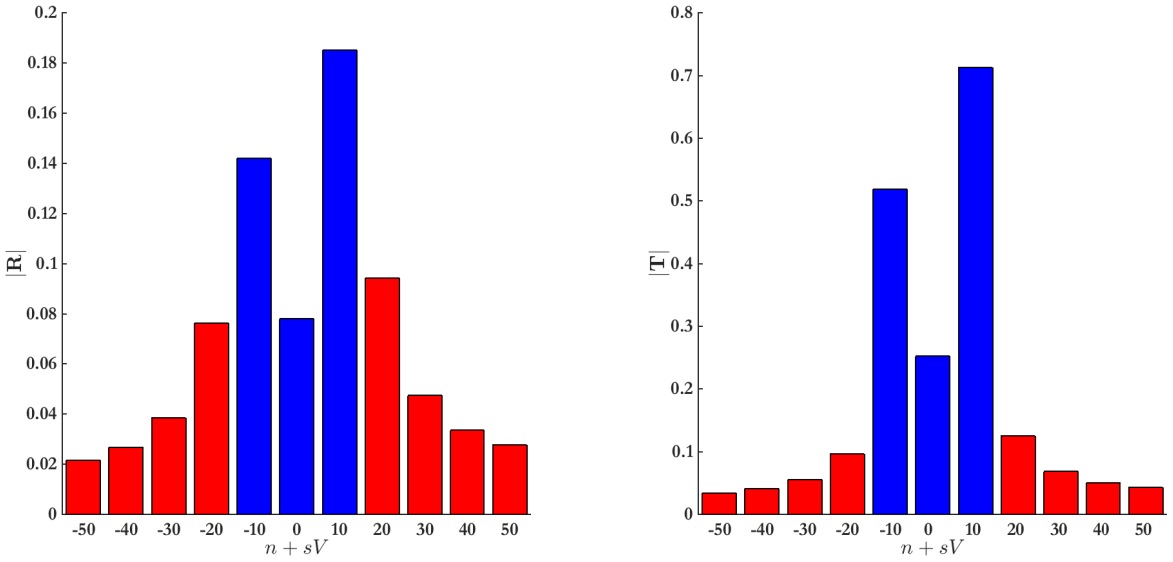


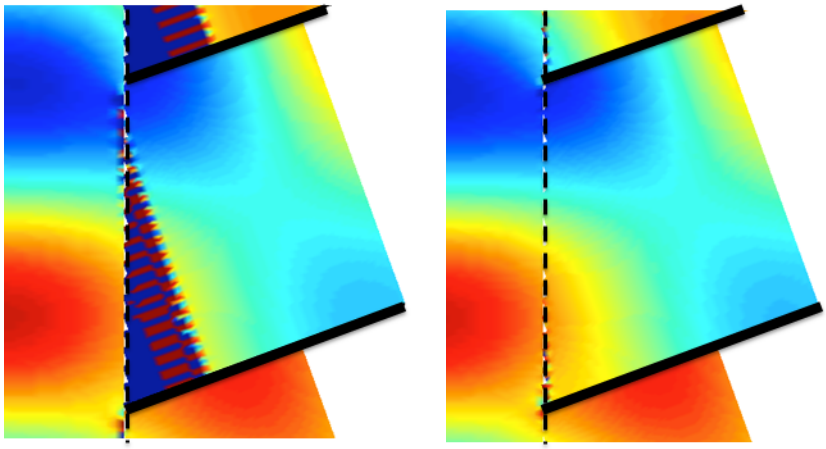
FIGURE 2.42 – Cartographie de pression acoustique instantanée générée par la diffraction d'une onde acoustique incidente d'amplitude de pression unitaire par une grille d'aubes calées ($\Psi = 20°$). L'écoulement se dirige de la gauche vers la droite.



(a) *(b)*

FIGURE 2.43 – Valeurs absolues des coefficients modaux du champ potentiel réfléchi ϕ_r (a) et du champ potentiel ϕ_t (b) en fonction de l'ordre modal $n+sV$. Les barres d'histogramme bleues et rouges indiquent les modes passants et coupés, respectivement.

Cependant, les amplitudes modales diffèrent de manière significative, comme le montrent les Figs 2.41 et 2.43. Dans le cas de la grille d'aubes non calées, le champ acoustique réfléchi montre un motif symétrique dans la direction tangentielle : les amplitudes des modes $n + sV = \pm 10$ sont égales tandis que l'amplitude du mode plan est nulle. Étant donné que les sources acoustiques équivalentes représentant le comportement acoustique de la grille d'aubes sont des dipôles orientés normalement aux aubes, la grille de rayonne pas dans la direction axiale et le mode plan ne peut pas être généré. Au contraire, la Fig. 2.43 montre que la grille d'aubes calées est capable de générer le mode plan dès lors que les dipôles équivalents sont inclinés. Le motif du champ acoustique réfléchi n'est plus symétrique et les modes se répartissent différemment l'énergie acoustique réfléchie, tout comme pour le champs acoustique transmis.



(a) *(b)*

FIGURE 2.44 – Transmission acoustique d'une onde oblique à l'interface de bord d'attaque d'un stator, avec un angle de calage égal à 20° et un écoulement de nombre de Mach $M = 0.3$. Résultats obtenus avec le théorème de Green (a) et la technique de raccordement modal complète (b). Les artéfacts numériques dans le triangle pour la formulation utilisant le théorème de Green sont dûs à l'interpolation des couleurs. [137].

Cette méthode permet de calculer les amplitudes des champs acoustiques diffractés en amont et en aval de la grille d'aubes. Cependant, le champ acoustique ne peut pas être calculé dans les triangles ABC, par conséquent, le saut de pression instationnaire au bord de fuite ne peut être déterminé. La condition de Kutta-Joukowski instationnaire n'est ainsi pas directement applicable avec la technique précisée en Sec. 2.3. Afin de remédier à ce problème, une méthode alternative a été présentée par Roger *et al.* [137] où la base modale d'un canal bidimensionnel est utilisée pour les canaux inter-aubes, mais également pour décrire le champ acoustique dans les triangles ABC. Des premiers résultats pour l'interface de bord d'attaque sont présentés en Fig. 2.44 avec les deux approches et montrent de bons accords. Cependant, d'après les auteurs, la technique de raccordement modal étendue à une interface oblique soulève deux difficultés. D'une part, les bilans énergétiques acoustiques en l'absence d'écoulement sont moins bons qu'à calage nul. D'autre part, les amplitudes des modes coupés décroissent beaucoup moins vite avec l'ordre. Ceci pourraient venir de problèmes de conditionnement matriciel et justifierait des études ultérieures. Une généralisation à l'interface de bord de fuite et l'implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski instationnaire permettront alors de modéliser une grille d'aubes bidimensionnelle dont les aubes sont calées.

2.8 Conclusion

La technique de raccordement modal appliquée au cas de la transparence acoustique d'une grille bidimensionnelle d'aubes non calées en présence d'un écoulement moyen a été décrite dans ce premier chapitre. Au contraire des modèles de profil isolé où le rayonnement acoustique est déterminé à partir du chargement instationnaire sur l'aube, le stator est vu, dans le modèle proposé, comme un réseau de canaux bifurqués, représentatif de l'ensemble des espaces inter-aubes. Cette perspective permet de prendre correctement en compte l'effet de grille du stator. Les champs acoustiques sont décrits dans les différents sous-domaines (en amont, en aval et dans la grille) sous la forme de sommes modales, en accord avec l'équation de Helmholtz et les conditions aux limites du milieu. Enfin, les sections contenant les bords d'attaque et les bords de fuite de la grille sont considérées comme des interfaces où la continuité des fluctuations de pression et de vitesse axiale est imposée. Un système d'équations est alors résolu par inversion matricielle. Les diffractions multiples aux interfaces de bord d'attaque et de bord de fuite sont reproduites par une procédure itérative qui traduit le développement par allers-retours des ondes dans les canaux bifurqués. Une condition de Kutta-Joukowski instationnaire a été implémentée en suivant le modèle de Howe [60], forçant un saut de pression nul aux bords de fuite des aubes. À cause de cet effet, une part de l'énergie acoustique de l'onde incidente est convertie en énergie hydrodynamique par l'échappement tourbillonnaire en aval des aubes. Une comparaison a été effectuée avec le modèle de Glegg [40], étendu par Posson [119], basé sur la technique de Wiener-Hopf et montre l'identité des deux formulations. Une étude paramétrique a été réalisée et illustre notamment l'importance des résonances aux fréquences de coupure, liées à l'apparition de nouveaux modes passants. La prise en compte d'un angle de calage des aubes de la grille est possible grâce à l'application du théorème de Green, ce qui permet de régénérer le mode plan, absent dans une configuration sans angle de calage. Une méthode alternative, sans recours à ce théorème, a été mentionnée et permettra d'implémenter une condition de Kutta-Joukowski instationnaire au bord de fuite, afin de proposer un modèle complet de réponse de grille d'aubes.

CHAPITRE 3

APPROCHE BIDIMENSIONNELLE - GÉNÉRATION ACOUSTIQUE

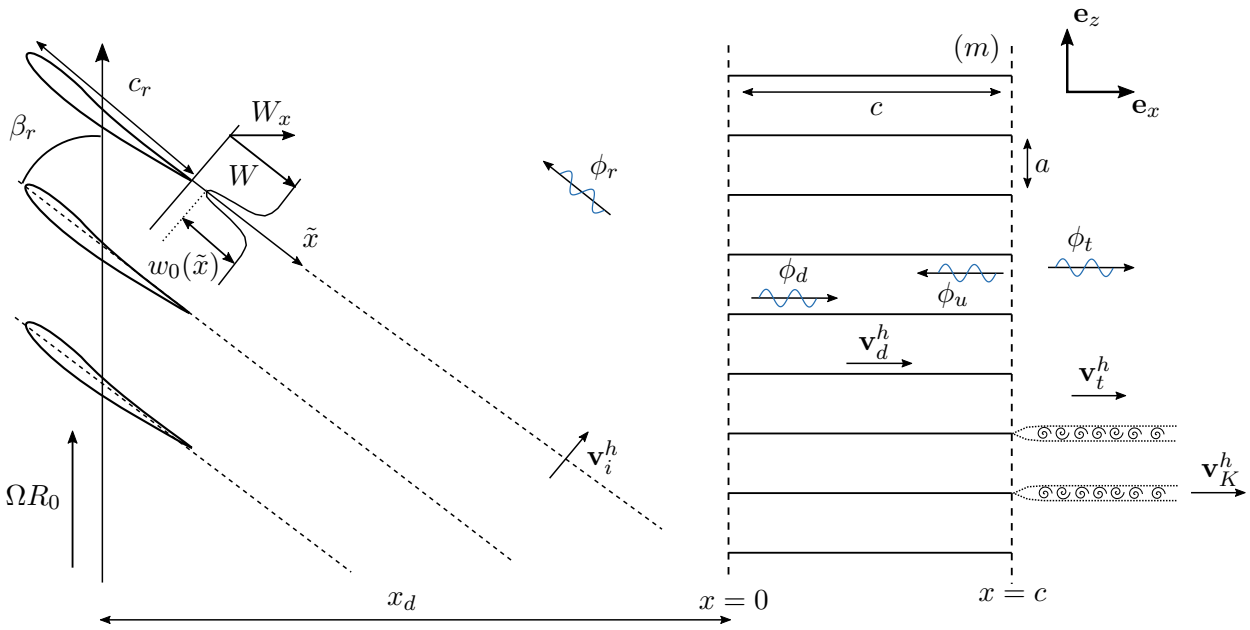


FIGURE 3.1 – Impact de rafales hydrodynamiques issues des pales du rotor sur la grille d'aubes du stator. Représentation bidimensionnelle déroulée.

La génération de bruit par l'impact de rafales hydrodynamiques sur la grille de stator est le second problème étudié (Fig. 3.1), en lien avec la modélisation du bruit d'interaction rotor-stator dans les turbomachines axiales. Le contexte théorique est hérité de l'analyse de Chu et Kovásznay [18] (Sec. 1.4) qui ont montré qu'un gaz se prête à trois mouvements d'oscillations désignés par les termes de modes acoustique, tourbillonnaire et entropique. Étant donné que l'écoulement est considéré homoentropique, l'analyse menée dans cette section est restreinte aux modes acoustique et tourbillonnaire. L'application de la technique de raccordement modal à la génération du bruit d'interaction doit satisfaire les principales caractéristiques de ces modes. Ainsi, le mode acoustique correspond à des perturbations compressibles, irrotationnelles et satisfaisant l'équation des ondes, tandis que le mode tourbillonnaire correspond à des perturbations incompressibles, sans champ de pression associé, à divergence nulle et convectées par l'écoulement moyen. Ces modes d'oscillation restent découplés dans le cadre d'une analyse linéarisée (avec de très petites perturbations) tant que l'écoulement est homogène et dénué de frontières. Par conséquent, chaque mode peut exister indépendamment et peut être décrit sans prendre les autres en compte. Cependant, ces modes sont théoriquement couplés aux frontières physiques. Dans le cas de l'impact de rafales sur une grille de stator, cela se produit aux parois des canaux inter-aubes où la somme des vitesses normales acoustique et tourbillonnaire s'annule. Toutefois, un

point de vue différent bien qu'équivalent est adopté dans la technique de raccordement modal. L'excitation tourbillonnaire est tout d'abord prescrite comme un sillage purement figé et convecté dans tout le domaine, indépendamment du mode acoustique. Ce dernier est défini comme la réponse de la grille d'aubes, de sorte que la condition de rigidité aux parois du stator soit satisfaite. Au lieu d'utiliser cette condition directement, les champs acoustiques et tourbillonnaires sont exprimés comme des sommes de modes dans les canaux de telle manière qu'ils la satisfasse automatiquement. La connexion entre les modes tourbillonnaire et acoustique est déplacée des parois aux interfaces de raccordement, où elle est obtenue avec l'écriture des conditions locales de continuité. Puisque les équations fondamentales de la dynamique des gaz et les conditions aux limites sont satisfaites ainsi, les différentes formulations mathématiques sont rigoureusement équivalentes.

3.1 Modélisation des sillages

La technique de raccordement modal appliquée à la modélisation du bruit d'interaction rotor/stator nécessite comme donnée d'entrée la description périodique du déficit de vitesse des sillages induit par la présence des pales de rotor dans l'écoulement moyen (Fig. 3.2). Le déficit de vitesse des sillages peut être fourni par un calcul CFD U-RANS. Cependant, en raison du coût de calcul, surtout dans les premières phases de conception d'un compresseur, une approche analytique peut être privilégiée. Différents modèles empiriques de sillages, obtenus à la suite de campagnes de mesures, sont disponibles dans la littérature. La pertinence de leur utilisation pour le calcul du bruit d'interaction rotor/stator a été montrée par Roger [134]. Sachant que le sillage diffère s'il provient d'un profil isolé, d'une grille d'aubes fixes ou d'une pale en rotation, le modèle choisi doit être représentatif de la configuration étudiée. Par ailleurs, les lois déduites des mesures concernent des profils modérément chargés et sont donc invalidées dans le cas de régimes d'écoulements partiellement décollés.

3.1.1 Sillage d'une pale de rotor

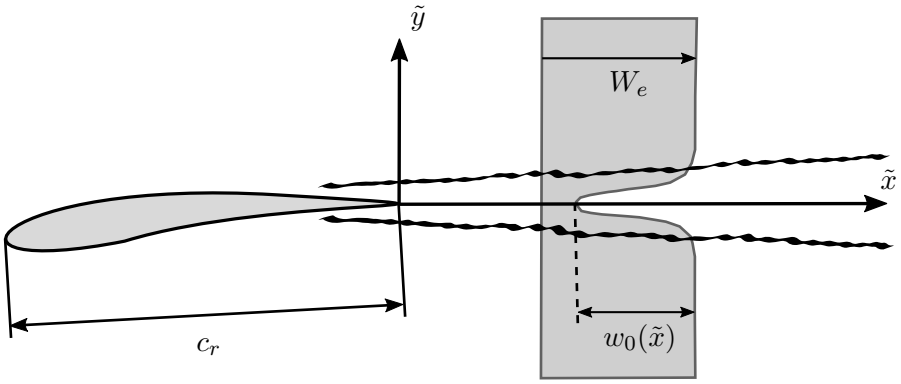


FIGURE 3.2 – Défaut de vitesse dans le sillage d'une pale en rotation.

La forme exacte du sillage d'une pale nécessite la connaissance de nombreux paramètres tels que les coefficients de portance et de trainée, l'angle d'incidence ou la cambrure du profil. Cependant, en respectant les lois de similitude liées à l'écoulement, l'allure générale du sillage peut être simplement décrite sous la forme d'une fonction gaussienne, dont les paramètres évoluent en fonction de la distance au bord de fuite (Fig. 3.3). À la position $\tilde{x}$ le long du sillage, la forme du déficit de vitesse dans le sens transversal $\tilde{y}$ s'écrit :

$$\frac{W(\tilde{y})}{w_0(\tilde{x})} = \exp\left\{-\frac{\tilde{y}^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{3.1}$$

où $w_0(\tilde{x})$ est le défaut de vitesse maximal observé sur l'axe du sillage, $W(\tilde{y})$ la vitesse courante et σ l'écart-type de la fonction. La relation entre demi-largeur à mi-hauteur $b(\tilde{x})$ et écart-type s'écrit :

$$b(\tilde{x}) = \sqrt{2\ln(2)}\sigma.$$

Ainsi, l'équation 3.1 devient :

$$W(\tilde{y}) = w_0(\tilde{x})\ \exp\left\{-\ln(2)\left(\frac{\tilde{y}}{b(\tilde{x})}\right)^2\right\}. \tag{3.2}$$

Cette expression est valide pour le cas d'un profil symétrique faiblement chargé. Le sillage d'un profil chargé est asymétrique et des corrections doivent être prises en compte dans sa modélisation. La dissymétrie du profil induit des épaisseurs de couches limites différentes au bord de fuite, entre celle de l'intrados et celle de l'extrados, cette dernière étant considérée plus importante. Les corrélations de Lieblein [82] donnent une estimation des épaisseurs de couches limites. Deux valeurs corrigées sont utilisées pour $b(\tilde{x})$, $b_1(\tilde{x})$ et $b_2(\tilde{x})$, valables de part et d'autre de la ligne moyenne du sillage.

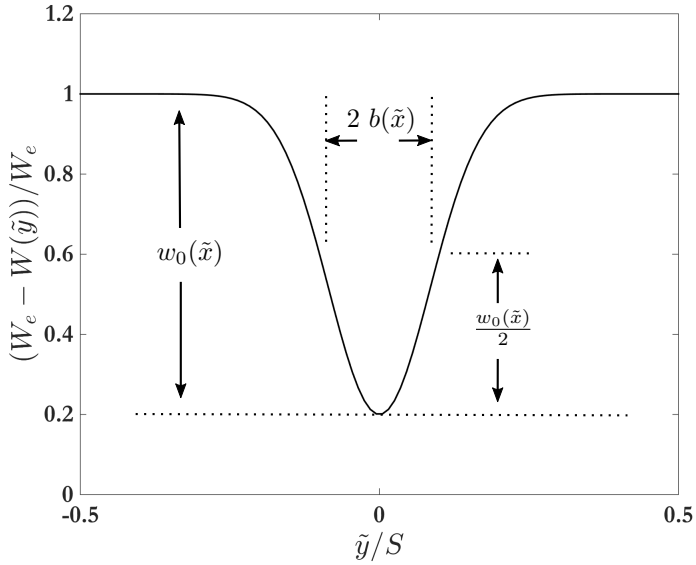


FIGURE 3.3 – Défaut de vitesse dans le sillage d'une pale en rotation.

De manière générale, les valeurs $w_0(\tilde{x})$ et $b(\tilde{x})$ peuvent être obtenues en recourant à des modèles empiriques, dont les principaux sont issus des travaux effectués par l'équipe de Lakshminarayana [125, 130] d'une part et de Philbrick et Topol [117] d'autre part.

Modèle de Philbrick et Topol

Le modèle de Philbrick et Topol donne une évaluation empirique des sillages issus des pales d'une soufflante au sein des turboréacteurs à double flux. Les évolutions du déficit de vitesse maximum et de la demi-largeur du sillage sont données par les équations suivantes :

$$\frac{w_0(\tilde{x})}{W_e} = C_d^{1/4}\ \frac{1.175\ (\tilde{x}/c_r) + 1.286}{10.8\ (\tilde{x}/c_r) + 1}, \quad \frac{b(\tilde{x})}{S} = \frac{1.636\ (\tilde{x}/c_r)\ C_d^{1/8} - 0.0194}{5.576(\tilde{x}/c_r)\ C_d^{1/8} + 1}. \tag{3.3}$$

où C_d est le coefficient de traînée du profil, S l'espacement entre deux pales, c_r la longueur de corde du profil et W_e la vitesse extérieure de l'écoulement.

Modèle de Lakshminarayana

Le modèle de sillages issu des travaux de l'équipe de Lakshminarayana distingue deux zones derrière le profil, en sillage proche (pour des distances au bord de fuite inférieures au quart de la corde) et en sillage lointain, raccordées par interpolation. Les paramètres du sillage suivent l'évolution suivante :

$$\frac{w_0(\tilde{x})}{W_e} = C_d^{1/4} \left[A \left(\frac{\tilde{x}}{c_r} - \frac{\tilde{x_0}}{c_r} \right)^{-\frac{1}{2}} + B \left(\frac{\tilde{x}}{c_r} - \frac{\tilde{x_0}}{c_r} \right)^{-1} \right]. \tag{3.4}$$

Les valeurs des constantes A, B et l'origine virtuelle $\tilde{x_0}/c_r$, obtenues par corrélation avec les données expérimentales, diffèrent si le profil est isolé, placé dans une grille fixe ou dans un rotor. La Tab. 3.1 issue de la référence [130] répertorie les différents cas :

Géométrie	Région	$\tilde{x_0}/c_r$	A	B
Profil isolé	Sillage proche	-0.193	-0.578	0.650
	Sillage lointain	-0.182	0.495	0
Grille	Sillage proche	-0.141	-0.706	0.681
	Sillage lointain	-0.060	0.540	0
Rotor	Sillage proche	-0.160	-0.361	0.463
	Sillage lointain	-0.360	0.271	0

TABLE 3.1 – Valeurs des constantes de corrélations du modèle de Lakshminarayana, pour un profil isolé, placé dans une grille fixe et dans un rotor.

Dans ce travail de thèse, les valeurs des constantes de corrélation dans le cas du rotor sont utilisées. Enfin, la demi-largeur du sillage est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{b(\tilde{x})}{S} = 0.37\ C_d^{1/4} \sqrt{\left(\frac{\tilde{x}}{c_r} - 0.258 \right)}. \tag{3.5}$$

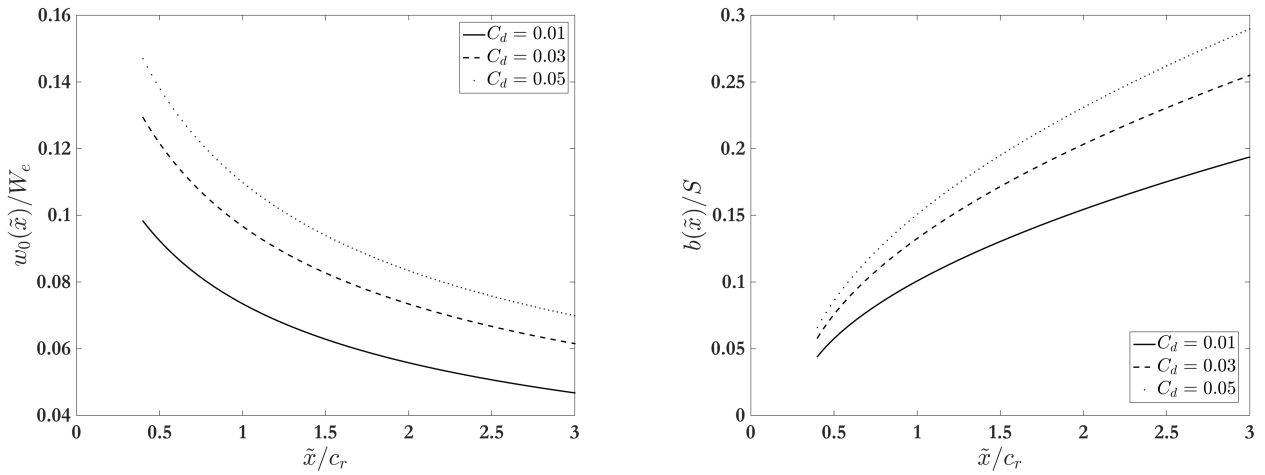


FIGURE 3.4 – Représentation de l'amplitude $w_0(\tilde{x})/W_e$ (a) et de la largeur du sillage $b(\tilde{x})/S$ (b), en sillage lointain pour une pale de rotor selon le modèle de Lakshminarayana (Eq. 3.4), en fonction de la distance au bord de fuite de la pale et du coefficient de trainée C_d.

3.1.2 Champ de vitesse tourbillonnaire généré par un rotor

Du fait de la rotation des pales, identiques et régulièrement espacées, du rotor, les aubes du stator reçoivent l'impact d'une succession périodique de sillages, de période $T = 2\pi/B\Omega$, où B est le nombre de pales de rotor et Ω est la vitesse de rotation du rotor. Ainsi, le déficit de vitesse périodique vu depuis le référentiel du stator est exprimé en répétant le profil du sillage (Eq. 3.2) comme une série infinie de fonctions gaussiennes temporelles :

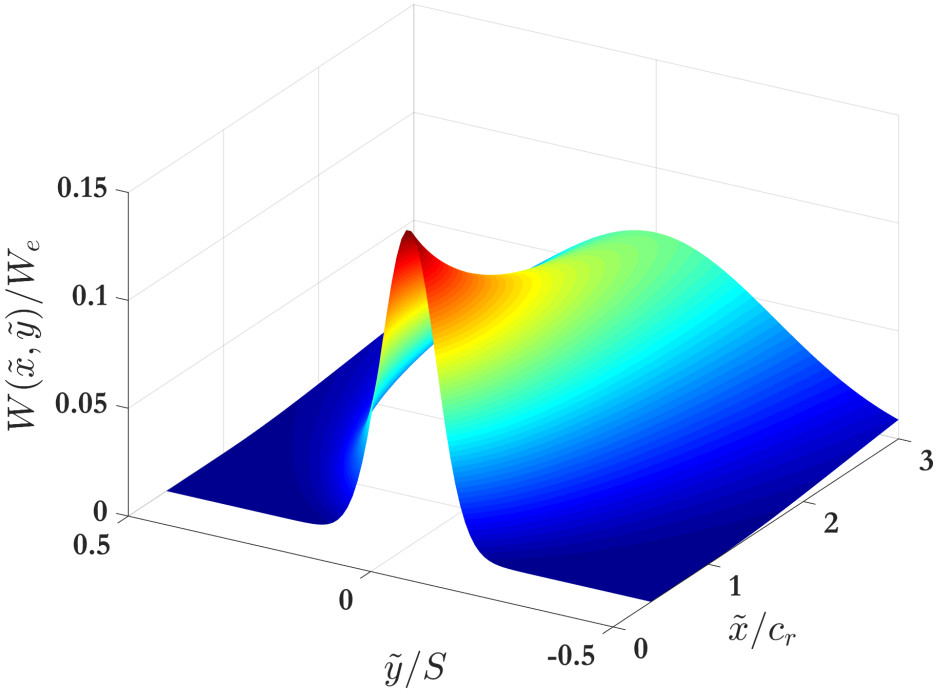


FIGURE 3.5 – Représentation tridimensionnelle d'un sillage issu d'une pale de rotor, d'après le modèle de Lakshminarayana (Eq. 3.4) pour un coefficient de trainée $C_d = 0.05$.

$$w(t) = w_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi\left(\frac{t-kT}{\tau}\right)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, \tag{3.6}$$

où $\xi = \ln(2)$. $\tau = b/(\Omega R_0)$ est la demi-largeur temporelle du sillage. Les valeurs du déficit maximum w_0 et de la demi-largeur b du sillage sont déterminées au bord d'attaque du stator ($\tilde{x} = x_d/\sin\beta_r$, voir Fig. 3.1). Les fréquences de passages de pales (FPP) associées aux harmoniques d'ordre n sont $\omega_n = nB\Omega$. Le spectre des harmoniques de sillage évolue avec une enveloppe gaussienne. Après calculs, détaillés en annexe D, les amplitudes des harmoniques de sillage, illustrées en Fig. 3.6 s'écrivent :

$$w_n = \frac{w_0 B\Omega\tau}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\mathrm{e}^{-(nB\Omega\tau)^2/(4\xi)} = \frac{w_0 Bb}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\mathrm{e}^{-(nBb)^2/(4\xi R_0^2)}. \tag{3.7}$$

Enfin, en prenant en compte la convection de ces perturbations par l'écoulement moyen, la projection axiale du déficit de vitesse des sillages à un instant fixé dans le repère du stator s'écrit :

$$\mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x = \sin(\beta_r) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}, \quad x \leq 0, \quad n \neq 0, \tag{3.8}$$

où :

$$\alpha_n = \frac{nB}{R_0}, \quad k_n^+ = \frac{\omega_n}{W_x} = \frac{nB\Omega}{W_x}.$$

Le terme d'ordre zéro doit être rejeté puisqu'il contribue au chargement stationnaire de l'aube, qui est non rayonnant. Chaque contribution d'ordre n produit du bruit à la fréquence de passage des pales correspondante ω_n. Ces perturbations sont liées au mode tourbillonnaire, ainsi la divergence du champ de vitesse est nulle. Cette propriété permet de connaitre le lien entre la composante axiale et la composante tangentielle des fluctuations de vitesse tourbillonnaire (hydrodynamique), et de déterminer cette dernière, dont la divergence s'écrit :

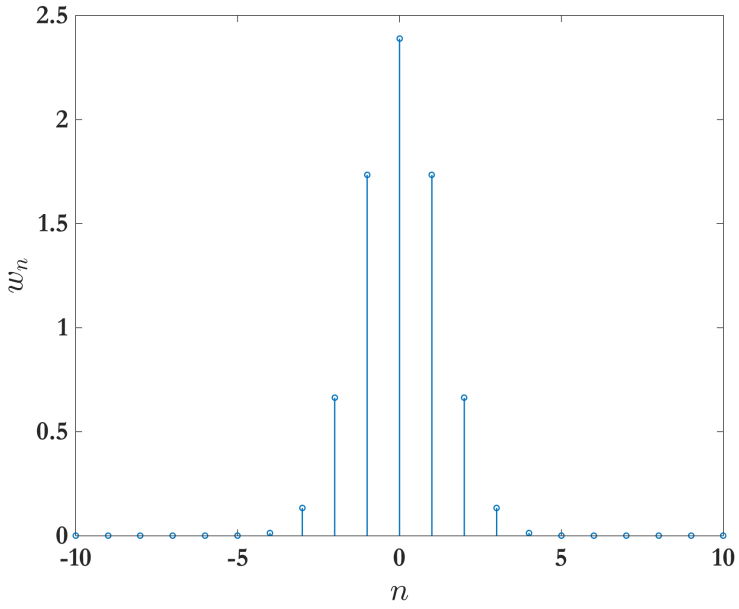


FIGURE 3.6 – Harmoniques de sillages w_n en fonction de l'ordre modal n. Les paramètres du sillage sont déterminés par le modèle de Lakshminarayana pour un coefficient de trainée $C_d = 0.05$, une distance au bord de fuite de la pale égale à $\tilde{x}/c_r = 1$, pour un rotor composé de $B = 17$ pales. Le rayon R_0 de la coupe cylindrique est égal à 0.1 m.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_i^h &= \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0, \\ & \mathrm{i}k_n^+ \sin(\beta_r) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} + \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le champ de vitesse hydrodynamique incident s'écrit :

$$\mathbf{v}_i^h \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \end{array} \right. = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} 1 \\ -k_n^+/\alpha_n \end{array} \right) \sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}, \quad x \leq 0, \quad n \neq 0. \tag{3.9}$$

3.1.3 Champ de vitesse tourbillonnaire dans les canaux inter-aubes

Le prolongement des rafales hydrodynamiques dans les canaux inter-aubes du stator doit être spécifié de telle sorte que la convection axiale par l'écoulement, la condition de rigidité des parois et le déphasage entre deux canaux adjacents soient préservés. Pour un mode incident n quelconque, la composante axiale du champ de vitesse hydrodynamique dans les canaux est écrite comme une somme modale :

$$\mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x = \sum_{q=1}^{+\infty} A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos(\alpha_q(z - ma)) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}, \quad \alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad u = \alpha_n a, \quad 0 \leq x \leq c. \tag{3.10}$$

La divergence nulle du champ de vitesse hydrodynamique mène à la relation :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_d^h &= \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0, \\ & \sum_{q=1}^{+\infty} \mathrm{i}k_n^+ A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos(\alpha_q(z - ma)) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} + \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le champ de vitesse hydrodynamique dans les canaux inter-aubes du stator s'écrit :

$$\mathbf{v}_d^h \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \end{array} \right. = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\mathrm{i}k_n^+/\alpha_q \end{array} \right) A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \left(\begin{array}{c} \cos(\alpha_q(z-ma)) \\ \sin(\alpha_q(z-ma)) \end{array} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}, \quad 0 \leq x \leq c, \quad n \neq 0. \tag{3.11}$$

La détermination de l'amplitude du champ de vitesse hydrodynamique dans la grille de stator A_q^0 nécessite une nouvelle équation de raccordement à l'interface. Dans le cadre d'une analyse linéarisée du comportement dynamique du gaz, l'analyse de Chu et Kovásznay a montré que le rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique (ou vorticité) se conserve (Eq. (1.40)). Par conséquent, la continuité de la vorticité aux interfaces de bord d'attaque et de bord de fuite est utilisée pour fermer le problème. La conservation de la vorticité s'écrit ainsi :

$$\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h = \nabla \wedge \mathbf{v}_d^h, \quad x = 0, \tag{3.12}$$
$$\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h = \nabla \wedge \mathbf{v}_t^h, \quad x = c. \tag{3.13}$$

Dans un cadre bidimensionnel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, le rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y. \tag{3.14}$$

La vorticité du champ de vitesse hydrodynamique incident s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_y &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial x} \right), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}\alpha_n \sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} - \left(-\frac{k_n^+}{\alpha_n} \right) \left(\mathrm{i}k_n^+ \right) \sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{i} \left(\frac{\alpha_n^2 + {k_n^+}^2}{\alpha_n} \right) \sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x}. \end{aligned}$$

Pour un mode n quelconque, le rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique dans la grille de stator s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h \right) \cdot \mathbf{e}_y &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial x} \right), \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} -\alpha_q A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} \sin\left(\alpha_q(z-ma)\right) - \sum_{q=1}^{+\infty} - \left(\mathrm{i}\frac{k_n^+}{\alpha_q} \right) \left(\mathrm{i}k_\mathrm{n}^+ \right) A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} \sin\left(\alpha_q(z-ma)\right), \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \left[\frac{(\mathrm{i}k_n^+)^2}{\alpha_q} - \alpha_q \right] A_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ x} \sin\left(\alpha_q(z-ma)\right). \end{aligned}$$

La continuité du rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique à l'interface de bord d'attaque $(x = 0)$ s'écrit, pour un mode n quelconque et pour un canal de référence $m = 0$:

$$\mathrm{i} \left(\frac{\alpha_n^2 + {k_n^+}^2}{\alpha_n} \right) \sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left[\frac{(\mathrm{i}k_n^+)^2}{\alpha_q} - \alpha_q \right] A_q^0 \sin\left(\alpha_q z\right). \tag{3.15}$$

La résolution de cette équation peut être réalisée grâce à une projection modale afin de supprimer la somme modale du terme de droite. Le produit scalaire utilisé est le suivant :

$$\int_0^a \sin\left(\alpha_\mu z\right) (\bullet) \mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}. \tag{3.16}$$

Les différents calculs liés à cette projection modale sont détaillés en annexe B. L'Eq. (3.17) devient :

$$\mathrm{i}\left(\frac{\alpha_n^2+{k_n^+}^2}{\alpha_n}\right)\sin(\beta_r)w_n\Psi_{\mu,n}=\left[\frac{(\mathrm{i}k_n^+)^2}{\alpha_\mu}-\alpha_\mu\right]A_\mu^0\frac{a}{2}, \tag{3.17}$$

où :

$$\Psi_{\mu,n}=\int_0^a\sin\left(\alpha_\mu z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z}\mathrm{d}z=\begin{cases}\dfrac{\alpha_\mu\left((-1)^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right)}{\alpha_n^2-\alpha_\mu^2}, & \text{si}\quad \alpha_\mu\neq\alpha_n,\\ \dfrac{\mathrm{i}a}{2}(1-\delta_{\mu,0}), & \text{si}\quad \alpha_\mu=\alpha_n.\end{cases} \tag{3.18}$$

Par conséquent, l'amplitude modale du champ de vitesse hydrodynamique dans les canaux inter-aubes vaut :

$$A_q^0=\frac{\mathrm{i}\left(\dfrac{\alpha_n^2+{k_n^+}^2}{\alpha_n}\right)\sin(\beta_r)w_n\Psi_{q,n}}{\left[\dfrac{(\mathrm{i}k_n^+)^2}{\alpha_q}-\alpha_q\right]\dfrac{a}{2}}. \tag{3.19}$$

3.1.4 Champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator

Toujours selon les propriétés de la décomposition de Chu et Kovásznay, les perturbations hydrodynamiques sont identiques en amont et en aval du stator. Par conséquent, le champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator s'écrit :

$$\mathbf{v}_t^h\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{e}_z\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}1\\ -k_n^+/\alpha_n\end{pmatrix}\sin(\beta_r)w_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+x},\quad c\leq x,\quad n\neq 0. \tag{3.20}$$

Cette expression est justifiée mathématiquement par la continuité du rotationnel du champ de vitesse à travers la seconde interface.

3.2 Expressions des champs potentiels acoustiques générés

Quatre champs potentiels acoustiques résultent de l'interaction entre la rafale hydrodynamique et le stator, tous solutions de l'équation de Helmholtz convectée : les champs potentiels diffractés en amont et en aval du stator, toujours notés ϕ_r et ϕ_t par similarité avec les champs acoustiques réfléchis et transmis dans le cas de la transmission acoustique, et ceux se propageant vers l'amont ϕ_u et vers l'aval ϕ_d dans les canaux inter-aubes. Bien que la forme modale de ces champs potentiels demeure identique au cas de la diffraction d'une onde acoustique plane par le stator, quelques quantités sont modifiées dans le cas de l'impact de rafales hydrodynamiques. Pour un mode n quelconque, les champs potentiels ϕ_r et ϕ_t en amont et en aval du stator, respectivement, s'écrivent :

$$\begin{pmatrix}\phi_r\\ \phi_t\end{pmatrix}=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}R_s\\ T_s\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^- x}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^+(x-c)}\end{pmatrix},\quad\begin{Bmatrix}x\leq 0\\ c\leq x\end{Bmatrix}, \tag{3.21}$$

où :

$$\alpha_s=\frac{nB+sV}{R_0},\quad k_s^\pm=\frac{-Mk_n\pm\overline{k_s}}{\beta^2},\quad \overline{k_s}=\sqrt{k_n^2-\beta^2\alpha_s^2},\quad k_n=\frac{nB\Omega}{c_0}.$$

En accord avec le principe de trace, les champs acoustiques en amont et en aval du stator résultent de la modulation des perturbations incidentes par la périodicité des V aubes, menant au critère de Tyler et Sofrin [162]. Les potentiels des ondes se propageant en aval ϕ_d^m et en amont ϕ_u^m dans un canal d'indice m s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_d^m \\ \phi_u^m \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} D_q^0 \\ U_q^0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cos\left(\alpha_q (z - ma)\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^- (x-c)} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \le x \le c, \\ m\ a < z < (1+m)\ a. \end{cases} \tag{3.22}$$

où :

$$\alpha_q = \frac{q\pi}{a}, \quad k_q^{\pm} = \frac{-Mk_n \pm \overline{k_q}}{\beta^2}, \quad \overline{k_q} = \sqrt{k_n^2 - \beta^2 \alpha_q^2}, \quad u = \alpha_n a = \frac{2\pi n B}{V}.$$

3.3 Équations de raccordement

La continuité de la pression et de la vitesse axiale totale, imposée aux interfaces du stator (en $x = 0$ et $x = c$) permet d'écrire deux ensembles d'équations de raccordement. Le vecteur $\mathbf{\Gamma}_\gamma$ défini par l'Eq. (2.107) est employé pour écrire les équations de raccordement (2.108, 2.109, 2.91). De plus, la procédure itérative décrite en Sec. 2.4.3 est utilisée de la même manière que pour la transmission acoustique.

3.3.1 Raccordement modal sur l'interface de bord d'attaque

À l'interface de bord d'attaque du stator ($x = 0$) et pour un canal de référence ($m = 0$), ces équations de raccordement s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} (k_n - k_s^- M) R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left[(k_n - k_q^+ M) D_q^0 + (k_n - k_q^- M) U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c} \right] \cos(\alpha_q z). \tag{3.23}$$

2. Continuité de la vitesse axiale totale :

$$\sin(\beta_r) w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}k_s^-) R_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left[(\mathrm{i}k_q^+) D_q^0 + (\mathrm{i}k_q^-) U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c} + A_q^0 (1 - \delta_{q,0}) \right] \cos(\alpha_q z). \tag{3.24}$$

Bien que les deux bases modales de projection puissent être utilisées, seule la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle est employée. Après l'application du projecteur défini par l'Eq. (2.49) et une troncature modale, le système linéaire peut être réécrit sous la forme d'une équation matricielle synthétique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p^1 & \mathbf{F}_p^1 \\ \underline{\mathbf{E}_v^1} & \underline{\mathbf{F}_v^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{D}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p^1 \\ \mathbf{H}_v^1 \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

où :

$$E_p^1(s,s) = (k - k_s^- M) a, \qquad F_p^1(s,q) = -(k - k_q^+ M) \varphi_{s,q}, \qquad H_p^1(s,1) = \sum_{q=0}^{+\infty} (k_n - k_q^- M) U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c} \varphi_{s,q},$$

$$E_v^1(s,s) = (\mathrm{i}k_s^-) a, \qquad F_p^1(s,q) = -(\mathrm{i}k_q^+) \varphi_{s,q},$$

$$H_v(s,1) = \sum_{q=0}^{N_q - 1} \left[(\mathrm{i}k_q^-) U_q^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_q^- c} + A_q^0 (1 - \delta_{q,0}) \right] \varphi_{s,q} - a \sin(\beta_r) w_n \delta_{s,0}.$$

Dans la phase d'initialisation de la procédure itérative ($g = 0$), le vecteur des amplitudes modales des ondes acoustiques se propageant vers l'amont dans les canaux inter-aubes $\mathbf{U}^0$ est nul.

3.3.2 Raccordement modal sur l'interface de bord de fuite

À l'interface de bord de fuite du stator ($x = c$) et pour un canal de référence ($m = 0$), les équations de raccordement s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left[(k_n - k_q^+ M)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + (k_n - k_q^- M)U_q^0\right]\cos(\alpha_q z) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(k_n - k_s^+ M)T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}. \tag{3.26}$$

2. Continuité de la vitesse axiale totale :

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{+\infty}\left[(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + (\mathrm{i}k_q^-)U_q^0 + A_q^0(1-\delta_{q,0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ c}\right]\cos(\alpha_q z) &= \sin(\beta_r)w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n z} \\ &+ \sum_{s=-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}k_s^+)T_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_s z}. \end{aligned}\tag{3.27}$$

Après projection (Eq. (2.49)) et troncature modales, l'équation matricielle équivalente s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_p^2 & \mathbf{F}_p^2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E}_v^2 & \mathbf{F}_v^2 & \mathbf{G}_v^K \\ \hline \mathbf{E}_K & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mathbf{U}^0 \\ \mathbf{T} \\ \Omega_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{H}_p^2 \\ \mathbf{H}_v^2 \\ H_K \end{array}\right), \tag{3.28}$$

où :

$$E_p^2(s,q) = (k - k_q^- M)\varphi_{s,q}, \qquad F_p^2(s,s) = -(k - k_s^+ M)a, \qquad H_p^2(s,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}(k - k_q^+ M)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{s,q},$$

$$E_v^2(s,q) = (\mathrm{i}k_q^-)\varphi_{s,q}, \qquad F_p^2(s,s) = -(\mathrm{i}k_s^+)a, \qquad H_v^2(s,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}\varphi_{s,q},$$

$$H_v(s,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}\left[(\mathrm{i}k_q^+)D_q^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c} + A_q^0(1-\delta_{q,0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ c}\right]\varphi_{s,q} + a\sin(\beta_r)w_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^+ c}\delta_{s,0},$$

$$E_K(1,q) = (k - k_q^- M)(1 - (-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}), \qquad G_v^K(s,1) = -\mathrm{i}\frac{\alpha_s}{\alpha_s^2 + (k_n^+)^2},$$

$$H_K(1,1) = -\sum_{q=0}^{N_q-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q^+ c}(1 - (-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})(k - k_q^+ M)D_q^0.$$

3.4 Validation du modèle

Afin de valider le modèle de génération de bruit par l'impact de perturbations hydrodynamiques sur une grille d'aubes bidimensionnelle à l'aide de la technique de raccordement modal, une comparaison est réalisée sur une configuration classique de la littérature avec le modèle analytique de Posson *et al.* [123] et le modèle semi-analytique de Smith [152].

3.4.1 Définition du cas-test

La génération de bruit par l'impact de perturbations hydrodynamiques sur une grille d'aubes bidimensionnelle est validée par le cas-test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997) (Fig. 3.7). Ce cas-test a reçu les contributions de Lockard et Morris [87] (calcul parallèle), Tam *et al.* [158] (schéma DRP (*Dispersion-Relation-Preserving*)), Hu et

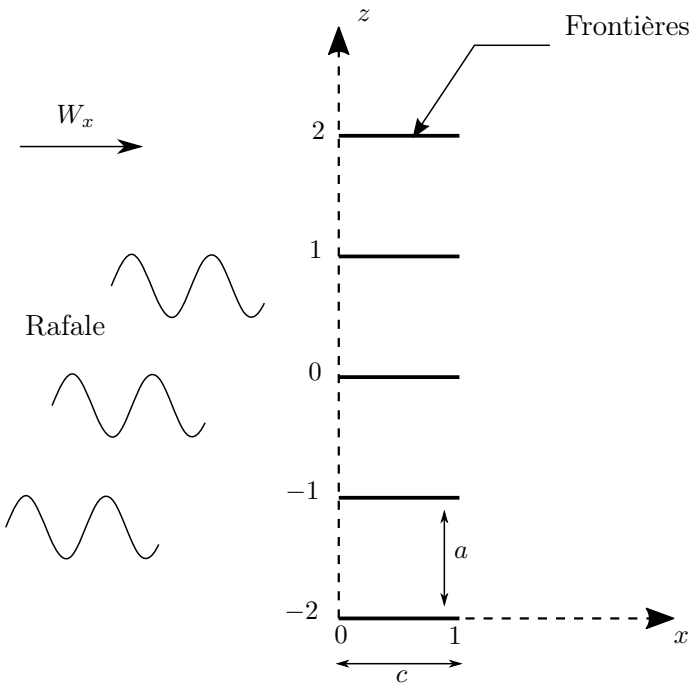


FIGURE 3.7 – Cas-test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997) - section bruit de turbomachines

Manthey [61] (application des PML (*Perfectly Matched Layer*)) et Hall [47, 48] (formulation variationnelle de la méthode des éléments finis). Cette configuration a également été utilisée par Posson [119] pour valider la fonction de réponse de grille rectilinéaire basée sur la technique de Wiener-Hopf. Plus récemment, Durand et Hixon [28] ont abordé à nouveau cette configuration pour valider le code du Glenn Research Center de la NASA baptisé *Broadband Aeroacoustic Stator Simulation* (BASS).

La Fig. 3.7 illustre la grille du cas-test, composée de $V = 4$ plaques planes, rigides et sans épaisseur. L'écoulement moyen est uniforme, axial et de nombre de Mach $M = W_x/c_0 = 0.5$. La solidité c/a est égale à 1. La rafale hydrodynamique incidente, convectée par l'écoulement moyen, est définie par sa vitesse axiale :

$$\mathbf{v}_i^h(x,z)\cdot\mathbf{e}_x = w_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z + k_x x - \omega t)}\,, \tag{3.29}$$

où $w_0 = 0.01$, $k_z = u/a$ et $k_x = \omega/W_x$. Les variables sont adimensionnées, par rapport à c comme échelle de longueur et par rapport à c/W_x comme échelle de temps. Elles sont désignées par une barre et l'Eq. (3.29) devient

$$\mathbf{v}_i^h(x,z)\cdot\mathbf{e}_x = w_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u\bar{z} + \overline{k_x}\bar{x} - \overline{k_x}\bar{t})}, \quad \overline{k_x} = \frac{\omega c}{W_x}\,. \tag{3.30}$$

Deux configurations sont considérées : un cas basse fréquence avec $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$ et un cas haute fréquence avec $u = \overline{k_x} = 13\pi/2$. En raison de la 2π-périodicité azimutale, ces deux cas correspondent à l'impact de rafales hydrodynamiques composées de 5 et 13 lobes, respectivement.

3.4.2 Résultats

Les Figs. 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 rendent compte de la pression instantanée et des amplitudes modales des champs acoustiques diffractés en amont (ϕ_r) et en aval (ϕ_t) du stator lorsque la grille d'aubes subit l'impact d'une rafale hydrodynamique, pour les cas basse et haute fréquences. Dans le cas basse fréquence ($\overline{k_x} = 5\pi/2$), seul le mode $n + sV = 1$ est passant. L'écoulement moyen comprime et étire les fronts d'ondes des ondes se propageant en amont et en aval, respectivement. Pour le cas haute fréquence ($\overline{k_x} = 13\pi/2$), quatre modes sont passants. Tandis que le mode $n + sV = -7$ domine le champ

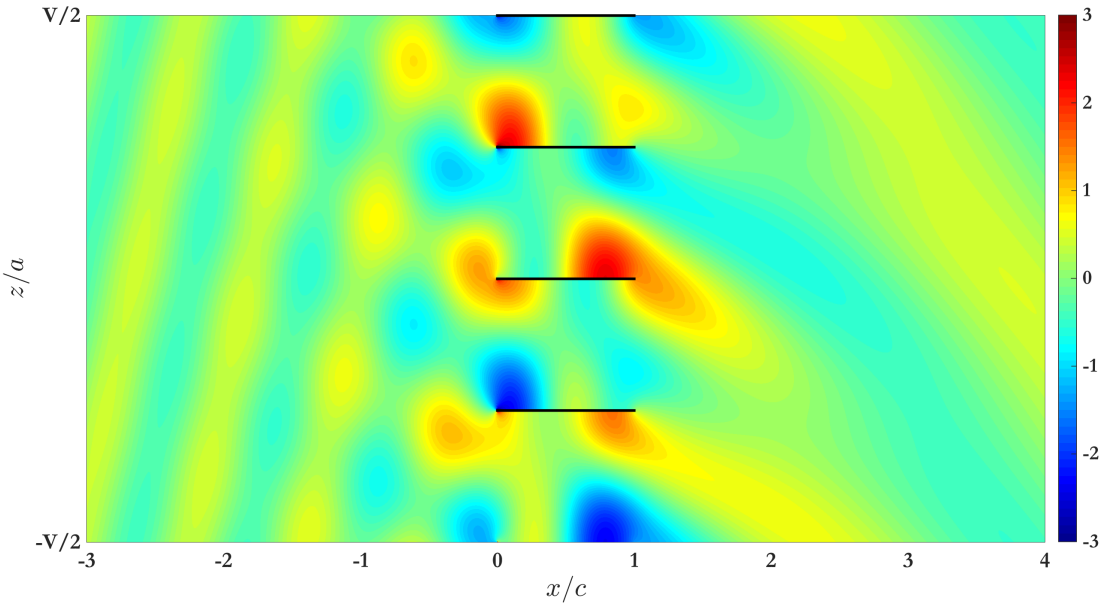
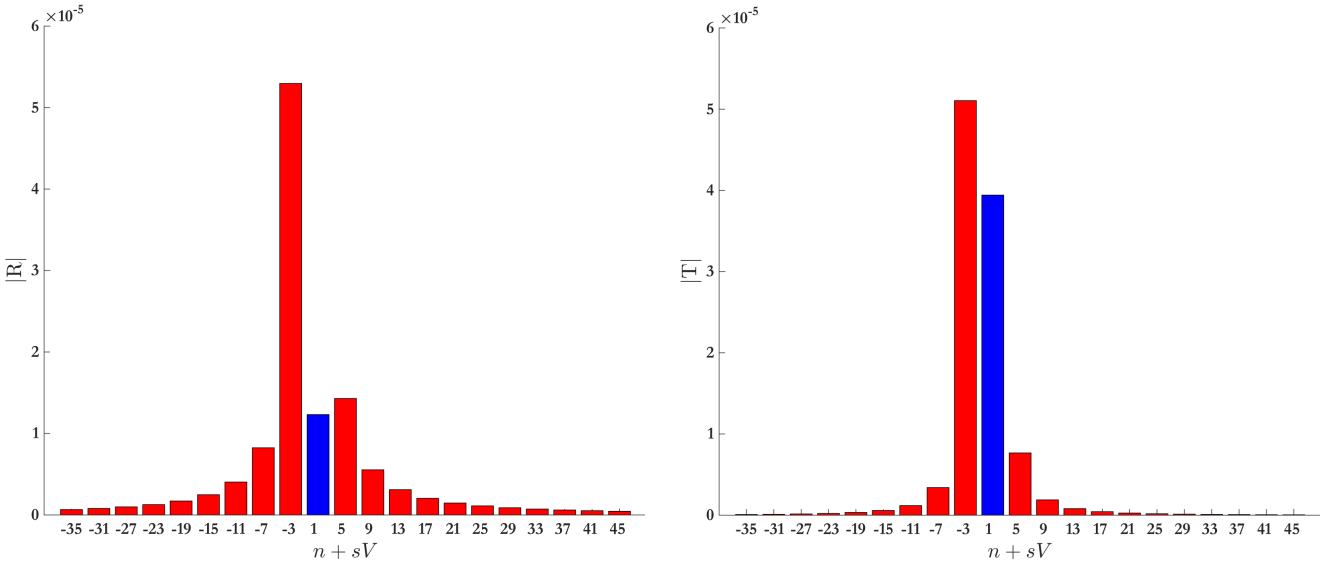


FIGURE 3.8 – Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test basse fréquence : $\overline{k_x} = 5\pi/2$.

de pression en amont du stator, l'énergie acoustique est davantage répartie sur les quatre modes en aval, comme l'illustrent les Figs. 3.11-a et -b. Les modes dominants sont plus facilement identifiés par le nombre de fronts d'ondes dans les domaines en amont du stator sur les Figs. 3.8 et 3.10.



(a) (b)

FIGURE 3.9 – Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test basse fréquence : $\overline{k_x} = 5\pi/2$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement.

Les champs de pression acoustique sont identiques à ceux d'études antérieures, par exemple Durand et Hixon [28], pour les deux cas-test. Les parties réelle et imaginaire du saut de pression adimensionné sur une aube de référence (à $z = 0$) $\mathcal{L} = -\Delta p/(\rho_0 w_0 W_x)$ sont tracées en Fig. 3.12. Les résultats issus

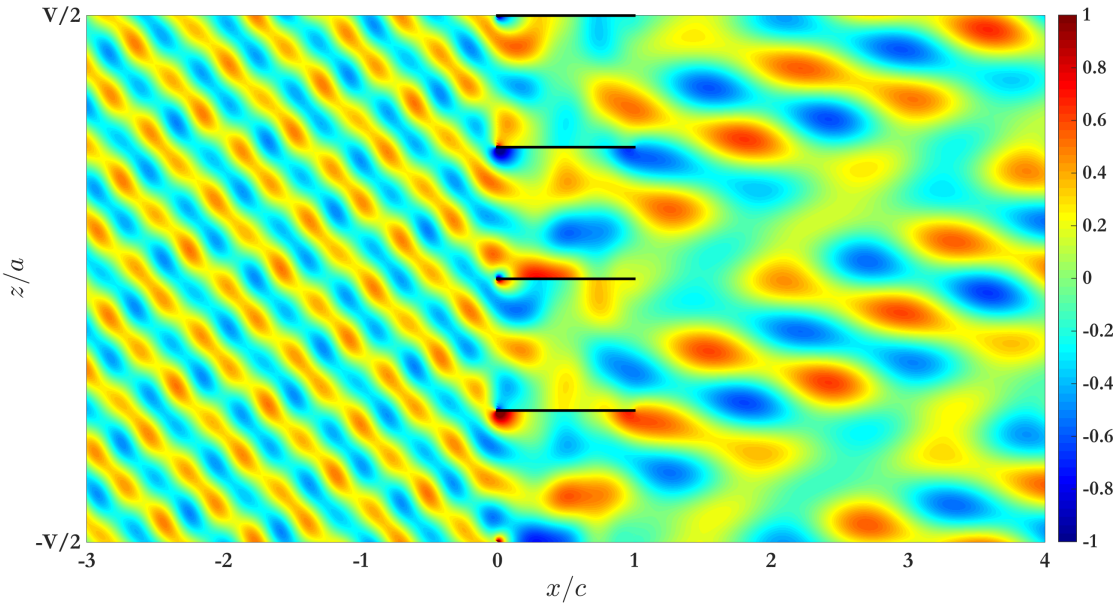
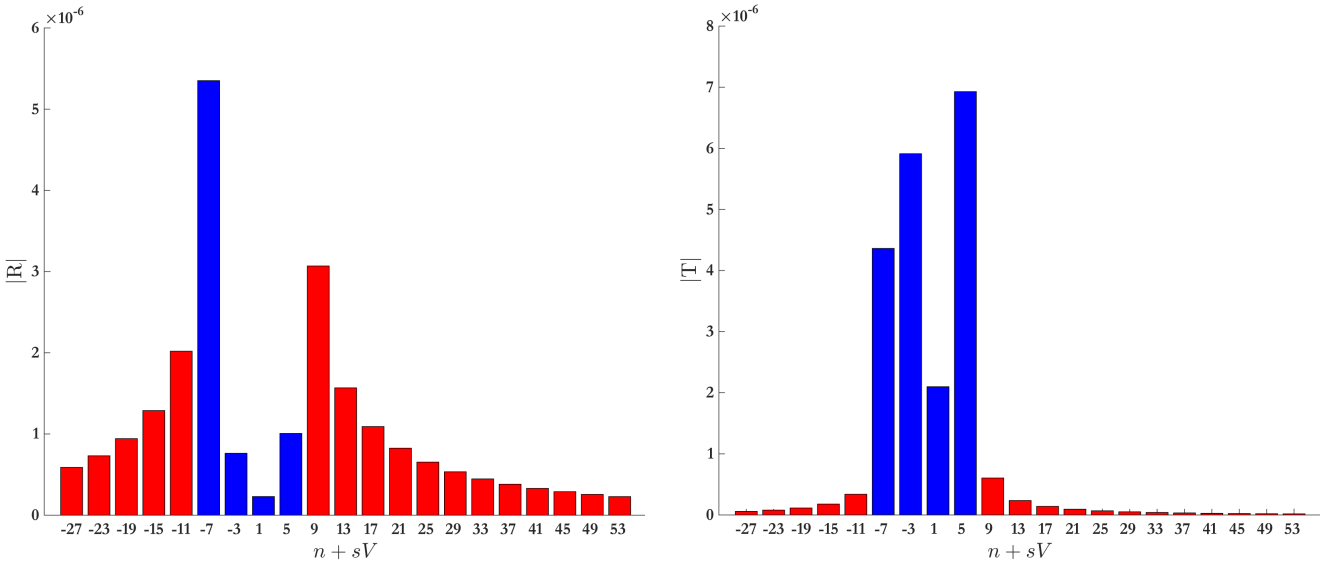


FIGURE 3.10 – Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test haute fréquence : $\overline{k_x} = 13\pi/2$).



(a) (b)

FIGURE 3.11 – Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact d'une rafale hydrodynamique sur une grille d'aubes. Cas-test haute fréquence : $\overline{k_x} = 13\pi/2$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement.

de la technique de raccordement modal sont comparés à ceux calculés avec la technique de Wiener-Hopf [119]. Ils sont également comparés au modèle de Smith [152], implémenté par Whitehead [166] dans le code LINSUB et appliqué spécifiquement à cette configuration par Hall [47]. Un très bon accord est trouvé entre les trois modèles, que ce soit pour le cas basse fréquence (Fig. 3.12-a : $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$) ou pour le cas haute fréquence (Fig. 3.12-b : $u = \overline{k_x} = 13\pi/2$).

La vorticité $\nabla \wedge \mathbf{v}^h$ des perturbations hydrodynamiques est illustrée en Fig. 3.13 pour le cas-test $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$ pour vérifier la continuité de la rafale dans tout le domaine. Il est visible que les fronts

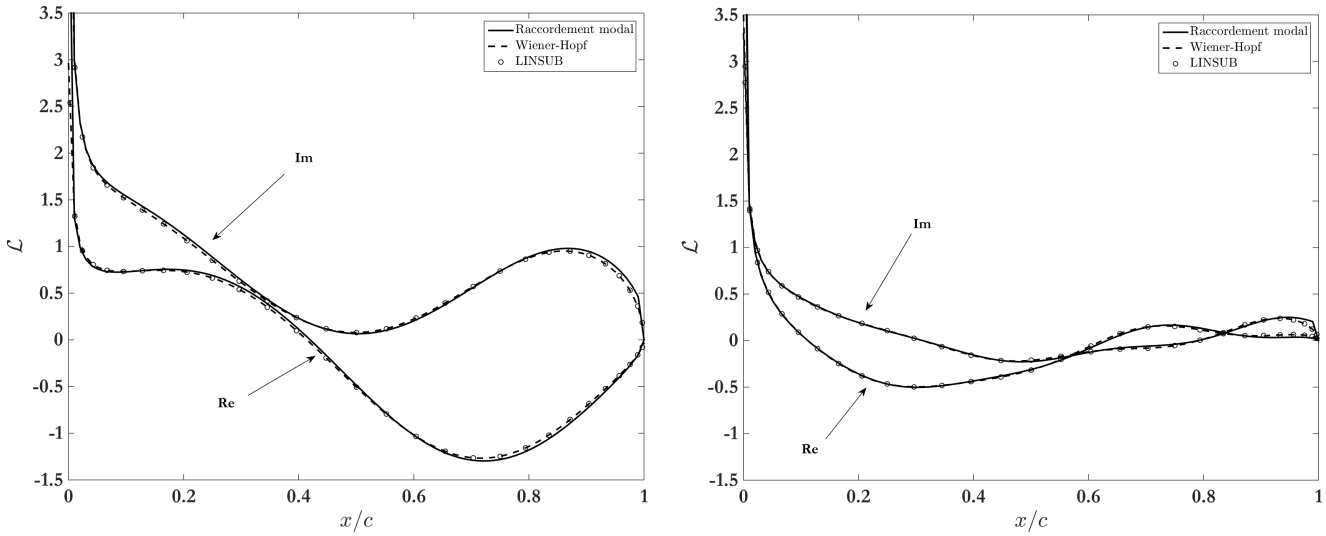


FIGURE 3.12 – Parties réelle et imaginaire du saut de pression adimensionné sur une aube de référence pour le cas basse fréquence $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$ (a) et haute fréquence $u = \overline{k_x} = 13\pi/2$ (b) issues de la technique de raccordement modal (ligne continue), la technique de Wiener-Hopf (ligne pointillée) et le code LINSUB (symboles).

d'ondes obliques sont uniformément reproduits en dépit des expressions différentes de la rafale dans les différents sous-domaines. Le profil de la vorticité dans la direction de l'écoulement à $z/a = 0.5$ est montré en Fig. 3.14-a, où le motif sinusoïdal attendu est parfaitement synthétisé. Finalement, des profils de la vorticité selon les expressions de la rafale dans le domaine en amont du stator (v_i^h) et dans les canaux inter-aubes (v_d^h) le long de l'interface de bord d'attaque ($x = 0$) sont comparés en Fig 3.14-b. L'expression modale de v_d^h montre des discontinuités locales dans le voisinage immédiat des plaques, qui n'ont aucune conséquence loin des bords.

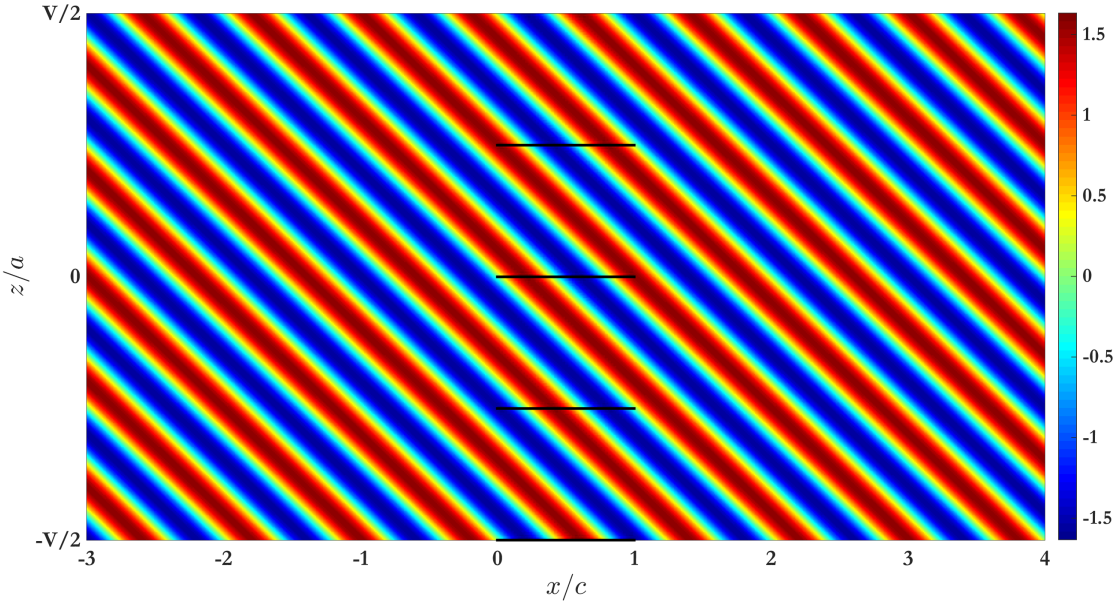
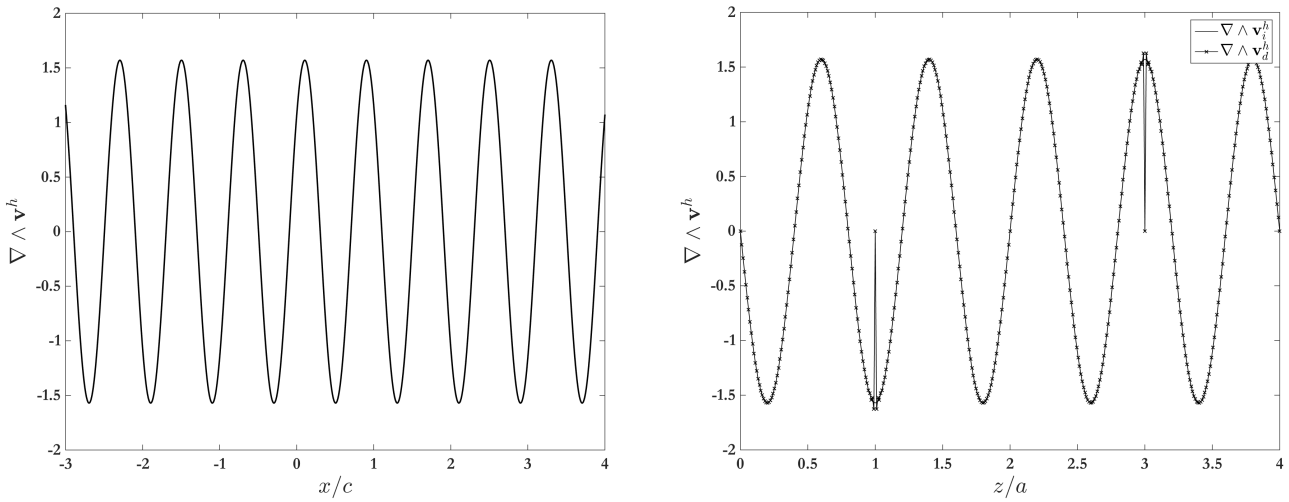


FIGURE 3.13 – Champ de vorticité instantané de la rafale prescrite dans la technique de raccordement modal pour $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$.



(a) (b)

FIGURE 3.14 – Profils du champ de vorticité de la rafale prescrite dans la technique de raccordement modal pour $u = \overline{k_x} = 5\pi/2$, dans la direction de l'écoulement à $z/a = 0.5$ (a) et le long de l'interface de bord d'attaque ($x = 0$) (b).

3.5 Bruit d'interaction rotor/stator

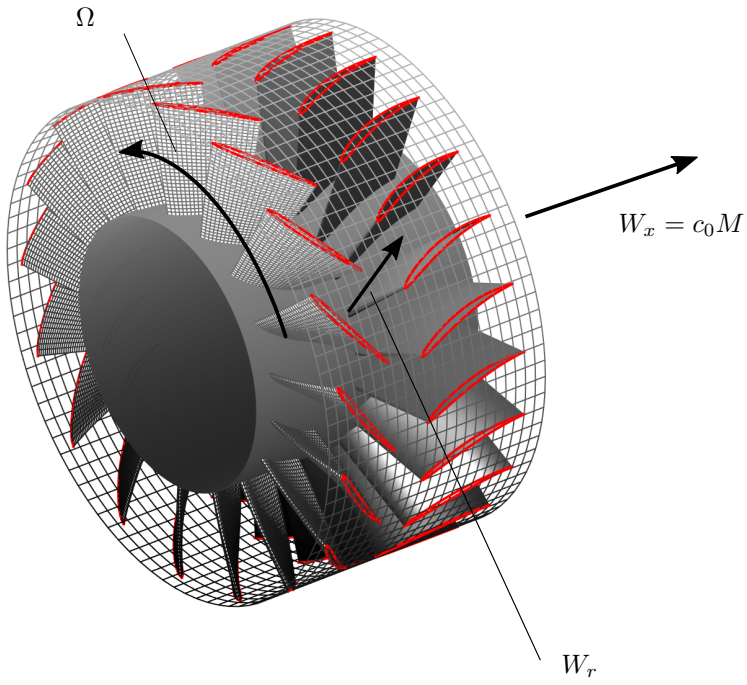


FIGURE 3.15 – Étage d'une turbomachine axiale utilisé dans les systèmes de conditionnement d'air en aéronautique, composé d'un rotor tournant dans le sens anti-horaire et d'un stator.

Le bruit tonal d'interaction rotor-stator est étudié dans cette section sur une configuration représentative du banc SEMAFOR (Fig. 3.15). Le ventilateur est constitué d'un rotor avec $B = 17$ pales et d'un stator composé de $V = 23$ aubes. Les calculs sont menés pour un rayon de coupe cylindrique arbitraire R_0 compris entres les rayons au moyeu et au carter R_m et R_c, respectivement. La solidité est égale à $c/a = 1.25$, le nombre de Mach axial est $M = 0.06$ et le nombre de Mach tangentiel des pales de rotor est $M_t = \Omega R_0/c_0 = 0.3$. Le ventilateur est conçu de manière que les deux premières raies à la fréquence de passage des pales (FPP) et son première harmonique (2FPP) soient coupées. Cela

signifie que tous les modes acoustiques générés à ces fréquences sont atténués par le conduit. La raie correspondant à la deuxième harmonique (3FPP) est constituée de modes générés dont un est passant. Ces trois fréquences, correspondant aux trois premières composantes de Fourier ($n \in [1, 2, 3]$) des rafales hydrodynamiques incidentes, sont étudiées dans cette section. Ce cas test vise principalement à évaluer la reproduction, par le modèle, des propriétés de coupure de la grille d'aubes.

3.5.1 Première fréquence de passage des pales

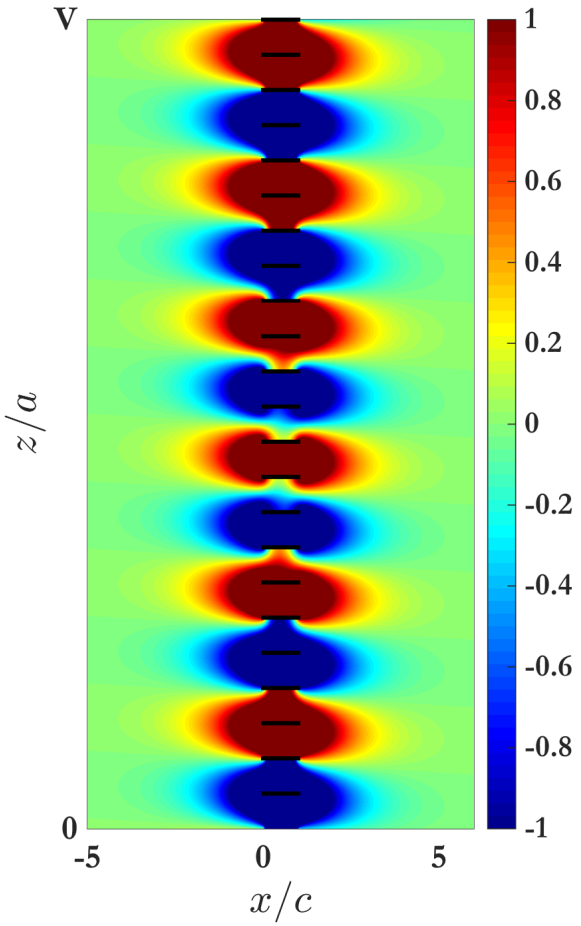


FIGURE 3.16 – Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la première FPP ($n = 1$).

Le champ de pression instantané à la fréquence de passage des pales est montré en Fig. 3.16 dans un échelle arbitraire. Le champ hydrodynamique issu des sillages, qui est convecté vers le haut de la figure selon les conventions de la Fig. 3.1, n'est pas visible car il n'a pas de trace en pression. À la FPP, l'interaction rotor-stator génère le mode dominant $n_s = nB \pm sV = 17 - 23 = -6$ prévu par la règle de Tyler et Sofrin et confirmé par l'histogramme en Fig. 3.17. Ce mode est contra-rotatif, ce qui signifie que le nombre de Mach de phase tangentiel $-17M_t/6$ est orienté vers le bas de la figure. Dans ce cas, la vitesse de phase totale du mode est subsonique, ce qui peut s'écrire $|nBM_t/(nB \pm sV)| < \beta$ et il n'y a pas de propagation en aval ni en amont du stator. L'amplitude des modes s'atténue exponentiellement depuis les interfaces, avec des pseudo-fronts d'ondes presque alignés avec l'axe. Cela correspond à un mode coupé (barre rouge en Fig. 3.17). Les modes coupés ne transportent pas d'énergie acoustique mais jouent un rôle important dans la continuité locale du champ acoustique. Le long d'une distance axiale δx, l'amortissement des modes coupés τ_s s'écrit :

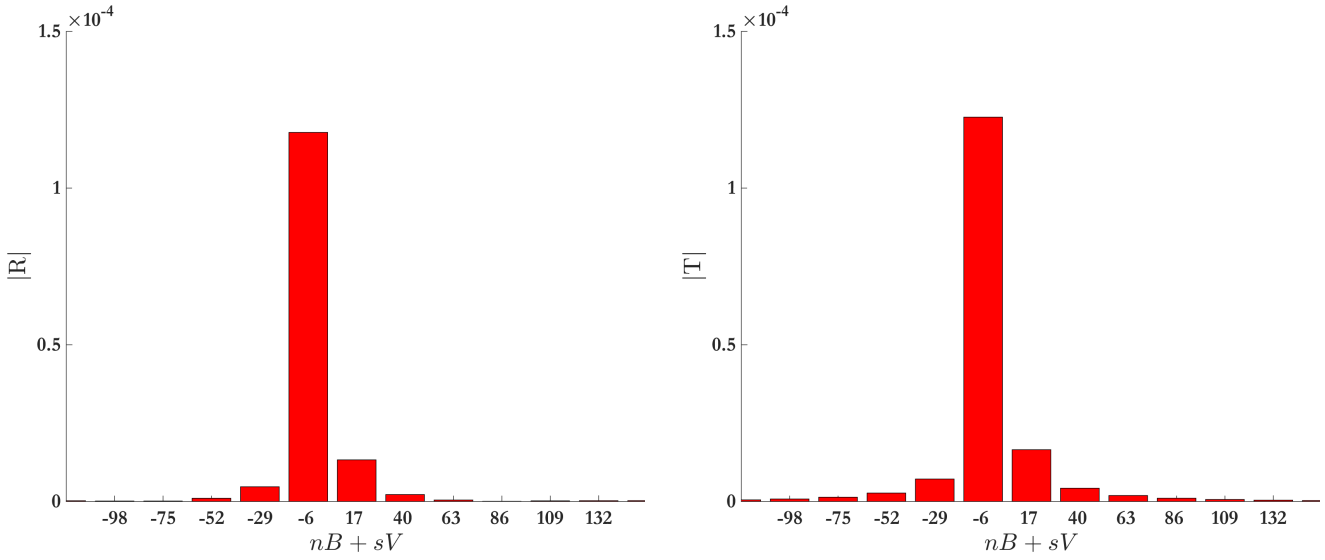


FIGURE 3.17 – Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la première FPP ($n = 1$). Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont coupés.

$$\tau_s = \exp\left\{-\frac{1}{\beta^2}\sqrt{\beta^2\alpha_s^2 - k_n^2}\;\delta x\right\}.$$

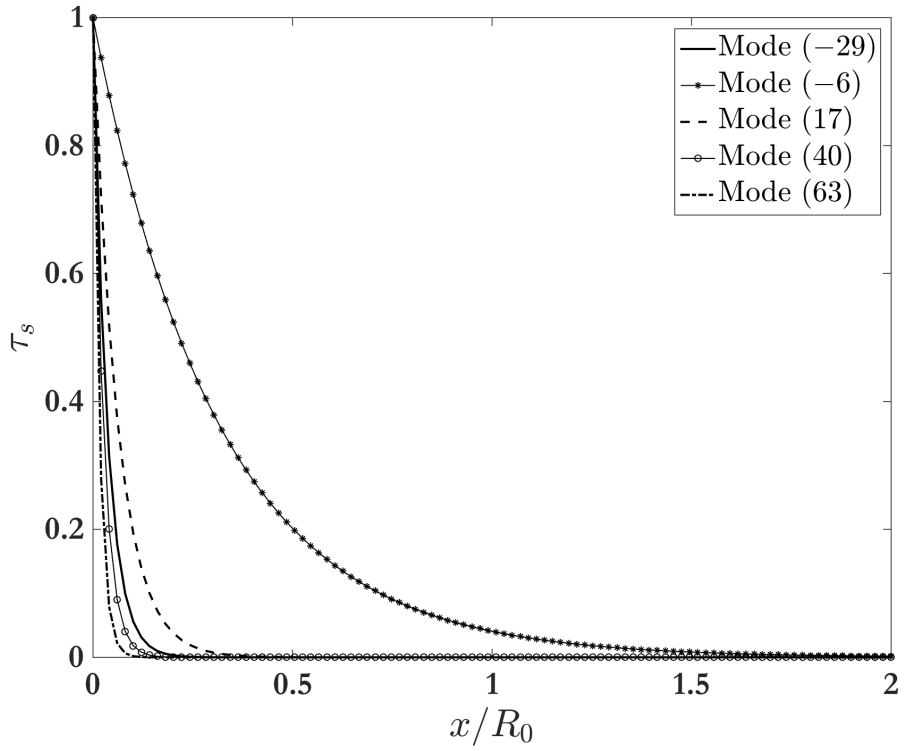


FIGURE 3.18 – Atténuation τ_s en fonction de la distance axiale et de l'ordre modal $nB + sV$.

L'atténuation est d'autant plus importante que l'ordre modal azimutal augmente (Fig. 3.18), ce qui explique que seul le mode dominant $n_s = -6$ est visible en Fig. 3.16. Le rapport entre la longueur d'onde acoustique et la longueur de corde d'une aube du stator est $\lambda_n/c = 3.64$ ($\lambda_n = 2\pi/k_n$), le

rapport de la longueur d'onde à la largeur du canal inter-aubes est $\lambda_n/a = 4.54$ et le nombre de Helmholtz est $k_n R_0 = 5.07$. Par conséquent, les canaux inter-aubes sont acoustiquement compacts dans ce cas. De plus, seul le mode plan ($q = 0$) est passant dans les canaux inter-aubes. Un mouvement d'allers et retours se développe dans les canaux entre les deux interfaces, sans perte d'énergie exceptée celle associée à la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. Au regard de la géométrie annulaire originale, ceci peut être considéré comme un mode tournant piégé dans la grille.

3.5.2 Deuxième fréquence de passage des pales

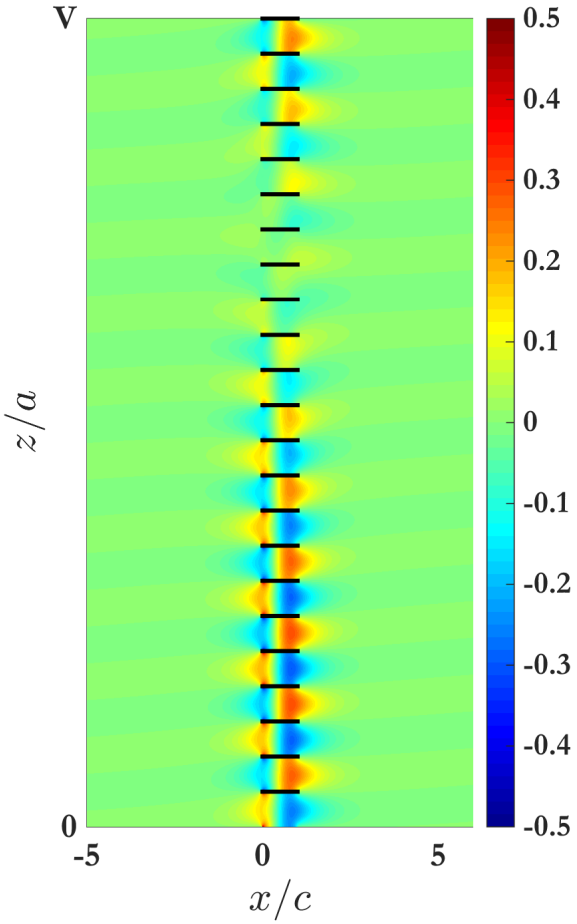
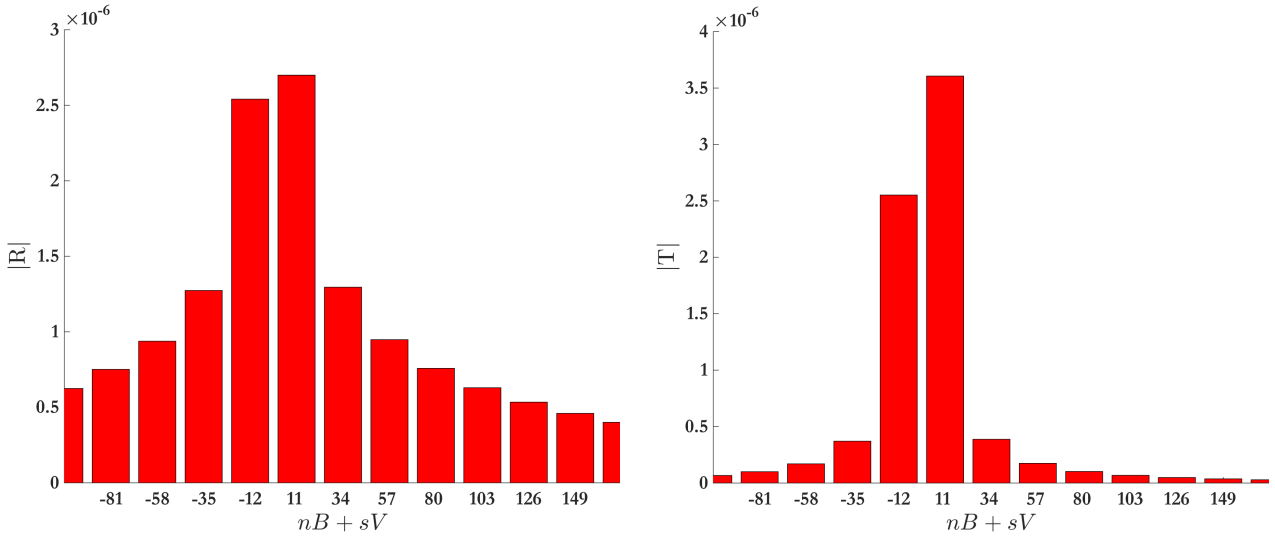


FIGURE 3.19 – Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la deuxième FPP ($n = 2$).

La Fig. 3.19 représente le champ acoustique généré par l'interaction rotor-stator à la deuxième FPP ($n = 2$), composé des modes principaux $n_s \in [-12, 11]$. Le premier est contra-rotatif de nombre de Mach tangentiel subsonique $-34M_t/12$ tandis que le second est co-rotatif avec un nombre de Mach tangentiel $34M_t/11$, subsonique lui aussi. Le rapport entre la longueur d'onde et la longueur de corde est $\lambda_n/c = 1.82$, le rapport de la longueur d'onde à la largeur du canal est $\lambda_n/a = 2.27$ et le nombre de Helmholtz est $k_n R_0 = 10.13$. Les deux modes dominants possèdent des nombres de lobes très proches (11 et 12) avec des nombres d'ondes azimutaux presque opposés. La présence de ces deux champ de pression génère ainsi des zones le long de la grille où ils sont en quasi opposition de phase, annulant localement le champ acoustique total. Ce phénomène est visible sur la Fig. 3.19. Cette zone se déplace alors dans le temps avec une vitesse résultant de la différence des vitesses de phase le long de l'interface associées à chaque mode.



(a) (b)

FIGURE 3.20 – Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la deuxième FPP ($n = 2$). Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont coupés.

3.5.3 Troisième fréquence de passage des pales

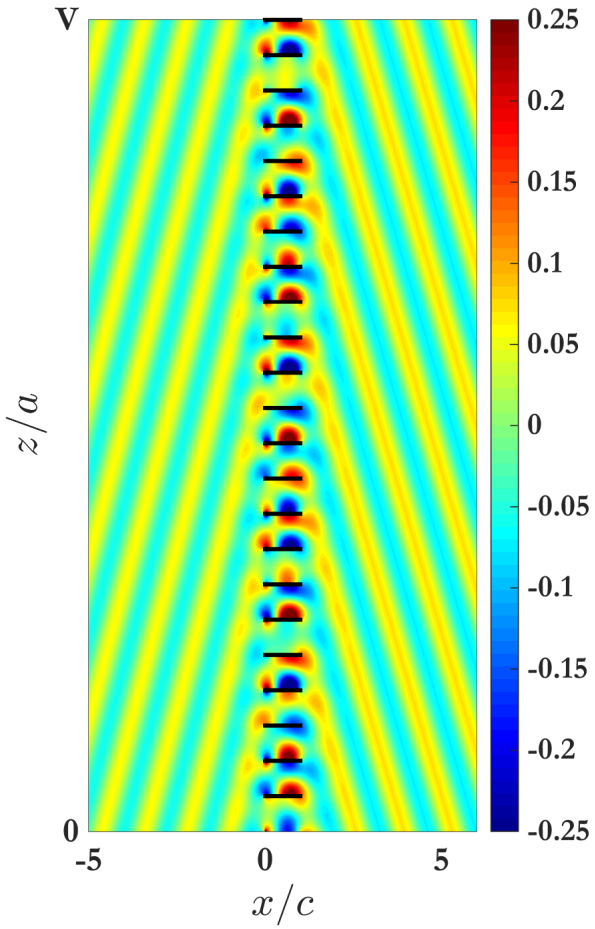


FIGURE 3.21 – Champ de pression acoustique instantanée généré par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la troisième FPP ($n = 3$).

À la troisième FPP ($n = 3$), comme le confirme la Fig. 3.21, l'interaction rotor-stator émet en amont et en aval des ondes propagatives obliques. Ces ondes correspondent au mode dominant co-rotatif $n_s = nB \pm sV = 3 \times 17 - 2 \times 23 = +5$ de nombre de Mach tangentiel supersonique $51M_t/5$ dans la représentation déroulée. Le rapport entre la longueur d'onde et la longueur de corde est $\lambda_n/c = 1.21$, le rapport de la longueur d'onde à la largeur du canal est $\lambda_n/a = 1.51$ et le nombre de Helmholtz est $k_n R_0 = 15.20$. À cette fréquence, les aubes ne sont plus acoustiquement compactes et le mécanisme de diffraction devient plus complexe. En termes d'amplitude le seul mode passant illustré par une barre bleue en Fig. 3.22 n'est pas dominant à l'interface mais il est le seul à pouvoir rayonner loin de la grille d'aubes. Les autres modes sont atténués et contribuent seulement dans le voisinage de la grille, que ce soit en amont ou en aval. Finalement, la vitesse de phase tangentielle du mode dominant le long de l'interface est subsonique dans les deux premiers cas (Figs. 3.16 et 3.19) et supersonique dans le troisième cas (Fig. 3.21), relativement au fluide.

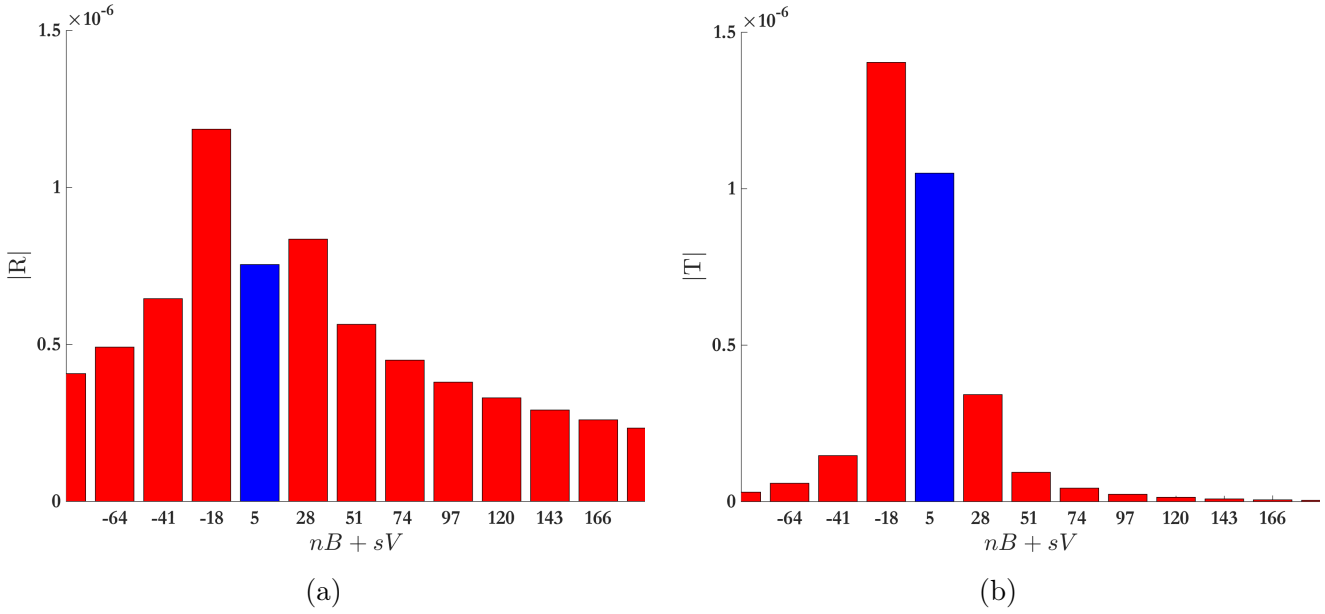


FIGURE 3.22 – Amplitudes modales des champs acoustiques en amont $|\mathbf{R}|$ (a) et en aval $|\mathbf{T}|$ (b) du stator, générés par l'impact des sillages du rotor sur la grille d'aubes, à la troisième FPP ($n = 3$). Les barres d'histogrammes bleues et rouges désignent les modes passants et coupés, respectivement.

