

Interprétation géométrique des propriétés de l'équation parabolique*

par X. CRISTOL, Ph. BLANC-BENON et D. JUVÉ**

Résumé

Dans l'approximation parabolique, le champ acoustique $p(r,z)$, solution de l'équation de Helmholtz $\Delta p + k_0 n^2(r,z) p(r,z) = 0$, est approché par une onde cylindrique modulée en phase et en amplitude par une enveloppe $\psi(r,z)$, solution de l'équation parabolique classique : $\partial^2 \psi / \partial z^2 + 2ik_0 \partial \psi / \partial r + k_0^2 (n^2(r,z) - 1) \psi = 0$. Une analyse modale et géométrique du champ régi par l'équation parabolique montre que seule une fraction du faisceau acoustique total est rigoureusement reproduite : la contribution d'au plus 1 mode, ou d'au plus 2 rayons ; la contribution des autres modes, ou des autres rayons, est systématiquement déformée par l'introduction d'un facteur d'échelle selon l'axe horizontal. Le paramètre qui fixe le taux de déformation et la partie "bien" reproduite est la célérité du son de référence utilisée pour définir l'indice de réfraction $n = c_0/c$.

GEOMETRICAL DESCRIPTION OF THE STANDARD PARABOLIC EQUATION SOLUTIONS

Abstract

The parabolic-equation method relies on describing the acoustic field $p(r,z)$, solution of the Helmholtz equation $\Delta p + k_0 n^2(r,z) p(r,z) = 0$, as a propagating cylindrical wave, the phase and amplitude of which are modulated by an envelope-function $\psi(r,z)$, solution of the "standard parabolic equation" $\partial^2 \psi / \partial z^2 + 2ik_0 \partial \psi / \partial r + k_0^2 (n^2(r,z) - 1) \psi = 0$. For layered media the parabolic approximation is shown to result in an error in the phase velocity of the normal modes or in the ray paths. Only one mode, or two rays, of the parabolic equation are exactly in correspondence with those of the Helmholtz equation. The contribution to the total field of the other modes, or rays, suffers a systematic distortion along the horizontal axis. The quality of the agreement between the full wave solution and its parabolic approximation depends on the choice of the reference sound speed c_0 which defines the refraction index $n = c_0/c$.

1. INTRODUCTION

La modélisation de la propagation acoustique dans le milieu inhomogène qu'est l'océan, par l'équation parabolique classique* a été introduite par F. Tappert en 1972-73. Cette équation parabolique :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

constitue une approximation de l'équation de Helmholtz, de type elliptique :

$$(2) \quad \Delta p + k_0^2 n^2 p = 0 \quad \left(p = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{ik_0 r} \psi \right).$$

L'océan est modélisé comme un milieu fluide au repos, de masse volumique uniforme, où la célérité du son (fonction de la pression, de la température et de la salinité de l'eau) est fonction des trois coordonnées spatiales :

$$c = c(x,y,z) \quad n = c_0/c \quad k_0 = \omega/c_0.$$

Le champ acoustique prédit par l'équation parabolique classique (1) est proche du champ-solution de l'équation de Helmholtz aux conditions suivantes :

- le milieu est faiblement inhomogène (i.e. les variations de la célérité du son c s'effectuent sur des échelles spatiales grandes devant les échelles de variation de la pression acoustique p) ; l'océan possède cette propriété.
- l'onde sonore décrite se propage selon des angles faibles par rapport à l'axe horizontal Or , tout effet de réverbération étant exclu ; il s'agit d'une approximation "paraxiale", qui approche l'onde p par une onde cylindrique, modulée en phase et en amplitude par l'enveloppe ψ . Cette condition est vérifiée par les faisceaux acoustiques rayonnés par des sources directionnelles dans les guides d'onde que constituent les répartitions de célérité du son les plus couramment observées en mer (profils SOFAR).

Une méthode de résolution de l'équation parabolique classique, alternative aux techniques aux différences finies, est l'algorithme "split-step Fourier". La relation suivante :

$$(3) \quad \psi(r + \Delta r, z) = e^{ik_0(n^2(r,z) - 1)\Delta r/2} \times F^{-1} \left\{ e^{-is^2 \frac{\Delta r}{2k_0}} F \left\{ \psi(r, z) \right\} \right\}$$

constitue une intégration approchée de l'équation parabolique où F désigne la transformée de Fourier selon l'axe vertical Oz :

$$F \left\{ \varphi(r, z) \right\} = \Phi(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r, z) e^{-isz} dz$$

et F^{-1} la transformée inverse :

$$F^{-1} \left\{ \Phi(r, s) \right\} = \varphi(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(r, s) e^{isz} dz$$

** Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, U.A. C.N.R.S. 263, Ecole Centrale de Lyon, 36 Avenue Guy de Colongue, 69131 ECULLY CEDEX (France).

