

ACOUSTIQUE. — Inversion des corrélations azimutales du champ acoustique lointain et modélisation des sources de bruit des jets.

Note de **Christian Buty** et **Daniel Juvé**, présentée par Michel Combarrous.

Remise le 19 décembre 1983, acceptée après révision le 21 mai 1984.

Dans cette Note, on s'intéresse au problème inverse suivant qui intervient dans la modélisation du bruit des jets : la détermination de la cohérence azimutale de la source, concentrée sur un anneau, à partir du champ acoustique lointain. L'inversion directe par série de Fourier, bien que théoriquement exacte, ne fournit pas en pratique de résultats satisfaisants lorsque les données sont bruitées. On propose alors une formule intégrale reliant le champ source au champ acoustique à laquelle on applique une procédure de régularisation. La performance de la méthode est illustrée pour différents cas de données bruitées simulant les erreurs de mesure.

ACOUSTICS. — On the Inverse Problem of Azimuthal Correlations in Jet Noise Modelling.

The determination of the coherence of a source ring from the azimuthal coherence of the acoustic field is an inverse problem occurring in jet noise studies. Direct inversion of theoretical correlation functions by Fourier series reveals that this problem is ill-posed. We suggest to relate the two coherence functions through a Fredholm equation of the first kind. The inversion of this integral equation is then completed through a regularization technique due to D. L. Phillips. It is shown that very good results are obtained even if the acoustic data are perturbed to simulate experimental errors.

Un certain nombre de travaux récents, Armstrong et coll. [1], Juvé et Sunyach [2], sont consacrés à l'étude expérimentale de la cohérence azimutale du bruit émis par un jet circulaire. La technique utilisée est la mesure de la corrélation (ou de l'interspectre) entre les signaux reçus par deux microphones placés sur un cercle d'observation dont l'axe est celui du jet. La position relative des deux capteurs est caractérisée par leur écart angulaire φ (fig. 1). Le fait marquant qui ressort de ces travaux est la forte cohérence azimutale du champ acoustique : la décomposition en série de Fourier de la fonction de corrélation $R_{pp}(\varphi)$ montre en effet que seuls les premiers modes ($m=0, 1, 2$) ont une contribution importante.

Une direction naturelle de recherche est de tenter d'obtenir des renseignements sur la structure des sources de bruit à partir de ces mesures de champ lointain. Une telle approche suppose le choix d'un modèle de rayonnement approprié. Michalke [3] a proposé récemment de considérer une répartition continue de sources omnidirectionnelles, disposées sur un anneau circulaire d'axe celui du jet, et de diamètre $D=2R$ égal au diamètre de la buse de sortie.

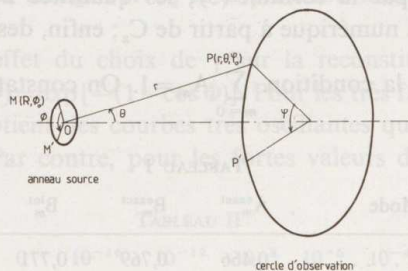


Fig. 1.

La pression en un point (r, θ, φ_0) du champ lointain est alors donnée par :

$$(1) \quad \begin{cases} p(r, \theta, \varphi_0, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r} \int_0^{2\pi} d\Phi_0 g(\Phi_0, t - \tau_0), \\ \tau_0 = [r - R \sin \theta \cos(\varphi_0 - \Phi_0) X] / c_0, \end{cases}$$

où Φ_0 repère la position d'un point-source sur l'anneau, $g(\Phi_0, t)$ désigne la densité de la distribution de sources et c_0 la célérité du son.

Compte tenu de la symétrie de révolution du problème, il est naturel d'introduire les décompositions en série de Fourier des fonctions de cohérence du champ source $C_s(\Phi, \omega)$ et du champ acoustique $C_a(\varphi, \omega)$ soit :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_s(\Phi, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m \Phi \quad \text{avec} \quad \sum_{m=0}^{\infty} A_m = 1 \\ \text{et :} \\ C_a(\varphi, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos m \varphi \quad \text{avec} \quad \sum_{m=0}^{\infty} B_m = 1. \end{array} \right.$$

Φ et φ désignent respectivement l'écart angulaire entre deux points sources et deux positions des microphones, et les coefficients A_m et B_m sont reliés par :

$$(3) \quad B_m = \frac{A_m J_m^2(\delta)}{\sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m^2(\delta)}$$

(J_m fonction de Bessel de première espèce d'ordre m , $\delta = \pi He \sin \theta$ où He est le nombre de Helmholtz, $He = \omega R / \pi c_0$).

En principe la formule (3) permet de déterminer les quantités A_m à partir des quantités B_m . Cependant l'application directe de cette formule conduit en pratique à des erreurs importantes car les valeurs de $J_m^2(\delta)$ deviennent très petites lorsque l'ordre m augmente, pour les valeurs du nombre de Helmholtz correspondant aux mesures ($He \approx 0,1-0,5$). Un exemple de ce comportement est donné dans le tableau I où la fonction de cohérence C_s a la forme suggérée par Michalke [3] :

$$(4) \quad C_s(\Phi, \omega) = \exp[-\alpha^2(1 - \cos \Phi)],$$

avec $\alpha = 1$. Les quantités A_m^{exact} ont été calculées analytiquement à partir de C_s ; les B_m^{exact} sont déduites des A_m^{exact} par la formule (3); les quantités B_m^{int} sont obtenues de façon approchée par intégration numérique à partir de C_s ; enfin, des B_m^{int} on déduit les quantités A_m^{cal} par le système (3) et la condition $\sum_{m=0}^{\infty} A_m = 1$. On constate que les erreurs commises

TABLEAU I

Mode	A_m^{exact}	B_m^{exact}	B_m^{int}	A_m^{cal}
$m=0$	0,466	0,769	0,771	0,520
$m=1$	0,416	0,227	0,228	0,465
$m=2$	0,100	$3,710^{-2}$	$4,910^{-3}$	$1,510^{-2}$

sur les B_m^{int} , bien que faibles en valeur absolue, conduisent à des écarts très importants sur les A_m^{cal} : la fonction de cohérence C_s^{cal} obtenue par la formule (2) s'écarte en effet d'environ 23% de sa forme exacte.