L'architecture du ventilateur a été conçue, dans le choix du nombre de pales et d'aubes, afin d'éviter la génération du mode plan ($n_s = 0$) ou d'un autre mode passant aux deux premières fréquences de passage de pales. Dès que ce mode existe, il est toujours passant indépendamment de la fréquence. Avec le modèle de grille actuel, sans angle de calage, le mode plan ne peut pas être excité puisque les sources de bruit équivalentes dipolaires sont orientées dans la direction perpendiculaire à l'écoulement et sont en phase pour toutes les aubes. La régénération de ce mode est montrée en Sec. 2.7 lorsqu'un angle de calage est pris en compte.

3.6 Conclusion

Le modèle de réponse de grille basé sur la technique de raccordement modal présentée au Chapitre 2 a été étendu à l'impact de perturbations tourbillonnaires dans ce chapitre pour traiter des mécanismes de bruit d'interaction de sillages rotor-stator dans un étage de turbomachine. Associées au mode tourbillonnaire, les perturbations hydrodynamiques issues du rotor sont décomposées en harmoniques de sillages, chacun d'entre eux lié à une fréquence de passage des pales. La modélisation des sillages est réalisée à l'aide du modèle semi-empirique de l'équipe de Laksminarayana [125, 130] en prenant en compte le déficit de vitesse créé par la présence des pales de rotor dans l'écoulement moyen. Le prolongement des rafales hydrodynamiques dans la grille de stator est spécifié pour satisfaire les conditions de convection par l'écoulement moyen, de rigidité des parois et le principe de trace. Ainsi, le

couplage entre le mode de vorticité et le mode acoustique n'est pas réalisé par l'annulation de la vitesse totale normale à la paroi. Il est déplacé aux interfaces où la continuité de la vitesse totale axiale doit être satisfaite. Une description modale du champ de vitesse tourbillonnaire est donc prescrite dans les différents sous-domaines. Afin de déterminer l'amplitude des rafales hydrodynamiques dans les canaux inter-aubes, un équation de continuité supplémentaire est nécessaire. L'analyse de Chu et Kovásznay montre que sous les hypothèses du modèle la vorticité du champ de vitesse tourbillonnaire se conserve. Ainsi, la continuité du rotationnel de ce champ de vitesse, satisfaite aux interfaces de la grille, permet de fermer le problème. Une validation du modèle est proposée à partir du cas-test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997). Des comparaisons sont réalisées sur le saut de pression instationnaire induit par l'impact de rafales hydrodynamiques, à deux fréquences différentes avec le modèle analytique de Posson *et al.* [123] et le modèle semi-analytique de Smith [152], implémenté par Whitehead [166] dans le code LINSUB et appliqué spécifiquement à cette configuration par Hall [47]. Un excellent accord est trouvé entre les trois modèles pour les deux configurations et montre l'identité des formulations basées sur la technique de Wiener-Hopf et sur la technique de raccordement modal pour une grille bidimensionnelle d'aubes non calées. Enfin, une étude sur le ventilateur du banc SEMAFOR est réalisée. Les modes azimutaux attendus par le critère de Tyler et Sofrin [162] sont retrouvés et le champ acoustique est généré uniformément dans tout le domaine. Les modes coupés par le conduit, présents uniquement au voisinage proche des aubes sont reproduits et jouent un rôle très important dans la continuité du champ acoustique.

CHAPITRE 4

APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE - TRANSMISSION ACOUSTIQUE

4.1 Motivations

Dans le cadre des modèles analytiques de grilles d'aubes de stator, le passage d'une configuration bidimensionnelle à une configuration tridimensionnelle nécessite habituellement le recours à l'approche par bandes de rayon. Les avantages et les limitations de cette technique sont détaillés en Sec. 1.5.4. Bien que la technique de raccordement modal puisse être utilisée dans une configuration tridimensionnelle à l'aide d'une telle approche (voir 4.2), les possibilités offertes par la prise en compte des fonctions de Green des sous-domaines du problème permettent de remédier aux limites de l'approche par bandes de rayon. Comme l'a montré Ingenito [64], des fonctions de Green, solutions de l'équation de Helmholtz convectée et satisfaisant les conditions aux limites, peuvent être formulées de manière analytique dans les conduits annulaires, ainsi que dans les canaux inter-aubes lorsque le vrillage des aubes est nul. L'ajout de fonctions de Bessel comme fonctions de forme radiale permet de prendre en compte les conditions aux limites radiales du conduit. L'expression des champs acoustiques sous la forme de sommes modales rend inutile la discrétisation de l'espace dans le sens de l'envergure, évitant les sauts de phase et d'amplitude entre les segments et d'assurer des conditions de coupure modale identiques aux différents rayons. Le non-parallélisme des aubes dans la direction azimutale est respecté et la dispersion en ordre radiale est prise en compte. Cependant, le recours à des fonctions de Green nécessite la capacité de les calculer de manière analytique. Par conséquent, la prise en compte de variations de l'écoulement moyen et de la géométrie dans le sens de l'envergure, notamment le vrillage des aubes, n'est pas encore possible. La technique de raccordement modal appliquée à une grille d'aubes annulaire constitue un point de vue complémentaire à l'approche par bandes de rayon sur le problème considéré. La géométrie et la configuration globale de l'étage rotor-stator permettent de faire un choix entre les deux méthodes. Le vrillage du rotor, ainsi que son faible effet de grille, font que cette approche n'est pas la plus adaptée pour modéliser le comportement aéroacoustique d'une soufflante. En revanche, lorsque les aubes du stator sont peu vrillées, et comme l'effet de grille est important, la technique de raccordement modal devient avantageuse.

4.2 Approche par bandes de rayon

Comme précisé en Sec. 1.5.4, une configuration tridimensionnelle peut être modélisée en recourant à l'approche par bandes de rayon. La géométrie est alors discrétisée dans le sens de l'envergure et pour chaque segment radial en représentation déroulée, l'étage rotor-stator est identifié à un cas bidimensionnel. L'application de modèles de grille rectilinéaire pour approcher la configuration tridimensionnelle introduit, entre autres, que les propriétés des ondes diffractées ne sont pas les mêmes à un rayon donné et dans la bande dépliée correspondante. Posson et Roger [123] ont proposé d'inclure dans la formulation du nombre d'onde acoustique, exprimé dans un repère Cartésien, des paramètres représentant la configuration annulaire. Un tel travail n'a pas été repris au cours de cette thèse et

les développements réalisés pour modéliser la diffraction et la génération du bruit par une grille de stator annulaire sont détaillés à partir de la Sec. 4.3. Cependant, la technique de raccordement modal appliquée à la transmission du son à travers un stator, développée dans cette thèse et présentée en Sec. 2, a été mise en application par Behn *et al.* [8] dans une étude comparative entre différents modèles de grilles pour décrire la propagation acoustique à travers une grille d'aubes tridimensionnelle. Cette étude propose, entre autres, de comparer les résultats issus d'un code numérique basé sur la résolution des équations d'Euler linéarisées, du modèle de Smith [152] et de la technique de raccordement modal pour la transmission acoustique bidimensionnelle. La prise en compte de la configuration tridimensionnelle est réalisée grâce à deux méthodes. La première est basée sur les propriétés du rayon caustique, défini en premier lieu par Chapman [17] et qui sera plus amplement détaillé en Sec. 4.3.4. À ce rayon r_c, les nombres d'ondes acoustiques décrits en configuration bidimensionnelle ou tridimensionnelle sont égaux, dans les directions axiale et azimutale :

$$k_{x,2D} = k_{x,3D}, \quad k_{z,2D} = k_{\theta,3D}, \quad \text{si} \quad r = r_c. \tag{4.1}$$

Le rayon caustique dépend des ordres modaux dans les directions azimutale et radiale et représente le rayon au dessus duquel la quasi intégralité de la puissance acoustique d'un mode est transportée. La similarité des nombres d'onde rend cette approche intéressante puisque l'angle de propagation de l'onde incidente est conservé par la transformation vers le repère bidimensionnel. De plus, l'identité des nombres d'onde indique par conséquent que la composante radiale du nombre d'onde est nulle [97]. Dans cette méthode, la diffraction acoustique d'un mode donné par le stator est calculée grâce aux modèles de grille bidimensionnelle au rayon caustique de ce mode. L'approche par bandes de rayon constitue la seconde méthode employée. L'envergure est ainsi discrétisée en quarante segments radiaux.

Dans la référence [8], des prédictions acoustiques ont été réalisées avec le code Lin3D développé par MTU Aero Engines, basé sur la résolution des équations d'Euler linéarisées. L'écoulement moyen est issu d'un calcul RANS tridimensionnel réalisé par le code TRACE, développé par le DLR (*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Centre allemand pour l'aéronautique et l'astronautique*). Des paramètres aérodynamiques unidimensionnels sont extraits pour fournir des données d'entrée aux modèles analytiques. Le modèle de Smith et la technique de raccordement modal sont employés pour déterminer le champ diffracté par la transmission acoustique d'une onde à travers la grille d'aube. Les puissances acoustiques modales des ondes réfléchies $\mathcal{P}_r$ et transmises $\mathcal{P}_t$ sont ensuite calculées à partir des trois modèles. Un indice de la puissance acoustique réfléchie ou transmise, adimensionnée par celle de l'onde incidente $\mathcal{P}_i$ d'ordre modal azimutal m et d'ordre radial $n = 0$ est défini sous la forme :

$$\text{Total } \Delta \text{ PWL}(m) = 10 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{P}_{r/t,m}}{\mathcal{P}_{i,m}} \right) \text{ dB}. \tag{4.2}$$

L'étude propose aussi de prendre en compte la déviation de l'écoulement moyen par le stator à l'aide d'un modèle d'impédance. Un écoulement tournant est pris en compte dans la définition des nombres d'onde tridimensionnels avec une hypothèse de mouvement de rotation de solide équivalent. Le nombre d'onde total s'exprime alors sous la forme $k - m\Omega/c_0$, où Ω est la vitesse de rotation de l'écoulement. Les puissances acoustiques des ondes diffractées sont modifiées par des coefficients prenant en compte la variation de la vitesse de rotation en amont et en aval du stator, représentatifs du redressement de l'écoulement. Ces coefficients peuvent être définis en prenant en compte la déviation au bord d'attaque ou au bord de fuite. La technique de raccordement modal complète n'étant possible pour le moment qu'avec une grille d'aubes non calées, cet effet de déviation est négligeable. Les paramètres du cas test défini par Behn *et al.* sont détaillés en Tab. 4.1 :

Géométrie du stator			Onde acoustique incidente	
$M = 0.2$,	$ka \approx 0.7\pi$,	$c/a \approx 1.1$,	$m \in [-12, 12]$,	$n = 0$

TABLE 4.1 – Paramètres du cas test défini dans l'article de Behn *et al.* [8].

Les Figs. 4.1 et 4.2 représentent les indicateurs Total Δ PWL pour les ondes réfléchies et transmises, en fonction de l'ordre modal m, lorsque l'approche par rayon caustique et l'approche par bandes de rayons sont utilisées. Les comparaisons entre les résultats issus des modèles analytiques et du code numérique montrent de très bons accords pour la réflexion ou la transmission acoustique. Les modèles analytiques après l'application du modèle d'impédance donnent des résultats similaires, étant donné que les aubes ne sont pas calées et que l'écoulement moyen est axial. En revanche, la technique utilisée pour approcher la géométrie annulaire modifie la plage de modes pour laquelle les calculs peuvent être réalisés. Dans le cas de l'approche par bandes de rayon (Fig. 4.2), les ondes acoustiques incidentes peuvent être coupées dans la projection bidimensionnelle d'un segment dont le rayon moyen est proche du rayon au moyeu. Dans ce cas, les coefficients de transmission et de réflexion du mode tridimensionnel ne peuvent pas être déterminés, bien que ce mode soit passant. Ce problème est mentionné en Sec. 1.5.4.

Enfin, les paramètres du cas test ont été choisis de telle sorte que seuls des cas sub-résonnants, au sens de Kaji et Okazaki, surviennent. Le champ diffracté ne comporte que des ondes réfléchies et transmises d'ordre modal azimutal $s = 0$. Par conséquent, lorsque $m = 0$, la transmission est totale et la réflexion est nulle. Il s'agit de la configuration *Venetian Blind* décrite par Hanson [53]. Avec l'augmentation de l'ordre modal, la puissance acoustique transmise se réduit, tandis que la puissance réfléchie augmente, jusqu'à atteindre la configuration *Broadside* où toute la puissance acoustique incidente est réfléchie. Ce comportement rejoint celui décrit en Fig. 2.34, excepté le fait que la configuration était super-résonnante, introduisant des pics de résonance lors de l'apparition de nouveaux modes passants, ce qui n'est pas le cas ici.

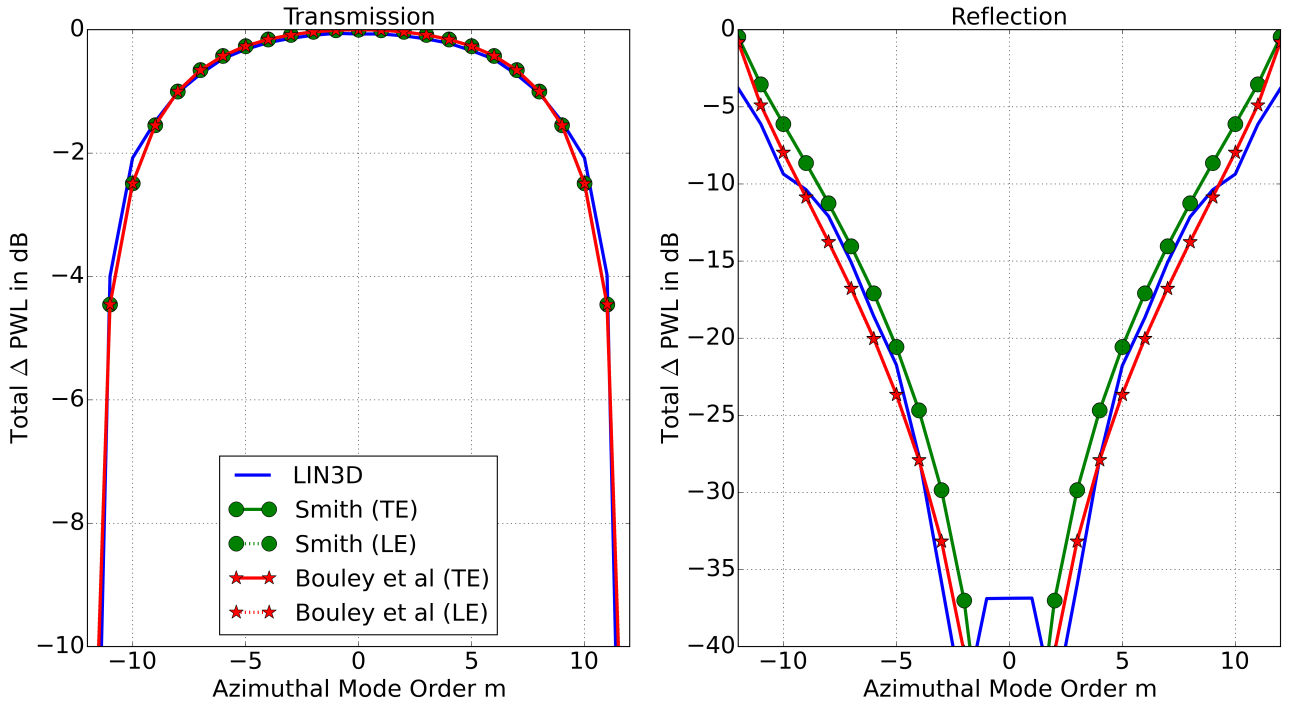


FIGURE 4.1 – Puissances acoustiques transmises (gauche) et réfléchies (droite) adimensionnées par la puissance incidente, en fonction de l'ordre modal azimutal m de l'onde excitatrice. Les calculs ont été réalisés avec l'approche par le rayon caustique à l'aide des modèles de Smith (lignes vertes) et du raccordement modal (lignes rouges), ainsi qu'avec le code numérique Lin3D (lignes bleues). Le modèle d'impédance pour la déviation de l'écoulement est appliqué au bord d'attaque (LE, *Leading Edge*) et au bord de fuite (TE, *Trailing Edge*). Résultats issus de l'article [8], reproduits avec l'autorisation des auteurs.

Ces résultats suggèrent que le modèle de grille bidimensionnel peut être utilisé pour une estimation rapide de la transmission sonore dans une grille annulaire. L'objectif du présent chapitre est néanmoins d'étendre la méthode à trois dimensions pour se rapprocher d'une configuration réaliste.

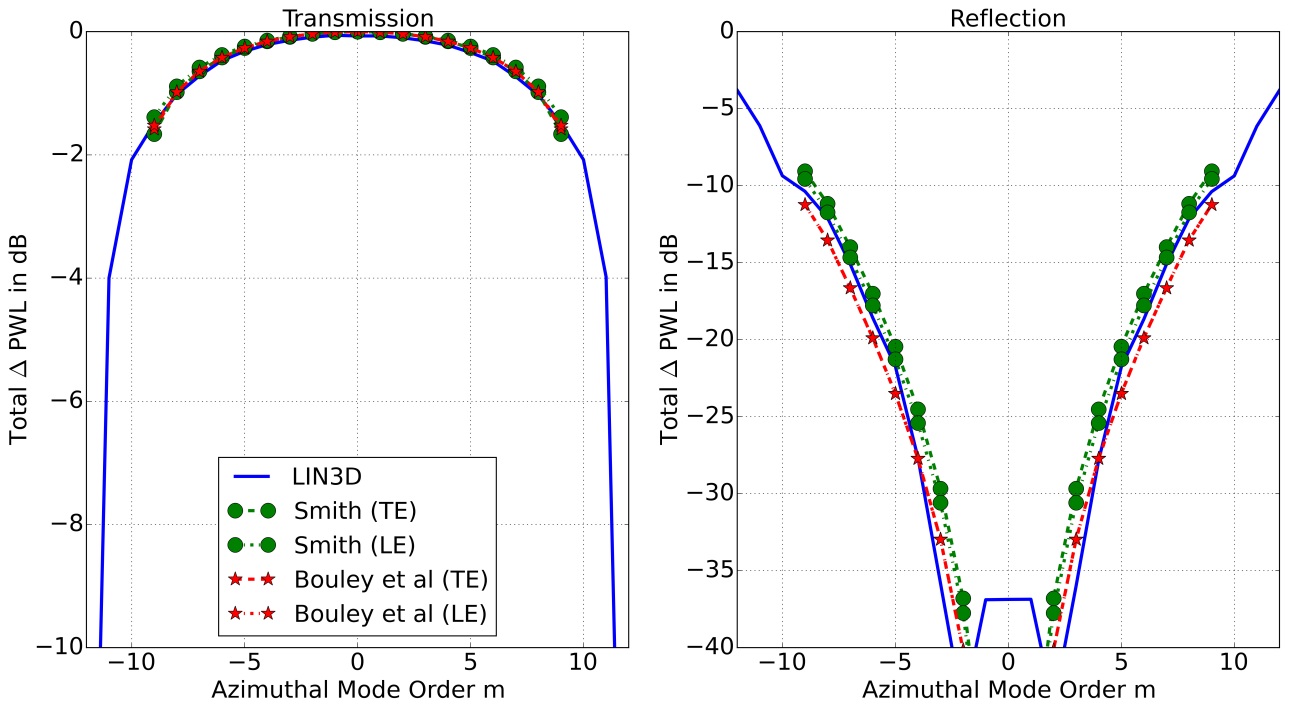


FIGURE 4.2 – Puissances acoustiques transmises (gauche) et réfléchies (droite) adimensionnées par la puissance incidente, en fonction de l'ordre modal azimutal m de l'onde excitatrice. Les calculs ont été réalisés avec l'approche par bandes de rayon et les modèles de Smith (lignes vertes) et du raccordement modal (lignes rouges), ainsi qu'avec le code numérique Lin3D (lignes bleues). Le modèle d'impédance pour la déviation de l'écoulement est appliqué au bord d'attaque (LE, *Leading Edge*) et au bord de fuite (TE, *Trailing Edge*). Résultats issus de l'article [8], reproduits avec l'autorisation des auteurs.

4.3 Propagation guidée dans un espace annulaire

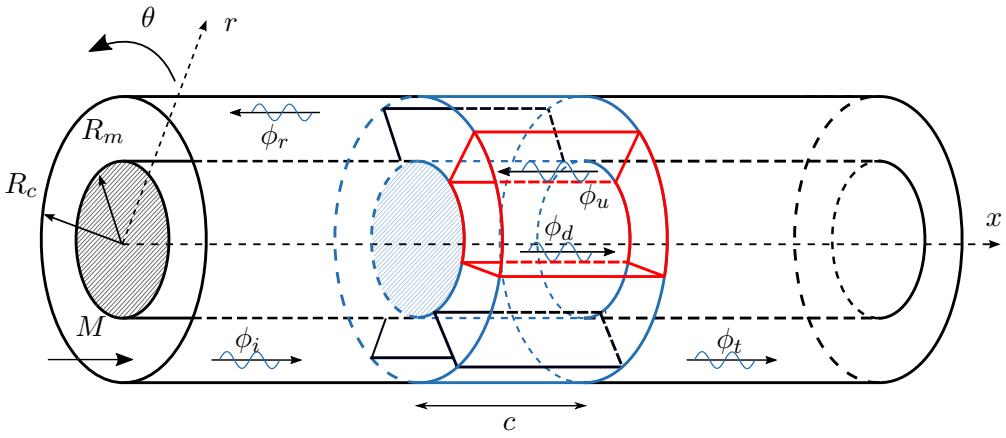


FIGURE 4.3 – Représentation d'une grille d'aubes tridimensionnelle. Notation des ondes incidente et diffractées.

La technique de raccordement modal est désormais appliquée à la diffraction d'ondes acoustiques incidentes par une grille d'aubes tridimensionnelle placée dans un conduit avec un écoulement subsonique, uniforme et axial de nombre de Mach M. La Fig. 4.3 représente la configuration annulaire typique d'un stator sans calage, dévers, flèche ni vrillage, compatible avec cette hypothèse. Les aubes sont assimilées à des plaques planes rigides et sans épaisseur, de longueur de corde c. La grille est composée de V aubes, encastrées dans un conduit annulaire aux parois rigides, de rayons interne et externe R_m et R_c, respectivement.

Une onde incidente acoustique (ϕ_i) se propage dans le demi-espace $x < 0$. La diffraction de cette onde par la grille annulaire génère des ondes réfléchies (ϕ_r) dans le demi-espace $x < 0$ et des ondes transmises (ϕ_d^m) dans les différents canaux inter-aubes ($0 < x < c$). Celles-ci sont ensuite réfléchies (ϕ_u^m) dans la grille et transmises (ϕ_t) dans le demi-espace en aval du stator ($c < x$). Les ondes acoustiques se développent dans les canaux inter-aubes par allers-retours jusqu'à atteindre un régime établi.

De la même manière que pour le cas bidimensionnel, les sections droites de bord d'attaque et de bord de fuite sont considérées comme des interfaces sur lesquelles les conditions de saut détaillées en Sec. 1.7.2 demeurent valides. Ce principe reste valable en coordonnées cylindriques (r, θ, x). En effet, en raison de la géométrie très simple du stator, les bords des aubes sont tous contenus dans les mêmes sections droites. De même, le principe de trace n'implique qu'une condition sur l'angle azimutal θ, sa prise en compte n'est pas modifiée en configuration cylindrique. Les champs réfléchis ϕ_r et transmis ϕ_t se développent sur une série de modes, résultat de la modulation de l'onde incidente par le nombre d'aubes du stator et les champs acoustiques dans la grille sont déphasés d'une même quantité entre deux canaux adjacents.

La technique de raccordement modal appliquée à la transmission du son à travers un stator nécessite l'expression des champs potentiels acoustiques dans les différents sous-domaines sous une formulation modale. La présente section propose d'étudier la propagation guidée dans un conduit annulaire, afin d'obtenir les solutions au problème posé et de préciser certaines caractéristiques de la propagation acoustique dans les conduits.

4.3.1 Solutions à l'équation de Helmholtz convectée

Tous les potentiels acoustiques $\phi(r,\theta,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ doivent satisfaire l'équation de Helmholtz convectée en coordonnées cylindriques (r, θ, x) pour un écoulement moyen axial de nombre de Mach subsonique M :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{D}^2\phi}{\mathrm{D}t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + (1-M^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial r} + 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\phi}{\partial x} + k^2\phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \tag{4.3}$$

La dérivée particulaire est :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{W}\cdot\nabla,$$

où $\mathbf{W} = W_x\mathbf{e}_x = Mc_0\mathbf{e}_x$.

Cette équation est soumise aux conditions aux limites radiales :

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \text{pour} \quad r \in [R_m, R_c],$$

et aux conditions sur l'azimut θ, variables selon les sous-domaines. L'équation de Helmholtz convectée est une équation aux dérivées partielles qui peut être résolue grâce à la méthode de Fourier qui emploie une séparation des variables de la fonction solution. Ainsi, celle-ci peut s'écrire :

$$\phi(r,\theta,x) = f(r)g(\theta)h(x).$$

L'Eq. (4.3) devient :

$$\frac{r^2}{f}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\theta^2} + r^2\left\{(1-M^2)\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} + 2\mathrm{i}kM\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right\} + k^2r^2 = 0 \tag{4.4}$$

Cette expression montre que l'Eq. (4.3) est séparable. L'Eq. (4.4) peut être écrite comme une somme de trois constantes égales aux trois termes faisant intervenir uniquement les fonctions f, g, et h, ainsi que leur variable associée. Pour la dépendance azimutale, la fonction $g(\theta)$ satisfait la relation suivante :

$$\frac{1}{g(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2 g(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = -n^2, \quad \text{ainsi} \quad g(\theta) = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}. \tag{4.5}$$

Dans un conduit annulaire, une condition de 2π-périodicité est satisfaite sur l'angle θ. Dans ce cas, les solutions compatibles correspondent aux valeurs entières de n ($n \in \mathbb{N}$). Cependant, en raison du principe de trace, la nature des ondes réfléchies et transmises en amont et en aval du stator résulte de la modulation de la périodicité angulaire de l'onde incidente par celle de la grille. Par conséquent, pour une onde incidente possédant une dépendance azimutale $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, celles des ondes réfléchies et transmises s'écrivent $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}$, où $n_s = n + sV$, $s \in \mathbb{Z}$.

Dans le stator, la condition de rigidité doit être satisfaite aux parois des aubes. Ainsi, pour un canal de rang $m = 0$, la fonction g doit respecter les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0, \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{V}.$$

Par conséquent, si la fonction azimutale est écrite sous la forme $g(\theta) = A\cos(n\theta) + \mathrm{i}B\sin(n\theta)$, alors la condition de rigidité en $\theta = 0$ impose que $B = 0$. La condition de rigidité en $\theta = 2\pi/V$ implique que $\sin(n2\pi/V) = 0$ et que $n = qV/2$. Finalement, dans les canaux inter-aubes, la dépendance azimutale s'écrit :

$$g(\theta) = A\cos\left(n_q\theta\right), \quad \text{où} \quad n_q = \frac{qV}{2}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

La fonction axiale $h(z)$ une fois isolée est solution de l'équation :

$$(1 - M^2)\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} + 2\mathrm{i}kM\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\chi^2. \tag{4.6}$$

Aucune contrainte n'est imposée à la fonction h, ainsi le terme χ peut être réel ou complexe. Écrire la fonction axiale sous la forme $h(x) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}$ aboutit à l'équation caractéristique :

$$-k_x^2(1 - M^2) + 2\mathrm{i}kM(\mathrm{i}k_x) + \chi^2 = 0,$$

soit, en posant $\beta^2 = 1 - M^2$,

$$k_x^2 + 2k\frac{M}{\beta^2}k_x - \frac{\chi^2}{\beta^2} = 0. \tag{4.7}$$

L'Eq. (4.7) est une équation du second degré, dont les solutions sont :

$$k_x^{\pm} = -\frac{Mk}{\beta^2} \pm \sqrt{\frac{\chi^2}{\beta^2} + \frac{M^2k^2}{\beta^4}}.$$

Ainsi, la fonction axiale $h(x)$ s'écrit :

$$h(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x^+ x} + D\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x^- x}.$$

La dépendance radiale de la solution est portée par l'équation de Bessel :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \left(K^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) f = 0 \quad \text{avec} \quad K^2 = k^2 - \chi^2 \tag{4.8}$$

associée aux conditions aux limites des parois rigides du conduit annulaire :

$$\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \quad \text{en} \quad r \in [R_m, R_c].$$

L'équation de Bessel dépend des deux paramètres n et K. Les solutions fondamentales de cette équation sont les fonctions de Bessel d'ordre n de première et seconde espèces, notées respectivement $J_n(Kr)$ et $Y_n(Kr)$. Toute solution particulière $f(r)$ s'écrit alors :

$$f(r) = AJ_n(Kr) + BY_n(Kr).$$

Les constantes A, B et K sont déterminées par l'équation des conditions au limites, étant entendu que $f(r)$ est définie à une constante multiplicative près :

$$\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} = AJ_n^{'}(Kr) + BY_n^{'}(Kr) = 0 \quad \text{en} \quad r \in [R_m, R_c],$$

ce qui équivaut au système :

$$J_n^{'}(KR_c)Y_n^{'}(KR_m) - J_n^{'}(KR_m)Y_n^{'}(KR_c) = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{J_n^{'}(KR_m)}{Y_n^{'}(KR_m)} = -\frac{J_n^{'}(KR_c)}{Y_n^{'}(KR_c)}.$$

Par conséquent, la solution n'existe que pour certaines valeurs du rapport B/A et de K sélectionnées par l'Eq. (4.9). Ces valeurs seront désormais numérotées par deux indices (n, j) azimutal et radial, respectivement. Mathématiquement, les équations (4.8) et (4.9) appartiennent à une classe de problèmes différentiels aux valeurs propres dits de Sturm-Liouville [86]. Ainsi, quelques éléments de cette théorie peuvent être détaillés.

Si n est fixé, la solution n'existe que pour une infinité de valeurs propres discrètes de K, notées K_{nj}, $j \in \mathbb{N}$. Les valeurs propres sont toutes réelles et positives. Les fonctions de Bessel J_n et Y_n étant oscillantes, la fonction $f(r)$ l'est également. Ainsi les arguments pour lesquels $f'(R_m) = f'(R_c) = 0$ correspondent à des extrema de f et constituent une suite croissante sans point d'accumulation. De plus, K_{nj} est une fonction croissante de n. Dans la pratique, selon les valeurs comparées de la longueur d'onde et des rayons R_m et R_c, A ou B peut s'annuler et f s'identifier exactement à J_n ou Y_n. Pour couvrir tous les cas possibles, Rienstra [132] a tout d'abord recours au changement de variable $r = r/R_c$ ($r \in [\sigma, 1]$, où σ désigne le rapport de moyeu $\sigma = R_m/R_c$) et définit la fonction f_{nj}^* telle que :

$$f_{nj}^*(r) = \cos(\tau_{nj})J_n(K_{nj}r) - \sin(\tau_{nj})Y_n(K_{nj}r), \quad \tau_{nj} = \arctan\left(\frac{J_n'(K_{nj})}{Y_n'(K_{nj})}\right).$$

Ceci implique également que :

$$\begin{aligned}
\cos(\tau_{nj}) &= \mathrm{sign}(Y_n'(K_{nj}))\frac{Y_n'(K_{nj})}{\sqrt{J_n'(K_{nj})^2 + Y_n'(K_{nj})^2}}, \\
\sin(\tau_{nj}) &= \mathrm{sign}(Y_n'(K_{nj}))\frac{J_n'(K_{nj})}{\sqrt{J_n'(K_{nj})^2 + Y_n'(K_{nj})^2}}.
\end{aligned}$$

Pour une valeur n fixée, les fonctions propres f_{nj}^* forment un ensemble orthogonal vis-à-vis du produit scalaire défini comme suit :

$$\int_\sigma^1 r f_{nj}^*(r) f_{ni}^*(r)\mathrm{d}r = \frac{\delta_{i,j}}{N_{nj}^2}.$$

Le terme de normalisation N_{nj}, calculé par Rienstra, vaut :

$$N_{nj} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi K_{nj}}{\left\{\dfrac{1 - n^2/K_{nj}^2}{J_n'(K_{nj})^2 + Y_n'(K_{nj})^2} - \dfrac{1 - n^2/(K_{nj}\sigma)^2}{J_n'(K_{nj}\sigma)^2 + Y_n'(K_{nj}\sigma)^2}\right\}^{1/2}}.$$

Il permet de rendre les fonctions radiales orthonormales :

$$f_{nj}(r) = N_{nj}\left(\cos(\tau_{nj})J_n(K_{nj}r) - \sin(\tau_{nj})Y_n(K_{nj}r)\right), \tag{4.10}$$

$$\int_{\sigma}^{1} r f_{nj}(r) f_{ni}(r) \mathrm{d}r = \delta_{i,j}. \tag{4.11}$$

Dans le cas du conduit à section circulaire ($R_m = 0$), l'une des conditions aux limites disparaît. Cependant, la fonction Y_n ne constitue plus une solution physiquement acceptable, étant singulière lorsque r tend vers zéro. L'avantage de la fonction de Rienstra est qu'elle tend vers la fonction limite $N_{nj} J_n(K_{nj} r)$ si $\sigma \to 0$ de façon naturelle.

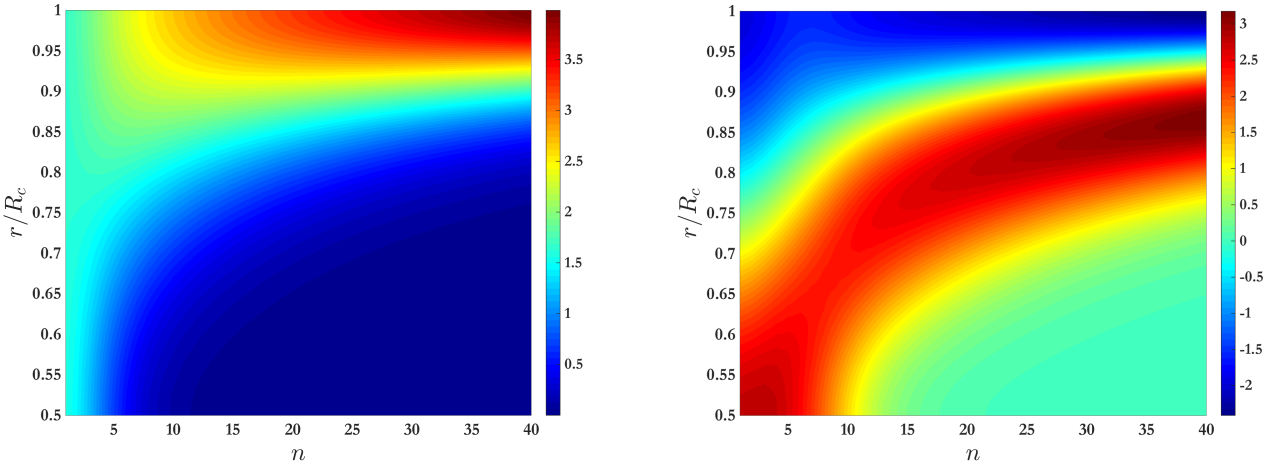


FIGURE 4.4 – Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c pour des ordres radiaux $j = 0$ (a) et $j = 1$ (b).

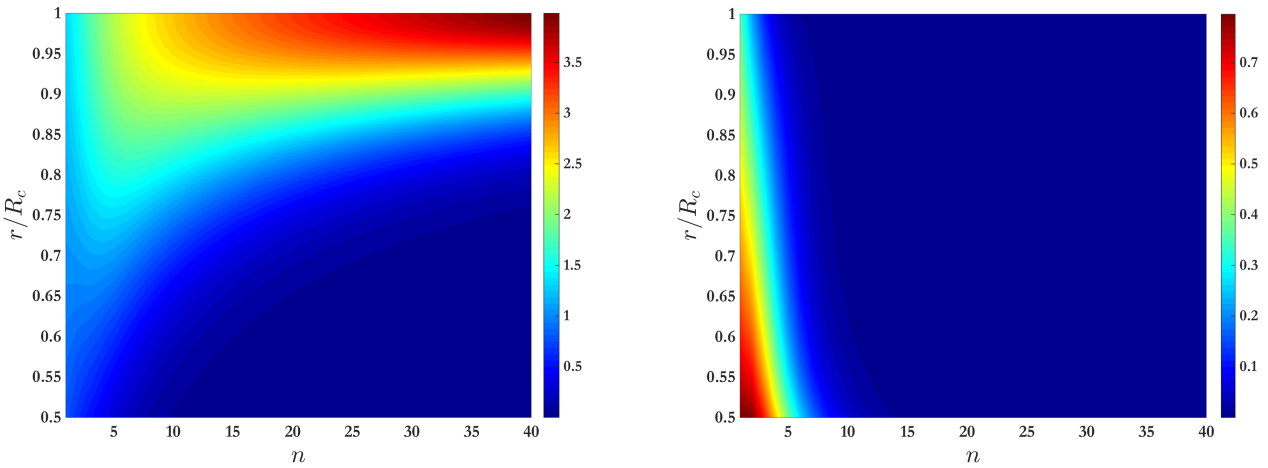


FIGURE 4.5 – Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c. (a) : Composante liée à la fonction de Bessel de première espèce ($\cos(\tau_{nj}) J_n(K_{nj} r)$). (b) : Composante liée à la fonction de Bessel de seconde espèce ($-\sin(\tau_{nj}) Y_n(K_{nj} r)$).

.

La fonction de forme radiale $f_{nj}(r)$ est représentée en Fig. 4.4 en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon adimensionné r/R_c pour des ordres modaux radiaux $j \in [0, 1]$. Pour un ordre radial $j = 0$ (Fig. 4.4-a) et pour de petits ordres azimutaux ($n < 4$), les variations radiales restent faibles et la fonction $f_{00}(r)$ correspond au mode plan. Pour les ordres élevés $n > 10$, la fonction radiale reste nulle sur la majeure partie de l'envergure et de fortes variations sont observées près du conduit, illustrant

l'effet de peau, expliqué géométriquement en Sec. 4.3.4. L'onde acoustique projetée dans la direction radiale forme une onde stationnaire et pour le mode d'ordre $j = 1$, un ventre d'oscillation est observé sur la Fig. 4.4-b qui se déplace vers le conduit en fonction du nombre d'onde azimutal. De même que pour le mode $j = 0$, une zone où la fonction $f_{nj}(r)$ est nulle existe près du rayon au moyeu pour les ordres azimutaux élevés $n > 15$.

La fonction de forme radiale définie par l'Eq. (4.10) est la combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première espèce $J_n(K_{nj}r)$ et de seconde espèce $Y_n(K_{nj}r)$. Les deux composantes $N_{nj}\cos(\tau_{nj})J_n(K_{nj}r)$ et $-N_{nj}\sin(\tau_{nj})Y_n(K_{nj}r)$ sont représentées en Fig. 4.5. La Fig. 4.5-b montre que la contribution de la fonction de Bessel de seconde espèce est non nulle uniquement pour les faibles ordres modaux azimutaux ($n < 10$). Dans cette zone, cette composante varie selon le sens de l'envergure et comble les variations de la fonction de Bessel de première espèce afin de prendre en compte le moyeu du conduit et d'atténuer les variations radiales pour les plus faibles modes azimutaux. Lorsque le nombre d'onde azimutal est élevé, la fonction de forme radiale s'identifie totalement à la fonction de Bessel de première espèce. Dans ce cas, le champ acoustique se propageant dans un conduit annulaire s'assimile à celui se propageant dans un conduit à section circulaire, les valeurs propres étant néanmoins différentes.

En vertu de la nature discrète de la solution radiale $f(r)$, toute solution particulière de l'équation complète $f(r)g(\theta)h(z)$ demeure assujettie à la condition $K = K_{nj}$. χ^2 doit donc prendre l'un des valeurs $\chi^2_{nj} = k^2 - K^2_{nj}$. Par conséquent, les nombres d'ondes axiaux $k_x^{\pm}$ ne peuvent eux aussi que prendre des valeurs discrètes $k^{\pm}_{nj}$, imposées par la pulsation ω et les valeurs propres K_{nj}. Ainsi, le nombre d'onde axial s'écrit :

$$k^{\pm}_{nj} = \frac{-Mk \pm \overline{k^{\pm}_{nj}}}{\beta^2}, \quad \overline{k^{\pm}_{nj}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K^2_{nj}}. \tag{4.12}$$

En conclusion, la solution générale de l'équation (4.3) s'exprime comme une combinaison linéaire des solutions particulières :

$$\phi(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f_{nj}(r)\left(\alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \beta_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)\left(C_{nj}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{nj}z} + D_{nj}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{-}_{nj}z}\right).$$

Après recomposition, l'expression du potentiel acoustique ϕ s'écrit sous la forme :

$$\phi(r,\theta,x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(A^{+}_{nj}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{nj}x} + A^{-}_{nj}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{-}_{nj}x}\right) f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.13}$$

où A^{+}_{nj} et A^{-}_{nj} représentent les amplitudes modales des ondes se propageant dans le sens de l'écoulement et dans le sens contraire, respectivement. Il s'agit des seules inconnues du problème, dépendantes de la source. En effet, le champ acoustique se propageant dans un conduit annulaire est une combinaison de modes propres de la forme :

$$f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{\pm}_{nj}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.14}$$

qui dépendent des conditions aux limites et sont totalement déterminés par leurs indices azimutaux et radiaux (n, j). L'intérêt des modes exprimés par l'Eq. (4.14) est qu'ils forment une base orthonormale dans l'espace L_2 [133]. Mathématiquement, l'espace $L_2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f|g\rangle = \int_{\Omega} f(s)g(s)^{*}\mathrm{d}\mu(s),$$

où $(\bullet)^{*}$ désigne le complexe conjugué. Par conséquent, la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{1}{a}\int_0^a\int_{\sigma}^1 f_{\alpha\beta}f_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\theta}\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}, \quad \forall\alpha,\mu\in\mathbb{Z}, \quad \forall\beta,\nu\in\mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Une mode d'ordre (n, j) est composé d'une structure d'onde stationnaire dans le sens radial $f_{nj}(r)$, qui provient des réflexions successives sur les parois et d'un terme de phase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{\pm}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, représentatif de sa propagation ondulatoire. Aux variables r et x fixées, et si $n \neq 0$, l'onde se réduit à un mode de propagation tournant. ω/n représente la vitesse de rotation du mode, n est appelé nombre d'onde azimutal et $|n|$ est le nombre de lobes du mode. Si $n = 0$, le champ acoustique correspondant dans le conduit est à symétrie de révolution et définit un mode dit symétrique.

4.3.2 Conditions de coupure modale

Aux variables r et θ fixées, le comportement du mode est dépendant de la fréquence et du nombre d'onde axial du mode, où la pulsation de coupure du mode $\omega_c = c_0\beta K_{nj}$ joue un rôle prépondérant. Si $\omega \geq \omega_c$, le nombre d'onde axial du mode est réel et celui-ci est passant. Les parois étant rigides, l'onde se propage sans atténuation dans le conduit. Pour un mode tournant, la propagation a alors un caractère hélicoïdal (Fig. 4.6).

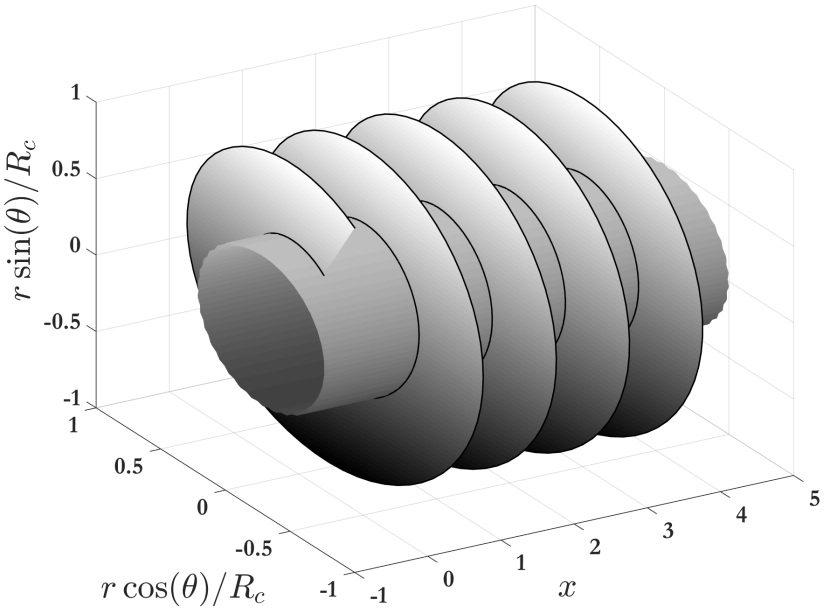


FIGURE 4.6 – Surface d'égale phase hélicoïdale $n\theta + \mathcal{R}\mathrm{e}\{k_{nj}^{+}x\}$ lors de la propagation d'un mode tournant dans un conduit annulaire.

Pour un mode symétrique, la propagation est identique à celle d'une onde plane dans la direction axiale. Par ailleurs, à cause de l'écoulement moyen, les hélicoïdes qui correspondent à la propagation en amont ont un pas plus faible et celles qui correspondent à la propagation en aval un pas plus important. Si $\omega < \omega_c$, la partie non convective du nombre d'onde axial $\overline{k_{nj}^{\pm}}$ est un imaginaire pur. Dans ce cas, l'onde acoustique est amortie avec une décroissance exponentielle :

$$\overline{k_{nj}^{\pm}} = \mathrm{i}\sqrt{\beta^2 K_{nj}^2 - k^2}.$$

Le mode est dit coupé par le conduit. Ainsi, un mode d'ordre (n, j) ne se propage que si la fréquence ω à laquelle il est excité est supérieure à sa fréquence de coupure $f_c = \omega_c/(2\pi)$. Cette fréquence de coupure dépend du rapport de moyeu du conduit et de la vitesse de l'écoulement. Lorsque le nombre de Mach augmente, les fréquences de coupure diminuent (Fig. 4.7). Par conséquent, pour une même fréquence ω, l'augmentation du nombre de Mach peut permettre la propagation à davantage de modes.

Le mode acoustique d'ordre $(n = 0, j = 0)$ est un cas particulier. Ici, la fonction radiale est égale à $f_{00}(r) = 1$, il n'y a donc pas de variation radiale, ni azimutale. Les nombres d'ondes axiaux s'écrivent :

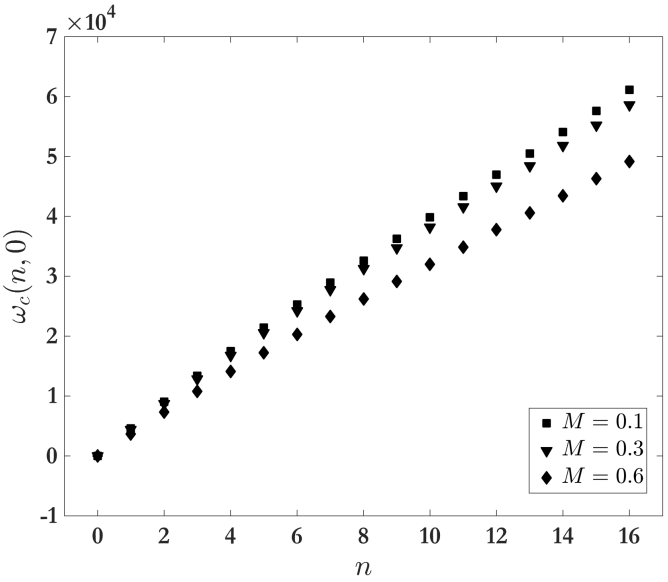


FIGURE 4.7 – Pulsations de coupure ω_c en fonction du nombre de Mach ($M \in [0.1, 0.3, 0.6]$) et des ordres modaux azimutal n et radial $j = 0$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$.

$$k_{00}^{\pm} = \pm \frac{k}{1 \pm M}.$$

Il s'agit alors d'une onde plane se propageant parallèlement à l'axe, appelée mode plan. Sa pulsation de coupure est nulle, ainsi il se propage quelle que soit la fréquence s'il est excité. Les architectures de turbomachines doivent par conséquent être conçues pour éviter sa génération, puisqu'il ne peut être coupé par le conduit. La Fig. 4.8 représente les valeurs des pulsations de coupure des premiers modes possibles et montre qu'elles forment un suite sans point d'accumulation. Par conséquent, à une fréquence excitatrice ω_e donnée, seuls un nombre fini de modes sont passants tandis que tous les autres sont coupés. La plus petite pulsation de coupure non nulle ω_l :

$$\omega_l = \inf_{(n,j)\neq(0,0)} \{\omega_c(n,j)\},$$

définit la fréquence en dessous de laquelle uniquement le mode plan peut se propager. Par conséquent, la valeur $f_l = \omega_l/(2\pi)$ est appelée fréquence de coupure du conduit. Dans un conduit à section circulaire, elle correspond à la fréquence d'apparition du mode $(n = 1, j = 0)$.

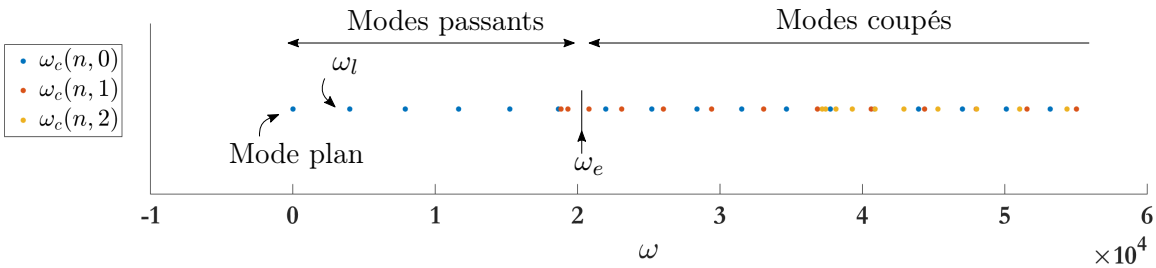


FIGURE 4.8 – Pulsations de coupure ω_c pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$ et un nombre de Mach $M = 0.5$.

Lorsqu'un mode est excité à une fréquence inférieure à sa fréquence de coupure f_c, il est atténué le long de l'axe avec une décroissance exponentielle, dont le taux d'amortissement est défini par la partie imaginaire du nombre d'onde axial $k_{nj}^{\pm}$. Sur une distance δx, l'atténuation du mode τ_{nj} est décrite par la relation :

$$\tau_{nj} = \exp\left\{-\frac{1}{\beta^2}\sqrt{\beta^2 K_{nj}^2 - k^2}\delta x\right\}. \tag{4.16}$$

L'Eq. (4.16) montre que si la fréquence est très proche de la fréquence de coupure, le terme sous la racine est faible. Dans ce cas, l'atténuation est faible et la coupure ne devient effective que lorsque la distance axiale est importante. Si la fréquence est bien plus grande que la fréquence de coupure, la décroissance devient très efficace et le mode peut être quasi totalement atténué après une distance égale au rayon du conduit. Les pulsations de coupure sont fonctions croissantes des ordres n et j. Pour une vitesse d'écoulement et une fréquence d'excitation données, les modes d'ordres élevés se propagent avec plus de difficulté et sont plus fortement atténués, comme l'illustre la Fig. 4.9.

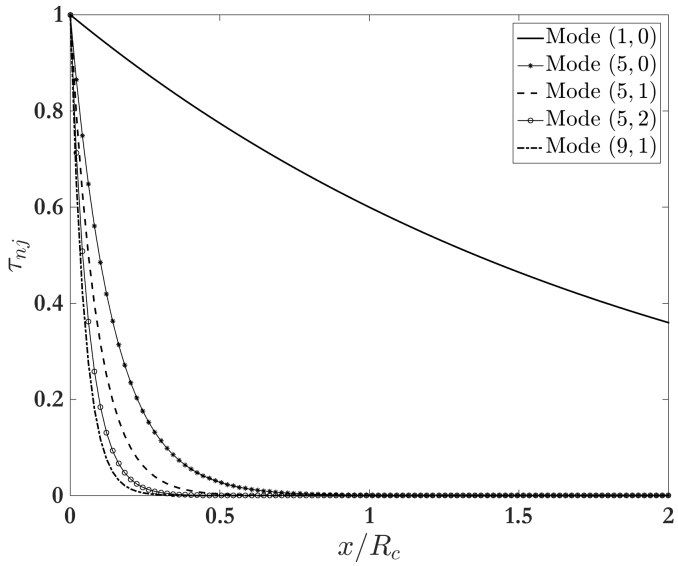


FIGURE 4.9 – Atténuation τ_{nj} modale en fonction de la distance axiale et des ordres modaux (n, j) pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$ et un écoulement de nombre de Mach $M = 0.5$. $kR_c = 1.11$.

Un mode tournant de pulsation ω possède une vitesse de rotation ω/n. Un nombre de Mach tangentiel correspondant peut être introduit à la périphérie du conduit ($r = R_c$) :

$$M_{nj} = \frac{\omega R_c}{n c_0} = \frac{k R_c}{n}.$$

À la fréquence de coupure, le nombre de Mach de coupure du mode est défini par la relation :

$$M_{nj}^c = \frac{\beta K_{nj} R_c}{n}.$$

Lorsque n augmente, la grandeur $K_{nj}R_c/n$ diminue tout en restant supérieure à 1. Par conséquent, tous les nombres de Mach de coupure sont supérieurs à β, ainsi un mode tournant sera coupé si sa vitesse de rotation en périphérie du conduit est inférieure à βc_0. Cette condition peut être écrite à partir du nombre de Mach relatif $M_{nj}^r = (M^2 + M_{nj}^2)^{1/2}$, qui combine la rotation du mode et la convection axiale par l'écoulement moyen. En effet, un mode tournant sera coupé si $M_{nj}^r < 1$, c'est-à-dire si son nombre de Mach équivalent en périphérie est subsonique par rapport à l'écoulement. Une condition suffisante de coupure d'un mode est satisfaite si le nombre de Mach tangentiel M_{nj} du mode est subsonique. En revanche, la grandeur $K_{nj}R_c/n$ étant toujours supérieure à 1, le fait que le nombre de Mach relatif M_{nj}^r soit supersonique est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le mode (n, j) soit passant.

4.3.3 Relation de dispersion

L'Eq. (4.12) spécifie un lien entre le nombre d'onde axial et la fréquence, appelé relation de dispersion. Dans un plan $(k, k_{nj}^{\pm})$, cette relation prend la forme d'une hyperbole admettant l'origine du repère comme centre de symétrie et les droites d'équations :

$$k_{nj} = \frac{k}{1+M}, \quad k_{nj} = -\frac{k}{1-M},$$

pour asymptotes, identiques pour tous les modes de conduit, puisqu'elles ne font pas intervenir les ordres modaux.

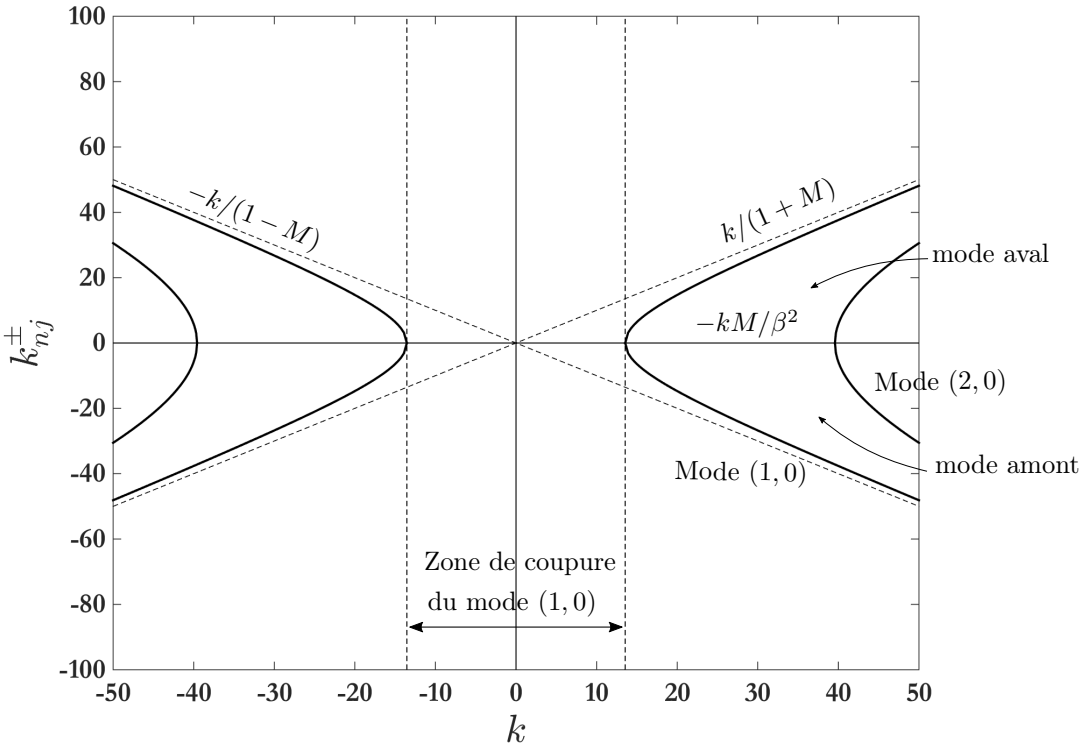


FIGURE 4.10 – Relation de dispersion des modes $(1,0)$ et $(2,0)$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$, de rayon au carter $R_c = 0.1$ m et un nombre de Mach nul.

Comme l'illustre la Fig. 4.10, présentée tout d'abord par Harel et Perulli [54], l'hyperbole est composée de deux branches. La branche obtenue pour $k < 0$ correspond aux modes tournants dans le sens antitrigonométrique, dont le nombre d'onde azimutal n est négatif, tandis que celle obtenue pour $k > 0$ correspond aux modes tournants positifs. Les courbes $k_{nj}^{\pm}(k)$ sont des représentations graphiques du comportement des modes (n, j), les sommets des hyperboles indiquant notamment leur pulsation de coupure. La distance séparant les deux sommets de l'hyperbole, projetée sur l'axe k représente la zone de coupure du mode, pour laquelle le mode ne peut se propager. Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement (Fig. 4.10), le signe du nombre d'onde axial désigne le sens de propagation du mode. S'il est positif, il est dit mode aval tandis qu'il est dit mode amont si le nombre d'onde axial est négatif. En présence d'un écoulement subsonique (Fig. 4.11), le nombre d'onde a toujours une partie réelle égale à $-kM/\beta^2$, qui traduit l'effet de convection des ondes acoustiques par l'écoulement, quelque soit leur sens de propagation. Par conséquent, la présence de l'écoulement se traduit par une rotation de l'hyperbole, dont l'axe de symétrie est la droite $-kM/\beta^2$. Trois cas sont alors observés. Si $k_{nj}^{\pm}(k)$ est positif, le mode est dit aval et se propage dans le sens de l'écoulement. Lorsque $k_{nj}^{\pm}(k) < -kM/\beta^2$, le mode est dit amont et l'onde acoustique se propage en remontant l'écoulement, par rapport au conduit. Enfin, si $-kM/\beta^2 < k_{nj}^{\pm}(k) < 0$, il s'agit d'un mode amont inverse : la partie propagative du nombre d'onde est négative et l'onde se propage dans le sens inverse de l'écoulement. Cependant, la partie convective

du nombre d'onde étant plus importante, le mode se propage vers l'aval par rapport au conduit. La convection, par la rotation de l'hyperbole, a également pour effet de réduire la zone de coupure modale, ce qui corrobore les résultats présentés en Fig. 4.7, également validés expérimentalement par Mason [89].

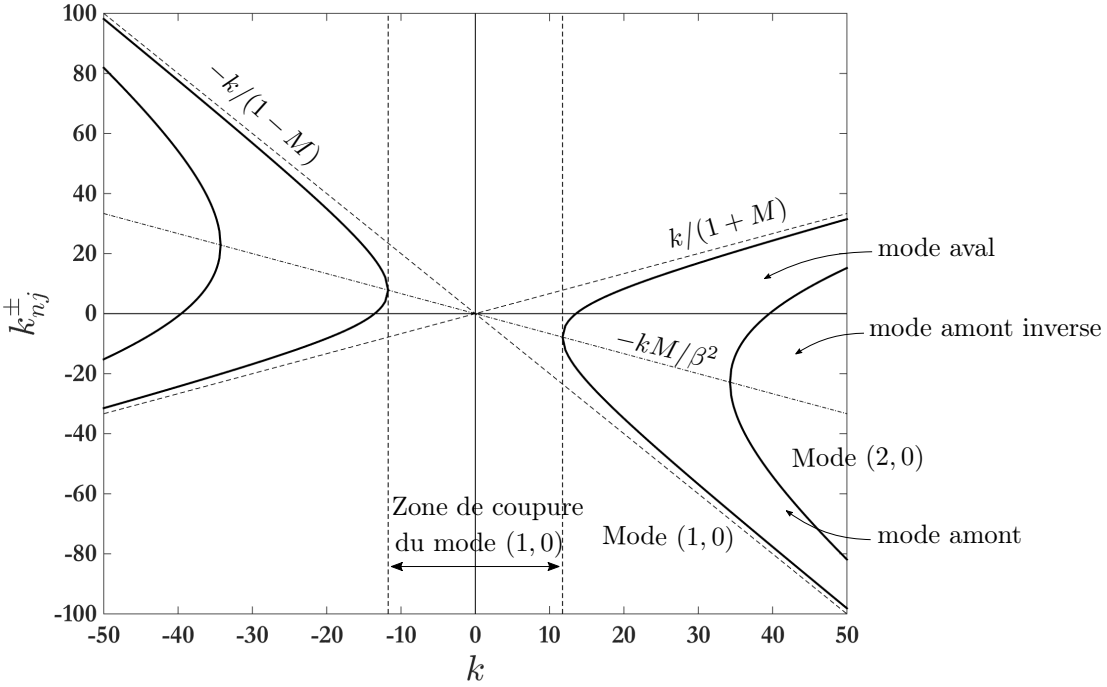


FIGURE 4.11 – Relation de dispersion des modes $(1,0)$ et $(2,0)$ pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$, de rayon au carter $R_c = 0.1$ m et un nombre de Mach $M = 0.5$.

La relation de dispersion permet également de définir les vitesses de phase c_p et de groupe c_g d'un mode (n, j) :

$$c_p = \frac{\omega}{k_{nj}^{\pm}} = W_x \pm c_0\sqrt{1+\left(K_{nj}/k_{nj}^{\pm}\right)^2}, \quad c_g = W_x \pm \frac{c_0}{\sqrt{1+\left(K_{nj}/k_{nj}^{\pm}\right)^2}}.$$

La Sec. 2.1 a détaillé la signification physique de ces deux grandeurs. La vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation le long du conduit de l'énergie acoustique moyennée dans la section (Harel et Perulli [54], Farassat et Myers [31]). Le signe de la vitesse de groupe reste identique tant que la valeur de $k_{nj}^{\pm}$ reste du même côté de la droite $-kM/\beta^2$, alors que les signes de la vitesse de phase et de $k_{nj}^{\pm}$ changent en même temps. Si les vitesses de phase et de groupe sont positives, le mode est dit aval. Si elles sont négatives, il s'agit d'un mode amont. Enfin, lorsque la vitesse de groupe est positive tandis que la vitesse de phase est négative, le mode est dit amont inverse.

4.3.4 Interprétation géométrique de la propagation guidée

Dans un cadre bidimensionnel, l'étude du canal plan en Sec. 2.1 a montré qu'à une fréquence donnée, un mode est associé à un angle de propagation par rapport à l'axe. Dans le cadre tridimensionnel, cette approche peut être étendue pour son intérêt explicatif, bien qu'elle ne soit pas ici détaillée mathématiquement. Si une onde acoustique d'ordre (n, j) se propage dans un conduit annulaire sans écoulement moyen, la relation suivante

$$k^2 = k_{nj}^{\pm 2} + K_{nj}^2, \tag{4.17}$$

est satisfaite et fait apparaître $k_{nj}^{\pm}$ et K_{nj} comme les projections du vecteur d'onde total $\mathbf{k}$ ($k = |\mathbf{k}|$), sur l'axe et dans la section transversale du conduit, $\mathbf{k}$ définissant une direction de propagation locale. Le rapport $K_{nj}/k_{nj}^{\pm}$ représente par conséquent la tangente de l'angle de propagation par rapport à l'axe. Lorsque le nombre d'onde azimutal n est nul, K_{0j} est porté par la direction radiale, le champ acoustique est à symétrie de révolution et $\mathbf{k}$ est contenu dans le plan méridien, contenant l'axe du conduit (Fig. 4.12).

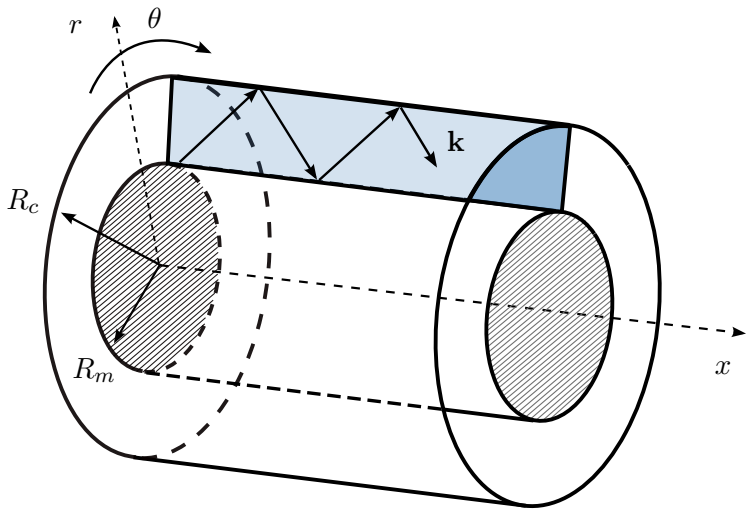


FIGURE 4.12 – Propagation acoustique dans un plan méridien du conduit annulaire d'une onde d'ordre modal azimutal nul.

Lorsque n est non nul, le champ acoustique se propage avec des surfaces d'égale phase ayant la forme d'une hélice, dont le pas dépend des ordres modaux. L'angle de propagation dans la direction azimutale augmente également avec l'ordre n. Pour les petits nombres d'onde azimutaux, l'onde acoustique est réfléchie par le conduit aux rayons du moyeu et du carter, tout en effectuant une rotation autour de l'axe. Par contre, si l'ordre modal devient important, l'angle de propagation dans la direction azimutale le devient également et l'onde acoustique n'est réfléchie que par le conduit au rayon du carter, et non plus au rayon du moyeu. Ainsi le champ acoustique ne varie que dans une bande de rayon plus ou moins large, près du rayon externe du conduit. Il s'agit d'un effet dit de peau, nommé ainsi par comparaison avec le phénomène électromagnétique qui décrit le fait qu'à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu'en surface des conducteurs.

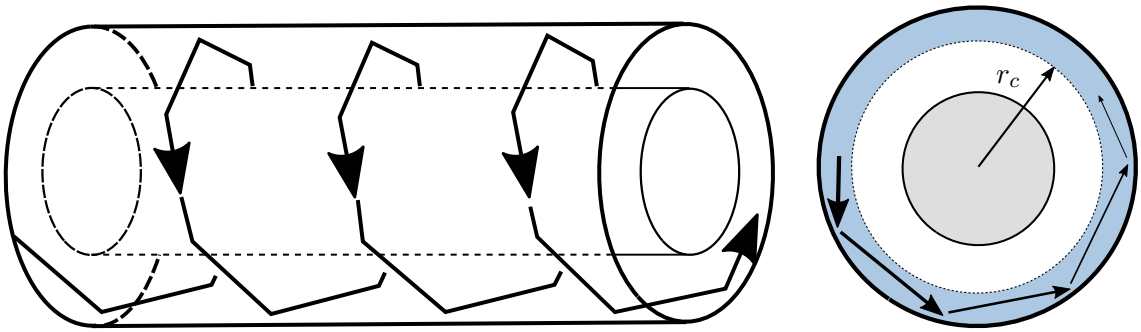
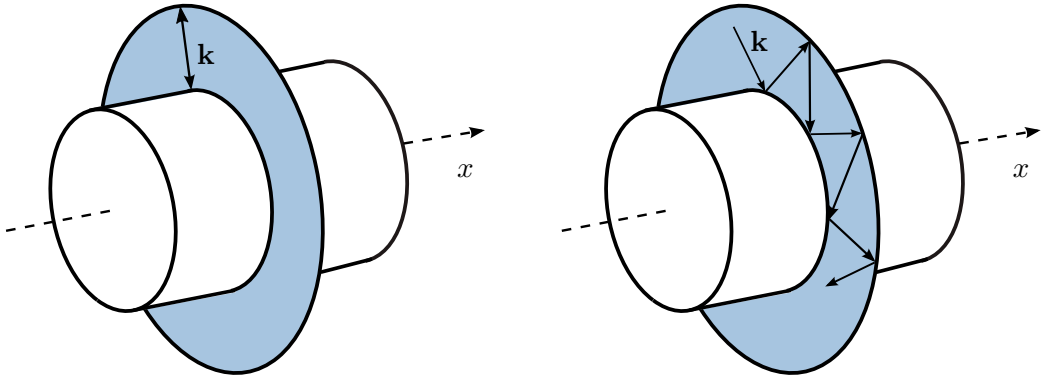


FIGURE 4.13 – Représentation de l'effet de peau : réflexions d'un rayon acoustique d'ordre n élevé par la paroi externe du conduit annulaire (a). Propagation acoustique dans une bande de rayon définie par le rayon caustique r_c (b). Les rayons acoustiques sont projetés dans un seul plan axial.

Le rayon interne de cette bande a été déterminé par Chapman [17] sous le nom de rayon caustique (*caustic radius*) dans son approche géométrique de la propagation guidée sous la forme de rayons réfléchis par le conduit. Dans ce cas, l'onde acoustique se propage localement par la succession de réflexions sur le rayon externe du conduit en formant une hélice à segments droits (*Piecewise linear helix*, Fig.

4.13). Mathématiquement, le rayon caustique r_c définit le rayon au-delà duquel la fonction de Bessel de première espèce commence à osciller. Comme montré en Fig. 4.4, ce rayon dépend des ordres modaux azimutal et radial. Si le rayon est inférieur au rayon caustique, la fonction de forme radiale est presque nulle. Par conséquent, ce rayon définit également le rayon au-delà duquel la puissance acoustique est transportée.



(a) (b)

FIGURE 4.14 – Représentation de la coupure modale dans une section droite du conduit. (a) : Résonance radiale ($n = 0$) et (b) : résonance tournante ($n \neq 0$).

En l'absence d'écoulement, la coupure traduit exactement l'annulation de la composante $k_{nj}^{\pm}$: le vecteur d'onde reste dans le plan de la section droite et il n'y a plus de propagation le long de l'axe. Si $n = 0$, la coupure correspond à l'établissement d'une onde stationnaire avec résonance radiale (Fig. 4.14). Si $n \neq 0$, il s'agit d'une résonance tournante, le champ acoustique tourne autour de l'axe sans progresser. Dans les deux cas, les fronts d'ondes sont parallèles à l'axe. Le rapport $K_{nj}/k_{nj}^{\pm}$ indique par ailleurs que la vitesse de phase, soit la vitesse de trace des fronts d'ondes à la paroi, est infinie tandis que la vitesse de groupe est nulle. Lorsque la fréquence dépasse la fréquence de coupure d'un mode donné, son angle de propagation dans le plan méridien se rapproche de l'axe et permet la propagation de l'onde. En présence d'un écoulement, puisque les parois du conduit sont considérées comme rigides, un changement de repère doit être effectué mais le raisonnement demeure identique. Le paramètre de coupure pour le conduit s'écrit alors :

$$\xi = \frac{k}{\beta K_{nj}}. \tag{4.18}$$

Si ce paramètre est positif, le mode est passant tandis qu'il est coupé dans le cas contraire.

4.4 Expression des potentiels acoustiques

En accord avec l'équation de Helmholtz convectée et les conditions aux limites d'un conduit annulaire précisées dans la section précédente, l'onde incidente est composée d'un mode d'ordres azimutal et radial (n, j) et dont le champ potentiel associé s'écrit :

$$\phi_i = f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{+}x}, \quad x \leq 0, \tag{4.19}$$

où la fonction radiale $f_{nj}(r)$ est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel d'ordre n, de première espèce J_n et de seconde espèce Y_n, selon les conventions de Rienstra [132] :

$$f_{nj}(r) = N_{nj}\left[\cos(\tau_{nj})J_n(K_{nj}r) - \sin(\tau_{nj})Y_n(K_{nj}r)\right]. \tag{4.20}$$

Le nombre d'onde axial s'exprime par la relation :

$$k_{nj}^{+} = \frac{-Mk + \overline{k_{nj}^{+}}}{\beta^2}, \quad \overline{k_{nj}^{+}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K_{nj}^2}.$$

Quatre champs acoustiques sont produits par la diffraction de l'onde incidente par la grille d'aubes : les champs réfléchis ϕ_r et transmis ϕ_t dans les conduits annulaires en amont et en aval de la grille, ainsi que les champs se propageant vers l'amont et l'aval dans les canaux inter-aubes, nommés ϕ_u^m et ϕ_d^m, respectivement (Fig. 4.3). Les champs potentiels réfléchis ϕ_r et transmis ϕ_t admettent une décomposition en modes de Floquet [95], imposée par le principe de trace. Ils s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_t \end{pmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} R_{n_st} \\ T_{n_st} \end{pmatrix} f_{n_st}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^-_{n_st}x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_st}(x-c)} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ c \leq x \end{cases}, \tag{4.21}$$

où :

$$f_{n_st}(r) = N_{n_st}\left[\cos(\tau_{n_st})J_{n_s}(K_{n_st}r) - \sin(\tau_{n_st})Y_{n_s}(K_{n_st}r)\right],$$

$$k^{\pm}_{n_st} = \frac{-Mk \pm \overline{k^{\pm}_{n_st}}}{\beta^2}, \quad \overline{k^{\pm}_{n_st}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K^2_{n_st}}, \quad n_s = n + sV.$$

Le champs acoustiques réfléchis et transmis sont ainsi le résultat de la modulation de l'onde incidente par la grille d'aubes. Les champs potentiels ϕ_u^m et ϕ_d^m dans les canaux inter-aubes d'ordre m s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_d^m \\ \phi_u^m \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} D^0_{n_qp} \\ U^0_{n_qp} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} f_{n_qp}(r) \cos\left[n_q\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right)\right] \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_qp}x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^-_{n_qp}(x-c)} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq x \leq c, \tag{4.22}$$

où $n_q = qV/2$. À cause de la condition de rigidité des parois des canaux, l'ordre azimutal n_q introduit des fonctions de Bessel d'ordre demi-entier. Ainsi, les fonctions radiales $f_{n_qp}(r)$ sont définies comme suit :

$$f_{n_qp}(r) = N_{n_qp}\left[\cos(\tau_{n_qp})J_{n_q}(K_{n_qp}r) - \sin(\tau_{n_qp})Y_{n_q}(K_{n_qp}r)\right].$$

Les nombres d'ondes axiaux s'écrivent :

$$k^{\pm}_{n_qp} = \frac{-Mk \pm \overline{k^{\pm}_{n_qp}}}{\beta^2}, \quad \overline{k^{\pm}_{n_qp}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K^2_{n_qp}}.$$

4.5 Équations de raccordement

La continuité de la pression et de la vitesse acoustiques est de nouveau imposée aux interfaces du stator. Deux ensembles d'équations sont écrits en $x = 0$ et en $x = c$. Le vecteur $\mathbf{\Gamma}$, dans une configuration tridimensionnelle, s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_\gamma(r,\theta,x) = \begin{pmatrix} p^{ac}_\gamma(r,\theta,x) \\ \mathbf{v}^{ac}_\gamma(r,\theta,x)\cdot\mathbf{e}_x \end{pmatrix}, \quad \gamma = i,r,t,d,u.$$

Les équations de raccordement s'écrivent :

$$\mathbf{\Gamma}_i(r,\theta,0) + \mathbf{\Gamma}_r(r,\theta,0) = \mathbf{\Gamma}_d(r,\theta,0) + \mathbf{\Gamma}_u(r,\theta,0), \quad \forall r, \quad \forall\theta \tag{4.23}$$

$$\mathbf{\Gamma}_d(r,\theta,c) + \mathbf{\Gamma}_u(r,\theta,c) = \mathbf{\Gamma}_t(r,\theta,c), \quad \forall r, \quad \forall\theta. \tag{4.24}$$

Ce système fait intervenir quatre inconnues ($\mathbf{R}$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{U}^0$, $\mathbf{T}$) et quatre équations de raccordement. À chaque interface, les propriétés d'orthogonalité des modes sont utilisées pour obtenir des équations matricielles inversibles. Par la suite, la procédure de résolution itérative, détaillée en Sec. 2.4.3, est employée pour prendre en compte les diffractions multiples aux interfaces.

Bien que la technique de projection orthogonale puisse être réalisée à partir des deux bases modales, seule la base associée aux ondes se propageant dans les conduits annulaires sera utilisée.

4.5.1 Raccordement modal à l'interface de bord d'attaque

À l'interface de bord d'attaque ($x = 0$) et pour un canal inter-aubes de référence ($m = 0$), les équations de raccordement s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\begin{aligned}&(k - Mk^+_{nj}) f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} (k - Mk^-_{n_s t}) R_{n_s t} f_{n_s t}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \\ = &\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[(k - Mk^+_{n_q p}) D^0_{n_q p} + (k - Mk^-_{n_q p}) U^0_{n_q p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_q p} c} \right] f_{n_q}(r) \cos(n_q\theta). \end{aligned} \tag{4.25}$$

2. Continuité de la vitesse axiale :

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}k^+_{nj} f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \mathrm{i}k^-_{n_s t} R_{n_s t} f_{n_s t}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \\ = &\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{i} \left[k^+_{n_q p} D^0_{n_q p} + k^-_{n_q p} U^0_{n_q p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_q p} c} \right] f_{n_q}(r) \cos(n_q\theta). \end{aligned} \tag{4.26}$$

En accord avec l'Eq. (4.15), une première projection modale est effectuée en utilisant le produit scalaire suivant :

$$\int_0^{2\pi/V} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_\mu\theta} (\bullet) \mathrm{d}\theta, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad n_\mu = n + \mu V, \tag{4.27}$$

menant au système :

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{V} \delta_{\mu,0} (k - Mk^+_{n_\mu j}) f_{n_\mu j}(r) + \frac{2\pi}{V} \sum_{t=0}^{+\infty} (k - Mk^-_{n_\mu t}) R_{n_\mu t} f_{n_\mu t}(r) \\ = &\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[(k - Mk^+_{n_q p}) D^0_{n_q p} + (k - Mk^-_{n_q p}) U^0_{n_q p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_q p} c} \right] f_{n_q}(r) \varphi_{n_\mu, q}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{V} \delta_{\mu,0} \mathrm{i}k^+_{n_\mu j} f_{n_\mu j}(r) + \frac{2\pi}{V} \sum_{t=0}^{+\infty} \mathrm{i}k^-_{n_\mu t} R_{n_\mu t} f_{n_\mu t}(r) \\ = &\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\mathrm{i}k^+_{n_q p} D^0_{n_q p} + \mathrm{i}k^-_{n_q p} U^0_{n_q p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_q p} c} \right] f_{n_q}(r) \varphi_{n_\mu, q}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

où :

$$\varphi_{\mu,q} = \int_0^{2\pi/V} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_\mu\theta} \cos(n_q\theta) \, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}n_\mu \left[(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u} - 1 \right]}{n_\mu^2 - n_q^2}, & \text{si} \quad n_q \neq n_\mu, \\ \dfrac{\pi}{V}(1 + \delta_{q,0}), & \text{si} \quad n_q = n_\mu. \end{cases} \tag{4.30}$$

Ce nouveau système est de nouveau réduit en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes radiaux, grâce au produit scalaire suivant :

$$\int_\sigma^1 f_{n_\mu \nu}(r) (\bullet) r \mathrm{d}r, \quad n_\mu = n + \mu V, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \sigma = \frac{R_m}{R_c},$$

menant au système suivant :

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{V}\delta_{\mu,0}(k-Mk^{+}_{n_\mu\nu})+\frac{2\pi}{V}(k-Mk^{-}_{n_\mu\nu})R_{n_\mu\nu}\\ =\;&\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k-Mk^{+}_{n_qp})D^0_{n_qp}+(k-Mk^{-}_{n_qp})U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}c}\right]\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{V}\delta_{\mu,0}\mathrm{i}k^{+}_{n_\mu\nu}+\frac{2\pi}{V}\mathrm{i}k^{-}_{n_\mu\nu}R_{n_\mu\nu}\\ =\;&\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}D^0_{n_qp}+\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}c}\right]\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\end{aligned}\tag{4.32}$$

où :

$$\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}=\int_\sigma^1 f_{n_\mu\nu}(r)f_{n_qp}(r)r\mathrm{d}r,\quad n_\mu=n+\mu V,\quad n_q=\frac{qV}{2}.$$

Le calcul du $\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}$ constitue un problème analytique qui n'a pas encore été résolu. En effet, à cause de l'ordre demi-entier des fonctions de Bessel $f_{n_qp}(r)$, les deux fonctions ne sont plus orthogonales entre elles et le produit scalaire ne se réduit plus à un symbole de Kronecker. Les modes radiaux sont des fonctions composées de fonctions de Bessel de première et seconde espèces. La piste la plus avancée pour permettre le calcul analytique du terme $\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}$ nécessite le recours aux intégrales de Weber-Schafheitlin. Cependant, la résolution des ces intégrales constitue un problème tout à fait récent dans la communauté mathématique [72, 168] et leur utilisation dans la présente configuration demeure complexe. En conclusion, ce produit scalaire est calculé numériquement dans notre méthode.

Afin de permettre l'inversion matricielle, les doublets d'indices (μ,ν) et (q,p) sont réduits aux variables η et ϱ :

$$\eta \;=\; (\mu+(N_\mu-1)/2)\times N_\nu+\nu,\quad \mu\in[-(N_\mu-1)/2,(N_\mu-1)/2],\quad \nu\in[0,N_\nu-1],$$

$$\varrho=q\times N_p+p,\quad q\in[0,N_q-1],\quad p\in[0,N_p-1].$$

L'équation matricielle (4.33) synthétise les équations de raccordement à l'interface de bord d'attaque :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^1_p & \mathbf{B}^1_p\\ \underline{\mathbf{A}^1_v} & \underline{\mathbf{B}^1_v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{D}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^1_p\\ \mathbf{C}^1_v\end{pmatrix},\tag{4.33}$$

où :

$$\begin{aligned}A^1_p(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left((k-Mk^{-}_{n_\mu\nu})\right),\\ A^1_v(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left(\mathrm{i}k^{-}_{n_\mu\nu}\right),\\ B^1_p(\eta,\varrho) &= -(k-Mk^{+}_{n_qp})\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\ B^1_v(\eta,\varrho) &= -\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\ C^1_p(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(k-Mk^{-}_{n_qp})U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}-\frac{2\pi}{V}\delta_{\mu,0}(k-Mk^{+}_{n_\mu\nu}),\\ C^1_v(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}-\frac{2\pi}{V}\delta_{\mu,0}\mathrm{i}k^{+}_{n_\mu\nu}.\end{aligned}$$

Pour la phase d'initialisation ($g = 0$) de la procédure itérative, les amplitudes des ondes se propageant vers l'amont dans les canaux inter-aubes sont considérées nulles ($\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$). La résolution de l'Eq. (4.33) permet la détermination des amplitudes modales des champs ϕ_r et ϕ_d^0.

4.5.2 Raccordement modal à l'interface de bord de fuite

À l'interface de bord de fuite ($x = c$), les équations de raccordement en pression et en vitesse acoustiques s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k-Mk_{n_qp}^{+})D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}c}+(k-Mk_{n_qp}^{-})U_{n_qp}^{0}\right]f_{n_q}(r)\cos(n_q\theta) \;=\; \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}(k-Mk_{n_st}^{+})T_{n_st}f_{n_st}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}. \tag{4.34}$$

2. Continuité de la vitesse axiale :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}c}+\mathrm{i}k_{n_qp}^{-}U_{n_qp}^{0}\right]f_{n_q}(r)\cos(n_q\theta) \;=\; \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\mathrm{i}k_{n_st}^{+}T_{n_st}f_{n_st}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}. \tag{4.35}$$

Après projection orthogonale sur la base modale associée au conduit annulaire, le système devient :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k-Mk_{n_qp}^{+})D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{-}c}+(k-Mk_{n_qp}^{-})U_{n_qp}^{0}\right]\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu}=\frac{2\pi}{V}(k-Mk_{n_\mu\nu}^{+})T_{n_\mu\nu}, \tag{4.36}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{-}c}+\mathrm{i}k_{n_qp}^{-}U_{n_qp}^{0}\right]\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu}=\frac{2\pi}{V}\mathrm{i}k_{n_\mu\nu}^{+}T_{n_\mu\nu}. \tag{4.37}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle équivalente :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}_p^2 & \mathbf{B}_p^2\\ \underline{\mathbf{A}_v^2} & \underline{\mathbf{B}_v^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{U}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_p^2\\ \mathbf{C}_v^2\end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_p^2(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left((k-Mk_{n_\mu\nu}^{+})\right),\\
A_v^2(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left(\mathrm{i}k_{n_\mu\nu}^{+}\right),\\
B_p^2(\eta,\varrho) &= -(k-Mk_{n_qp}^{-})\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu},\\
B_v^2(\eta,\varrho) &= -\mathrm{i}k_{n_qp}^{-}\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu},\\
C_p^2(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(k-Mk_{n_qp}^{+})D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu},\\
C_v^2(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}D_{n_qp}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^{+}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Enfin, l'inversion matricielle de l'Eq. (4.38) permet la détermination des amplitudes modales $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}^0$.

4.6 Résultats

4.6.1 Validation paramétrique

La troncature modale introduit des inexactitudes dans les équations de raccordement, selon le nombre de modes choisi. La continuité des champs de la pression et de la vitesse axiale acoustiques est examinée après une brève étude sur le bilan de puissance selon le nombre de modes. Les paramètres du cas test, représentatif d'un ventilateur axial subsonique, sont détaillés dans la Tab. 4.2 :

Géométrie du stator	Onde acoustique incidente
$M = 0.07, \quad V = 10, \quad \sigma = 0.62, \quad c = 0.046$ m,	$n = 7, \quad j = 0, \quad f = 8550$ Hz

TABLE 4.2 – Paramètres du cas test - Validation tridimensionnelle.

Les nombres de Helmholtz correspondants sont $kR_c = 13.24$ et $kc = 7.27$. Les calculs ont été réalisés pour différents nombres de modes azimutaux $N_s \in [21, 41, 81, 161, 321]$ et de modes radiaux $N_t \in [4, 8, 12]$. Le problème a été traité avec uniquement l'interface de bord d'attaque et pour chaque simulation, le même nombre de modes a été choisi pour les milieux de part et d'autre de l'interface.

Puissance acoustique

D'après les calculs détaillés en annexe C, la puissance d'une onde acoustique exprimée par son potentiel se propageant dans un conduit s'écrit :

$$\mathcal{P}_i = \pi k R_c^2 Z_0 \, \overline{k_{nj}^+} \, |A_{nj}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nj}^+} \in \mathbb{R}, \quad Z_0 = \rho_0 c_0. \tag{4.39}$$

Les puissances acoustiques associées aux ondes diffractées ϕ_r et ϕ_t par la grille d'aubes annulaire s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r \\ \mathcal{P}_t \end{pmatrix} = \pi k R_c^2 Z_0 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\overline{k_{n_s t}^-} \\ \overline{k_{t_{n_s t}}^+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |R_{n_s t}|^2 \\ |T_{n_s t}|^2 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_s t}^\pm} \in \mathbb{R}. \tag{4.40}$$

Dans les canaux inter-aubes, les puissances acoustiques associées aux champs ϕ_d^0 et ϕ_u^0 s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_d \\ \mathcal{P}_u \end{pmatrix} = \frac{\pi R_c^2 k Z_0}{2} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} (1+\delta_{q,0}) \, \overline{k_{n_q p}^+} \\ -(1+\delta_{q,0}) \, \overline{k_{n_q p}^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |D_{n_q p}|^2 \\ |U_{n_q p}|^2 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_q p}^\pm} \in \mathbb{R}. \tag{4.41}$$

N_s	21	41	81	161	321
$N_t = 4$	0.0805	0.0608	0.0568	0.0562	0.0559
$N_t = 8$	0.0463	0.0206	0.0146	0.0134	0.0132
$N_t = 12$	0.0432	0.0145	0.0075	0.0060	0.0058

FIGURE 4.15 – Différence de puissance acoustique $\Delta\mathcal{P}$ (%) à l'interface de bord d'attaque en fonction des nombres de modes azimutaux N_s et radiaux N_t.

L'indicateur représentatif de l'erreur du bilan de puissance à l'interface, défini par l'Eq. (2.87) est calculé pour les différents nombres de modes et présenté dans la Tab. 4.15. Le bilan de puissance acoustique, de l'ordre du centième de pour cent, reste globalement très satisfaisant bien qu'il soit beaucoup

moins précis que pour une configuration bidimensionnelle. De plus, l'augmentation des nombres de modes ne permet d'améliorer le bilan de puissance que d'un ordre de grandeur. Enfin, seule l'augmentation simultanée des nombres de modes azimutaux et radiaux permet d'accroitre la précision du calcul. Accroître l'un sans l'autre n'entraîne pas de modification significative.

Continuité des champs de pression acoustique et de vitesse axiale à l'interface de bord d'attaque

La continuité des champs de la pression acoustique et de la vitesse axiale est présentée en Figs. 4.16 et 4.17 pour différents nombres de modes azimutaux et radiaux sélectionnés pour la troncature modale. Trois cas sont présentés pour montrer l'évolution de la continuité des champs à l'interface lorsque le nombre de modes augmente. Ces cas comportent $N_s = 21$ et $N_t = 4$ modes (a-b) ; $N_s = 81$ et $N_t = 4$ modes (c-d) ; $N_s = 321$ et $N_t = 12$ modes (e-f). Comme l'illustrent les figures, la continuité du champ de pression acoustique est parfaitement satisfaite dans la direction azimutale, excepté au voisinage des aubes et dans la direction radiale, avec une faible amélioration apportée par l'accroissement du nombre de modes sélectionnés. En revanche, la continuité de la vitesse axiale montre des divergences notamment près des aubes. L'augmentation du nombre de modes permet d'accroître la précision des calculs, mais fait apparaître des oscillations près des parois des canaux inter-aubes. Dans la direction radiale, la continuité est satisfaite et se précise lorsque N_s et N_t augmentent.