* Texte présenté aux 7èmes Journées d'Etudes sur la Propagation Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 3-6 juin 1986.

Numériquement, le calcul du champ acoustique est initialisé par un tableau complexe correspondant à un échantillonnage vertical du champ à une distance initiale r_0 de la source ; il suffit alors d'appliquer à ce tableau une série de transformées de Fourier discrètes (FFT) et de multiplications pour évaluer le front d'onde $\psi(r,z)$ aux distances $r_0 + \Delta r$, $r_0 + 2\Delta r$, etc...

L'erreur commise en intégrant de façon approchée l'équation parabolique (1) par l'algorithme "split-step" est fonction croissante du pas Δr , de la fréquence et du gradient d'indice de réfraction ; elle peut être diminuée autant qu'on le veut en réduisant suffisamment le pas Δr . Des considérations pratiques (échantillonnage des transformées de Fourier discrètes, espaces et temps de calcul...) limitent au domaine des basses fréquences ($f < 200$ Hz) l'usage de cette méthode, qui est alors particulièrement compétitive dans la modélisation du rayonnement en océan profond (i.e. sans interaction du champ avec le fond).

L'algorithme "split-step" peut simuler les deux conditions aux limites suivantes :

- réflexion sur la surface de l'océan : le demi-espace $z > 0$ qu'occupe l'océan se voit adjoindre un demi-espace fictif $z < 0$, symétrique de celui-ci par rapport à la surface $z=0$ ($n(-z) = n(z)$) ; l'effet réfléchissant de la surface se traduit par l'imparité du champ $\psi(r, z) = -\psi(r, z)$, imparité qui se conserve pas après pas.
- condition de Sommerfeld en $|z| \infty$: un choix adéquat des paramètres d'échantillonnage (profondeur maximale, nombre de points de l'échantillonnage), conforme au critère de Shannon, permet de modéliser un rayonnement en milieu infini, dès lors que la profondeur maximale du modèle est suffisamment grande pour englober le faisceau acoustique dans son intégralité ; les fonds marins sont simulés par des "fonds équivalents", décrits comme des couches réfractantes et absorbantes, reproduisant le mieux possible le comportement acoustique des fonds réels à modéliser (l'absorption volumique se traduit par l'adjonction d'une partie imaginaire de l'indice de réfraction).

2. INFLUENCE DE LA CÉLÉRITÉ DU SON DE RÉFÉRENCE SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE EN MILIEU STRATIFIÉ

A la différence de la solution de l'équation de Helmholtz, la solution de l'équation parabolique classique est fonction de la célérité du son c_0 . La célérité du son de référence doit être une valeur "moyenne", caractéristique à la fois du milieu faiblement inhomogène que traverse le faisceau acoustique (définition de l'indice de réfraction qui doit rester proche en tout point de 1) et du faisceau lui-même (définition du nombre d'onde de référence k_0 ; l'onde doit être proche de l'onde cylindrique en $e^{ik_0 r/\sqrt{r}}$). Nous retrouvons dans ces deux contraintes les conditions mêmes qui permettent de substituer à l'équation de Helmholtz, l'équation parabolique classique (milieu faiblement inhomogène ; propagation selon des angles faibles par rapport à l'axe Or, sans réverbération).

Dans le cas d'une configuration stratifiée ($c = c(z)$), la relation entre les solutions des deux équations paraboliques établies pour deux célérités du son de référence différentes s'exprime sous une forme analytique simple. A la célérité du son de référence c_{01} correspond l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik_{01} \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_{01}^2 (n_1^2(z) - 1) \psi = 0 ;$$

soit $F_1(r,z)$ une solution de cette équation. A la célérité du son c_{02} correspond une nouvelle équation parabolique :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2i\alpha k_{01} \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_{01}^2 (n_1^2(z) - \alpha^2) \psi = 0 \left(\alpha = \frac{c_{01}}{c_{02}} \right).$$

On vérifie directement qu'une solution de cette dernière équation est la fonction F_2 :

$$F_{2(r,z)} = e^{ik_{01} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \frac{r}{2}} F_1(r/\alpha, z).$$

A la distance $r=0$, les deux solutions F_1 et F_2 coïncident parfaitement :

$$F_1(0, z) = F_2(0, z).$$

A un même front-source initial, les deux équations paraboliques associent ainsi deux champs distincts.