La détermination des modes A_m à partir des modes B_m est donc un problème « mal posé » comme la plupart des problèmes inverses, c'est-à-dire instable vis-à-vis de faibles perturbations des données. Pour obtenir une solution physiquement acceptable il est nécessaire d'introduire des informations *a priori* sur la solution et notamment sur sa régularité.

Abandonnant la décomposition modale, nous écrivons tout d'abord la relation entre C_s et l'interspectre S_a sous forme intégrale :

$$(5) \quad S_a(\varphi, \omega) = \frac{1}{8\pi} g_\omega^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\Phi C_s(\Phi, \omega) J_0\left(2\delta \sin\left(\frac{\Phi - \varphi}{2}\right)\right),$$

où g_ω^2 désigne la densité spectrale de puissance de la source. Il s'agit d'une équation de Fredholm de première espèce de noyau $J_0(2\delta \sin(\Phi - \varphi)/2)$ que l'on peut écrire symboliquement :

$$(6) \quad S_a(\varphi, \omega) = JC_s(\Phi, \omega).$$

L'inversion de ce type d'équation est aussi un problème « mal posé », mais des méthodes de régularisation sont connues [5] et la méthode de Phillips [6] nous a semblé la plus adaptée à notre cas. Elle consiste à considérer que les données S_a sont connues imparfaitement. Dès lors sont *a priori* admissibles toutes les fonctions C_s telles que $\|S_a - JC_s\| \leq \varepsilon^2$. Dans l'ensemble de ces solutions possibles on choisit celle qui est la plus lisse au sens où la norme de sa dérivée seconde est minimale :

$$(7) \quad \|C_s'\| = \int_0^{2\pi} [C_s'(\Phi, \omega)]^2 d\Phi \quad \text{minimum.}$$

Pour le problème discrétisé, la solution est alors donnée par :

$$(8) \quad F = ({}^T J J + \gamma {}^T K K)^{-1} J G,$$

F et G sont les matrices unicolonnes contenant les valeurs de C_s et de S_a respectivement ; J est la matrice carrée résultant de la discrétisation de l'opérateur intégral de l'équation de Fredholm ; K est l'opérateur dérivée seconde discrétisé ; le paramètre γ est un multiplicateur de Lagrange dont la valeur doit être déterminée par essais et erreurs, et résulte d'un compromis entre le degré de lissage sur C_s et la précision avec laquelle S_a approche les données.

Le tableau II montre l'effet du choix de γ sur la reconstitution de la fonction de cohérence de la source $C_s(\Phi) = \exp[-(1 - \cos \Phi)]$. Pour les très faibles valeurs du paramètre de régularisation, on obtient des courbes très oscillantes qui s'écartent considérablement de la forme exacte. Par contre, pour les fortes valeurs de γ le lissage imposé est

TABLEAU II

γ	0	10^{-16}	10^{-12}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}
$\sigma_{C_s}(\%)$	175	38	4	0,7	0,4	2	3	9



Fig. 2 et 3.

trop important. Il existe cependant un très large palier ($10^{-9} \leq \gamma \leq 10^{-5}$) pour lequel l'écart type relatif σ_{C_s} entre courbe exacte et courbe reconstituée est inférieur au pourcent. Le choix du paramètre γ n'est donc pas critique. La forme optimale de la cohérence source est donnée sur la figure 2.

Afin de simuler les erreurs de mesures sur la fonction de cohérence du champ acoustique, nous avons perturbé les valeurs de C_a^{exact} de façon aléatoire [7]. Pour un écart type relatif des perturbations de 1%, le forme optimale de $C_s(\Phi)$ est donnée sur la figure 3. L'écart avec la courbe exacte est inférieur à 5%, le lissage, plus important que dans le cas non perturbé, conduisant à une valeur de γ d'environ 0,01.

Ces résultats montrent que la méthode d'inversion utilisée est pertinente. Elle rend possible l'exploitation des nombreuses mesures de corrélation faites en champ lointain, avec un espoir de caractériser la cohérence azimutale de la région source.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. R. ARMSTRONG, H. V. FUCHS et A. MICHALKE, *A.I.A.A. Paper* 76-90, Palo Alto, Californie, 1976.
- [2] D. JUVÉ et M. SUNYACH, *A.I.A.A. Paper* 81-2011, Palo Alto, Californie, 1981.
- [3] A. MICHALKE, *J. Sound Vib.*, 87, 1983, p. 1-17.
- [4] C. M. T. BONNET et M. J. FISHER, *J. Sound Vib.*, 66, 1979, p. 545-555.
- [5] A. TIKHONOV et V. ARSENEVA, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Editions de Moscou, 1976.
- [6] D. L. PHILLIPS, *J. Assoc. Comput. Math.*, 9, 1962, p. 84-97.
- [7] C. BUTY, *Inversion numérique d'une équation de Fredholm appliquée à la détermination de la fonction de cohérence azimutale d'un jet*. D.E.A., Lyon, 1983.

Ecole Centrale de Lyon,
Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique,
Laboratoire associé au C.N.R.S. 263,
36, avenue Guy-de-Collongue, 69131 Ecully Cedex.