Le calcul de la fonction de forme radiale $f_{n_s t}(r)$ peut devenir délicat lorsque l'ordre azimutal diffracté ($n_s = n+SV$) devient grand ($n_s > 150$). Pour ces ordres azimutaux, les oscillations des fonctions de Bessel de première espèce ne surviennent que lorsque l'argument est élevé. Ainsi, la fonction de Bessel de seconde espèce tend vers moins l'infini lorsque le rayon se rapproche du rayon du moyeu et celle de première espèce et sa dérivée tendent vers zéro, définissant un effet de peau. La variable $\tau_{n_s t}$ tend aussi vers zéro de sorte que le produit $\sin(\tau_{n_s t})Y_{n_s}(K_{n_s t}r)$ tende vers zéro pour éviter les singularités. Cependant, des tests numériques montrent que lorsque τ est évalué à partir des dérivées des fonctions de Bessel calculées au rayon du carter, cette limite n'est pas suffisamment atteinte. Dans ces conditions, la fonction de Bessel de seconde espèce domine pour des valeurs de rayon près du moyeu. Cette évaluation, erronée par rapport à la physique, entraîne que la dérivée de la fonction de forme radiale ne s'annule plus au rayon du moyeu. La base de fonctions associées n'est également plus orthonormée. La prise en compte de telles fonctions dans le calcul de raccordement modal implique une divergence des résultats. Les écarts de puissances sont importants et des modes évanescents sont estimées avec une amplitude démesurée, dégradant de manière significative la continuité aux interfaces. Pour résoudre ce problème, le terme $\tau_{n_s t}$ doit être déterminé avec une grande précision et le produit $\sin(\tau_{n_s t})Y_{n_s}(K_{n_s t}r)$ doit s'annuler lorsque le nombre d'onde azimutal diffracté devient très grand. Numériquement, évaluer $\tau_{n_s t}$ à partir de valeurs calculées au rayon du moyeu, plutôt qu'au rayon du carter permet d'obtenir cette garantie. La dérivée nulle de la fonction $f_{n_s t}(r)$ au rayon du moyeu est à nouveau vérifiée et l'orthonormalité du produit scalaire est retrouvée. Ce problème est notamment mentionné par Posson *et al.* [122].

Le nombre de modes choisi pour la troncature modale est également dépendant du nombre d'onde azimutal de l'onde incidente. En effet, lorsque celui-ci est élevé, les fonctions de Bessel qui composent la fonction $f_{n_s t}(r)$ commencent à osciller à un rayon de plus en plus important, en montrant un effet de peau. En plus du problème précédemment évoqué, le champ acoustique subit de fortes variations presque uniquement dans la zone au-delà du rayon caustique. Par conséquent, un nombre important de modes radiaux sont nécessaires pour représenter correctement ces variations très localisées. La Fig. 4.18 montre la continuité des champs de pression et de vitesse axiale, dans les directions azimutale et radiale, lorsqu'un mode d'ordre $n = 45$ est diffracté par la grille d'aube, dans une configuration identique à celle détaillée en Tab. 4.15. Les nombres de modes azimutaux et radiaux sont égaux à $N_s = 321$ et $N_t = 8$. Alors que la continuité est satisfaite dans la direction azimutale (Fig. 4.18-a-b), de très forts écarts apparaissent pour la continuité radiale lorsque le rayon est supérieur au rayon caustique. Cette zone est pourtant primordiale puisqu'elle est le lieu où la puissance acoustique est transportée. Par conséquent, la troncature modale doit être finement étudiée pour éviter ce genre de comportement.

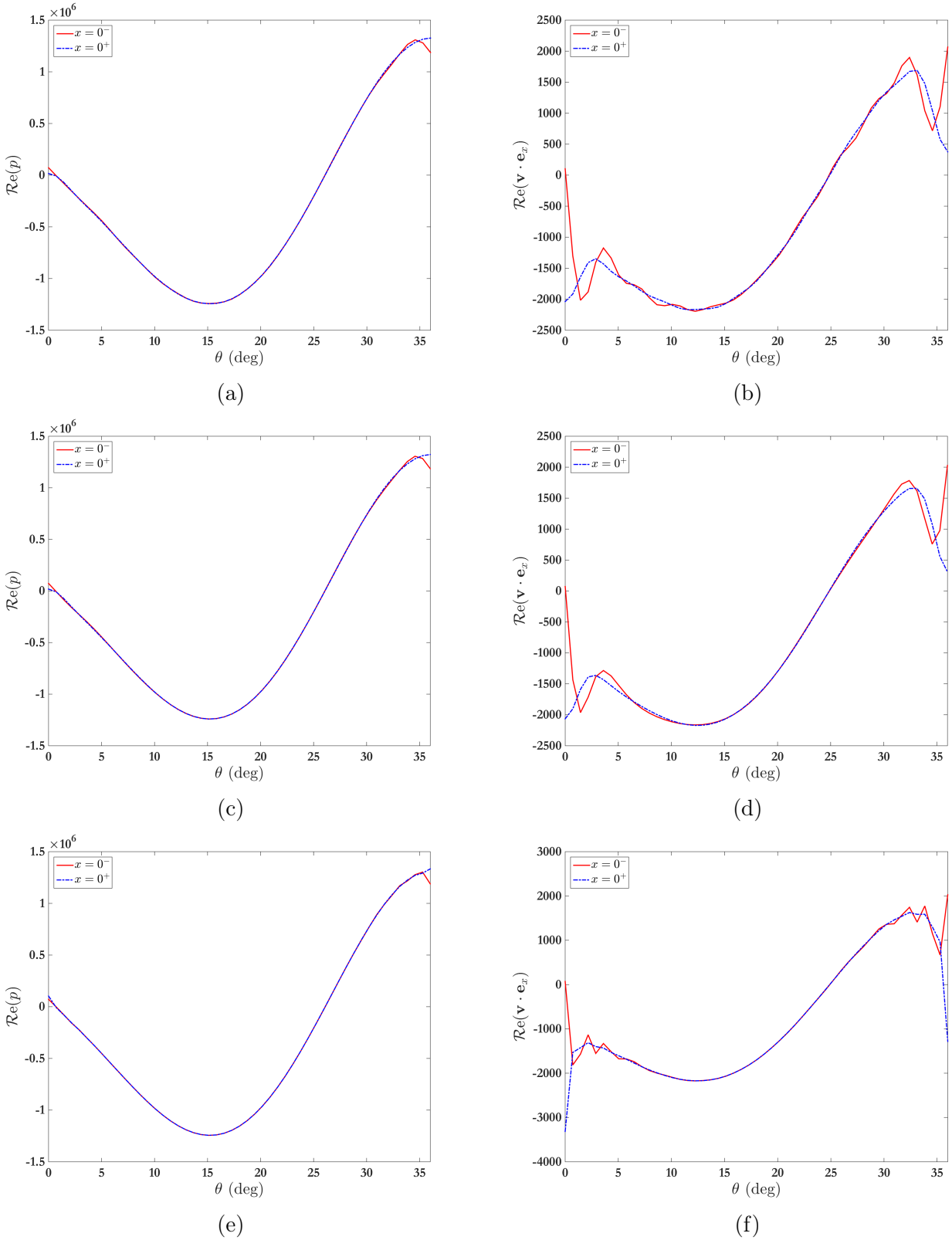


FIGURE 4.16 – Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 4$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 12$ (e-f).

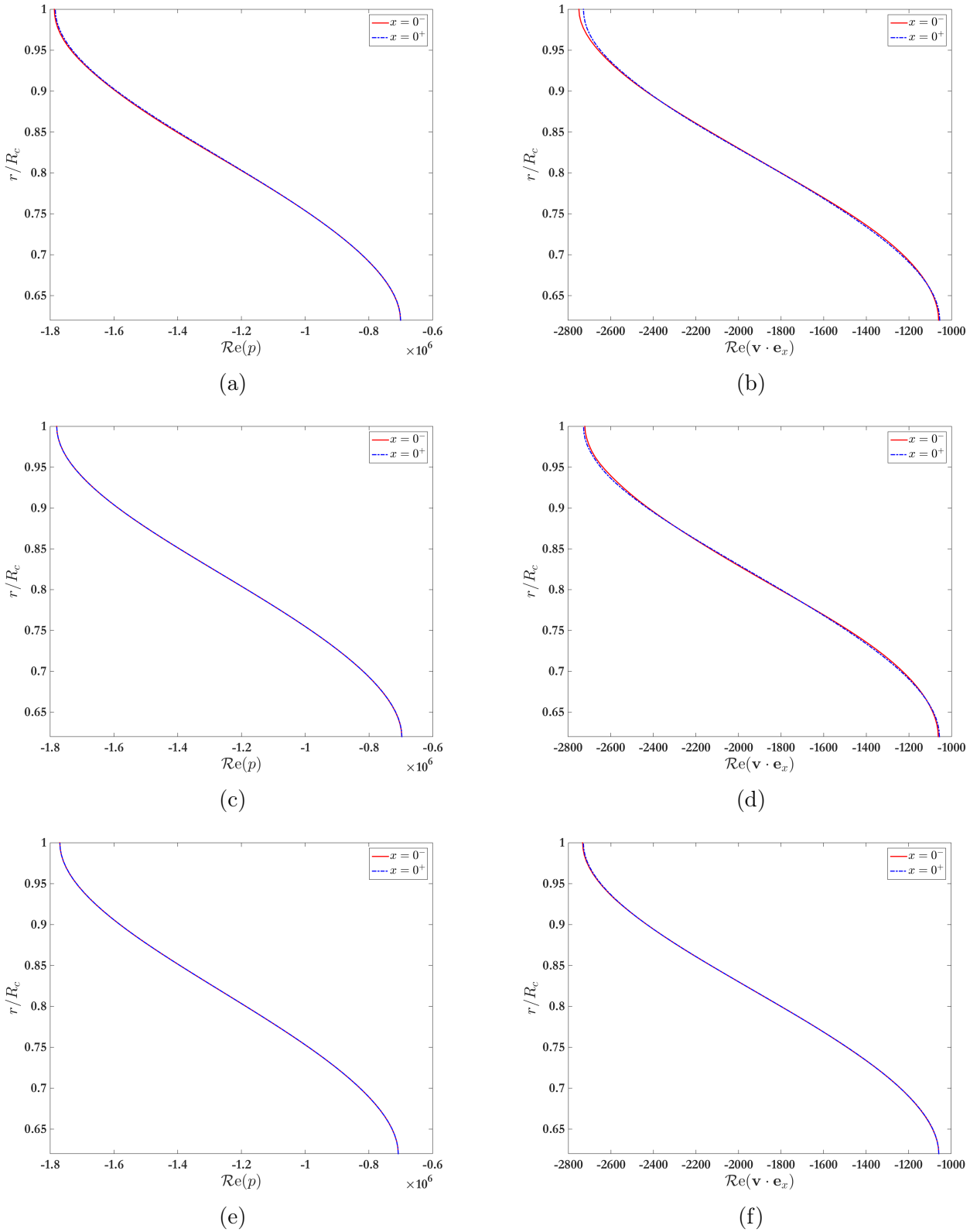


FIGURE 4.17 – Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-largeur d'un canal inter-aubes avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 4$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 12$ (e-f).

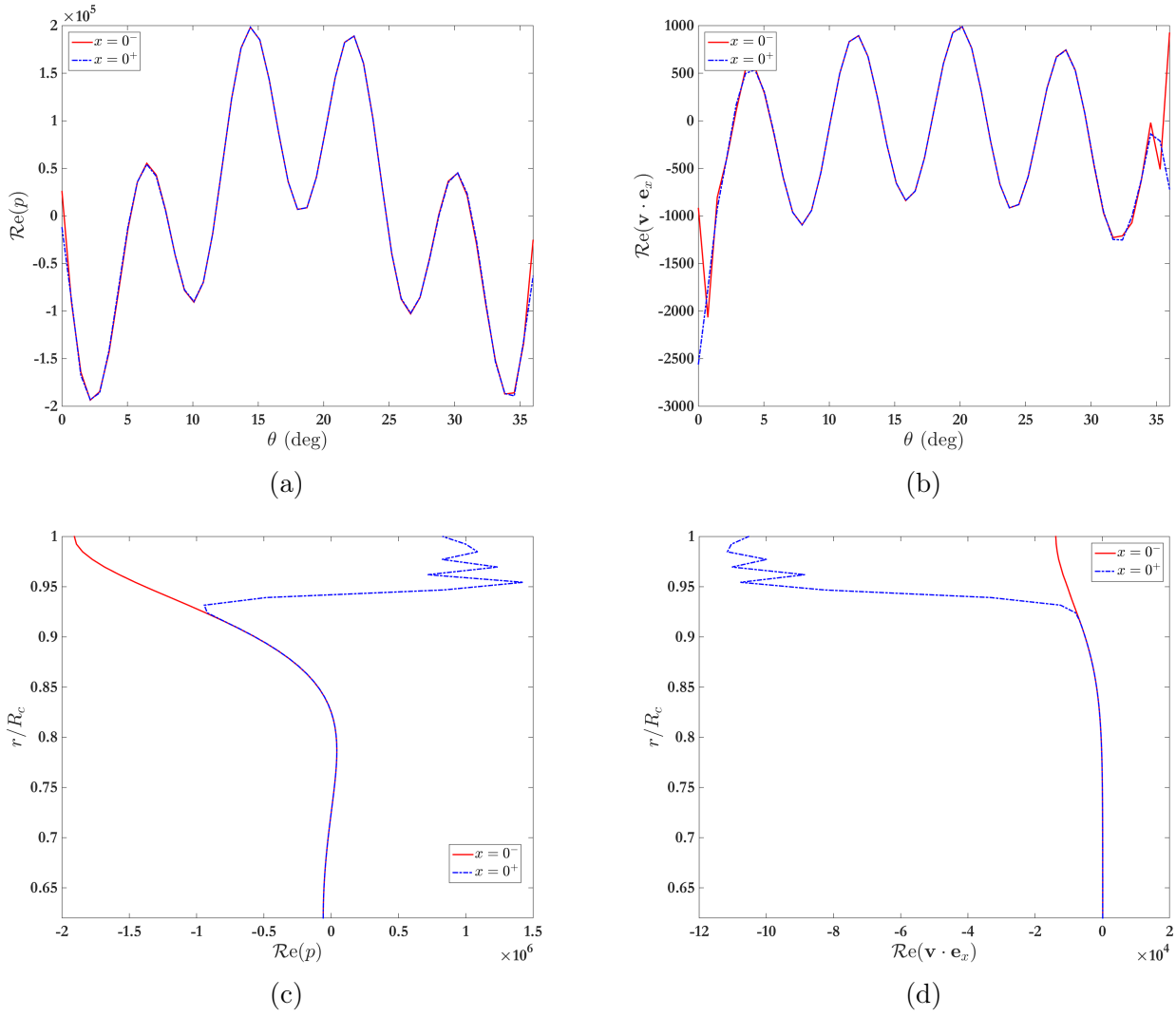


FIGURE 4.18 – Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustique (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure (a-b) et à mi-largeur de canal inter-aubes (c-d) avec la technique de raccordement modal lorsqu'une onde acoustique de nombre d'onde azimutal $n = 45$ est diffractée par la grille d'aubes. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont $N_s = 321$ et $N_t = 8$.

4.6.2 Cas test

La diffraction d'une onde acoustique hélicoïdale par une grille d'aubes annulaire est étudiée dans cette section à partir d'un cas test représentatif d'un ventilateur subsonique. Les paramètres principaux sont détaillés dans la Tab. (4.3).

Géométrie du stator		Onde acoustique incidente	
		f	8000 Hz
V	15	n	11
$kc = kR_c$	14.8	j	0
$\sigma = R_m/R_c$	0.5	M	0.06

TABLE 4.3 – Paramètres d'entrée du cas-test de diffraction tridimensionnelle.

Le champ de pression acoustique est illustré en Fig. 4.19 par une coupe cylindrique (Fig. 4.19-a) au rayon $R_0 = 0.75\ R_c$ et une coupe méridienne à un angle constant $\theta_0 = \pi/V$ (Fig. 4.19-b). Ces

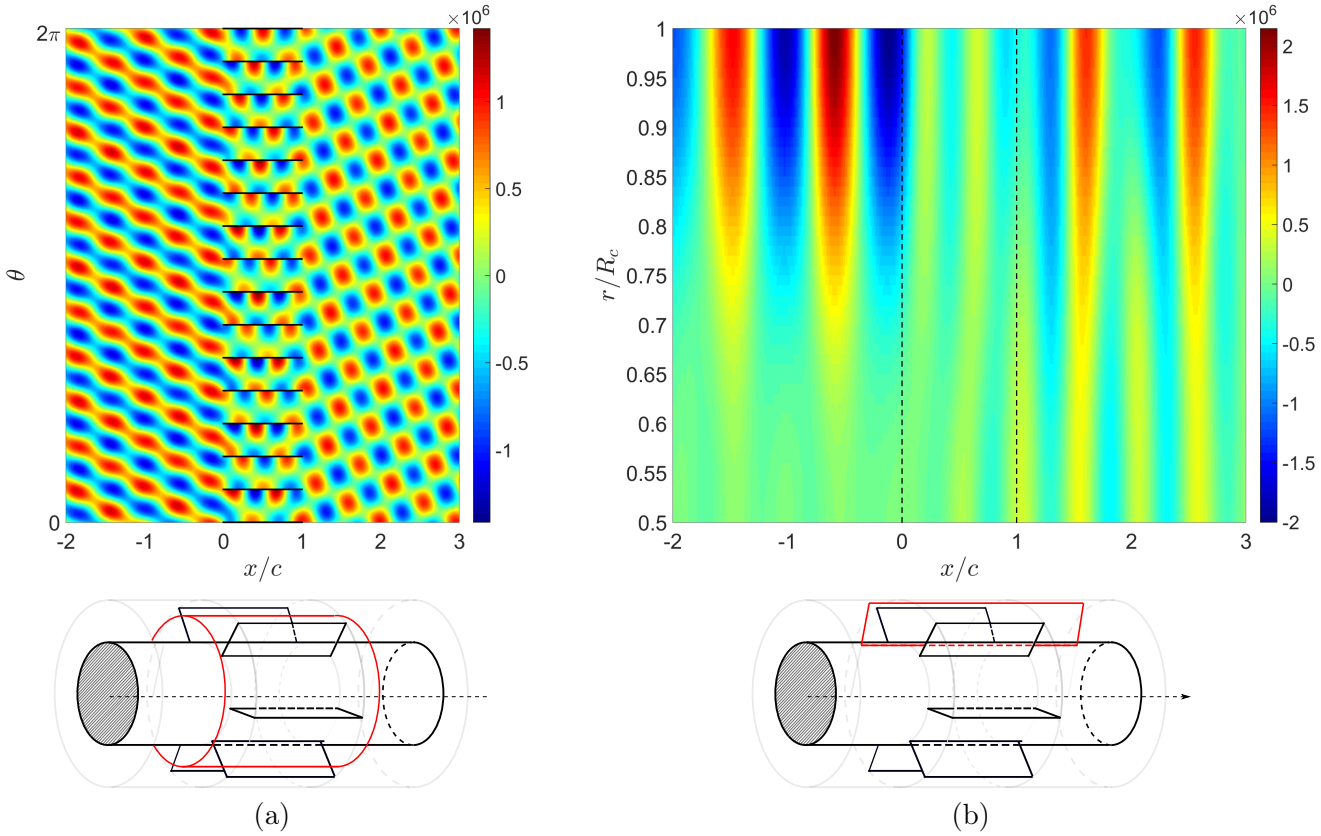


FIGURE 4.19 – Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_c$ (a) ; Coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b).

résultats montrent qualitativement la continuité de la pression aux interfaces $z/c = 0$ et $z/c = 1$. La structure modale des champs diffractés est détaillée en Figs. 4.21 et 4.22. La coupe méridienne permet d'observer les variations radiales du champ de pression acoustique, que modifient les conditions de coupure modale et les amplitudes des modes passants.

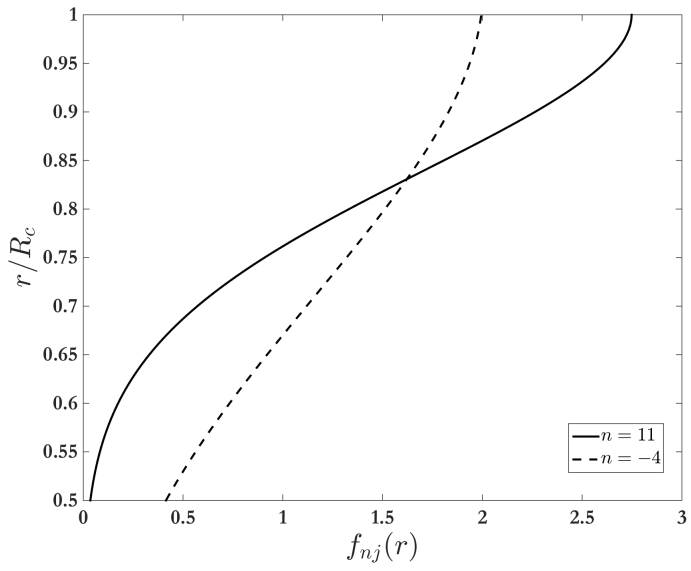


FIGURE 4.20 – Fonctions radiales $f_{nj}(r)$ en fonction de l'ordre modal azimutal n et du rayon r/R_c pour des ordres azimutaux $n \in [11, -4]$ et un ordre radial nul .

Une coupe axiale du champ acoustique incident est d'abord illustrée en Fig 4.21-a, dans laquelle $n = 11$ lobes tournent dans le sens trigonométrique. Le champ réfléchi et ses amplitudes modales sont montrés en Figs. (4.21-b, 4.21-d) à une position $z = -c/2$ en amont du bord d'attaque du stator. Quatre modes (n_s, j) sont passants : (11,0), (−4,0), (−4,1), (−4,2). Le mode (11,0), identique au mode incident, domine les autres modes passants. Cependant, la Fig. (4.21-b) illustre une légère modulation des 11 lobes par le mode azimutal −4. L'essentiel de l'énergie acoustique incidente a été transférée en aval du stator, tandis que l'amplitude du champ acoustique réfléchi se révèle peu élevée, d'un ordre de grandeur inférieur au champ incident. Que ce soit pour les champs incident ou réfléchi, les Figs. 4.21-a-b montrent également un effet de peau et la pression acoustique se concentre à la périphérie du conduit. Ceci est dû à l'ordre élevé du mode dominant (11). Ainsi, le comportement acoustique d'un mode d'ordre azimutal élevé dans un conduit annulaire rejoint celui dans un conduit à section circulaire. Comme l'indique la Fig. 4.20, la fonction $f_{nj}(r)$ pour les ordres modaux $(n = 11, j = 0)$ demeure très faible pour une part importante de l'envergure et le rayon caustique de ce mode est par conséquent élevé.

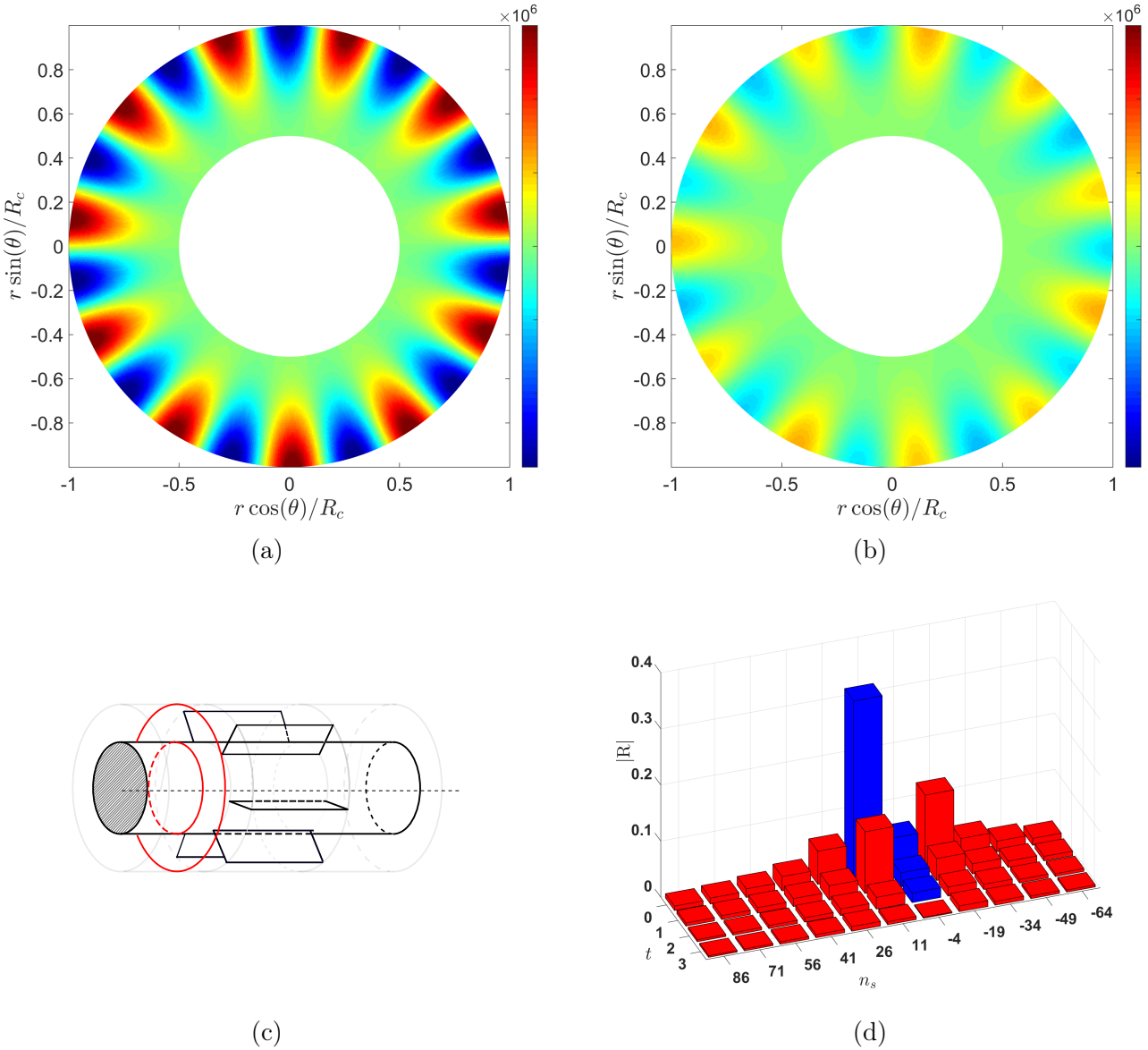


FIGURE 4.21 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal. Coupe axiale (c) des champs incident (a) et réfléchi (b) à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

Les coupes axiales des champs ϕ_d^0 (à $z = c/2$) et ϕ_t (à $z = 3\ c/2$), avec leurs amplitudes modales sont indiquées en Fig. 4.22. Les modes transmis et passants sont les mêmes que pour les ondes ré-

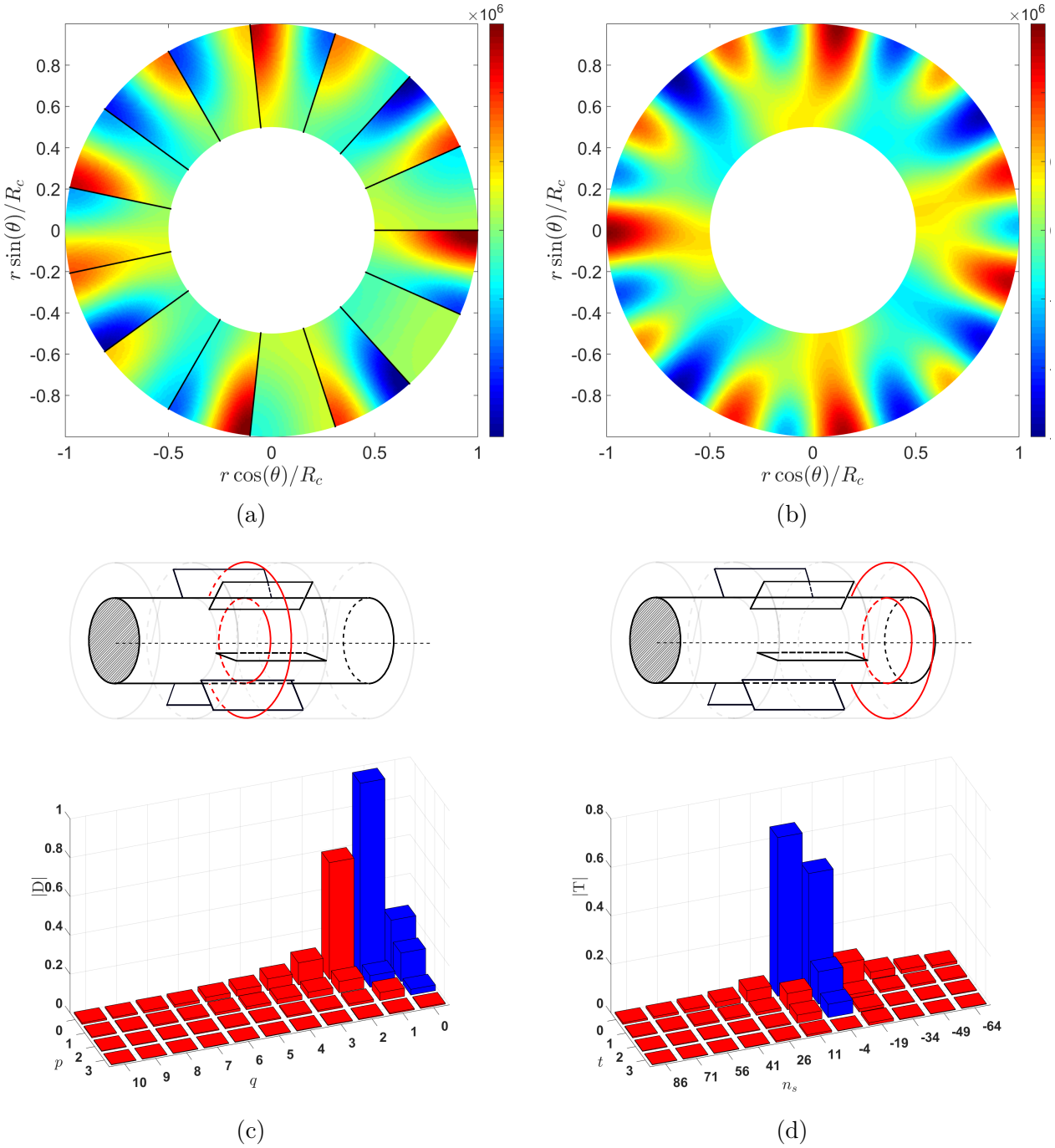


FIGURE 4.22 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

fléchies : (11,0), (−4,0), (−4,1), (−4,2), mais l'amplitude du mode (−4,0) est désormais légèrement inférieure à celle du mode dominant (11,0). Cet effet est illustré en Fig. 4.22-b, où quatre lobes tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Les modes (11) et (-4) tournent par conséquent dans des sens différents, interférant l'un avec l'autre lorsque leurs lobes se rencontrent. En raison du faible ordre de ce mode, l'effet de peau n'est pas significatif et le son est régénéré près du moyeu, comme le montre la Fig. 4.20. La figure 4.22-d indique que cinq modes se propageant en aval dans les canaux inter-aubes sont passants : (0,0), (0,1), (0,2), (1,0) et (1,1). La prédominance du mode (1,0) est illustrée par l'opposition de phase du champ de pression entre les deux frontières d'un même canal.

4.7 Implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski instationnaire tridimensionnelle

La condition de Kutta-Joukowski instationnaire est détaillée dans cette section dans un cadre tridimensionnel. Cette modélisation étend l'analyse décrite en Sec. 2.3 avec la prise en compte de l'envergure des aubes du stator dans la dimension radiale. Cette approche est décomposée en deux partie, l'une permettant de contraindre un saut de pression nul aux bords de fuite des aubes du stator, l'autre modélisant des nappes de vorticité tridimensionnelle en aval du stator, en suivant l'exemple de Howe [60] (Fig. 4.23).

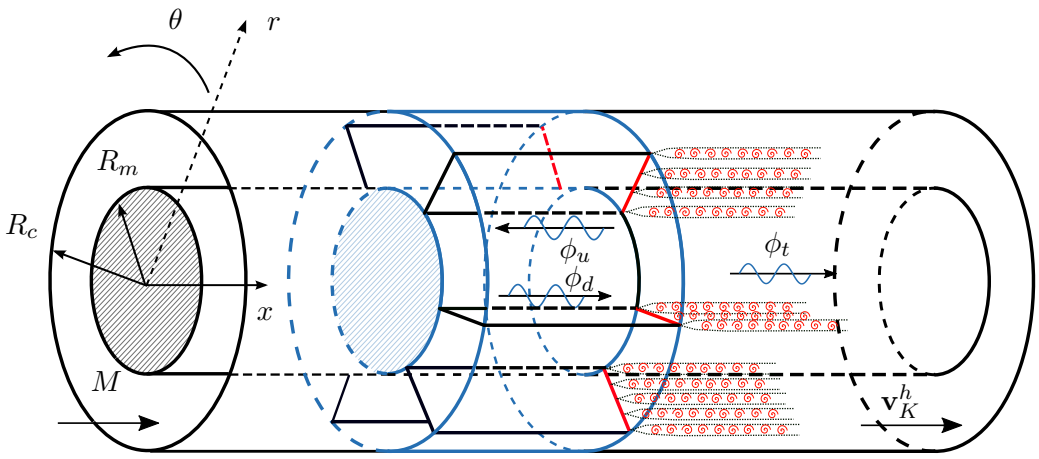


FIGURE 4.23 – Représentation de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire. Les sillages lâchés forment des nappes de vorticité tridimensionnelles en aval du stator.

4.7.1 Saut de pression nul au bord de fuite

Comme dans le cas bidimensionnel, la condition de Kutta-Joukowski instationnaire impose un saut de pression nul au bord de fuite, qui s'exprime par la relation :

$$p_d^m(r,\theta,c) + p_u^m(r,\theta,c) = p_d^{m-1}(r,\theta,c) + p_u^{m-1}(r,\theta,c), \qquad (4.42)$$
$$\forall r \in [R_m, R_c], \quad \theta = \frac{2\pi m}{V}, \quad m \in [0, V-1].$$

En accord avec l'Eq. (4.22), l'Eq. (4.42) devient :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\left[(k-k_{n_qp}^+ M)D_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^+ c} + (k-k_{n_qp}^- M)U_{n_qp}^0\right] f_{n_qp}(r) = 0, \quad n_q = \frac{qV}{2}. \qquad (4.43)$$

Les techniques de projection, en plus de supprimer des sommes dans les équations de raccordement, permettent d'éliminer les dépendances vis-à-vis des variables spatiales (r,θ,x). Ainsi ces équations ne sont plus tributaires que des ordres modaux et de la géométrie du problème. Cependant, la technique de projection orthogonale est insuffisante pour résoudre l'Eq. (4.43). En effet, les fonctions $f_{n_qp}(r)$ ne forment pas une famille libre de $N_q \times N_p$ fonctions. Comme indiqué par la relation (4.11), les fonctions $f_{n_qp}(r)$ forment une famille libre (et une base orthonormée) de N_p fonctions uniquement si l'ordre modal azimutal n_q est fixé. Pour les équations de raccordement en pression et en vitesse acoustiques, la projection orthogonale sur les modes azimutaux permet de sélectionner un ensemble de fonctions de formes radiales d'un ordre azimutal fixé pour chaque équation du système. Étant donné que les fonctions de formes azimutales sont éliminées de l'Eq. (4.43) par la condition de rigidité ($\cos(n_q\theta) = 0$, si $\theta = 2\pi m/V$), il n'y a pas eu de sélection sur l'ordre modal azimutal.

Une solution à ce problème, proposée ici, consiste à projeter l'Eq. (4.43) sur une famille libre de fonctions $f_{n_qp}(r)$ afin de supprimer la dépendance radiale (r) de l'équation. Pour ce faire, le produit scalaire des fonctions radiales est calculé. Il est défini par la relation :

$$\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu} = \int_\sigma^1 f_{n_qp}(r) f_{n_\mu\nu}(r) r \mathrm{d}r.$$

Par la suite, une décomposition en valeurs singulières est effectuée. Cette décomposition constitue une généralisation du théorème spectral appliqué à des matrices non nécessairement carrées. Ce théorème énonce qu'une matrice normale peut être diagonalisée par une base de vecteurs propres, orthogonaux entre eux, la matrice diagonale étant constituée des valeurs propres. Une fois cette décomposition réalisée, les vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ sont classés en fonction de l'ordre décroissant des valeurs propres associées ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{N_c}, \quad N_c = N_q \times N_p$). Les vecteurs propres sont des combinaisons linéaires des fonctions $f_{n_qp}(r)$. Les vecteurs dont les valeurs propres associées sont les plus élevées indiquent les directions principales de la famille libre. Une troncature modale est effectuée sur le nombre de vecteurs propres, jusqu'à une valeur propre seuil égale à $\lambda_1 \times 10^{-3}$. Ces vecteurs propres, qui forment une famille libre, sont utilisés comme les vecteurs de la projection appliquée à l'Eq. (4.43). Une fois la décomposition en valeurs singulières effectuée, le produit scalaire $\Xi_{n_qp}^{n_\mu\nu}$ s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{\Xi}} = \underline{\boldsymbol{\Delta}}\ \underline{\boldsymbol{\Gamma}}\ \underline{\boldsymbol{\Delta}}^T, \tag{4.44}$$

où $(\bullet)^T$ représente la matrice transposée. Le doublet (q, p) est réduit à la variable l :

$$l = q \times N_p + p, \quad q \in [0, N_q - 1], \quad p \in [0, N_p - 1], \quad l \in [0, (N_c - 1)].$$

La matrice des vecteurs propres s'écrit alors :

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}} = [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \cdots\ \mathbf{g}_{N_c}], \tag{4.45}$$

$$\mathbf{g}_j = \sum_{l=1}^{N_c} \Delta_{l,j} f_{n_qp}(r). \tag{4.46}$$

La matrice diagonale, constituée des valeurs propres est définie par la relation :

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N_c}). \tag{4.47}$$

La projection sur les vecteurs propres mène à l'Eq. (4.48) :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\left[(k-k_{n_qp}^+ M)D_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^+ c} + (k-k_{n_qp}^- M)U_{n_qp}^0\right]\Xi_{l,j}^g = 0. \tag{4.48}$$

où la matrice de projection s'écrit :

$$\Xi_{l,j}^g = \int_\sigma^1 f_{n_qp}(r) g_j(r) r \mathrm{d}r. \tag{4.49}$$

Puisque chaque fonction g_j est formée de combinaisons linéaires de fonctions radiales $f_{n_qp}(r)$, la matrice $\underline{\boldsymbol{\Xi}}^g$ peut être écrite comme le produit matriciel suivant :

$$\underline{\boldsymbol{\Xi}}^g = \underline{\boldsymbol{\Delta}}^T\ \underline{\boldsymbol{\Xi}}. \tag{4.50}$$

Choisir le nombre de vecteurs propres en fonction du rang de la matrice $\underline{\boldsymbol{\Xi}}$ permet de prendre en compte tous les vecteurs linéairement indépendants de cette matrice. Cela revient à sélectionner tous les vecteurs dont la valeur propre est non-nulle. Cependant en fonction des nombres de modes N_q et N_p choisis, le rang de la matrice peut devenir important. Cette matrice peut être constituée d'un grand nombre de vecteurs avec une faible valeur propre associée. Par conséquent, le critère choisi pour sélectionner le nombre de vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ consiste à retenir ceux dont la valeur propre est supérieure à une valeur propre seuil égale à $\lambda_s = \lambda_1 \times 10^{-3}$. La Tab. (4.4) montre le nombre N_j de

vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ retenus par ce critère pour différents nombres de modes radiaux N_p et pour un nombre de modes azimutaux $N_q = 11$. Ces différentes configurations ont été testées pour différents rapports de moyeux $\sigma \in [0.5, 0.7, 0.9, 0.98]$.

Rapport de moyeu σ	0.5	0.7	0.9	0.98
$N_p = 12$	14	13	12	12
$N_p = 6$	9	7	6	6
$N_p = 3$	6	5	3	3
$N_p = 1$	3	3	2	1

TABLE 4.4 – Nombre N_j de vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ utilisés pour la projection modale, dont les valeurs propres sont supérieurs à λ_s. Le nombre de modes azimutaux est $N_q = 11$.

Le nombre de vecteurs propres N_j est toujours supérieur ou égal au nombre de modes radiaux puisque la famille $f_{n_qp}(r)$ est constituée des sous-familles libres de taille N_p pour chaque ordre azimutal n_q. Par ailleurs, le nombre N_j diminue avec le rapport de moyeu σ. Pour des rapports de moyeu élevés ($\sigma \in [0.9, 0.98]$), le nombre de vecteurs propres est égal au nombre de modes radiaux. Dans ce cas, la configuration tridimensionnelle se rapproche d'un cas bidimensionnel et les variations radiales, qui sont faibles, sont parfaitement décrites avec un nombre de vecteurs propres égal au nombre de modes radiaux. Quand le rapport de moyeu diminue ($\sigma \in [0.5, 0.7]$), la configuration est fortement tridimensionnelle et les variations radiales deviennent importantes. Dans ce cas, les modes radiaux ne sont pas suffisamment indépendants pour décrire la dépendance radiale. Il y a une perte d'information qui n'est comblée qu'en sélectionnant un nombre suffisant de vecteurs propres $\mathbf{g}_j$ qui donnent les directions de projection les plus efficaces. En conclusion, le nombre de modes radiaux N_p et le nombre de vecteurs propres N_j doivent être choisis pour retranscrire correctement la physique du problème d'une part, et pour éviter une perte d'information par la projection modale d'autre part.

L'équation qui permet d'assurer un saut de pression nul au bord de fuite des aubes du stator peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle équivalente :

$$\underline{\mathbf{A}_K}\ \mathbf{U}^0 = \mathbf{C}_K, \tag{4.51}$$

où les matrices s'écrivent :

$$\begin{aligned}
A_K(j,l) &= (1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}(k - k^-_{n_qp}M)\Xi^g(j,l), \\
C_K(j,i) &= -\sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(1-(-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}(k - k^+_{n_qp}M)D^0_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_qp}c}\Xi^g(j,l), \\
U^0(l,1) &= U^0_{n_qp}.
\end{aligned}$$

4.7.2 Rafales hydrodynamiques en aval du stator

L'échappement tourbillonnaire est constitué de perturbations incompressibles, donc à divergence nulle, sans pression associée et convectées par l'écoulement moyen (Sec. 1.4). Dans un cadre bidimensionnel, la vorticité, c'est-à-dire le rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique, est portée par la direction perpendiculaire au plan de la coupe cylindrique $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$. Dans une configuration tridimensionnelle, il est supposé que la direction dominante de la vorticité générée par la condition de Kutta-Joukowski instationnaire est par conséquent radiale. Les autres composantes seront considérées comme négligeables par rapport à celle-ci :

$$\nabla \wedge \mathbf{v}^h_K = \Omega^K_r\ \mathbf{e}_r. \tag{4.52}$$

De la même manière, la vitesse radiale est considérée très faible par rapport aux composantes axiales et tangentielles :

$$\mathbf{v}_K^h = v_{K,x}^h \mathbf{e}_x + v_{K,\theta}^h \mathbf{e}_\theta. \tag{4.53}$$

Les perturbations tourbillonnaires sont définies à partir du modèle de Howe [60], étendu à un cas tridimensionnel. La vorticité est concentrée sur des nappes infiniment fines en aval des aubes et est convectée par l'écoulement moyen. Le rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique s'écrit :

$$\Omega_r^K(r,\theta,x) = \sum_{t\in\mathbb{N}} \Omega_t f_{nt}(r) \times \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \delta\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x}, \quad u = \frac{2\pi n}{V}. \tag{4.54}$$

Le rotationnel s'écrit comme le produit de trois termes dépendant de chaque variable d'espace et d'une amplitude modale. Les termes Ω_t sont les inconnues traduisant la dépendance du sillage dans le sens de l'envergure et sont désignées par un ordre modal radial. La fonction axiale traduit la convection des perturbations par l'écoulement moyen. La fonction radiale est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et seconde espèces définie par Rienstra [132], afin de prendre correctement en compte les conditions aux limites radiales du conduit annulaire. Son ordre modal azimutal est identique à celui de l'onde acoustique incidente. La fonction azimutale définit la concentration des nappes de vorticité en aval des aubes. Elle forme un peigne de Dirac. En raison de la périodicité des aubes, cette fonction peut être développée en série de Fourier pour obtenir une expression plus adaptée au formalisme du raccordement modal :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \delta\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \text{Ш}_\theta. \tag{4.55}$$

La distribution Ш_θ, de période $\Theta = 2\pi/V$, s'écrit :

$$\text{Ш}_\theta = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right) = \frac{1}{\Theta} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s\theta/\Theta} = \frac{V}{2\pi} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}sV\theta}. \tag{4.56}$$

Par conséquent, la composante radiale du champ de vorticité s'écrit :

$$\Omega_r^K(r,\theta,x) = \frac{V}{2\pi} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \Omega_t f_{nt}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x}, \quad n_s = n + sV. \tag{4.57}$$

L'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire dans le modèle nécessite la description du champ de vitesse hydrodynamique associé. Ainsi, ses composantes $\mathbf{V}_{n_s t} = (V_{n_s t,x}, V_{n_s t,\theta})$ s'écrivent sous une forme modale :

$$\mathbf{v}_K^h \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\theta \end{array} \right. = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \left(\begin{array}{c} V_{n_s t,x} \\ V_{n_s t,\theta} \end{array} \right) f_{nt}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x}, \quad n_s = n + sV. \tag{4.58}$$

La propriété d'incompressibilité du mode tourbillonnaire impose une condition de divergence nulle du champ de vitesse associé et fournit une relation entre les composantes axiales et tangentielles (la composante radiale est considérée négligeable) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_K^h = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x}. \tag{4.59}$$

Par conséquent, il vient :

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \left[\frac{n_s}{r} V_{n_s t,\theta} + \frac{\omega}{W_x} V_{n_s t,x} \right] f_{nt}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x} = 0. \tag{4.60}$$

Une première projection modale est effectuée, en utilisant le produit scalaire suivant :

$$\int_0^{2\pi/V} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_\mu\theta}(\bullet)\mathrm{d}\theta, \quad n_\mu = n + \mu V, \quad \mu \in \mathbb{Z} \tag{4.61}$$

L'Eq. (4.60) devient alors :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}} n_\mu V_{n_\mu t,\theta} f_{nt}(r) = -\sum_{t\in\mathbb{N}} \frac{\omega}{W_x} V_{n_\mu t,x} r f_{nt}(r). \tag{4.62}$$

Pour le cas où $n_\mu = 0$:

$$\sum_{t\in\mathbb{N}} \frac{\omega}{W_x} V_{n_\mu t,x} r f_{nt}(r) = 0. \tag{4.63}$$

Les fonctions $r f_{nt}(r)$ forment une famille libre. Par définition :

$$V_{n_\mu t,x} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad n_\mu = 0. \tag{4.64}$$

Si $n_\mu \neq 0$, alors :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}} V_{n_\mu t,\theta} f_{nt}(r) = -\sum_{t\in\mathbb{N}} \frac{\omega}{W_x} V_{n_\mu t,x} \frac{r}{n_\mu} f_{nt}(r). \tag{4.65}$$

Le développement est poursuivi pour le cas $n_\mu \neq 0$. Une seconde projection orthogonale est effectuée avec le produit scalaire suivant :

$$\int_\sigma^1 f_{n\nu}(r)(\bullet) r \mathrm{d}r, \quad \mu \in \mathbb{N}. \tag{4.66}$$

La composante azimutale du champ de vitesse hydrodynamique est obtenue :

$$V_{n_\mu \nu,\theta} = -\frac{\omega}{n_\mu W_x} \sum_{t\in\mathbb{N}} V_{n_\mu t,x} \chi_{nt}^{n\nu}, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{4.67}$$

où :

$$\chi_{nt}^{n\nu} = \int_\sigma^1 f_{n\nu}(r) f_{nt}(r) r^2 \mathrm{d}r. \tag{4.68}$$

Une relation entre les champs de vorticité et de vitesse hydrodynamique peut désormais être exprimée. Dans un repère cylindrique, la composante radiale du rotationnel s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial x}. \tag{4.69}$$

D'après les Eqs. (4.58, 4.57), la relation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{v}_K^h \cdot \mathbf{e}_r &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \mathrm{i} \left(\frac{n_s}{r} V_{n_s t,x} - \frac{\omega}{W_x} V_{n_s t,\theta} \right) f_{nt}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i} n_s \theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x} & (4.70) \\ &= \frac{V}{2\pi} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \Omega_t f_{nt}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i} n_s \theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega/W_x)x}, \quad n_s = n + sV. & (4.71) \end{aligned}$$

Une première projection orthogonale est effectuée avec le produit scalaire défini par l'Eq. (4.61) :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}} \left(\frac{n_\mu}{r} V_{n_\mu t,x} - \frac{\omega}{W_x} V_{n_\mu t,\theta} \right) f_{nt}(r) = \frac{V}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{t\in\mathbb{N}} \Omega_t f_{nt}(r), \quad n_\mu = n + \mu V. \tag{4.72}$$

Si $n_\mu = 0$, l'incompressibilité impose que $V_{n_\mu t,x} = 0$. Dans ce cas, l'équation précédente devient, après projection modale (Eq. (4.61)) :

$$V_{n_\mu \nu,\theta} = -\frac{V W_x}{\mathrm{i} 2\pi\omega} \Omega_\nu, \quad n_\mu = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{4.73}$$

Si $n_\mu \neq 0$, l'introduction de la composante azimutale de $\mathbf{v}_K^h$ (Eq. (4.67)) dans la relation (4.72) permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}}\left(\frac{n_\mu}{r}V_{n_\mu t,x}+\frac{\omega^2}{n_\mu W_x^2}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\chi_{nt}^{n\nu}V_{n_\mu\nu,x}\right)f_{nt}(r)=\frac{V}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{t\in\mathbb{N}}\Omega_t f_{nt}(r),\quad n_\mu=n+\mu V. \tag{4.74}$$

Une seconde projection modale est effectuée avec le produit scalaire suivant :

$$\int_\sigma^1 f_{n,\eta}(r)(\bullet)r^2\mathrm{d}r,\quad \eta\in\mathbb{N}. \tag{4.75}$$

L'équation précédente devient :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}}n_\mu V_{n_\mu t,x}\delta_{\eta,t}+\frac{\omega^2}{n_\mu W_x^2}\sum_{t\in\mathbb{N}}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\chi_{nt}^{n\nu}\chi_{nt}^{n\eta}V_{n_\mu\nu,x}=\frac{V}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{t\in\mathbb{N}}\chi_{nt}^{n\eta}\Omega_t,\quad n_\mu=n+\mu V, \tag{4.76}$$

où :

$$\chi_{nt}^{n\eta}=\int_\sigma^1 f_{n\eta}(r)f_{nt}(r)r^2\mathrm{d}r. \tag{4.77}$$

L'Eq. (4.76) peut également s'exprimer par la relation :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left[n_\mu\delta_{\eta,t}\delta_{\nu,t}+\frac{\omega^2}{n_\mu W_x^2}\chi_{nt}^{n\nu}\chi_{nt}^{n\eta}\right]V_{n_\mu\nu,x}=\frac{V}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{t\in\mathbb{N}}\chi_{nt}^{n\eta}\Omega_t,\quad n_\mu=n+\mu V, \tag{4.78}$$

Le terme de droite peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{V}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{t\in\mathbb{N}}\chi_{nt}^{n\eta}\Omega_t=\underline{\mathbf{H}_2}\ \mathbf{\Omega}, \tag{4.79}$$

où les matrices sont définies par :

$$H_2(\eta,t) = \frac{V}{2\pi\mathrm{i}}\chi_{nt}^{n\eta},\quad \eta\in\mathbb{N},\quad t\in\mathbb{N}, \tag{4.80}$$

$$\Omega(t,1) = \Omega_t. \tag{4.81}$$

L'Eq. (4.78) est constituée d'un système de N_s équations pour chaque terme de la variable μ. Il est à noter que le second membre de l'équation est indépendant de μ. Si la variable μ est fixée, le terme de gauche peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\sum_{t\in\mathbb{N}}\left[n_\mu\delta_{\eta,t}\delta_{\nu,t}+\frac{\omega^2}{n_\mu W_x^2}\chi_{nt}^{n\nu}\chi_{nt}^{n\eta}\right]V_{n_\mu\nu,x}=\underline{\mathbf{H}_1}\ \mathbf{v}^\mu, \tag{4.82}$$

et les matrices s'écrivent :

$$H_1^\mu(\eta,\nu) = \sum_{t\in\mathbb{N}}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left[n_\mu\delta_{\eta,t}\delta_{\nu,t}+\frac{\omega^2}{n_\mu W_x^2}\chi_{nt}^{n\nu}\chi_{nt}^{n\eta}\right], \tag{4.83}$$

$$v^\mu(\nu,1) = V_{n_\mu\nu,x}. \tag{4.84}$$

Le vecteur $\mathbf{v}^\mu$ correspond aux amplitudes modales radiales de la composante axiale du champ de vitesse hydrodynamique pour un ordre azimutal n_μ fixé. L'Eq. (4.78) peut être écrite comme un système d'équations matricielles d'indice μ :

$$\underline{\mathbf{H}_1^\mu}\ \mathbf{v}^\mu=\underline{\mathbf{H}_2}\ \mathbf{\Omega},\quad \mu\in\mathbb{Z}. \tag{4.85}$$

En inversant le système linéaire pour chaque variable μ, la composante axiale du champ de vitesse hydrodynamique est obtenue en fonction de la vorticité :

$$\mathbf{v}^{\mu} = [\underline{\mathbf{H}_1^{\mu}}]^{-1}\ \underline{\mathbf{H}_2}\ \mathbf{\Omega} = \underline{\mathbf{H}}\ \mathbf{\Omega}, \quad \mu \in \mathbb{Z}. \tag{4.86}$$

Pour généraliser cette expression au cas $n_\mu = 0$, il suffit d'écrire :

$$[\underline{\mathbf{H}_1^{\mu}}]^{-1} = \underline{\mathbf{0}}, \quad n_\mu = 0. \tag{4.87}$$

4.7.3 Équation de raccordement au bord de fuite

Lorsque la condition de Kutta-Joukowski instationnaire est implémentée, les équations de raccordement modal au bord de fuite ($x = c$) s'écrivent :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k - Mk^{+}_{n_{qp}})D^{0}_{n_{qp}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_{qp}}c} + (k - Mk^{-}_{n_{qp}})U^{0}_{n_{qp}}\right] f_{n_q}(r)\cos(n_q\theta) \quad = \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}(k - Mk^{+}_{n_{st}})T_{n_{st}}f_{n_{st}}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}. \tag{4.88}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_{qp}}D^{0}_{n_{qp}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_{qp}}c} + \mathrm{i}k^{-}_{n_{qp}}U^{0}_{n_{qp}}\right] f_{n_q}(r)\cos(n_q\theta) \quad = \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\mathrm{i}k^{+}_{n_{st}}T_{n_{st}}f_{n_{st}}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}V_{n_{st},x}f_{nt}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}. \tag{4.89}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(1-(-1)^q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}\left[(k - k^{+}_{n_{qp}}M)D^{0}_{n_{qp}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_{qp}}c} + (k - k^{-}_{n_{qp}}M)U^{0}_{n_{qp}}\right] f_{n_{qp}}(r) = 0, \quad n_q = \frac{qV}{2}. \tag{4.90}$$

Après projection orthogonale sur la base modale associée au conduit annulaire, les Eqs. (4.88, 4.89) deviennent :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k - Mk^{+}_{n_{qp}})D^{0}_{n_{qp}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{-}_{n_{qp}}c} + (k - Mk^{-}_{n_{qp}})U^{0}_{n_{qp}}\right] \varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_{qp}} = \frac{2\pi}{V}(k - Mk^{+}_{n_{\mu\nu}})T_{n_{\mu\nu}}, \tag{4.91}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_{qp}}D^{0}_{n_{qp}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{-}_{n_{qp}}c} + \mathrm{i}k^{-}_{n_{qp}}U^{0}_{n_{qp}}\right] \varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_{qp}} = \frac{2\pi}{V}\mathrm{i}k^{+}_{n_{\mu\nu}}T_{n_{\mu\nu}} + \sum_{t=0}^{+\infty}V_{n_\mu t,x}\Xi^{n_\mu\nu}_{nt}. \tag{4.92}$$

Afin de permettre l'inversion matricielle, les doublets d'indices (μ,ν) et (q,p) sont réduits aux variables η et ϱ :

$$\eta \quad = \quad (\mu + (N_\mu - 1)/2) \times N_\nu + \nu, \quad \mu \in [-(N_\mu - 1)/2, (N_\mu - 1)/2], \quad \nu \in [0, N_\nu - 1],$$

$$\varrho = q \times N_p + p, \quad q \in [0, N_q - 1], \quad p \in [0, N_p - 1].$$

Raccordement modal du champ de pression

L'équation matricielle du raccordement modal sur le champ de pression s'écrit :

$$\underline{\mathbf{A}_p^2}\ \mathbf{T} + \underline{\mathbf{B}_p^2}\ \mathbf{U}^0, \tag{4.93}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_p^2(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left((k - Mk^+_{n_\mu\nu})\right),\\
B_p^2(\eta,\varrho) &= -(k - Mk^-_{n_qp})\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
C_p^2(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(k - Mk^+_{n_qp})D^0_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_qp}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}\\
T(\eta,1) &= Tn_\mu\nu\\
U^0(\varrho,1) &= U^0_{n_qp}.
\end{aligned}$$

Raccordement modal du champ de vitesse axiale totale

Le raccordement modal du champ de vitesse peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\mathbf{A}_v^2}\ \mathbf{T} + \underline{\mathbf{B}_v^2}\ \mathbf{U}^0 + \underline{\mathbf{E}_v^K}\ \mathbf{\Omega} = \mathbf{C}_v^2, \tag{4.94}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_v^2(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left(\mathrm{i}k^+_{n_\mu\nu}\right),\\
B_v^2(\eta,\varrho) &= -\mathrm{i}k^-_{n_qp}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
C_v^2(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}\mathrm{i}k^+_{n_qp}D^0_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_qp}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
\Omega(\nu,1) &= \Omega_\nu.
\end{aligned}$$

Pour écrire la matrice $\underline{\mathbf{E}_v^K}$, il est nécessaire d'introduire tout d'abord la matrice diagonale par bloc $\underline{\mathbf{G}}$, de dimension $N_\mu \times N_\nu$:

$$\underline{\mathbf{G}_{ij}} = \underline{\Xi^\mu}\ \delta_{i\mu}\delta_{j\mu}, \tag{4.95}$$

$$\Xi^\mu(t,\nu) = \Xi^{n_\mu\nu}_{nt}. \tag{4.96}$$

La matrice $\underline{\mathbf{E}_v^K}$ s'écrit alors :

$$\underline{\mathbf{E}_v^K} = \underline{\mathbf{G}}\ \underline{\mathbf{H}}. \tag{4.97}$$

Saut de pression nul au bord de fuite

L'équation matricielle assurant un saut de pression nul au bord de fuite, dont le calcul est détaillé dans la Sec. 4.7.1, est rappelée :

$$\underline{\mathbf{A}_K}\ \mathbf{U}^0 = \mathbf{C}_K, \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned}
A_K(j,l) &= (1 - (-1)^q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}(k - k^-_{n_qp}M)\Xi^g(j,l),\\
C_K(j,i) &= -\sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(1 - (-1)^q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}(k - k^+_{n_qp}M)D^0_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^+_{n_qp}c}\Xi^g(j,l),\\
U^0(l,1) &= U^0_{n_qp}.
\end{aligned}$$

Équation matricielle globale

En reprenant les équations matricielles précédentes, un système linéaire complet est obtenu pour le raccordement modal à l'interface de bord de fuite, lorsque la condition de Kutta-Joukowski instationnaire est implémentée. Il s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p^2 & \mathbf{B}_p^2 & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{A}_v^2} & \underline{\mathbf{B}_v^2} & \underline{\mathbf{E}_v^K} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{A}_K} & \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{U}^0 \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_p^2 \\ \mathbf{C}_v^2 \\ \mathbf{C}_K \end{pmatrix}. \tag{4.99}$$

4.7.4 Résultats

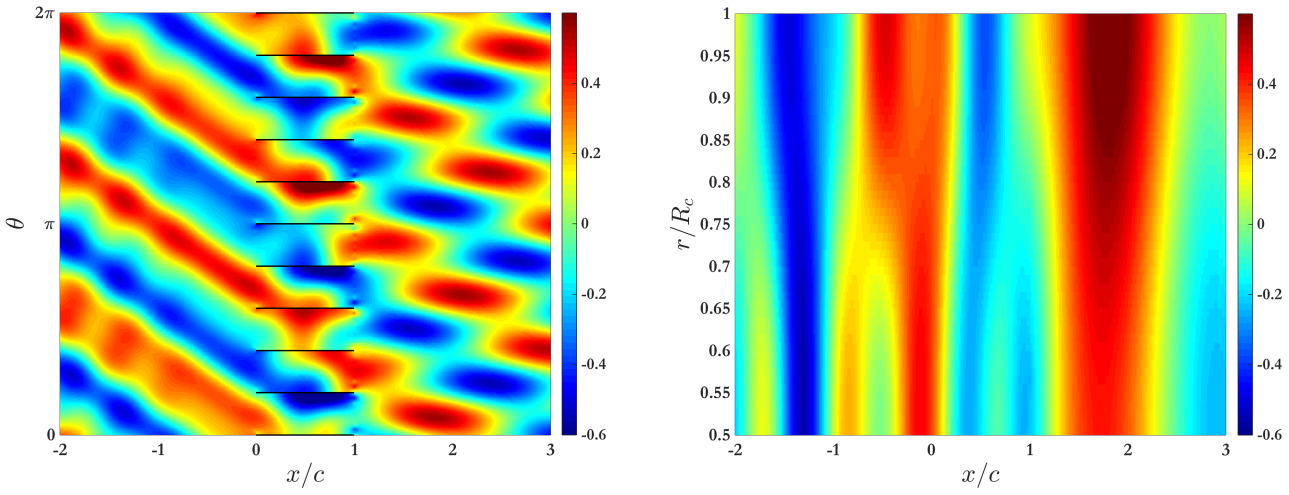
La condition de Kutta-Joukowski instationnaire est implémentée dans le modèle de transmission acoustique pour une grille d'aubes tridimensionnelle. Un ensemble de résultats est présenté pour un cas dont les paramètres sont détaillés dans la Tab. 4.5 :

Géométrie du stator	Onde acoustique incidente
$M = 0.5, \quad V = 10, \quad R_c = 0.084$ m, $\quad c = 0.046$ m,	$n = 3, \quad j = 0, \quad f = 6000$ Hz

TABLE 4.5 – Paramètres du cas test pour l'implémentation d'une condition de Kutta-Joukowski.

À ce cas test correspondent les nombres de Helmoltz $kR_c = 9.29$ et $kc = 5.1$. La technique de raccordement modal est appliquée pour calculer la diffraction du champ de pression incidente par une grille d'aubes. Cette configuration est étudiée pour un conduit avec deux rapports de moyeux $\sigma \in [0.5, 0.9]$ pour montrer l'importance de la diffraction acoustique dans la direction radiale. Les champs de pression instantanés représentés sont adimensionnés par l'amplitude de l'onde incidente $-\mathrm{i}\rho_0 c_0 (k - K_{nj} M) N_{nj}$, N_{nj} étant la norme de la fonction radiale de l'onde incidente.

Rapport de moyeu $\sigma = 0.5$

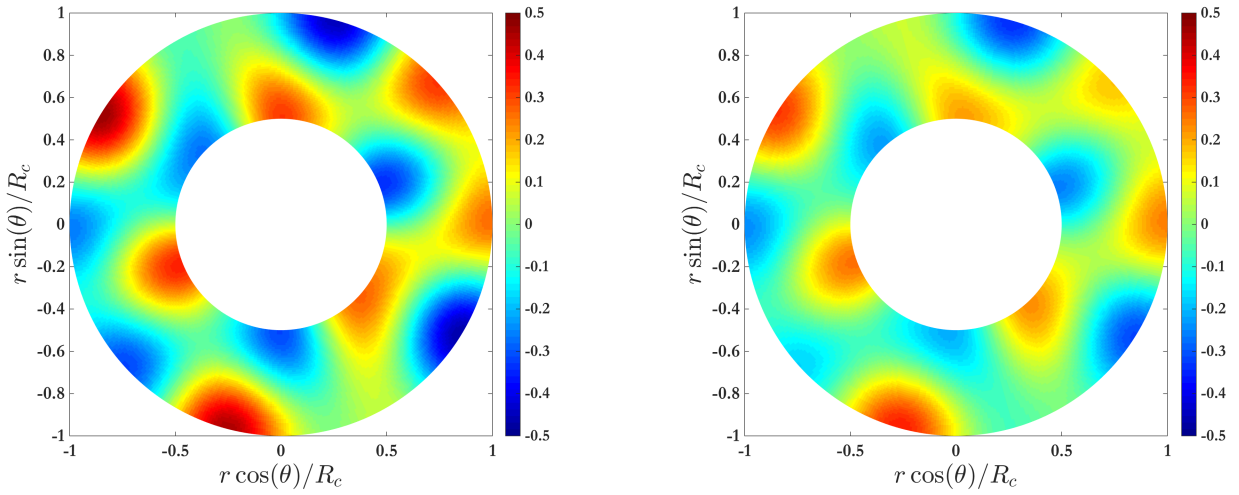


(a) (b)

FIGURE 4.24 – Champs de pression acoustique instantanée normalisés calculés avec la condition de Kutta-Joukowski instationnaire pour un rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. (a) : coupe cylindrique au rayon $r = 3\ R_c/4$, (b) : coupe méridienne à l'angle $\theta = \pi/V$.

Les Figs. 4.24 et 4.25 représentent des coupes cylindrique ($r = 3R_c/4$) et axiale ($x = -c/2$) du champ de pression diffracté par la grille d'aube lorsque la condition de Kutta-Joukowski instationnaire

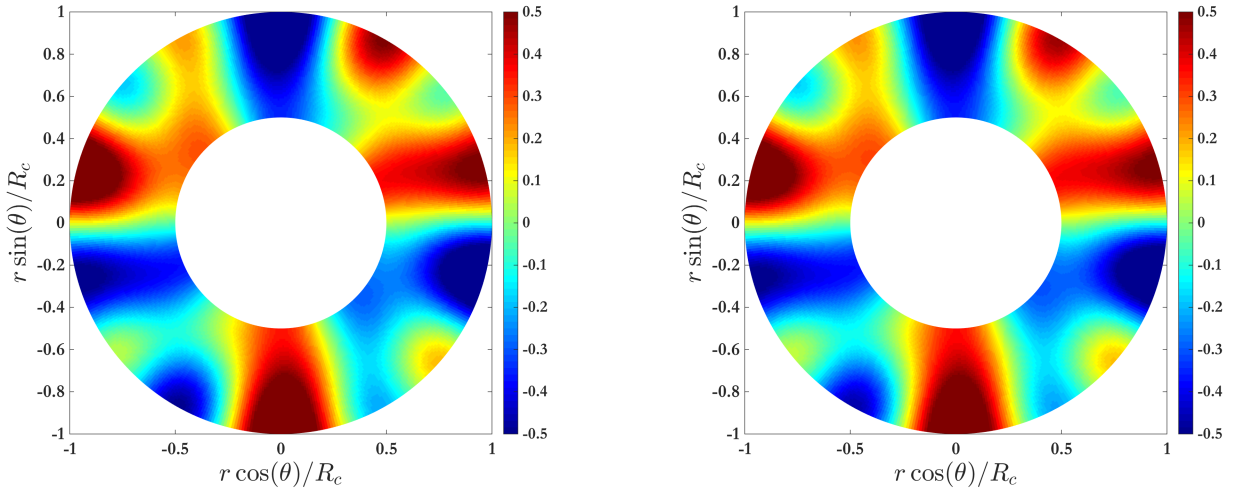
est implémentée. Elles illustrent la continuité du champ aux interfaces du stator, ainsi que les variations radiales du champ de pression acoustique.



(a) (b)

FIGURE 4.25 – Coupes axiales du champ de pression acoustique réfléchi ϕ_r instantané normalisé à une distance $x = -c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire.

Les Figs. 4.25 et 4.26 représentent des coupes axiales de champs réfléchis et transmis à une demi-corde en amont et en aval du stator, respectivement. Les champs de pression sont composés de deux modes azimutaux passants, l'un constitué de $n_s = 3$ lobes dont le sens de rotation est trigonométrique et l'autre possédant $|n_s| = 7$ lobes tournant dans le sens horaire. Ces figures montrent que la condition de Kutta a un effet significatif sur l'amplitude du champ réfléchi tandis qu'elle n'en a que très peu sur le champ transmis.



(a) (b)

FIGURE 4.26 – Coupes axiales du champ de pression acoustique transmis ϕ_t instantané normalisé à une distance $x = 3\ c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire.

Le chargement instationnaire adimensionné par le champ de pression incident sur une aube est représenté en Fig. 4.27. Il est visible que le saut de pression n'est pas nul au bord de fuite lorsque la condition de Kutta n'est pas implémentée, alors qu'il est fortement réduit lorsqu'elle est active. Le saut de pression révèle de significatives variations dans la direction radiale. De manière plus quantitative,

une représentation du saut de pression $\mathcal{L}$ le long de l'envergure au bord de fuite ($x = c$) et à mi-corde ($x = c/2$) est illustrée en Fig. 4.28. Tandis que le chargement instationnaire est important lorsque la condition de Kutta n'est pas active, il tend vers zéro lorsqu'elle est prise en compte, avec de faibles ondulations résiduelles.

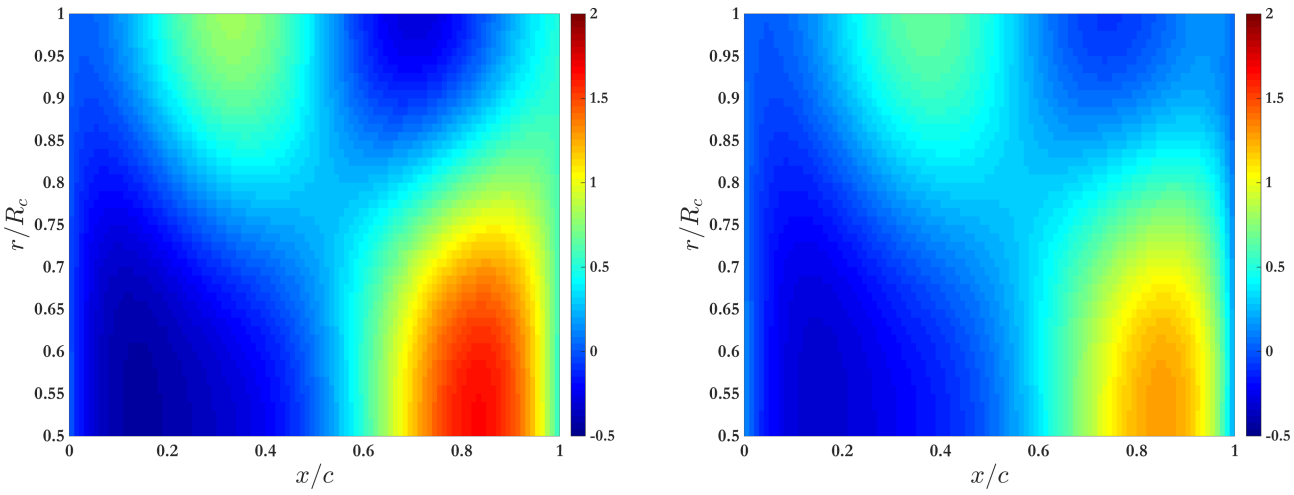


FIGURE 4.27 – Sauts de pression instationnaire sur une aube de référence obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$.

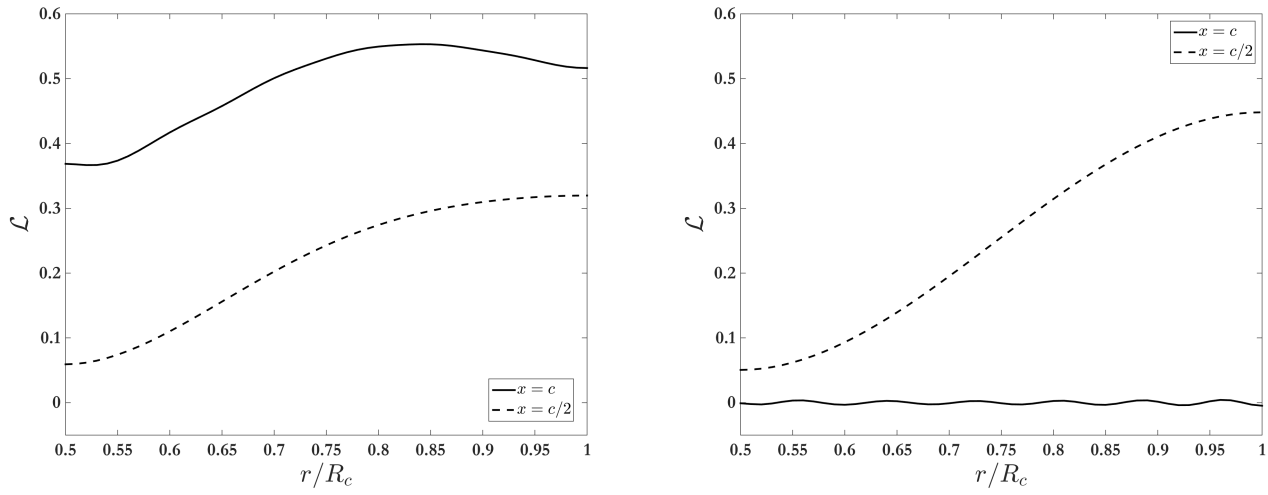
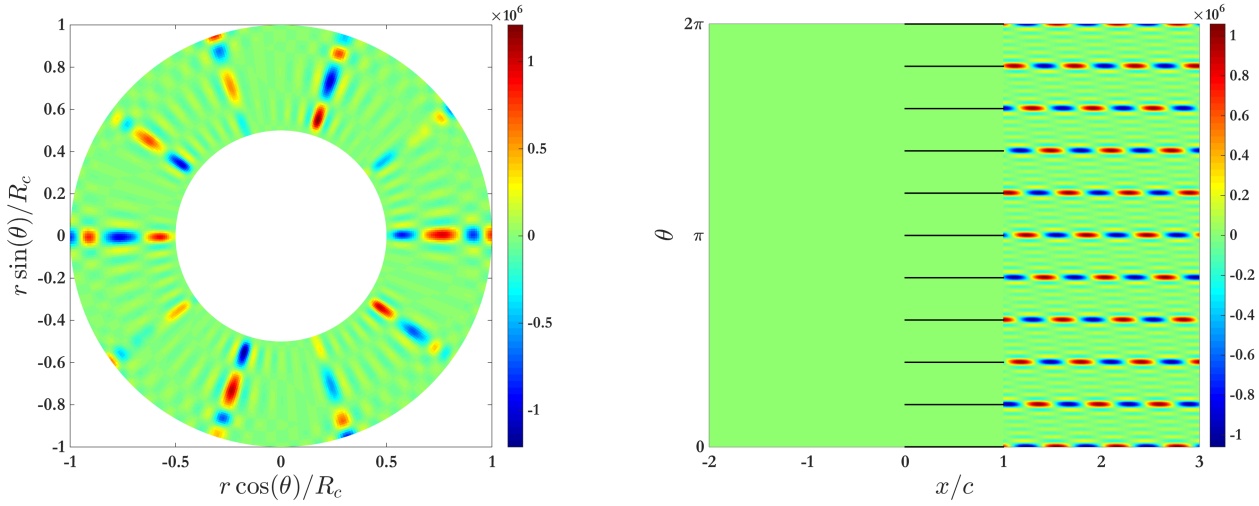


FIGURE 4.28 – Sauts de pression instationnaire le long de l'envergure d'une aube de référence, au bord de fuite (ligne) et à mi-corde (pointillé) obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$.

Enfin, le champ de vorticité généré par la condition de Kutta-Joukowski, modélisé d'après l'approche de Howe [60] est représenté en Fig. 4.29. La coupe axiale (Fig. 4.29-a) montre que le champ de vorticité en aval des aubes du stator varie en fonction du rayon et les sillages lâchés sont concentrés en nappes tourbillonnaires, ainsi que le montre la coupe cylindrique (Fig. 4.29-b). La décomposition en série de Fourier implique également quelques faibles variations d'amplitude du champ de vorticité en dehors des sillages. Ces résultats montrent d'importantes variations des divers champs dans la direction radiale, calculés de manière uniforme grâce aux fonctions de Green adaptées à la géométrie des sous-domaines.



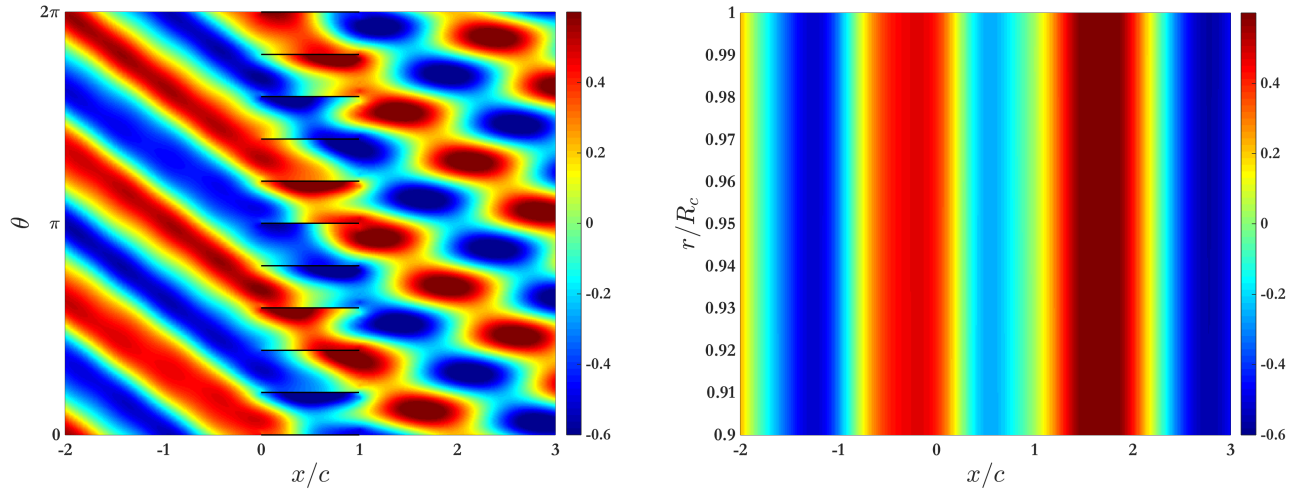
(a) (b)

FIGURE 4.29 – Champ de vorticité en aval du stator introduit par la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.5$. (a) coupe axiale à une distance $x = 3\ c/2$, (b) coupe cylindrique à un rayon $r = 3\ R_c/4$.

Rapport de moyeu $\sigma = 0.9$

Alors que le cas précédent présente un faible rapport de moyeu $\sigma = 0.5$, qui nécessite une formulation tridimensionnelle du problème de diffraction, une configuration avec un fort rapport de moyeu $\sigma = 0.9$ est considérée à présent.

Les Figs. 4.30-a et -b représentent des coupes cylindrique et méridienne du champ de pression généré par la diffraction d'une onde acoustique par la grille d'aube, lorsque la condition de Kutta-Joukowski est implémentée. La continuité du champ de pression est assurée aux interfaces du stator. La Fig. 4.30-b ne montre aucune variation du champ de pression dans la direction radiale et illustre le fait que pour un fort rapport de moyeu, le comportement acoustique se rapproche de celui obtenu avec une approche bidimensionnelle.



(a) (b)

FIGURE 4.30 – Champs de pression acoustique instantanée normalisée calculés avec la condition de Kutta-Joukowski instationnaire pour un rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. (a) : coupe cylindrique au rayon $r = 3\ R_c/4$, (b) : coupe méridienne à l'angle $\theta = \pi/V$.

Les champs réfléchi et transmis sont représentés en Figs. 4.31 et 4.32, respectivement, sans et avec

la condition de Kutta-Joukowski. De la même manière que pour le cas où $\sigma = 0.5$, la condition de Kutta induit une diminution de l'amplitude du champ acoustique réfléchi, tandis qu'elle n'a que très peu d'effet sur le champ transmis. Le champs réfléchis et transmis sont composés des modes passants d'ordre azimutal $n_s \in [-7, 3]$. Le champ transmis recueille l'essentiel de la puissance acoustique apportée par l'onde incidente. En conséquence, il est dominé par le mode $n_s = 3$, comme le montrent les trois lobes principaux du champ acoustique en aval du stator qui tournent dans le sens trigonométrique, et il ne montre pas de variation radiale. Le champ réfléchi est dominé par le mode d'ordre $n_s = -7$, dont le sens de rotation est horaire. De même, aucune variation radiale n'est observée.

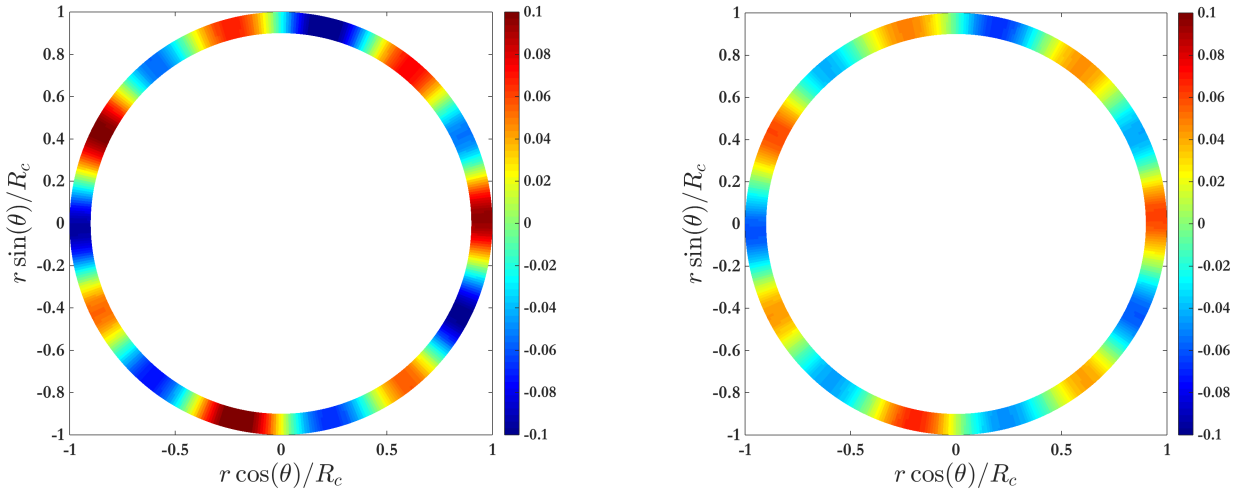


FIGURE 4.31 – Coupes axiales du champ de pression acoustique réfléchi ϕ_r instantané normalisé à une distance $x = -c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire.

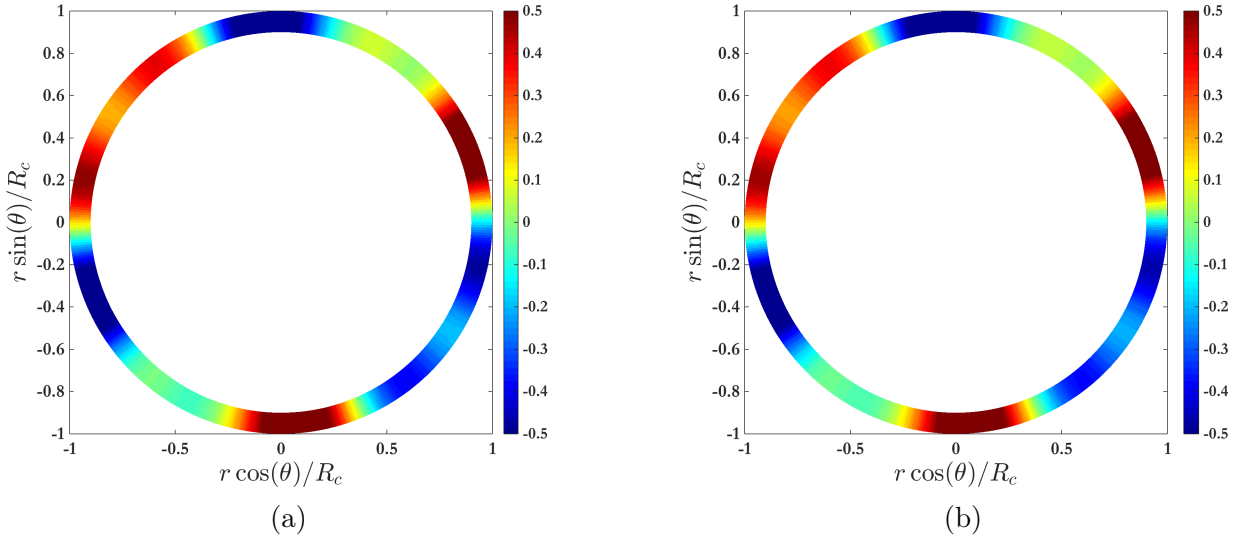


FIGURE 4.32 – Coupes axiales du champ de pression acoustique transmis ϕ_t instantané normalisé à une distance $x = 3\ c/2$, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. Résultats obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire.

La Fig. 4.33 représente le saut de pression instationnaire adimensionné par la pression incidente sur une aube de référence. L'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski impose le saut de pression nul au bord de fuite comme le montre la Fig. 4.33-b. Cette condition implique également une diminution du chargement instationnaire sur toute l'aube. Comme observé sur les résultats précédents, le saut de

pression le long de l'envergure ne varie que très peu. La Fig. 4.34 montre de manière qualitative l'efficacité de l'implémentation de la condition de Kutta. En effet, le chargement instationnaire au bord de fuite est égal à zéro sans les ondulations observées dans le cas où le rapport de moyeu est faible (cf. Fig 4.28).

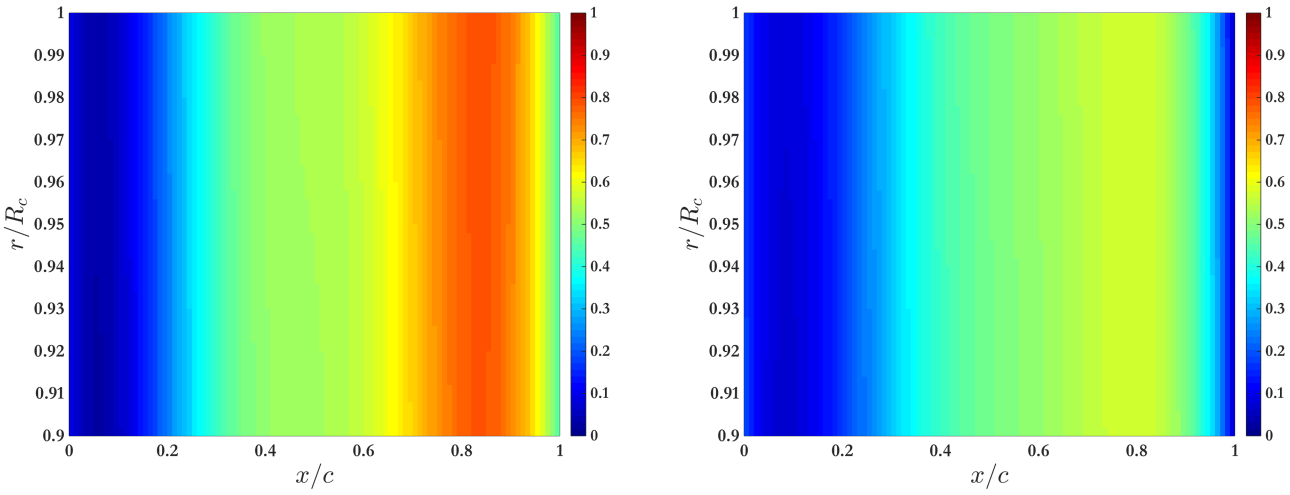


FIGURE 4.33 – Sauts de pression instationnaire sur une aube de référence obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$.

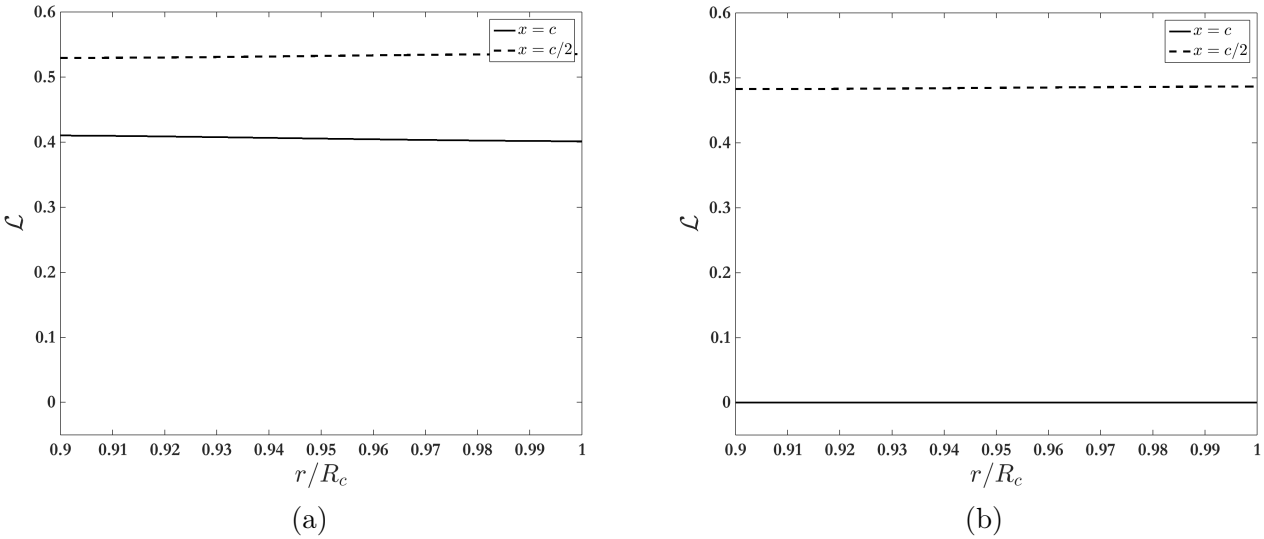
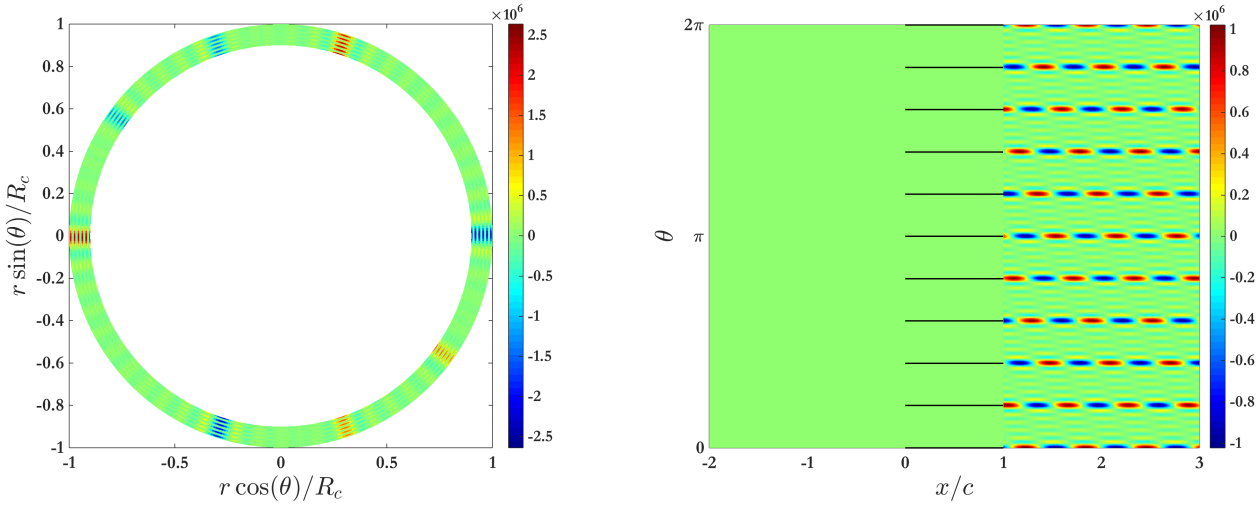


FIGURE 4.34 – Sauts de pression instationnaire le long de l'envergure d'une aube de référence, au bord de fuite (ligne) et à mi-corde (pointillé) obtenus sans (a) et avec (b) la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$.