La variation de célérité du son de référence introduit dans la solution de l'équation parabolique deux différences :

- un déphasage "moyen" traduit par le terme en $e^{ik_0 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \frac{r}{2}}$ (le champ acoustique est décrit comme proche d'une onde cylindrique en $\frac{1}{\sqrt{r}} e^{ik_0 2r}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{r}} e^{ik_0 1r}$) ;
- un décalage géométrique : le champ est "étiré" ($\alpha > 1$) ou "aplatis" ($\alpha < 1$) selon l'axe horizontal Or ; la variation relative de position d'une caractéristique donnée du champ est l'opposé de la variation relative de célérité de référence :

$$\Delta r/r = -\Delta c_0/c_0$$

sans variation de profondeur.

L'effet de la célérité du son de référence est ainsi, outre le déphasage, celui d'un facteur d'échelle de l'axe horizontal.

3. INTERPRÉTATION MODALE ET GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE CLASSIQUE

On sait (12) que la solution de l'équation parabolique classique se déduit de la décomposition modale de l'équation d'Helmholtz par une approximation de bande étroite. En milieu stratifié, la solution de l'équation d'Helmholtz est de la forme :

$$(3) \quad p(r,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_m A_m v_m(z) e^{i\lambda_m r}$$

où les fonctions modales $v_m(z)$ et les nombres d'onde modaux λ_m constituent le spectre des solutions de l'équation modale :

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + (k_0^2 n^2(z) - \lambda^2) v = 0.$$

Si l'ensemble des modes excités par la source ($|A_m|$ non négligeable) est tel que les nombres λ_m se situent sur une bande étroite autour du nombre d'onde de référence $k_0 (= \omega/c_0)$, la décomposition (3) peut être approchée par :

$$(4) \quad p \approx p_p = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_m A_m v_m(z) e^{i \left(\frac{k_0}{2} + \frac{\lambda_m^2}{2k_0} \right) r}$$

Si p_p est pris sous la forme suivante :

$$p_p = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{ik_0 r} \psi(r,z),$$

on vérifie que la fonction ψ ainsi définie :

$$\psi(r,z) = \sum_m A_m v_m(z) e^{-i \left(k_0 \frac{r}{2} - \frac{\lambda_m^2}{2k_0} r \right)}$$

est bien solution de l'équation parabolique classique.

La différence entre forme exacte (3) et forme approchée (4) réside dans la phase des termes respectifs de chacune des deux décompositions : si les deux décompositions coïncident à une distance r_0 , alors, à la distance $r_0 + \Delta r$, la différence de phase entre la solution de l'équation de Helmholtz et la solution (4) de l'équation parabolique, est, pour le mode m :

$$\Delta \varphi_m = \left(\lambda_m - \frac{\lambda_m^2}{2k_0} - \frac{k_0}{2} \right) \Delta r.$$

L'équation parabolique classique reproduit le plus fidèlement la partie du faisceau acoustique correspondant à la contribution du mode m_0 pour lequel le terme $\Delta\varphi_{m_0}$ est nul ou le plus petit possible. Le reste du faisceau est moins bien reproduit : la contribution du mode m est déformée par un facteur d'échelle selon l'axe horizontal, "étirée" (si $k_0/\lambda_m + \lambda_m/k_0 > 2$) ou "aplatie" (si $k_0/\lambda_m + \lambda_m/k_0 < 2$). L'approximation paraxiale est ainsi d'autant mieux justifiée que le faisceau se décompose en un nombre plus faible de modes excités, sur une bande plus étroite autour du mode m_0 ; la célérité du son de référence $c_0 (= \omega/k_0)$ apparaît comme le paramètre qui détermine le "centre" de la bande de modes que l'équation parabolique reproduira le mieux.

Une analyse du type "rayons" permet d'interpréter d'une manière complémentaire les différences entre les solutions de l'équation d'Helmholtz et de l'équation parabolique classique. L'application de l'approximation géométrique à la solution de l'équation parabolique ψ mise sous la forme :

$$\psi(r,z) = B(r,z) e^{ik_0(S(r,z)-r)}$$

donne accès à une équation iconale :

$$(5) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial r} - n^2 - 1 = 0.$$

L'équation iconale issue de l'équation d'Helmholtz est :

$$(6) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - n^2 = 0$$

où p , solution de l'équation d'Helmholtz, est prise sous la forme :

$$p(r,z) = A(r,z) e^{ik_0 S(r,z)}.$$

Nous considérerons le cas d'une source ponctuelle placée dans un océan stratifié à la profondeur z_s ($n_s = n(z_s)$). Les équations des rayons se déduisent des équations iconales par la méthode des caractéristiques ; un rayon sera décrit comme courbe paramétrée :