Enfin, le champ de vorticité est illustré en Fig. 4.35 dans une coupe axiale en $x = -c/2$ (Fig. 4.35-a) et dans une coupe cylindrique au rayon $r = 3\ R_c/4$ (Fig. 4.35-b). Les sillages lâchés forment des nappes de vorticité concentrées en aval des aubes du stator, convectées par l'écoulement moyen. Les variations azimutales, rendues discontinues par la distribution en peigne de Dirac, sont 2π-périodiques avec un nombre d'onde prépondérant égal à celui de l'onde acoustique incidente $n = 3$.

Les résultats présentés montrent que l'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire est efficace quelque soit le rapport de moyeu du conduit et montre l'effet de cette condition sur le rayonnement acoustique, notamment en amont du stator. Lorsque le rapport de moyeu augmente,

la configuration se rapproche d'un cas bidimensionnel, et les variations radiales s'atténuent, comme l'illustrent les champs de pression acoustique obtenus par la technique de raccordement modal pour un rapport de moyeu $\sigma = 0.9$, tandis qu'elles sont importantes pour le cas $\sigma = 0.5$.



(a) (b)

FIGURE 4.35 – Champ de vorticité en aval du stator introduit par la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, pour un conduit de rapport de moyeu $\sigma = 0.9$. (a) coupe axiale à une distance $x = 3\ c/2$, (b) coupe cylindrique à un rayon $r = 3\ R_c/4$.

4.8 Conclusion

Après la présentation d'une extension du modèle de grille bidimensionnelle avec l'approche par bandes de rayon, réalisée dans le cadre d'une étude présentée par Behn *et al.* [8], le modèle de transmission du son à travers une grille d'aubes est étendu dans ce chapitre à une géométrie pleinement tridimensionnelle et annulaire. Le stator est composé d'aubes représentées par des plaques radiales, planes, rigides et sans épaisseur. Les fonctions de Green sont adaptées pour prendre en compte la dimension radiale du conduit, ainsi que l'envergure des aubes. Une description de la propagation acoustique guidée dans un espace annulaire a été proposée afin d'affiner entre autres la compréhension des conditions de coupure modale dans une configuration cylindrique. La technique de raccordement modal et les méthodes de résolution ont été détaillées ainsi qu'une validation de la continuité des champs de pression et de vitesse axiale acoustiques aux interfaces. La diffraction d'une onde acoustique hélicoïdale par une grille d'aubes annulaire a été étudiée à partir d'un cas test représentatif d'un ventilateur subsonique. Ce cas test permet de montrer que la technique de raccordement modal, en adoptant un point de vue alternatif à celui de l'approche par bandes de rayon, permet d'apporter une solution aux limitations de celle-ci. L'angle que forment les aubes adjacentes est modélisé, évitant de surestimer le champ de pression dans les canaux inter-aubes lorsque des effets de résonance non réalistes surviennent. De la même manière, les conditions aux limites aux parois du conduit sont correctement prises en compte grâce à l'utilisation des fonctions de forme radiales $f_{nj}(r)$. Lorsqu'une onde incidente, d'ordres modaux (n, j) se propage à travers une grille d'aubes annulaire, la diffraction de cette onde génère des champs acoustiques secondaires. La technique de raccordement modal permet de calculer la dispersion modale dans le sens de l'envergure et de déterminer l'amplitude des modes radiaux diffractés dont les ordres sont différents de celui de l'onde incidente. Enfin, avec l'emploi de fonctions de Green adaptées aux différents sous-domaines, les champ acoustiques sont calculés de manière unifiée dans la direction radiale, évitant les discontinuités en amplitude et en phase entre les bandes de rayon. À chaque mode sont associées des conditions de coupure, indépendamment du rayon, au contraire de l'approche par bandes de rayon, comme l'observent Behn *et al.* [8] dans leur étude. En revanche, la résolution analytique du problème est dépendante de l'existence de fonctions de Green adaptées. Par

conséquent, l'implémentation de paramètres de géométrie plus réalistes comme le vrillage des aubes ou la variation de l'écoulement moyen selon l'envergure ne semblent pas accessibles sans la détermination (sans doute numérique) de nouvelles fonctions de Green plus complexes. Finalement, une condition de Kutta-Joukowski instationnaire a été implémentée. L'échappement tourbillonnaire induit par cette condition comporte alors une composante radiale liée à l'onde acoustique incidente. Une étude paramétrique concernant le rapport de moyeu est enfin réalisée. En accord avec l'analyse de Howe [59], la condition de Kutta-Joukowski instationnaire implique une réduction de l'amplitude du champ acoustique rayonné, mais également du saut de pression instationnaire sur l'aube. Enfin, le comportement aéroacoustique du champ diffracté par une grille de fort rapport de moyeu ($\sigma = 0.9$) se rapproche de celui observé dans une configuration bidimensionnelle, avec très peu de variations radiales des différents champs. Lorsque le rapport de moyeu est plus faible, le comportement tridimensionnel de la géométrie et du champ acoustique est pleinement reproduit par la technique de raccordement modal.

CHAPITRE 5

APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE - GÉNÉRATION ACOUSTIQUE

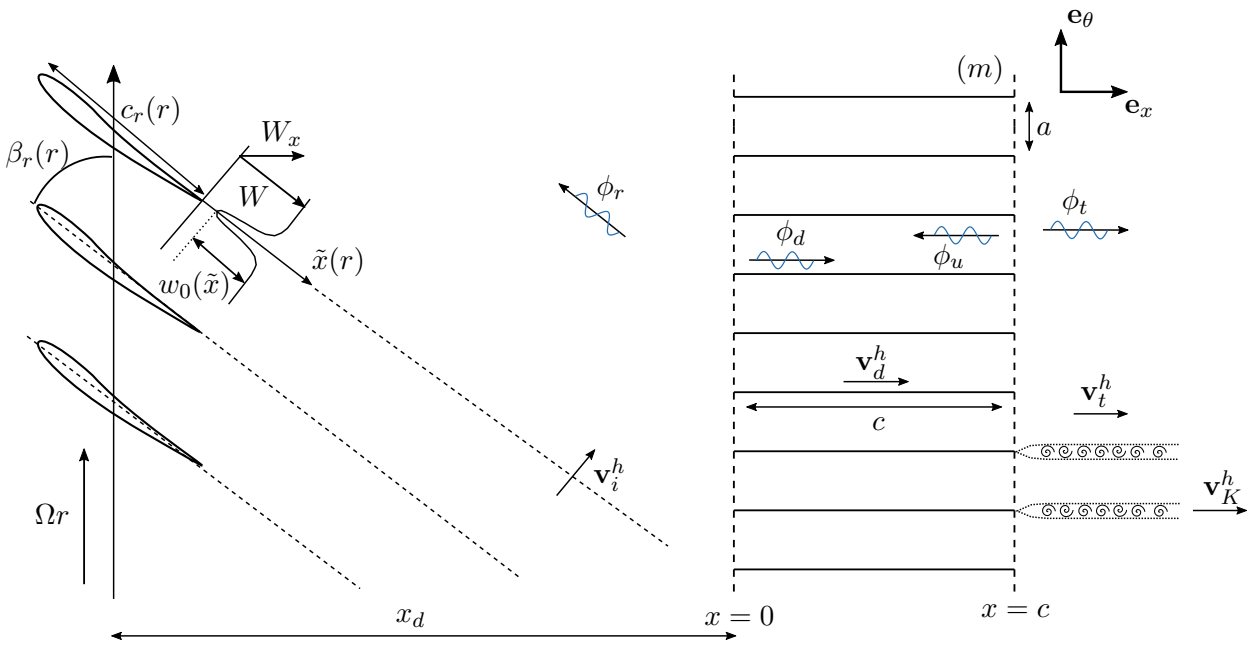


FIGURE 5.1 – Impact de rafales hydrodynamiques tridimensionnelles issues des pales du rotor sur la grille d'aubes de stator. Représentation bidimensionnelle déroulée d'une coupe au rayon r.

La technique de raccordement modal est étendue dans ce chapitreà la génération du bruit tonal d'interaction rotor-stator dans une configuration tridimensionnelle (Fig. 5.1). L'impact des rafales hydrodynamiques issues des pales du rotor génère un champ acoustique, le transfert entre modes tourbillonnaire et acoustique étant effectué par le biais des conditions de rigidité des parois de la grille du stator. La méthode détaillée en Sec. 3 est étendue à la configuration tridimensionnelle grâce à l'ajout de fonctions de Bessel dans la direction radiale et à la prise en compte du vrillage des pales du rotor dans la définition des sillages.

5.1 Modélisation des sillages

5.1.1 Champ de vitesse tourbillonnaire généré par un rotor

De la même manière que dans le cas bidimensionnel, les perturbations incidentes tridimensionnelles sont définies par les déficits de vitesse dans les sillages liés à la présence des pales du rotor dans l'écoulement moyen et sont liées au mode tourbillonnaire. Dans le repère du stator, ces perturbations s'expriment comme une série de fonctions gaussiennes périodiques :

$$w(r,\theta) = w_0(\tilde{x}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\xi\left(\frac{r\theta + \Delta\theta(r) - k\Theta}{b(\tilde{x})}\right)^2\right\}, \tag{5.1}$$

où $\xi = \ln 2$, $w_0(\tilde{x})$ est le déficit de vitesse maximum, $b(r)$ est la demi-largeur du sillage, tous ces paramètres étant déterminés au rayon r. $\Theta = 2\pi/B$ est la périodicité azimutale correspondant à la fréquence de passage des pales $B\Omega/(2\pi)$. Si x_d est la distance entre l'axe radial passant à mi-corde des pales du rotor et le bord d'attaque des aubes du stator, la distance $\tilde{x}(r)$ le long du sillage depuis le bord de fuite d'une pale au bord d'attaque des aubes s'écrit :

$$\tilde{x}(r) = \frac{x_d}{\sin\beta_r(r)} - \frac{c_r(r)}{2}, \tag{5.2}$$

où $c_r(r)$ représente la longueur de corde et $\beta_r(r)$ l'angle de calage des pales du rotor au rayon r. En première approximation, l'angle de calage et la longueur de corde des pales du rotor sont linéairement interpolés entre leurs valeurs aux rayons au moyeu R_m et au carter R_c. En raison du vrillage des pales du rotor, un déphasage azimutal $\Delta\theta$ doit être considéré à chaque rayon r.

$$\Delta\theta(r) = x_d \cot\beta_r(r). \tag{5.3}$$

Pour respecter la périodicité azimutale et la convection par l'écoulement moyen, les perturbations incidentes dans la direction axiale sont projetées sur la base modale :

$$\mathbf{v}_i^h(r,\theta)\cdot\mathbf{e}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} W_{n_ij} f_{n_ij}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}, \quad n_i = nB, \quad x \le 0, \quad n \neq 0, \quad k_{n_i}^+ = \frac{n_i\Omega}{W_x}, \tag{5.4}$$

où :

$$W_{n_ij} = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\int_\sigma^1 \sin\beta_r(r) w(r,\theta) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n_i\theta/\Theta} f_{n_ij}(r) r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad \Theta = \frac{2\pi}{B}. \tag{5.5}$$

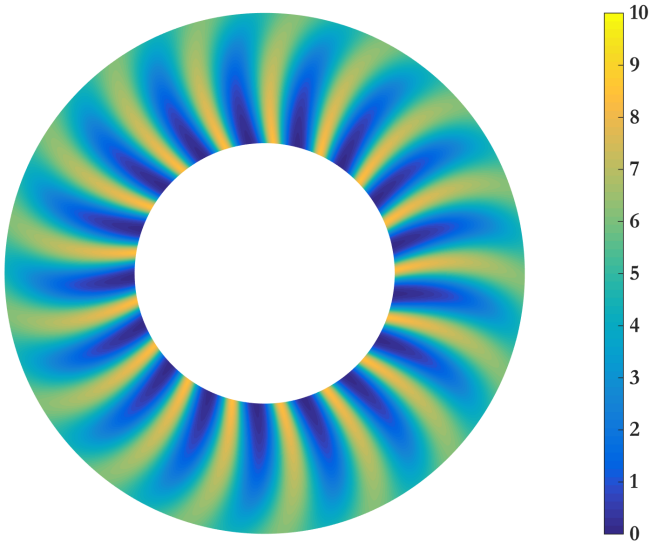
En raison de leur complexité, les amplitudes modales W_{n_ij} sont calculées numériquement. Les valeurs de $w(r,\theta)$ au bord d'attaque des aubes du stator sont calculées analytiquement à partir du modèle de Lakshminarayana (voir Sec. 3.1.1). Elles peuvent également être fournies par des simulations numériques RANS et peuvent être intégrées à cette étape de la procédure. Les fonctions radiales $f_{n_ij}(r)$ prennent en compte des conditions au limites radiales de rigidité aux rayons interne et externe du conduit annulaire. Leur bénéfice dans la description des sillages est de simplifier les équations de continuité aux interfaces, en utilisant les mêmes fonctions radiales que pour les champs acoustiques potentiels dans le conduit annulaire. Les fonctions $f_{n_ij}(r)$ s'écrivent :

$$f_{n_ij}(r) = N_{n_ij}\left[\cos(\tau_{n_ij})J_{n_i}(K_{n_ij}r) - \sin(\tau_{n_ij})Y_{n_i}(K_{n_ij}r)\right]. \tag{5.6}$$

Le terme d'ordre $n = 0$ doit être rejeté puisqu'il contribue au chargement stationnaire sur l'aube qui n'est pas rayonnant. Chaque contribution d'ordre n produit du bruit aux multiples de la fréquence de passage des pales correspondant $\omega_n = nB\Omega$. Un exemple de résultat est montré en Figs 5.2-5.3 pour un rotor composé de 17 pales. Le déphasage azimutal $\Delta\theta(r)$ est illustré par la variation radiale du champ de vitesse axiale. À cause du vrillage des pales du rotor, les sillages s'inclinent en fonction du rayon et n'interagissent pas de manière simultanée avec les bords d'attaque des aubes du stator à différents rayons. Ce déphasage a un rôle significatif dans l'efficacité du rayonnement acoustique et peut parfois être utilisé pour réduire le bruit tonal généré par un étage de turbomachine axiale.

Les perturbations hydrodynamiques issues des sillages du rotor sont liées au mode tourbillonnaire, par conséquent la divergence du champ de vitesse associé est nulle. Cette propriété permet d'établir une relation entre les composantes du champ de vitesse :

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_i^h(r,\theta,x) = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathbf{v}_i^h\cdot\mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{v}_i^h\cdot\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathbf{v}_i^h\cdot\mathbf{e}_x}{\partial x} = 0. \tag{5.7}$$



% de la vitesse moyenne axiale W_x

FIGURE 5.2 – Coupe axiale du champ de vitesse tourbillonnaire axiale $\mathbf{v}_i^h(r,\theta)\cdot\mathbf{e}_x$ induit par les pales du rotor.

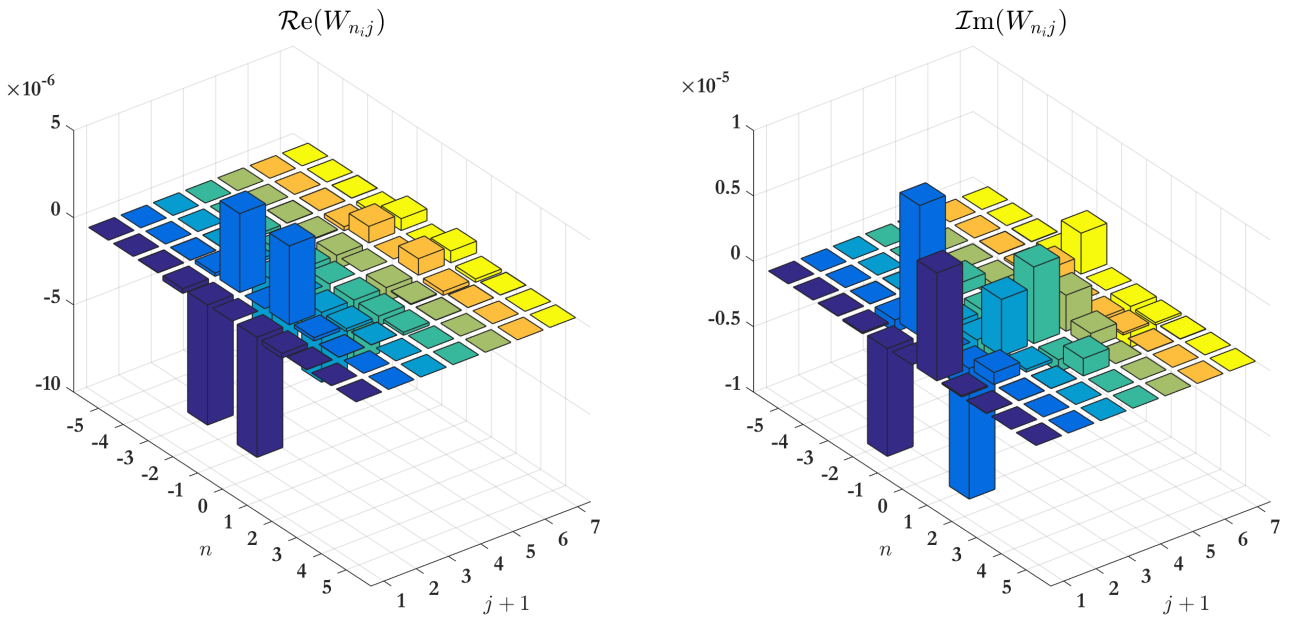


FIGURE 5.3 – Parties réelle et imaginaire des amplitudes modales W_{n_ij} des sillages du rotor.

L'Eq. (5.7) contient deux inconnues. Par la suite, la composante radiale du champ de vitesse hydrodynamique est considérée négligeable par rapport aux autres composantes. Pour la composante tonale du bruit d'interaction rotor/stator, cette hypothèse est valide puisque sa production est induite par l'impact de sillages sur le stator. Ces perturbations sont définies par le déficit de vitesse dans les sillages. Or le déficit de vitesse varie significativement dans les directions azimutale et axiale, mais la vitesse est très faible dans la direction radiale. Dans le cas de la composante à large bande du

bruit d'interaction, cette hypothèse deviendrait discutable, puisque la turbulence est habituellement considérée comme homogène et isotrope. Ainsi, l'Eq. (5.7) s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x}. \tag{5.8}$$

Par conséquent, le champ de vitesse hydrodynamique incident s'écrit :

$$\mathbf{v}_i^h \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ -(rk_{n_i}^+)/n_i \\ 0 \end{pmatrix} W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}, \quad x \leq 0, \quad n \neq 0. \tag{5.9}$$

5.1.2 Champ de vitesse tourbillonnaire dans les canaux inter-aubes

Dans les canaux inter-aubes, le champ de vitesse tourbillonnaire $\mathbf{v}_d^h$ doit satisfaire la condition de rigidité aux parois du conduit et des aubes et être convecté par l'écoulement moyen. De plus le déphasage azimutal entre deux canaux adjacents doit être préservé. En accord avec ces conditions, la composante axiale des perturbations hydrodynamiques dans le stator s'écrit, pour un mode azimutal incident quelconque n :

$$\mathbf{v}_d^h(r,\theta,x) \cdot \mathbf{e}_x = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r) \cos\left(n_q\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right)\right), \quad n_q = \frac{qV}{2}, \quad u = \frac{2\pi n B}{V}.$$

Pour un canal de référence de rang $m = 0$, l'équation précédente devient :

$$\mathbf{v}_d^h(r,\theta,x) \cdot \mathbf{e}_x = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r) \cos\left(n_q\theta\right), \quad 0 \leq x \leq c. \tag{5.10}$$

Si la composante radiale du champ de vitesse hydrodynamique est considérée nulle, la propriété de divergence nulle du champ de vitesse permet d'établir un lien entre ses composantes azimutale et axiale :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x} = 0. \tag{5.11}$$

Par conséquent, le champ de vitesse hydrodynamique dans les canaux inter-aubes s'écrit, pour un ordre modal n quelconque :

$$\mathbf{v}_d^h \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \end{Bmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(n_q\theta\right) \\ -\mathrm{i}[rk_{n_i}^+ \sin\left(n_q\theta\right)]/n_q \\ 0 \end{pmatrix} A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r), \quad 0 \leq x \leq c, \quad n \neq 0. \tag{5.12}$$

5.1.3 Continuité du champ de vorticité

Afin de calculer les amplitudes modales $A_{n_q p}^0$ du champ de vitesse hydrodynamique dans le stator, la continuité du champ de vorticité doit être satisfaite aux interfaces de la grille d'aubes. Pour cela, il est nécessaire de calculer le rotationnel des champs de vitesse hydrodynamique dans les différents sous-domaines.

Rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique incidente

En coordonnées cylindriques, le rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_x)$ s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial x}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_x.$$

Si la composante radiale du champ de vitesse hydrodynamique est négligée, il vient :

$$\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial x}\right)\mathbf{e}_r + \left(-\frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_\theta)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_x.$$

Composante radiale de la vorticité incidente

$$\frac{1}{r}\frac{\mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{i}n_i W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}. \tag{5.13}$$

$$\frac{\mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} -\mathrm{i}\frac{r{k_{n_i}^+}^2}{n_i} W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}. \tag{5.14}$$

Ainsi,

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right)\cdot \mathbf{e}_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{i}\left(\frac{(n_i/r)^2 + {k_{n_i}^+}^2}{n_i/r}\right) W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}. \tag{5.15}$$

Composante azimutale de la vorticité incidente

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right)\cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{\partial \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_z}{\partial r} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} W_{n_i j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\frac{\partial f_{n_i j}(r)}{\partial r}. \tag{5.16}$$

Une solution générale de l'équation de Bessel peut s'écrire :

$$Z_\lambda(z) = AJ_\lambda(z) + BY_\lambda(z),$$

avec $J_\lambda(z)$ et $Y_\lambda(z)$ les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, λ étant un entier ou un demi-entier ($\lambda \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$). Les règles de dérivation et de récurrence des fonctions de Bessel d'ordre quelconque ([116], p.81) indiquent que :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Z_\lambda(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{2}\left[Z_{\lambda-1}(z) - Z_{\lambda+1}(z)\right], \\
\frac{\mathrm{d}Z_\lambda(z)}{\mathrm{d}z} &= Z_{\lambda-1}(z) - \frac{\lambda}{z}Z_\lambda(z), \\
\frac{\mathrm{d}Z_\lambda(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\lambda}{z}Z_\lambda(z) - Z_{\lambda+1}(z).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

L'application de l'Eq. (5.17) à la fonction de forme radiale $f_{n_i j}(r)$ permet d'écrire la relation :

$$\frac{\partial f_{n_i j}(r)}{\partial r} = \frac{K_{n_i j}}{2}\left[f_{n_i-1,j}(r) - f_{n_i+1,j}(r)\right]. \tag{5.18}$$

Par conséquent, la composante azimutale du champ de vorticité s'écrit :

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right)\cdot \mathbf{e}_\theta = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} W_{n_i j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\frac{K_{nj}}{2}\left[f_{n_i-1,j}(r) - f_{n_i+1,j}(r)\right]. \tag{5.19}$$

Composante axiale de la vorticité incidente

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right)\cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{e}_\theta)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{r^2 {k_{n_i}^+}}{n_i} W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\right). \tag{5.20}$$

Après calculs, la composante axiale du champ de vorticité incident s'écrit :

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right) \cdot \mathbf{e}_x = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k_{n_i}^+}{n_i} W_{n_i j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \left(2 f_{n_i j}(r) + \frac{r K_{nj}}{2} \left[f_{n_i-1,j}(r) - f_{n_i+1,j}(r)\right]\right). \quad (5.21)$$

En conclusion, le champ de vorticité incident s'écrit :

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{i} \left(\frac{(n_i/r)^2 + {k_{n_i}^+}^2}{n_i/r}\right) W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\ \mathbf{e}_r \\
&- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} W_{n_i j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \frac{K_{nj}}{2} \left[f_{n_i-1,j}(r) - f_{n_i+1,j}(r)\right]\ \mathbf{e}_\theta \\
&- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k_{n_i}^+}{n_i} W_{n_i j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \left(2 f_{n_i j}(r) + \frac{r K_{nj}}{2} \left[f_{n_i-1,j}(r) - f_{n_i+1,j}(r)\right]\right) \mathbf{e}_x.
\end{aligned}$$

Rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique dans le stator

De même que pour le sous-domaine en amont du stator, le champ de vorticité dans la grille d'aubes doit être calculé pour établir une nouvelle équation de raccordement.

Composante radiale de la vorticité dans le stator

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial \theta} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\frac{n_q}{r}\right) \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r). \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_\theta}{\partial x} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^+)^2}{n_q} \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r). \quad (5.23)$$

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_r = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^+)^2}{n_q} - \frac{n_q}{r}\right] \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r). \quad (5.24)$$

Composante azimutale de la vorticité dans le stator

$$\frac{\partial \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_x}{\partial r} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \cos\left(n_q\theta\right) \frac{\partial f_{n_q p}(r)}{\partial r}. \quad (5.25)$$

D'après la règle de dérivation de l'Eq. 5.18, il vient :

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \cos\left(n_q\theta\right) K_{n_q p} \left[f_{n_q-1,p}(r) - f_{n_q+1,p}(r)\right]. \quad (5.26)$$

Composante axiale de la vorticité dans le stator

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_\theta)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\mathrm{i}\frac{r k_{n_i}^+}{n_q}\right) \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r)\right). \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (r \mathbf{v}_d^h \cdot \mathbf{e}_\theta)}{\partial r} &= \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\mathrm{i}\frac{2 r k_{n_i}^+}{n_q}\right) \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_q p}(r) \\
&+ \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(-\mathrm{i}\frac{r^2 k_{n_i}^+}{n_q}\right) \sin\left(n_q\theta\right) A_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} \frac{K_{n_q p}}{2} \left[f_{n_q-1,p}(r) - f_{n_q+1,p}(r)\right]. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_x = -\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(-\mathrm{i}\frac{k_{n_i}^+}{n_q}\right)\sin\left(n_q\theta\right) A_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\left[2f_{n_qp}(r) + \frac{rK_{pq}}{2}\left(f_{n_q-1,p}(r) - f_{n_q+1,p}(r)\right)\right]. \tag{5.29}$$

En conclusion, le rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique $\mathbf{v}_d^h$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h &= \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^+)^2}{n_q} - \frac{n_q}{r}\right]\sin\left(n_q\theta\right) A_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x} f_{n_qp}(r)\ \mathbf{e}_r \\
&- \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\cos\left(n_q\theta\right) K_{n_qp}\left[f_{n_q-1,p}(r) - f_{n_q+1,p}(r)\right]\ \mathbf{e}_\theta \\
&- \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(-\mathrm{i}\frac{k_{n_i}^+}{n_q}\right)\sin\left(n_q\theta\right) A_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^+ x}\left[2f_{n_qp}(r) + \frac{rK_{pq}}{2}\left(f_{n_q-1,p}(r) - f_{n_q+1,p}(r)\right)\right]\ \mathbf{e}_x.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Continuité du champ de vorticité à l'interface de bord d'attaque

La conservation du champ de vorticité en $x = 0$ se traduit par l'équation vectorielle suivante :

$$\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h = \nabla \wedge \mathbf{v}_d^h, \quad x = 0. \tag{5.31}$$

La configuration tridimensionnelle introduit donc trois équations de continuité du champ de vorticité à l'interface, dans les directions radiale, azimutale et axiale :

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right) \cdot \mathbf{e}_r = \left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_r, \quad x = 0, \tag{5.32}$$

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right) \cdot \mathbf{e}_\theta = \left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad x = 0, \tag{5.33}$$

$$\left(\nabla \wedge \mathbf{v}_i^h\right) \cdot \mathbf{e}_x = \left(\nabla \wedge \mathbf{v}_d^h\right) \cdot \mathbf{e}_x, \quad x = 0. \tag{5.34}$$

Cependant, les amplitudes modales $A_{n_qp}^0$ sont les seules inconnues et elles forment avec ces équations de continuité un problème sur-déterminé. La Fig. 5.4 représente le champ de vorticité induit par un sillage en aval d'une pale de rotor, obtenu à partir d'une simulation RANS avec plan de mélange d'un étage rotor-stator d'une turbomachine axiale subsonique, réalisée dans le cadre du projet européen IDEALVENT. Une coupe axiale de la composante radiale du champ de vorticité est illustrée en Fig. 5.4-a et les profils des composantes axiale, azimutale et radiale de la vorticité incidente à mi-envergure sont tracés en Fig. 5.4-b. Ces résultats montrent la prédominance de la composante radiale du champ de vorticité, qui est par conséquent à conserver en priorité.

À l'interface de bord d'attaque ($x = 0$) et en ne considérant qu'un mode incident (n_i, j), la continuité de la composante radiale du champ de vorticité s'écrit :

$$\mathrm{i}\left(\frac{(n_i/r)^2 + k_{n_i}^{+2}}{n_i/r}\right) W_{n_ij} f_{n_ij}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^+)^2}{n_q} - \frac{n_q}{r}\right]\sin\left(n_q\theta\right) A_{n_qp}^0 f_{n_qp}(r). \tag{5.35}$$

Habituellement utilisée, la technique de résolution par projection modale fait intervenir les propriétés d'orthogonalité des fonctions $f_{\alpha\beta}(r)$ et des fonctions trigonométriques qui vérifient :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{V}}\int_\sigma^1 f_{n_\alpha\beta}(r) f_{n_\mu\nu}(r)\sin\left(n_\alpha\theta\right)\sin\left(n_\mu\theta\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = (1-\delta_{\mu 0})\frac{\pi}{V}\delta_{n_\alpha n_\mu}\delta_{\beta\nu}, \quad n_\gamma = \frac{\gamma V}{2}, \quad \gamma \in [\alpha, \mu]. \tag{5.36}$$

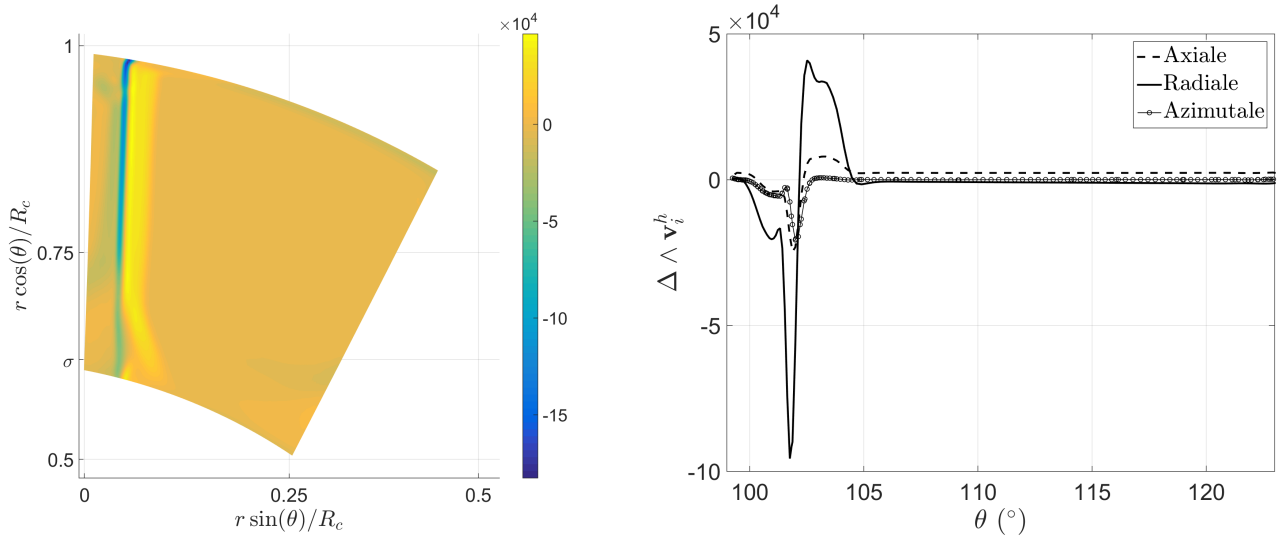


FIGURE 5.4 – Représentation du champ de vorticité incidente pour une configuration typique de machine tournante axiale (projet IDEALVENT) (a) : Coupe axiale de la composante radiale. (b) : Profils des composantes axiale, radiale et azimutale à mi-envergure en aval d'une pale de rotor.

Cependant, la dépendance radiale du terme de droite de l'Eq. (5.35) ne forme plus une base orthogonale, ce qui ne permet plus de transformer, par projection modale, la somme en système linéaire. Pour autant, la projection modale a le bénéfice d'éliminer les dépendances radiale et azimutale $(r,\,\theta)$ grâce à l'intégration apportée par les produits scalaires. De plus, la dépendance azimutale conserve ses propriétés d'orthogonalité, ce qui permet non plus d'obtenir une solution analytique des amplitudes $A^0_{n_q p}$ mais une équation matricielle à inverser.

Premièrement, une projection modale est effectuée sur la dépendance azimutale :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{V}} \sin\left(n_\mu \theta\right)(\bullet)\,\mathrm{d}\theta, \quad n_\mu = \frac{\mu V}{2}, \quad \mu \in \mathbb{N}. \tag{5.37}$$

L'Eq. (5.35) devient :

$$\mathrm{i}\left(\frac{(n_i/r)^2 + k_{n_i}^{+^2}}{n_i/r}\right) W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \Psi_{n_\mu, n_i} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^+)^2}{n_\mu} - \frac{n_\mu}{r}\right] A^0_{n_\mu p} f_{n_\mu p}(r) \frac{\pi}{V}(1-\delta_{\mu 0}). \tag{5.38}$$

où :

$$\Psi_{n_\mu, n_i} = \int_0^{\frac{2\pi}{V}} \sin\left(n_\mu \theta\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \dfrac{n_\mu\left((-1)^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1\right)}{n_i^2 - n_\mu^2}, & \text{si} \quad n_\mu \neq n_i, \\ \dfrac{\mathrm{i}\pi}{V}(1-\delta_{\mu,0}), & \text{si} \quad n_\mu = n_i. \end{cases}, \quad u = \frac{2\pi n B}{V}. \tag{5.39}$$

Le produit scalaire suivant est utilisé vis-à-vis de la dépendance radiale :

$$\int_\sigma^1 f_{n_\mu \nu}(r)\,(\bullet)\,r\mathrm{d}r. \tag{5.40}$$

L'Eq. (5.38) devient :

$$W_{n_i j}\Psi_{n_\mu, n_i}\chi^{n_\mu \nu}_{n_i j} = \sum_{p=0}^{+\infty} A^0_{n_\mu p}\frac{\pi}{V}(1-\delta_{\mu 0})\chi^{n_\mu \nu}_{n_\mu p}. \tag{5.41}$$

où :

$$\chi_{n_i j}^{n_\mu \nu} = \int_\sigma^1 \mathrm{i} \left(\frac{(n_i/r)^2 + k_{n_i}^{+2}}{n_i/r} \right) W_{n_i j} f_{n_i j}(r) f_{n_\mu \nu}(r) r \mathrm{d}r. \tag{5.42}$$

$$\chi_{n_\mu p}^{n_\mu \nu} = \int_\sigma^1 \left[\frac{r(\mathrm{i}k_{n_i}^{+})^2}{n_\mu} - \frac{n_\mu}{r} \right] f_{n_\mu p}(r) f_{n_\mu \nu}(r) r \mathrm{d}r. \tag{5.43}$$

L'Eq. (5.41) est un système de N_μ équations matricielles à inverser. Ainsi, pour un ordre azimutal μ quelconque, l'équation peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{\Phi}_i^\mu = \mathbf{\Phi}_d^\mu \, \mathbf{A}^\mu. \tag{5.44}$$

où :

$$\Phi_i^\mu(\nu, 1) = W_{n_i j} \Psi_{n_\mu, n_i} \chi_{n_i j}^{n_\mu \nu}. \tag{5.45}$$

$$\Phi_d^\mu(\nu, p) = \frac{\pi}{V}(1 - \delta_{\mu 0}) \chi_{n_\mu p}^{n_\mu \nu}. \tag{5.46}$$

$$A^\mu(p, 1) = A_{n_\mu p}^0. \tag{5.47}$$

La résolution par inversion matricielle permet d'obtenir un vecteur de taille N_p contenant les valeurs de $A_{n_\mu p}^0$ pour un ordre μ quelconque. Pour obtenir la matrice des amplitudes $A_{n_\mu p}^0$, les N_μ équations matricielles doivent être inversées.

5.1.4 Champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator

L'écoulement est considéré non-visqueux et homoentropique, par conséquent les perturbations hydrodynamiques sont identiques en amont et en aval du stator, simplement convectées par l'écoulement moyen. Le champ de vitesse tourbillonnaire en aval du stator s'écrit ainsi :

$$\mathbf{v}_t^h \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ -(rk_{n_i}^{+})/n_i \\ 0 \end{pmatrix} W_{n_i j} f_{n_i j}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i \theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_i}^{+} x}, \quad c \leq x, \quad n \neq 0. \tag{5.48}$$

La continuité de la vorticité aux deux interfaces assure mathématiquement l'équivalence du champ de vitesse tourbillonnaire en amont ou en aval de la grille d'aubes.

5.2 Expression des potentiels acoustiques

De manière identique à la configuration bidimensionnelle, l'impact d'une rafale hydrodynamique sur la grille d'aubes génère des champs potentiels dans les différents sous-domaines. Ces champs acoustiques potentiels sont solutions de l'équation de Helmholtz convectée en accord avec les conditions aux limites propres aux milieux. Il s'agit des champs potentiels diffractés en amont et en aval du stator, notés ϕ_r et ϕ_t et ceux se propageant vers l'amont ϕ_u et vers l'aval ϕ_d dans les canaux inter-aubes. Le nombre d'onde total correspondant au n-ième multiple de la fréquence de passage des pales est $k = k_n = nB\Omega/c_0$. Pour un mode (n_i, j) quelconque, les champs potentiels ϕ_r et ϕ_t en amont et en aval du stator, respectivement, s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_t \end{pmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} R_{n_s t} \\ T_{n_s t} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s \theta} f_{n_s t}(r) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_s t}^{-} x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_s t}^{+}(x-c)} \end{pmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x \leq 0 \\ c \leq x \end{Bmatrix}, \tag{5.49}$$

où :

$$f_{n_s t}(r) = N_{n_s t} \left[\cos(\tau_{n_s t}) J_{n_s}(K_{n_s t} r) - \sin(\tau_{n_s t}) Y_{n_s}(K_{n_s t} r) \right],$$

$$n_s = nB + sV, \quad k_{n_st}^{\pm} = \frac{-Mk_n \pm \overline{k_{n_st}}}{\beta^2}, \quad \overline{k_{n_st}} = \sqrt{k_n^2 - \beta^2 K_{n_st}^2}, \quad k_n = \frac{nB\Omega}{c_0}.$$

Les potentiels ϕ_d^m et ϕ_u^m des ondes se propageant en aval et en amont, respectivement, dans un canal de rang m s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \phi_d^m \\ \phi_u^m \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} D_{n_qp}^0 \\ U_{n_qp}^0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} f_{n_qp}(r) \cos\left[n_q\left(\theta - \frac{2\pi m}{V}\right)\right] \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^+ x} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}^-(x-c)} \end{pmatrix}, \quad 0 \le x \le c, \quad (5.50)$$

où :

$$f_{n_qp}(r) = N_{n_qp}\left[\cos(\tau_{n_qp}) J_{n_q}(K_{n_qp} r) - \sin(\tau_{n_qp}) Y_{n_q}(K_{n_qp} r)\right],$$

$$n_q = \frac{qV}{2}, \quad k_{n_qp}^{\pm} = \frac{-Mk \pm \overline{k_{n_qp}^{\pm}}}{\beta^2}, \quad \overline{k_{n_qp}^{\pm}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K_{n_qp}^2}, \quad u = \frac{2\pi nB}{V}.$$

Les champs acoustiques diffractés dans les conduits annulaires en amont et en aval du stator sont le résultat de la modulation des rafales hydrodynamiques avec la périodicité des V aubes de la grille. L'application du principe de trace mène naturellement au critère de Tyler et Sofrin [162], pour lequel le nombre d'onde azimutal des champs acoustiques générés en amont et en aval de la grille d'aubes par l'interaction rotor-stator est égal à $nB \pm sV$, $[n, s] \in \mathbb{Z}$.

5.3 Équations de raccordement

Deux ensembles d'équations sont écrits en $x = 0$ et en $x = c$ traduisant la continuité des fluctuations de pression et de vitesse totale axiale aux interfaces du stator. Pour traiter l'impact de rafales hydrodynamiques sur une grille d'aubes tridimensionnelle, le vecteur $\mathbf{\Gamma}_\gamma$ s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_\gamma(r,\theta,x) = \begin{pmatrix} p_\gamma^{ac}(r,\theta,x) \\ (\mathbf{v}_\gamma^{ac}(r,\theta,x) + \mathbf{v}_\gamma^{h}(r,\theta,x)) \cdot \mathbf{e}_x \end{pmatrix}, \quad \gamma = i, r, t, d, u.$$

Les équations de raccordement s'écrivent :

$$\mathbf{\Gamma}_i(r,\theta,0) + \mathbf{\Gamma}_r(r,\theta,0) = \mathbf{\Gamma}_d(r,\theta,0) + \mathbf{\Gamma}_u(r,\theta,0), \quad \forall r, \quad \forall\theta, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{\Gamma}_d(r,\theta,c) + \mathbf{\Gamma}_u(r,\theta,c) = \mathbf{\Gamma}_t(r,\theta,c), \quad \forall r, \quad \forall\theta. \quad (5.52)$$

5.3.1 Raccordement modal à l'interface de bord d'attaque

À l'interface de bord d'attaque ($x = 0$), et pour un canal inter-aubes de référence ($m = 0$), les équations de raccordement s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}(k_n - Mk_{n_st}^-) R_{n_st} f_{n_st}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}$$
$$= \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k_n - Mk_{n_qp}^+) D_{n_qp}^0 + (k_n - Mk_{n_qp}^-) U_{n_qp}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{n_qp}^- c}\right] f_{n_qp}(r)\cos(n_q\theta), \quad (5.53)$$

2. Continuité de la vitesse totale axiale :

$$W_{n_ij}f_{n_ij}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\mathrm{i}k^-_{n_st}R_{n_st}f_{n_st}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}$$
$$=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^+_{n_qp}D^0_{n_qp}+\mathrm{i}k^-_{n_qp}U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_qp}c}+A^0_{n_qp}\right]f_{n_qp}(r)\cos(n_q\theta). \tag{5.54}$$

La technique de projection modale n'est appliquée dans cette section qu'avec le projecteur orthogonal associé à la base modale du conduit annulaire. L'utilisation de l'autre base modale est également possible et tout à fait identique. Une première projection est effectuée avec le produit scalaire défini par l'Eq. (5.55).

$$\int_0^{2\pi/V}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_\mu\theta}(\bullet)\mathrm{d}\theta,\quad \mu\in\mathbb{Z},\quad n_\mu=nB+\mu V, \tag{5.55}$$

Le système d'équations devient :

$$\sum_{t=0}^{+\infty}(k_n-Mk^-_{n_\mu t})R_{n_\mu t}f_{n_\mu t}(r)\frac{2\pi}{V}$$
$$=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k_n-Mk^+_{n_qp})D^0_{n_qp}+(k_n-Mk^-_{n_qp})U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_qp}c}\right]f_{n_qp}(r)\varphi_{n_\mu,n_q}, \tag{5.56}$$

$$W_{n_\mu j}f_{n_\mu j}(r)\delta_{\mu,0}\frac{2\pi}{V}+\sum_{t=0}^{+\infty}\mathrm{i}k^-_{n_\mu t}R_{n_\mu t}f_{n_\mu t}(r)\frac{2\pi}{V}$$
$$=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^+_{n_qp}D^0_{n_qp}+\mathrm{i}k^-_{n_qp}U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_qp}c}+A^0_{n_qp}\right]f_{n_qp}(r)\varphi_{n_\mu,n_q}. \tag{5.57}$$

où :

$$\varphi_{\mu,q}=\int_0^{2\pi/V}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n_\mu\theta}\cos\left(n_q\theta\right)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}n_\mu\left[(-1)^q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1\right]}{n_\mu^2-n_q^2}, & \text{si}\quad n_q\neq n_\mu,\\ \dfrac{\pi}{V}(1+\delta_{q,0}), & \text{si}\quad n_q=n_\mu.\end{cases} \tag{5.58}$$

Une seconde projection orthogonale est effectuée avec le projecteur suivant :

$$\int_\sigma^1 f_{n_\mu\nu}(r)(\bullet)r\mathrm{d}r,\quad n_\mu=nB+\mu V,\quad [n,\mu]\in\mathbb{Z},\quad \nu\in\mathbb{N}, \tag{5.59}$$

menant au système d'équations :

$$(k_n-Mk^-_{n_\mu\nu})R_{n_\mu\nu}\frac{2\pi}{V}=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k_n-Mk^+_{n_qp})D^0_{n_qp}+(k_n-Mk^-_{n_qp})U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_qp}c}\right]\varphi_{n_\mu,n_q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}, \tag{5.60}$$

$$W_{n_\mu\nu}\delta_{\mu,0}\frac{2\pi}{V}+\mathrm{i}k^-_{n_\mu\nu}R_{n_\mu\nu}\frac{2\pi}{V}$$
$$=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^+_{n_qp}D^0_{n_qp}+\mathrm{i}k^-_{n_qp}U^0_{n_qp}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^-_{n_qp}c}+A^0_{n_qp}\right]\varphi_{n_\mu,n_q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}. \tag{5.61}$$

où :

$$\Xi_{n_q p}^{n_\mu \nu} = \int_\sigma^1 f_{n_\mu \nu}(r) f_{n_q p}(r) r \mathrm{d}r, \quad n_\mu = nB + \mu V, \quad n_q = \frac{qV}{2}.$$

Comme expliqué en Sec. 4.5.1, cette intégrale est calculée numériquement. Les doublets d'indices (μ, ν) et (q, p) sont réduits aux variables η et ϱ afin de pouvoir réaliser l'inversion matricielle :

$$\eta = (\mu + (N_\mu - 1)/2) \times N_\nu + \nu, \quad \mu \in [-(N_\mu - 1)/2, (N_\mu - 1)/2], \quad \nu \in [0, N_\nu - 1],$$

$$\varrho = q \times N_p + p, \quad q \in [0, N_q - 1], \quad p \in [0, N_p - 1].$$

Les équations de raccordement à l'interface de bord d'attaque sont entièrement décrites par l'équation matricielle (5.62) :

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_p^1 & \mathbf{B}_p^1 \\ \underline{\mathbf{A}_v^1} & \underline{\mathbf{B}_v^1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{D}^0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{C}_p^1 \\ \mathbf{C}_v^1 \end{array} \right), \tag{5.62}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_p^1(\eta, \eta) &= \frac{2\pi}{V} \mathrm{diag}\left((k_n - M k_{n_\mu \nu}^-) \right), \\
A_v^1(\eta, \eta) &= \frac{2\pi}{V} \mathrm{diag}\left(\mathrm{i} k_{n_\mu \nu}^- \right), \\
B_p^1(\eta, \varrho) &= -(k_n - M k_{n_q p}^+) \varphi_{n_\mu, q} \Xi_{n_q p}^{n_\mu \nu}, \\
B_v^1(\eta, \varrho) &= -\mathrm{i} k_{n_q p}^+ \varphi_{n_\mu, q} \Xi_{n_q p}^{n_\mu \nu}, \\
C_p^1(\eta, 1) &= \sum_{q=0}^{N_q - 1} \sum_{p=0}^{N_p - 1} (k_n - M k_{n_q p}^-) U_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_{n_q p}^- c} \varphi_{n_\mu, q} \Xi_{n_q p}^{n_\mu \nu}, \\
C_v^1(\eta, 1) &= \sum_{q=0}^{N_q - 1} \sum_{p=0}^{N_p - 1} \left[\mathrm{i} k_{n_q p}^- U_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_{n_q p}^- c} + A_{n_q p}^0 \right] \varphi_{n_\mu, q} \Xi_{n_q p}^{n_\mu \nu} - W_{n_\mu \nu} \delta_{\mu, 0} \frac{2\pi}{V}.
\end{aligned}$$

Pour la phase d'initialisation ($g = 0$) de la procédure itérative, le vecteur des amplitudes modales du champ ϕ_u^0 est considéré nul ($\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}$), puisqu'il n'y a pas encore eu de réflexion acoustique sur l'interface de bord de fuite. La résolution de l'Eq. (5.62) permet la détermination des amplitudes modales des champs ϕ_r et ϕ_d^0.

5.3.2 Raccordement modal à l'interface de bord de fuite

À l'interface de bord de fuite ($x = c$), et pour un canal inter-aubes de référence ($m = 0$), les équations de raccordement s'écrivent :

1. Continuité de la pression acoustique :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left[(k_n - M k_{n_q p}^+) D_{n_q p}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_{n_q p}^+ c} + (k - M k_{n_q p}^-) U_{n_q p}^0 \right] f_{n_q p}(r) \cos(n_q \theta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} (k_n - M k_{n_s t}^+) T_{n_s t} f_{n_s t}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i} n_s \theta}, \tag{5.63}$$

2. Continuité de la vitesse totale axiale :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}D^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}c}+\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}U^{0}_{n_qp}+A^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}\right]f_{n_qp}(r)\cos(n_q\theta) \quad = \\ \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\mathrm{i}k^{+}_{n_st}T_{n_st}f_{n_st}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_s\theta}+W_{n_ij}f_{n_ij}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}. \tag{5.64}$$

La double projection orthogonale constituée des produits scalaires définis par les Eqs. (5.55) et (5.59) mène au système :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[(k_n-Mk^{+}_{n_qp})D^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}c}+(k-Mk^{-}_{n_qp})U^{0}_{n_qp}\right]\varphi_{n_\mu,n_q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}=(k_n-Mk^{+}_{n_\mu\nu})T_{n_\mu\nu}\frac{2\pi}{V}, \tag{5.65}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}D^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}c}+\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}U^{0}_{n_qp}+A^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}\right]\varphi_{n_\mu,n_q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp} \quad = \\ \mathrm{i}k^{+}_{n_\mu\nu}T_{n_\mu\nu}\frac{2\pi}{V}+W_{n_\mu\nu}\delta_{\mu0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}\frac{2\pi}{V}. \tag{5.66}$$

En utilisant le doublet d'indices $(\eta,\,\varrho)$, l'équation matricielle finale s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^2_p & \mathbf{B}^2_p\\ \underline{\mathbf{A}^2_v} & \underline{\mathbf{B}^2_v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{U}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^2_p\\ \mathbf{C}^2_v\end{pmatrix}, \tag{5.67}$$

où :

$$\begin{aligned}
A^2_p(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left((k_n-Mk^{+}_{n_\mu\nu})\right),\\
A^2_v(\eta,\eta) &= \frac{2\pi}{V}\mathrm{diag}\left(\mathrm{i}k^{+}_{n_\mu\nu}\right),\\
B^2_p(\eta,\varrho) &= -(k_n-Mk^{-}_{n_qp})\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
B^2_v(\eta,\varrho) &= -\mathrm{i}k^{-}_{n_qp}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
C^2_p(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}(k-Mk^{+}_{n_qp})D^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}c}\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp},\\
C^2_v(\eta,1) &= \sum_{q=0}^{N_q-1}\sum_{p=0}^{N_p-1}\left[\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}D^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_qp}c}+A^{0}_{n_qp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}\right]\varphi_{n_\mu,q}\Xi^{n_\mu\nu}_{n_qp}-W_{n_\mu\nu}\delta_{\mu0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{+}_{n_i}c}\frac{2\pi}{V}.
\end{aligned}$$

Afin de prendre en compte la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, il suffit de rajouter dans le système linéaire les matrices $\underline{\mathbf{A}_K}$, $\underline{\mathbf{E}^K_v}$, $\mathbf{C}_K$, déterminées dans la Sec. 4.7.3, tout en modifiant le déphasage inter-aubes $u=2\pi nB/V$ et le nombre d'onde total k_n. L'équation matricielle devient alors :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^2_p & \mathbf{B}^2_p & \underline{\mathbf{0}}\\ \underline{\mathbf{A}^2_v} & \underline{\mathbf{B}^2_v} & \underline{\mathbf{E}^K_v}\\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{A}_K} & \underline{\mathbf{0}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{U}^0\\ \mathbf{\Omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^2_p\\ \mathbf{C}^2_v\\ \mathbf{C}_K\end{pmatrix} \tag{5.68}$$

Enfin, l'inversion matricielle de l'Eq. (5.68) permet la détermination des amplitudes modales des champs acoustiques ϕ_t et ϕ^0_u. Ce dernier est ensuite utilisé comme donnée d'entrée dans l'équation matricielle de raccordement à l'interface de bord d'attaque, dans la procédure itérative.

5.4 Résultats

La technique de raccordement modal est appliquée dans ce qui suit à la génération du bruit d'interaction de sillages rotor-stator dans une configuration tridimensionnelle. Après une étude de la continuité des fluctuations de pression et de vitesse axiale à l'interface de bord d'attaque, la technique est utilisée pour analyser le comportement aéroacoustique du ventilateur du banc SEMAFOR et pour évaluer la pertinence de la méthode de résolution.

5.4.1 Validation paramétrique

La continuité de la vorticité radiale, de la pression et de vitesse axiale à l'interface de bord d'attaque est d'abord étudiée pour évaluer les erreurs introduites par la troncature modale, nécessaire à l'inversion matricielle. Les paramètres du cas test, représentatif d'un ventilateur axial subsonique sont détaillés dans la Tab. 5.1 :

Géométrie du stator	Onde acoustique incidente
$M = 0.07, \quad V = 10, \quad \sigma = 0.62, \quad c = 0.046$ m,	$n = 7, \quad j = 0, \quad f = 8550$ Hz

TABLE 5.1 – Paramètres du cas test - Validation de la continuité des champs à l'interface

Les nombres de Helmholtz correspondants sont $kR_c = 13.24$ et $kc = 7.27$. Les calculs ont été réalisés pour différents nombres de modes azimutaux $N_s \in [21, 41, 81, 161, 321]$ et de modes radiaux $N_t \in [4, 8, 12]$. Pour chaque simulation, le même nombre de modes a été choisi pour les milieux de part et d'autre de l'interface.

Continuité des champs à l'interface de bord d'attaque

La continuité des différents champs calculés par le modèle de bruit d'interaction rotor-stator à l'interface de bord d'attaque est étudiée dans cette section. La Fig. 5.5 illustre la continuité de la composante radiale de la vorticité, dans la direction azimutale (a) et dans le sens de l'envergure (b). L'augmentation du nombre de modes permet, dans la direction azimutale, d'atténuer les ondulations présentes sur la majeure partie du segment considéré. La continuité s'affine lorsque le nombre de modes augmente, cependant une discontinuité apparaît au voisinage de l'aube et ne semble pas s'atténuer malgré le nombre croissant de modes pris en compte. Dans le sens de l'envergure, l'augmentation du nombre de modes permet d'assurer la continuité sur une section de plus en plus grande. Comme l'illustre la Fig. 5.5-f, le nombre de modes maximum choisi pour cette étude ne permet pas de garantir la continuité de la vorticité sur toute l'envergure : une divergence subsiste dans les derniers 5 % de l'envergure. Bien qu'elle ne représente qu'une faible partie du domaine, cette zone demeure primordiale en raison de l'effet de peau qui concentre les variations du champ acoustique en périphérie du conduit lorsque l'ordre modal azimutal est important. La Fig. 5.6 illustre la continuité des champs de pression et de vitesse axiale totale dans la direction azimutale. De même, la continuité s'affine avec l'augmentation du nombre de modes, les ondulations disparaissent sur l'essentiel du segment et des discontinuités apparaissent aux voisinages des aubes du stator. Enfin, la Fig. 5.7 montre la continuité de ces mêmes quantités selon le rayon. De très fortes divergences sont présentes lorsque le nombre de modes pris en compte dans la troncature est faible. L'augmentation du nombre de modes modifie significativement la continuité. Cependant, cette augmentation permet seulement d'étendre la plage radiale où la continuité est assurée, mais hors de cette zone, l'écart demeure très important. Il est également observé que cette amélioration est dépendante à la fois du nombre de modes azimutaux et du nombre de modes radiaux et non seulement de ce dernier. Ces résultats constituent une première étude de convergence en nombre de modes. Cependant, le nombre de modes nécessaire pour assurer la continuité aux deux interfaces est dépendant de nombreux paramètres, tels que la fréquence, les ordres modaux de l'onde ou de la rafale incidente. Par conséquent, des études complémentaires devront être menées pour déterminer le nombre

de modes minimal permettant d'obtenir des résultats pertinents dans une optique d'optimisation du code de calcul. En effet, le temps de calcul étant directement dépendant du nombre de modes pris en compte, sa réduction en fait un point crucial pour élaborer un outil rapide de prédiction du bruit.

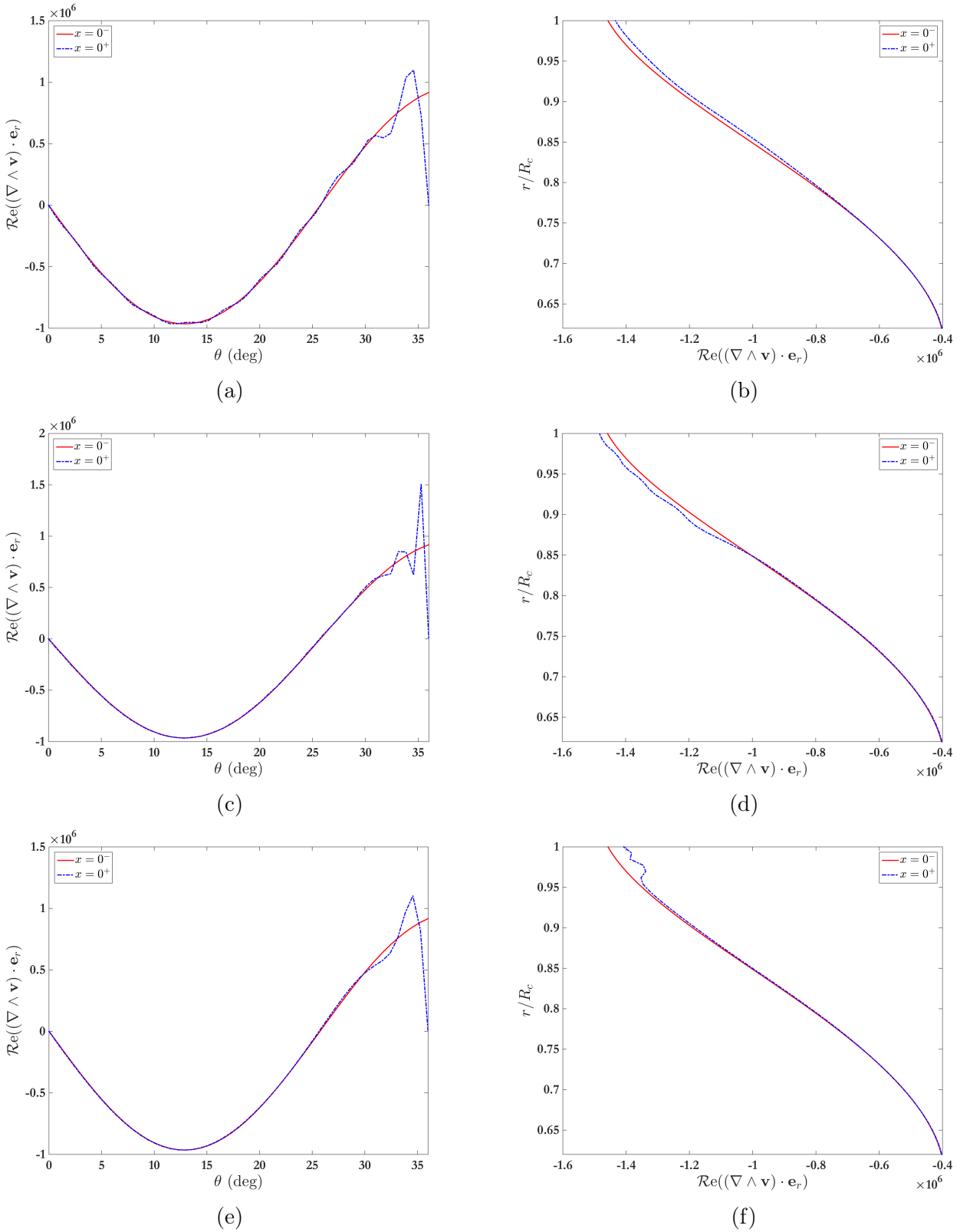


FIGURE 5.5 – Comparaison des champs de vorticité de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure (gauche) dans la direction azimutale et à mi-largeur de canal dans la direction radiale (droite) avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f).

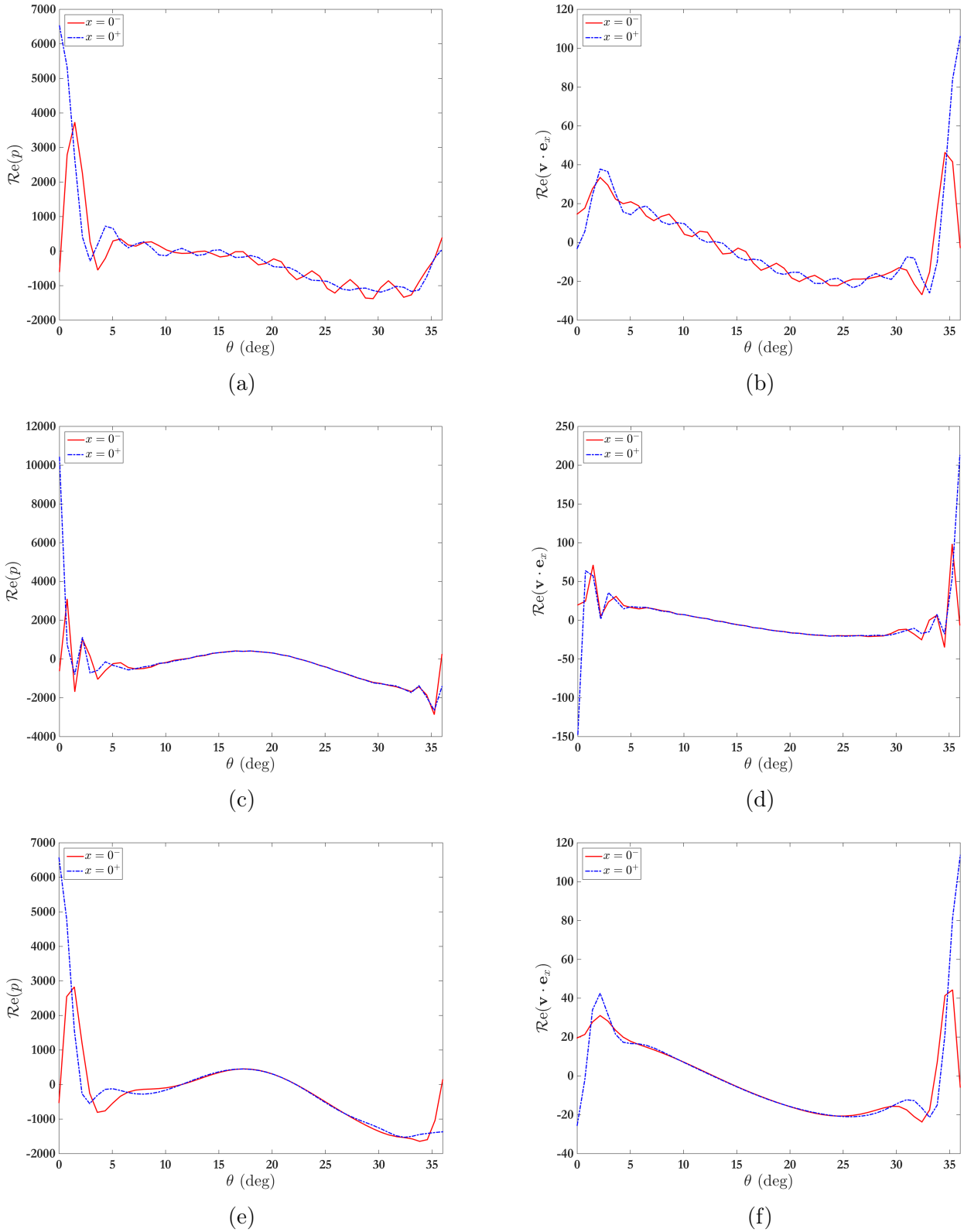


FIGURE 5.6 – Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustiques (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-envergure avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f).

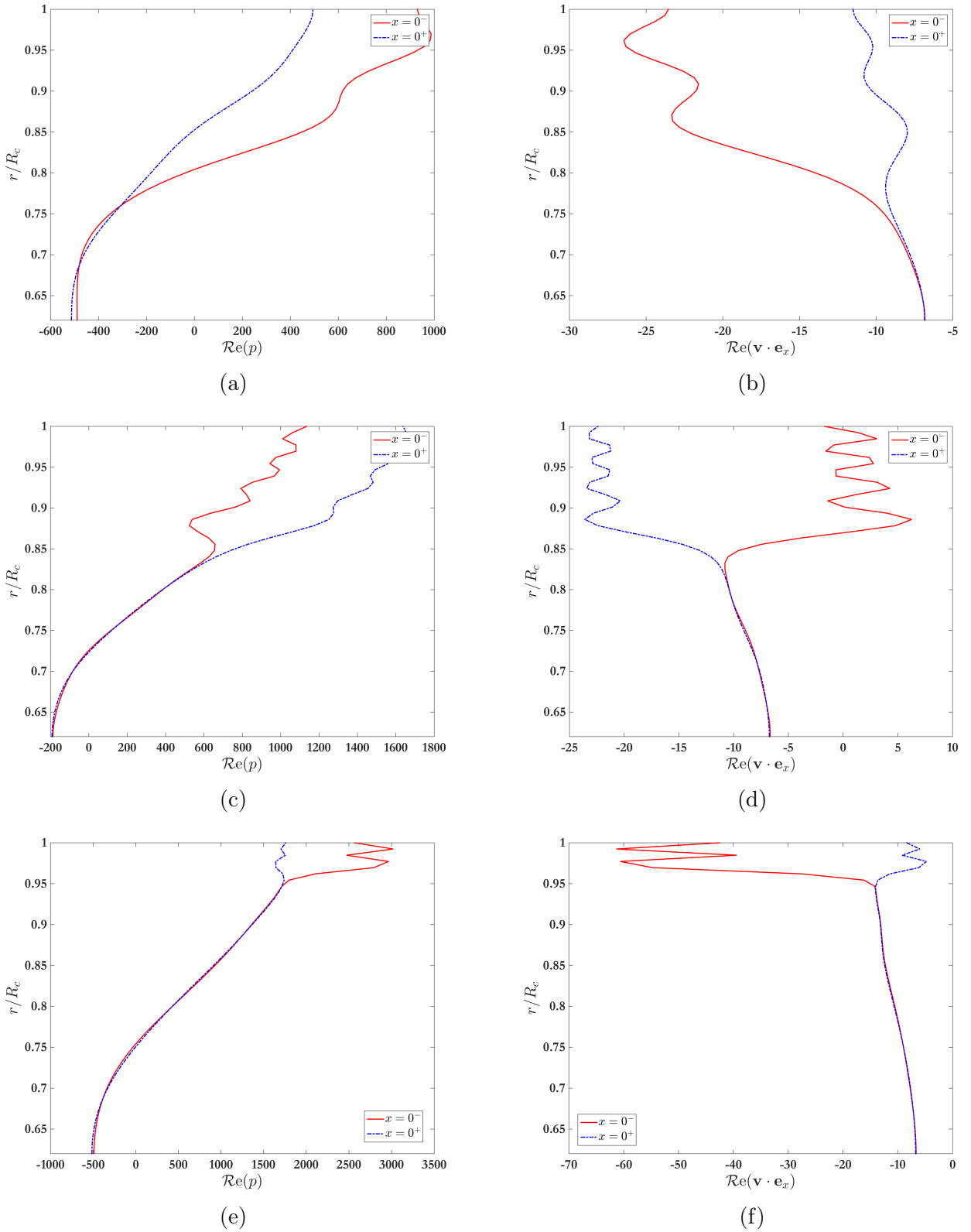


FIGURE 5.7 – Comparaison des champs de pression (gauche) et de vitesse axiale acoustiques (droite) de part et d'autre de l'interface calculés à mi-largeur d'un canal inter-aubes avec la technique de raccordement modal. Les nombres de modes azimutaux et radiaux utilisés pour la troncature modale sont : $N_s = 21$, $N_t = 4$ (a-b) ; $N_s = 81$, $N_t = 8$ (c-d) ; $N_s = 321$, $N_t = 4$ (e-f).

5.4.2 Bruit d'interaction rotor-stator

La géométrie du banc SEMAFOR est utilisée comme cas d'application de la technique de raccordement modal pour le bruit d'interaction rotor/stator. L'étage de turbomachine est composé de 17 pales et de 23 aubes. Le rapport de moyeu est de 0.55. La longueur de corde est $c = 3$ cm, le nombre de Mach axial est $M = 0.07$. Les trois premières composantes de Fourier d'ordre radial nul des sillages incidents sont considérées ($n \in [1, 2, 3], j = 0$), correspondant aux trois premières fréquences de passage des pales $f \in [2833, 5666, 8500]$ Hz.

Cas SEMAFOR : première FPP

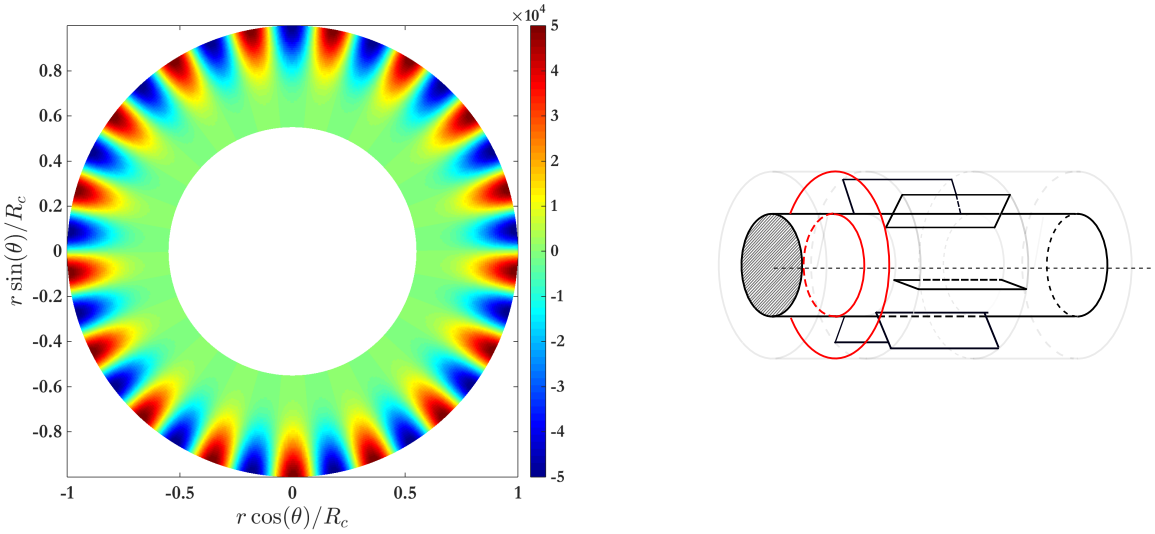
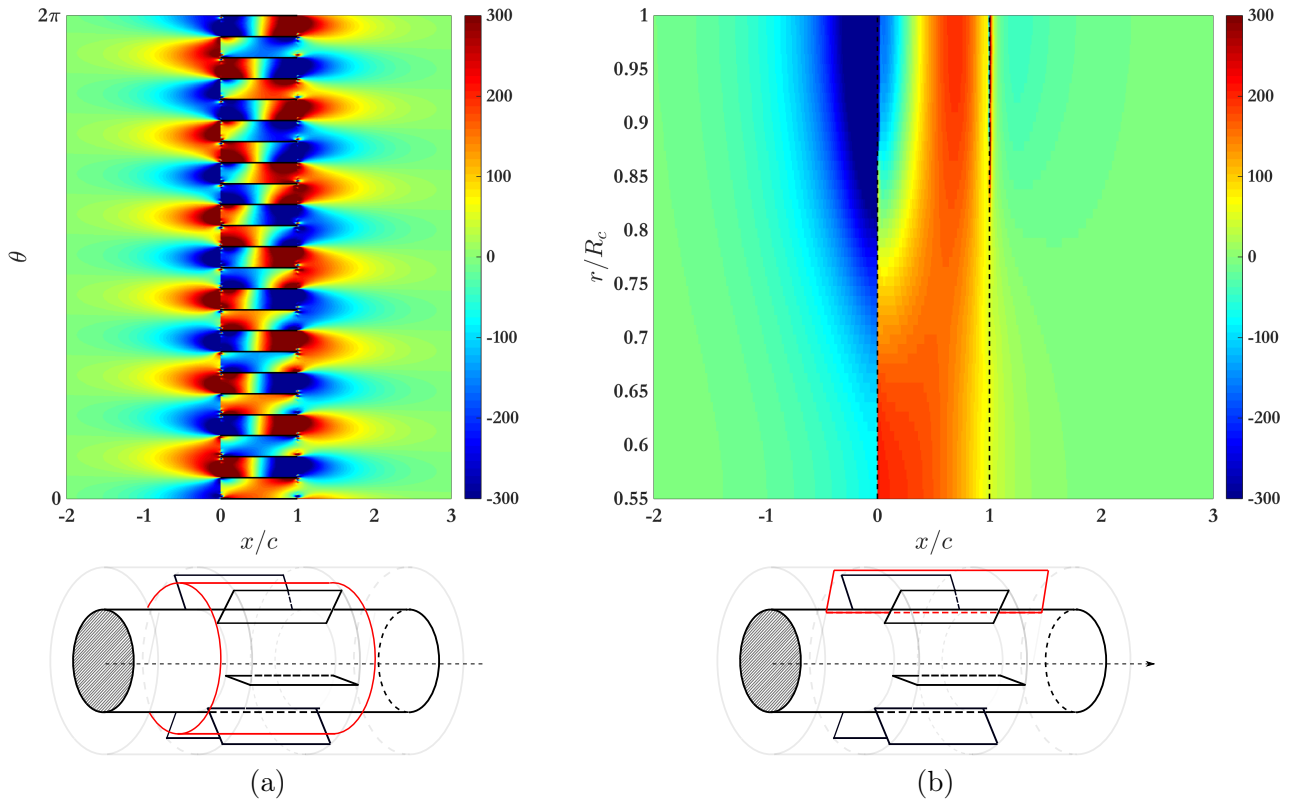


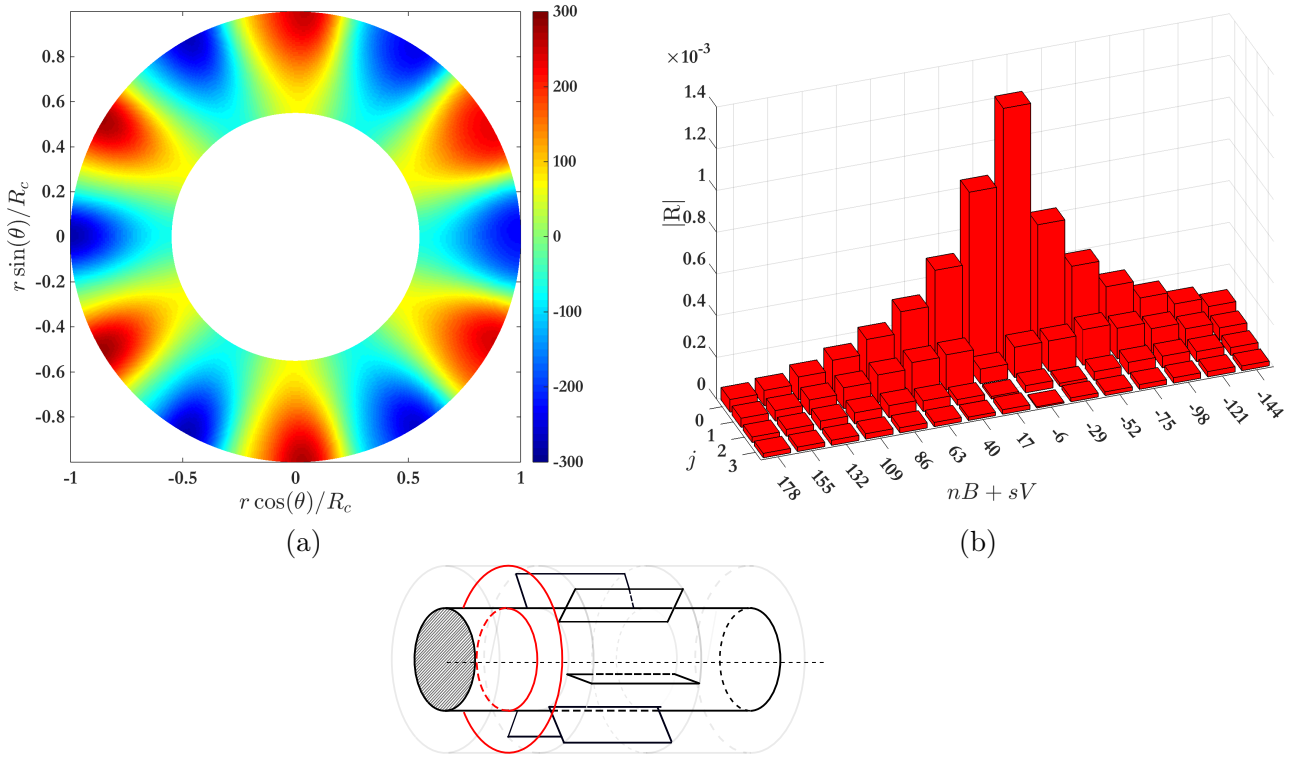
FIGURE 5.8 – Coupe axiale du champ de vorticité radiale du mode hydrodynamique ($n = 1$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$.

La première fréquence de passage des pales est considérée, représentant le mode hydrodynamique ($n = 1, j = 0$). Le champ de vorticité radiale est représenté dans une coupe axiale à $x = -c/2$ en Fig. 5.8. Ce champ est composé de $nB = 17$ lobes tournant dans le sens trigonométrique. Un effet de peau important est visible dans la mesure où les variations de la vorticité se concentrent qu'en périphérie du conduit, en raison de l'ordre élevé du mode azimutal. Le champ acoustique dans tout le domaine est illustré en Fig. 5.9 dans des coupes cylindrique et méridienne. Le champ acoustique en amont et en aval de la grille de stator est entièrement coupé, avec le mode dominant $(-6, 0)$, qui est atténué sur les coupes axiales des champs acoustiques en amont et en aval du stator (Figs. 5.10 et 5.11), tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Seul le mode fondamental se propage à l'intérieur des canaux inter-aubes (Fig. 5.11-c). Il est très important de remarquer que le champ acoustique n'est pas continu sur l'interface de bord d'attaque. En effet, la condition de Kutta-Joukoswki instationnaire, bien que modélisée dans la configuration tridimensionnelle, n'a pas encore été implémentée dans le code de calcul appliqué à la génération du bruit par l'interaction de sillages. En plus d'apporter davantage de réalisme dans la modélisation, cette condition assure également un transfert énergétique entre le mode acoustique et le mode de vorticité par le biais de l'échappement tourbillonnaire en aval des aubes du stator. De plus, dans le cas présent, aucun mode passant susceptible de transporter de l'énergie n'est généré en dehors de la grille. Par conséquent, l'énergie acoustique présente dans les canaux est piégée à l'intérieur de la grille d'aubes et le bilan de puissance ne peut plus s'équilibrer. Dans le cas bidimensionnel (Sec. 3), la condition de Kutta-Joukoswki instationnaire est implémentée et ce problème est évité. D'un point de vue pratique, le calcul itératif ne converge pas et s'arrête à la résolution d'un système d'équations, à l'une ou à l'autre interface, ce qui est illustré sur la coupe cylindrique du champ de pression (Fig. 5.9) où la continuité n'est pas assurée sur l'interface de bord d'attaque du stator. L'implémentation de la condition de Kutta-Joukoswki instationnaire au bord de fuite est par conséquent une étape essentielle dans le développement de la technique de raccordement modal.



(a) (b)

FIGURE 5.9 – Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b).



(a) (b)

FIGURE 5.10 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe axiale (c) des champs incident (a), réfléchi (b), à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont tous coupés.

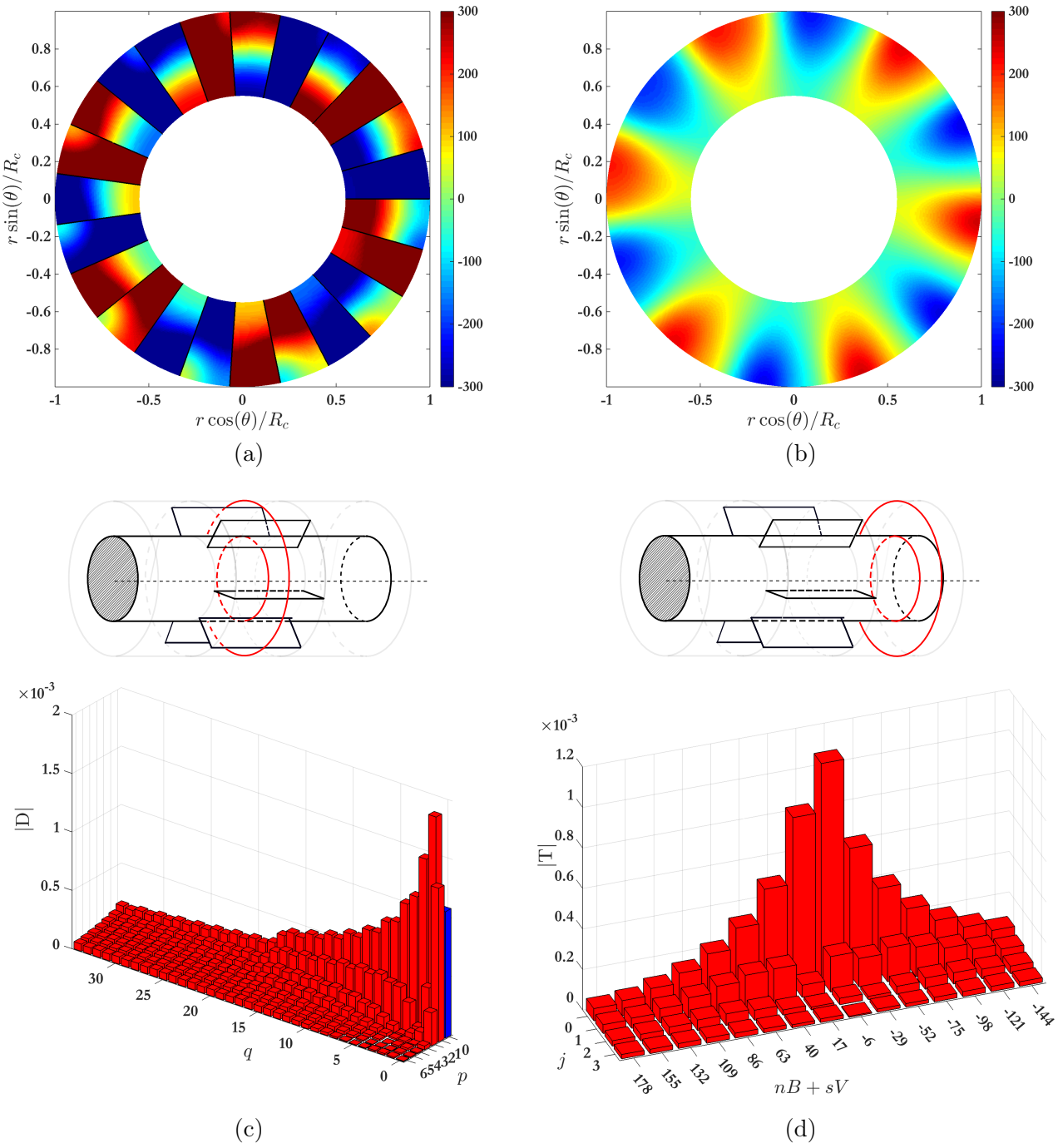


FIGURE 5.11 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

Cas SEMAFOR : deuxième FPP

L'impact de la rafale correspondant au mode hydrodynamique ($n = 2, j = 0$) lié à la deuxième fréquence de passage des pales est étudié. Le champ de vorticité radial est illustré en Fig. 5.12, où les $nB = 34$ lobes du mode sont visibles, tournant dans le sens trigonométrique. La Fig. 5.13 montre le champ acoustique généré dans des coupes cylindrique et méridienne. De même que pour la première fréquence de passage des pales, le champ de pression n'est pas continu à l'interface de bord d'attaque et une forte discontinuité est observée en Fig. 5.13-b. En effet, tous les modes issus de l'interaction rotor-stator sont coupés et l'énergie acoustique générée est encore confinée dans la grille d'aubes. Les champs en amont et en aval du stator sont dominés par les modes $(11, 0)$, $(11, 1)$, $(-12, 0)$ et $(-12, 1)$.

La zone de silence provoquée par la co-existence de deux modes d'amplitudes similaires et de nombres de lobes très proches mais tournant dans des sens opposés est clairement visible en Figs. 5.14 et 5.15. En fonction des vitesses de rotation des différents modes et de leur amplitude, cette zone de silence se déplace à des vitesses différentes en fonction du rayon. Alors que cette zone est globalement localisée dans la même région sur toute l'envergure, sur la coupe axiale du champ en aval du stator (Fig. 5.15-b), ses traces ne coïncident pas en fonction du rayon pour le champ en amont (Fig. 5.14-a). La technique de raccordement modal, même si elle ne peut converger, montre ici sa capacité à déterminer des modes diffractés d'ordres radiaux supérieurs dont les comportements sont significatifs dans le champ acoustique total.

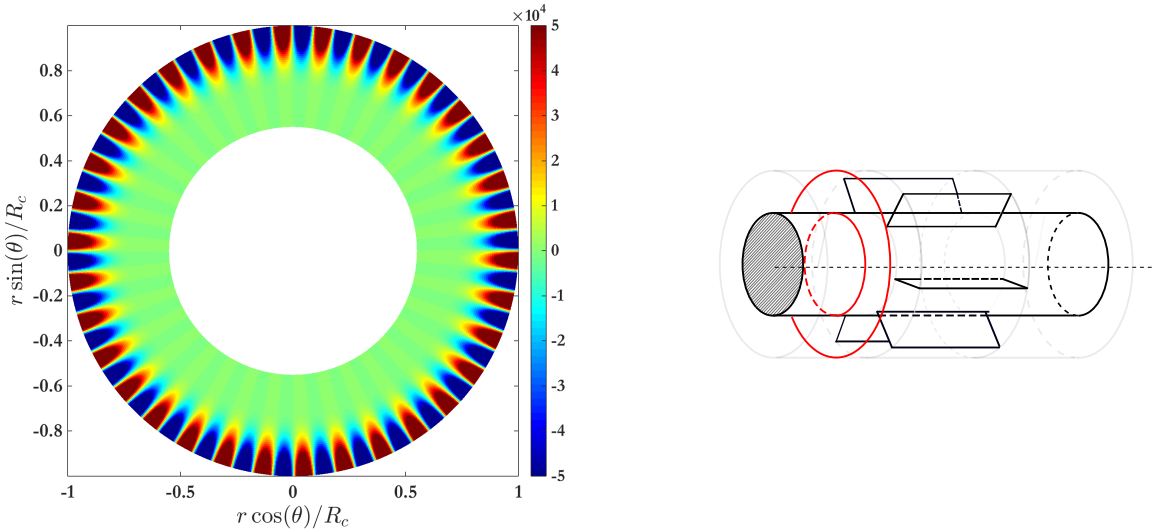


FIGURE 5.12 – Coupe axiale du champ de vorticité radiale du mode hydrodynamique ($n = 2$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$.

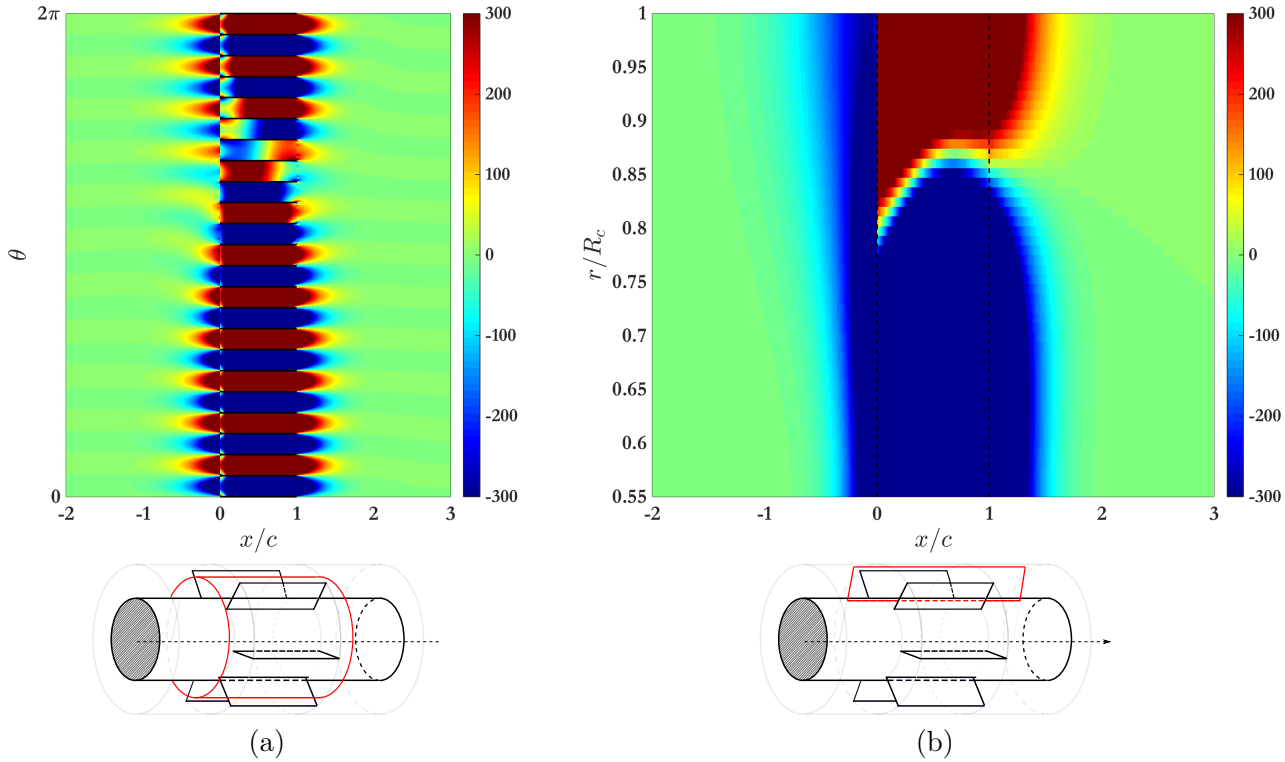


FIGURE 5.13 – Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; Coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b).

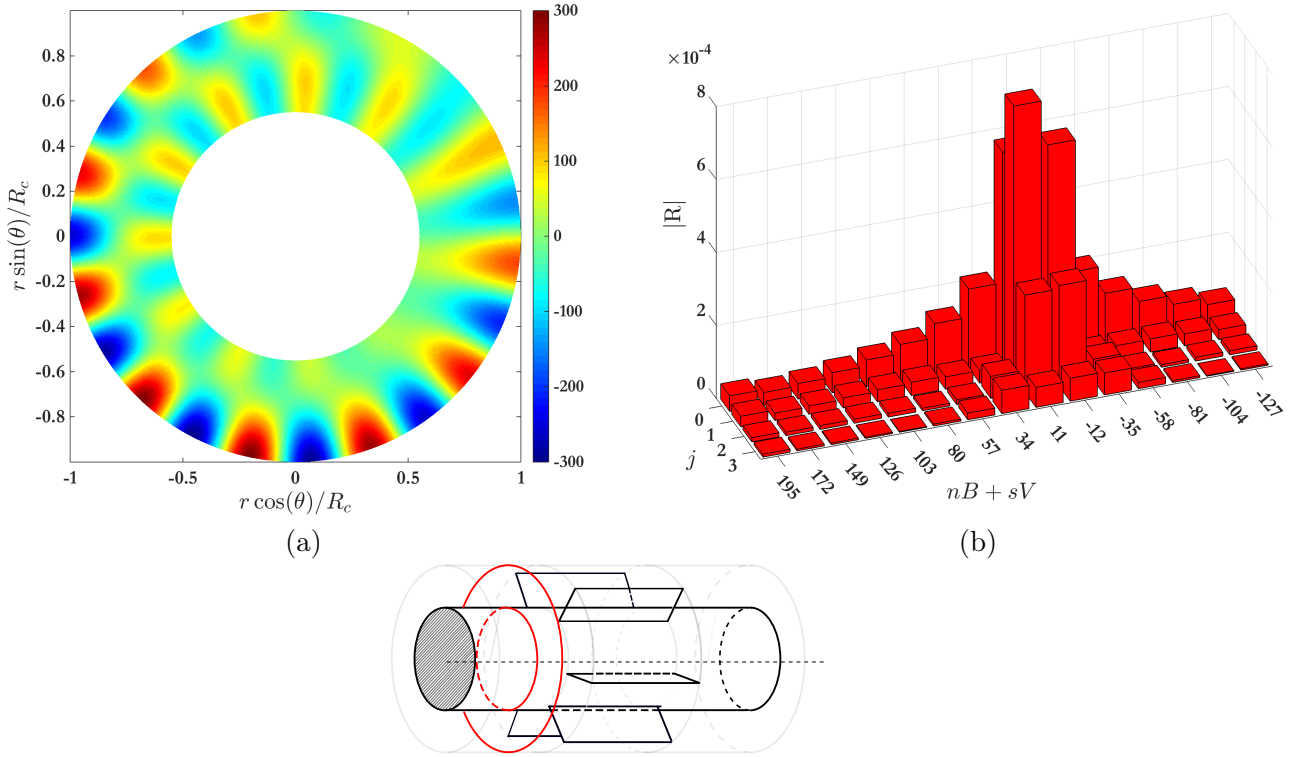


FIGURE 5.14 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe axiale du champ acoustique ϕ_r (a), à $z = -0.5\ c$. (b) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes rouges signifient que les modes sont tous coupés.

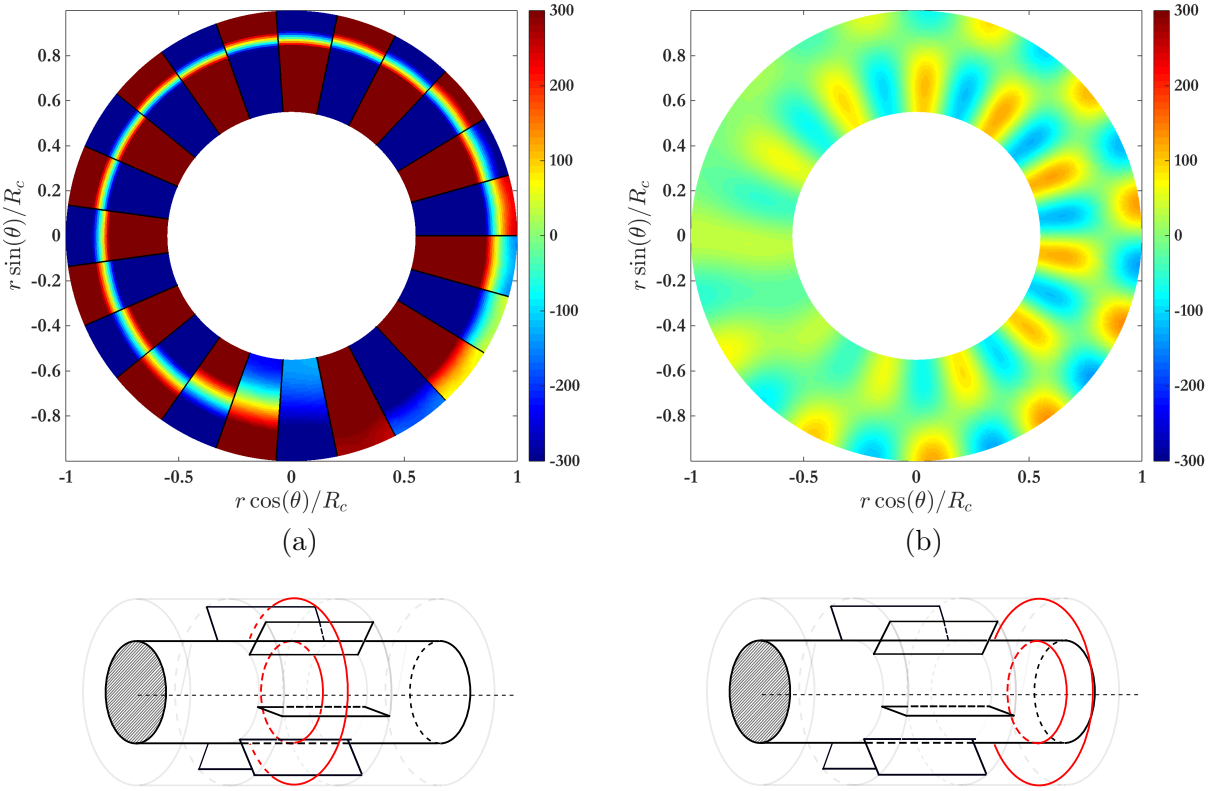
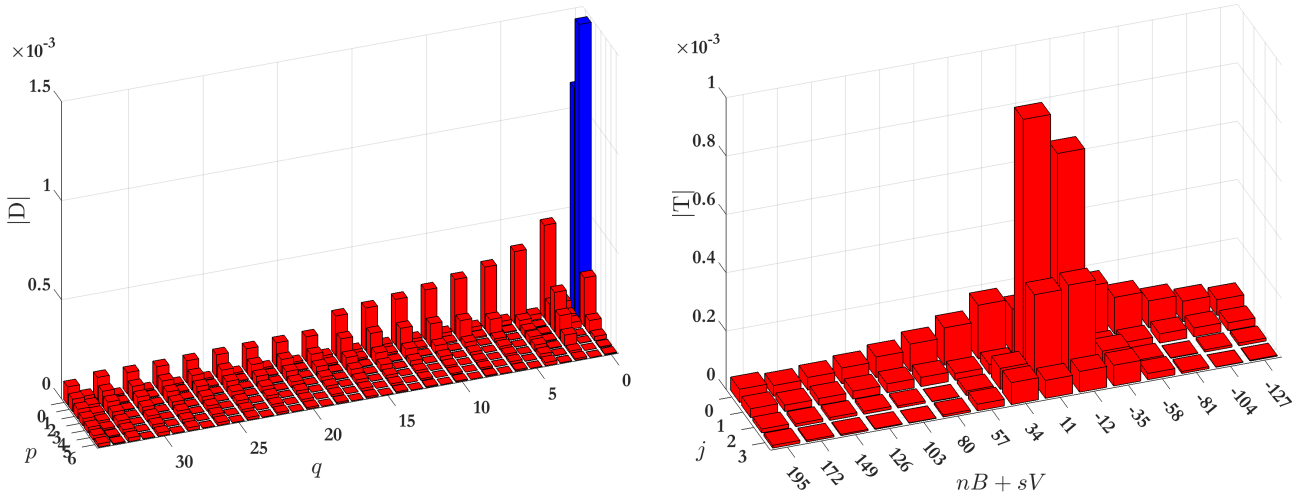


FIGURE 5.15 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 2FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement.



(a) (b)

FIGURE 5.16 – Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (a) et ($|\mathbf{T}|$) (b). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

Cas SEMAFOR : troisième FPP

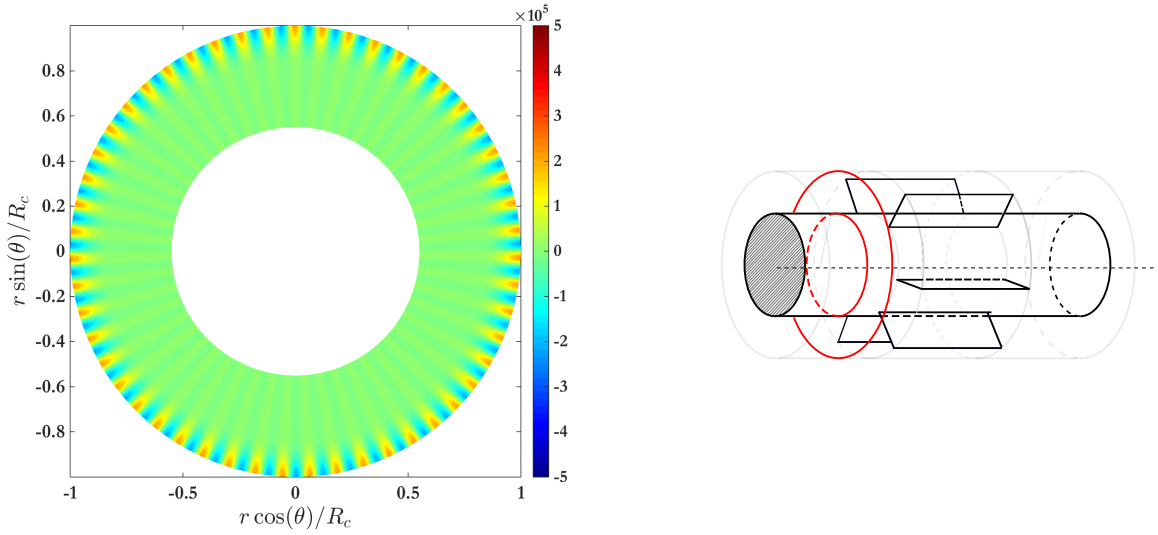
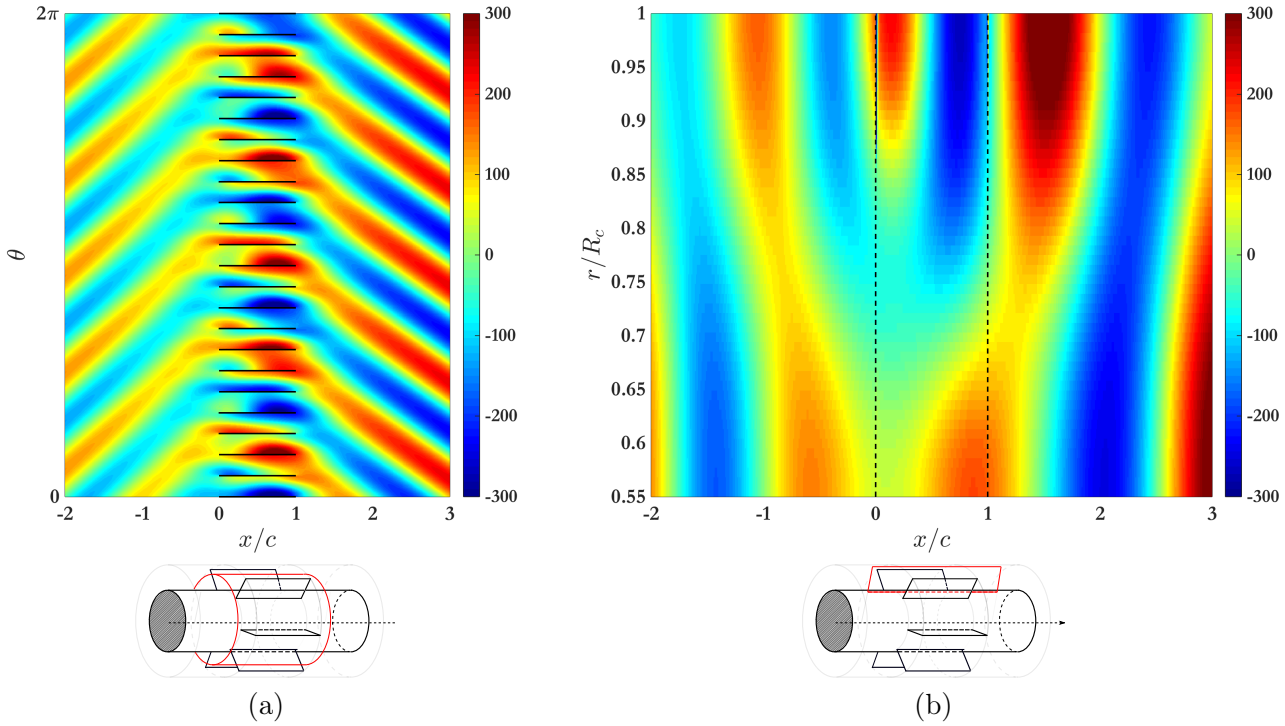


FIGURE 5.17 – Coupe axiale du champ de vorticité radial du mode hydrodynamique ($n = 3$, $j = 0$) à $z = -0.5\ c$.

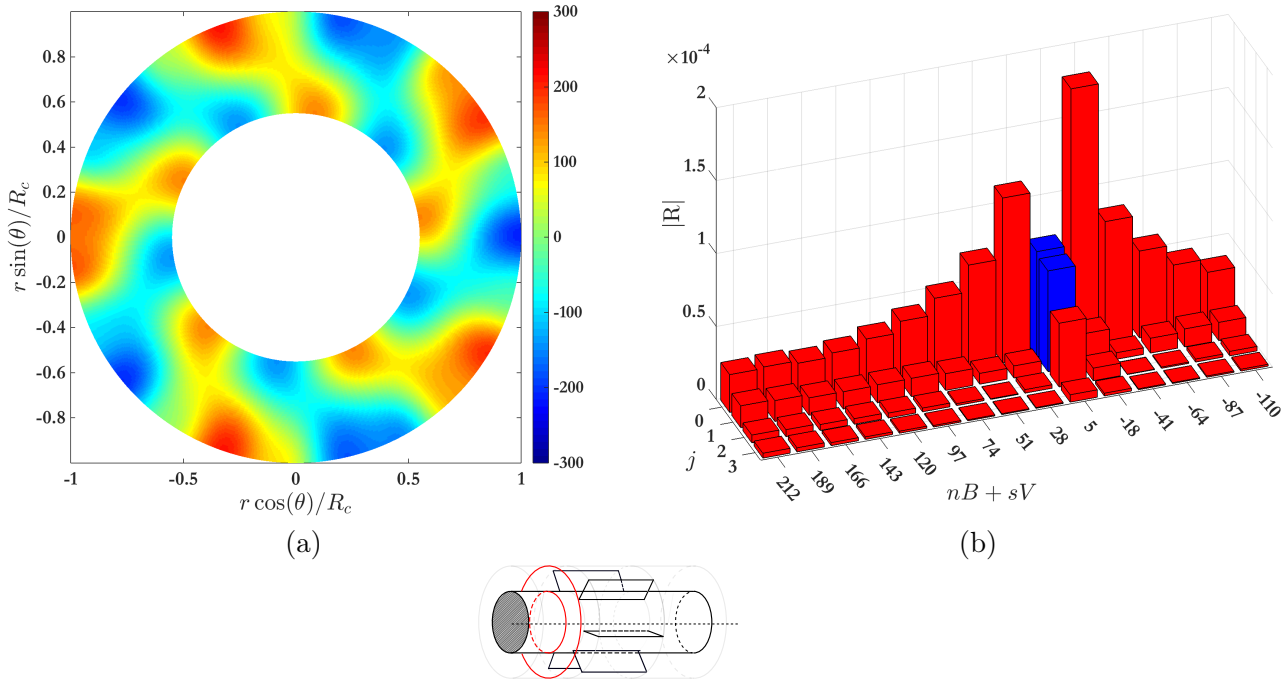
La troisième FPP est enfin considérée, correspondant au mode hydrodynamique ($n = 3, j = 0$) issu des sillages du rotor. Le champ hydrodynamique excitateur est représenté sur la Fig. 5.17. Le champ acoustique dans tout le domaine est illustré en Fig. 5.18 dans des coupes cylindrique et méridienne. Contrairement aux cas précédents, les modes acoustiques de Tyler et Sofrin $(5, 0)$ et $(5, 1)$ sont passants, d'amplitudes relativement similaires dans le champ amont (Fig. 5.19). Dans le champ en aval du stator, l'amplitude du mode $(5, 0)$ est plus élevée que celle du mode $(5, 1)$, comme l'illustrent les Figs. 5.20-b-d, où les fluctuations du champ de pression sont plus importantes en périphérie du conduit que près du moyeu. La variation radiale est tout à fait représentative de la présence des deux modes radiaux. Ceux-ci forment un motif à cinq lobes et tournent dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Malgré l'absence de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, le calcul itératif a convergé et la continuité de la pression acoustique est satisfaite aux deux interfaces. L'énergie acoustique à l'intérieur de la grille n'est plus piégée et peut être transférée en amont et en aval du stator. Une condition de Kutta est cependant toujours nécessaire pour un meilleur calcul des amplitudes modales du champ

acoustique total. En effet, même si le calcul a convergé, l'analyse menée en Sec. 2.5.1 a montré que lorsque cette condition est absente, les champs acoustiques déterminés par le modèle sont surestimés. L'énergie acoustique est entièrement transférée en amont et en aval du stator, sans considérer les pertes induites par la viscosité.



(a) (b)

FIGURE 5.18 – Champ acoustique obtenu par la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe cylindrique à un rayon $R_0 = 0.75\ R_t$ (a) ; coupe méridienne au centre d'un canal ($\theta_0 = \pi/V$) (b).



(a) (b)

FIGURE 5.19 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe axiale (c) des champs incident (a) et réfléchi (b), à $z = -0.5\ c$. (d) : Coefficients modaux $|\mathbf{R}|$. Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

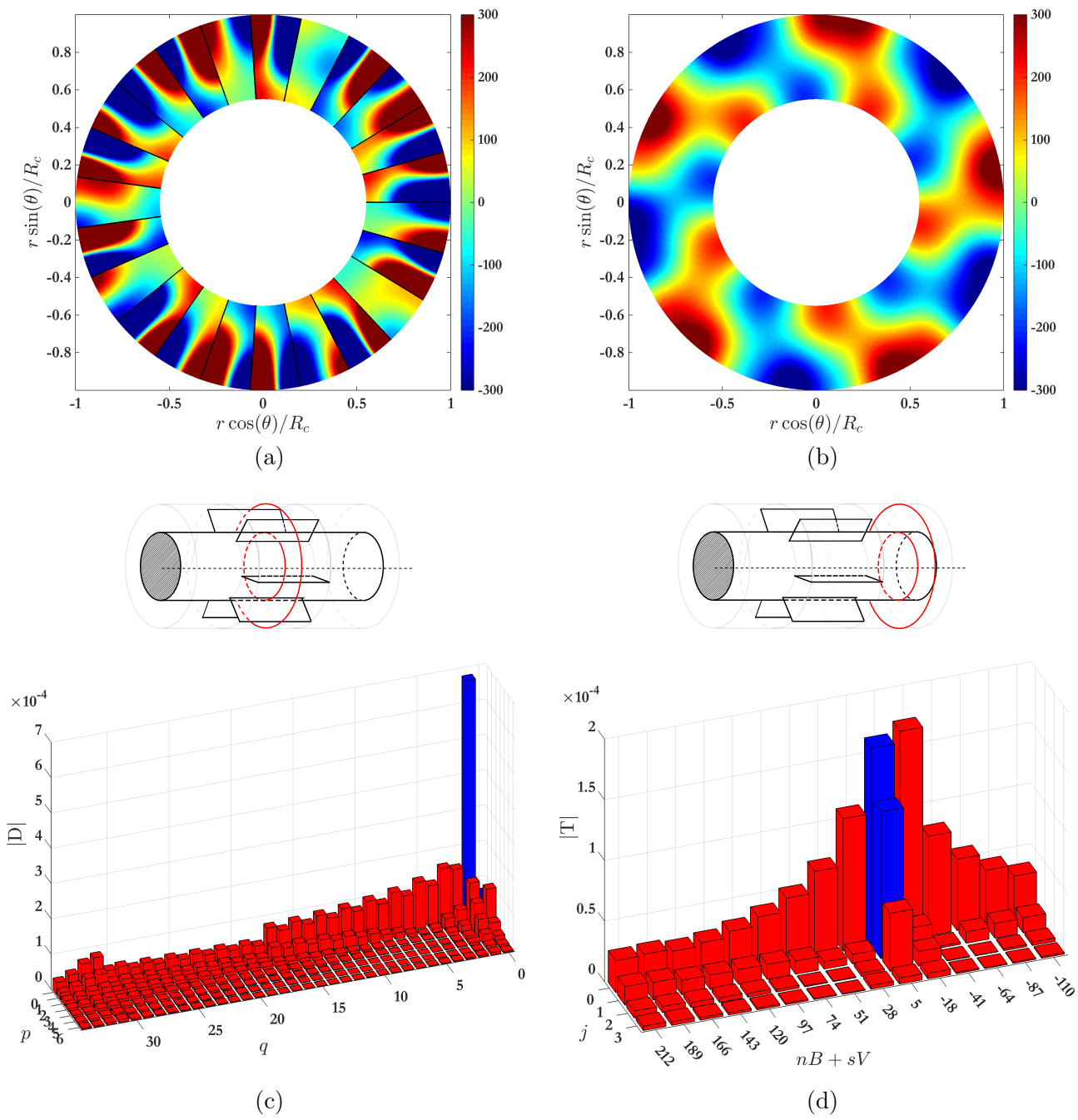


FIGURE 5.20 – Champ de pression obtenu avec la technique de raccordement modal à la 3FPP. Coupe axiale des champs ϕ_d^0 (a) et ϕ_t (b), à $z = c/2$ et $z = 3c/2$, respectivement. Coefficients modaux ($|\mathbf{D}^0|$) (c) et ($|\mathbf{T}|$) (d). Les barres d'histogrammes bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

5.5 Conclusion

Ce chapitre abordait la modélisation du bruit tonal d'interaction de sillages rotor-stator dans une configuration tridimensionnelle. L'approche proposée combine le modèle de transmission acoustique à travers un stator annulaire (Chapitre 4) et la stratégie précédente de modélisation du bruit généré par l'impact de rafales hydrodynamiques sur une grille d'aubes bidimensionnelle (Chapitre 3). La modélisation analytique des sillages issus du rotor a été étendue par la prise en compte du déphasage radial lié au vrillage des pales. En effet, cet aspect de la géométrie du rotor implique que les sillages n'interagissent pas simultanément avec les bords d'attaque des aubes du stator sur toute l'envergure. Le champ de vitesse hydrodynamique est alors décomposé en série d'harmoniques azimutales et radiales.

La continuité de la vorticité est employée pour déterminer les amplitudes modales des champs de vitesse tourbillonnaire dans les canaux inter-aubes. La configuration étant tridimensionnelle, trois équations de continuité liées aux directions de l'espace interviennent. Afin de résoudre ce problème surdéterminé, seule la composante radiale est considérée, ce qui se justifie pour la nature périodique de l'interaction rotor-stator. Pour le bruit à large bande, les trois composantes de la vorticité devraient en théorie être prises en compte. Une étude paramétrique a par la suite montré l'importance du nombre de modes nécessaire pour assurer la continuité des différents champs aux interfaces. Le modèle a ensuite été appliqué au cas du ventilateur subsonique du banc SEMAFOR, sans la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, non encore implémentée dans le code de calcul. Les résultats ont montré qu'aux deux premières fréquences de passage des pales, la continuité du champ acoustique n'est pas assurée à l'une des deux interfaces. L'hypothèse avancée est basée sur le fait que la condition de Kutta, en plus d'apporter plus de réalisme au modèle, permet de stabiliser la résolution des équations de raccordement. Pour ces deux fréquences, aucun mode passant n'est produit par l'interaction rotor-stator. Or la puissance acoustique est portée par les modes passants qui permettent de transporter l'énergie acoustique dans le conduit en dehors du stator. Avec la condition de Kutta, une part de l'énergie acoustique présente dans les canaux est alors transférée du mode acoustique au mode de vorticité par l'échappement tourbillonnaire en aval des aubes du stator. Dans le cas présent, la puissance acoustique est piégée dans la grille d'aubes et le bilan énergétique n'atteint plus une situation stable. Le processus itératif s'arrête alors à la résolution d'un système d'équations de raccordement, à l'une ou à l'autre interface. En revanche, lorsque l'interaction rotor-stator excite des modes passants, comme pour la troisième fréquence de passage des pales, la puissance acoustique à l'intérieur du stator peut être évacuée en amont et en aval de la grille. La procédure itérative converge et le champ acoustique obtenu est uniformément continu dans tout le domaine. La condition de Kutta-Joukowski instationnaire demeure néanmoins primordiale pour ne pas surestimer l'amplitude du champ acoustique généré.

CHAPITRE 6

BRUIT TONAL D'INTERACTION AVEC STATOR HÉTÉROGÈNE

Comme précisé en introduction de cette thèse, l'un des buts du projet SEMAFOR est la modélisation du bruit de raies d'interaction de sillages rotor-stator avec prise en compte possible de l'hétérogénéité du stator. En effet, les mesures acoustiques effectuées sur plusieurs versions du ventilateur SEMAFOR et sur d'autres ventilateurs de même génération indiquent que les deux premières raies multiples de la fréquence de passage des pales ressortent comme dominantes alors qu'elles devraient être coupées en vertu du critère classique de Tyler et Sofrin [162]. Ce dernier est établi sur la base des seules interactions rotor-stator en supposant des périodicités d'aube à aube et de pale à pale parfaites. Sa mise en défaut peut donc avoir deux raisons (non exclusives) :

— une autre source de bruit de raies n'obéissant pas à la même structure modale est incriminée, par exemple la distorsion d'entrée d'air (défaut de symétrie axiale de l'écoulement d'alimentation) ;
— la périodicité d'aube à aube du stator est détériorée du fait de l'épaississement de certaines aubes pour raison structurelle.

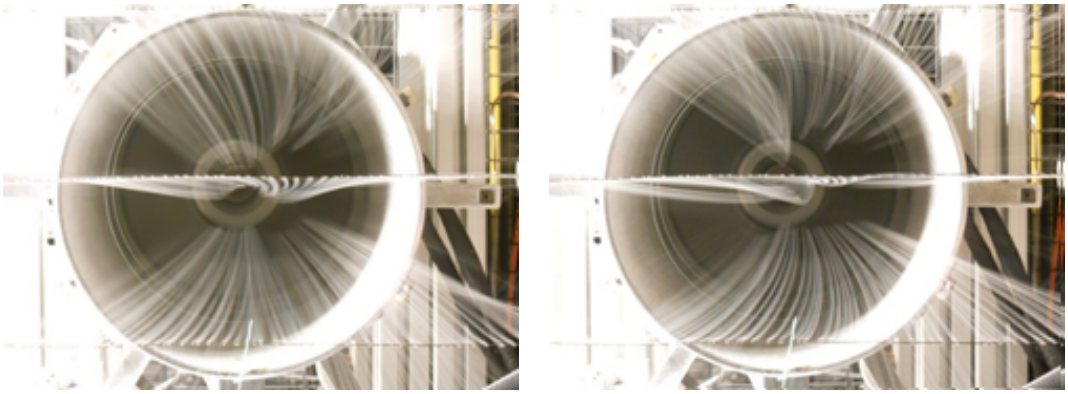
L'hétérogénéité du stator intervient par deux effets, à savoir une différence de réponse de certaines aubes dans l'interaction de sillages, d'une part, et une contamination additionnelle du rotor dans l'interaction potentielle, d'autre part. Une première approche de ces deux effets supposés a été présentée par Roger et Caule [136], sur la base d'une analyse qualitative, face à l'absence de données précises sur les défauts de l'écoulement. Les effets de l'hétérogénéité du stator ont par ailleurs été étudiés à l'ONERA [10, 11] et à l'Université de Sherbrooke [144]. Par ailleurs la distorsion d'entrée d'air engendre un bruit de raies supplémentaire rayonné par le rotor, indépendamment du stator. Cet effet est inhérent à toute installation fonctionnant en aspiration, comme le suggèrent les études faites notamment à l'Université de Siegen et à l'Université de Sherbrooke [128, 154, 155, 156, 157]. L'influence de la distorsion d'entrée d'air est discutée en Sec. 6.1. Dans le cas d'interaction potentielle, c'est le champ de distorsion remontant en amont des aubes qui reproduit l'hétérogénéité du stator. Dans le cas de l'interaction de sillages, les sillages du rotor sont supposés parfaitement identiques et ce sont les aubes du stator hétérogène qui réagissent différemment à cette excitation. Pour traduire cet effet, Roger et Caule [136] ont proposé d'introduire une somme d'interférence dans le calcul du champ acoustique rayonné. Cette somme permet de différencier le chargement instationnaire de chaque aube et ainsi introduire le caractère hétérogène des sources. Si les aubes sont toutes identiques et régulièrement espacées, cette somme équivaut à la multiplication du nombre d'aubes V par le chargement instationnaire sur une aube, identique pour chacune d'entre elle. Ainsi, seuls les modes définis par le critère de Tyler et Sofrin habituel $n_s = nB + sV$ seront sélectionnés. Dans le cas contraire, tous les ordres azimutaux $n_s \in \mathbb{Z}$ participeront au rayonnement. L'augmentation du nombre d'aubes modifiées tend à amplifier les modes principaux mais aussi des modes intermédiaires. Une méthode alternative a été élaborée au cours de ce travail de thèse, basée sur la technique de raccordement modal et l'approche du dipôle équivalent de bord d'attaque, présentée en premier lieu par Roger *et al.* [138, 139] pour le bruit à large bande au bord de fuite des aubes d'une grille de stator. Ce chapitre vise à en détailler les développements.

6.1 Bruit d'interaction avec le tourbillon d'aspiration

La modélisation du bruit d'interaction du rotor avec une distorsion stationnaire de l'écoulement ne faisait pas partie du programme de recherche initial de SEMAFOR. Néanmoins le banc d'essai est associé à une distorsion de ce type, dont l'effet a pu être quantifié lors d'une étude annexe. Il convient d'en tenir compte dans l'interprétation des résultats.

6.1.1 Mise en évidence du tourbillon

Dans l'installation initiale du banc SEMAFOR, le ventilateur est monté en aspiration à l'extrémité d'un conduit rigide de grande longueur (voir Sec. 6.3.1 pour les détails du dispositif expérimental). Bien que le banc soit modulaire, différents tronçons pouvant être déplacés les uns par rapport aux autres, la longueur de conduit en amont du ventilateur reste faible. L'aspiration est connue pour générer une distorsion qui, par interaction avec le rotor, produit un bruit de raies. Ce bruit peut être qualifié d'effet d'installation dans la mesure où il n'est pas intrinsèque à la conception du ventilateur. Son contenu modal précis reste inconnu tant que le champ de vitesse de la distorsion l'est aussi. De plus il évolue probablement lentement au cours du temps car la distorsion se déplace de manière chaotique. La distorsion d'aspiration est couramment observée autour des entrées d'air de turboréacteurs à double flux en fonctionnement statique au sol ou sur banc d'essai (voir Hanson [51], par exemple). Elle se matérialise par une forte contraction des lignes de courant et est connue pour engendrer aussi un étirement prononcé des structures turbulentes qu'elle entraîne. Le caractère à la fois chaotique et quasi-périodique de l'interaction aérodynamique se traduit par l'émission d'une raie élargie à sa base. Plus précisément, dans le cas d'un rotor opérant près d'un sol plan en espace semi-infini, une ligne de courant particulière doit partir du sol et se prolonger dans la section de passage d'air du rotor. De part et d'autre du point initial de cette ligne de courant des couches limites se forment sur le sol. Leur jonction donne lieu à un tourbillon cyclonique appelé tourbillon de sol. Une description en est fournie par Colehour et Farquhar [19]. L'identification du tourbillon de sol comme source de bruit non représentative des conditions de vol a conduit les expérimentateurs à concevoir des écrans dits anti-turbulences et dénommés TCS (*Turbulence Control Screen*), qui assurent en fait une homogénéisation de l'écoulement en réduisant la distorsion quasi-stationnaire. Le TCS déstructure le tourbillon de sol et rend l'alimentation plus proche des conditions homogènes axisymétriques rencontrées en vol. Un tel écran ne doit pas engendrer de pertes de charges additionnelles notables et doit donc être assez éloigné de l'entrée d'air.



(a) (b)

FIGURE 6.1 – Visualisation du tourbillon d'entrée d'air sur le banc SEMAFOR de l'École Centrale de Lyon, grâce à une technique de génération de fumée. Vue de face. Les deux instantanés confirment le caractère erratique du tourbillon.

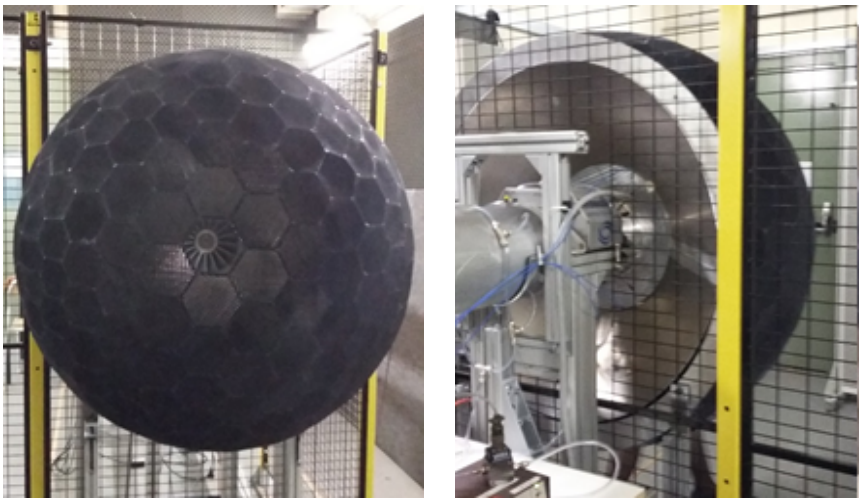
La présence d'une distorsion dans les tests aéroacoustiques de ventilateurs dans des locaux fermés a été rapportée notamment par Sturm *et al.* [154, 157], et corroborée par des simulations numériques incluant l'installation complète du banc dans le maillage. Le tourbillon d'entrée d'air apparaît donc comme inhérent aux régimes d'aspiration/contraction. Sa formation est probablement encore favori-

sée par la présence de surfaces solides comportant des singularités géométriques proches de l'entrée d'air, car alors la singularité peut servir de point d'accroche du tourbillon. Sur le banc SEMAFOR du LMFA avec un pavillon classique en entrée d'air, un tel tourbillon a été visualisé par des filets de fumée obtenus grâce à de la glycérine déposée sur des fils métalliques chauffés électriquement (Fig. 6.1).

Finalement l'analyse modale effectuée dans le projet SEMAFOR comprend une contribution intrinsèque liée à l'interaction rotor-stator de sillages avec stator hétérogène, d'une part, et une contribution liée au tourbillon d'aspiration, d'autre part. Un diagnostic par méthode inverse reposant sur une approche modale est donc rendu très ambigu puisque les deux sources sont susceptibles de faire ré-émerger les deux premières raies, coupées selon le critère de Tyler et Sofrin classique.

6.1.2 Apport d'un dispositif de réduction des distorsions sur le banc SEMAFOR

Dans le cadre des investigations de la chaire ADOPSYS en marge du projet SEMAFOR, un écran d'homogénéisation a été conçu très récemment pour le banc d'essai, compte tenu de ce qui précède. Cet écran est vu de face sur la Fig. 6.2-a. La base de la structure est un nid d'abeilles en aluminium de maille 3 mm et d'épaisseur 20 mm, découpé en 300 facettes environ, pour la plupart hexagonales. La bordure circulaire de l'écran est raccordée à une jupe tronconique fixée à l'entrée d'air (en vue de trois quarts arrière sur la Fig. 6.2-b).



(a) (b)

FIGURE 6.2 – Vues de face (a) et de trois-quarts arrière (b) du TCS installé sur le banc SEMAFOR.

Des signaux microphoniques mesurés par un capteur positionné à 30 mm en amont du rotor du ventilateur sur la paroi du conduit, dans la configuration initiale du banc et après installation du TCS, sont comparés sur la Fig. 6.3. Le niveau à large bande reste inchangé avec le TCS sur la quasi-totalité de la gamme de fréquences, ce qui signifie qu'il est essentiellement dû à des sources intrinsèques (bruit d'interaction de sillages, bruit de bord de fuite ou bruit de jeu) mais la signature spectrale est très différente sur les raies, comme en témoigne le zoom sur la raie fondamentale FPP. Non seulement le niveau est abaissé mais de plus la mesure avec le TCS fait ressortir une raie quasi pure alors que la mesure en configuration initiale montre une raie très élargie à la base. Cette dernière est typique du caractère chaotique d'une distorsion d'entrée d'air.

Lors du test, des réductions très différentes ont été enregistrées selon le microphone considéré, ce qui pourrait être dû à l'hétérogénéité de l'onde stationnaire constituée par la superposition des différents modes qui se propagent dans le conduit. La réduction la plus importante reste celle observée pour la fréquence fondamentale, où elle vaut en moyenne 10 dB. Néanmoins les deux premiers multiples de la FPP sont toujours présents malgré l'installation du TCS. Cela confirme que les caractérisations modales effectuées dans le cadre du projet SEMAFOR combinent les deux sources de bruit :

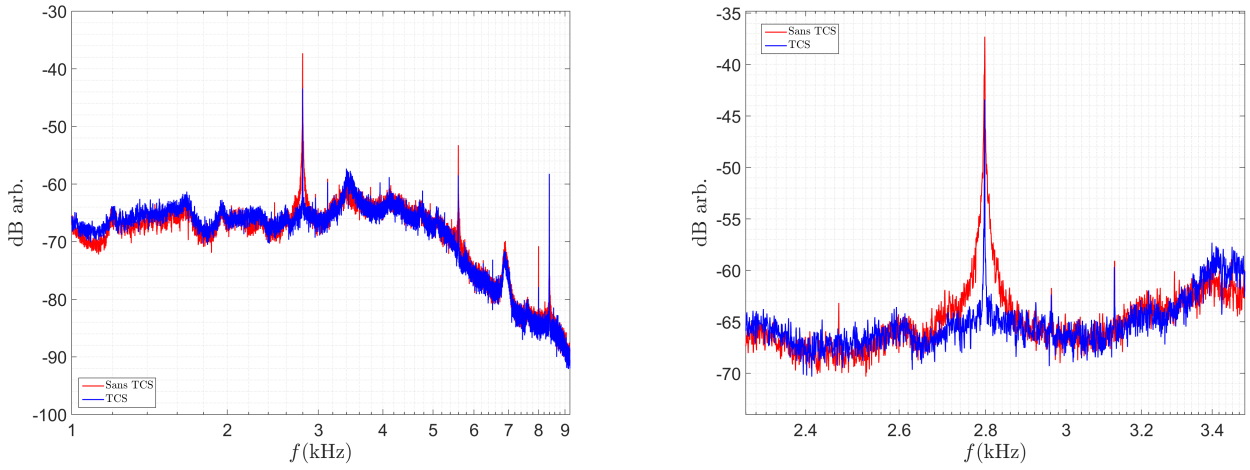


FIGURE 6.3 – Exemple de spectres bruts mesurés par un capteur de paroi sur le banc SEMAFOR, dans la configuration initiale d'une aspiration libre (rouge) et après installation du TCS (bleu). (a) : Spectre complet. (b) : Zoom autour de la fréquence de passage des pales.

— le bruit d'interaction avec la distorsion d'entrée d'air, produit par le rotor et très dominant sur la première raie ;
— le bruit d'interaction rotor-stator, non coupé par le conduit du fait de l'hétérogénéité du stator.

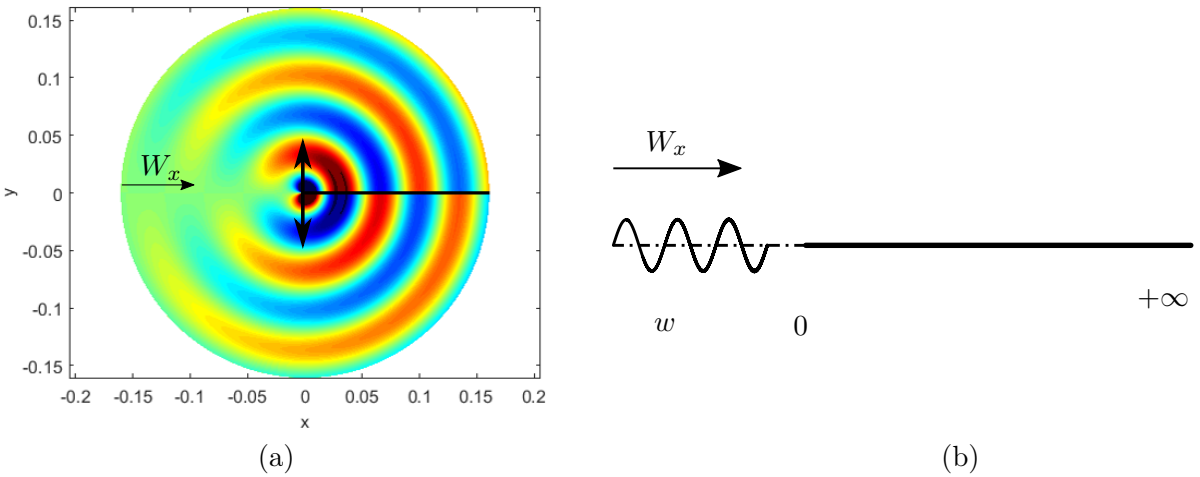
En revanche ce diagnostic ne permet pas de décider si l'hétérogénéité du stator se manifeste plutôt par une différence de réponse des aubes épaissies à l'impact des sillages du rotor (bruit d'interaction de sillages) ou plutôt par la contamination du rotor par une distorsion plus forte en amont des aubes épaissies (bruit d'interaction potentielle). En effet, ces deux mécanismes ont la même structure modale.

6.2 Modélisation d'un stator hétérogène par la technique de raccordement modal

Les modèles utilisant la technique de raccordement modal précédemment présentés considèrent une grille de stator purement homogène, où toutes les aubes sont identiques. Le ventilateur utilisé dans le cadre du projet SEMAFOR possède trois aubes épaissies pour des raisons structurelles qui tendent à perturber le comportement acoustique en régénérant des raies qui auraient dû être coupées selon le critère de Tyler et Sofrin. Un des objectifs du projet était d'intégrer cette hétérogénéité dans des modèles de prédiction de bruit d'interaction rotor-stator. Un premier modèle analytique a été proposé par Roger et Caule [136], basé sur la formulation de Goldstein [41], où le chargement instationnaire sur les aubes est calculé grâce au modèle d'Amiet. L'hétérogénéité est introduite à l'aide d'une somme d'interférence, représentative de la différence du saut de pression instationnaire pour les aubes épaissies. Cependant, ce modèle ne prend pas en compte l'effet de grille. Une modélisation basée sur la technique de raccordement modal a donc été choisie pour remédier à cette limitation. La section suivante détaille ainsi un modèle de réponse de grille bidimensionnelle prenant en compte l'hétérogénéité des aubes de stator. L'approche globale de cette extension est basée sur la méthode du dipôle de bord équivalent, présentée en détail par Roger *et al.* [139].

L'interprétation qui sous-tend le modèle proposé est que la production du bruit d'interaction rotor-stator peut être formulé comme un problème de transmission du son équivalent, résolu à l'aide de la technique de raccordement modal. De ce point de vue, une excitation acoustique est définie, basée sur le fait que la source de bruit sur une aube isolée du stator peut être reproduite avec un dipôle équivalent approché très près du bord d'attaque depuis l'amont. Par conséquent les points clés du modèle sont

de justifier la pertinence de cette hypothèse et de calculer l'amplitude du dipôle de bord d'attaque. D'après l'analogie de Ffowcs-Williams et Hawkings [34], le chargement instationnaire d'une aube généré par l'impact d'une rafale sur le profil peut être considéré comme une distribution de sources dipolaires, rayonnant ensuite selon la fonction de Green adaptée à la géométrie du problème. Les variations du saut de pression sont essentiellement présentes vers le bord d'attaque du profil avec une singularité à l'endroit exacte du bord. Les sources dipolaires réparties correspondantes peuvent être assimilées aux sources induites par un dipôle équivalent, placé très près du bord d'attaque. Celui-ci est diffracté par le bord du profil, menant à un rayonnement acoustique spécifique. Le bord d'attaque de l'aube est identifié à celui d'une plaque plane rigide semi-infinie et le champ acoustique diffracté s'explique par le comportement asymptotique de la fonction de Green associée, nommée fonction de Green du demi-plan, pour des sources placées au voisinage du bord, selon les longueurs d'ondes acoustiques considérées. Cette approche a tout d'abord été exposée par Ffowcs-Williams et Hall [33], pour les sources quadripolaires au bord de fuite d'un profil. Une analyse asymptotique montre que le champ acoustique diffracté est fortement amplifié par rapport à celui rayonné par un dipôle en espace libre et que la directivité montre un motif en forme de cardioïde, où le champ acoustique est nul dans le prolongement en amont de la plaque. Le champ rayonné montre également des oppositions de phase de chaque côté du demi-plan. La différence de pression de part et d'autre de la plaque fournit un premier résultat pour les fluctuations de charge. De manière alternative, le chargement instationnaire peut être calculé à l'aide du modèle d'Amiet [3, 4] pour un demi-plan. Il montre que l'impact d'une rafale sur un profil génère un saut de pression distribué sur la paroi et concentré au bord d'attaque, qui rayonne comme une distribution de sources dipolaires. Le motif en forme de cardioïde est également retrouvé en champ lointain. Les deux interprétations sont équivalentes et devraient ainsi donner des résultats similaires. Le régime asymptotique de la fonction de Green du demi-plan décrit par le motif en cardioïde est obtenu pour des sources dipolaires ou quadripolaires quelconques, indépendamment de leur position ou de leur orientation (avec quelques conditions permettant d'attendre le régime asymptotique [141]). Ce motif n'est donc pas imposé par la source physique mais par la fonction de Green elle-même. Ceci suggère que le dipôle équivalent placé au voisinage du bord du profil peut être utilisé pour décrire les sources du bord d'attaque. L'orientation normale au profil est choisie pour sa simplicité et sa position en amont du bord d'attaque est essentielle pour la technique de raccordement modal. La distance exacte du dipôle au bord du profil est un paramètre libre mais contraint par le régime asymptotique. Finalement, le réglage de l'amplitude du dipôle est réalisé en comparant la trace du champ de pression sur les parois de la plaque obtenu avec la fonction de Green du demi-plan et le chargement instationnaire calculé avec le modèle d'Amiet.



(a) (b)

FIGURE 6.4 – Principe d'équivalence du dipôle de bord d'attaque. (a) : Fonction de Green du demi-plan, avec écoulement. (b) : Formulation d'Amiet pour l'impact d'une rafale sur un profil.

Le bruit d'impact de sillages sur un stator est ainsi identifié à un problème de transmission du bruit à travers une grille d'aube. Les dipôles équivalents, régulièrement espacés dans la direction azimutale, représentent alors les sources de bruit localisées sur les aubes du stator. Une fois que l'amplitude

du dipôle est déterminée par la comparaison entre le modèle d'Amiet et la fonction de Green du demi-plan, le rayonnement d'un dipôle en champ libre est exprimé à l'aide d'une somme d'ondes planes obliques. Un déphasage axial permet de rendre compte de la petite distance entre le dipôle et le bord d'attaque. Chacune de ces ondes planes incidentes est ensuite diffractée par la grille et le champ résultant est calculé à l'aide de la technique de raccordement modal. Le calcul est réitéré pour prendre en compte l'intégralité des dipôles équivalents, représentatifs de la grille d'aubes. La fréquence d'excitation des dipôles et leurs déphasages doivent être en accord avec la fréquence de passage des pales et le principe de trace. Cette méthode permet de distinguer les sources de bruit, assimilées à des dipôles équivalents, de la géométrie de la grille. L'hétérogénéité du stator n'est pas prise en compte par une nouvelle modélisation de la géométrie dans la technique de raccordement modal. Les aubes sont toujours considérées comme des plaques planes, rigides, sans épaisseur et elles sont régulièrement espacées dans la direction azimutale. En revanche, l'amplitude des dipôles équivalents peut être modifiée pour pouvoir prendre en compte des modifications de la réponse aéroacoustique des certaines aubes, épaissies par exemple. Des résultats expérimentaux [110, 98] ont montré que l'épaisseur du profil (notamment au bord d'attaque) a une influence significative sur le bruit généré par l'impact de rafales sur une pale, engendrant une réduction du bruit avec l'épaisseur. Cette réduction est de plus en plus importante avec l'augmentation de la fréquence. Une modification de l'amplitude et/ou de la phase du dipôle peut rendre compte de cet effet d'épaisseur. Cette technique permet ainsi de différencier le comportement aéroacoustique de certaines aubes et par conséquent de calculer le bruit tonal d'interaction rotor-stator pour une grille d'aubes hétérogène.

6.2.1 Amplitude du dipôle de bord d'attaque

La possibilité de considérer une réponse d'ensemble à une excitation localisée avec la procédure de raccordement modal est basée sur l'idée que les sources du bruit de bord de fuite (ou d'attaque) d'une aube isolée peuvent être décrites avec un dipôle équivalent approché très près du bord depuis l'aval (ou l'amont). Une des clés du modèle est de déterminer l'amplitude de ce dipôle. Cela est effectué en comparant le champ exact qu'un dipôle générerait à proximité d'une plaque rigide semi-infinie à la solution d'Amiet utilisée pour modéliser le bruit de bord de fuite (ou d'attaque) d'un profil mince isolé. Plus précisément, la comparaison est effectuée sur la répartition de portance instationnaire qui est une trace du champ de pression, plutôt que sur le champ lui-même.

Formulation par la fonction de Green

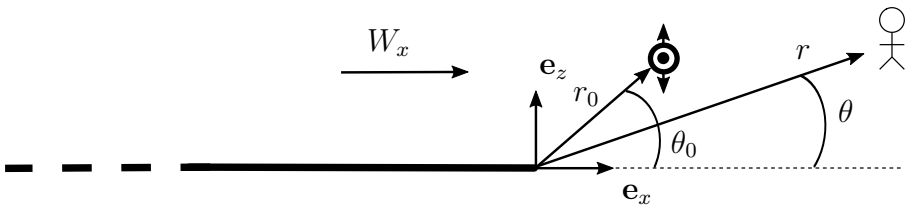


FIGURE 6.5 – Représentation et notations d'un dipôle placé au bord de fuite d'un demi-plan en présence d'un écoulement axial et uniforme.

Le champ d'un dipôle au bord de fuite d'un demi-plan semi-infini vers l'amont avec la présence d'un écoulement vers l'aval est fourni par la fonction de Green du demi-plan bidimensionnelle, introduite par Jones [68] et Rienstra [131]. Seule la composante transverse du gradient de la fonction de Green selon les coordonnées de la source est nécessaire car le dipôle est normal à l'écoulement. D'après Jones [67], la fonction de Green en présence d'un demi-plan (sans écoulement) est la suivante :

$$G(x,z,k) = \int_{-\infty}^{u_{r_1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1\mathrm{ch}(u)}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{u_{r_2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2\mathrm{ch}(u)}\mathrm{d}u, \tag{6.1}$$

où les coordonnées polaires des points source et observateur sont employées : $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $x_0 = r_0\cos\theta_0$, $z = r_0\sin\theta_0$ et :

$$
\begin{aligned}
r_1^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0),\\
r_2^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta+\theta_0),\\
u_{r_1} &= \operatorname{arcsh}\left\{2\frac{(rr_0)^{1/2}}{r_1}\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\right\},\\
u_{r_2} &= -\operatorname{arcsh}\left\{2\frac{(rr_0)^{1/2}}{r_2}\cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Le changement de variable suivant est effectué :

$$u = \operatorname{arcsh}(t), \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Sachant que $\operatorname{ch}(u) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}$, il vient :

$$G(x,z,k) = \int_{-\infty}^{s_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{s_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}, \tag{6.2}$$

où :

$$s_{1,2} = \pm 2\frac{\sqrt{rr_0}}{r_{1,2}}\cos\left(\frac{\theta\mp\theta_0}{2}\right).$$

L'expression précédente n'inclut pas l'effet de transport par l'écoulement (convection). Pour avoir cet effet, des formules de transposition sont appliquées, en notant G_M la fonction de Green avec l'écoulement de nombre de Mach M :

$$
\begin{aligned}
G_M(X,z,K) &= \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}G(X,z,K)\\
&= \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_1\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{s_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_2\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, $\overline{r}_{1,2}^2 = \overline{r}^2 + \overline{r}_0^2 - 2\overline{r}\overline{r}_0\cos\left(\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0\right)$, où $\overline{r} = \sqrt{X^2+z^2}$, $X = x/\beta$, $K = k/\beta$ et $\beta = \sqrt{1-M^2}$. Ces transpositions se retrouvent dans les bornes s_1 et s_2 des intégrales. Les angles corrigés $\overline{\theta}$ et $\overline{\theta}_0$ par rapport à la direction x s'écrivent :

$$\cos\overline{\theta} = \frac{X}{\sqrt{X^2+z^2}}, \quad \cos\overline{\theta}_0 = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}.$$

Cette formulation est adaptée à un dipôle placé au bord de fuite de l'aube, avec un écoulement dans le sens des x positifs. Pour avoir une formulation de dipôle de bord d'attaque, il est nécessaire de considérer un écoulement dans le sens opposé et la coordonnée en abscisse devient $X = -X$. Le terme de convection reste inchangé $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}/\beta$.

Modèle d'Amiet - Contribution de bord d'attaque

L'utilisation du modèle d'Amiet [3, 4] permet de calculer la répartition de sources dipolaires sur un profil mince soumis à une rafale sinusoïdale. Le modèle est basé sur les théories linéarisées du profil mince et l'acoustique linéaire. La rafale, figée, est convectée par l'écoulement parallèle au profil, de vitesse axiale W_x (Fig.6.6). Elle est définie par une perturbation de vitesse perpendiculairement au profil. Le repère (y_1, y_2, y_3) est centré sur le bord d'attaque du profil. y_1 et y_2 sont orientés respectivement selon la corde $c = 2b$ et l'envergure ($L = 2d$). y_3 est orienté selon la normale au profil. Ce dernier est soumis à l'impact d'une rafale incompressible parallèle au bord d'attaque dont la forme s'écrit :

$$w = w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1(y_1-W_xt)}, \tag{6.3}$$

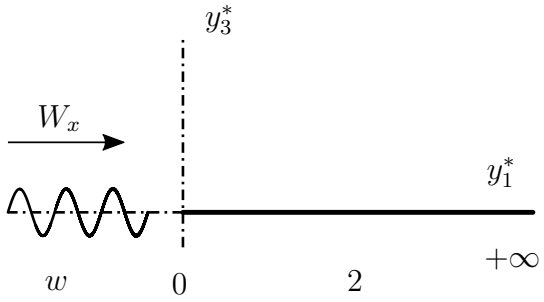


FIGURE 6.6 – Modèle d'Amiet. Notations pour la contribution de bord d'attaque.

où k_1 est le nombre d'onde aérodynamique selon la corde, avec $k = \omega/c_0 = k_1 M$. Si la paroi est considérée semi-infinie, le terme de bord de fuite n'est pas pris en compte et le saut de pression instationnaire induit par l'impact de cette rafale, dont la démonstration est détaillée en annexe E.1, est donné par Amiet [4] :

$$ {l_1}^A(y_1^*, \omega) = \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M)(1+y_1^*)}}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M)(1+y_1^*)}}, \tag{6.4} $$

où :

$$ k_1^* = \frac{k_1 c}{2}, \quad y_1^* = 2\frac{y_1}{c}, \quad \mu = \frac{M k_1^*}{\beta^2}. $$

Étant donné que la charge instationnaire devient singulière au bord d'attaque ($y_1^* = -1$) et qu'elle doit être comparée à la trace du champ de pression généré par un dipôle près du bord, cette expression est intégrée sur des petits segments de corde, de longueur ε. Soit :

$$ L_1(y_1^*, \omega, \varepsilon) = \int_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon} {l_1}^A(y^*, \omega) \mathrm{d}y^*. \tag{6.5} $$

$$ L_1(y_1^*, \omega, \varepsilon) = \lambda_L \left[E(\mu(1-M)(y^*+1)\right]_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon}, \quad \text{où} \quad \lambda_L = \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{2} w_0}{\sqrt{k_1^*(1+M)\mu(1-M)}}. \tag{6.6} $$

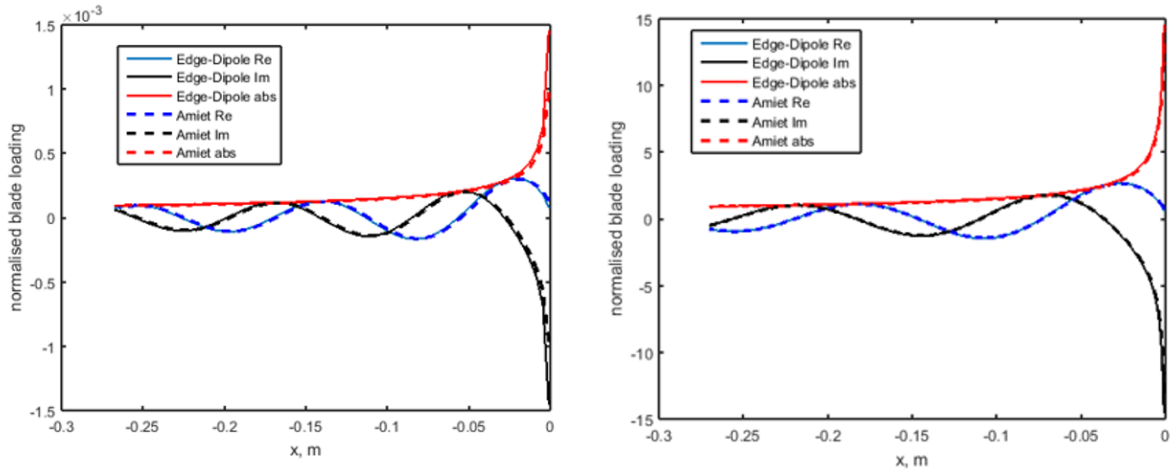
E est l'intégrale de Fresnel :

$$ E[\xi] = \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{d}x. $$

Loi de réglage

La détermination de l'amplitude du dipôle équivalent nécessite la comparaison des sauts de pression instationnaire obtenus avec la formulation de Green et le modèle d'Amiet. Une comparaison est d'abord effectuée en considérant une plaque semi-infinie pour obtenir une loi de réglage. Une comparaison numérique est ensuite réalisée pour valider cette loi et l'appliquer au cas d'une plaque de longueur finie. Afin d'obtenir une comparaison du chargement instationnaire pour un dipôle placé au bord d'attaque, le système de coordonnées et le sens de l'écoulement sont inversés dans la fonction de Green du demi-plan proposée par Jones [68]. Celle-ci est parfaitement symétrique du fait de l'absence de condition de Kutta-Joukowski instationnaire au bord de fuite du demi-plan. Le saut de pression sur une plaque semi-infinie dû à la diffraction d'un dipôle unitaire de bord d'attaque est noté Δp. Une fois que le dipôle est placé très près du bord d'attaque et que le régime asymptotique est atteint ($z_0 \ll x_0$, $kx_0 < 0.2$, $|\theta| < 20°$), l'amplitude du dipôle peut être déterminée par comparaison avec la solution d'Amiet. Des résultats préliminaires basés sur des tests numériques permettent de proposer une première loi de réglage sous la formule suivante :

$$ \Delta P = \frac{\sqrt{kx_0}}{2k^2} W_x (\mathrm{i}\Delta p)^*, \tag{6.7} $$



(a) (b)

FIGURE 6.7 – Sauts de pression instationnaire obtenus avec la fonction de Green d'un demi-plan ΔP (lignes) et la formulation d'Amiet $(L_1 c)/\varepsilon$ (pointillés) pour des vitesses d'écoulement $W_x = -0.01$ m/s, $k\varepsilon = 0.2$ (a) et $W_x = -100$ m/s, $k\varepsilon = 0.05$ (b) $f = 3000$ Hz, $c_0 = 340$ m/s, $c_0 = 0.1$ mm. (a) $W_x = -0.01$ m/s, $k\varepsilon = 0.2$; (b) $W_x = -100$ m/s, $k\varepsilon = 0.05$, d'après [12].

où $(\bullet)^*$ représente le complexe conjugué. Dans ces conditions, il a été observé que $(L_1 c)/\varepsilon \simeq \Delta P$ (avec un écart moyen de 1%) sur une large plage de fréquence et de vitesse d'écoulement, comme montré en Fig. 6.7. La figure illustre les sauts de pression obtenus avec la fonction de Green d'un demi-plan ΔP et la formulation d'Amiet $(L_1 c)/\varepsilon$ pour une fréquence d'excitation $f = 3$ kHz et deux vitesses d'écoulement moyen ($W_x \in [-0.01, -100]$ m/s). Les deux configurations produisent des résultats identiques, pour les parties réelles (en bleu) et les parties imaginaires (en noir). La deuxième étape consiste à modéliser la présence d'un dipôle au bord d'une plaque à l'aide d'un code de propagation acoustique. Un logiciel classique basé sur la méthode des éléments finis a été utilisé pour cette étude [12]. Le dipôle est remplacé par deux monopôles en opposition de phase. La distance physique entre eux deux devient par conséquent un paramètre supplémentaire du réglage. La plaque plane semi-infinie placée dans un écoulement moyen est modélisée (voir un exemple en Fig. 6.8) et le saut de pression obtenu sur la plaque est comparé aux résultats analytiques.

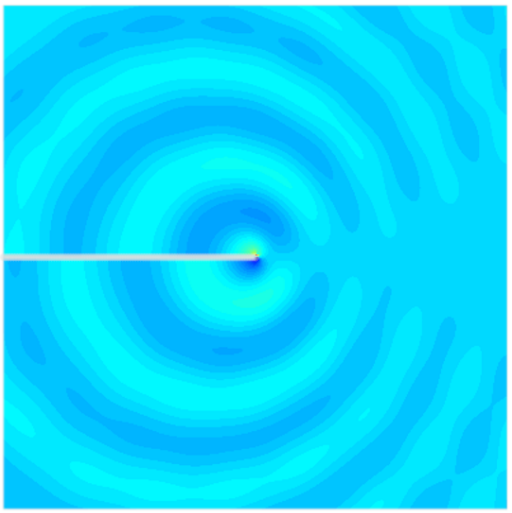
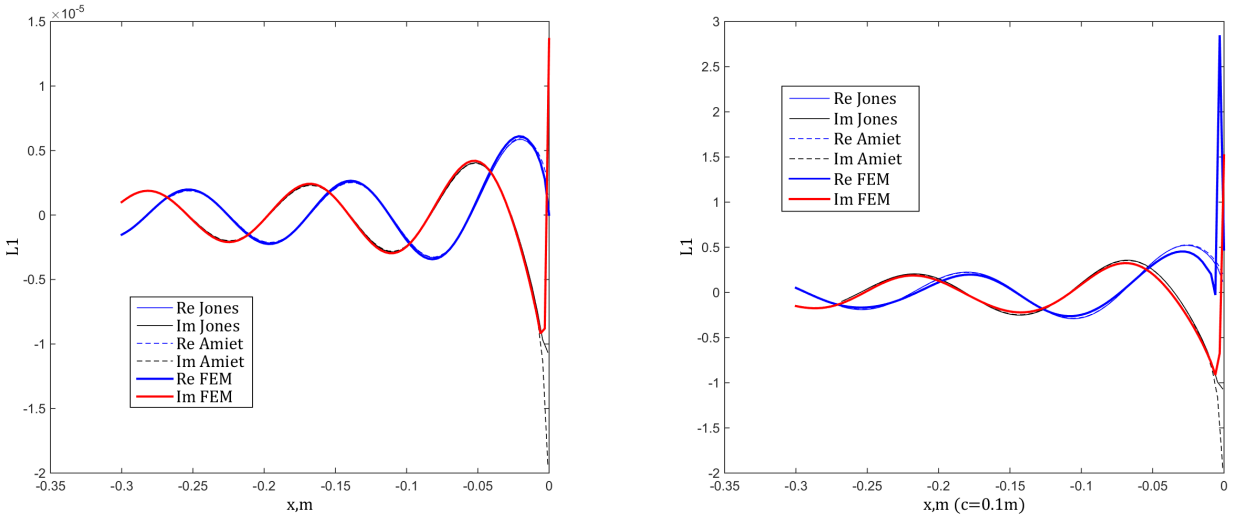


FIGURE 6.8 – Exemple de résultat du champ acoustique généré par la présence de deux monopôles en opposition de phase au bord d'une plaque semi-infinie et présence d'un écoulement moyen de vitesse $W_x = -100$ m/s, d'après [12]. L'écoulement va de la droite vers la gauche.

Δp_N représente le saut de pression numérique sur les aubes et son amplitude est proportionnelle à

la distance d entre les deux monopôles tant que cette distance reste petite devant x_0. Si $d/x_0 < 0.5$, la relation $\Delta p \simeq 3.15(1+M)\Delta p_N/d$ est observée avec une marge d'erreur de l'ordre du pour cent. La Fig. 6.9 illustre le saut de pression instationnaire obtenu avec les trois formulations pour deux vitesses d'écoulement ($W_x \in [-0.01, -100]$). Les résultats issus des modèles analytiques et de la simulation numérique montrent de très bons accords. Cet étape permet de valider l'approche du dipôle de bord avec des moyens numériques.



(a) (b)

FIGURE 6.9 – Sauts de pression instationnaire obtenus avec la fonction de Green du demi-plan ΔP (ligne), la solution d'Amiet $(L_1 c)/\varepsilon$ (pointillé) et la simulation numérique Δp_N (gras) pour une vitesse d'écoulement $W_x = -0.01$ m/s (a) et $W_x = -100$ m/s (b), d'après [12].

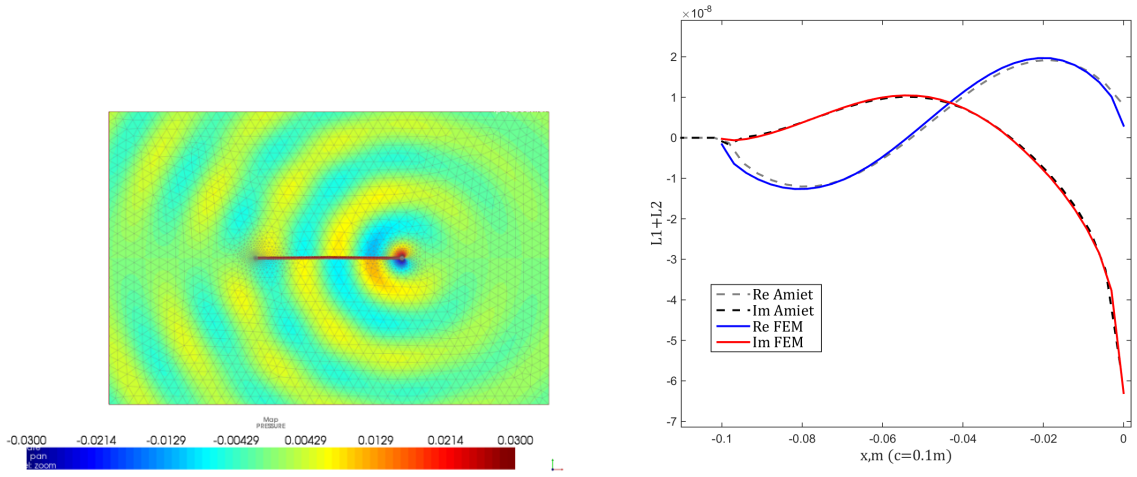
L'approche numérique est très intéressante car il n'existe pas d'expression analytique exacte du rayonnement d'un dipôle approché très près du bord d'un profil de longueur finie au moyen d'une fonction de Green. En revanche, la formulation d'Amiet permet de prendre en compte les effets de diffraction par le bord de fuite et la condition de Kutta-Joukowski instationnaire par l'ajout d'un second terme, même si cette étape requiert une approximation. Comme pour le terme de bord d'attaque, la contribution de bord de fuite de la solution d'Amiet est intégrée sur des petits segments de longueur ε et s'exprime par la relation :

$$L_2(y_1^*, y_2^*, \omega, \varepsilon) = \frac{2\rho_0 W_x w_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa - M\mu) + \mathrm{i}k_2^* y_2^*}}{\sqrt{2\pi(k_1^* + \beta^2\kappa)(\kappa - M\mu)}} \left[\begin{array}{c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa - M\mu)y^*} \{1 - (1-\mathrm{i})E(2\kappa(1-y^*))\} + \\ (1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - M\mu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa - M\mu)} E\left((\kappa - M\mu)(1-y^*)\right) \end{array} \right]_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon}. \tag{6.8}$$

$$k_j^* = \frac{k_j c}{2}, \quad j \in [1,2], \quad \kappa = \sqrt{\mu^2 - k_2^{*2}/\beta^2}.$$

La validité de l'approche a été testée pour un profil de corde finie. Une comparaison a donc été réalisée entre le saut de pression instationnaire calculé avec le formalisme d'Amiet et celui calculé numériquement grâce à un code via la méthode des éléments finis. Les effets de diffraction au bord de fuite sont pris en compte, comme l'illustre la Fig. 6.10-a. Le chargement total $(L_1 + L_2)c/\varepsilon$ est comparé à la solution numérique ΔP_N dans la Fig. 6.10-b. Un très bon accord est obtenu en amplitude et phase. Ceci confirme qu'une fois déterminé dans la configuration d'une plaque plane semi-infinie, le dipôle de bord d'attaque peut être utilisé pour toute configuration.

Lorsqu'un dipôle est rapproché au proche voisinage de l'extrémité d'une paroi plane semi-infinie, le saut de pression sur la plaque s'identifie au chargement instationnaire calculé par le modèle d'Amiet. La démonstration mathématique de cette intuition a par la suite été effectuée et se trouve détaillée



(a) (b)

FIGURE 6.10 – (a) : Simulation numérique (méthode des éléments finis) du champ acoustique généré par un dipôle placé au bord d'un profil de corde finie. Champ de pression instantané. (b) : Comparaison du chargement instationnaire prédit par la solution d'Amiet $(L_1 + L_2)c/\varepsilon$, et par la solution numérique ΔP_N dans le cas du profil de corde finie ($c = 0.1$ m) avec un écoulement de vitesse $W_x = -0.01$, d'après [12].

en annexe E. Si le dipôle est placé en régime asymptotique, l'identification des deux formulations permet de déterminer mathématiquement l'amplitude du dipôle équivalent. Ainsi, l'égalité des deux formulations s'écrit :

$$l_1{}^A(x,\omega) = \alpha_G \frac{\partial G_M}{\partial z_0}, \tag{6.9}$$

et l'amplitude du dipôle α_G s'écrit :

$$\alpha_G = -\frac{\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0 M \sqrt{-X_0\beta}}{\sqrt{\pi k(1+M)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}KX_0(1-M)}. \tag{6.10}$$

6.2.2 Rayonnement d'un dipôle en champ libre

Le bruit rayonné par un dipôle en champ libre $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ s'exprime par le produit scalaire de l'amplitude du dipôle avec la dérivée de la fonction de Green adaptée par rapport aux coordonnées de la source. Le bord d'attaque (ou de fuite), modélisé comme une plaque plane, correspond à un dipôle de direction z normal à la direction de la plaque, seule la composante associée du gradient est nécessaire. Pour un dipôle unitaire, la fonction de Green bidimensionnelle en champ libre pour l'équation de Helmholtz convectée s'écrit :

$$G(\mathbf{X}|\mathbf{X_0}) = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(K\bar{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}, \tag{6.11}$$

où $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel d'ordre 0 et de première espèce $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + \mathrm{i}Y_0(z)$, $\beta = \sqrt{1-M^2}$, $K = k/\beta$, $X = x/\beta$. $\bar{r} = \left[(X-X_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}$, où (x_0, z_0) et (x, z) sont les coordonnées des points source et observateur, respectivement. Dans ce cas, le bord d'attaque (ou de fuite) est placé à l'origine du repère. Le champ acoustique rayonné s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(K\bar{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}\right] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[H_0^{(1)}(K\bar{r})\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}. \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction de Hankel de première espèce s'écrit [116] :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}H_n^{(1)}(z) = \frac{nH_n^{(1)}(z)}{z} - H_{n+1}^{(1)}(z). \tag{6.12}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z). \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial z_0} &= -\frac{\mathrm{i}}{4}H_1^{(1)}(K\overline{r})\frac{\partial K\overline{r}}{\partial z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \\ &= -\frac{\mathrm{i}K}{4}H_1^{(1)}(K\overline{r})\frac{\partial}{\partial z_0}\left[(X-X_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[(X-X_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{1/2} &= \frac{2(z-z_0)(-1)}{2\left[(X-X_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{(z_0-z)}{\overline{r}}.\end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{\partial G}{\partial z_0} = \frac{\mathrm{i}K(z-z_0)}{4\overline{r}}H_1^{(1)}(K\overline{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}. \tag{6.14}$$

La coupe cylindrique bidimensionnelle du stator annulaire au rayon R_0 doit être périodique, de période Va où V est le nombres d'aubes de stator et $a = 2\pi R_0/V$ est la largeur d'un canal inter-aube. Le même point source doit donc être répété tous les V canaux. Ceci mène au champ périodisé :

$$p = \frac{\mathrm{i}K}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z+nVa}{\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2}}H_1^{(1)}(K\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2}). \tag{6.15}$$

Ce champ bidimensionnel peut être développé en un somme infinie d'ondes planes telle que :

$$p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^{\pm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j z)}, \tag{6.16}$$

où :

$$\alpha_j = \frac{j2\pi}{Va}, \quad \overline{K_j^{\pm}} = \pm\left[K^2-\alpha_j^2\right]^{1/2}.$$

Chaque onde plane doit être périodique dans la direction z, de période Va. Le signe + désigne la propagation en aval de l'écoulement ($x > 0$), le signe − la propagation en amont de l'écoulement ($x < 0$). Un mode peut être passant ou coupé selon que $\overline{K_j^{\pm}}$ est réel ou complexe. La propagation en aval est considérée. Les deux expressions du champ de pression sont égales :

$$\frac{\mathrm{i}K}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z+nVa}{\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2}}H_1^{(1)}(K\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{+}}X+\alpha_j z)}. \tag{6.17}$$

Une projection sur les modes exponentiels, utilisant les propriétés d'orthogonalité de la base modale, est employée avec le produit scalaire suivant :

$$\int_0^{Va}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_j z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\mathrm{d}z = Va\ \delta_{j,\mu}, \quad \alpha_\gamma = \frac{\gamma 2\pi}{Va}, \quad \gamma\in[j,\mu].$$

$$a_j^+ = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\frac{\mathrm{i}K}{4Va}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{Va}\frac{z+nVa}{\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2}}H_1^{(1)}(K\left[X^2+(z+nVa)^2\right]^{1/2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j z}\mathrm{d}z. \quad (6.18)$$

La changement de variable suivant est effectué :

$$t = z+nVa, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}z, \quad t(z=0) = nVa, \quad t(z=Va) = Va(n+1).$$

Le théorème de Chasles généralisé indique que :

$$\sum_{k=a}^{b}\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{b+1} f(t)\mathrm{d}t. \quad (6.19)$$

Ainsi,

$$a_j^+ = \frac{\mathrm{i}K}{4Va}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tH_1^{(1)}(K\left[X^2+t^2\right]^{1/2})}{\left[X^2+t^2\right]^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j t}\mathrm{d}t. \quad (6.20)$$

Le changement de variable suivant est effectué :

$$u = t/X, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{X}.$$

Ainsi,

$$a_j^+ = \frac{\mathrm{i}KX}{4Va}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{uH_1^{(1)}(KX\left[1+u^2\right]^{1/2})}{\left[1+u^2\right]^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j Xu}\mathrm{d}u \quad (6.21)$$

$$= \frac{\mathrm{i}KX}{4Va}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{uH_1^{(1)}(KX\left[1+u^2\right]^{1/2})}{\left[1+u^2\right]^{1/2}}\left[\cos\left(\alpha_j Xu\right)-\mathrm{i}\sin\left(\alpha_j Xu\right)\right]\mathrm{d}u. \quad (6.22)$$

Les fonctions $u\cos(u)$ et $u\sin(u)$ étant impaire et paire, respectivement, il vient alors :

$$a_j^+ = \frac{KX}{2Va}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\int_0^{\infty}\frac{uH_1^{(1)}(KX\left[1+u^2\right]^{1/2})}{\left[1+u^2\right]^{1/2}}\sin\left(\alpha_j Xu\right)\mathrm{d}u. \quad (6.23)$$

L'équation 6.23 est simplifiée à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \quad (6.24)$$

$$u(u) = \sin\left(\alpha_j Xu\right), \qquad u'(u) = \alpha_j X\cos\left(\alpha_j Xu\right),$$
$$v'(u) = \frac{uH_1^{(1)}(KX\left[1+u^2\right]^{1/2})}{\left[1+u^2\right]^{1/2}}, \qquad v(u) = -\frac{1}{KX}H_0^{(1)}\left(KX\left[1+u^2\right]^{1/2}\right).$$

$$a_j^+ = \frac{KX}{2Va}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\left\{\left[-\frac{1}{KX}H_0^{(1)}\left(KX\left[1+u^2\right]^{1/2}\right)\sin\left(\alpha_j Xu\right)\right]_0^{+\infty}\right. \quad (6.25)$$
$$\left. + \int_0^{\infty}\frac{\alpha_j}{K}H_0^{(1)}\left(KX\left[1+u^2\right]^{1/2}\right)\cos\left(\alpha_j Xu\right)\mathrm{d}u\right\}.$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} H_0^{(1)}(x) = 0,$$

$$a_j^+ = \frac{j\pi X}{(Va)^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X} \int_0^\infty H_0^{(1)}\left(KX\sqrt{1+u^2}\right)\cos\left(\alpha_j X u\right)\mathrm{d}u. \tag{6.26}$$

La fonction de Bessel modifiée K_0 est utilisée [1] :

$$K_0(-\mathrm{i}\xi) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} H_0^{(1)}(\xi). \tag{6.27}$$

ainsi que le résultat [43], (**6.677.5**, p.722) :

$$\int_0^\infty K_0\left(\alpha\sqrt{\xi^2+\beta^2}\right)\cos\left(\gamma\xi\right)\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}, \quad \mathcal{R}\mathrm{e}\ \alpha > 0, \quad \mathcal{R}\mathrm{e}\ \beta > 0, \quad \gamma > 0. \tag{6.28}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\alpha = -\mathrm{i}KX + A, \quad A \in \mathbb{R}^+, \quad \xi = u, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \alpha_j X.$$

$$\int_0^\infty K_0^{(1)}\left((-\mathrm{i}KX + A)\sqrt{1+u^2}\right)\cos\left(\alpha_j X u\right)\mathrm{d}u = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\left[(-iKX+A)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}}{2\left[(-iKX+A)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}.$$

Avec un passage à la limite :

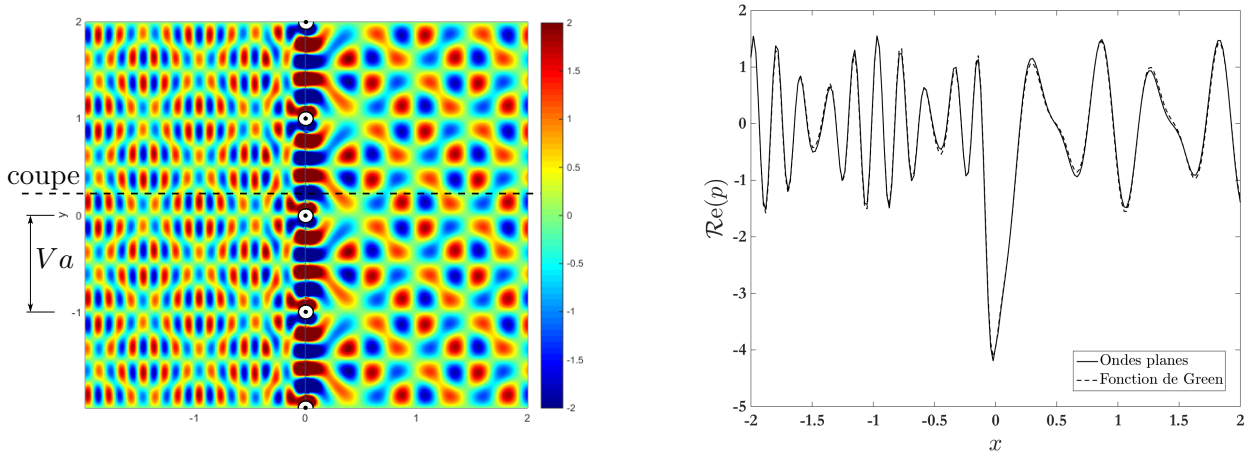
$$\lim_{A\to 0^+}\int_0^\infty K_0^{(1)}\left((-\mathrm{i}KX + A)\sqrt{1+u^2}\right)\cos\left(\alpha_j X u\right)\mathrm{d}u = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\left[-(KX)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}}{2\left[-(KX)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}.$$

$$\begin{aligned}
a_j^+ &= \frac{j\pi X}{(Va)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\frac{2}{\mathrm{i}\pi}\int_0^\infty K_0^{(1)}\left(-\mathrm{i}KX\sqrt{1+u^2}\right)\cos\left(\alpha_j X u\right)\mathrm{d}u && (6.29)\\
&= \frac{j\pi X}{(Va)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\frac{2}{\mathrm{i}\pi}\frac{\pi}{2\left[-(KX)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}\mathrm{e}^{-\left[-(KX)^2+(\alpha_j X)^2\right]^{1/2}}\\
&= \frac{j\pi}{(Va)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{K_j^+}X}\left[K^2-\alpha_j^2\right]^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[K^2-\alpha_j^2\right]^{1/2}X}\\
&= \frac{j\pi}{(Va)^2}\left[K^2-\alpha_j^2\right]^{-1/2} && (6.30)\\
a_j^+ &= \frac{1}{2Va}\frac{\alpha_j}{\overline{K_j^+}}. && (6.31)
\end{aligned}$$

Comme attendu, l'amplitude modale a_j^+ ne dépend pas de la coordonnée axiale. Pour le coefficient a_j^-, les développements restent identiques, x devenant négatif et le signe $-$ est choisi pour le nombre d'onde axial. Étant donné que X peut être remplacé par $|X|$ dans les intégrales, la même expression est obtenue à la fin du calcul, et donc $a_j^- = a_j^+ = a_j$.

6.2.3 Résultats

Les champs de pression instantanés calculés à partir de l'Eq. (6.15) avec la somme infinie de fonctions de Hankel et à partir de l'Eq. (6.16) pour la formulation modale en somme d'ondes planes sont comparés en Fig. 6.11. Les dipôles sont excités à la fréquence $f = 1500$ Hz. Le nombre de Helmholtz kVa est égal à 17.4 et le nombre de Mach de l'écoulement est $M = 0.3$. Le champ de pression acoustique instantané, identique pour les deux formulations, est illustré en Fig. 6.11-a, où les dipôles correspondant à la répétition d'une source de bord d'attaque sont représentés par des cercles blancs. Les dipôles sont régulièrement espacés, avec une périodicité de Va. À part dans la zone proche de la ligne des dipôles et en faisant abstraction des figures d'interférences, l'amplitude du champ acoustique est globalement



(a) (b)

FIGURE 6.11 – Champ de pression généré par 4 dipôles (a), identique pour les deux formulations ; Profils de pression le long d'une coupe axiale arbitraire, obtenus avec la formulation en ondes planes (ligne) et la fonction de Green (pointillé) (b).

uniforme dans les deux directions. Du fait de la présence de l'écoulement, les figures d'interférences sont étirées en aval et comprimées en amont de la ligne des dipôles. Dans la zone proche de celle-ci, le champ acoustique, plus élevé, est principalement constitué de modes coupés qui ne se propagent pas. Des profils de pression le long de la ligne $z = 0.08$ sont tracés en Fig. 6.11-b, où la ligne pointillée représente la somme de fonctions de Hankel et la ligne continue la somme d'ondes planes. Cet accord confirme que le développement en ondes planes est pertinent est peut être utilisé dans la technique de raccordement modal. De plus, un nombre important de termes est nécessaire dans la formulation en fonctions de Hankel pour atteindre la convergence (300 pour le cas présent) tandis qu'un faible nombre de modes d'ondes planes est suffisant pour atteindre la même convergence (avec de très faibles différences entre 10 et 30 termes). Quelques écarts sont visibles sur la figure, dus à la troncature des sommes infinies. Ainsi le nombre réduit d'ondes planes nécessaire pour reproduire la fonction de Green d'une série de dipôles est en faveur de la modélisation choisie.

Limite de a_j en $j \to +\infty$

Le calcul de l'amplitude modale des ondes planes est présenté ici lorsque l'ordre modal j tend vers l'infini.

$$a_j^+ = \frac{j\pi}{(Va)^2}\left[K^2 - \left(\frac{j2\pi}{Va}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{(j2\pi/Va)^2}{j4\pi}\left[K^2 - \left(\frac{j2\pi}{Va}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\eta = \frac{j2\pi}{Va}, \quad j = \frac{\eta Va}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad a_j^+ = \frac{1}{2\eta Va}\frac{\eta^2}{\sqrt{K^2-\eta^2}} = \frac{1}{2\eta VaK}\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{K}\right)^2}}.$$

Le changement de variable $t = \eta/K$ est utilisé :

$$\lim_{j\to+\infty} a_j^+ = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{2Va}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-\mathrm{i}}{2Va} = \frac{-\mathrm{i}}{4\pi R_0}.$$

La valeur de a_j converge vers une valeur limite non nulle quand j tend vers l'infini (Fig. 6.12). La divergence de la série a donc tendance à rendre le champ acoustique singulier dans la direction où est orienté le dipôle. Lorsque j augmente, les modes deviennent coupés et sont de plus en plus fortement atténués dans la direction axiale. Au delà d'une certaine distance, il n'y a plus que des modes passants et le champ acoustique n'est plus affecté par cette divergence. Cependant, à la position axiale du dipôle,

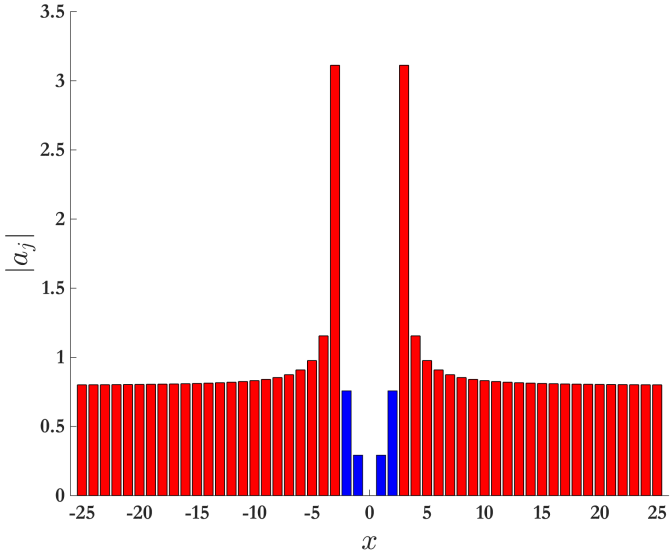


FIGURE 6.12 – Valeur absolue de l'amplitude modale a_j en fonction de l'ordre modal j. Les barres d'histogramme bleues et rouges représentent les modes passants et coupés, respectivement.

le champ acoustique s'accroit indéfiniment avec l'augmentation du nombre de modes. Afin de contrer ce problème, le nombre de modes choisis pour la troncature peut être restreint, tant que les quelques modes passants traduisent correctement la fonction de Green d'un dipôle en champ libre. Ce nombre de modes dépend alors de la géométrie du stator et de la fréquence d'excitation du dipôle. Une autre méthode consiste à déphaser le champ acoustique dans la direction axiale pour simuler un déplacement vers l'amont du dipôle. Cela permet de sortir de la zone singulière du rayonnement du dipôle, tout en satisfaisant également les conditions pour atteindre le régime asymptotique lorsque celui-ci est placé au voisinage du bord d'un demi-plan.

6.2.4 Application à une grille d'aubes bidimensionnelle

La méthode du dipôle de bord d'attaque est utilisée pour identifier l'excitation hydrodynamique d'une rafale à une source de bruit équivalente, exprimée en une somme d'ondes planes. Le problème se rapporte alors à un cas classique de transmission acoustique à travers une grille d'aubes dans une configuration bidimensionnelle. Chacune des ondes planes dont les amplitudes sont définies par l'Eq. (6.31) est ensuite diffractée par la grille. Le champ résultant est calculé avec la technique de raccordement modal décrite en Sec. 2, en prenant en compte la condition de Kutta-Joukowski instationnaire au bord de fuite des aubes. La section suivante détaille la diffraction d'un seul dipôle placé au voisinage d'une aube de la grille, puis la modélisation d'un stator complet, d'abord homogène puis hétérogène.

Diffraction d'un seul dipôle unitaire

Dans la procédure de raccordement modal, l'onde excitatrice est exprimée en termes de potentiel et non en termes de pression acoustique. Le lien entre pression et potentiel acoustiques s'exprime par :

$$p = -\rho_0 \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}.$$

Le potentiel est donc défini comme suit :

$$\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{a}_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^+}X + \alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

ou encore,

$$\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMx/\beta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{a}_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^+}x/\beta + \alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

où, d'après l'annexe C.3 :

$$\overline{a}_j = \frac{\beta}{\mathrm{i}\rho_0 c_0 (K - M\overline{K_j^+})} a_j.$$

La Fig. 6.13 illustre la diffraction d'un dipôle d'amplitude unitaire placé très près du bord d'attaque d'une seule aube du stator. Sa fréquence d'excitation est égale à $f \in [3, 9.5]$ kHz avec un écoulement de vitesse moyenne $W_x = 36$ m/s. Les coefficients modaux, d'ordre s, des ondes réfléchies et transmises par la diffraction de l'ensemble des ondes incidentes d'indice j sont regroupés, classés et indiqués dans la Fig. 6.14, pour le cas où $f = 9.5$ kHz.

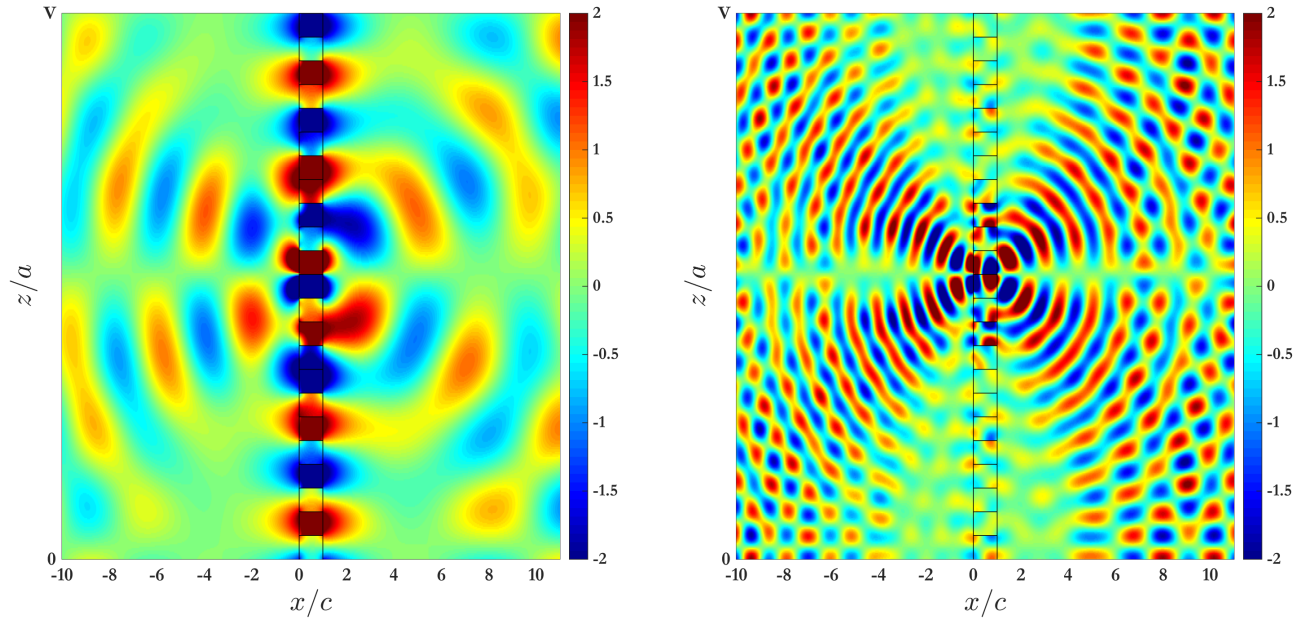
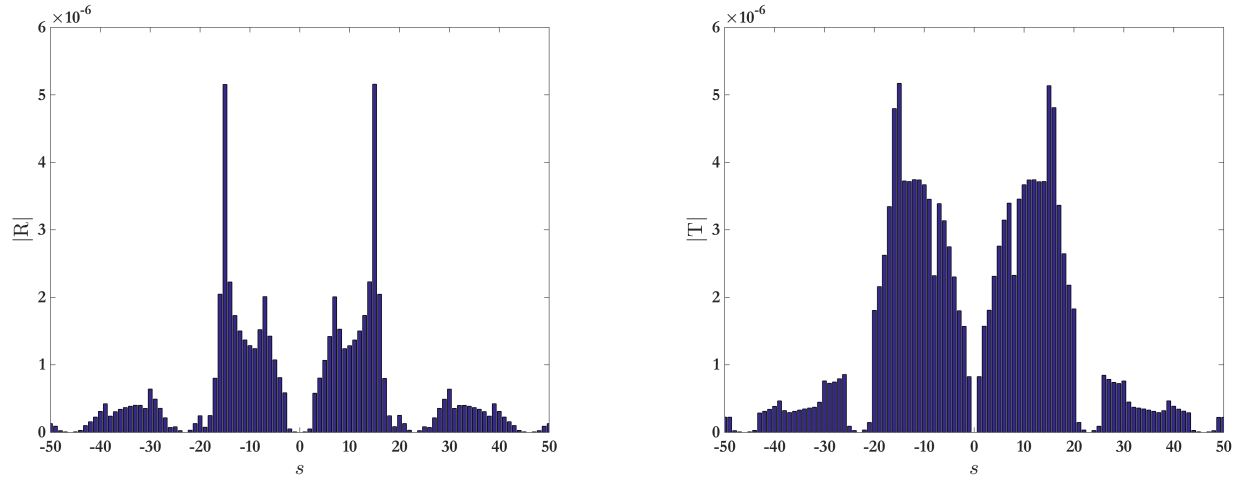


FIGURE 6.13 – Champs de pression générés par un dipôle ($W_x = 36$ m/s) placé juste devant une grille d'aubes ($V = 23$) au centre de la figure. La fréquence d'excitation du dipôle est $f = 3$ kHz (a) et $f = 9.5$ kHz (b).

Une fois approché du bord d'un profil, le rayonnement acoustique d'un dipôle diffère significativement de celui en champ libre. La directivité du dipôle présente une structure classique en deux lobes de phases opposées et aucun bruit le long de l'axe. Cependant la grille de stator et la 2π-périodicité induisent des zones de silence dans la direction tangentielle, sélectionnant deux principaux angles de propagation, symétriques par rapport à l'axe. Même si le nombre de Mach est faible, son influence reste visible. Les fronts d'ondes adjacents en aval du stator sont étirés alors qu'ils sont compressés en amont. En aval comme en amont du stator, une expansion tangentielle du rayonnement apparaît du fait de l'atténuation de modes coupés en opposition de phase, qui contamine toute la section. Cette expansion semble plus rapide en aval du fait de la présence de l'écoulement moyen. Finalement, le dipôle ne rayonne pas le long de l'axe et ne contribue donc pas au mode plan, comme l'indique l'amplitude a_j nulle du mode $j = 0$ dans l'Eq. 6.31, ce qui confirme l'analyse exprimée en Sec. 2.7.5. Étant donné que les aubes ne sont pas calées, les dipôles équivalents qui traduisent leur effet diffractant sont orientés normalement aux aubes et à la direction axiale. Ainsi la grille de rayonne pas dans la direction axiale et le mode plan ne peut pas être généré. Introduire un angle de calage revient alors à incliner les sources dipolaires et régénérer le mode plan, comme l'illustrent les résultats présentés en Sec. 2.7.5.



(a) (b)

FIGURE 6.14 – Coefficients modaux des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un dipôle ($f = 9.5$ kHz, $W_x = 36$ m/s) placé devant une grille d'aubes ($V = 23$). Configuration de la Fig. 6.13-b.

Diffraction d'un réseau homogène de dipôles déphasés

L'excitation acoustique représentative d'un stator homogène est composée de la superposition de dipôles identiques placés devant chacune des aubes. Par ailleurs, pour prendre en compte le passage de perturbations hydrodynamiques issues des sillages du rotor sur chacune des aubes du stator, les dipôles doivent être déphasés. Une grille est composée de V aubes identiques, également espacées de $\Delta Z = 2\pi R_0/V$. Si le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω, le temps requis par une pale de référence pour tourner de la position d'une aube à la suivante est $\Delta t = \Delta Z/(R_0\Omega) = 2\pi/(V\Omega)$. À $t = 0$, le sillage d'une pale de rotor coïncide avec une aube de référence numérotée 1. Le champ de pression associé, généré par le dipôle situé devant cette aube s'écrit :

$$p^1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Lorsque le rotor tourne tel que ce même sillage impacte l'aube numérotée 2 à une distance ΔZ et un temps Δt plus tard, le champ de pression associé à la position $z + \Delta Z$ à $t + \Delta t$ est identique au champ de pression associé à l'aube 1, à la position z et au temps t. Par conséquent, le champ associé à l'aube 2 est obtenu en remplaçant z par $z - \Delta Z$ et t par $t - \Delta t$:

$$p^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j(z-\Delta Z))} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\Delta t)}.$$

De la même manière, pour une aube située à $m\Delta Z$ de l'aube de référence :

$$p^{1+m} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j(z-m\Delta Z))} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-m\Delta t)}.$$

Par conséquent, en sommant les contributions de tous les dipôles, le champ acoustique total s'écrit :

$$p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{m=0}^{V-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j(z-m\Delta Z))} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-m\Delta t)} \tag{6.32}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{m=0}^{V-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j m\Delta Z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega m\Delta t}. \tag{6.33}$$

Sachant que :

$$\alpha_j \Delta Z = \frac{j2\pi}{Va}\frac{2\pi R_0}{V} = \frac{j2\pi}{V}, \quad a = \frac{2\pi}{V}R_0, \quad \omega = nB\Omega, \quad \omega\Delta t = \frac{2\pi nB}{V},$$

le champ acoustique peut s'écrire comme suit :

$$p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{m=0}^{V-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X + \alpha_j z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{(-j+nB)}{V} m}. \tag{6.34}$$

L'équation 6.34 est composée de l'addition de m champs de pression déphasés. Elle peut être également vue comme la multiplication du champ acoustique généré par un dipôle par une fonction d'interférence :

$$\sum_{m=0}^{V-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{(-j+nB)}{V} m} = \sum_{m=0}^{V-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(-j+nB)2\pi}{V}}\right)^m. \tag{6.35}$$

Cette fonction est mathématiquement une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(-j+nB)2\pi}{V}}$. Cette somme vaut exactement V lorsque $-j+nB$ est un multiple de V ($j = nB \pm sV$, $s \in \mathbb{N}$) ; l'interférence est alors totalement constructive. Elle est nulle si j n'est pas un multiple de V. Cette propriété ne dépend que des déphasages entre les différents dipôles. Le critère de Tyler et Sofrin est retrouvé et sélectionne les modes selon cette fonction d'interférence tant que les dipôles restent identiques et régulièrement espacés. Cette propriété permet de reformuler le champ de pression excitateur :

$$p = V\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_s^{\pm}}X + \alpha_s z)}, \tag{6.36}$$

où :

$$\alpha_s = \frac{2\pi n_s}{Va}, \quad \overline{K_s^{\pm}} = \pm\left[K^2 - \alpha_s^2\right]^{1/2}, \quad a_s = \frac{1}{2Va}\frac{\alpha_s}{\overline{K_s^{\pm}}}, \quad n_s = nB + sV.$$

Diffraction d'un réseau hétérogène de dipôles déphasés

L'excitation acoustique représentative d'un stator hétérogène est composée de la superposition de dipôles placés régulièrement en azimut mais dont les amplitudes de certains diffèrent. L'indice l représente le numéro des dipôles traduisant l'emplacement des aubes modifiées (épaissies par exemple), dont l'amplitude est pondérée de façon arbitraire par un coefficient $\tau \in \mathbb{C}$ tel que :

$$a_j^{(m)} = a_j(1 + \tau\delta_{m,l}),$$

où $\delta_{m,l}$ est un symbole de Kronecker. Le champ acoustique, dans une formulation en ondes planes, peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{m=0}^{V-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(m)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X + \alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{j2\pi}{V}m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}, \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{m=0}^{V-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(1 + \tau\delta_{m,l}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X + \alpha_j z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{j2\pi}{V}m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}. \end{aligned}$$

Le champ acoustique total peut s'écrire comme la somme d'un champ généré par m dipôles identiques (stator homogène) et d'un champ généré par L dipôles d'amplitude $a_j^{(l)}$, pour lequel la fonction d'interférence ne possède plus les propriétés de simplification et qui génère tous les modes j. Ceci revient à rajouter un champ perturbateur généré par L dipôles qui traduisent la différence entre les réponses d'une aube modifiée et d'une aube d'origine. Le champ acoustique généré par L dipôles s'écrit donc :

$$p_\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KMX} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l} a_j^{(l)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overline{K_j^{\pm}}X+\alpha_j z)}, \quad \text{avec} \quad a_j^{(l)} = \tau\ a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{(-j+nB)}{V}l}.$$

Le principe de superposition linéaire permet d'écrire la réponse comme étant la somme de deux réponses séparées, l'une homogène (p_h) et l'autre hétérogène ($\tau\ p_\tau$) avec $p_{tot} = p_h + \tau\ p_\tau$.

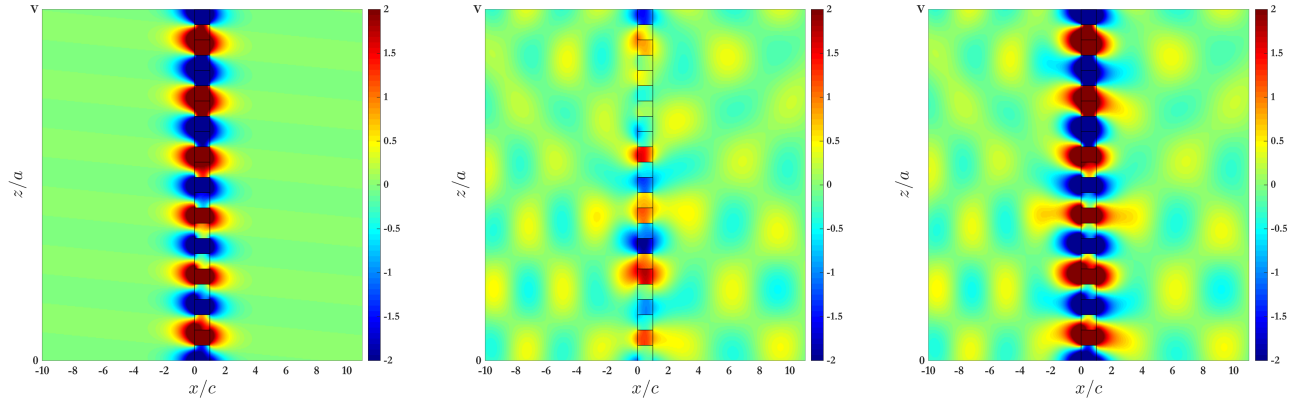
6.2.5 Application au ventilateur SEMAFOR

La méthode du dipôle de bord d'attaque est appliquée au ventilateur SEMAFOR, dont les trois aubes ($l \in [1, 9, 16]$) sont épaissies pour des raisons structurelles. La variation de la réponse aéroacoustique apportée par les trois aubes modifiées à l'impact des rafales incidentes est modélisée analytiquement à partir des techniques présentées précédemment. Les amplitudes des rafales incidentes sont nécessaires dans le modèle d'Amiet afin de déterminer l'amplitude des dipôles équivalents. Les sillages du rotor sont décrits comme des déficits de vitesse, assimilés à une fonction Gaussienne, comme proposé par Reynolds *et al.* [130] (voir Sec. 3.1.1). Le déficit de vitesse des sillages, périodique, est exprimé en répétant le profil du sillage en une série infinie de fonctions gaussiennes temporelles :

$$w(t) = w_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t-kT)^2/\tau^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{nB} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nB\Omega t}, \quad W_{nB} = w_0 \frac{\tau}{T}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \mathrm{e}^{-(n\pi\tau)^2/(\xi T^2)}. \tag{6.37}$$

$\xi = \ln\ 2$, τ est la moitié de la durée de passage d'un sillage et $T = 2\pi/B\Omega$. Pour cette étude, les données sont $w_0 = 6$ m/s et $\tau/T = 0.2$, identique à celles de l'article [136]. Le spectre des harmoniques de sillages décroit selon une enveloppe gaussienne.

Banc SEMAFOR : 1ère FPP

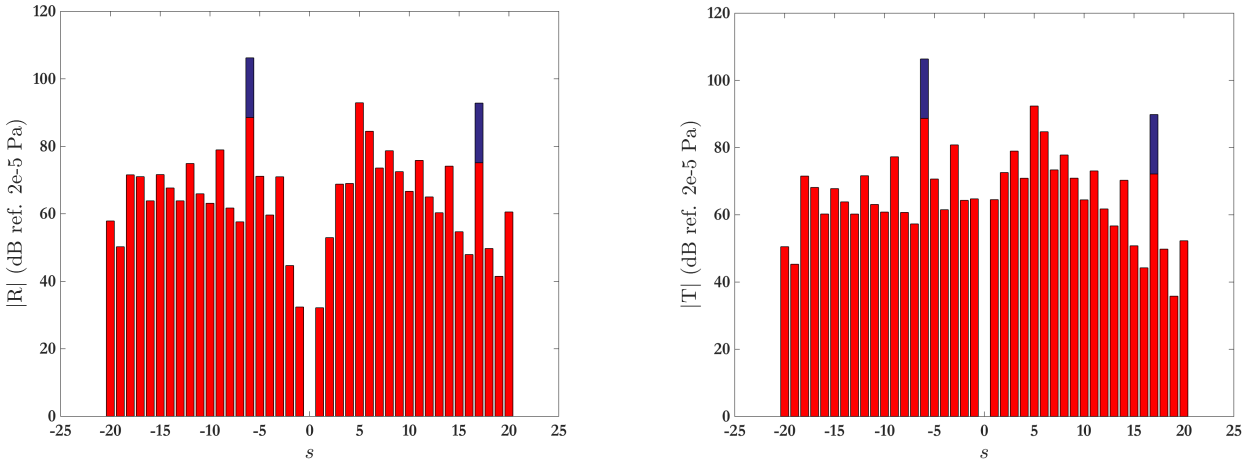


(a) (b) (c)

FIGURE 6.15 – Champ de pression généré par 23 dipôles homogènes (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par un réseau de 23 dipôles et un réseau de 3 dipôles (c) ($f = 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

Les Figs. 6.15 et 6.16 montrent les champs de pression générés par un réseau homogène de 23 dipôles, un réseau hétérogène de 3 dipôles ($m \in [1, 9, 16]$) pris parmi les 23 et la somme de ces deux réseaux, placés devant une grille composée de 23 aubes, ainsi que les coefficients de réflexion et de transmission en pression correspondants, exprimés en dB. Les modes de Tyler et Sofrin ($nB + sV = 1 \times 17 + s \times 23 \in [\ldots, -29, -6, 17, 40, \ldots]$) sont sélectionnés dans le cas d'un réseau homogène. Pour le cas $n = 1$, les modes sont tous coupés et ne génèrent qu'un champ localisé. Lorsqu'un réseau hétérogène lui est ajouté, d'autres modes qui ne respectent pas cette règle sont produits, dont certains

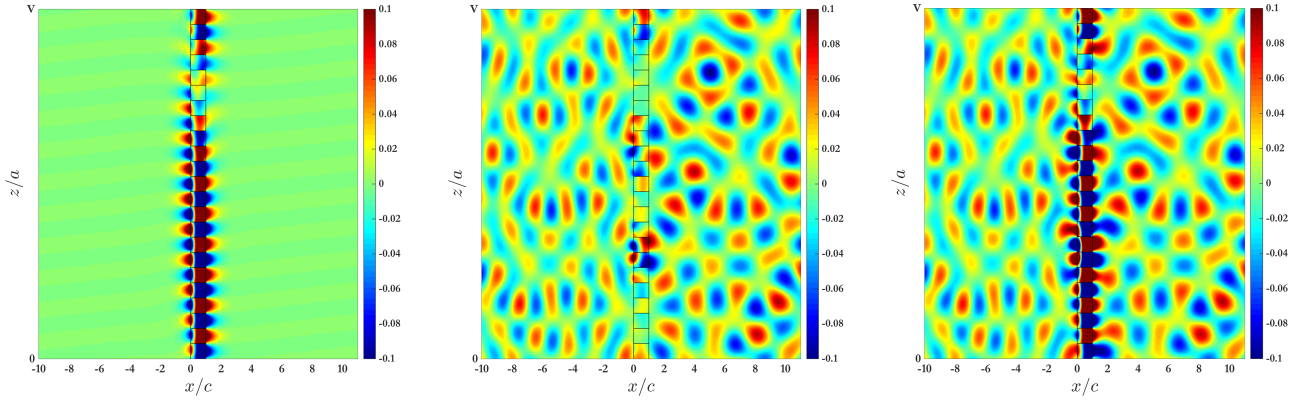
sont passants. Un champ acoustique se propage donc lorsque le réseau de dipôles est hétérogène, au contraire du cas précédent. Le mode plan $s = 0$ n'est pas excité par le réseau de dipôles.



(a) (b)

FIGURE 6.16 – Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau homogène de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

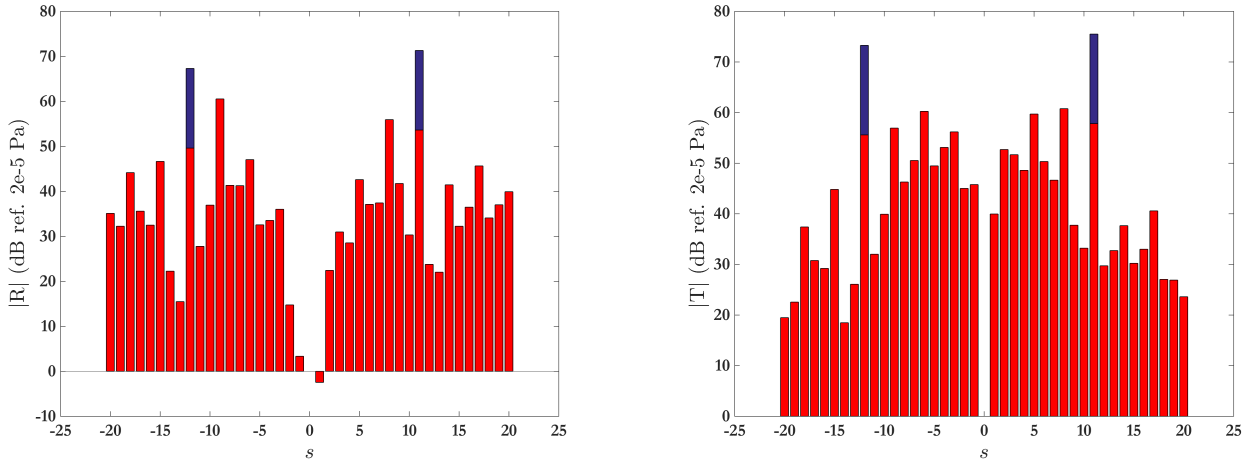
Banc SEMAFOR : 2ème FPP



(a) (b) (c)

FIGURE 6.17 – Champ de pression généré par 23 dipôles (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par la superposition des deux (c) ($f = 2 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

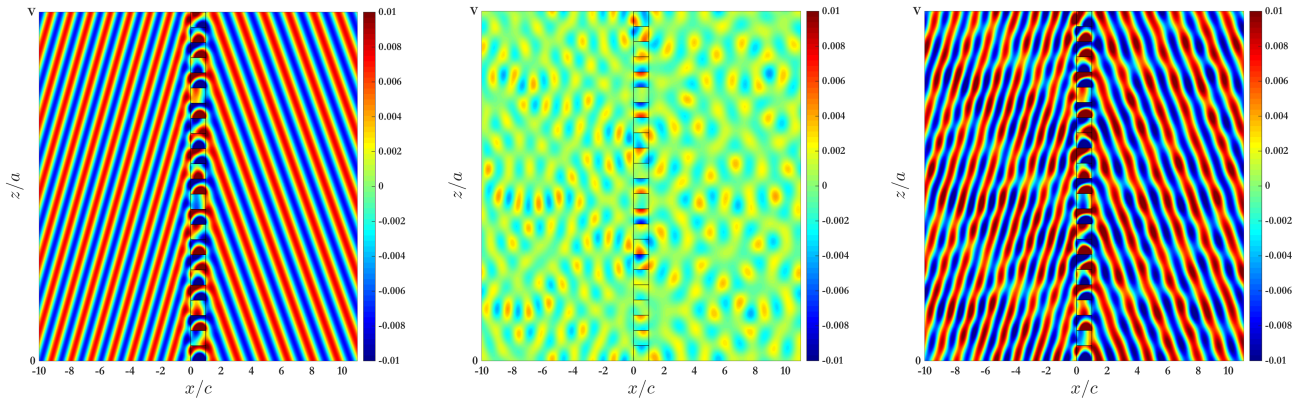
La deuxième fréquence de passage des pales est étudiée. Les champs de pression générés par les réseaux homogène et hétérogène de dipôles sont illustrés en Fig. 6.17 et les coefficients modaux des champs diffractés en amont et en aval en Fig. 6.16. Les modes $n_s \in [-12, 11]$ prédits par le critère de Tyler et Sofrin sont générés. Ces modes dominent le champ acoustique dans le voisinage de la grille d'aubes mais ne sont pas passants. Le comportement de ces deux modes, tournant dans des sens opposés mais possédant des nombres de lobes proches, montre des zones de silence où les deux modes tendent à être en opposition de phase et annulent partiellement le champ acoustique. Cette analyse rejoint celle menée en Sec. 3.5.2. En dehors du voisinage immédiat de la grille, aucune onde acoustique ne se propage en amont ou en aval. Le champ acoustique généré par le réseau hétérogène de dipôles comporte des modes passants qui se propagent dans le conduit, régénérant la raie.



(a) (b)

FIGURE 6.18 – Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 2 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

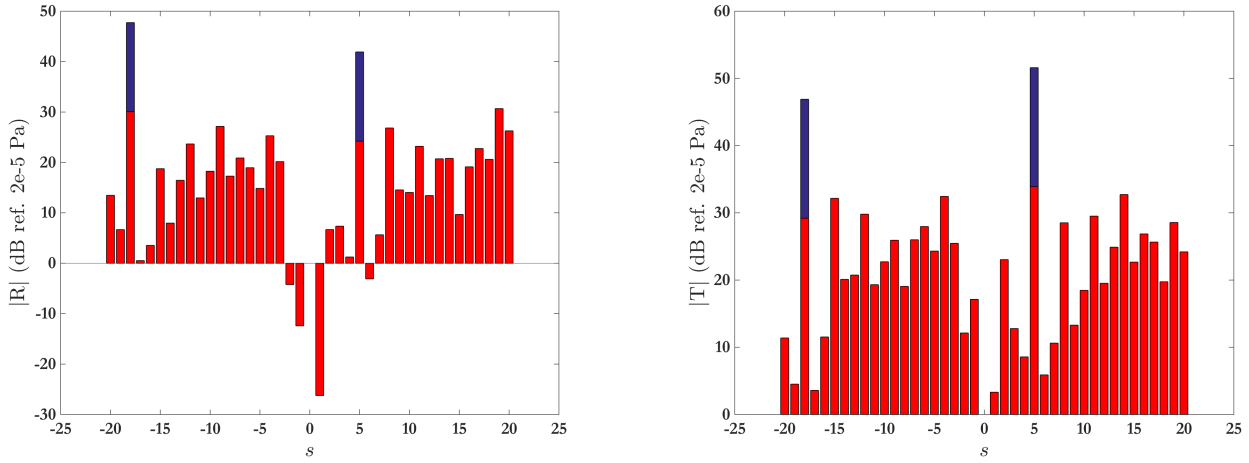
Banc SEMAFOR : 3ème FPP



(a) (b) (c)

FIGURE 6.19 – Champ de pression généré par 23 dipôles (a), 3 dipôles ($l \in [1, 9, 16]$) (b) et par un réseau de 23 dipôles et un réseau de 3 dipôles (c) ($f = 3 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

Les champs de pression générés par les mêmes réseaux homogène et hétérogène de dipôles pour la troisième fréquence de passage des pales et les coefficients modaux des champs diffractés sont illustrés en Figs. 6.19 et 6.20. L'étage homogène rotor-stator excite les modes de Tyler et Sofrin ($nB + sV = 3 \times 17 + s \times 23 \in [\ldots, -41, -18, 5, 28, \ldots]$), notamment le mode passant +5 qui domine le champ acoustique. Lorsqu'une hétérogénéité est considérée, le spectre modal est enrichi de nouveaux modes passants mais cette fois une modulation du champ acoustique seulement est observée, sans augmentation significative du niveau sonore dans le conduit.



(a) (b)

FIGURE 6.20 – Coefficients modaux en pression (dB : $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa) des champs acoustiques réfléchis (a) et transmis (b) générés par un réseau de 23 dipôles (histogramme en bleu) et un réseau de 3 dipôles (histogramme en rouge) ($f = 3 \times 2832$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est de 1.

6.3 Campagne expérimentale

6.3.1 Description du banc d'essai

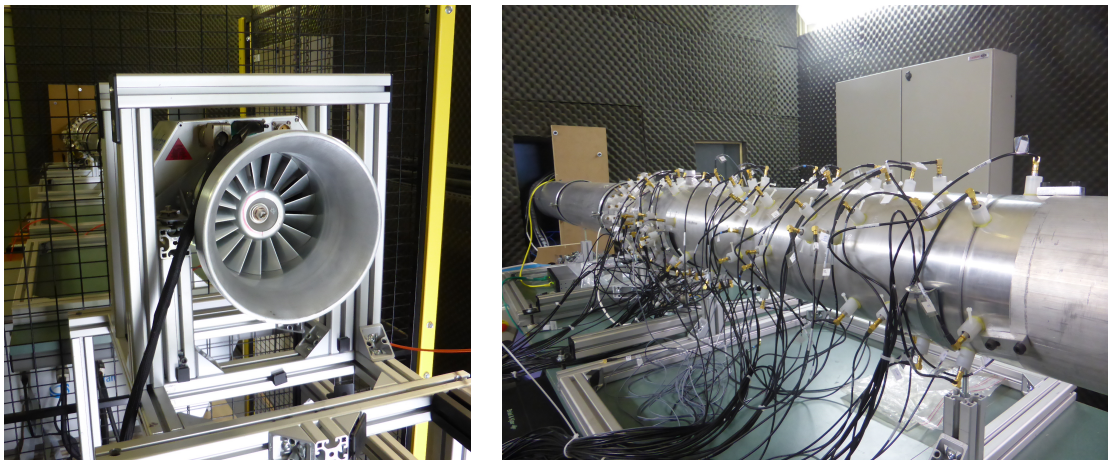


FIGURE 6.21 – Étage rotor-stator du banc SEMAFOR vu de face (a) et antenne aléatoire de microphones (b).

Le banc d'essai SEMAFOR est constitué d'un étage rotor-stator de turbomachine axiale carénée, utilisé dans les systèmes de conditionnement d'air pour l'aviation. L'étage est composé d'un rotor de 17 pales et d'un stator redresseur de 23 aubes (Fig. 6.21-a). En aval du ventilateur, le carter est prolongé par un conduit cylindrique en aluminium de même diamètre et long de deux mètres. Ce conduit a pour effet de filtrer les modes coupés qui sont localisés au voisinage de l'étage. D'après les paramètres globaux de ce banc d'essai, le critère de Tyler et Sofrin permet de déterminer les modes générés aux harmoniques de la fréquence de passage des pales (FPP), tant que les conditions d'entrée de l'écoulement sont axisymétriques et que la conception de l'étage rotor-stator est régulière. Pour le banc SEMAFOR, les modes azimutaux générés sont à la première FPP : $n_s \in [\cdots 17, -6, -29, \cdots]$; à la seconde FPP : $n_s \in [\cdots 34, 11, -12, \cdots]$; à la troisième FPP : $n_s \in [\cdots 28, 5, -18, \cdots]$. À la vitesse de rotation nominale du rotor de 10000 tr/min, la fréquence de passage des pales et ses premiers harmoniques sont $f_1 = 2833$ Hz, $f_2 = 5666$ Hz et $f_3 = 8500$ Hz. Pour le diamètre du conduit de 17 cm

et une vitesse d'écoulement axiale égale à environ 35 m/s, tous les modes générés aux deux premières fréquences de passage des pales en accord avec le critère de Tyler et Sofrin sont coupés. À une certaine distance du conduit, le bruit tonal généré par la turbomachine ne devrait donc pas être audible aux deux premières FPP. À la troisième FPP, le mode $n_s = 5$ est passant et contribue à la raie tonale présente à $f_3 = 8500$ Hz.

Afin de mesurer le champ acoustique généré par l'étage rotor-stator, une antenne de microphones, conçue pour le projet SEMAFOR a été utilisée (Fig. 6.21-b). Elle est constituée de deux sous-antennes où les microphones sont encastrés dans le carter, communiquant avec la surface interne du conduit par l'intermédiaire d'une perforation et d'une petite cavité, sans perturber l'écoulement. Les deux sous-antennes, longues de 80 et 20 cm respectivement, comportent 53 microphones chacune. Cet ensemble de 106 microphones 1/4 de pouce type 4957 et 4958 de Brüel & Kjær est connecté à un système d'acquisition PULSE disposant de 128 voies pour une fréquence d'échantillonnage de 65536 Hz. Chaque microphone est placé dans un canon en Téflon (Fig. 6.22-a). La cavité dans laquelle se place le microphone est reliée à l'intérieur du conduit par une perforation de 0.7 mm de diamètre (Fig. 6.22-b). Un joint est ajouté pour prévenir d'éventuelles fuites acoustiques ou aérauliques.

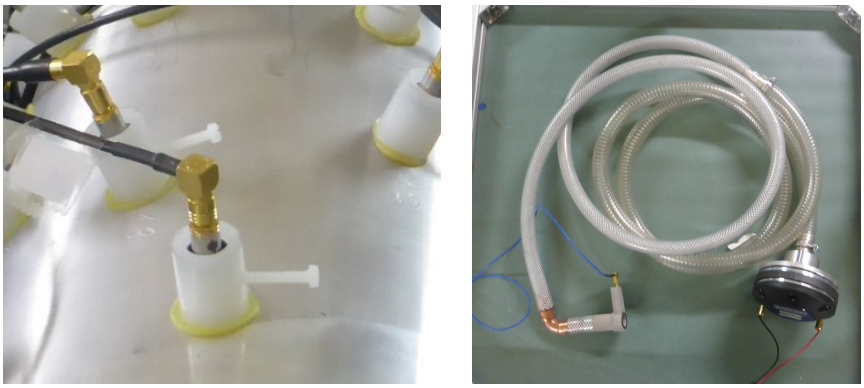


FIGURE 6.22 – Canon du microphone (vue extérieure) (a) et petit haut-parleur excité en large bande (b). Un microphone de référence est placé à l'extrémité du tube flexible.

Étalonnage des microphones

Avec le montage des microphones décrit précédemment, un petit résonateur de Helmholtz est formé entre le fond de la cavité et la membrane du microphone. La fonction d'étalonnage est par conséquent sensible à la position radiale du microphone, celle-ci modifiant la fréquence du résonateur. Une méthode d'étalonnage individuelle a d'abord été utilisée. Un bruit à large bande est généré par un petit haut-parleur relié à un tube flexible de petit diamètre, au bout duquel est placé un microphone de référence (PCB 426B03) (Fig. 6.22-c). Dans une première étape (Fig. 6.24-a), la fonction de transfert entre ce microphone et celui présent dans la cavité à étalonner est mesurée en plaçant l'extrémité du tube contre la paroi, à l'intérieur du conduit, centré sur la perforation du logement de microphone. La fonction de transfert, ainsi mesurée est notée :

$$H_{ir} = S_{ri}/S_{rr}, \quad \text{en V/V}, \tag{6.38}$$

où S_{rr} est l'autospectre du microphone de référence et S_{ri} l'interspectre entre le microphone de référence et le i-ème microphone. Les deux microphones ne sont pas étalonnés, ainsi la fonction de transfert s'exprime en V/V. Dans une seconde étape (Fig. 6.24-b), le tube du haut-parleur est placé sur un microphone étalonné, encastré dans un baffle plan et monté affleurant à la surface. La seconde fonction de transfert s'écrit :

$$H_{cr} = S_{rc}/S_{rr}, \quad \text{en Pa/V}. \tag{6.39}$$

Finalement, le facteur d'étalonnage du microphone i (Fig. 6.23) s'écrit :

$$c_i(\omega) = H_{cr}/H_{ir}, \quad \text{en Pa/V.} \tag{6.40}$$

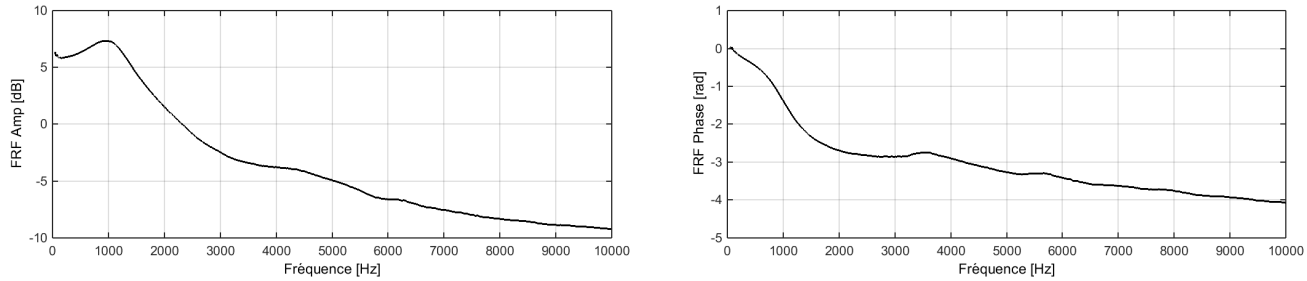


FIGURE 6.23 – Fonction de réponse en fréquence du facteur d'étalonnage. Amplitude (a) et phase (b) pour un microphone quelconque.

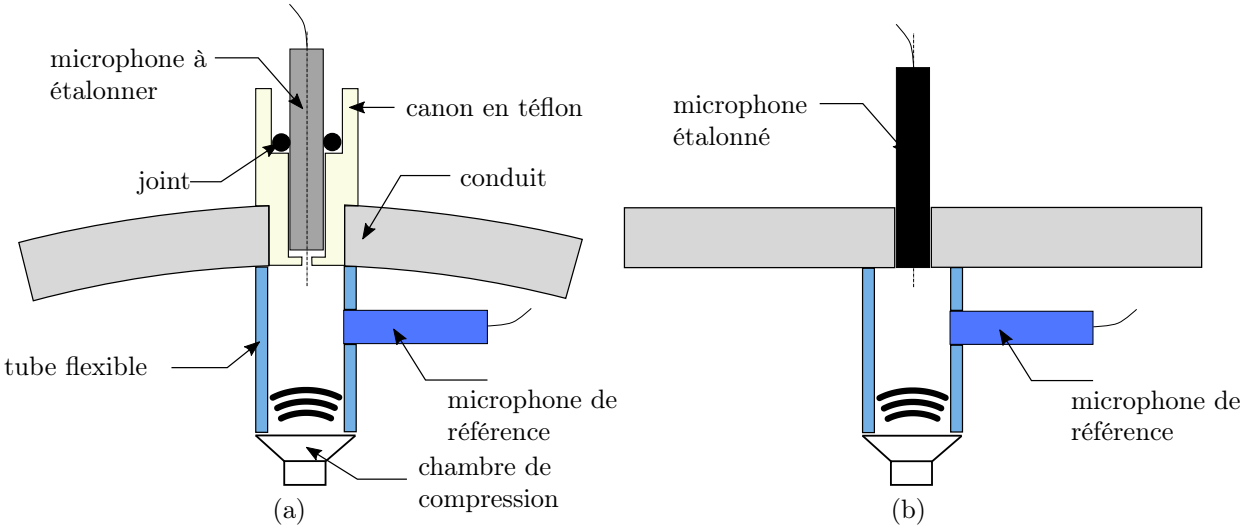


FIGURE 6.24 – Méthode d'étalonnage individuelle. (a) : Calcul de la fonction de transfert du résonateur de Helmholtz. (b) : Étalonnage du microphone de référence.

La méthode a été validée en termes de répétabilité. Cependant, le montage des microphones dans les canons en téflon étant très sensible, la procédure d'étalonnage doit être refaite à chaque montage/démontage du banc d'essai. Cette sensibilité pose des difficultés lors de l'étalonnage car il doit être réalisé lorsque le banc est déjà monté. Or, l'antenne de microphones est longue d'un mètre et l'étalonnage de chaque microphone effectué à la main devient impossible. De plus, un étalonnage individuel pour 106 microphones reste très lent. Une seconde méthode d'étalonnage a été utilisée pour contrer ces limitations. Cette technique est détaillée par Leclère *et al.* [81]. La méthode est basée sur le fait que le champ acoustique mesuré par l'antenne peut être décomposé sur une base modale connue, celle des modes de conduit. Un opérateur de projection est défini et permet la projection du champ mesuré sur la base modale. L'hypothèse principale de la méthode est que les écarts résiduels entre les mesures réelles et les mesures projetées sont dominés par des erreurs d'étalonnage. Cette technique permet de déterminer les facteurs d'étalonnage de manière globale d'une part, et lorsque le banc est déjà monté, d'autre part. Étant basée sur des projections modales, elle est limitée par la plage fréquentielle où la décomposition modale est valide.

Positions des microphones

La répartition des microphones a été optimisée pour assurer une meilleure efficacité de la décomposition modale. Ceci a été réalisé par MicrodB dans le cadre du projet SEMAFOR, en testant numériquement un grand nombre de positions de microphones et en calculant la matrice de transfert

entre le champ mesuré et les coefficients modaux pour chaque configuration. L'antenne pour laquelle le nombre de conditionnement était le plus faible pour toute la plage de fréquence (100 – 10000 Hz) est sélectionnée (courbe rouge sur la Fig. 6.25).

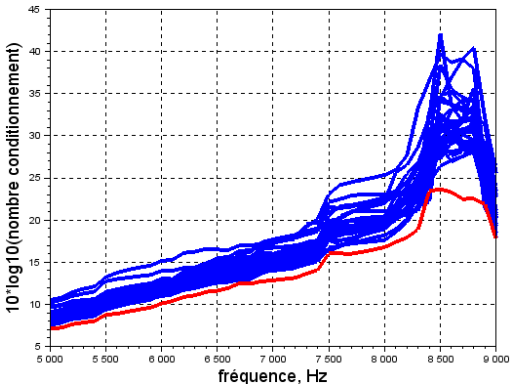


FIGURE 6.25 – Optimisation de la répartition des microphones en utilisant le nombre de conditionnement de la matrice de transfert, en fonction de la fréquence. Sélection de l'ensemble de microphones pour lequel le nombre de conditionnement est le plus faible sur toute la plage de fréquence (courbe en rouge).

6.3.2 Technique de décomposition modale

Le champ acoustique généré par un étage rotor-stator et se propageant dans un conduit peut être déterminé par la connaissance des sources acoustiques, de l'équation des ondes et des conditions aux limites du conduit. La propagation guidée dans un conduit est régie par une fonction de Green, calculée analytiquement et détaillée en Sec. 4.3. L'avantage ici est que la connaissance des coefficients modaux dans une section droite du conduit (estimés par les mesures par antennerie) peut être utilisée pour déterminer le champ acoustique dans n'importe quelle autre section du conduit, si les conditions géométriques et de l'écoulement ne varient pas dans la direction axiale. L'approche proposée est de réaliser une décomposition modale dans le voisinage des microphones, puis de rétro-propager le champ acoustique jusqu'aux sources supposées. Le travail de décomposition modale a été mené par le LVA dans le cadre du projet SEMAFOR.

Comme vu dans la Sec. 4.3, le champ de pression dans un conduit cylindrique de longueur infinie avec des parois rigides peut s'écrire comme suit :

$$p(r,\theta,x) = \sum_{n=1-N_n}^{N_n-1} \sum_{j=0}^{N_j-1} \left[A_{nj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{+}x} + B_{nj} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{-}x} \right] f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{6.41}$$

où A_{nj} et B_{nj} sont les amplitudes complexes des modes se propageant en aval et en amont dans le conduit, respectivement. Étant donné que l'antenne de microphones est placée loin en aval de la turbomachine, seuls les modes passants contribuent à la somme modale. La fonction $f_{nj}(r)$ est la fonction de forme radiale pour un conduit à section cylindrique. Les termes $k_{nj}^{\pm}$ sont les nombres d'ondes axiaux dans les directions en aval $(+)$ et en amont $(-)$. En considérant que K positions de mesure sont utilisées pour discrétiser spatialement le champ de pression à l'intérieur du conduit, l'Eq. (6.41) peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Phi c}, \tag{6.42}$$

où $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^K$ est le vecteur du champ de pression mesuré par chaque microphone à une fréquence donnée ω et $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^L$ est un vecteur contenant les coefficients modaux complexes A_{nj} et B_{nj}. La dimension L dépend du nombre de modes azimutaux N_n et radiaux N_j considéré, par la relation $L = 2(2N_n - 1)N_j$. La matrice de transfert $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{C}^{K \times L}$ est remplie avec les termes de la base modale correspondants. Le système linéaire associé peut être résolu pour les coefficients $\mathbf{c}$ par l'équation :

$$\widehat{c} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{p}. \tag{6.43}$$

où $(\bullet)^{-1}$ désigne la matrice pseudo-inverse. Une méthode alternative [115] consiste à définir la matrice interspectrale des champs de pression mesurés $\mathbf{S_{pp}} \triangleq \mathbb{E}\left\{\mathbf{pp}^H\right\}$. $(\bullet)^H$ désigne la conjuguée hermitienne d'une matrice à coefficients complexes et $\mathbb{E}\{\cdot\}$ doit être compris comme l'espérance d'une valeur sur un ensemble de sections temporelles obtenu après segmentation du signal mesuré et une transformation de Fourier. L'Eq. (6.42) s'écrit alors :

$$\mathbf{S_{pp}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{S_{cc}}\mathbf{\Phi}^H, \tag{6.44}$$

et la solution est désormais écrite pour la matrice de covariance des coefficients modaux :

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{cc}} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{S_{pp}}(\mathbf{\Phi}^{-1})^H. \tag{6.45}$$

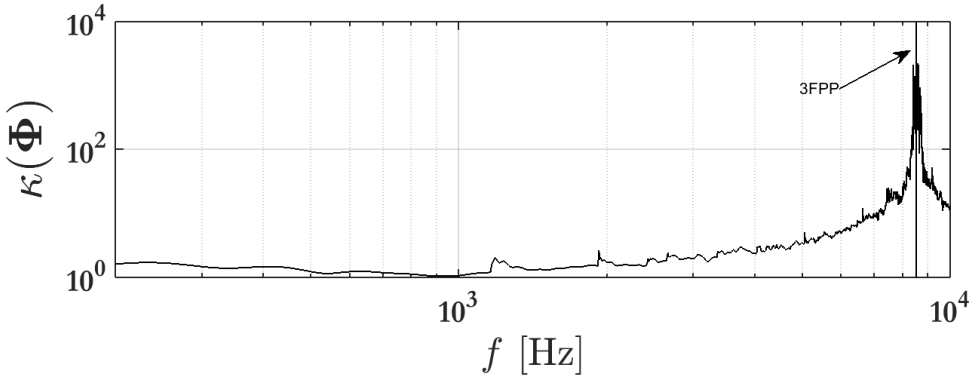


FIGURE 6.26 – Nombre de conditionnement κ de la matrice de projection modale $\mathbf{\Phi}$ en fonction de la fréquence. Le conditionnement se détériore lorsque le nombre de modes passants devient égal au nombre de microphones. Vers 3FPP (8500 Hz), une régularisation devient nécessaire.

La solution précédente est adaptée à la condition que la matrice $\mathbf{\Phi}$ soit bien conditionnée. Cependant, ce n'est pas le cas lorsque le nombre de modes passants augmente (Fig. 6.26). Ainsi, le conditionnement se détériore avec la fréquence, menant à une singularité lorsque les nombres de modes passants et de microphones sont égaux. Dans ce cas, il devient nécessaire d'introduire de l'information *a priori* dans le problème afin de trouver une solution plus stable. Un exemple d'une telle information peut porter sur l'énergie de la solution, où les solutions les plus énergétiques sont pénalisées, ce que traduit mathématiquement la régularisation de Tikhonov [159]. Dans une première étape, la matrice $\mathbf{\Phi}$ peut s'exprimer par sa décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{USV}^H. \tag{6.46}$$

La solution régularisée de la matrice inverse de $\mathbf{\Phi}$ au sens de Tikhonov s'écrit alors :

$$\mathbf{\Phi}_R^{-1} = \mathbf{V}\left\lceil \frac{s_i}{s_i^2 + \eta^2} \right\rfloor \mathbf{U}^H. \tag{6.47}$$

où $\lceil a_i \rfloor$ symbolise une matrice diagonale avec les termes diagonaux génériques a_i et η^2 est un paramètre de régularisation. La difficulté principale de la régularisation de Tikhonov est de régler automatiquement et de manière optimale ce paramètre pour toutes les fréquences d'une plage donnée. Plusieurs méthodes *ad hoc* ont été proposées, par exemple la technique de la courbe en L [50] ou la méthode GCV (méthode de validation croisée généralisée) [42], utilisées couramment en acoustique. Dans le cadre du projet SEMAFOR, une méthode dérivée de l'approche bayésienne des problèmes inverses a été utilisée [115]. Il a été récemment montré que cette approche a de nombreux avantages comparée aux méthodes traditionnelles quand elle est appliquée aux problèmes inverses en acoustique [5, 114]. Elle est basée sur la minimisation de la fonction coût suivante, selon le paramètre η^2 :

$$\mathbf{J}(\eta^2) = \sum_{i=1}^{I} \ln\left(s_i^2 + \eta^2\right) + (I-2)\ln\left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{|y_i|^2}{s_i^2+\eta^2}\right), \tag{6.48}$$

où le terme $|y_i|^2$ s'écrit :

$$|y_i|^2 = \mathbf{u}_i^H \mathbf{S}_{\mathbf{pp}} \mathbf{u}_i, \tag{6.49}$$

où $\mathbf{u}_i$ est la i-ième colonne de la matrice $\mathbf{U}$. La minimisation de la fonction de coût $\mathbf{J}(\eta^2)$ est facilement réalisée par l'évaluation d'un ensemble de valeurs potentielles pour η^2 et en sélectionnant celle qui minimise la fonction. Cette technique de régularisation a été utilisée pour les résultats présentés dans cette section.

Résultats expérimentaux

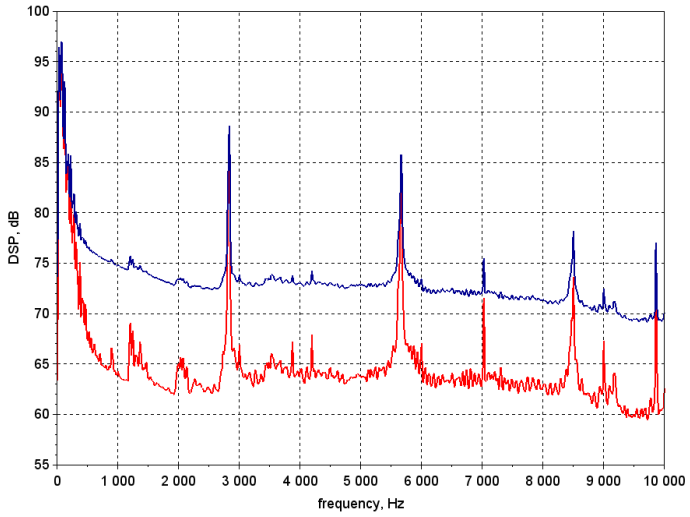
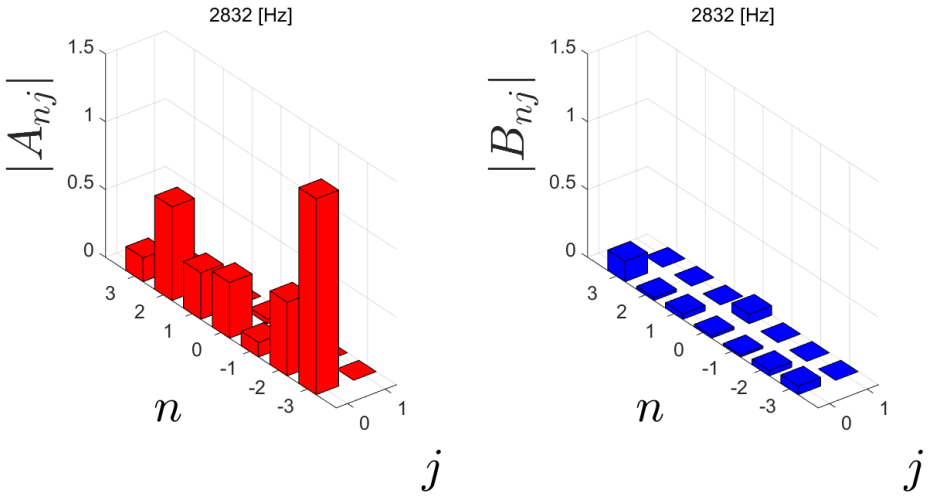


FIGURE 6.27 – Spectres de pression mesurés dans le conduit. Courbe bleue : Autospectre du microphone 1. Courbe rouge : Interspectre entre les microphones 1 et 2.

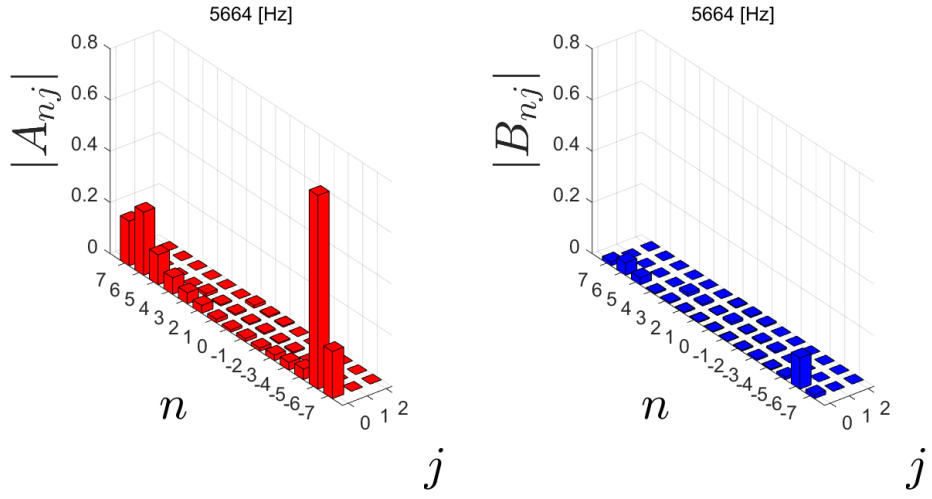
Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus pendant la campagne expérimentale du projet SEMAFOR. Le rotor de la turbomachine axiale tourne à une vitesse de rotation nominale $\Omega = 10000$ tr/min. La campagne a été réalisée avant que le *Turbulence Control Screen* (TCS) n'ait été conçu. Par conséquent, la distorsion d'entrée d'air fait partie des sources de bruit potentielles mesurées par l'antenne de microphones. Les spectres de densité de puissance en pression mesurés par un ou deux microphones de l'antenne sont illustrés en Fig. 6.27. La contribution du bruit de raie est clairement visible pour les trois premières fréquences de passage de pales à 2833 Hz, 5666 Hz et 8500 Hz. Comme cela a été analysé précédemment, les raies aux deux premières FPP ne sont pas attendues d'après le critère de Tyler et Sofrin, la géométrie du conduit et la vitesse de l'écoulement. Elles montrent ainsi que la conception du banc SEMAFOR sort des conditions de régularité et d'homogénéité propres à l'application d'un tel critère. Comme cela a été commenté, l'apparition de ces deux raies peut provenir de la distorsion d'entrée d'air ou de l'hétérogénéité du stator, trois des aubes étant épaissies. Cette hétérogénéité peut agir sur le bruit d'interaction de sillages ou le bruit d'interaction potentielle, ces deux composantes étant générés aux mêmes fréquences. Le bruit hydrodynamique (ou pseudo-son) issu de la couche limite turbulente sur les parois du conduit est également visible sur l'autospectre (courbe bleue) avec un rapport signal à bruit dont l'amplitude est de l'ordre de -10 dB. Le pseudo-son est non corrélé entre différents capteurs et a donc tendance à surcharger la diagonale de la matrice interspectrale. Différentes méthodes, développées dans le cadre du projet SEMAFOR, ont été testées (Finez *et al.* [35]) sur ces données pour supprimer la contribution de la couche limite turbulente.

La Fig. 6.28 montre les amplitudes modales identifiées par la technique décrite en Sec. 6.3.2, à la première FPP et en fonction des ordres azimutaux n et radiaux j pour les deux sens de propagation en aval (a) et en amont (b). Il est visible que les modes acoustiques se propageant vers l'aval sont plus énergétiques que ceux se propageant vers l'amont, indiquant que l'essentiel de l'énergie acoustique produite par la turbomachine à cette fréquence est absorbé par la terminaison anéchoïque, mais pas complètement. Le mode $(-3, 0)$ domine le champ acoustique dans le conduit à cette fréquence.



(a) (b)

FIGURE 6.28 – Décomposition modale à la première FPP de la turbomachine. Amplitudes modales du champ acoustique se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b).

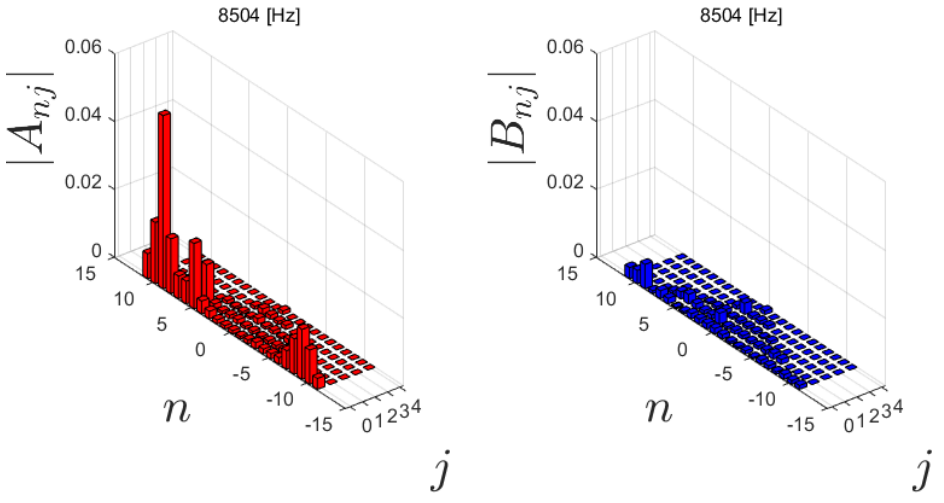


(a) (b)

FIGURE 6.29 – Décomposition modale à la deuxième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales du champ acoustique se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b).

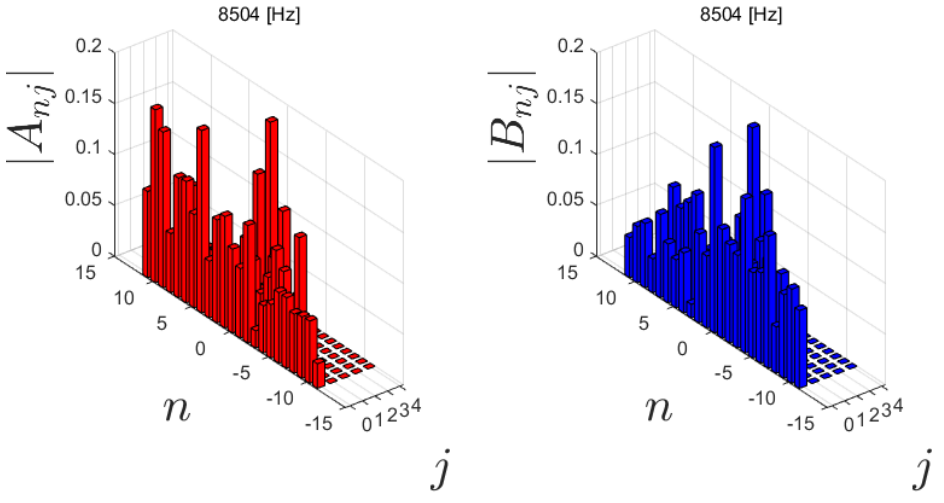
La décomposition modale réalisée pour la deuxième fréquence de passage des pales est présentée en Fig. 6.29. Le mode se propageant vers l'aval d'ordre -6 domine largement le champ acoustique. Selon le critère de Tyler et Sofrin, les modes d'ordres 11 et -12 sont générés mais sont coupés par le conduit. Le mode -6 est passant tant dans le conduit à section circulaire que dans le conduit à section annulaire et devient présent dans le champ mesuré dès qu'il est généré. L'hétérogénéité du stator ou la distorsion d'entrée d'air peuvent expliquer sa génération.

Pour la troisième fréquence de passage des pales, les Figs. 6.30 et 6.31 montrent les résultats



(a) (b)

FIGURE 6.30 – Décomposition modale à la troisième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales des champs acoustiques se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). Solution régularisée.



(a) (b)

FIGURE 6.31 – Décomposition modale à la troisième FPP de la turbomachine. Amplitudes modales des champs acoustiques se propageant vers l'aval (a) et vers l'amont (b). Solution non régularisée.

de la décomposition modale pour des solutions régularisées et non régularisées, respectivement. À cette fréquence, le nombre de modes à identifier devient comparable au nombre de microphones et l'inversion de la matrice modale est détériorée par un mauvais conditionnement. Il est visible que la solution non régularisée produit des amplitudes modales de même ordre de grandeur dans le sens de l'écoulement (Fig. 6.31-a) et dans le sens contraire (Fig. 6.31-b). Ce résultat est contre-intuitif et non réaliste, puisque le champ acoustique remontant l'écoulement devrait être fortement atténué par la terminaison anéchoïque. La solution régularisée (Fig. 6.30) permet d'obtenir de meilleurs résultats et de mieux préciser le contenu modal du champ de pression. Une décomposition modale prenant en compte uniquement les modes se propageant vers l'aval a également été réalisée à cette fréquence. Dans ce cas, le nombre d'inconnues est divisé par deux et le conditionnement de la matrice à inverser est significativement amélioré. Les résultats obtenus sont équivalents à ceux montrés en Fig. 6.30-a et valident ainsi la solution régularisée. La Fig. 6.30-a montre que parmi les modes les plus énergétiques, certains se détachent : les modes (5,0) et (5,1), qui sont attendus d'après le critère de Tyler et Sofrin et le mode (9,0) qui n'est pas prédit par la théorie mais domine pourtant le champ acoustique dans le conduit. Afin de déduire l'origine des coefficients modaux observés, il est intéressant d'évaluer la

cohérence inter-modale [16, 9]. La cohérence modale entre deux modes c_{nj} et $c_{n'j'}$ peut être calculée à partir de la matrice de covariance des coefficients modaux (Eq. 6.45) comme suit :

$$\gamma^2_{c_{nj}c_{n'j'}}(\omega) = \frac{\left|\hat{S}_{c_{nj}c_{n'j'}}(\omega)\right|^2}{\hat{S}_{c_{nj}c_{nj}}(\omega)\hat{S}_{c_{n'j'}c_{n'j'}}(\omega)}, \tag{6.50}$$

où $\hat{S}_{c_{nj}c_{n'j'}}$ est la matrice interspectrale entre les modes c_{nj} et $c_{n'j'}$ et $\hat{S}_{c_{nj}c_{nj}}$ est l'autospectre du mode c_{nj} avec n et j les ordres azimutaux et radiaux, respectivement. Comme l'ont montré Castres et Joseph [16], le degré de cohérence entre deux modes évalués à la fréquence d'une raie peut être utilisé pour distinguer le bruit d'interaction rotor-stator (pour lequel un fort niveau de cohérence est attendu) du bruit issu de l'interaction entre la distorsion d'entrée d'air et les pales du rotor.

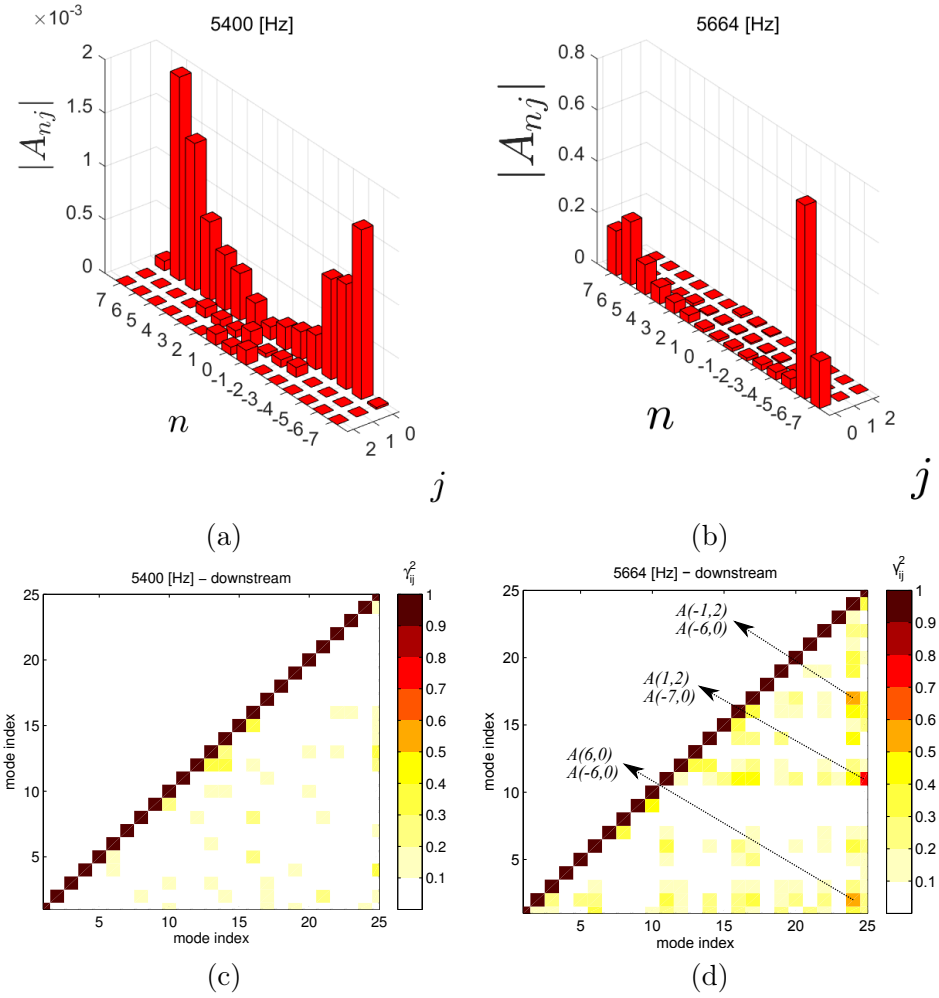


FIGURE 6.32 – Résultats de la décomposition modale. (a) : Coefficients modaux à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence 2FPP (5400 Hz). (b) : Coefficients modaux à la fréquence 2BPF (5664Hz). (c) : Cohérence modale à la fréquence $f = 5400$ Hz. (d) : Cohérence modale à la fréquence 2BPF.

Les cohérences modales obtenues aux deuxième et troisième fréquences de passage des pales sont illustrées en Figs. 6.32-d et 6.33-d. À des fins de comparaison, des résultats de cohérence modale sont également montrés à des fréquences légèrement plus basses que les harmoniques de FPP où le bruit à large bande domine (Figs. 6.32-b et 6.33-b). La cohérence modale calculée pour la deuxième et la troisième fréquences de passage des pales (Figs. 6.32-d et 6.33-d) montre des valeurs maximales de l'ordre de 60% à 70%. Les deux mécanismes (les distorsions d'entrée d'air et l'interaction rotor-stator) peuvent contribuer au bruit rayonné à ces fréquences tonales. Puisque le montage expérimental ne comportait pas de TCS, la distorsion d'entrée d'air est présente pour toutes les mesures. En comparant les résultats pour une fréquence proche de la raie 2FPP (bruit à large bande) et à la fréquence de la raie (bruit

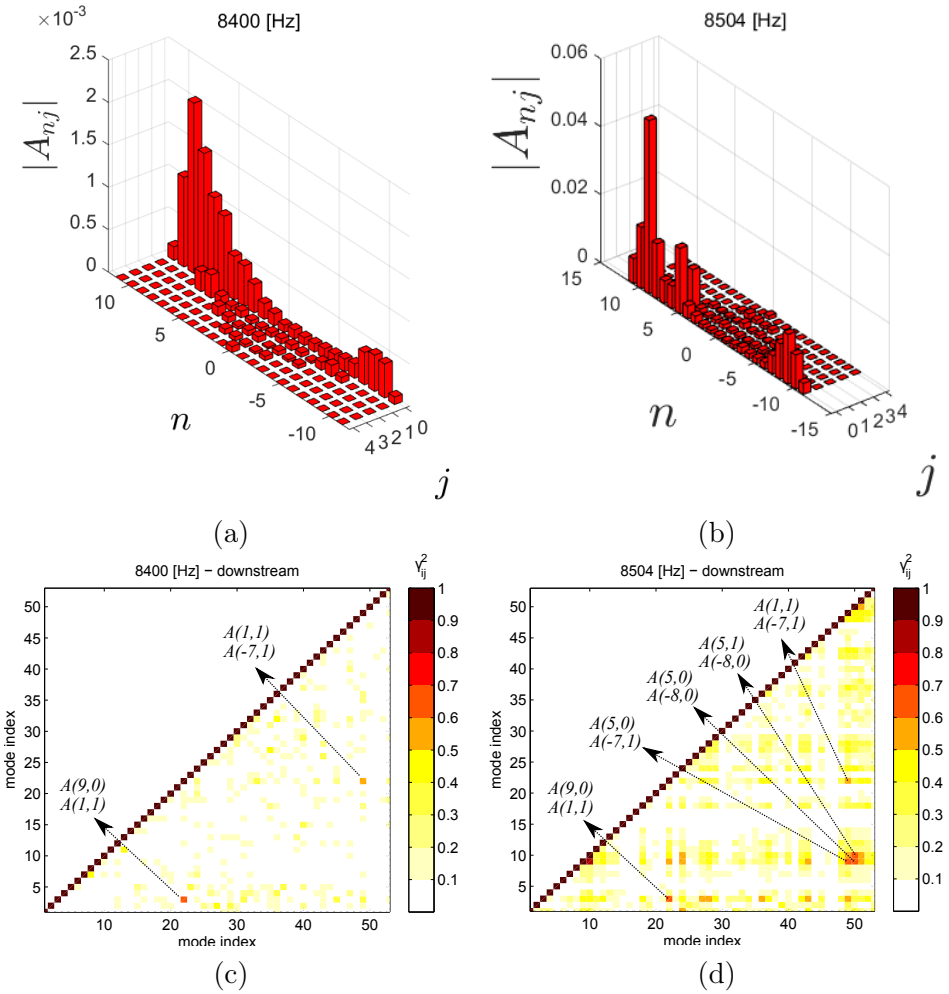


FIGURE 6.33 – Résultats de la décomposition modale. (a) : Coefficients modaux à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence 3FPP (5400 Hz). (b) : Coefficients modaux à la fréquence 3BPF (8504Hz). (c) : Cohérence modale à la fréquence $f = 8400$ Hz. (d) : Cohérence modale à la fréquence 3BPF.

tonal), l'émergence de fortes cohérences modales entre les modes [(1,2)(-7,0)], [(6,0)(-6,0)], et également [(-1,2)(-6,0)] est remarquée. Le mode (-6,0) proviendrait ainsi plutôt de l'interaction rotor-stator.

Pour la troisième fréquence de passage des pales (Fig. 6.33), il est visible qu'à une fréquence légèrement plus faible que la raie 3FPP, les couples de modes [(1,1)(-7,1)] et [(9,0)(1,1)] montrent une cohérence modale de l'ordre de 50% à 60%. Ces niveaux de cohérence ne sont pas augmentés à la fréquence de la raie, comme montré sur la Fig. 6.33-d. Ces modes ne semblent donc pas être générés par l'interaction rotor-stator. Par ailleurs, il y a une émergence d'autres couples de modes à la raie. Ainsi les modes [(5,0)(-7,1)], [(5,0)(-8,0)] et [(5,1)(-8,0)] liés à la génération des modes de Tyler et Sofrin (5,0) et (5,1) correspondent à une cohérence intermodale parmi les plus élevées.

6.3.3 Rétro-propagation numérique

Le but de cette section est de comparer les résultats expérimentaux issus de la décomposition modale mesurés dans le conduit à section circulaire, quelques mètres en aval de la turbomachine, aux prédictions issues du modèle analytique calculées dans le conduit à section annulaire, dans le voisinage de l'étage rotor-stator. Une méthode numérique visant à relier ces deux descriptions du champ acoustique est détaillée ici. Ce travail a été réalisé par MicrodB dans le cadre du projet SEMAFOR.

Le moyeu de la turbomachine se termine à 16 cm environ en aval du stator, comme cela est montré

sur la Fig. 6.34, et cette modification de la géométrie peut être responsable d'une réorganisation modale qui doit être évaluée. Cette restructuration peut être décrite en utilisant une matrice de diffusion, notée K, qui relie linéairement les amplitudes modales dans le conduit annulaire aux amplitudes modales dans le conduit circulaire, à une fréquence donnée.

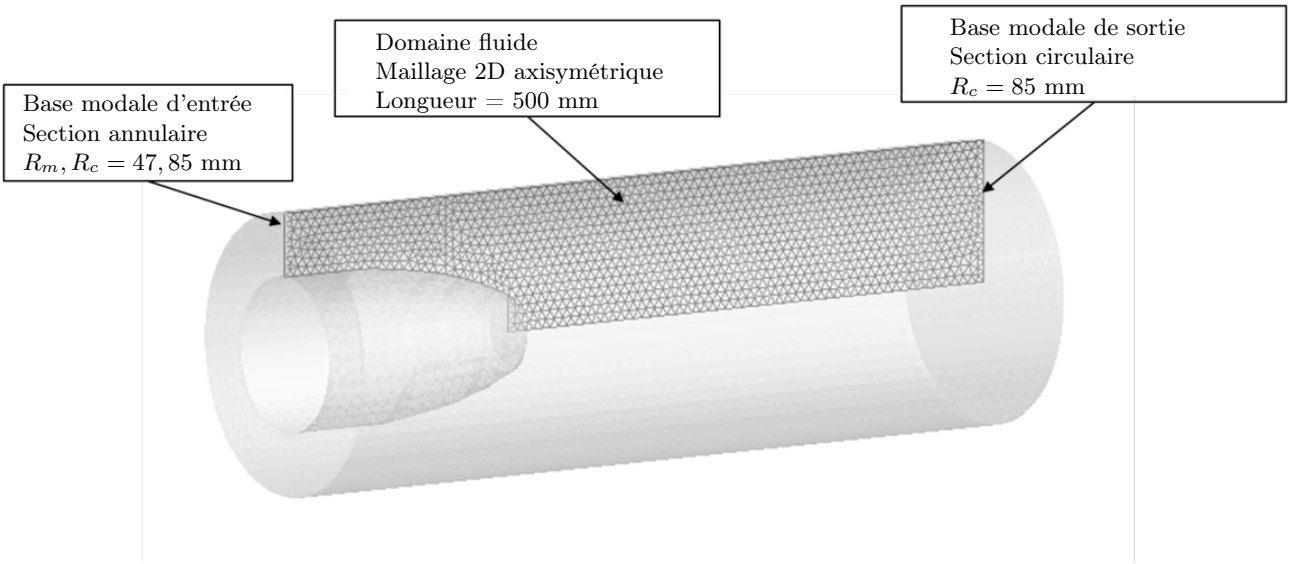


FIGURE 6.34 – Modélisation par éléments finis du conduit en aval de la turbomachine.

Calcul de la matrice de diffusion

La stratégie choisie est de calculer la matrice de diffusion au moyen d'un code de propagation acoustique basé sur la méthode des éléments finis. Ces calculs ont été réalisés aux trois fréquences de passage des pales pour une vitesse de rotation de 10000 tr/min. Un domaine bidimensionnel de 50 cm de long est maillé en tirant parti de la configuration axisymétrique. Des conditions de rigidité sont imposées sur toutes les surfaces du conduit. La fin du moyeu du banc d'essai est couverte d'un traitement acoustique, cependant ses caractéristiques d'impédance ne sont pas connues. Le moyeu est par conséquent considéré parfaitement rigide. Des conditions particulières sont appliquées aux sections d'entrée et de sortie du conduit pour éviter les problèmes de réflexion. L'effet de l'écoulement moyen n'a pas été pris en compte dans ces calculs, ce qui se justifie par la petitesse du nombre de Mach.

À la section d'entrée du conduit annulaire, des modes passants dont l'intensité est unitaire sont injectés séparément dans le domaine. Une résolution directe par le code numérique est utilisée pour calculer la décomposition modale à la section de sortie circulaire du conduit, produite par la restructuration modale liée à la transition annulaire/circulaire. Ce calcul peut être réitéré pour chaque fréquence sur la plage [0-12] kHz. Ainsi, pour chaque fréquence et pour chaque mode donné, la décomposition modale en sortie de conduit est prédite.

Un champ de pression acoustique représentatif de la procédure utilisée pour lequel un mode passant (0,1) est introduit dans la section d'entrée à la fréquence de passage des pales 2833 Hz est présenté en Fig. 6.35. Il illustre ainsi la possible réorganisation du champ de pression dû à la transition entre les portions de conduit annulaire et circulaire. Dans la section de sortie circulaire, le champ acoustique est bien plus complexe que dans la section d'entrée et montre que plus d'un mode passant est présent. Il est également possible que certains modes passants dans la section annulaire deviennent coupés dans le conduit à section circulaire. Dans ce cas, ces modes sont réfléchis par la transition. Ces modes, ainsi que les modes déjà coupés dans le conduit à section annulaire, peuvent ne pas être rétro-propagés par cette technique. La détection modale en aval de la turbomachine ne permet pas de remonter à l'amplitude des modes générés par l'étage rotor-stator et coupés ensuite par le conduit.

Produire autant de simulations que le nombre de modes passants dans le conduit annulaire permet

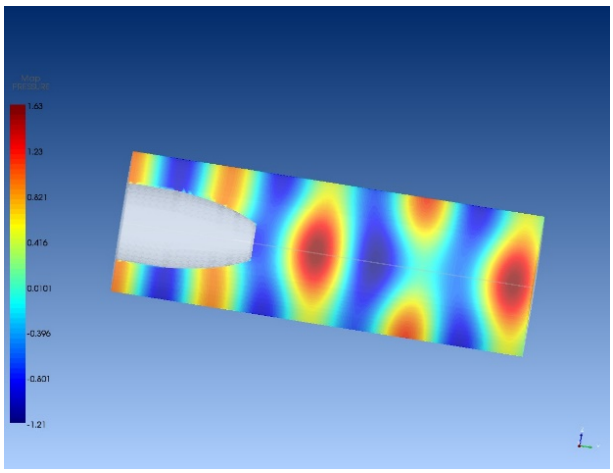


FIGURE 6.35 – Exemple de champ acoustique simulé sous l'excitation du mode plan dans la section d'entrée annulaire.

d'assembler la matrice de diffusion directe à la première FPP (2833 Hz), illustrée de manière synthétique en Fig. 6.36 avec une dynamique de 20 dB. L'amplitude des modes en sortie de section (lignes) en fonction des modes en entrée de section (colonnes), d'amplitude unitaire (0 dB) est illustrée. La matrice est composée de valeurs complexes (décrivant le déphasage entre les modes) mais seule l'amplitude modale est représentée ici. Les modes d'ordres $(n,\ j)$ sont classés de manière croissante selon leur fréquence de coupure. Dans cette section, l'ordre radial commence à $j = 1$ et non plus $j = 0$.

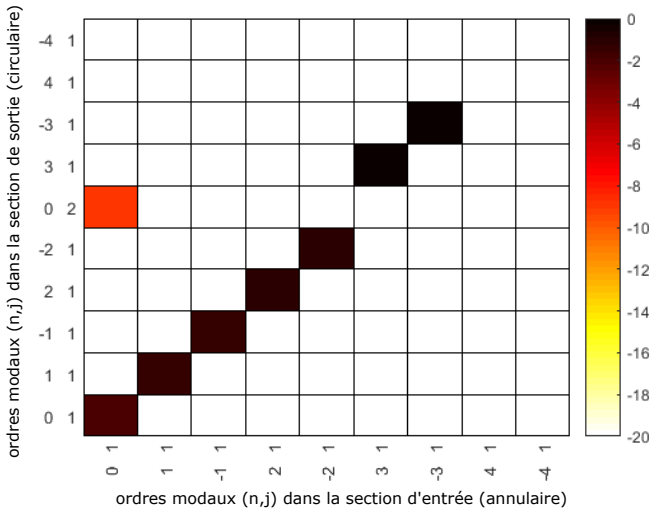


FIGURE 6.36 – Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la première FPP.

À la FPP, sept modes sont passants dans le conduit annulaire (jusqu'aux modes $[\pm 3,\ 1]$) et huit modes le sont dans le conduit cylindrique. La partie correspondant aux modes (4,1) et (-4,1) ne sera pas considérée, représentant les premiers modes coupés. Cette matrice peut être vue comme étant parcimonieuse à cause de la condition de conservation de l'ordre modal azimutal : puisque la configuration est axisymétrique, un mode introduit d'ordre n sera redistribué sur d'autres modes de même ordre azimutal n. À la première FPP, dans les conduits à section annulaire et circulaire, un seul mode est passant pour un ordre azimutal donné. Cela force la matrice à être pseudo-diagonale : chaque mode $(n,\ j)$ dans le conduit annulaire est redistribué sur un seul mode de mêmes ordres $(n,\ j)$. La seule exception est pour le mode plan $(0, 1)$ puisque les modes $(0,\ 1)$ et $(0,\ 2)$ sont passants dans le conduit à section circulaire. La même procédure est appliquée à la deuxième fréquence de passage des pales à 5666 Hz. La matrice de diffusion obtenue est présentée en Fig. 6.37. La matrice est de plus grande taille que

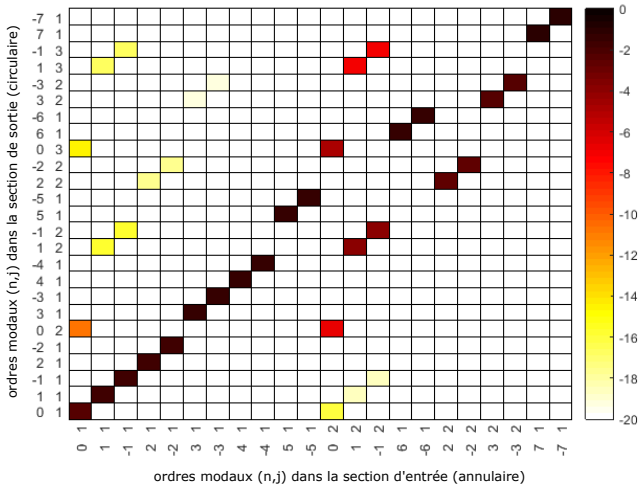


FIGURE 6.37 – Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la deuxième FPP.

pour la première FPP puisque de nouveaux modes sont désormais passants. Comme précédemment, la matrice est parcimonieuse et la restructuration modale ne s'opère qu'entre modes de même ordre azimutal. Il est intéressant de noter que le mode (0,2) est davantage redistribué sur le mode (0,3) (-3 dB) que sur le mode (0,2) (-8 dB). Les modes dont l'ordre azimutal est le plus faible sont également plus redistribués que les autres.

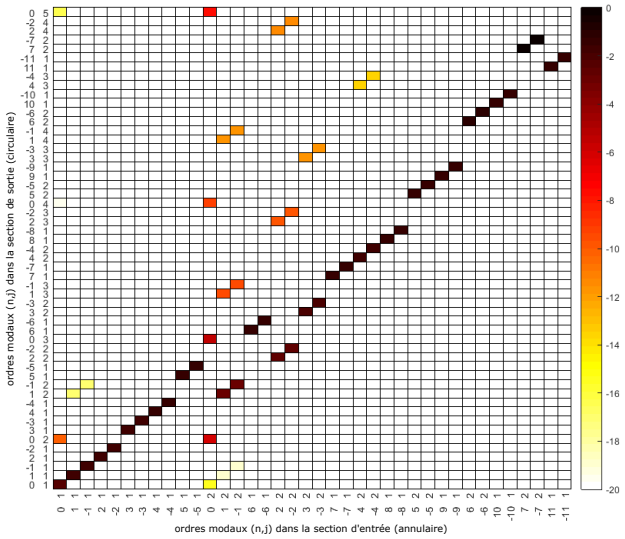


FIGURE 6.38 – Matrice de diffusion directe K de la transition annulaire/circulaire pour la troisième FPP.

La matrice de diffusion à la troisième FPP (8500 Hz) est illustrée en Fig. 6.38. La redistribution modale apparaît principalement pour les modes d'ordre radial $n = 2$. Finalement, il n'y a eu aucun cas, pour les trois FPP, où un mode passant dans le conduit à section annulaire est totalement réfléchi par la transition de fin de moyeu.

Inversion de la matrice de diffusion

La rétro-propagation permettant de transposer l'analyse modale obtenue dans le plan de mesure vers le plan des sources est détaillée dans cette partie. Une fois que les matrices de diffusion directe K sont obtenues, la matrice pseudo-inverse K^{-1} est calculée. Cette inversion ne provoque pas de problème

théorique puisque la matrice est pseudo-diagonale et extrêmement bien conditionnée : les nombres de conditionnement sont très proches de 1 comme le montre la Tab. 6.1. Par conséquent, la formulation de Moore-Penrose est utilisée pour inverser la matrice de diffusion sans technique de régularisation. Il a également été vérifié que les modes injectés dans la section annulaire sont correctement reconstruits par la rétro-propagation de signaux de microphones simulés dans la section circulaire du conduit en aval de la transition annulaire/circulaire.

Fréquence (Hz)	κ(K)
2833 Hz (1 FPP)	1.19
5666 Hz (2 FPP)	1.18
8500 Hz (3 FPP)	1.24

TABLE 6.1 – Nombre de conditionnement κ de la matrice de diffusion directe K aux fréquences de passage de pales.

Résultats expérimentaux

La technique de rétro-propagation numérique est appliquée ici à la décomposition modale expérimentale détaillée en Sec. 6.3.2. Pour chaque fréquence de passage des pales, la matrice interspectrale modale $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{cc}}$ est calculée pour un plan de mesure dans le conduit circulaire. Cette matrice est ensuite décomposée en valeurs singulières :

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{cc}} = \mathbf{U}\lceil\mathbf{S}\rfloor\mathbf{U}^H, \tag{6.51}$$

où $\lceil\mathbf{S}\rfloor$ est la matrice diagonale contenant les valeurs singulières et $\mathbf{U}$ une matrice rectangulaire unitaire. Ceci permet de calculer les composantes singulières C :

$$C_i = \sqrt{s_i}U_i, \tag{6.52}$$

où C_i est la i-ème composante singulière, $s_i = S(i,i)$ est la i-ème valeur singulière et U_i le i-ème vecteur singulier (i-ème colonne de la matrice U). Chaque composante singulière est traitée séparément en utilisant la matrice inverse de diffraction et la matrice interspectrale modale est reconstruite dans la section annulaire à partir de chaque composante rétro-propagée. Seuls les modes se propageant vers l'aval, détectés par l'antenne de microphones, sont considérés. Toutes les composantes singulières sont conservées mais leur énergie décroit rapidement en fonction de l'ordre de la valeur singulière, comme le montre la Fig. 6.39. Ainsi, la première composante est 10 dB plus élevée que les autres. Ce comportement est attendu aux fréquences de passage des pales puisque les phénomènes qui produisent du bruit tonal sont en théorie parfaitement cohérents.

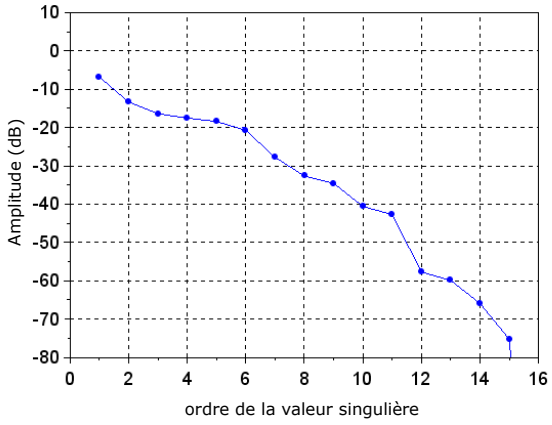


FIGURE 6.39 – Valeurs singulières de la matrice insterspectrale modale à la première fréquence de passage des pales, en dB.

Les composantes singulières rétro-propagées sont calculées par la relation $D_i = K^{-1}C_i$ et la matrice insterpectrale modale dans la base modale annulaire $\widehat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}}$ est construite à partir de ces composantes :

$$\widehat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}} = \mathbf{D}\mathbf{D}^H. \tag{6.53}$$

Les amplitudes des éléments diagonaux des matrices $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{cc}}$ et $\widehat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}}$ sont présentés en Fig. 6.40 pour la première FPP. Cette comparaison montre l'influence de la transition annulaire/circulaire sur la décomposition modale obtenue d'après les résultats expérimentaux. Bien que non négligeable, cet effet peut être considéré faible puisque la plupart des amplitudes modales ne sont modifiées que de quelques dB. Ceci peut être relié à la structure pseudo-diagonale de la matrice de diffusion K dont les éléments diagonaux ont des amplitudes proches de l'unité. En revanche, le mode (0,2) est coupé dans la section annulaire, ainsi aucune énergie acoustique n'est obtenue pour ce mode dans cette section du conduit. Ces amplitudes pourront être directement comparées aux modèles analytiques du bruit d'interaction rotor-stator.

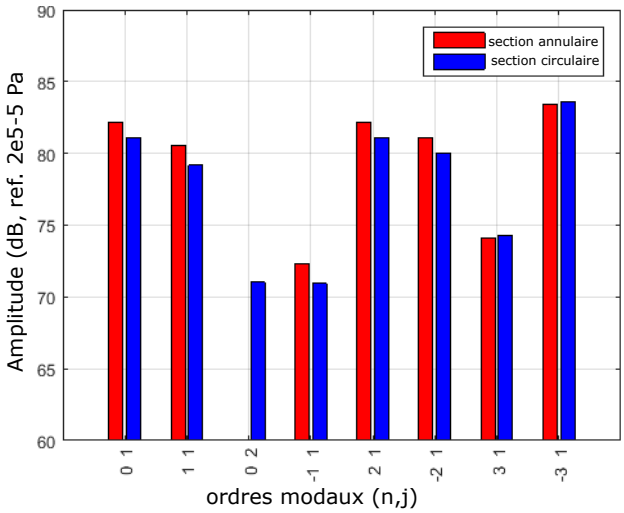


FIGURE 6.40 – Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (2833 Hz).

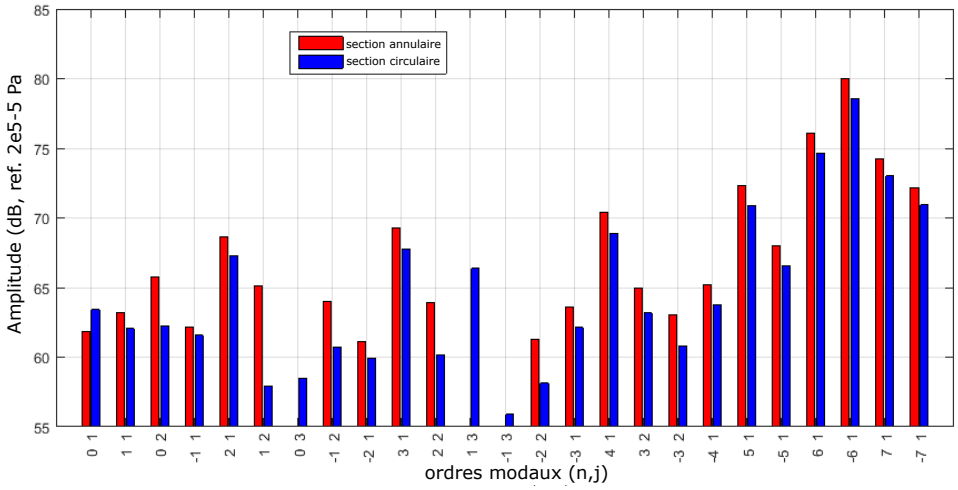


FIGURE 6.41 – Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (5666 Hz).

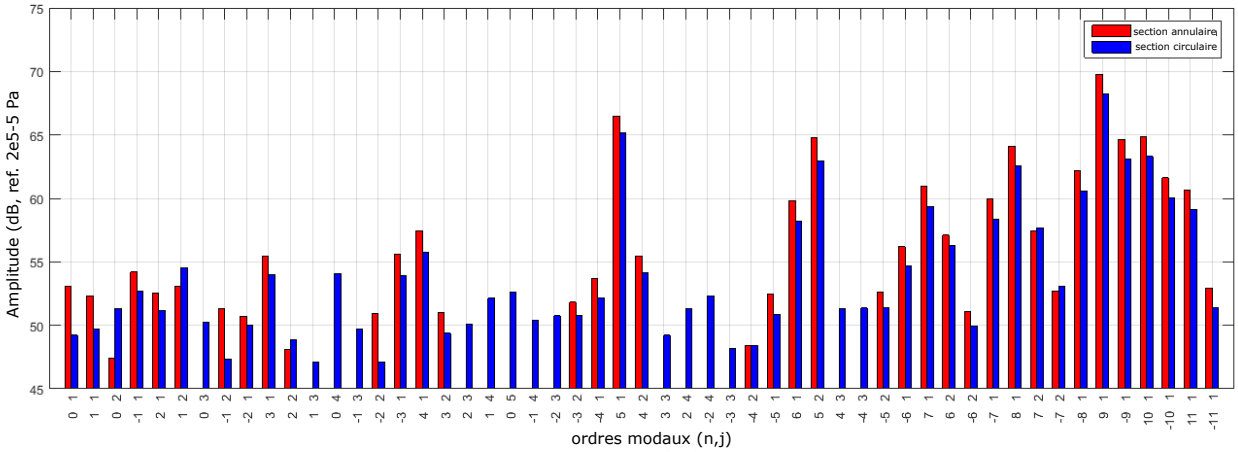


FIGURE 6.42 – Comparaison entres les amplitudes des modes passants dans le conduit à section annulaire (barres rouges) et dans le conduit à section circulaire (barres bleues) pour la première fréquence de passage des pales (8500 Hz).

Les résultats correspondant aux deuxième et troisième fréquences de passage des pales sont présentés en Figs. 6.41 et 6.42. Les amplitudes modales sont globalement plus élevées dans le conduit à section annulaire que dans le conduit à section circulaire. Ceci est attribuable à la réflexion qui se produit à la transition annulaire/circulaire. Enfin, plus l'harmonique de la FPP augmente et plus des modes coupés sont observés dans la section annulaire et passants dans le conduit circulaire.

6.3.4 Comparaison entre le modèle analytique et les mesures

Cette section a pour but de présenter une méthode permettant de comparer les résultats issus de la campagne de mesures effectuée sur le banc SEMAFOR du LMFA avec le modèle de raccordement modal en prenant en compte les effets d'hétérogénéité du stator liés à la plus grande épaisseur de certaines aubes. Le modèle analytique se propose de quantifier la différence de rayonnement acoustique apportée par des aubes dont la géométrie est changée. Un des intérêts de la comparaison est de pouvoir estimer un taux d'hétérogénéité, inconnu *a priori*, caractérisant les aubes structurelles/modifiées. Les résultats issus de la campagne d'essai et les techniques de décomposition modales et de rétro-propagation développées ont été détaillés dans les Secs. 6.3.2 et 6.3.3. Par ailleurs, il est très important de rappeler que cette campagne de mesures a été réalisée avant la conception du TCS (*Turbulence Control Screen*) présenté en section 6.1. Grâce à des mesures préliminaires, il a été montré qu'en réduisant le tourbillon d'aspiration, le bruit d'interaction rotor/stator était fortement diminué, de 10 dB sur la première raie, tout en réduisant la largeur spectrale de la raie à sa base. Pour autant, aux deux premières FPP, les raies normalement coupées par le conduit sont toujours présentes malgré l'installation du TCS. En conclusion, bien que l'émergence des deux premières raies soit en partie provoquée par l'hétérogénéité du stator, la distorsion d'entrée d'air y contribue de façon importante. Néanmoins elle n'est pas modélisée dans l'approche analytique proposée. De fait, les comparaisons entre mesures et modèle sont donc présentées à titre indicatif afin d'assoir la méthodologie, mais nécessiteront ultérieurement une nouvelle campagne de mesures afin d'obtenir des résultats quantitatifs.

Technique de décomposition modale

Le développement qui suit sera effectué pour l'exemple avec les résultats liés à la troisième fréquence de passages de pales. À partir des techniques de décomposition modale, la matrice inter-spectrale modale est considérée pour chaque FPP (notée $\hat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}}$ dans l'Eq. (6.53)), après rétro-propagation numérique depuis le plan de mesure jusqu'à un plan fixé au bord de fuite des aubes du stator. Cette matrice est illustrée en Fig. 6.43 pour la troisième fréquence de passage de pales.

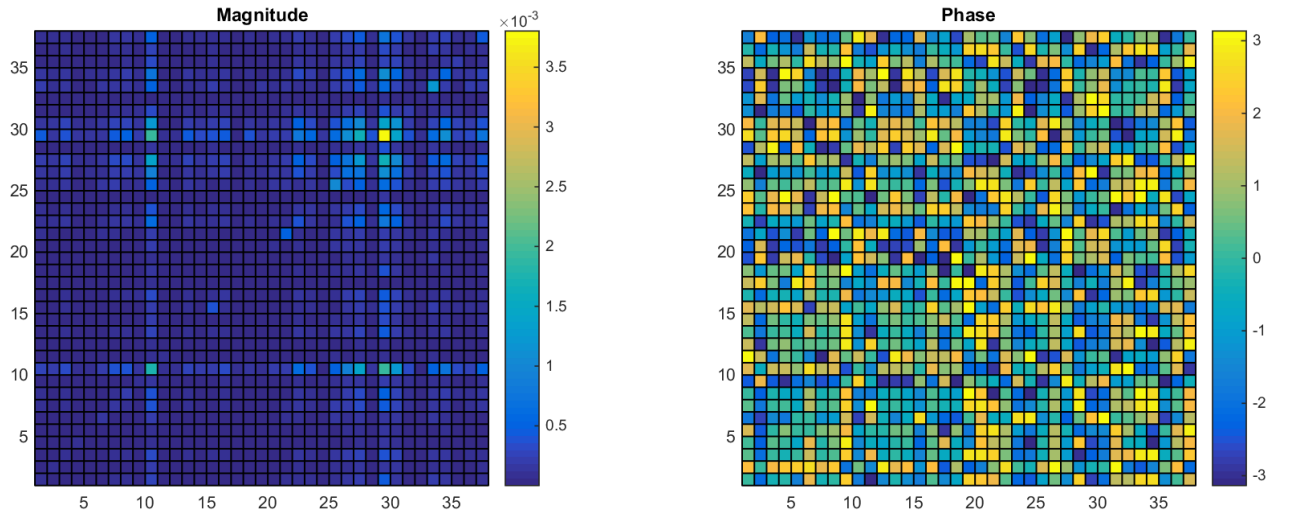


FIGURE 6.43 – Amplitude et phase de la matrice interspectrale modale $\hat{\mathbf{S}}^a_{\mathbf{cc}}$ pour la 3ème FPP.

Les termes diagonaux indiquent la variance des modes tandis que les termes extra-diagonaux représentent la covariance entre modes. Les modes les plus énergétiques sont en jaune, comme le mode d'ordres azimutal n et radial j $(9,0)$ d'indice 29 et le mode $(5,0)$ d'indice 10.

Cette matrice est ensuite décomposée en valeurs singulières et les composantes singulières $C_i = \sqrt{s_i}U_i$ sont calculées. La Fig. 6.44 représente l'amplitude de la valeur singulière en fonction de son ordre, pour la troisième FPP. Cette amplitude est représentative de l'énergie acoustique portée par la valeur singulière. Seule la première valeur singulière, dont l'amplitude est nettement supérieure aux autres, est conservée.

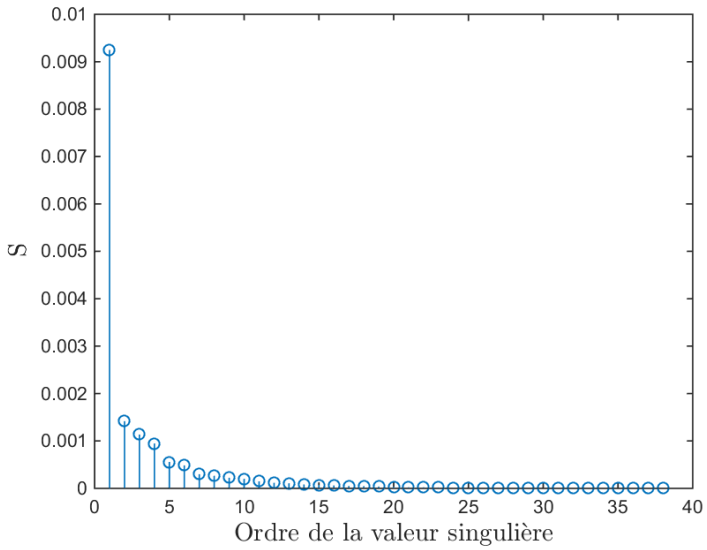


FIGURE 6.44 – Valeurs singulières s_i pour la troisième FPP.

La valeur absolue de la première composante singulière C_1, pour la troisième fréquence de passage des pales est illustrée en Fig. 6.45. Elle indique l'amplitude modale du champ de pression. Les modes les plus énergétiques $(9,0)$ d'indice 29 et $(5,0)$ d'indice 10 sont retrouvés.

La Fig. 6.46 représente la valeur absolue des coefficients modaux $|p_{nj}|$ pour la troisième FPP. Il s'agit simplement d'une réorganisation de la composante singulière C_1 en fonction des ordres modaux. Les modes les plus énergétiques sont les modes (9,0), (5,0), (5,1) ainsi que le mode (-9,0).

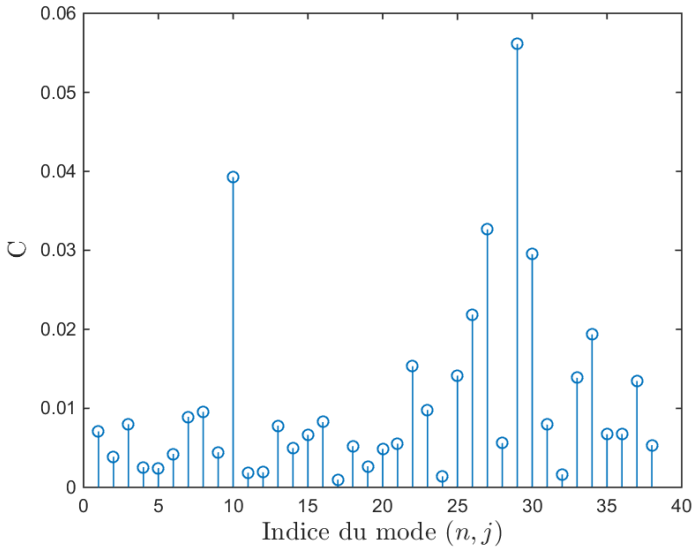


FIGURE 6.45 – Valeur absolue de la première composante singulière C_1 pour la troisième FPP.

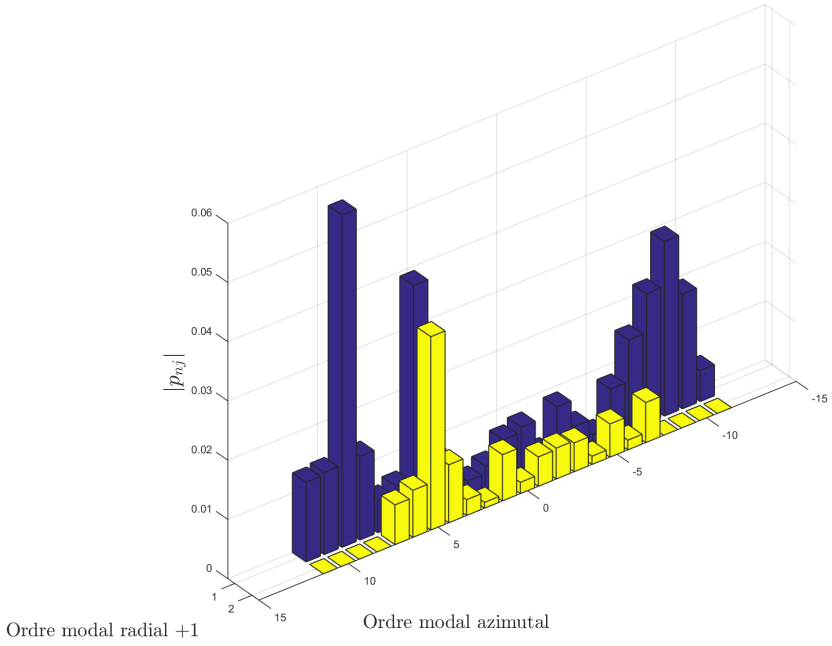


FIGURE 6.46 – Valeur absolue des coefficients modaux $|p_{nj}|$ pour la troisième FPP.

Comparaison sur la puissance acoustique

La comparaison entre mesure et modèle a été réalisée sur la puissance acoustique modale. Le modèle analytique adapté pour la prise en compte de l'hétérogénéité du stator est uniquement bidimensionnel, tandis que les mesures, après décomposition modale et rétro-propagation, permettent d'obtenir les coefficients modaux azimutaux et radiaux du champ de pression au bord de fuite du stator. La puissance acoustique générée est portée uniquement par les modes passants, ceux-ci détectés par l'antenne de microphones, tandis que les modes coupés sont atténués avant d'être mesurés. Afin de permettre la comparaison, les puissances acoustiques modales radiales mesurées sont sommées pour chaque ordre azimutal. Dans un cadre tridimensionnel, le champ acoustique dans un conduit annulaire avec un écoulement purement axial peut s'écrire de la façon suivante :

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} p_{nj}^{\pm} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{\pm}x} \tag{6.54}$$

où p_{nj} représente les coefficients modaux du champs de pression, $k_{nj}^{\pm}$ le nombre d'onde axial et $f_{nj}(r)$ la fonction de forme radiale. Le signe + ou − correspond au sens de propagation de l'onde par rapport aux x positifs. La puissance acoustique $\mathcal{P}_{3D}$ associée s'écrit (annexe C) :

$$\mathcal{P}_{3D} = \pm \frac{\pi R_c^2 k \beta^4}{Z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\overline{k_{nj}^{\pm}}}{\left(k \mp \overline{k_{nj}^{\pm}} M\right)^2} |p_{nj}^{\pm}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nj}^{\pm}} \in \mathbb{R}. \tag{6.55}$$

où R_c est le rayon au carter, $Z_0 = \rho_0 c_0$ et $\overline{k_{nj}^{\pm}} = \sqrt{k^2 - \beta^2 K_{nj}^2}$ la partie propagative du nombre d'onde axiale. Dans l'approche bidimensionnelle du modèle analytique, le problème porte sur le potentiel et non pas sur la pression acoustique. Dans ce cadre, le champ acoustique potentiel s'écrit :

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n^{\pm} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/R_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^{\pm}x} \tag{6.56}$$

où R_0 est le rayon de la coupe cylindrique, supposé égal au rayon au carter du conduit. La puissance acoustique $\mathcal{P}_{2D}$ associée s'écrit (annexe C) :

$$\mathcal{P}_{2D} = \pm k Z_0 \pi R_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{k_n^{\pm}} \, |\phi_n^{\pm}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_n^{\pm}} \in \mathbb{R}. \tag{6.57}$$

La puissance acoustique n'est portée que par les modes acoustiques passants et elle est indépendante de la phase axiale. De même, elle ne dépend que du rayon au carter (en 3D) ou de la coupe cylindrique effectuée (en 2D).

Comparaison pour la première FPP

La comparaison est tout d'abord effectuée pour la première fréquence de passage de pales, à 2833 Hz (Fig. 6.47). Dans un cadre purement homogène et sans distorsion, aucun mode passant ne devrait être généré. Pourtant, 7 modes azimutaux ($n \in [-3, 3]$) sont mesurés par l'antenne de microphones en aval de l'étage rotor/stator. Dans cette configuration, seules les composantes hétérogènes du modèle sont présentes. Un taux d'hétérogénéité arbitraire τ est fixé à 0.5 pour s'approcher des résultats expérimentaux. Tout d'abord, dans le modèle analytique, le mode plan $n = 0$ n'est pas généré. En effet, les aubes du stator étant alignées avec l'axe de l'écoulement, les sources dipolaires équivalentes rayonnent perpendiculairement à cet axe et ne contribuent pas au mode plan, comme l'illustre la Fig. 6.13. Il a été montré que si les aubes ont un angle de calage non nul, le mode $n = 0$ est régénéré (Sec. 2.7). Les niveaux de puissance sont compris entre 50 et 65 dB pour les résultats expérimentaux comme pour ceux du modèle. Les écarts de puissances modales entre mesures et modèle s'échelonnent entre 2 et 15 dB. Globalement, le modèle prévoit une puissance modale d'autant plus importante que l'ordre azimutal est élevé, pour les modes -3 et 3 ce qui n'est pas le cas dans les mesures.

Comparaison pour la seconde FPP

La Fig. 6.48 représente la puissance acoustique pour chaque mode (azimutal et radial) mesurée et rétro-propagée au bord de fuite du stator à la seconde fréquence de passage des pales (5666 Hz). À cette fréquence, des modes d'ordres radiaux supérieurs deviennent passants, dont la puissance acoustique est parfois plus importante que celle des modes d'ordre radial nul. Les contributions pour chaque mode azimutal sont sommées pour être comparées avec le modèle analytique.

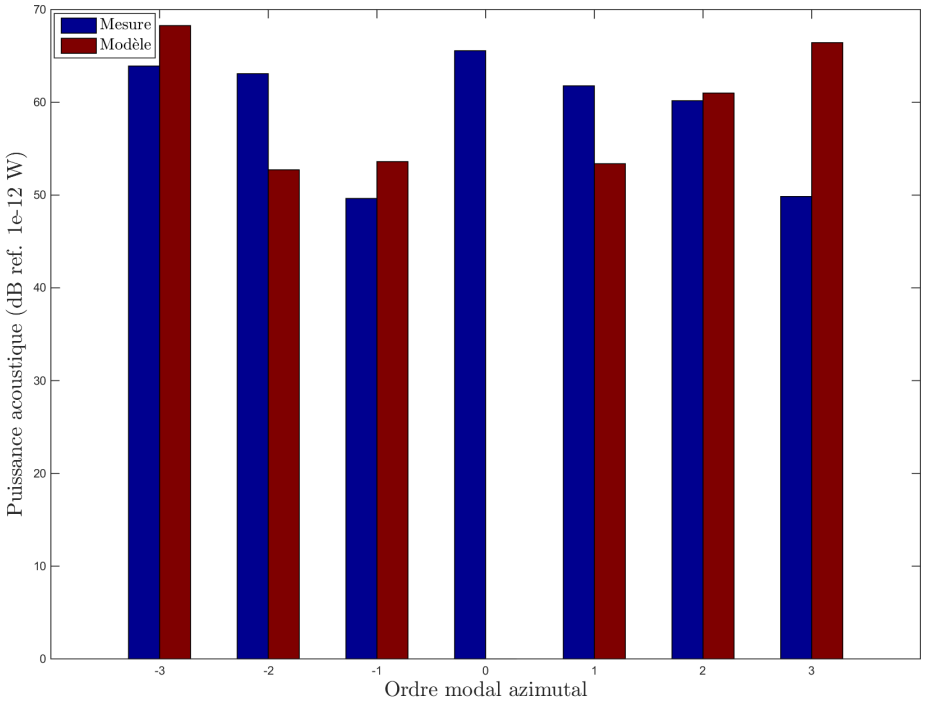


FIGURE 6.47 – Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles ($f = 2833$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 0.5.

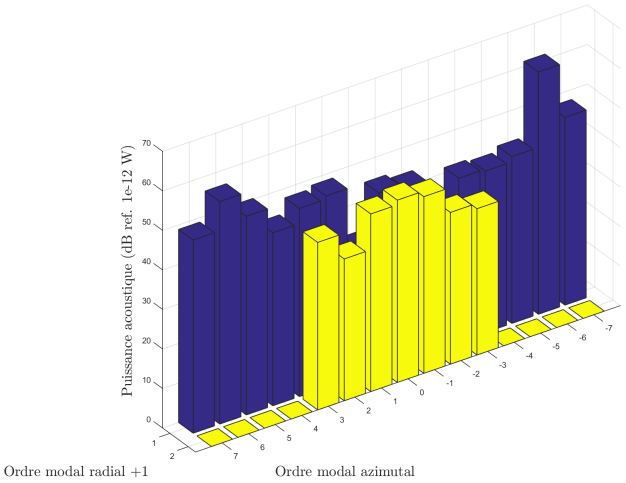


FIGURE 6.48 – Puissance acoustique modale azimutale et radiale issue des résultats expérimentaux pour la 2ème FPP (5666 Hz).

Comme précédemment, à la deuxième FPP, seules les contributions hétérogènes participent à la génération du bruit. Le premier mode de Tyler et Sofrin, d'ordre 11, est coupé par le conduit. Quinze modes azimutaux passants ($n \in [-7, 7]$) sont mesurés par l'antenne de microphones. La Fig. 6.49 rassemble les puissances acoustiques modales mesurées et issues du modèle de raccordement modal. La puissance acoustique modale est plus faible que pour la première FPP, variant entre 35 et 60 dB. Le mode d'ordre -6 est le plus puissant, dépassant les 60 dB. Le taux d'hétérogénéité à cette fréquence est fixé à $\tau = 1$. Les écarts entre mesures et modèle s'échelonnent entre 2 et 10 dB. De même, le mode plan n'est pas généré par le modèle.

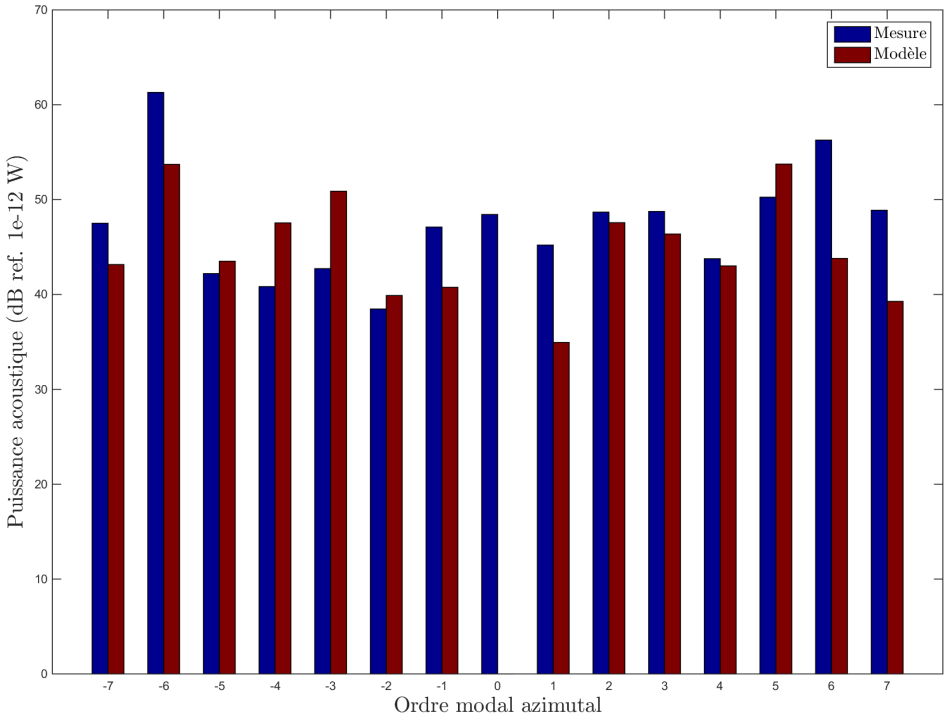


FIGURE 6.49 – Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles ($f = 5666$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 1.

Comparaison pour la troisième FPP

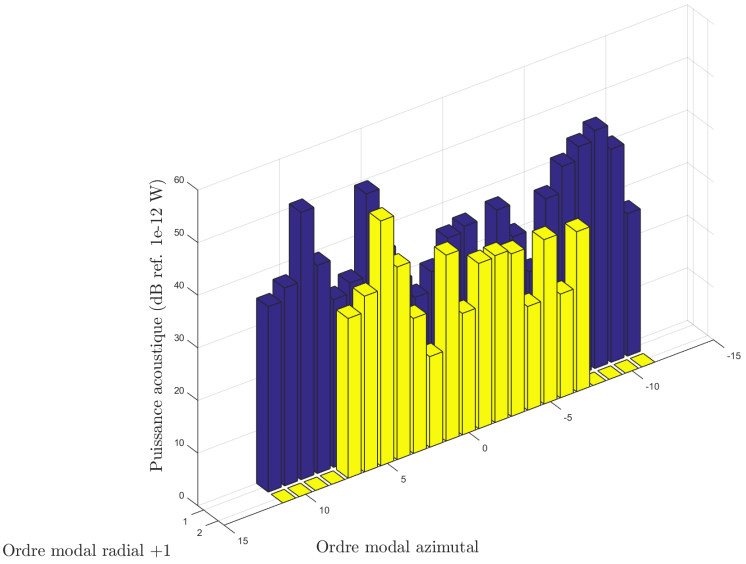


FIGURE 6.50 – Puissance acoustique modale azimutale et radiale issue des résultats expérimentaux pour la 3ème FPP (8500 Hz).

La Fig. 6.50 représente les puissances modales acoustiques mesurées pour la troisième FPP. Le mode azimutal +5 est prédit par la règle de Tyler et Sofrin pour un stator homogène. Il s'agit de la seule contribution qui n'est pas attribuée à des effets d'hétérogénéité, qu'ils soient dus à la distorsion d'entrée d'air ou des aubes de stator épaissies. Les modes $(5, 0)$ et $(5, 1)$ sont prépondérants dans le

spectre de puissance acoustique modale.

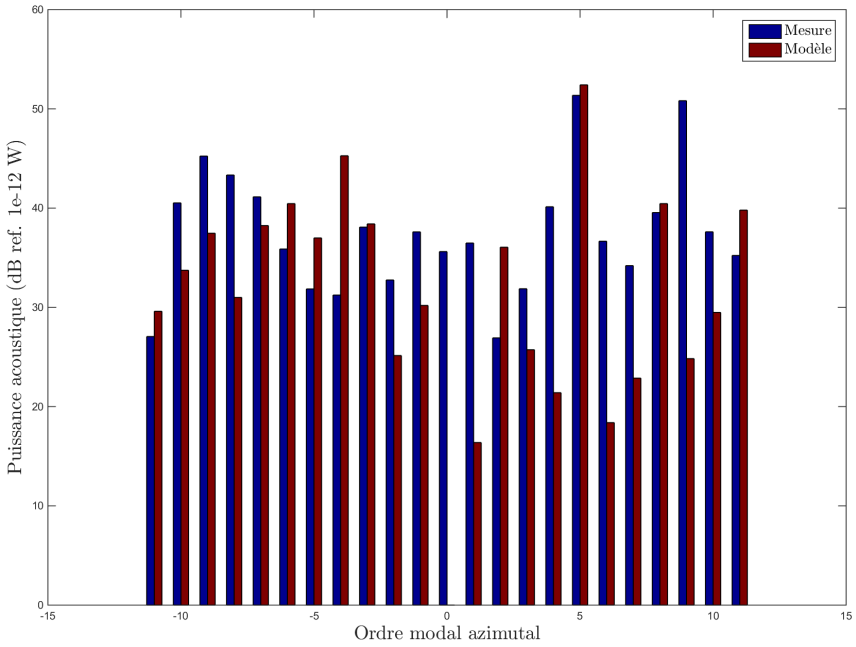


FIGURE 6.51 – Puissance acoustique modale, issue des résultats expérimentaux (en bleu) et du modèle analytique (en rouge) pour un champ acoustique généré par 3 dipôles ($f = 8500$ Hz, $W_x = 36$ m/s, aubes 1, 9, 16) placés devant une grille d'aubes ($V = 23$). Le taux d'hétérogénéité τ est égal à 8.

La Fig. 6.51 montre la comparaison entre les résultats issus de la campagne de mesure et du modèle analytique. Les niveaux de puissance acoustique modale sont les plus faibles mesurés et varient entre 28 et 50 dB. Le taux d'hétérogénéité fixé est de 8, ce qui est nettement plus important que pour les deux autres fréquences. Les écarts de puissance entre mesure et modèle s'échelonnent entre 2 et 25 dB. 23 modes sont passants ($n \in [-11, 11]$) et les plus énergétiques sont le mode +5 attendu par la règle de Tyler et Sofrin, pour lequel l'écart entre mesure et modèle est de l'ordre du décibel, ainsi que le mode +9 qui n'est pas du tout prédit par le modèle, sous-estimé de 25 décibels. Ce mode semble être produit par la distorsion d'entrée d'air et non pas par les aubes de stator épaissies.

Cette observation est en accord avec l'analyse de la cohérence intermodale des coefficients modaux estimés expérimentalement, présentée dans en Sec. 6.3.2. D'après les résultats sur la Fig. 6.33 les modes (9,0) et (1,1) ne semblent pas excités par l'interaction rotor-stator, mais plutôt par la distorsion d'entrée d'air. Une nouvelle campagne expérimentale sur le banc d'essai SEMAFOR en présence d'un TCS devra être menée pour tester cette hypothèse.

Détermination du facteur d'hétérogénéité

L'absence de TCS n'a pas permis d'obtenir des résultats expérimentaux où le bruit d'interaction rotor-stator est isolé, afin de comparer plus précisément la puissance acoustique prédite par le modèle analytique et celle mesurée par l'antenne acoustique puis rétro-propagée. Les comparaisons précédentes ont été réalisées de manière sommaire en modifiant simplement le facteur d'hétérogénéité. Une technique plus précise reste à définir et une première approche suggère le recours à des fonctions coût qu'il s'agirait de minimiser. Dans ce cadre, la puissance acoustique issue des mesures est notée $\mathbf{P}_e$, en sommant toutes les contributions radiales pour un ordre azimutal. Il s'agit d'un vecteur de dimension égale au nombre de modes azimutaux passants. La puissance acoustique générée par la grille d'aubes homogène est notée $\mathbf{P}_h$ et celle générée par le réseau de dipôles hétérogènes est notée $\mathbf{P}_\tau$. Ces trois vecteurs sont de même dimension. La détermination du facteur d'hétérogénéité revient à minimiser

une fonction coût selon la variable $\tau \in \mathbb{C}$, à chaque fréquence :

$$\mathbf{J}(\tau) = \mathbf{P}_e - (\mathbf{P}_h + \tau \mathbf{P}_\tau)\,. \tag{6.58}$$

Cette fonction vectorielle représente un ensemble de fonctions coût à minimiser pour chacun des ordres modaux azimutaux. Si la variable $i \in [-n_s, n_s]$ représente l'indice de l'ordre modal azimutal, alors l'Eq. (6.58) s'écrit :

$$J^i(\tau) = \mathcal{P}_e^i - \left(\mathcal{P}_h^i + \tau \mathcal{P}_\tau^i\right). \tag{6.59}$$

Le facteur d'hétérogénéité obtenu pour une fréquence donnée $\tilde{\tau}(\omega)$ est alors le minimiseur de la fonction coût :

$$\tilde{\tau}(\omega) = \inf\{\mathbf{J}(\tau) : \tau \in \mathbb{C}\}\,. \tag{6.60}$$

Afin de prendre en compte plus finement la spécificité du problème, cette fonction coût vectorielle peut être recomposée en une somme pondérée des fonctions pour chacun des ordres i. Cette pondération permet de privilégier l'identification de certains modes prépondérants, comme ceux prédits par le critère de Tyler et Sofrin. La puissance acoustique étant réelle, cette fonction coût ne permet pas d'obtenir la phase du facteur d'hétérogénéité. Cette composante devient accessible si la fonction coût s'appuie sur la pression acoustique complexe et non plus sur la puissance. Cependant, un soin tout particulier doit être accordé au calcul de la distance entre le plan de mesure et le plan de comparaison, puisque la pression est dépendante de la phase axiale, au contraire de la puissance acoustique.

6.4 Conclusion

Comme précisé en introduction, le stator du banc d'essai SEMAFOR comporte trois aubes épaissies pour des raisons structurelles, rompant la régularité et l'homogénéité de l'étage. Par conséquent, outre son intérêt propre, cette configuration est représentative des nouvelles architectures de turboréacteurs à double flux à très haut taux de dilution ($\sim 12 - 15$), dont certaines aubes du stator redresseur sont également modifiées pour assurer la fonction de bras support entre la nacelle et les étages du circuit primaire. Des essais préliminaires sur le banc SEMAFOR ont montré que bien qu'importante, la contribution acoustique de la distorsion d'entrée d'air ne constitue pas l'unique source de bruit périodique présente aux deux premières fréquences de passage des pales, normalement coupées par le conduit. En effet, comme cela a été montré, la présence du TCS ne supprime pas complètement l'émergence des deux premières raies d'interaction. Une modélisation de l'hétérogénéité du stator, nécessaire pour rendre compte du comportement aéroacoustique du banc d'essai, a donc été présentée dans ce chapitre. La méthode proposée est basée sur l'idée que le chargement instationnaire sur une aube induit par l'impact de rafales hydrodynamiques, calculé par le formalisme d'Amiet, peut être identifié à la trace du champ de pression acoustique produite par un dipôle unique placé au voisinage très proche du bord d'attaque. Une étude [12] reproduite dans ce chapitre montre la pertinence de cette idée pour des plaques semi-infinies mais également des plaques de corde finie. Une démonstration mathématique justifiant l'identification est détaillée en annexe E pour une plaque semi-infinie. Le rayonnement acoustique de ce dipôle de bord d'attaque peut ensuite être formulé par une somme d'ondes planes, chacune d'elles étant par la suite diffractée par la grille d'aubes à l'aide de la technique de raccordement modal. Les aubes modifiées sont individualisées par la variation de l'amplitude du dipôle équivalent correspondant, permettant d'introduire simplement l'hétérogénéité du stator. Par conséquent, les sources de bruit aéroacoustiques (les sources dipolaires représentatives du chargement instationnaire sur les aubes) sont séparées de la fonction de réponse de la grille d'aubes. Cette dernière n'est en rien altérée par l'hétérogénéité du stator et reste entièrement homogène et régulière. L'hétérogénéité de l'étage est simplement introduite par la modification de certaines sources de bruit. Cette procédure est présentée ici dans un cadre bidimensionnel. Le banc d'essai et la campagne expérimentale du projet SEMAFOR ont ensuite été détaillés. Les techniques de décomposition modale, réalisée par le LVA, et de rétro-propagation dans le conduit, réalisée par MicrodB, ont été présentées pour préciser le post-traitement des données recueillies. Enfin, les prédictions issues du modèle analytique ont été comparées aux mesures obtenues

pendant la campagne d'essai du projet SEMAFOR. Bien que l'absence du TCS pendant les mesures ne permette pas d'obtenir des résultats définitifs, l'analyse conjointe menée à partir de la comparaison des puissances acoustiques modales, prédite et mesurée, et de la cohérence modale a permis d'avancer quelques hypothèses pour discriminer les sources de bruit mesurées. Ces hypothèses devront être testées à l'aide d'une nouvelle campagne d'essais où la distorsion à l'entrée de l'étage rotor-stator sera contrôlée. Enfin, ces comparaisons entre mesure et modèle permettent d'obtenir quelques informations sur le facteur d'hétérogénéité de la grille, traduisant la variation de chargement instationnaire des aubes épaissies. Ainsi ce facteur augmente avec la fréquence, ce qui rejoint les analyses de la littérature [110, 98], qui montrent que l'épaississement d'un profil engendre une réduction du bruit croissante avec la fréquence. Afin de déterminer plus finement ce facteur d'hétérogénéité, le développement futur d'une procédure basée sur une fonction coût est finalement proposé.

CONCLUSION

Conclusions générales

Dans le cadre du projet SEMAFOR, l'objectif premier du travail de thèse présenté dans ce mémoire était d'élaborer un modèle analytique du bruit tonal généré par l'interaction de sillages rotor-stator dans les turbomachines axiales et de l'associer aux méthodes inverses de localisation de sources acoustiques en conduit. Cette modélisation devait prendre en compte l'effet de grille et l'hétérogénéité du stator. Ce dernier aspect était justifié par le fait que certaines aubes du stator du ventilateur utilisé dans le projet étaient modifiées pour des raisons structurelles.

Après une description globale des turbomachines et des sources de bruit associées, le premier chapitre abordait les principes et les hypothèses nécessaires à l'élaboration analytique des fonctions de réponse de grilles d'aubes. Une étude de la littérature a été menée et il a été décidé d'étendre un modèle analytique [65] basé sur la technique de raccordement modal. Cette méthode, dérivée de la théorie des réseaux de guides d'ondes électromagnétiques [95], considère en premier lieu la configuration du problème comme la juxtaposition de différents sous-domaines, que sont ici les conduits annulaires en amont et en aval du stator, ainsi que la grille d'aubes de stator représentée comme un réseau de canaux inter-aubes bifurqués. En accord avec l'équation de Helmholtz et des conditions aux limites particulières à chaque sous-domaine, plusieurs champs acoustiques solutions sont déterminés sous la forme de sommes modales. Des équations de raccordement sur la pression et la vitesse acoustique sont formulées aux interfaces entre les sous-domaines. Les propriétés d'orthogonalité des bases modales sont utilisées pour élaborer un système d'équations résolu par inversion matricielle.

Cette technique a été employée dans un premier temps dans un cadre bidimensionnel pour déterminer la diffraction d'un champ acoustique incident par la grille d'aubes, supposée à calage nul, du stator. La méthode de résolution a été présentée dans son intégralité et validée en termes de bilan de puissance et de conditionnement matriciel. La diffraction multiple par les deux interfaces au bord d'attaque et au bord de fuite des aubes est prise en compte à l'aide d'un processus itératif qui traduit les réflexions des ondes acoustiques à chaque interface. Une condition de Kutta-Joukowski instationnaire a été implémentée d'après le modèle de Howe [60], annulant le saut de pression au bord de fuite des aubes. Cette condition implique un transfert de l'énergie acoustique vers le mode hydrodynamique par le biais d'un échappement tourbillonnaire. Cet effet induit par conséquent une réduction du niveau acoustique rayonné, croissante avec le nombre de Mach. La technique de raccordement modal a été par la suite comparée au modèle de Glegg [40] étendu par Posson [119]. L'identité entre les deux méthodes est obtenue tant pour le champ acoustique rayonné que pour le saut de pression instationnaire sur une aube de référence. Une étude paramétrique a notamment montré l'influence du passage entre les cas sub-résonnant et super-résonnant, selon la terminologie de Kaji et Okazaki [71]. En effet, lorsque la configuration s'approche de l'apparition d'un nouveau mode passant (fréquence de coupure), des pics de résonance sont observés sur l'amplitude du champ acoustique diffracté. Une première tentative de prise en compte de l'angle de calage a enfin été présentée, en recourant à une identité de Green.

Une telle extension montre la capacité de la technique de raccordement modal à générer le mode plan, absent des prédictions lorsque les aubes ne sont pas calées.

Le modèle a ensuite été étendu à la génération de bruit par l'impact de rafales hydrodynamiques sur la grille d'aubes de stator. Le cadre théorique de cette application est basé sur l'analyse de Chu et Kovásznay et l'interaction entre le mode acoustique et le mode tourbillonnaire. En particulier, le couplage entre les deux modes, théoriquement réalisé par l'annulation de la vitesse totale normale à la paroi des aubes, est considéré d'un point de vue alternatif et tout à fait équivalent. La composante périodique de l'excitation tourbillonnaire issue du rotor est décrite comme un sillage purement figé et convecté dans tout le domaine, indépendamment du mode acoustique. Ce dernier est défini comme la réponse de la grille d'aubes, telle que la condition de rigidité aux parois du stator soit satisfaite. Au lieu d'utiliser cette condition directement, les champs acoustiques et tourbillonnaires sont exprimés comme des sommes de modes dans les canaux de façon à la satisfaire automatiquement. Le couplage entre les modes tourbillonnaire et acoustique est transféré des parois aux interfaces de raccordement, où il est obtenu grâce à l'écriture des équations de continuité en pression et en vitesse axiale totale. Les deux formulations mathématiques sont rigoureusement équivalentes étant donné que les équations fondamentales comme les conditions au limites sont intégralement satisfaites. La convection du sillage dans la grille d'aubes nécessite une définition modale du champ de vitesse hydrodynamique dans le réseau de canaux inter-aubes. Afin de déterminer les amplitudes modales de ce champ, une équation de raccordement supplémentaire, basée sur la continuité de la vorticité, est écrite. Le modèle proposé a ensuite été validé à partir du cas test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA (1997). Une confrontation a été effectuée avec deux modèles analytiques, celui de Posson *et al.* [123] et celui de Smith [152], implémenté par Whitehead [166] dans le code LINSUB et appliqué spécifiquement à ce cas test par Hall [47]. Pour deux configurations, à basse et à haute fréquences, la comparaison sur le saut de pression instationnaire produit par l'impact de rafales hydrodynamiques montre un excellent accord entre les trois modèles. L'identité des formulations basées sur les techniques de Wiener-Hopf et de raccordement modal a de nouveau été constatée pour une grille bidimensionnelle d'aubes non calées. Finalement, la technique de raccordement modale a été appliquée à l'étude du ventilateur du banc SEMAFOR. Les modes azimutaux prescrits par le critère de Tyler et Sofrin [162] sont reproduits par le modèle et le champ acoustique est déterminé uniformément dans tout le domaine, y compris les modes coupés par le conduit, qui assurent la continuité locale du champ.

Le cadre bidimensionnel a permis de montrer la pertinence de la technique de raccordement modal, validée par des comparaisons avec des modèles classiques de la littérature. Habituellement, la transition entre les modélisations bidimensionnelle et tridimensionnelle est réalisée à l'aide de l'approche par bandes de rayon. Le chargement instationnaire sur les aubes est évalué sur chaque bande par une fonction de réponse de grille rectilinéaire, puis utilisé comme source acoustique équivalente dans une analogie acoustique en conduit annulaire rigide en présence d'un écoulement axial. Les avantages et les limitations de cette méthode ont été présentés : l'approche par bandes de rayons permet d'introduire des éléments géométriques tridimensionnels comme le vrillage des pales ou une variation radiale de l'écoulement. Cependant, cette méthode introduit un parallélisme non réaliste entre les aubes et des conditions aux limites radiales différentes de celles d'un conduit annulaire. Les conditions de coupure modale diffèrent entre les différents rayons et la dispersion modale dans le sens de l'envergure n'est pas reproduite. Le modèle basé sur la technique de raccordement modal peut être étendu au cas tridimensionnel à l'aide de cette méthode, comme l'ont montré Behn *et al.* [8]. Cependant, l'avantage principal de la technique de raccordement modal est de pouvoir considérer toute géométrie dès lors qu'une fonction de Green analytique correspondante est connue, ce qui est le cas pour les conduits annulaires. Cette modélisation tridimensionnelle constitue alors une alternative, complémentaire de l'approche par bandes de rayon, où les avantages et les inconvénients sont inversés. La technique de raccordement modal a donc été appliquée à la transmission du son par une grille d'aubes purement annulaire, tout en considérant un écoulement axial et uniforme. Afin de respecter les hypothèses géométriques permettant d'obtenir une fonction de Green analytique dans les canaux inter-aubes, les aubes sont représentées par des plaques radiales, planes, rigides et sans épaisseur. Après une description de la propagation acoustique dans un conduit annulaire et une présentation de la technique de résolution, la méthode a été appliquée à un cas test représentatif d'un ventilateur à basse vitesse. Celui-ci

permet d'illustrer le bien-fondé de la méthode, qui reproduit l'ensemble des phénomènes de diffraction inaccessibles avec l'approche par bandes de rayon. Une condition de Kutta-Joukowski instationnaire a été détaillée dans un cadre purement tridimensionnel et il a été montré que son implémentation se traduit par une réduction du champ acoustique diffracté et du saut de pression instationnaire sur l'aube comme dans le cadre bidimensionnel. L'étude paramétrique associée a également montré que les phénomènes de diffraction tridimensionnels, présents lorsque le rapport de moyeu est faible ($\sigma = 0.5$), s'atténuent totalement lorsque que le rapport de moyeu augmente ($\sigma = 0.9$). Dans ce cas, le comportement aéroacoustique du stator se rapproche de celui observé dans une grille d'aubes bidimensionnelle.

Le bruit tonal d'interaction de sillages rotor-stator, déterminé dans un cadre tridimensionnel, a enfin été étudié. Les perturbations hydrodynamiques liées aux sillages du rotor ont été définies de telle sorte que le vrillage des pales soit pris en compte. En effet, la variation de l'angle de calage selon l'envergure introduit un déphasage des sillages avec le rayon : l'interaction rotor-stator n'est alors plus simultanée dans la direction radiale et il convient de modéliser cet aspect. Dans le modèle, le champ de vitesse hydrodynamique est décomposé en modes azimutaux et radiaux, en prenant en compte les conditions de rigidité des parois du conduit annulaire. La continuité du rotationnel du champ de vitesse hydrodynamique est utilisée pour déterminer les amplitudes modales du champ dans les canaux inter-aubes. Dans un cadre tridimensionnel, la vorticité est portée par trois composantes d'espace pour chaque mode incident. Le problème devient surdéterminé et il convient de réduire le système d'équations associé. Par conséquent, seule la composante radiale de la vorticité a été conservée dans cette étude, tandis que la vitesse radiale du champ de vitesse a été négligée devant les autres composantes. Ceci se justifie par la structure des sillages en aval des pales du rotor, où l'essentiel du champ de vitesse est porté par ses composantes axiales et azimutales. Par conséquent, conserver la vorticité radiale devient primordial. Une étude paramétrique a montré que le choix du nombre de modes est très important pour assurer la continuité des différents champs aux interfaces. Enfin, le modèle a été appliqué au ventilateur du banc SEMAFOR, sans la condition de Kutta-Joukowski instationnaire, non encore implémentée dans le code de calcul. L'étude a montré que le modèle n'est pas suffisamment stable pour prédire correctement le bruit généré par l'interaction rotor-stator lorsque tous les modes excités sont coupés. Dans ce cas, la puissance acoustique produite dans la grille d'aubes est piégée à l'intérieur du stator, étant donné que les modes coupés ne peuvent pas transporter l'énergie et qu'aucune perte d'origine visqueuse n'est prise en compte dans le modèle pour l'atténuer. Dans ce cas, la procédure itérative s'arrête et la continuité n'est plus assurée à l'une ou à l'autre des interfaces. Lorsque l'interaction rotor-stator excite des modes de Tyler et Sofrin passants, la puissance acoustique peut être propagée en dehors de la grille et la procédure itérative converge vers une solution stable. En conclusion, l'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire est fondamentale dans la modélisation du bruit d'interaction rotor-stator par la technique de raccordement modal.

Finalement, l'hétérogénéité du stator du banc SEMAFOR, liée à la présence de trois aubes épaissies, a été modélisée. En effet, les théories habituelles du bruit tonal d'interaction rotor-stator sont basées sur des fonctions de réponse de grille homogène, dont les aubes sont identiques et régulièrement espacées. L'invalidité de cette hypothèse rompt alors l'aspect périodique des mécanismes aérodynamiques en jeu et le critère de Tyler et Sofrin n'est plus valable. Par conséquent, tous les modes sont excités, dont certains sont passants et se propagent en amont et en aval du stator, régénérant des raies qui devraient être coupées. La modélisation proposée repose sur l'utilisation du principe du dipôle de bord d'attaque et de la technique de raccordement modal, dans un cadre bidimensionnel. Le principe du dipôle de bord est basé sur l'idée que le chargement instationnaire sur une aube induit par l'impact de rafales hydrodynamiques, calculé par le formalisme d'Amiet, peut être identifié à la trace du champ de pression acoustique produite par un dipôle unique placé au voisinage très proche du bord d'attaque. Une étude a montré la justesse de cette idée pour des plaques semi-infinies et des plaques de corde finie. Elle a été corroborée par une démonstration mathématique (annexe E) dans le cas d'une plaque semi-infinie. Ensuite, le rayonnement acoustique de ce dipôle de bord est exprimé comme une somme d'ondes planes, chacune d'elle étant par la suite diffractée par la grille d'aubes à l'aide de la technique de raccordement modal, réitéré pour chaque aube. Les aubes modifiées sont modélisées par la variation

de l'amplitude du dipôle équivalent correspondant, permettant d'introduire l'hétérogénéité du stator. Ce modèle permet de séparer la fonction de réponse de la grille d'aubes, considérée comme étant toujours homogène et régulière, de la définition des sources de bruit d'origine aérodynamique, qui concentrent l'hétérogénéité. Cette méthode permet également de traiter du bruit d'interaction rotor-stator comme d'un problème équivalent de transmission du son à travers une grille d'aubes. Notamment, elle permet de s'affranchir du calcul de la vorticité et des hypothèses délicates associées dans le cas du bruit d'interaction de sillages en configuration tridimensionnelle. Par la suite, le banc d'essai et la campagne expérimentale du projet SEMAFOR ont été détaillés, ainsi que les techniques employées pour la décomposition modale réalisée par le LVA et la rétro-propagation dans le conduit réalisée par MicrodB, tous deux partenaires du projet. Enfin, les prédictions issues du modèle analytique ont été comparées aux mesures obtenues. L'absence de contrôle de la distorsion d'entrée d'air pendant les mesures n'a pas permis d'obtenir des résultats définitifs, cependant l'étude permet d'avancer quelques hypothèses sur la discrimination des sources de bruit. Enfin, le facteur d'hétérogénéité, qui quantifie la variation de chargement instationnaire sur les aubes modifiées, a pu être grossièrement déterminé dans cette étude préliminaire et apparaît comme étant une fonction croissante de la fréquence, ce qui corrobore les analyses de la littérature [110, 98].

Perspectives

Les perspectives apportées par ce travail de recherche sont nombreuses. Elles portent sur l'ensemble des aspects abordés dans les chapitres de ce mémoire et certaines ont déjà été étudiées et présentées par ailleurs, à l'occasion d'études conduites en parallèle.

Les premières études concernant l'implémentation d'un angle de calage dans la fonction de réponse de grille bidimensionnelle ont été présentés dans cette thèse. L'application de la méthode décrite par Roger *et al.* [137] aux deux interfaces de la grille permet d'éviter le recours à l'identité de Green. Dans ce cas, le champ acoustique devient accessible dans les triangles de raccordement. Par conséquent, l'ajout de la condition de Kutta-Joukowski instationnaire au bord de fuite devient possible. Ainsi, la technique de raccordement modal pourra être appliquée à la fonction de réponse de grilles d'aubes pour un angle de calage quelconque. Des comparaisons avec les modèles de la littérature, basés sur la technique de Wiener-Hopf [124] ou l'approche de Kaji et Okazaki [69], pour le moment inaccessibles, pourront être réalisées afin de garantir la justesse de l'approche et de montrer si l'identité entre les techniques de raccordement modal et de Wiener-Hopf est maintenue. Par ailleurs, la procédure itérative, en plus de simplifier les équations matricielles de raccordement, permet de découpler les deux interfaces. Par conséquent, il est possible de résoudre le problème mentionné en Sec. 1.5.3 concernant le choix de l'angle de calage. En effet, des angles de calage différents peuvent être définis au bord d'attaque et au bord de fuite pour traduire correctement l'impact des rafales hydrodynamiques sur le stator et le redressement de l'écoulement. Un travail de ce type a notamment été réalisé pour le modèle basé sur la technique de Wiener-Hopf par de Laborderie *et al.* [23], travail dans lequel les effets de cambrure sont traités artificiellement en considérant des demi-plans d'inclinaisons différentes au bord d'attaque et au bord de fuite. Contrairement à cette étude, une approche différente a été proposée par Roger *et al.* [137]. Seul l'effet d'évasement des canaux inter-aubes lié à la cambrure est pris en compte en considérant un réseau de canaux à section variable, selon les développements proposés par Rienstra et Ovenden [133, 108]. Une fois déterminé dans une image redressée du canal, le champ acoustique est simplement projeté sur le canal cambré. D'un point de vue global, la technique de raccordement modal permet l'intégration de toute géométrie et de toutes conditions au limites tant qu'une fonction de Green analytique est explicitement connue dans chaque sous-domaine.

L'implémentation d'un angle de calage quelconque permet également de modéliser la propagation acoustique à travers un rotor. Par conséquent, une procédure itérative pourra permettre de déterminer le champ acoustique généré par l'interaction de sillages rotor-stator et propagé en amont du rotor. Comme l'a proposé Hanson [52] pour le bruit à large bande, un modèle du bruit d'interaction de sillages couplant la présence du rotor et du stator pourrait être envisagé.

Une extension du modèle à la prédiction du bruit à large bande a été développée et présentée dans des contextes bidimensionnel et tridimensionnel dans la référence [37] dans le projet européen IDEALVENT. Dans ce cadre, le modèle de bruit d'interaction rotor-stator est étendu à l'ensemble des fréquences du spectre. La puissance acoustique du bruit à large bande rayonné est alors définie comme la multiplication de la puissance acoustique d'une rafale unitaire, calculée pour chaque fréquence, par un spectre de vitesse turbulente fourni par les modèles classiques de la littérature. Par conséquent, la technique de raccordement modal peut rassembler dans une même formulation la prédiction des composantes tonale et à large bande du bruit d'interaction rotor-stator.

La modélisation tridimensionnelle de la transmission et de la génération du bruit par une grille d'aubes annulaire reste à valider. Une étude comparative avec les résultats obtenus par la technique de Wiener-Hopf associée à l'approche par bandes de rayon [120] permettrait de statuer sur la pertinence de la méthodologie. De même, l'implémentation de la condition de Kutta-Joukowski pour la prédiction du bruit d'interaction rotor-stator est fondamentale. Une comparaison avec les modèles de Namba et Schulten [103] ou des calculs numériques sera alors possible ; elle est même nécessaire pour évaluer la justesse du modèle dans ce cadre. L'extension du modèle tridimensionnel à la prédiction du bruit à large bande devra intégrer une étude sur la formulation de la turbulence dans un cadre annulaire, relativement oubliée dans la littérature. De plus, la prise en compte des effets de cambrure et d'angles de calage distincts au bord d'attaque et au bord de fuite est adaptable à une configuration tridimensionnelle. Théoriquement, seuls l'angle de dévers et le vrillage des aubes semblent hors de portée de la méthode.

La modélisation du bruit d'interaction en présence d'un stator hétérogène nécessite un ensemble d'actions pour valider la méthode. Les développements analytiques liés à l'identité entre le formalisme d'Amiet et le rayonnement d'un dipôle au bord d'un demi-plan devront être comparés à des simulations numériques, puis validés dans le cas d'une plaque de longueur finie. La méthodologie complète dans une configuration homogène et bidimensionnelle devra être confrontée aux modèles de Smith et de Posson à travers l'utilisation du cas test de la Catégorie 3 défini dans le second *CAA Workshop on Benchmark Problems* de la NASA. Enfin, une modélisation tridimensionnelle est possible, comme l'ont décrit Roger *et al.* [137], en considérant un ensemble de dipôles placés au bord du profil, le long de l'envergure pour reproduire l'impact de rafales hydrodynamiques hélicoïdales. Des comparaisons croisées entre ce modèle et celui basé sur la convection de sillages devront être réalisées pour tester la cohérence des différentes formulations. Le cas échéant, une modélisation du bruit d'interaction à large bande, basée sur le principe du dipôle de bord, pourrait être envisagée. Dans ce cadre, les hypothèses liées à la vorticité n'auraient plus lieu d'être, la configuration étant équivalente à un problème de diffraction acoustique.

D'un point de vue plus global, le nombre de modes nécessaires pour garantir la continuité des champs aux interfaces est un paramètre primordial. Il sera intéressant d'étudier plus finement cet aspect pour assurer la validité des résultats tout en optimisant le temps de calcul de la méthode. De même, la détermination de la puissance tourbillonnaire associée aux sillages permettrait d'obtenir un nouvel indicateur de la justesse des prédictions apportées par le modèle.

Finalement, une nouvelle campagne d'essais en présence du TCS est nécessaire pour disposer de mesures où la composante de bruit liée à l'interaction rotor-stator est *a priori* isolée. Les hypothèses avancées sur la discrimination des sources pourront alors être testées de façon fiable. Enfin, la détermination du taux d'hétérogénéité de la grille par la minimisation d'une fonction coût pertinente reste à réaliser.

En conclusion, la présente thèse constitue un premier pas vers un outil de modélisation permettant d'intégrer un grand nombre de configurations, pour certaines inédites, dans un formalisme analytique et unifié.

ANNEXE A

DÉCOMPOSITION MODALE DE FLOQUET

La décomposition modale de Floquet [36] est une application du théorème de Floquet, qui démontre que pour une fonction possédant une structure périodique, il existe une base de projection permettant de l'écrire comme une superposition de modes (les vecteurs de Floquet), chacun amplifié par un coefficient (les multiplieurs de Floquet). Cet outil mathématique, détaillé par Mittra et Lee [95] est couramment utilisé en électromagnétisme pour l'étude des structures rayonnantes périodiques, comme les antennes réseau à commande de phase.

Une structure (ou un champ) tridimensionnelle (x, y, z), périodique selon z d'une période de longueur d, est considérée. Un mode de Floquet dans une telle structure satisfait la relation :

$$F(x, y, d) = F(x, y, 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_0 d},$$

où $F(x, y, 0)$ est le champ dans le plan $z = 0$, représentant les variations transverses, et β_0 un paramètre déterminé par les conditions aux limites de la structure. De manière générale, ce champ peut s'écrire :

$$F(x, y, z) = F_0(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_0 z},$$

où $F_0(x, y, z)$ est une fonction périodique selon z satisfaisant :

$$F_0(x, y, z + nd) = F_0(x, y, z), n \in \mathbb{Z}.$$

Puisque $F_0(x, y, z)$ est une fonction périodique selon z, elle peut également être représentée sous la forme d'une série de Fourier.

$$F_0(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n\pi/d)z}.$$

Ainsi, il vient :

$$F(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_n z},$$

où :

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2n\pi}{d}.$$

ANNEXE B

PROJECTION MODALE DES ÉQUATIONS DE CONTINUITÉ

La technique de résolution des équations de continuité aux interfaces, héritée de la théorie des réseaux électromagnétiques, repose sur la projection de ces équations sur une base modale, utilisant la propriété d'orthogonalité de ces bases. Cette annexe détaille les calculs de projection modale nécessaires à la résolution de toutes les équations de continuité considérées dans ce manuscrit de thèse.

B.1 Projection sur la base modale associée au réseau de canaux

Le projecteur représentant la base modale associée au réseau de canaux bifurqués est constitué du produit scalaire suivant :

$$\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)(\bullet)\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \tag{B.1}$$

où $(\bullet)$ désigne la quantité sur laquelle s'applique le projecteur. En fonction de l'ordre du mode μ et de la quantité sur laquelle s'applique l'opérateur, plusieurs cas sont à calculer.

B.1.1 Application du projecteur à la base modale associée à un canal

1. Cas : $\mu \neq \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}(\mu+\nu)z\right)+\cos\left(\frac{\pi}{a}(\mu-\nu)z\right)\right]\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(\mu+\nu)z\right)}{\pi(\mu+\nu)/a}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(\mu-\nu)z\right)}{\pi(\mu-\nu)/a}\right]_0^a \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Cas : $\mu = \nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \int_0^a \cos^2\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\mu 2\pi}{a}z\right)+1\right]\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\mu 2\pi}{a}z\right)}{\mu(2\pi)/a}+z\right]_0^a \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

3. Cas : $\mu = \nu = 0$:

$$\int_0^a \cos\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z \quad = \quad a.$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à :

$$\boxed{\int_0^a \cos\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\delta_{\mu,\nu}(1+\delta_{\mu,0}).} \tag{B.2}$$

où δ représente le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

B.1.2 Application du projecteur à la base modale associée au milieu non borné

1. Cas : $\alpha_\mu \neq \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \alpha_\nu = \alpha_i + \nu\frac{2\pi}{a},$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\sin(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha_\nu+\alpha_\mu)z) + \cos((\alpha_\nu-\alpha_\mu)z)\right]\mathrm{d}z + \int_0^a \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\sin((\alpha_\nu+\alpha_\mu)z) + \sin((\alpha_\nu-\alpha_\mu)z)\right]\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\alpha_\nu+\alpha_\mu)z)}{(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} + \frac{\sin((\alpha_\nu-\alpha_\mu)z)}{(\alpha_\nu-\alpha_\mu)}\right]_0^a - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\cos((\alpha_\nu+\alpha_\mu)z)}{(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} + \frac{\cos((\alpha_\nu-\alpha_\mu)z)}{(\alpha_\nu-\alpha_\mu)}\right]_0^a \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\alpha_\nu+\alpha_\mu)a)}{(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} + \frac{\sin((\alpha_\nu-\alpha_\mu)a)}{(\alpha_\nu-\alpha_\mu)}\right] - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\cos((\alpha_\nu+\alpha_\mu)a)-1}{(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} + \frac{\cos((\alpha_\nu-\alpha_\mu)a)-1}{(\alpha_\nu-\alpha_\mu)}\right].
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sin((\alpha_\nu \pm \alpha_\mu)a) &= \sin\left(\left(\alpha_i + \nu\frac{2\pi}{a} \pm \frac{\mu\pi}{a}\right)a\right) \\
&= (-1)^\mu \sin(u)\,,
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\cos((\alpha_\nu \pm \alpha_\mu)a) &= \cos\left(\left(\alpha_i + \nu\frac{2\pi}{a} \pm \frac{\mu\pi}{a}\right)a\right) \\
&= (-1)^\mu \cos(u)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z &= \frac{\alpha_\nu(-1)^\mu\sin(u)}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2} - \frac{\mathrm{i}\alpha_\nu((-1)^\mu\cos(u)-1)}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2} \\
&= \frac{\mathrm{i}\alpha_\nu}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2}\left[-\mathrm{i}(-1)^\mu\sin(u) - (-1)^\mu\cos(u)+1\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}\alpha_\nu\left[1-(-1)^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\right]}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2}.
\end{aligned}$$

2. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z &= \int_0^a \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\mu z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha_\mu z}}{2\mathrm{i}\alpha_\mu}\right]_0^a+\frac{a}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu 2\pi}-1}{2\mathrm{i}\alpha_\mu}\right]+\frac{a}{2}\\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

3. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0$:

$$\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z = a.$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à :

$$\boxed{\Lambda_{\mu,\nu}=\int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\alpha_\nu\left[1-(-1)^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\right]}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2}, & \text{si}\quad \alpha_\mu\neq\alpha_\nu,\\ \dfrac{a}{2}(1+\delta_{\mu,0}), & \text{si}\quad \alpha_\mu=\alpha_\nu.\end{cases}} \tag{B.3}$$

B.2 Projection sur la base modale associée au milieu non borné

Le projecteur représentant la base modale associée au milieu non borné dans la direction tangentielle est constitué du produit scalaire suivant :

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}(\bullet)\mathrm{d}z,\quad \alpha_\mu=\alpha_i+\mu\frac{2\pi}{a},\quad \mu\in\mathbb{Z}. \tag{B.4}$$

Les différents cas à calculer sont les suivants, en fonction de la base modale sur laquelle le projecteur est appliqué et de l'ordre du mode ν.

B.2.1 Application du projecteur à la base modale associée au milieu non borné

1. Cas : $\mu\neq\nu$, $\nu\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)z}\mathrm{d}z &= \int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_i+\nu\frac{2\pi}{a}-\alpha_i-\mu\frac{2\pi}{a})z}\mathrm{d}z\\ &= \int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\mu)\frac{2\pi}{a}z}\mathrm{d}z\\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\mu)\frac{2\pi}{a}z}}{\mathrm{i}(\nu-\mu)2\pi/a}\right]_0^a\\ &= \frac{\cos((\nu-\mu)2\pi)+\mathrm{i}\sin((\nu-\mu)2\pi)-1}{\mathrm{i}(\nu-\mu)2\pi/a}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Cas : $\mu=\nu$:

$$\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)z}\mathrm{d}z = a.$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à

$$\boxed{\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)z}\mathrm{d}z = a\delta_{\mu,\nu}.} \tag{B.5}$$

B.2.2 Application du projecteur à la base modale associée à un canal

1. Cas : $\alpha_\mu \neq \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \alpha_i + \mu\frac{2\pi}{a}, \quad \alpha_\nu = \frac{\nu\pi}{a},$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \cos(\alpha_\mu z)\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}\int_0^a \sin(\alpha_\mu z)\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha_\mu+\alpha_\nu)z) + \cos((\alpha_\mu-\alpha_\nu)z)\right]\mathrm{d}z - \int_0^a \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\sin((\alpha_\mu+\alpha_\nu)z) + \sin((\alpha_\mu-\alpha_\nu)z)\right]\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\alpha_\mu+\alpha_\nu)z)}{(\alpha_\mu+\alpha_\nu)} + \frac{\sin((\alpha_\mu-\alpha_\nu)z)}{(\alpha_\mu-\alpha_\nu)}\right]_0^a + \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\cos((\alpha_\mu+\alpha_\nu)z)}{(\alpha_\mu+\alpha_\nu)} + \frac{\cos((\alpha_\mu-\alpha_\nu)z)}{(\alpha_\mu-\alpha_\nu)}\right]_0^a \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\alpha_\mu+\alpha_\nu)a)}{(\alpha_\mu+\alpha_\nu)} + \frac{\sin((\alpha_\mu-\alpha_\nu)a)}{(\alpha_\mu-\alpha_\nu)}\right] + \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\cos((\alpha_\mu+\alpha_\nu)a)-1}{(\alpha_\mu+\alpha_\nu)} + \frac{\cos((\alpha_\mu-\alpha_\nu)a)-1}{(\alpha_\mu-\alpha_\nu)}\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z &= \frac{\alpha_\mu(-1)^\nu\sin(u)}{\alpha_\mu^2-\alpha_\nu^2} + \frac{\mathrm{i}\alpha_\mu((-1)^\nu\cos(u)-1)}{\alpha_\mu^2-\alpha_\nu^2} \\
&= \frac{\mathrm{i}\alpha_\mu}{\alpha_\mu^2-\alpha_\nu^2}\left[-\mathrm{i}(-1)^\nu\sin(u) + (-1)^\mu\cos(u) - 1\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}\alpha_\mu\left[(-1)^\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1\right]}{\alpha_\mu^2-\alpha_\nu^2}.
\end{aligned}$$

2. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^a \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\nu z}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha_\nu z}}{2\mathrm{i}\alpha_\nu}\right]_0^a + \frac{a}{2} \\
&= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu 2\pi}-1}{2\mathrm{i}\alpha_\nu}\right] \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

3. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0$:

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z = a.$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à :

$$\boxed{\varphi_{\mu,\nu} = \int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\cos(\alpha_\nu z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}\alpha_\mu\left[(-1)^\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1\right]}{\alpha_\mu^2-\alpha_\nu^2}, & \text{si} \quad \alpha_\nu \neq \alpha_\mu, \\ \dfrac{a}{2}(1+\delta_{\nu,0}), & \text{si} \quad \alpha_\nu = \alpha_\mu. \end{cases}} \tag{B.6}$$

B.3 Projection modale pour la continuité de la vorticité

Afin de résoudre l'équation de continuité du rotationnel du champ des fluctuations de vitesse hydrodynamique, le produit scalaire adéquat est le suivant :

$$\int_0^a \sin(\alpha_\mu z)(\bullet)\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \tag{B.7}$$

où $(\bullet)$ désigne la quantité sur laquelle s'applique le projecteur. En fonction de l'ordre du mode μ et de la quantité sur laquelle s'applique l'opérateur, plusieurs cas sont à calculer.

B.3.1 Application du projecteur à la base modale associée à un canal

1. Cas : $\mu \neq \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sin\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}(\mu-\nu)z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(\mu+\nu)z\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(\mu-\nu)z\right)}{\frac{\pi}{a}(\mu-\nu)}\right]_0^a - \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(\mu+\nu)z\right)}{\frac{\pi}{a}(\mu+\nu)}\right]_0^a\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Cas : $\mu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sin\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \int_0^a \sin^2\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a \left(\frac{1+\cos\left(2\mu\pi z/a\right)}{2}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{a}{2} - \left[\frac{\sin\left(2\mu\pi z/a\right)}{2\mu\pi/a}\right]_0^a \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

3. Cas : $\mu = \nu = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z = 0.$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à :

$$\boxed{\int_0^a \sin\left(\frac{\mu\pi}{a}z\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\delta_{\mu,\nu}(1-\delta_{\mu,0}).} \tag{B.8}$$

B.3.2 Application du projecteur à la base modale associé au milieu non borné

1. Cas : $\alpha_\mu \neq \alpha_\nu$:

$$\Psi_{\mu,\nu} = \int_0^a \sin\left(\alpha_\mu z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z}\mathrm{d}z, \quad \alpha_\mu = \frac{\mu\pi}{a}, \quad \alpha_\nu = \alpha_i + \nu\frac{2\pi}{a},$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^a \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\mu z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)z}}{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} \right]_0^a - \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)z}}{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)} \right]_0^a \right\} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)a} - 1}{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} \right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)a} - 1}{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)a} - 1}{(\alpha_\nu-\alpha_\mu)} \right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)a} - 1}{(\alpha_\nu+\alpha_\mu)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2(\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2)} \left\{ (\alpha_\nu+\alpha_\mu)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu-\alpha_\mu)a} - 1) - (\alpha_\nu-\alpha_\mu)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_\nu+\alpha_\mu)a} - 1) \right\} \\
&= \frac{1}{2(\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2)} \left\{ \alpha_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu a}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}) + \alpha_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu a}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_\nu a)}) \right\} \\
&= \frac{\alpha_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu a}(\cos(\mu\pi) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_\nu a)})}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2} \\
&= \frac{\alpha_\mu \left((-1)^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1\right)}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2}.
\end{aligned}
$$

2. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{\mu,\nu} &= \int_0^a \sin(\alpha_\mu z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\mu z} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\mu z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_\mu z}\right] \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mu\pi} - 1}{2\mathrm{i}\mu\pi/a} \right] - a \right\} \\
&= \mathrm{i}\frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

2. Cas : $\alpha_\mu = \alpha_\nu = 0$:

$$
\Psi_{\mu,\nu} = \int_0^a \sin(\alpha_\mu z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z} \mathrm{d}z = 0. \tag{B.9}
$$

Par conséquent, le produit scalaire est égal à :

$$
\boxed{\Psi_{\mu,\nu} = \int_0^a \sin(\alpha_\mu z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_\nu z} \mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{\alpha_\mu \left((-1)^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1\right)}{\alpha_\nu^2-\alpha_\mu^2}, & \text{si} \quad \alpha_\mu \neq \alpha_\nu, \\ \dfrac{\mathrm{i}a}{2}(1-\delta_{\mu,0}), & \text{si} \quad \alpha_\mu = \alpha_\nu. \end{cases}} \tag{B.10}
$$

ANNEXE C

PUISSANCE ACOUSTIQUE EN CONDUIT

La puissance acoustique moyenne $\mathcal{P}$ délivrée par une distribution de sources est définie par l'intégrale suivante :

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} \langle\, \mathbf{I} \,\rangle \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\Sigma,$$

où Σ est une surface quelconque limitant un volume qui contient les sources et dont la normale sortante est $\mathbf{n}$. $\langle\, \mathbf{I} \,\rangle$ est l'intensité acoustique moyenne. Il s'agit de la valeur moyenne du flux de puissance à travers une surface élémentaire. D'après Goldstein [41] (p. 41), l'intensité acoustique instantanée en présence d'un écoulement de vitesse moyenne $\mathbf{W}$ s'écrit :

$$\mathbf{I} = \left(\frac{p}{\rho_0} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \right) \times (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{W}), \tag{C.1}$$

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla \phi \right), \quad \mathbf{v} = \nabla \phi, \quad \rho = \frac{p}{c_0^2}, \tag{C.2}$$

où ρ, p et $\mathbf{v}$ sont les fluctuations au premier ordre de la densité, de la pression et de la vitesse acoustiques. ρ_0 et c_0 représentent la densité moyenne et la vitesse du son, respectivement. Lorsqu'aucun écoulement n'est considéré ($\mathbf{W} = \mathbf{0}$), l'intensité se réduit à l'expression classique $\mathbf{I} = p\mathbf{v}$. L'intensité acoustique moyenne s'exprime en notation complexe comme suit :

$$\langle\, \mathbf{I} \,\rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}\mathrm{e} \left\{ \left(\frac{p}{\rho_0} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \right) \times (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{W})^* \right\}, \tag{C.3}$$

où $(\bullet)^*$ désigne le complexe conjugué.

Ainsi :

$$\langle\, \mathbf{I} \,\rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}\mathrm{e} \left\{ \left[-\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla \phi \right) + \mathbf{W} \cdot \nabla \phi \right] \times \left[\rho_0 \nabla \phi - \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla \phi \right) \mathbf{W} \right]^* \right\}. \tag{C.4}$$

La dépendance temporelle des champs acoustique s'écrit par convention $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, ainsi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega\phi. \tag{C.5}$$

L'écoulement est considéré comme étant purement axial, de telle sorte que $\mathbf{W} = W_x \mathbf{e}_x$. Tout d'abord, un potentiel acoustique est considéré, exprimé dans un formalisme bidimensionnel (ϕ^{2D}) ou tridimensionnel (ϕ^{3D}) :

$$\phi^{2D} = A\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}, \quad \phi^{3D} = A\ f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}, \quad \text{où} \quad k_x = \frac{-kM \pm \overline{k_x}}{\beta^2}, \quad \text{et} \quad A \in \mathbb{C}. \tag{C.6}$$

$\overline{k_x}$ représente la partie propagative du nombre d'onde axial. Si celle-ci est positive, l'onde se propage dans le sens des x positifs et donc dans le sens de l'écoulement. Inversement, si elle est négative, l'onde se propage dans le sens contraire à l'écoulement. De plus, lorsque $\overline{k_x}$ est réel, l'onde est propagative et elle devient évanescente si $\overline{k_x}$ est imaginaire.

$$\langle\ \mathbf{I}\ \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\mathrm{i}\omega\phi \times \left[\rho_0 \nabla\phi - \frac{\rho_0}{c_0^2}\left(-\mathrm{i}\omega\phi + \mathrm{i}k_x\phi W_x\right)\mathbf{W}\right]^*\right\}. \tag{C.7}$$

Le vecteur $\mathbf{n}$ est orienté tel que $\mathbf{n} = \mathbf{x}$, soit normal aux interfaces de bord d'attaque et de fuite du stator. Le produit scalaire $\langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n} &= \frac{\rho_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\mathrm{i}\omega\phi \times \left[\mathrm{i}k_x\phi + \frac{1}{c_0^2}\left(\mathrm{i}\omega\phi W_x - \mathrm{i}k_x\phi W_x^2\right)\right]^*\right\} \\
&= \frac{\rho_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\omega\phi \times \left[k_x\phi + \frac{1}{c_0^2}\left(\omega\phi W_x - k_x\phi W_x^2\right)\right]^* [\mathrm{i}][\mathrm{i}]^*\right\} \\
&= \frac{\rho_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\frac{c_0}{c_0}\omega\left[k_x + \frac{1}{c_0^2}\left(\omega W_x - k_x W_x^2\right)\right]^* [\phi][\phi]^*\right\}.
\end{aligned}$$

$$\langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n} = \frac{Z_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{k\left[k_x + \left(kM - k_x M^2\right)\right]^* [\phi][\phi]^*\right\}, \quad k = \frac{\omega}{c_0}, \quad M = \frac{W_x}{c_0}, \quad Z_0 = \rho_0 c_0,$$

$$\langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n} = \frac{kZ_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[k_x(1-M^2) + kM\right]^* [\phi][\phi]^*\right\}.$$

Sachant que $k_x = (-Mk \pm \overline{k_x})/\beta^2$, le vecteur intensité acoustique devient, pour toute onde acoustique, en configuration 2D ou 3D :

$$\boxed{\langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n} = \frac{kZ_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\pm\overline{k_x}\right]^* [\phi][\phi]^*\right\}.} \tag{C.8}$$

C.1 Cadre bidimensionnel

C.1.1 Ondes incidentes, réfléchies et transmises

Dans le cadre bidimensionnel de la transmission d'une onde acoustique à travers un réseau de canaux bifurqués, la puissance acoustique apportée par l'onde incidente est répartie entre celles des ondes réfléchies et transmises à chaque interface. Pour une onde acoustique incidente ϕ_i telle que :

$$\phi_i = A_i\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}, \tag{C.9}$$

le calcul de la puissance associée se développe comme suit :

$$\mathcal{P}_i = \int_S \langle\ \mathbf{I}_i\ \rangle \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}S, \tag{C.10}$$

où S est un segment parcouru par un élément de longueur $\mathrm{d}S$. Dans notre cas, il est égal au produit de la largeur a d'un canal inter-aubes et du nombre d'aubes (V), soit le périmètre de la coupe cylindrique effectuée.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_i &= \int_0^{aV} \frac{kZ_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_i}\right]^*[\phi_i][\phi_i]^*\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{kZ_0}{2}\int_0^{aV}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_i}\right]^*[A_i\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}][A_i\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}]^*\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{kZ_0}{2}|A_i|^2\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_i}\right]^*[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}][\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i^+ x}]^*\int_0^{aV}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}][\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i z}]^*\mathrm{d}z\right\} \\
&= \frac{kZ_0 aV}{2}|A_i|^2\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_i}\right]\mathrm{e}^{-2\mathcal{I}\mathrm{m}(\overline{k_i})x}\right\}.
\end{aligned}$$

Or, on montre que $\overline{k_i}$ est soit un réel, soit un imaginaire pur pour les modes respectivement passants et coupés. Ceci signifie que seuls les modes passants sont pris en compte dans le calcul de la puissance acoustique, traduisant le transport de l'énergie acoustique par les ondes propagatives uniquement. Elle peut alors s'écrire, indépendamment de x :

$$\mathcal{P}_i = \frac{kZ_0 aV}{2}\ \overline{k_i}\ |A_i|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_i} \in \mathbb{R}. \tag{C.11}$$

De la même manière, pour les ondes réfléchies (ϕ_r) et transmises (ϕ_t) en amont et en aval du stator, les puissances acoustiques associées s'écrivent :

$$\mathcal{P}_r = -\frac{kZ_0 aV}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\overline{k_s}\ |R_s|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_s} \in \mathbb{R}. \tag{C.12}$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{kZ_0 aV}{2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\overline{k_s}\ |T_s|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_s} \in \mathbb{R}. \tag{C.13}$$

C.1.2 Ondes dans les canaux

Pour les ondes se propageant dans les canaux vers l'aval (ϕ_d) et vers l'amont (ϕ_u), le calcul de la puissance acoustique est le suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_d &= \sum_{q=0}^{+\infty}\int_0^{aV}\frac{kZ_0}{2}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_q}\right]^*[\phi_d][\phi_d]^*\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{kZ_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\int_0^{aV}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_q}\right]^*\left[D_q^0\cos(\alpha_q z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}\right]\left[D_q^0\cos(\alpha_q z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}\right]^*\right\}\mathrm{d}z, \quad \alpha_q = \frac{q\pi}{a} \\
&= \frac{kZ_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_q}\right]^*[D_q^0][D_q^0]^*[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}][\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}]^*\int_0^{aV}[\cos(\alpha_q z)]\,[\cos(\alpha_q z)]^*\,\mathrm{d}z\right\} \\
&= \frac{kZ_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_q}\right]^*[D_q^0][D_q^0]^*[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}][\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_q x}]^*\int_0^{aV}\cos^2(\alpha_q z)\,\mathrm{d}z\right\}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\cos^2\left(\frac{q\pi}{a}z\right) = \frac{1+\cos\left(2\frac{q\pi}{a}z\right)}{2}.$$

Si $q \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{aV} \cos^2\left(\frac{q\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \int_0^{aV} \frac{1+\cos\left(2\frac{q\pi}{a}z\right)}{2}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{aV} \frac{\mathrm{d}z}{2} + \frac{\cos\left(2\frac{q\pi}{a}z\right)}{2}\mathrm{d}z \\ &= \frac{aV}{2} + \left[\frac{\sin\left(2\frac{q\pi}{a}aV\right)}{\left(4\frac{q\pi}{a}\right)}\right]_0^{aV} \\ &= \frac{aV}{2} + \frac{a\sin\left(2q\pi V\right)}{(4q\pi)}, \quad q, V \in \mathbb{N} \\ &= \frac{aV}{2}.\end{aligned}$$

Si $q = 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{aV} \cos^2\left(\frac{q\pi}{a}z\right)\mathrm{d}z &= \int_0^{aV} \frac{1+\cos(0)}{2}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{aV} \mathrm{d}z \\ &= aV.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_d = \frac{kZ_0}{2} \times \frac{aV}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} (1+\delta_{q,0})\ \overline{k_q}\ |D_q^0|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_q} \in \mathbb{R}.$$

De la même manière,

$$\mathcal{P}_u = -\frac{kZ_0}{2} \times \frac{aV}{2} \sum_{q=0}^{+\infty} (1+\delta_{q,0})\ \overline{k_q}\ |U_q^0|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_q} \in \mathbb{R}.$$

C.2 Cadre tridimensionnel

Dans un cadre tridimensionnel, la puissance acoustique dans le conduit est obtenue en intégrant l'intensité acoustique moyenne (Eq. C.8) sur les interfaces de bord et de fuite du stator, chacune d'elle formant une surface annulaire :

$$\mathcal{P} = \int_{R_m}^{R_c} \int_0^{2\pi} \langle\ \mathbf{I}\ \rangle \cdot \mathbf{n}\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{C.14}$$

C.2.1 Ondes incidentes, réfléchies et transmises

La puissance acoustique s'écrit, dans le cadre tridimensionnel :

$$\mathcal{P} = \frac{kZ_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{R_m}^{R_c} \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ \left[\overline{k_{nj}}\right]^* [\phi_{nj}][\phi_{nj}]^* \right\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{C.15}$$

Les potentiels ϕ_{nj} sont décomposés sur une base modale dont les propriétés d'orthogonalité mènent à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{R_m}^{R_c}[\phi_{nj}][\phi_{nj}]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_{R_h}^{R_c}[A_{nj}\ f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}x}][A_{nj}\ f_{nj}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}x}]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\ |A_{nj}|^2\mathrm{e}^{-2\mathcal{I}\mathrm{m}(\overline{k_{nj}})x}\int_{R_m}^{R_c} f_{nj}^2(r)r\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Or la fonction de Rienstra est normée de telle sorte que, pour un rapport de moyeu $\sigma = R_h/R_c$:

$$\int_\sigma^1 f_{nj}^2(r)r\mathrm{d}r = 1.$$

En posant le changement de variable $r = rR_c$, le produit scalaire suivant est obtenu :

$$\int_{R_m}^{R_c} f_{nj}^2(r)r\mathrm{d}r = R_c^2.$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi}\int_{R_m}^{R_c}[\phi_{nj}][\phi_{nj}]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi R_c^2\ |A_{nj}|^2\mathrm{e}^{-2\mathcal{I}\mathrm{m}(\overline{k_{nj}})x}. \tag{C.16}$$

La puissance s'écrit donc

$$\mathcal{P} = \pi k R_c^2 Z_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\overline{k_{nj}}\ |A_{nj}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nj}} \in \mathbb{R}. \tag{C.17}$$

Comme dans le cas bidimensionnel, les modes coupés ne contribuent pas à la puissance acoustique. L'expression des puissances incidente, réfléchie et transmise est obtenue :

$$\mathcal{P}_i = \pi k R_c^2 Z_0\ \overline{k_{nj}}\ |A_{nj}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nj}} \in \mathbb{R}, \tag{C.18}$$

$$\mathcal{P}_r = -\pi k R_c^2 Z_0 \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\overline{k_{nst}}\ |R_{nst}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nst}} \in \mathbb{R}, \quad n_s = nB + sV, \tag{C.19}$$

$$\mathcal{P}_t = \pi k R_c^2 Z_0 \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\overline{k_{n_st}}\ |T_{n_st}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_st}} \in \mathbb{R}. \tag{C.20}$$

C.2.2 Ondes dans les canaux

Dans les canaux inter-aubes, la puissance acoustique s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{kZ_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{R_h}^{R_c}\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\left[\overline{k_{n_qp}}\right]^*[\phi_{n_qp}][\phi_{n_qp}]^*\right\}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad n_q = \frac{qV}{2}. \tag{C.21}$$

Les potentiels ϕ_{n_qp} sont décomposés sur une base modale dont les propriétés d'orthogonalité mènent à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{R_h}^{R_c}[\phi_{n_qp}][\phi_{n_qp}]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_{R_h}^{R_c}[A_{n_qp}\ f_{n_qp}(r)\cos(n_q\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}x}][A_{n_qp}\ f_{n_qp}(r)\cos(n_q\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{n_qp}x}]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \pi R_c^2(1+\delta_{q,0})|A_{n_qp}|^2\mathrm{e}^{-2\mathcal{I}\mathrm{m}(\overline{k_{n_qp}})x}\end{aligned}$$

Les puissances des ondes se propageant dans les canaux vers l'aval et vers l'amont s'écrivent :

$$\mathcal{P}_d = \frac{\pi R_c^2 k Z_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(1+\delta_{q,0})\ \overline{k_{n_qp}}\ |D_{n_qp}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_qp}} \in \mathbb{R}, \tag{C.22}$$

$$\mathcal{P}_u = -\frac{\pi R_c^2 k Z_0}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(1+\delta_{q,0})\ \overline{k_{n_qp}}\ |U_{n_qp}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_qp}} \in \mathbb{R}. \tag{C.23}$$

C.3 Relation entre pression et potentiel

Une onde acoustique se propageant dans un conduit annulaire avec un écoulement purement axial peut être décrite par ses champs de pression, de vitesse ou potentiel associés. Les champs de pression et potentiel de cette onde sont notés :

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} p_{nj}^{\pm} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{\pm}x}, \tag{C.24}$$

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{nj}^{\pm} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} f_{nj}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{nj}^{\pm}x}. \tag{C.25}$$

La relation entre la pression et le potentiel acoustique s'écrit :

$$\begin{aligned} p &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla \phi \right) \\ &= -\rho_0 \left(-\mathrm{i}\omega\phi + W_x \mathrm{i}k_{nj}^{\pm} \phi \right) \\ &= \mathrm{i}\rho_0 c_0 \left(k - k_{nj}^{\pm} M \right) \phi \\ &= \mathrm{i}\rho_0 c_0 \left(k - \frac{-kM \pm \overline{k_{nj}}}{\beta^2} M \right) \phi \\ &= \frac{\mathrm{i}\rho_0 c_0}{\beta^2} \left(k(1-M^2) + kM^2 \mp \overline{k_{nj}} M \right) \phi. \end{aligned}$$

La relation entre la pression et le potentiel acoustique devient :

$$p = \frac{\mathrm{i}\rho_0 c_0}{\beta^2} \left(k \mp \overline{k_{nj}} M \right) \phi. \tag{C.26}$$

Le lien entre les amplitudes modales du champ potentiel et du champ de pression acoustiques s'écrit alors :

$$\boxed{\phi_{nj}^{\pm} = \frac{\beta^2}{\mathrm{i}\rho_0 c_0} \frac{p_{nj}^{\pm}}{\left(k \mp \overline{k_{nj}} M \right)}.} \tag{C.27}$$

Ainsi, dans les conduits annulaires, la puissance acoustique $\mathcal{P}_a$ exprimée en fonction des amplitudes modales du champ de pression s'écrit :

$$\mathcal{P}_a = \pm \frac{\pi R_c^2 k \beta^4}{Z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\overline{k_{nj}}}{\left(k \mp \overline{k_{nj}} M \right)^2} |p_{nj}^{\pm}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{nj}} \in \mathbb{R}. \tag{C.28}$$

Dans les canaux inter-aubes, la puissance acoustique $\mathcal{P}_c$ s'écrit :

$$\mathcal{P}_c = \pm \frac{\pi R_c^2 k \beta^4}{2 Z_0} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (1+\delta_{q,0}) \frac{\overline{k_{n_q p}}}{\left(k \mp \overline{k_{n_q p}} M \right)^2} |p_{n_q p}^{\pm}|^2, \quad \text{si} \quad \overline{k_{n_q p}} \in \mathbb{R}. \tag{C.29}$$

ANNEXE D

DESCRIPTION DES SILLAGES DU ROTOR

La technique de raccordement modal appliquée à la génération de bruit par l'interaction rotor-stator nécessite la définition des sillages issus des pales du rotor, considérés comme une excitation hydrodynamique vis-à-vis de la grille d'aubes de stator. Les perturbations incidentes sont induites par le déficit de vitesse dans les sillages en raison de la présence des pales dans l'écoulement moyen. Cette excitation est supposée figée, incompressible et convectée par l'écoulement. Cette perturbation périodique peut être modélisée simplement par une série de fonctions gaussiennes. Dans le repère du stator, l'excitation hydrodynamique s'écrit alors :

$$w(t) = w_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi\left(\frac{t-kT}{\tau}\right)^2}, \tag{D.1}$$

où $\xi = \ln(2)$. w_0 est le déficit maximum sur l'axe du sillage au bord d'attaque du stator et $T = 2\pi/(B\Omega)$ est la période temporelle entre deux sillages, où b est la demi-largeur du sillage au bord d'attaque du stator, Ω la vitesse de rotation du rotor et R_0 le rayon de la coupe cylindrique bidimensionnelle. Enfin, $\tau = b/(\Omega R_0)$ est la demi-largeur temporelle du sillage au bord d'attaque du stator. Du fait de sa nature 2π-périodique, ces rafales hydrodynamiques peuvent s'écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \mathrm{e}^{-\omega_n t}, \quad \text{où} \quad w_n = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi nt/T}\mathrm{d}t, \quad \omega_n = nB\Omega. \tag{D.2}$$

D.1 Détermination des harmoniques de sillages w_n

La présente section vise à déterminer les harmoniques de sillages w_n, qui constituent les amplitudes des rafales hydrodynamiques pour chaque fréquence de passage de pales.

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_0 \mathrm{e}^{-\xi((t-kT)/\tau)^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi nt/T}\mathrm{d}t, \\ &= \frac{w_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^T \mathrm{e}^{-\xi((t-kT)/\tau)^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi nt/T}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t' = (t - kT)/T$ est introduit :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{w_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-k}^{1-k} \mathrm{e}^{-\xi((Tt')/\tau)^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi n(t'+k)}T\mathrm{d}t', \\ &= \frac{w_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-k}^{1-k} \mathrm{e}^{-\xi((Tt')/\tau)^2}\left[\cos(2\pi n(t'+k))+\mathrm{i}\sin(2\pi n(t'+k))\right]T\mathrm{d}t', \\ &= \frac{w_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-k}^{1-k} \mathrm{e}^{-\xi((Tt')/\tau)^2}\left[\cos(2\pi nt')+\mathrm{i}\sin(2\pi nt')\right]T\mathrm{d}t'. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = Tt'$ est introduit :

$$w_n = \frac{w_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-k}^{1-k} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\left[\cos(2\pi nt/T)-\mathrm{i}\sin(2\pi nt/T)\right]\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles généralisée indique que :

$$\sum_{k=a}^{b}\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b+1} f(t)\mathrm{d}t, \tag{D.3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{w_0}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\left[\cos(2\pi nt/T)+\mathrm{i}\sin(2\pi nt/T)\right]\mathrm{d}t, \\ &= \frac{w_0}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\cos(2\pi nt/T)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{w_0}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\sin(2\pi nt/T)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La fonction sinus étant impaire, et la fonction $\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$ paire, la seconde intégrale est nulle.

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{w_0}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\cos(2\pi nt/T)\mathrm{d}t, \\ &= \frac{w_0 B\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(t/\tau)^2}\cos(nB\Omega t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, d'après Gradshteyn et Ryzhik [43] (**3.896.4**, p.488) :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\beta x^2}\cos(bx)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad [\mathcal{R}\mathrm{e}\ \beta > 0]. \tag{D.4}$$

Ainsi :

$$\boxed{w_n = \frac{w_0 B\Omega\tau}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\mathrm{e}^{-(nB\Omega\tau)^2/(4\xi)} = \frac{w_0 Bb}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\mathrm{e}^{-(nBb)^2/(4\xi R_0^2)}.} \tag{D.5}$$

Et finalement :

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{w_0 Bb}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\mathrm{e}^{-(nBb)^2/(4\xi R_0^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}. \tag{D.6}$$

ANNEXE E

PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE DIPÔLE DE BORD D'ATTAQUE - MODÈLE D'AMIET

Lorsqu'un dipôle est rapproché au proche voisinage de l'extrémité d'une paroi plane semi-infinie, le saut de pression sur la plaque calculé à l'aide de la fonction de Green du demi-plan s'identifie au chargement instationnaire calculé par le modèle d'Amiet pour la contribution de bord d'attaque. Cette annexe présente une démonstration mathématique de cette intuition. Le formalisme d'Amiet [3, 4] traitant de l'impact d'une rafale sur le bord d'un demi-plan semi-infini est tout d'abord détaillé en intégralité. Ensuite, la fonction de Green du demi-plan introduite par Jones [68] et Rienstra [131] est exposée. Il est important de noter que dans leurs articles, Jones et Rienstra emploient cette fonction de Green pour un dipôle placé au voisinage du bord de fuite d'un demi-plan. Dans cette démonstration, cette configuration est tout d'abord utilisée pour calculer la trace du champ de pression rayonné sur le demi-plan lorsque le dipôle est placé en régime asymptotique, au bord de fuite avec le système de coordonnées associé. Lorsque celle-ci est déterminée, le sens de l'écoulement et du système de coordonnées sont inversés pour permettre la comparaison avec le formalisme d'Amiet. Cette comparaison mène finalement à la détermination de l'amplitude du dipôle qui permet d'obtenir l'identification des deux expressions. Une étude paramétrique est enfin proposée.

E.1 Modèle d'Amiet - Contribution de bord d'attaque

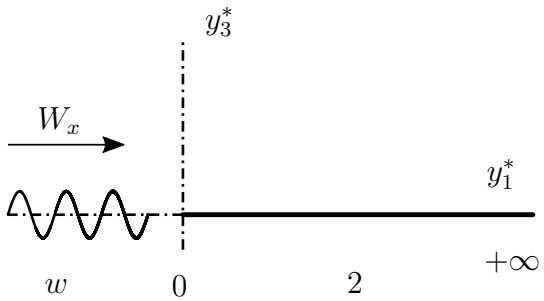


FIGURE E.1 – Modèle d'Amiet. Notations pour la contribution de bord d'attaque.

Cette partie s'attache à calculer la répartition de sources dipolaires sur un profil mince généré par l'impact d'une rafale, ceci grâce à l'utilisation du modèle d'Amiet [3, 4]. Le modèle est basé sur les théories linéarisées du profil mince et l'acoustique linéaire. La rafale, figée, est convectée par l'écoulement parallèle au profil, de vitesse axiale W_x. Le repère (y_1, y_2, y_3) est centré sur le bord d'attaque du profil. y_1 et y_2 sont orientés respectivement selon la corde $c = 2b$ et l'envergure $(L = 2d)$. y_3 est orienté selon la normale au profil. L'impact de la rafale sur le profil génère une perturbation de vitesse qui dérive d'un potentiel noté ϕ. Celui-ci est solution de l'équation des ondes convectées :

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\mathrm{D}^2\phi}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{E.1}$$

avec la dérivée particulaire

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + W_x\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Les relations entre pression, vitesse et potentiel acoustiques sont rappelées :

$$p = -\rho_0\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}, \quad \mathbf{v}^{ac} = \nabla\phi.$$

L'équation des ondes tridimensionnelle, dans un repère cartésien devient :

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y_3^2} - 2\frac{M_0}{c_0}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial y_1} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \tag{E.2}$$

L'équation E.2 est considérée comme l'équation fondamentale de l'approche linéarisée en aérodynamique non stationnaire. Le potentiel ϕ doit également satisfaire les conditions aux limites imposées par le profil. La condition de rigidité induit une annulation de la vitesse totale normale à la surface, qui s'écrit :

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{y}_3 = \left(\mathbf{v}^{ac} + \mathbf{v}^{h}\right)\cdot\mathbf{y}_3 = 0. \tag{E.3}$$

La perturbation de vitesse incidente est mise sous la forme :

$$w = w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1(y_1-W_xt)+k_2y_2)}, \tag{E.4}$$

où k_1 et k_2 sont les nombres d'onde aérodynamiques selon la corde et l'envergure. L'équation E.2 permet d'écrire $k = \omega/c_0 = k_1M_0$.

La condition de rigidité s'écrit donc :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_3} = -w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1(y_1-W_xt)+k_2y_2)}, \quad y_3 = 0, \quad 0 \le y_1 \le c. \tag{E.5}$$

La condition de Kutta-Joukowski impose la continuité de la pression de par et d'autre du sillage et à l'endroit du bord de fuite. Par conséquent, en désignant par $\mathcal{L}$ le saut d'une quantité entre les limites $y_3 \longrightarrow 0^-$ et $y_3 \longrightarrow 0^+$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + W_x\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\right) = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_1 \ge c. \tag{E.6}$$

Le potentiel de perturbation doit décroitre lorsqu'on s'éloigne du profil pour tendre vers zéro à l'infini [44]. Dans le cadre de la technique de Schwarzschild [149] utilisée par Amiet [3, 4], l'annulation du potentiel est imposée devant le profil, ce qui reste compatible avec le fait que les fluctuations de portance induites représentent un distribution de dipôles :

$$\phi = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_1 < 0. \tag{E.7}$$

Une solution compatible avec les conditions aux limites est écrite sous la forme $\varphi = \phi(y_1, y_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2y_2-\omega t)}$. Lorsqu'elle est introduite dans l'équation E.2, il vient :

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - k_2^2\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_3^2} + 2\mathrm{i}\frac{M_0}{c_0}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + k^2\varphi = 0,$$

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_3^2} + 2\mathrm{i}\frac{M_0}{c_0}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \left(k^2 - k_2^2\right)\varphi = 0. \tag{E.8}$$

La transformation de Reissner [129] est appliquée à l'équation E.8 :

$$\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}M_0^2 k_1^* y_1^*/\beta^2}\varphi, \quad \beta^2 = 1 - M_0^2,$$

$$y_1^* = 2\frac{y_1}{c}, \quad y_2^* = 2\frac{y_2}{c}, \quad y_3^* = 2\beta\frac{y_3}{c},$$

$$k_1^* = \frac{k_1 c}{2}, \quad k_2^* = \frac{k_2 c}{2},$$

avec en particulier $k_1^* = kc/(2M_0)$ si $k = \omega/c_0$ désigne le nombre d'onde acoustique. L'équation E.8 devient :

$$\beta^2\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}}{\partial y_1^{*^2}}+\beta^2\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}}{\partial y_3^{*^2}}+\mathrm{i}\frac{4M_0k}{c}\frac{\partial\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}}{\partial y_1^*}+\left(k^2-\frac{4}{c^2}k_2^{*^2}\right)\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}=0. \tag{E.9}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}}{\partial y_1^*} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*} - \Phi\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2}}{\partial y_1^{*^2}} = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^{*^2}} - 2\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right) - \Phi\left(\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)^2\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2},$$

il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^{*^2}}\left(\beta^2\frac{4}{c^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_3^{*^2}}\left(\beta^2\frac{4}{c^2}\right) &+ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}\left[\mathrm{i}\frac{4M_0k}{c}-2\beta^2\frac{4}{c^2}\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)\right]\\ &+ \Phi\left[-\beta^2\frac{4}{c^2}\left(\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)^2-\mathrm{i}\frac{4M_0k}{c}\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)+\left(k^2-\frac{4}{c^2}k_2^{*^2}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

D'une part, sachant que $k = 2M_0k_1^*/c$:

$$\mathrm{i}\frac{4M_0k}{c}-2\beta^2\frac{4}{c^2}\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)=\mathrm{i}\frac{8M_0k_1^*}{c^2}-\frac{8}{c^2}\left(\mathrm{i}M_0^2k_1^*\right)=0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}-\beta^2\frac{4}{c^2}\left(\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)^2-\mathrm{i}\frac{4M_0k}{c}\left(\frac{\mathrm{i}M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)+\left(k^2-\frac{4}{c}k_2^{*^2}\right) &= -\beta^2\frac{4}{c^2}\left(\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right)^2+\beta^2\frac{8M_0^2k_1^*}{c^2}\left(\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^4}\right)\\ &+ \left(\beta^4\left(\frac{2M_0k_1^*}{c\beta^2}\right)^2-\frac{4\beta^4}{c^2M_0^2k_1^{*^2}}k_2^{*^2}\left(\frac{M_0k_1^*}{\beta^2}\right)^2\right)\\ &= \frac{4\beta^2}{c^2}\left(\frac{M_0k_1^*}{\beta^2}\right)^2\left[M_0^2+\beta^2-\frac{\beta^2k_2^{*^2}}{M_0^2k_1^{*^2}}\right]\\ &= \frac{4\beta^2}{c^2}\left(\frac{M_0k_1^*}{\beta^2}\right)^2\left[1-\frac{\beta^2k_2^{*^2}}{M_0^2k_1^{*^2}}\right].\end{aligned}$$

L'équation E.9 devient ainsi :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^{*^2}}\left(\beta^2\frac{4}{c^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_3^{*^2}}\left(\beta^2\frac{4}{c^2}\right)+\Phi\frac{4\beta^2}{c^2}\left(\frac{M_0k_1^*}{\beta^2}\right)^2\left[1-\frac{\beta^2k_2^{*^2}}{M_0^2k_1^{*^2}}\right]=0.$$

puis :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^{*2}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_3^{*2}}+\left(\frac{M_0k_1^*}{\beta^2}\right)^2\left(1-\frac{1}{\Theta^2}\right)\Phi=0,} \tag{E.10}$$

en introduisant le paramètre de rafale Θ défini par Graham [44] par :

$$\Theta=\frac{k_1^*M_0}{k_2^*\beta}.$$

Le résultat obtenu est la représentation du potentiel dans le plan dit de Prandtl-Glauert. Selon cette représentation, les conditions aux limites s'expriment avec les nouvelles variables :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial y_3}\right|_{(y_3=0)} &= -w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1(y_1-W_xt)+k_2y_2)},\\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\right|_{(y_3=0)} &= -w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1},\\ \left.\frac{2\beta}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial y_3^*}\right|_{(y_3^*=0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0k_1^*y_1^*/\beta^2} &= -w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^*y_1^*},\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial y_3^*}=-\frac{cw_0}{2\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^*y_1^*/\beta^2},\quad y_3^*=0,\quad 0\le y_1^*\le 2.} \tag{E.11}$$

La condition de Kutta-Joukowski s'exprime également avec les nouvelles variables :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}+W_x\frac{\partial\phi}{\partial y_1} &= \frac{\partial\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2^*y_2^*-\omega t-M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2)}}{\partial t}+\frac{2W_x}{c}\frac{\partial\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2^*y_2^*-\omega t-M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2)}}{\partial y_1^*}=0,\\ &= -\mathrm{i}\omega\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2^*y_2^*-\omega t-M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2)}+\frac{2W_x}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2^*y_2^*-\omega t-M_0^2k_1^*y_1^*/\beta^2)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}-\mathrm{i}\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\Phi\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2W_x}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}-\mathrm{i}\Phi\left[\omega+\frac{2W_x}{c}\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right] &= 0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}-\mathrm{i}\Phi\left[\frac{c\omega}{2W_x}+\frac{M_0^2k_1^*}{\beta^2}\right] &= 0.\end{aligned}$$

Sachant que $\omega/W_x=k/M_0=2k_1^*/c$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}-\mathrm{i}\Phi\left[\frac{\left(\beta^2+M_0^2\right)k_1^*}{\beta^2}\right] = 0,$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*}-\mathrm{i}\frac{k_1^*}{\beta^2}\Phi\right]=0,\quad y_3^*=0,\quad y_1^*\ge 2.} \tag{E.12}$$

De même,

$$\boxed{\Phi=0,\quad y_3^*=0,\quad 0\le y_1^*.} \tag{E.13}$$

Selon la valeur de Θ, c'est-à-dire selon l'inclinaison des fronts d'onde de la rafale et sa vitesse de convection, l'équation du potentiel Φ (Eq. E.10) change de nature mathématique. Lorsque $\Theta<1$, l'écoulement est dit subcritique. L'équation est elliptique et le potentiel doit s'annuler à l'infini. En principe, la solution n'est pas de nature rayonnante pour un profil d'envergure infinie. Si l'envergure

est limitée, il est nécessaire de prendre en compte leur contribution pour le calcul du rayonnement. De plus, on constate que la nature de l'équation n'est pas modifiée lorsqu'on fait tendre Θ vers zéro, ce qui revient à considérer que le comportement du fluide est incompressible. Lorsque $\Theta > 1$, l'écoulement est dit supercritique et l'équation E.10 est de nature hyperbolique. C'est une équation de Helmholtz, qui traduit la nature rayonnante du potentiel de perturbation. On doit lui adjoindre une condition de Sommerfeld, à savoir que la solution décroit à la manière d'une onde divergente lorsqu'on s'éloigne du profil. De même, la nature de l'équation reste inchangée si on fait tendre Θ vers l'infini, comme c'est le cas pour une rafale parallèle compressible.

Cas de la rafale supercritique parallèle compressible

Dans le cas d'une rafale supercritique parallèle ($k_2^* = 0$), le problème s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial {y_1^*}^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial {y_3^*}^2} + \mu^2\Phi = 0, \qquad \mu = \frac{M_0 k_1^*}{\beta^2}, \tag{E.14}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_3^*} = -\frac{bw_0}{\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2}, \qquad y_3^* = 0, \quad 0 \le y_1^* \le 2, \quad b = \frac{c}{2}, \tag{E.15}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1^*} - \mathrm{i}\frac{k_1^*}{\beta^2}\Phi\right] = 0, \qquad y_3^* = 0, \quad y_1^* \ge 2 \tag{E.16}$$

$$\Phi = 0, \qquad y_3^* = 0, \quad 0 \le y_1^*. \tag{E.17}$$

Il n'y a pas de solution analytique exacte au problème présenté dans le cas d'une rafale parallèle. Le problème étant linéaire, il est résolu par un processus itératif décrit par Landahl [78]. Ce processus est initialisé par la détermination d'un potentiel $\Phi^{(0)}$ solution de l'équation des ondes (Eq. E.14) et la condition de rigidité du profil (Eq. E.15). Le problème est ensuite résolu par demi-plans. Premièrement, la plaque est identifiée à un demi-plan infini en aval, le potentiel recherché $\Phi^{(1)}$ étant également annulé en amont (Eq. E.17). Un potentiel de correction $\Phi^{(2)}$ permet ensuite de satisfaire la condition de Kutta-Joukowski (Eq. E.16) en supposant un demi-plan infini en amont. Ce processus permet de construire une série d'approximations du potentiel Φ cherché, sous une forme : $\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \cdots$.

La détermination d'un potentiel initial $\Phi^{(0)}$ assurant au moins la condition de rigidité du profil est possible à partir d'une expression du type : $\varphi^{(0)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}\mathrm{e}^{a y_3}$ pour le potentiel non transformé. Reporté dans l'équation E.8, il vient :

$$\begin{aligned}
(1-M_0^2)\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial y_3^2} + 2\mathrm{i}\frac{M_0}{c_0}\omega\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial y_1} + k^2\varphi^{(0)} &= 0,\\
(1-M_0^2)(ik_1)^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}\mathrm{e}^{a y_3} + a^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}\mathrm{e}^{a y_3} + 2\mathrm{i}\frac{M_0}{c_0}\omega(ik_1)A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}\mathrm{e}^{a y_3} + k^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}\mathrm{e}^{a y_3} &= 0,\\
(1-M_0^2)(ik_1)^2 + a^2 + 2\mathrm{i}\frac{M_0}{c_0}\omega(ik_1) + k^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$k_1 = \frac{\omega}{W_x}, M_0 = \frac{W_x}{c_0} \Rightarrow M_0 k_1 = k,$$

$$a^2 = (1-M_0^2)k_1^2 + k^2 = k_1^2.$$

Physiquement, la seule solution acceptable pour $y_3 \ge 0$ est $a = -k_1$. Par ailleurs :

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial y_3}\right|_{(y_3=0)} = -Ak_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1} = -w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1},$$

ce qui donne $A = w_0/k_1$. Le potentiel réduit correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)} &= \varphi^{(0)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}M_0^2 k_1 y_1/\beta^2} \\
&= \frac{w_0}{k_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1} \mathrm{e}^{-k_1 y_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}M_0^2 k_1 y_1/\beta^2}, \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*} \mathrm{e}^{-k_1^* y_3^*/\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}M_0^2 k_1^* y_1^*/\beta^2}, \\
\Phi^{(0)} &= \frac{bw_0}{k_1^*} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2} \mathrm{e}^{-k_1^* y_3^*/\beta}.
\end{aligned}$$

Cependant, ce potentiel ne satisfait pas les conditions aux limites en amont et en aval du profil. Il est donc indiqué de lui adjoindre d'abord une première correction $\Phi^{(1)}$ telle que $\Phi_1 = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}$ s'annule pour $y_1^* < 0$. $\Phi^{(1)}$ est donc solution du système :

$$\left\{
\begin{array}{rll}
\dfrac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial {y_1^*}^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial {y_3^*}^2} + \mu^2 \Phi^{(1)} &= 0, & \\
\Phi^{(1)}(y_1^*, 0) &= -\Phi^{(0)}(y_1^*, 0), & y_1^* < 0, \\
\left.\dfrac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y_3^*}\right|_{(y_3^*=0)} &= 0, & y_1^* \geq 0.
\end{array}
\right. \tag{E.18}$$

La résolution de ce système repose sur l'application du théorème de Schwarzschild, issu d'un article sur la polarisation de la lumière [149]. Celui-ci énonce que pour une fonction ψ régie par le système :

$$\left\{
\begin{array}{rll}
\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial {y_1^*}^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial {y_3^*}^2} + \mu^2 \psi &= 0, & \\
\psi(y_1^*, 0) &= f(y_1^*), & y_1^* \geq 0, \\
\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial y_3^*}\right|_{(y_3^*=0)} &= 0, & y_1^* < 0.
\end{array}
\right. \tag{E.19}$$

Alors la solution pour $y_3^* = 0$ et $y_1^* < 0$ est donnée par l'expression :

$$\psi(y_1^*, y_3^*)|_{(y_3^*=0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(y_1^*, \xi, 0) f(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

avec $G(y_1^*, \xi, 0) = \sqrt{\frac{-y_1^*}{\xi}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(\xi - y_1^*)}}{\xi - y_1^*}$. Le théorème de Schwarzschild s'applique alors moyennant le changement de variable inversant le signe $y = -y_1^*$:

$$f(\xi) = -\Phi^{(0)}(-y, 0) = -\frac{bw_0}{k_1^*} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1^* y/\beta^2},$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}(-y, 0) &= -\frac{bw_0}{\pi k_1^*} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{-y}{\xi}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(\xi - y)}}{\xi - y} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1^* \xi/\beta^2} \mathrm{d}\xi, \\
&= -\frac{bw_0}{\pi k_1^*} \sqrt{-y} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu y} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu - k_1^*/\beta^2)\xi}}{\xi - y} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Or, selon Gradshteyn et Ryzhik [43] (**3.383.7**, p.348) :

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} (x+\beta)^{-\nu-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\overline{\mu}x} \mathrm{d}x = 2^\nu \Gamma(\nu) \beta^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\beta\overline{\mu}}{2}} D_{-2\nu}(\sqrt{2\beta\overline{\mu}}), \quad |\arg\ \beta| < \pi, \quad \mathrm{Re}\ \nu > 0, \quad \mathrm{Re}\ \overline{\mu} > 0,$$

avec $\Gamma(z)$ la fonction Gamma (**8.310.1**, p.892) telle que :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t.$$

Avec en particulier , selon (**3.361.2**, p.344) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-qx}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{q}}, \quad q > 0.$$

$D_n(z)$ est la fonction du cylindre parabolique ou fonction de Weber-Hermite avec en particulier $n = -1$ (**9.254.1**, p.1030)

$$D_{-1}(z) = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

où (**8.251.1**, p.888) :

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$D_{-1}(z) = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z^2}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right].$$

Si les variables s'écrivent $x = \xi$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\beta = -y$ et $\overline{\mu} = -\mathrm{i}(\mu - k_1^*/\beta^2)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)\xi}}{\xi - y}\mathrm{d}\xi &= 2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(-y)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}{2}} D_{-1}\left(\sqrt{2\mathrm{i}(\mu - k_1^*/\beta^2)y}\right), \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{-y}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right], \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

Le changement de variable est effectué

$$t = \mathrm{i}x, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{i}\mathrm{d}x, \quad \sqrt{t} = \sqrt{\mathrm{i}x}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)\xi}}{\xi - y}\mathrm{d}\xi &= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\mathrm{i}\pi}}\int_0^{(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right], \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{\sqrt{\mathrm{i}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right], \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right], \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - \frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right], \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1 - (1+\mathrm{i})\int_0^{(\mu-k_1^*/\beta^2)y} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

où les intégrales de Fresnel sont reconnues, définies par :

$$E[\xi] = C(x) + \mathrm{i}S(x) = \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x, \tag{E.20}$$

où :

$$C(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\cos(\mathrm{i}x)}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x, \quad S(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\sin(\mathrm{i}x)}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x,$$

et :

$$E^*[\xi] = \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x.$$

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}(-y,0) &= -\frac{bw_0}{\pi k_1^*}\sqrt{-y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu y}\frac{\pi}{\sqrt{-y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-k_1^*/\beta^2)y}\left[1-(1+\mathrm{i})E^*[(\mu-k_1^*/\beta^2)y]\right], \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1^* y/\beta^2}\left\{(1+\mathrm{i})E^*[(\mu-k_1^*/\beta^2)y]-1\right\}.
\end{aligned}$$

Le potentiel corrigé vaut ainsi, en repassant aux variables d'origines :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(y_1^*,0) &= \Phi^{(0)}(y_1^*,0)+\Phi^{(1)}(y_1^*,0), \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2} + \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2}\left\{(1+\mathrm{i})E^*[(k_1^*/\beta^2-\mu)y_1^*]-1\right\}, \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2}\left\{(1+\mathrm{i})E^*[(k_1^*/\beta^2-\mu)y_1^*]\right\}.
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\mu = \frac{M_0 k_1^*}{\beta^2},$$

il vient :

$$\boxed{\Phi_1(y_1^*,0) = \Phi^{(0)}(y_1^*,0)(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1^*}{\beta^2}(1-M_0)y_1^*\right].} \tag{E.21}$$

Avec les potentiels φ_1 et $\varphi^{(0)}$, la relation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y_1^*,0) &= \varphi^{(0)}(y_1^*,0)(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1^*}{\beta^2}(1-M_0)y_1^*\right], \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*/\beta^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_0^2 k_1^* y_1^*/\beta^2}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1^*}{\beta^2}(1-M_0)y_1^*\right], \\
&= \frac{bw_0}{k_1^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1^* y_1^*}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1^*}{\beta^2}(1-M_0)y_1^*\right], \\
\varphi_1(y_1,0) &= \frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 y_1}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right].
\end{aligned}$$

La pression correspondante est définie par :

$$p = -\rho_0 W_x\left(-\mathrm{i}k_1\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\right).$$

Or,

$$-\mathrm{i}k_1\varphi_1 = -\mathrm{i}w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\right),\\ &= (1+\mathrm{i})\frac{w_0}{k_1}E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}\right)+(1+\mathrm{i})\frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\right),\\ &= +\mathrm{i}w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}(1+\mathrm{i})E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]+(1+\mathrm{i})\frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-\mathrm{i}k_1\varphi_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} = (1+\mathrm{i})\frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\right).$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(E^*\left[\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1\right]\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\int_0^{\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{d}x\right).$$

De plus, pour une fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = \int_{\eth(x)}^{\text{þ}(x)} g(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\text{þ}(x)}{\mathrm{d}x}g(\text{þ}(x)) - \frac{\mathrm{d}\eth(x)}{\mathrm{d}x}g(\eth(x)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}k_1\varphi_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} &= (1+\mathrm{i})\frac{w_0}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1y_1}\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1}}{\sqrt{2\pi\frac{k_1}{\beta^2}(1-M_0)y_1}},\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}w_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k_1M_0}{\beta^2}(1-M_0)y_1}}{\sqrt{\pi k_1(1+M_0)y_1}}.\end{aligned}$$

$$p = -\rho_0W_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}w_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k_1M_0}{\beta^2}(1-M_0)y_1}}{\sqrt{\pi k_1(1+M_0)y_1}}.$$

Avec les variables adimensionnées, il vient :

$$p = -\rho_0W_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}w_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M_0)y_1^*}}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)y_1^*}}.$$

Un facteur 2 doit être appliqué pour obtenir la fluctuation locale de portance sur le profil. Une fois rapporté ensuite à une référence prise au centre de la corde, le résultat se résume à la formule suivante :

$$\boxed{{l_1}^A(y_1^*,\omega) = \frac{-2\rho_0W_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}w_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M_0)(1+y_1^*)}}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)(1+y_1^*)}}.} \tag{E.22}$$

Étant donné que la charge instationnaire devient singulière au bord d'attaque ($y_1^* = -1$) et qu'elle doit être comparée à la trace du champ de pression généré par un dipôle près du bord, cette expression est intégrée sur des petits segments de corde, de longueur ε.

$$\begin{aligned} L_1(y_1^*,\omega,\varepsilon) &= \int_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon} {l_1}^A(y^*,\omega)\mathrm{d}y^*, \\ &= \int_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon} \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M_0)(1+y^*)}}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)(1+y^*)}}\mathrm{d}y^*, \\ &= \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)}} \int_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M_0)(1+y^*)}}{\sqrt{1+y^*}}\mathrm{d}y^*. \end{aligned}$$

Le changement de variable $(1+y^*=x^*)$ est effectué.

$$L_1(y_1^*,\omega,\varepsilon) = \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)}} \int_{y_1^*+1}^{y_1^*+1+\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(1-M_0)x^*}}{\sqrt{x^*}}\mathrm{d}x^*.$$

Le changement $(t^*=\mu(1-M_0)x^*)$ est ensuite réalisé :

$$L_1(y_1^*,\omega,\varepsilon) = \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0}{\sqrt{\pi k_1^*(1+M_0)}} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu(1-M_0)}} \int_{(y_1^*+1)\mu(1-M_0)}^{(y_1^*+1+\varepsilon)\mu(1-M_0)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^*}}{\sqrt{t^*}}\mathrm{d}t^*.$$

Les intégrales de Fresnel sont retrouvées. Il vient :

$$L_1(y_1^*,\omega,\varepsilon) = \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{2} w_0}{\sqrt{k_1^*(1+M_0)\mu(1-M_0)}} \left[E(\mu(1-M_0)(y^*+1)\right]_{y_1^*}^{y_1^*+\varepsilon}. \tag{E.23}$$

E.2 Réglage du dipôle équivalent

Le principe du dipôle de bord est basé sur l'idée que les sources du bruit de bord de fuite (ou d'attaque) d'une aube isolée peuvent être décrites avec un dipôle équivalent approchée de très près du bord du profil depuis l'aval (ou l'amont). Une des clés du modèle est de déterminer l'amplitude de ce dipôle. Cela est effectué en comparant le champ exact qu'un dipôle générerait à proximité d'une plaque rigide semi-infinie à la solution d'Amiet utilisée pour modéliser le bruit de bord de fuite (ou d'attaque) d'un profil mince isolé. Plus précisément, la comparaison est effectuée sur la distribution de pression pariétale qui est une trace du champ de pression, plutôt que le champ lui-même.

E.2.1 Formulation de Green

Le champ rayonné par un dipôle au bord de fuite d'un demi-plan est calculé à partir de la fonction de Green bidimensionnelle du demi-plan en présence d'un écoulement, introduite par Jones [68] puis par Rienstra [131] (Fig. E.2). Seule la composante transverse du gradient de la fonction de Green selon les coordonnées de la source est nécessaire car le dipôle est normal à l'écoulement.

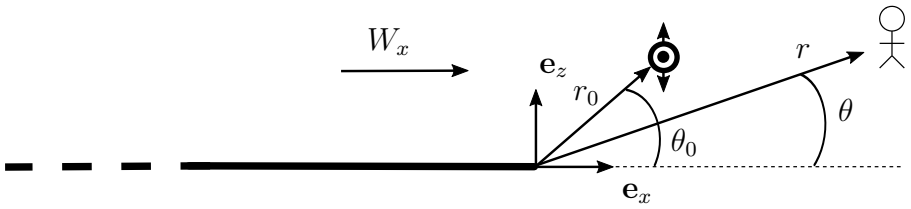


FIGURE E.2 – Représentation et notations d'un dipôle placé au bord de fuite d'un demi-plan en présence d'un écoulement axial et uniforme.

D'après Jones [67], la fonction de Green en présence d'un demi-plan (sans écoulement) est la suivante :

$$G(x,z,k) = \int_{-\infty}^{u_{r_1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1\cosh u}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{u_{r_2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2\cosh u}\mathrm{d}u, \tag{E.24}$$

où les coordonnées polaires sont employées telles que $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $x_0 = r_0\cos\theta_0$, $z_0 = r_0\sin\theta_0$ et :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0), \\ r_2^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta + \theta_0), \\ u_{r_1} &= \operatorname{arsinh}\left\{2\frac{(rr_0)^{1/2}}{r_1}\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\right\}, \\ u_{r_2} &= -\operatorname{arsinh}\left\{2\frac{(rr_0)^{1/2}}{r_2}\cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Le changement de variable suivant est effectué :

$$u = \operatorname{arsinh} t, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Sachant que $\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$, il vient :

$$G(x,z,k) = \int_{-\infty}^{s_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{s_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}, \tag{E.25}$$

où :

$$s_{1,2} = \pm 2\frac{\sqrt{rr_0}}{r_{1,2}}\cos\left(\frac{\theta \mp \theta_0}{2}\right).$$

L'Eq. E.25 n'inclut pas l'effet de transport par l'écoulement (convection). Pour avoir cet effet, des formules de transposition sont appliquées :

$$\begin{aligned} G_M(X,z,K) &= \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}G(X,z,K) \\ &= \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_1\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{s_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_2\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, $\overline{r}_{1,2}^2 = \overline{r}^2 + \overline{r}_0^2 - 2\overline{r}\overline{r}_0\cos\left(\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0\right)$, où $\overline{r} = \sqrt{X^2+z^2}$, $X = x/\beta$, $K = k/\beta$ et $\beta = \sqrt{1-M^2}$. Ces transpositions sont également présentes dans les bornes s_1 et s_2 des intégrales. Les angles corrigés $\overline{\theta}$ et $\overline{\theta}_0$ par rapport à la direction x s'écrivent :

$$\cos\overline{\theta} = \frac{X}{\sqrt{X^2+z^2}}, \quad \cos\overline{\theta}_0 = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}.$$

Dans le cas traité, la source est placée telle que $K\overline{r_0} \ll 1$ et $\overline{\theta_0} = 0$ ($z_0 = 0$). La composante transverse du gradient uniquement est calculée. Pour rappel, la forme générale unidimensionnelle d'une intégrale paramétrique F telle que :

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,z)\mathrm{d}z, \tag{E.26}$$

est dérivable et :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}f(x,b(x)) - \frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\mathrm{d}x}(x,z)\mathrm{d}z.} \tag{E.27}$$

La composante transverse de la fonction de Green s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_M}{\partial z_0} &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\sum_{\mu=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{-\infty}^{s_\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\right\}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\sum_{\mu=1}^{2}\left\{\int_{-\infty}^{s_\mu}\frac{\partial(\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2}})}{\partial z_0}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{\partial s_\mu}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+s_\mu^2}}}{\sqrt{1+s_\mu^2}}\right\}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\sum_{\mu=1}^{2}\left\{\int_{-\infty}^{s_\mu}\frac{\partial(\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2})}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2}}}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u+\frac{\partial s_\mu}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+s_\mu^2}}}{\sqrt{1+s_\mu^2}}\right\}\\
\frac{\partial G_M}{\partial z_0} &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\sum_{\mu=1}^{2}\left\{\int_{-\infty}^{s_\mu}\mathrm{i}K\frac{\partial\overline{r}_\mu}{\partial z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u+\frac{\partial s_\mu}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+s_\mu^2}}}{\sqrt{1+s_\mu^2}}\right\}.
\end{aligned}$$

Le premier terme dérivé s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{r}_{1,2}}{\partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\sqrt{\overline{r}^2+\overline{r}_0^2-2\overline{r}\overline{r}_0\cos(\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0)}\right)\\
&= \frac{1}{2\overline{r}_{1,2}}\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\overline{r}^2+\overline{r}_0^2-2\overline{r}\overline{r}_0\cos(\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0)\right)\\
&= \frac{1}{2\overline{r}_{1,2}}\left(2\overline{r}_0\frac{\partial\overline{r}_0}{\partial z_0}-2\overline{r}\frac{\partial}{\partial z_0}(\overline{r}_0\cos(\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{r}_0}{\partial z_0} &= \frac{\partial}{\partial z_0}(\sqrt{X_0^2+z_0^2})\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_0}(X_0^2+z_0^2)\left[X_0^2+z_0^2\right]^{-1/2}=\frac{z_0}{\overline{r}_0}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\partial\overline{r}_0}{\partial z_0}=\frac{z_0}{\overline{r}_0}.} \tag{E.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_0}(\cos(\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0)) &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\overline{\theta}\cos\overline{\theta}_0\pm\sin\overline{\theta}\sin\overline{\theta}_0\right]\\
&= \cos\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial z_0}\cos\overline{\theta}_0\pm\sin\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial z_0}\sin\overline{\theta}_0\\
&= \cos\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}\right]\pm\sin\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{z_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}\right] &= X_0\frac{\partial}{\partial z_0}\left[(X_0^2+z_0^2)^{-1/2})\right]\\
&= -\frac{X_0}{2}\frac{\partial}{\partial z_0}(X_0^2+z_0^2)\left[X_0^2+z_0^2\right]^{-3/2}=-\frac{X_0z_0}{(X_0^2+z_0^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{z_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}\right] &= \frac{1}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}+z_0\frac{\partial}{\partial z_0}\left[(X_0^2+z_0^2)^{-1/2})\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}-\frac{z_0^2}{(X_0^2+z_0^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}(\cos(\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0)) = -\frac{X_0 z_0}{\overline{r}_0^3}\cos\overline{\theta} \pm \left(\frac{1}{\overline{r}_0} - \frac{z_0^2}{\overline{r}_0^3}\right)\sin\overline{\theta}.} \tag{E.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{r}_{1,2}}{\partial z_0} &= \frac{1}{\overline{r}_{1,2}}\left(\overline{r}_0\frac{\partial \overline{r}_0}{\partial z_0} - \overline{r}\frac{\partial}{\partial z_0}(\overline{r}_0\cos(\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0)\right) \\ &= \frac{1}{\overline{r}_{1,2}}\left\{\overline{r}_0\frac{z_0}{\overline{r}_0} - \overline{r}\left[\frac{z_0}{\overline{r}_0}\cos(\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0) + \overline{r}_0\left(-\frac{X_0 z_0}{\overline{r}_0^3}\cos\overline{\theta} \pm \left(\frac{1}{\overline{r}_0} - \frac{z_0^2}{\overline{r}_0^3}\right)\sin\overline{\theta}\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{r}_{1,2}}{\partial z_0} = \frac{z_0}{\overline{r}_{1,2}} - \frac{\overline{r} z_0}{\overline{r}_{1,2}\overline{r}_0}\cos(\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0) - \frac{\overline{r}}{\overline{r}_{1,2}}\left(-\frac{X_0 z_0}{\overline{r}_0^2}\cos\overline{\theta} \pm \left(1 - \frac{z_0^2}{\overline{r}_0^2}\right)\sin\overline{\theta}\right).} \tag{E.30}$$

La condition $z_0 = 0$ ($\overline{\theta}_0 = 0$) mène à la relation :

$$\boxed{\frac{\partial \overline{r}_{1,2}}{\partial z_0} = \mp\frac{\overline{r}}{\overline{r}_{1,2}}\sin\overline{\theta}, \quad \text{où} \quad \overline{r}_{1,2} = \sqrt{\overline{r}^2 + \overline{r}_0^2 - 2\overline{r}\overline{r}_0\cos\overline{\theta}}.} \tag{E.31}$$

Le second terme dérivé s'écrit :

$$\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\pm 2\frac{\sqrt{\overline{r}_0\overline{r}}}{r_{1,2}}\cos\left(\frac{\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0}{2}\right)\right]. \tag{E.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0}{2}\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) \pm \sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] \pm \sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Or,

$$\cos^2\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2}, \quad \sin^2\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) = \frac{1 - \cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2}, \tag{E.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos^2\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right],$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1 + \cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2}\right] &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1 + \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + z_0^2}}}{2}\right] \\ &= \frac{X_0}{2}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1}{\sqrt{X_0^2 + z_0^2}}\right] \\ &= -\frac{X_0 z_0}{2\overline{r}_0^3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = -\frac{X_0 z_0}{2\overline{r}_0^3},$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = -\frac{X_0 z_0}{4\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}.} \tag{E.34}$$

De la même manière,

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\sin^2\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = 2\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1-\cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2}\right] &= \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1-\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}}{2}\right] \\ &= \frac{X_0}{2}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1}{\sqrt{X_0^2+z_0^2}}\right] \\ &= \frac{X_0 z_0}{2\overline{r}_0^3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = \frac{X_0 z_0}{4\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}.} \tag{E.35}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = -\frac{X_0 z_0}{4\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \pm \frac{X_0 z_0}{4\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right).} \tag{E.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] &= -\frac{X_0 z_0}{4\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \pm \frac{X_0 z_0}{4\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0^3}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \\ &= -\frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)\sin\left(\overline{\theta}_0\right)}{4\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0}\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \pm \frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)\sin\left(\overline{\theta}_0\right)}{4\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\overline{r}_0}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\sin\left(\overline{\theta}_0\right) = 2\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] &= -\frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)}{2\overline{r}_0}\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \pm \frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)}{2\overline{r}_0}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \\ &= -\frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2\overline{r}_0}\left[\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \mp \cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Puis,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\cos\left(\frac{\overline{\theta}\mp\overline{\theta}_0}{2}\right)\right] = -\frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2\overline{r}_0}\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0\mp\overline{\theta}}{2}\right).} \tag{E.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\pm 2\frac{\sqrt{\overline{r}_0\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}}\right] &= \pm 2\sqrt{\overline{r}}\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{\sqrt{\overline{r}_0}}{\overline{r}_{1,2}}\right] \\ &= \frac{\pm 2\sqrt{\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}^2}\left(\frac{\partial\sqrt{\overline{r}_0}}{\partial z_0}\overline{r}_{1,2} - \frac{\partial\overline{r}_{1,2}}{\partial z_0}\sqrt{\overline{r}_0}\right).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\sqrt{\overline{r}_0}}{\partial z_0} = \frac{1}{2\sqrt{\overline{r}_0}}\frac{\partial\overline{r}_0}{\partial z_0} = \frac{z_0}{2\sqrt{\overline{r}_0\overline{r}_0}}.$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\pm 2\frac{\sqrt{\overline{r}_0\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}}\right] = \pm\frac{2\sqrt{\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}^2}\left(\frac{z_0\overline{r}_{1,2}}{2\overline{r}_0^{3/2}} - \sqrt{\overline{r}_0}\frac{\partial\overline{r}_{1,2}}{\partial z_0}\right).} \tag{E.38}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0} = \pm 2\frac{\sqrt{\overline{r}_0\overline{r}}}{r_{1,2}}\left[-\frac{\cos\left(\overline{\theta}_0\right)}{2\overline{r}_0}\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0 \mp \overline{\theta}}{2}\right)\right] \pm \frac{2\sqrt{\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}^2}\left(\frac{z_0\overline{r}_{1,2}}{2\overline{r}_0^{3/2}} - \sqrt{\overline{r}_0}\frac{\partial\overline{r}_{1,2}}{\partial z_0}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0}{2}\right).} \tag{E.39}$$

Si $z_0 = 0$ ($\overline{r}_0 = X_0$, $\overline{\theta}_0 = 0$) :

$$\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0 \mp \overline{\theta}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) = \mp\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\overline{\theta} \mp \overline{\theta}_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) \pm \sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\sin\left(\frac{\overline{\theta}_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right),$$

$$\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0} = \pm 2\frac{\sqrt{X_0\overline{r}}}{r_{1,2}}\left[\pm\frac{1}{2X_0}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\right] \pm \frac{2\sqrt{\overline{r}}}{\overline{r}_{1,2}^2}\left(\pm\sqrt{X_0}\frac{\overline{r}}{\overline{r}_{1,2}}\sin\left(\overline{\theta}\right)\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right),$$

$$\boxed{\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0} = \frac{1}{r_{1,2}}\sqrt{\frac{\overline{r}}{X_0}}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) + 2\sqrt{X_0}\frac{\overline{r}^{3/2}}{\overline{r}_{1,2}^3}\sin\left(\overline{\theta}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right).} \tag{E.40}$$

La composante transverse du gradient de la fonction de Green s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_M}{\partial z_0} &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\sum_{\mu=1}^{2}\left\{\int_{-\infty}^{s_\mu}\mathrm{i}K\frac{\partial\overline{r}_\mu}{\partial z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u + \frac{\partial s_\mu}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_\mu\sqrt{1+s_\mu^2}}}{\sqrt{1+s_\mu^2}}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{\int_{-\infty}^{s_1}\mathrm{i}K\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_1\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{s_2}\mathrm{i}K\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_2\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial s_1}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_1\sqrt{1+s_1^2}}}{\sqrt{1+s_1^2}} + \frac{\partial s_2}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_2\sqrt{1+s_2^2}}}{\sqrt{1+s_2^2}}\right\}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_2 = \sqrt{\overline{r}^2 + X_0^2 - 2\overline{r}X_0\cos\overline{\theta}}, \quad s_1^2 = s_2^2 = \frac{4X_0\overline{r}\cos^2(\overline{\theta}/2)}{\overline{r}^2 + X_0^2 - 2\overline{r}X_0\cos\overline{\theta}}, \quad \frac{\partial s_1}{\partial z_0} = \frac{\partial s_2}{\partial z_0}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_M}{\partial z_0} &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{\int_{-\infty}^{s_1} -\mathrm{i}K\frac{\overline{r}}{\overline{r}_1}\sin\overline{\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_1\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{s_2}\mathrm{i}K\frac{\overline{r}}{\overline{r}_2}\sin\overline{\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_2\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_{1,2}\sqrt{1+s_{1,2}^2}}}{\sqrt{1+s_{1,2}^2}}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{2\frac{\partial s_{1,2}}{\partial z_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_{1,2}\sqrt{1+s_{1,2}^2}}}{\sqrt{1+s_{1,2}^2}}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\overline{r}_{1,2}\sqrt{1+s_{1,2}^2}}}{\sqrt{1+s_{1,2}^2}}\left(\frac{1}{r_{1,2}}\sqrt{\frac{\overline{r}}{X_0}}\sin\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right) + 2\sqrt{X_0}\frac{\overline{r}^{3/2}}{\overline{r}_{1,2}^3}\sin\left(\overline{\theta}\right)\cos\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

$$s_{1,2}^2 = \frac{4X_0\overline{r}\cos^2(\overline{\theta}/2)}{\overline{r}^2+X_0^2-2\overline{r}X_0\cos\overline{\theta}}, \quad 1+s_{1,2}^2 = \frac{\overline{r}^2+X_0^2-2\overline{r}X_0\cos\overline{\theta}+4X_0\overline{r}\cos^2(\overline{\theta}/2)}{\overline{r}^2+X_0^2-2\overline{r}X_0\cos\overline{\theta}}.$$

Sur la paroi, $\cos\overline{\theta}=-1$, $(\cos^2\left(\frac{\overline{\theta}}{2}\right)=0)$:

$$1+s_{1,2}^2=1, \quad \overline{r}_{1,2}=\overline{r}+X_0,$$

$$\frac{\partial G_M}{\partial z_0} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(\overline{r}+X_0)}\left(\frac{1}{\overline{r}+X_0}\sqrt{\frac{\overline{r}}{X_0}}\right)\right\}.$$

À la paroi, $\overline{r}=-X$:

$$\frac{\partial G_M}{\partial z_0} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KM(X-X_0)}}{\beta}\left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(X_0-X)}\left(\frac{1}{(X_0-X)}\sqrt{\frac{-X}{X_0}}\right)\right\}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{\partial G_M}{\partial z_0} = 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KX_0(1+M)}}{\beta\sqrt{X_0}}\frac{\sqrt{-X}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KX(1+M)}}{(X_0-X)}.} \tag{E.41}$$

E.2.2 Amplitude du dipôle équivalent

Pour obtenir l'expression du dipôle au bord d'attaque, il est nécessaire d'inverser le sens de l'écoulement ($M=-M$) et la coordonnée de l'abscisse ($X=-X$). L'équation devient :

$$\frac{\partial G_M}{\partial z_0} = 2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KX_0(1-M)}}{\beta\sqrt{-X_0}}\frac{\sqrt{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KX(1-M)}}{(X-X_0)}. \tag{E.42}$$

L'expression du saut instationnaire calculé avec le modèle d'Amiet, s'écrit, avec des coordonnées non adimensionnées par la demi-corde du profil :

$$\begin{aligned} {l_1}^A(x,\omega) &= \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(1-M)x/\beta^2}}{\sqrt{\pi(k/M)(1+M)x}}, \\ &= \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0}{\sqrt{\pi(k/M)(1+M)\beta}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(1-M)X}}{\sqrt{X}}. \end{aligned} \tag{E.43}$$

Le régime asymptotique est atteint lorsque $X_0\to 0$. Ainsi la dépendance axiale de la fonction de Green tend vers :

$$\lim_{X_0\to 0}\frac{\sqrt{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KX(1-M)}}{(X-X_0)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(1-M)X}}{\sqrt{X}},$$

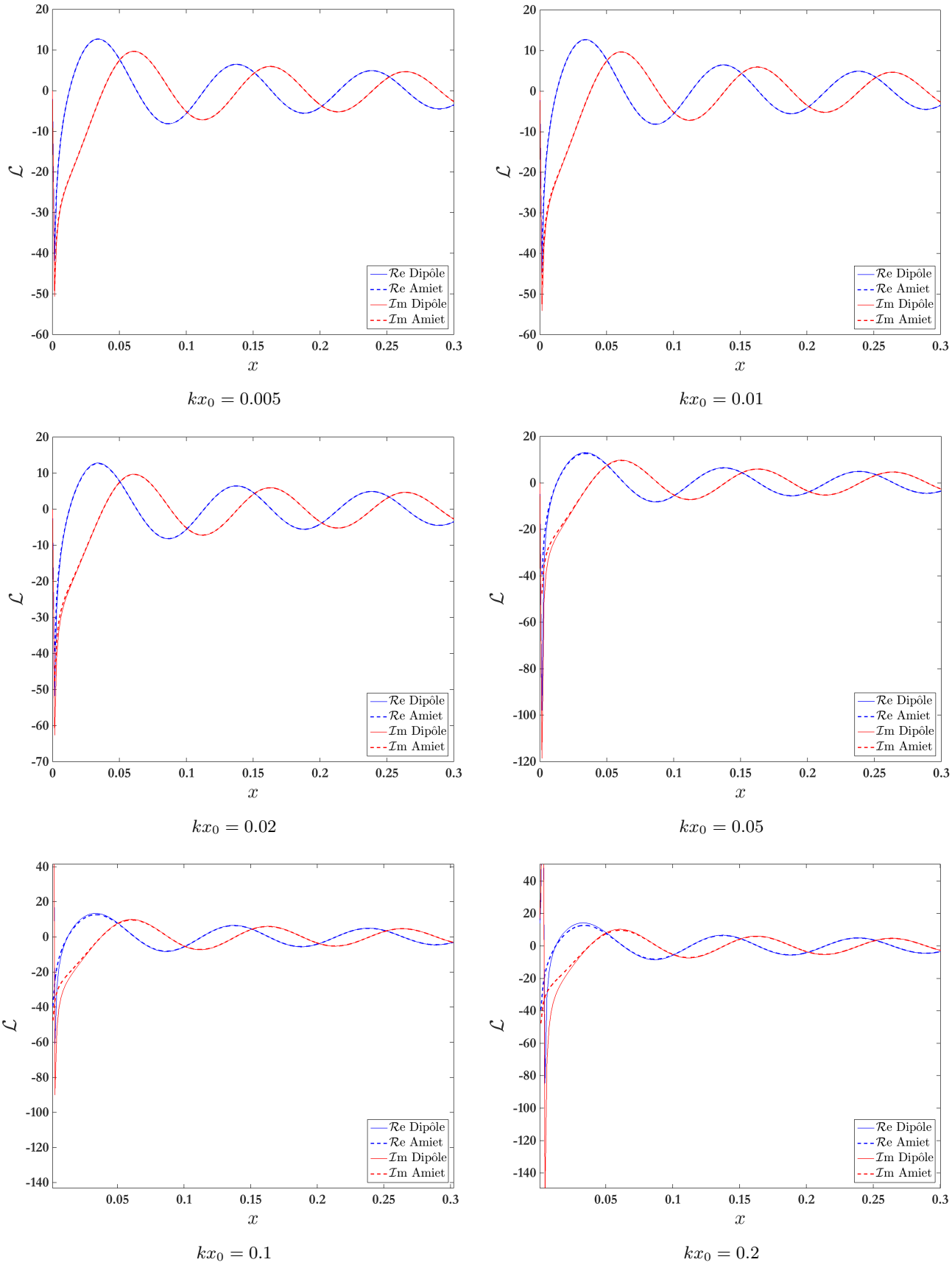
et s'identifie au terme de la formule d'Amiet. L'amplitude α_G du dipôle équivalent, permettant d'identifier le chargement instationnaire calculé par le formalisme d'Amiet s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \alpha_G &= \frac{-2\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0}{\sqrt{\pi(k/M)(1+M)\beta}} \times \frac{\beta\sqrt{-X_0}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KX_0(1-M)}} \\ &= -\frac{\rho_0 W_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} w_0 M\sqrt{-X_0\beta}}{\sqrt{\pi k(1+M)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KX_0(1-M)}. \end{aligned} \tag{E.44}$$

Les cartographies suivantes (Figs. E.3, E.4 et E.5) illustrent la loi de réglage en fonction des différents paramètres. Les fréquences d'excitation du dipôle sont égales à $f\in[500,1000,2000,5000,8000,10000]$.

La vitesse de l'écoulement moyen prend les valeurs $W_x \in [10, 40, 80, 150, 200, 330]$ m/s. Enfin, la distance entre le dipôle et le bord d'attaque varie, pour une fréquence d'excitation $f = 3$ kHz, tel que $kx_0 \in [0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2]$. La variation en fréquence et en vitesse d'écoulement est validée, si la distance entre le dipôle et le bord d'attaque lui permet de rester dans le domaine de rayonnement asymptotique ($kx_0 \leqslant 0.02$). Au delà de cette distance, l'égalité entre les deux formulations n'est plus assurée au bord d'attaque, tout en restant identique plus en aval.

Variation en x_0, $f = 3000$ Hz, $W_x = 40$ m/s



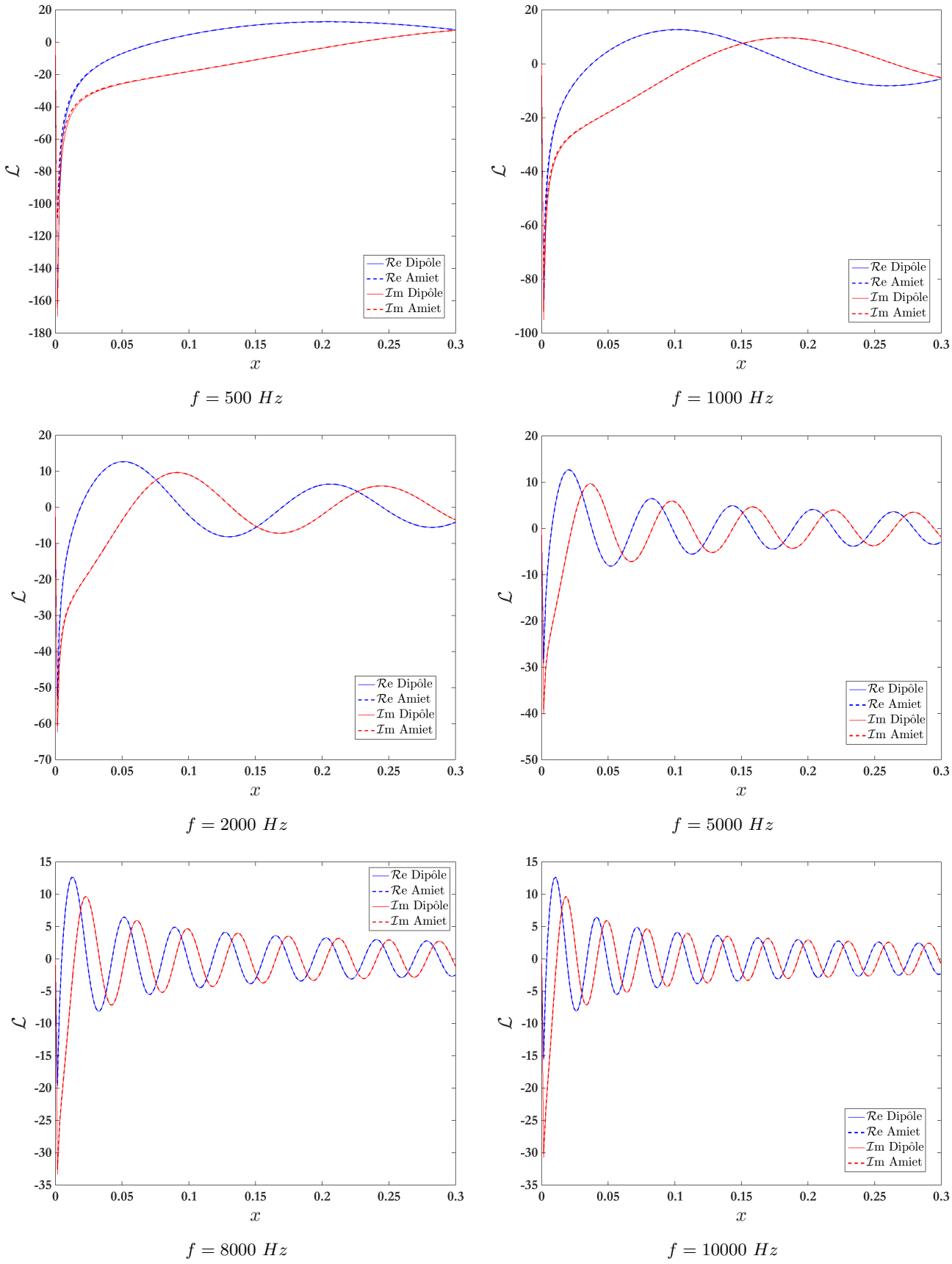
$kx_0 = 0.005$ $kx_0 = 0.01$

$kx_0 = 0.02$ $kx_0 = 0.05$

$kx_0 = 0.1$ $kx_0 = 0.2$

FIGURE E.3 – Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x, \omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la distance x_0.

Variation en f, $x_0 = 0.005$, $W_x = 40$ m/s



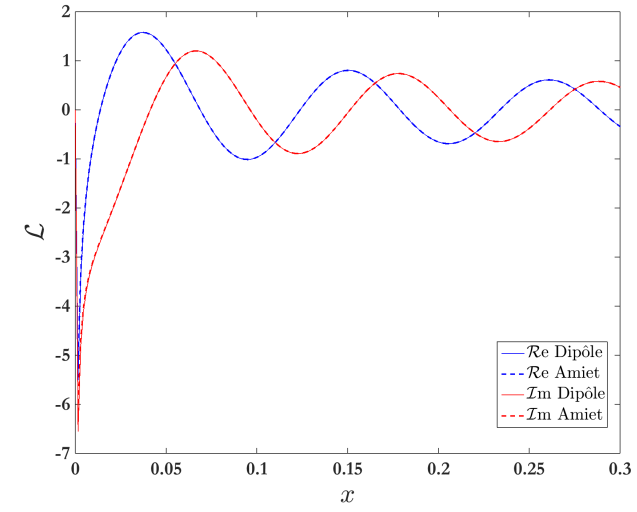
$f = 500\ Hz$ $f = 1000\ Hz$

$f = 2000\ Hz$ $f = 5000\ Hz$

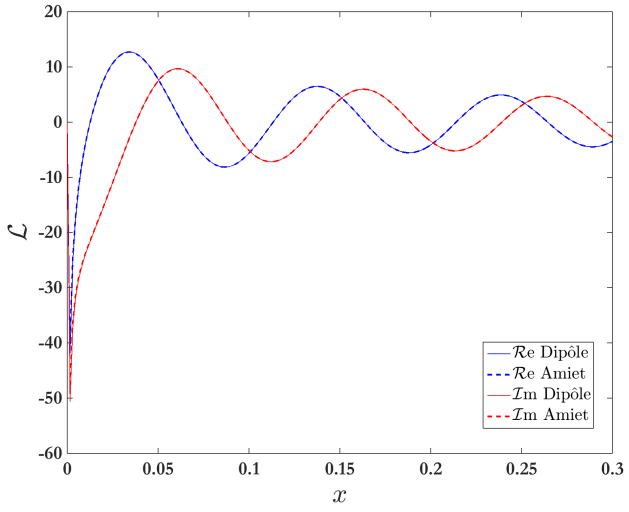
$f = 8000\ Hz$ $f = 10000\ Hz$

FIGURE E.4 – Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x, \omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la fréquence d'excitation f.

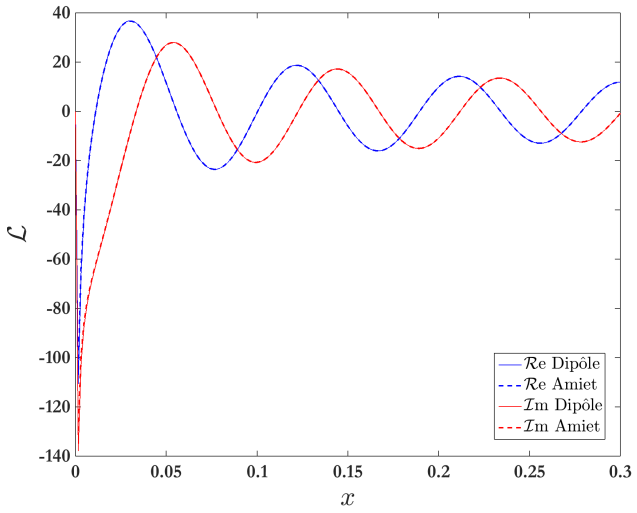
Variation en W_x, $x_0 = 0.005$, $f = 3000$ Hz



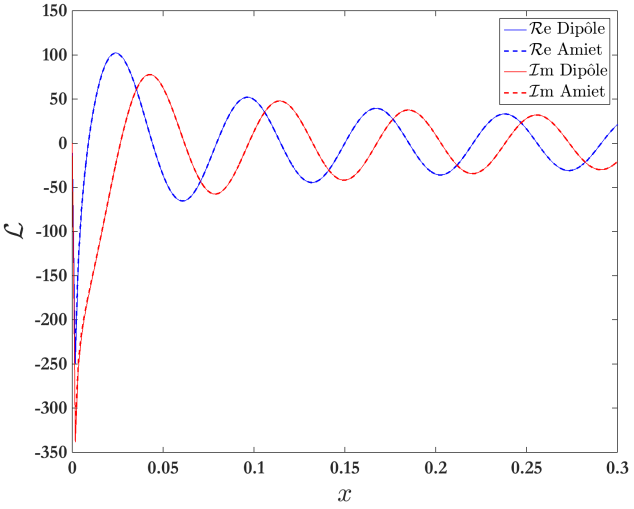
$W_x = 10$ m/s



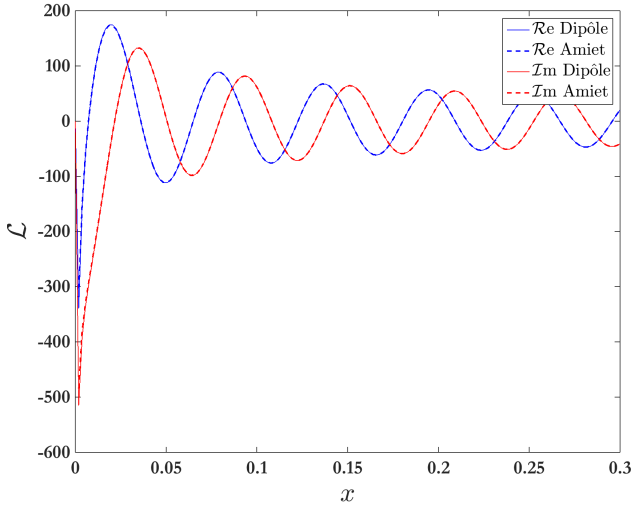
$W_x = 40$ m/s



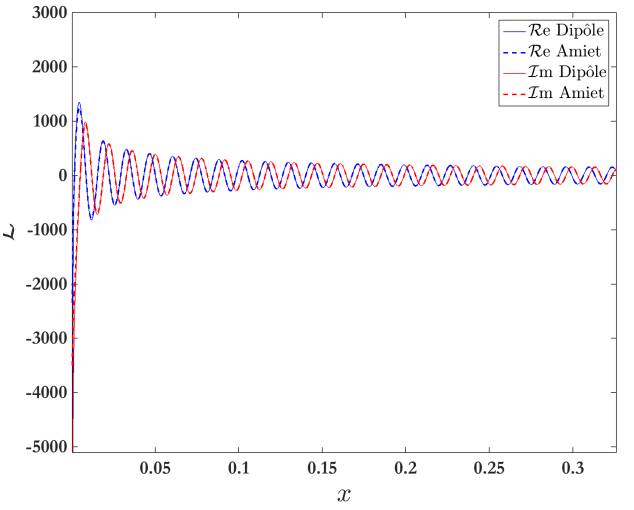
$W_x = 80$ m/s



$W_x = 150$ m/s



$W_x = 200$ m/s



$W_x = 330$ m/s

FIGURE E.5 – Sauts de pression instationnaires calculés avec le modèle d'Amiet ${l_1}^A(x,\omega)$ et la fonction de Green d'un dipôle équivalent α_G $(\partial G_M/\partial z_0)$, en fonction de la vitesse de l'écoulement moyen W_x.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Abramowitz, M.** et **Stegun, I.A.** : *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Num. 55. Dover, 1964.

[2] **Achenbach, J.D.** et **Li, Z.L.** : Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens. *Wave motion*, 8(3):225–234, 1986.

[3] **Amiet, R.K.** : Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *Journal of Sound and vibration*, 41(4):407–420, 1975.

[4] **Amiet, R.K.** : High frequency thin-airfoil theory for subsonic flow. *AIAA journal*, 14(8):1076–1082, 1976.

[5] **Antoni, J.** : A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4):2873–2890, 2012.

[6] **Atassi, H.** et **Hamad, G.** : Sound generated in a cascade by three-dimensional disturbances convected in a subsonic flow. *In 7th AIAA Aeroacoustics Conference*, October 1981.

[7] **Atassi, H.M.**, **Ali, A.A.**, **Atassi, O.V.** et **Vinogradov, I.V.** : Scattering of incident disturbances by an annular cascade in a swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 499:111–138, 2004.

[8] **Behn, M.**, **Tapken, U.**, **Puttkammer, P.**, **Hagmeijer, R.** et **Thouault, N.** : Comparative study of different analytical approaches for modelling the transmission of sound waves through turbomachinery stators. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2927, 2016.

[9] **Bennett, G.J.**, **O'Reilly, C.**, **Tapken, U.** et **Fitzpatrick, J.** : Noise source location in turbomachinery using coherence based modal decomposition. *In Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Miami, FL, USA*, num. 3367, 2009.

[10] **Bonneau, V.**, **Polacsek, C.**, **Barrier, R.** et **Lewy, S.** : Prediction of harmonic sound power generated by a modern turbofan with heterogeneous ogv and internal bifurcations. *In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.

[11] **Bonneau, V.**, **Polacsek, C.**, **Barrier, R.**, **Lewy, S.**, **Roux, J.-M.** et **Gervais, Y.** : Tonal noise prediction of a turbofan with heterogeneous stator and bifurcations. *AIAA Journal*, 53(11):3354–3369, 2015.

[12] **Bouley, S.**, **Finez, A.** et **Roger, M.** : Rotor-stator wake-interaction tonal noise modeling with an edge-dipole approach. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3061, 2016.

[13] **Carlson, J.F.** et **Heins, A.E.** : The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates. *Quart. Appl. Math*, 4:313–329, 1947.

[14] **Carta, F.O.** : Unsteady aerodynamic theory of a staggered cascade of oscillating airfoils in compressible flow. Rap. tech., U.A.C. Research Dept., 1957.

[15] **Casalino, D.**, **Ribeiro, A.F.P.**, **Fares, E.**, **Nölting, S.**, **Mann, A.**, **Perot, F.**, **Li, Y.**, **Lew, P.-T.**, **Sun, C.**, **Gopalakrishnan, P.** et **others** : Towards lattice-boltzmann prediction of turbofan engine noise. *AIAA Paper*, 3101:2014, 2014.

[16] **Castres, F.O.** et **Joseph, P.F.** : Experimental investigation of an inversion technique for the determination of broadband duct mode amplitudes by the use of near-field sensor arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(2):848–859, 2007.

[17] **Chapman, C.J.** : Sound radiation from a cylindrical duct. part 1. ray structure of the duct modes and of the external field. *Journal of Fluid Mechanics*, 281:293–311, 1994.

[18] **Chu, B.-T.** et **Kovásznay, L.S.G.** : Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(05):494–514, 1958.

[19] **Colehour, J.L.** et **Farquhar, B.W.** : Inlet vortex. *Journal of Aircraft*, 8(1):39–43, 1971.

[20] **Colonius, T.** et **Lele, S.K.** : Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace sciences*, 40(6):345–416, 2004.

[21] **Daly, B.B.** : *Woods practical guide to fan engineering.* Woods of Colchester Limited, 1992.

[22] **de Laborderie, J.** : *Approches analytiques et numériques pour la prédiction du bruit tonal et large bande de soufflantes de turboréacteurs.* Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 2013.

[23] **de Laborderie, J.**, **Blandeau, V.**, **Nodé-Langlois, T.** et **Moreau, S.** : Extension of a fan tonal noise cascade model for camber effects. *AIAA Journal*, 53(4):863–876, 2014.

[24] **de Laborderie, J.**, **Moreau, S.**, **Berry, A.** et **Posson, H.** : Several technological effects on tonal fan noise prediction. *In 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2012–2131, 2012.

[25] **Dowling, A.P.** et **Ffowcs-Williams, J.E.** : *Sound and sources of sound.* Horwood, 1983.

[26] **Duan, Y.** : *Trapped modes and acoustic resonances.* Thèse de doctorat, Loughborough University, 2004.

[27] **Duan, Y.** et **McIver, M.** : Rotational acoustic resonances in cylindrical waveguides. *Wave Motion*, 39(3):261–274, 2004.

[28] **Durand, C.** et **Hixon, D.R.** : Comparison of computational aeroacoustics prediction of vortical gust scattering by a 2d stator with flat plate theory. *In 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2842, June 2015.

[29] **Envia, E.** : Acoustic power transmission loss through a ducted fan. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3064, 2016.

[30] **Evans, D.V.** : Trapped acoustic modes. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 49(1):45–60, 1992.

[31] **Farassat, F.** et **Myers, M.K.** : A graphical approach to wave propagation in a rigid duct. *Journal of sound and vibration*, 200(5):729–735, 1997.

[32] **Feynman, R.P.** : *The character of physical law.* MIT press, 1965.

[33] **Ffowcs-Williams, J.E.** et **Hall, L.H.** : Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 40(04):657–670, 1970.

[34] **Ffowcs-Williams, J.E.** et **Hawkings, D.L.** : Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 264(1151):321–342, 1969.

[35] **Finez, A.**, **Pereira, A.** et **Leclère, Q.** : Broadband mode decomposition of ducted fan noise using cross-spectral matrix denoising. *In Proceedings of Fan Noise 2015, Lyon, France*, 2015.

[36] **Floquet, G.** : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12(2):47–88, 1883.

[37] **François, B.**, **Bouley, S.**, **Roger, M.** et **Moreau, S.** : Analytical models based on a mode-matching technique for turbulence impingement noise on axial-flow outlet guide vanes. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2947, 2016.

[38] **Gibbs, J.W.** : Fourier's series. *Nature*, 59:200, 1898.

[39] **Glauert, H.** : The effect of compressibility on the lift of an aerofoil. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 118(779):113–119, 1928.

[40] **Glegg, S.A.L.** : The response of a swept blade row to a three-dimensional gust. *Journal of Sound and Vibration*, 227(1):29–64, 1999.

[41] **Goldstein, M.E.** : *Aeroacoustics*. McGraw-Hill, 1976.

[42] **Golub, G.H.**, **Heath, M.** et **Wahba, G.** : Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223, 1979.

[43] **Gradshteyn, I.S.** et **Ryzhik, I.M.** : *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Seventh edition, 2007.

[44] **Graham, J.M.R.** : Similarity rules for thin aerofoils in non-stationary subsonic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 43(04):753–766, 1970.

[45] **Grilliat, J.** : *Contribution à l'étude aéroacoustique des écoulements de jeu*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2009.

[46] **Guédel, A.** : *Les ventilateurs : Bruit et techniques de réduction*. Dunod, 2015.

[47] **Hall, K.C.** : Exact solution to category 3 problems - Turbomachinery noise. *In* C. Tam et J. Hardin, éds : *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, vol. NASA-CP-3352, p. 41–43. 1997.

[48] **Hall, K.C.** : A variational finite element method for computational aeroacoustic calculations of turbomachinery noise. *In* C. Tam et J. Hardin, éds : *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, vol. NASA-CP-3352, p. 269–278. 1997.

[49] **Hall, K.C.** et **Silkowski, P.D.** : The influence of neighboring blade rows on the unsteady aerodynamic response of cascades. *In ASME 1995 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 1995.

[50] **Hansen, P.C.** et **O'Leary, D.P.** : The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14:1487–1503, November 1993.

[51] **Hanson, D.** : Study of noise and inflow distortion sources in the nasa QF-1B fan using measured blade and vane pressures, NASA CR-2899. 1977.

[52] **Hanson, D.** : Broadband noise of fans-with unsteady coupling theory to account for rotor and stator reflection/transmission effects. contractor report cr-211136-rev1. 2001.

[53] **Hanson, D.B.** : Acoustic reflection and transmission of rotors and stators including mode and frequency scattering. 1997.

[54] **Harel, P.** et **Perulli, M.** : The influence of a stationary uniform axial flow on the propagation of acoustic modes of vibration in a cylindrical duct. *Journal of Sound and Vibration*, 15(4):455–474, 1971.

[55] **Heavens, S.N.** : An experimental study of sound diffraction at an airfoil trailing edge. *Journal of Fluid Mechanics*, 84(02):331–335, 1978.

[56] **Heins, A.E.** : The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates, III. *Quart. Appl. Math.*, 8:281–291, 1950.

[57] **Heins, A.E.** et **Carlson, J.F.** : The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates, II. *Quart. Appl. Math*, 5:82–88, 1947.

[58] **Hopf, E.** et **Wiener, N.** : Über eine klasse singulärer integralgleichungen. *Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, 1931 XXXI*, 1, 1932.

[59] **Howe, M.S.** : The influence of vortex shedding on the generation of sound by convected turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 76(04):711–740, 1976.

[60] **Howe, M.S.** : Attenuation of sound due to vortex shedding from a splitter plate in a mean flow duct. *Journal of sound and vibration*, 105(3):385–396, 1986.

[61] **Hu, F.Q.** et **Manthey, J.L.** : Application of PML absorbing boundary conditions to the benchmark problems of the computational aeroacoustics. *In* C. Tam et J. Hardin, éds : *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, vol. NASA-CP-3352, p. 119–151. 1997.

[62] **Hubbard, H.H.** : Aeroacoustics of flight vehicles, theory and practice : Noise sources. Rap. tech., 1991.

[63] **Huber, J.** et **Illa, S.** : Jet noise assessment and sensitivity at aircraft level. *AIAA Paper*, 3728:3, 2007.

[64] **Ingenito, J.** : *Vers une modélisation d'aide à la conception acoustique d'étages de compresseurs subsoniques de turbomachines.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2010.

[65] **Ingenito, J.** et **Roger, M.** : Analytical modelling of sound transmission through the passage of centrifugal compressor. *In 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Juin 2007.

[66] **Job, S.**, **Lunéville, E.** et **Mercier, J.-F.** : Diffraction of an acoustic wave by a plate in a uniform flow : a numerical approach. *Journal of Computational Acoustics*, 13(04):689–709, 2005.

[67] **Jones, D.S.** : *The Theory of Electromagnetism.* Pergamon Press, Oxford, 1964.

[68] **Jones, D.S.** : Aerodynamic sound due to a source near a half-plane. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 9(1):114–122, 1972.

[69] **Kaji, S.** et **Okazaki, T.** : Generation of sound by rotor-stator interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 13(3):281–307, 1970.

[70] **Kaji, S.** et **Okazaki, T.** : Propagation of sound waves through a blade row : I. analysis based on the semi-actuator disk theory. *Journal of Sound and Vibration*, 11(3):339–353, 1970.

[71] **Kaji, S.** et **Okazaki, T.** : Propagation of sound waves through a blade row : II. analysis based on the acceleration potential method. *Journal of Sound and Vibration*, 11(3):355–375, 1970.

[72] **Kellendonk, J.** et **Richard, S.** : Weber–schafheitlin-type integrals with exponent 1. *Integral Transforms and Special Functions*, 20(2):147–153, 2009.

[73] **Kirby, R.** : A comparison between analytic and numerical methods for modelling automotive dissipative silencers with mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 325(3):565–582, 2009.

[74] **Koch, W.** : On the transmission of sound waves through a blade row. *Journal of sound and vibration*, 18(1):111–128, 1971.

[75] **Koch, W.** : Resonant acoustic frequencies of flat plate cascades. *Journal of Sound and Vibration*, 88(2):233–242, 1983.

[76] **Kodama, H.** et **Namba, M.** : Unsteady lifting surface theory for a rotating cascade of swept blades. *In ASME 1989 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition.* American Society of Mechanical Engineers, 1989.

[77] **Lamb, H.** : *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, 1932.

[78] **Landhal, M.** : *Unsteady Transonic Flow.* Pergamon Press, Inc. New York, 1961.

[79] **Lane, F.** et **Friedman, M.** : Theoretical investigation of subsonic oscillatory blade-row aerodynamics ; naca tech. Rap. tech., Note 4136, 1958.

[80] **Lansing, D.L.** et **Zorumski, W.E.** : Effects of wall admittance changes on duct transmission and radiation of sound. *Journal of Sound and Vibration*, 27(1):85–100, 1973.

[81] **Leclère, Q.**, **Pereira, A.**, **Finez, A.** et **Souchotte, P.** : Indirect calibration of a large microphone array for in-duct acoustic measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 376:48–59, 2016.

[82] **Lieblein, S.** : Loss and stall analysis in compressor cascades. *Journal of Basic Engineering*, p. 387–400, 1959.

[83] **Lighthill, M.J.** : On sound generated aerodynamically. I. General theory. *In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 211, p. 564–587. The Royal Society, 1952.

[84] **Lighthill, M.J.** : On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. *In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 222, p. 1–32. The Royal Society, 1954.

[85] **Linton, C.M.** et **Evans, D.V.** : Acoustic scattering by an array of parallel plates. *Wave Motion*, 18(1):51–65, 1993.

[86] **Liouville, J.** : Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, p. 253–265, 1836.

[87] **Lockard, D.P.** et **Morris, P.J.** : A parallel simulation of gust/cascade interaction noise. *In* C. Tam et J. Hardin, éds : *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, vol. NASA-CP-3352, p. 279–287. 1997.

[88] **Mani, R.** et **Horvay, G.** : Sound transmission through blade. *Journal of sound and vibration*, 12(1):59–83, 1970.

[89] **Mason, V.** : Some experiments on the propagation of sound along a cylindrical duct containing flowing air. *Journal of Sound and Vibration*, 10(2):208–226, 1969.

[90] **McAlpine, A.**, **Astley, R.J.**, **Hii, V.J.T.**, **Baker, N.J.** et **Kempton, A.J.** : Acoustic scattering by an axially-segmented turbofan inlet duct liner at supersonic fan speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4):780–806, 2006.

[91] **Meauzé, G.** : Turbomachines : calcul des écoulements compressibles. *Techniques de l'ingénieur Machines hydrauliques et thermiques : fondamentaux et concepts innovants*, 1995.

[92] **Mérigoux, J.-M.** : Ventilateurs. compresseurs. notions fondamentales. dimensionnement. *Techniques de l'ingénieur. Génie mécanique*, 1999.

[93] **Miles, J.W.** : On rayleigh scattering by a grating. *Wave Motion*, 4(3):285–292, 1982.

[94] **Mittra, R.** : Relative convergence of the solution of a doubly infinite set of equations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 67(2):245–254, 1963.

[95] **Mittra, R.** et **Lee, S.-W.** : *Analytical techniques in the theory of guided waves.* Macmillan, 1971.

[96] **Molerón, M.**, **Dubois, G.**, **Richoux, O.**, **Félix, S.** et **Pagneux, V.** : Reduced modal modelling of time-domain propagation in complex waveguide networks. *Acta Acustica united with Acustica*, 100(3):391–400, 2014.

[97] **Moreau, A.**, **Guérin, S.** et **Busse, S.** : A method based on the ray structure of acoustic modes for predicting the liner performance in annular ducts with flow. *NAG/DAGA*, 2009.

[98] **Moreau, S.**, **Roger, M.** et **Jurdic, V.** : Effect of angle of attack and airfoil shape on turbulence-interaction noise. *In 11 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference(26 th Aeroacoustics Conference)*, p. 1–20, 2005.

[99] **Motsinger, R.E.**, **Kraft, R.E.**, **Zwick, J.W.**, **Vukelich, S.I.**, **Minner, G.L.** et **Baumeister, K.J.** : Optimization of suppression for two-element treatment liners for turbomachinery exhaust ducts. *NASA CR-134997*, 1976.

[100] **Murray Schafer, R.** : *Le paysage sonore : Le monde comme musique.* Wildproject, 2010.

[101] **Namba, M.** : Three-dimensional analysis of blade force and sound generation for an annular cascade in distorted flows. *Journal of Sound and Vibration*, 50(4):479–508, 1977.

[102] **Namba, M.** : Three-dimensional flows. *In* M. Platzer et F. Carta, éds : *AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines*, vol. 1, Unsteady Turbomachinery Aerodynamics, chap. 4. 1987.

[103] **Namba, M.** et **Schulten, J.B.H.M.** : Category 4–fan stator with harmonic excitation by rotor wake. *In* J. Hardin, D. Huff et C. Tam, éds : *Third Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, p. 73–86. 2000.

[104] **Nayfeh, A.** et **Huddleston, D.** : Resonant acoustic frequencies of parallel plates. *AIAA Paper*, p. 79–1522, 1979.

[105] **NF EN ISO 13349** : Ventilateurs - vocabulaire et définitions des catégories. 2010.

[106] **Oppeneer, M.**, **Rienstra, S.W.** et **Sijtsma, P.** : Efficient mode-matching based on closed form integrals of Pridmore-Brown modes. *In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Berlin*, vol. 2172, p. 27–29, 2013.

[107] **Ovenden, N. C.** et **Rienstra, S. W.** : Mode-matching strategies in slowly varying engine ducts. *AIAA Journal*, 42(9):1832–1840, 2004.

[108] **Ovenden, N.C.** : A uniformly valid multiple scales solution for cut-on cut-o transition of sound in ow ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 286:403416, 2005.

[109] **Parker, R.** : Resonance effects in wake shedding from parallel plates : calculation of resonant frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 5(2):330–343, 1967.

[110] **Paterson, R.W.** et **Amiet, R.K.** : Noise and surface pressure response of an airfoil to incident turbulence. *Journal of Aircraft*, 14(8):729–736, 1977.

[111] **Peake, N.** : The scattering of vorticity waves by an infinite cascade of flat plates in subsonic flow. *Wave Motion*, 18(3):255–271, 1993.

[112] **Peake, N.** et **Kerschen, E.J.** : A uniform asymptotic approximation for high-frequency unsteady cascade flow. *In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 449, p. 177–186. The Royal Society, 1995.

[113] **Peake, N.** et **Parry, A.B.** : Modern challenges facing turbomachinery aeroacoustics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44:227–248, 2012.

[114] **Pereira, A.**, **Antoni, J.** et **Leclère, Q.** : Empirical bayesian regularization of the inverse acoustic problem. *Applied Acoustics*, 97:11 – 29, 2015.

[115] **Pereira, A.**, **Finez, A.**, **Leclère, Q.**, **Salze, E.** et **Souchotte, P.** : Modal identification of a small-scale ducted fan. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3063, 2016.

[116] **Petiau, G.** : *La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique Mathématique*. CNRS, Paris, 1955.

[117] **Philbrick, D.A.** et **Topol, D.A.** : Development of a fan noise design system, Part 1 : system design and source modeling. *In 15th AIAA Aeroacoustics Conference*, 1993.

[118] **Pierce, A.D.** : *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. McGraw-Hill, 1981.

[119] **Posson, H.** : *Fonctions de réponse de grille d'aubes et effet d'écran pour le bruit à large bande des soufflantes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2008.

[120] **Posson, H.**, **Bériot, H.** et **Moreau, S.** : On the use of an analytical cascade response function to predict sound transmission through an annular cascade. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15):3706–3739, 2013.

[121] **Posson, H.**, **Moreau, S.** et **Roger, M.** : On the use of a uniformly valid analytical cascade response function for fan broadband noise predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 329(18):3721–3743, 2010.

[122] **Posson, H.**, **Moreau, S.** et **Roger, M.** : Broadband noise prediction of fan outlet guide vane using a cascade response function. *Journal of Sound and Vibration*, 330(25):6153–6183, 2011.

[123] **Posson, H.** et **Roger, M.** : Parametric study of gust scattering and sound transmission through a blade row. *In 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, June 2007.

[124] **Posson, H.**, **Roger, M.** et **Moreau, S.** : On a uniformly valid analytical rectilinear cascade response function. *Journal of Fluid Mechanics*, 663:22–52, 2010.

[125] **Raj, R.** et **Lakshminarayana, B.** : Characteristics of the wake behind a cascade of airfoils. *Journal of Fluid Mechanics*, 61(04):707–730, 1973.

[126] **Rayleigh, Lord** : *The Theory of Sound*, vol. 2. Macmillan, 1896.

[127] **Rayleigh, Lord** : On the incidence of aerial and electric waves upon small obstacles in the form of ellipsoids or elliptic cylinders, and on the passage of electric waves through a circular aperture in a conducting screen. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(266):28–52, 1897.

[128] **Reese, H.**, **Carolus, T.** et **Kato, C.** : Numerical prediction of the aeroacoustic sound sources in a low pressure axial fan with inflow distortion. *Fan Noise, Lyon*, p. 1–12, 2007.

[129] **Reissner, E.** : On the application of mathieu functions in the theory of subsonic compressible flow past oscillating airfoils. Rap. tech. 2363, NACA, 1951.

[130] **Reynolds, B.**, **Lakshminarayana, B.** et **Ravindranath, A.** : Characteristics of the near wake of a compressor of a fan rotor blade. *AIAA Journal*, 17(9):959–967, 1979.

[131] **Rienstra, S.W.** : Sound diffraction at a trailing edge. *Journal of Fluid Mechanics*, 108:443–460, 1981.

[132] **Rienstra, S.W.** : Acoustic radiation from a semi-infinite annular duct in a uniform subsonic mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 94(2):267–288, 1984.

[133] **Rienstra, S.W.** et **Hirschberg, A.** : An introduction to acoustics. *Eindhoven University of Technology*, 2004.

[134] **Roger, M.** : Sur l'utilisation d'un modèle de sillages pour le calcul du bruit d'interaction rotor-stator. *Acta Acustica united with Acustica*, 80(3):238–246, 1994.

[135] **Roger, M.** : Analytical modelling of wake-interaction noise in centrifugal compressors with vaned diffuser. *In 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester*, p. 2994, 2004.

[136] **Roger, M.** et **Caule, P.** : Assessment of the effect of stator inhomogeneity on rotor-stator tonal noise. *In ISROMAC-15*, 2014.

[137] **Roger, M.**, **François, B.** et **Bauerheim, M.** : Three-dimensional modeling of annular cascade trailing-edge noise. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2949, 2016.

[138] **Roger, M.**, **François, B.** et **Moreau, S.** : Towards cascade trailing-edge noise modeling using a mode-matching technique. *In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2015.

[139] **Roger, M.**, **François, B.** et **Moreau, S.** : Cascade trailing-edge noise modeling using a mode-matching technique and the edge-dipole theory. *Journal of Sound and Vibration*, 382:310–327, 2016.

[140] **Roger, M.** et **François, B.** : Combined analytical models for sound generation and transmission in cambered axial-flow outlet guide vanes. *In 16th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-16*, April 2016.

[141] **Roger, M.**, **Moreau, S.** et **Kucukcoskun, K.** : On sound scattering by rigid edges and wedges in a flow, with applications to high-lift device aeroacoustics. *Journal of Sound and Vibration*, 362:252–275, 2016.

[142] **Roger, M.**, **Moreau, S.** et **Marsan, A.** : Generation and transmission of spiral acoustic waves in multi-stage subsonic radial compressors. *In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Juin 2014.

[143] **Ryhming, I.L.** : *Dynamique des fluides*. Presses polytechniques romandes, 1985.

[144] **Sanjosé, M.**, **Pestana, M.**, **Moreau, S.** et **Roger, M.** : Influence and modeling of ogv heterogeneity. *In 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 2881, 2016.

[145] **Sawdy, D. T.**, **Beckemeyer, R.J.** et **Patterson, J.D.** : Analytical and experimental studies of an optimum multisegment phased liner noise suppression concept. *NASA CR-134960*, 1976.

[146] **Schulten, J.B.H.M.** : Sound generated by rotor wakes interacting with a leaned vane stator. *AIAA Journal*, 20(10):1352–1358, 1982.

[147] **Schulten, J.B.H.M.** : *Sound generation by ducted fans and propellers as a lifting surface problem*. Thèse de doctorat, Universiteit Twente, 1993.

[148] **Schulten, J.B.H.M.** : Vane sweep effects on rotor/stator interaction noise. *AIAA journal*, 35(6):945–951, 1997.

[149] **Schwarzschild, K.** : Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I. *Mathematische Annalen*, 55(2):177–247, 1901.

[150] **Sears, W.R.** : Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8(3):104–108, 1941.

[151] **Smith, M.J.T.** : *Aircraft noise. Cambridge aerospace series.* Cambridge : University Press, 1989.

[152] **Smith, S.N.** : Discrete frequency sound generation in axial flow turbomachines,"Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, R. & M. No. 3709. 1972.

[153] **Sommerfeld, A.** : Die greensche funktion der schwingungslgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 21:309–352, 1912.

[154] **Sturm, M.** et **Carolus, T.** : Large scale inflow distortions as a source mechanism for discrete frequency sound from isolated axial fans. *AIAA*, 2105:27–19, 2013.

[155] **Sturm, M.** et **Carolus, T.** : Unsteadiness of blade-passing frequency tones of axial fans. *In 21st International Congress on Sound and Vibration (ICSV 21)*, 2014.

[156] **Sturm, M.**, **Sanjosé, M.**, **Moreau, S.** et **Carolus, T.** : Aeroacoustic simulation of an axial fan including the full test rig by using the lattice boltzmann method. *In Fan Noise 2015*, 2015.

[157] **Sturm, M.**, **Sanjosé, M.**, **Moreau, S.** et **Carolus, T.** : Application of analytical noise models using numerical and experimental fan data. *In 11th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, ETC11*, 2015.

[158] **Tam, C.K.W.**, **Kurbatskii, K.A.** et **Fang, J.** : Numerical boundary conditions for computational aeroacoustics benchmark problems. *In* C. Tam et J. Hardin, éds : *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, vol. NASA-CP-3352, p. 191–219. 1997.

[159] **Tikhonov, A.** : Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *In Soviet Math. Dokl.*, vol. 5, p. 1035–1038, 1963.

[160] **Tsai, M.S.** : Mode scatterer design for fan noise suppression in two-dimensional ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 83(4):501–512, 1982.

[161] **Twersky, V.** : On the scattering of waves by an infinite grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 4(3):330–345, 1956.

[162] **Tyler, J.M.** et **Sofrin, T.G.** : Axial flow compressor noise studies. Rap. tech., SAE Technical Paper, 1962.

[163] **Unruh, J.F.** : Finite length tuning for low frequency lining design. *Journal of Sound and Vibration*, 45(1):5–14, 1976.

[164] **von Kármán, T.** et **Sears, W.R.** : Airfoil theory for non-uniform motion. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 5(10):379–390, 1938.

[165] **Whitehead, D.S.** : Vibration and sound generation in a cascade of flat plates in subsonic flow. cued/a-turbo. Rap. tech., Cambridge University Engineering Department, Cambridge, UK, 1970.

[166] **Whitehead, D.S.** : Classical two-dimensional methods. *In* M. Platzer et F. Carta, éds : *AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines*, vol. 1, Unsteady Turbomachinery Aerodynamics, chap. 3. 1987.

[167] **Whitehead, E.A.N.** : The theory of parallel-plate media for microwave lenses. *Proceedings of the IEE-Part III : Radio and Communication Engineering*, 98(52):133–140, 1951.

[168] **Wrochna, M.** : Weber-schafheitlin integrals with arbitrary exponent. *arXiv preprint arXiv :1004.5518*, 2010.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur M. ROGER

et les rapports de

M. C. SCHRAM
Professeur - Institut Von Karman VKI - 72 chaussée de Waterloo - 1640 Rhode-St-Genèse Belgique

et de

M. Y. AUREGAN
Directeur de recherche CNRS au LAUM - Université du Maine - Avenue Olivier Messiaen 72085 LE MANS cedex 9

Monsieur BOULEY Simon

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 17 janvier 2017

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

ECOLE CENTRALE DE LYON
Service Scolarité
ECULLY

M-A. GALLAND

Modélisations analytiques du bruit tonal d'interaction rotor / stator par la technique de raccordement modal

Résumé

Le bruit tonal d'interaction rotor-stator, généré par l'impact des sillages issus des pales d'un rotor sur la grille d'aubes d'un stator redresseur, contribue de manière déterminante au bruit d'origine aérodynamique des turbomachines axiales carénées, qui équipent une large part des systèmes de propulsion aéronautique et de conditionnement d'air. La prédiction du bruit par l'utilisation de simulations numériques demeure onéreuse, notamment dans les premières phases de conception lorsque de nombreuses configurations doivent être testées. Dans cette optique, l'approche analytique choisie dans cette thèse apporte une alternative tout à fait appropriée. Les modèles analytiques basés sur une fonction de réponse aéroacoustique de profil isolé ne permettent pas de reproduire l'effet de grille engendré par le nombre important d'aubes de stator. Inversement, de fortes approximations sont nécessaires pour décliner les fonctions de réponse de grilles d'aubes existantes dans des configurations tridimensionnelles. Le formalisme proposé, basé sur la méthode de raccordement modal, permet d'introduire simplement l'effet de grille dans une géométrie annulaire d'étage rotor-stator. Un modèle de réponse de grille rectilinéaire bidimensionnel est tout d'abord présenté pour la transmission d'ondes acoustiques à travers le stator ainsi que pour la génération de bruit par l'impact de rafales hydrodynamiques. Dans ce cadre, une analyse linéaire et non visqueuse est considérée, pour laquelle les modes acoustique et tourbillonnaire d'un gaz sont couplés par le biais des frontières rigides. Les perturbations de vitesses liées aux sillages sont modélisées comme des rafales convectées. Leur impact sur la grille de stator génère des ondes acoustiques se propageant en amont, en aval ainsi que dans les espaces inter-aubes du stator, vu comme un réseau périodique de guides d'ondes. Les sections de bords d'attaque et de fuite des aubes sont considérées comme des interfaces sur lesquelles la continuité des fluctuations de pression, de vitesse axiale et de vorticité est vérifiée. Un système d'équations est ainsi obtenu, puis résolu par des projections sur les bases modales du conduit et des inversions matricielles. Le champ acoustique rayonné est ainsi déterminé uniformément dans tout le domaine. Les résultats issus de ces modélisations sont comparés à ceux des fonctions de réponse de grilles d'aubes rectilinéaires issues de la littérature, montrant un très bon accord avec les modèles basés sur la technique de Wiener-Hopf. Le formalisme est par la suite étendu aux grilles annulaires par l'ajout de fonctions de Bessel comme fonctions de forme radiale exprimant les effets tridimensionnels. Finalement, une procédure est présentée pour rendre compte de l'hétérogénéité des aubes de stator, caractéristique des nouvelles architectures de turbomachines. Cette méthodologie est basée sur l'emploi conjoint du principe du dipôle de bord d'attaque et de la fonction de réponse aéracoustique de la grille de stator à l'aide de la technique de raccordement modal. Le principe de dipôle de bord identifie le chargement instationnaire des aubes induit par l'impact de rafales hydrodynamiques, calculé par le formalisme d'Amiet, avec la trace du champ de pression acoustique produit par un dipôle placé au voisinage du bord de l'aube. Les prédictions issues de ce modèle, appliqué dans un cadre bidimensionnel, sont ensuite comparées à des mesures obtenues pendant la campagne d'essais du projet SEMAFOR.

Mots-clés : Aéroacoustique, turbomachine axiale, bruit d'interaction rotor-stator, bruit tonal, effet de grille, technique de raccordement modal.