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\lambda) = \begin{bmatrix} r(\lambda) \\ z(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Un rayon "classique", issu de l'équation iconale (6), est solution du système différentiel suivant :

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= 2 n_s \cos \Theta_0, \\ \frac{dz}{d\lambda} &= 2T, \\ \frac{dT}{d\lambda} &= 2n \frac{dn}{d\lambda}, \\ \frac{d\tau}{d\lambda} &= \frac{2}{c_0} \left(n_s^2 \cos^2 \Theta_0 + T^2 \right) = \frac{2}{c_0} n^2, \end{aligned}$$

avec pour conditions initiales :

$$r(0) = 0 \quad z(0) = z_s \quad T(0) = n_s \sin \Theta_0 \quad \tau(0) = 0$$

(Θ_0 étant l'angle formé par le rayon par rapport à l'horizontale au point ($r=0, z=z_s$) et $\tau(\lambda)$ désignant le temps de parcours entre la source et le point $x(\lambda), z(\lambda)$). A la nouvelle équation iconale (5), issue de l'équation parabolique, correspond un système différent :

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= 2, \\ \frac{dz}{d\lambda} &= 2T, \\ \frac{dT}{d\lambda} &= 2n \frac{dn}{dz}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{2}{c_0} \left(\frac{n_s^2 + 1 - \text{tg}^2 \Theta_0 + T^2}{2} \right)$$

avec, pour conditions initiales :

$$r(0) = 0 \quad z(0) = z_s \quad T(0) = \text{tg} \Theta_0 \quad \tau(0) = 0.$$

Si le milieu est faiblement inhomogène ($n_s \approx 1$, quelle que soit la célérité du son de référence) et si le rayon considéré fait à l'origine un angle Θ_0 faible par rapport à l'horizontale ($\cos \Theta_0 \approx 1$; $\text{tg} \Theta_0 \approx \sin \Theta_0 \approx \Theta_0$) alors les deux systèmes différentiels, et leurs conditions initiales respectives, sont peu différents l'un de l'autre ; les deux réseaux de rayons, issus de l'équation d'Helmholtz et de l'équation parabolique, sont proches, dès lors que sont vérifiées la condition de faible inhomogénéité et l'hypothèse paraxiale. Cependant l'identité entre les deux systèmes différentiels (7) et (8) n'est rigoureusement exacte que pour les rayons dont les conditions initiales vérifient :

$$n_s \cos \Theta_0 = 1.$$

Il apparaît ainsi que, dans le cas d'une source ponctuelle située au point ($0, z_s$), seuls deux rayons (au plus) parmi les rayons "paraxiaux" se confondent exactement avec les rayons "classiques", issus de l'équation de Helmholtz ; le paramètre qui désigne ces rayons est la célérité du son de référence c_0 :

$$\Theta_0 = \pm \text{Arc} \cos \frac{c(z_s)}{c_0} \quad \text{pour } c_0 \geq c(z_s).$$

Remarquons qu'un point de ces rayons, en se propageant, appartient toujours à la surface $r=c_0 t$, qui correspond à un front d'onde cylindrique en $e^{ik_0 r/\sqrt{r}}$. L'approximation parabolique impose à l'ensemble des autres rayons une déviation par rapport aux rayons "classiques". Notons $r=r_p(\lambda, \Theta_0)$, $z=z_p(\lambda, \Theta_0)$ l'équation paramétrique d'un rayon "paraxial" formant un angle Θ_0 par rapport à l'horizontale à l'origine et $r=r_c(\lambda, \Theta_0)$, $z=z_c(\lambda, \Theta_0)$ l'équation du rayon "classique" correspondant. On vérifie que :

$$r_p(\lambda, \Theta_0) = \frac{1}{\alpha} r_c(\lambda, \Theta_1),$$

$$z_p(\lambda, \Theta_0) = z_c(\lambda, \Theta_1),$$

$$\tau_p(\lambda, \Theta_0) = \tau_c(\lambda, \Theta_1) + \frac{1}{\alpha c_0} (1 - n_s^2 \cos^2 \Theta_1) r_c(\lambda, \Theta_1),$$

où l'angle Θ_1 et le paramètre α sont définis par :

$$\alpha = n_s \cos \Theta_1 = (n_s^2 - \text{tg}^2 \Theta_0)^{1/2}.$$

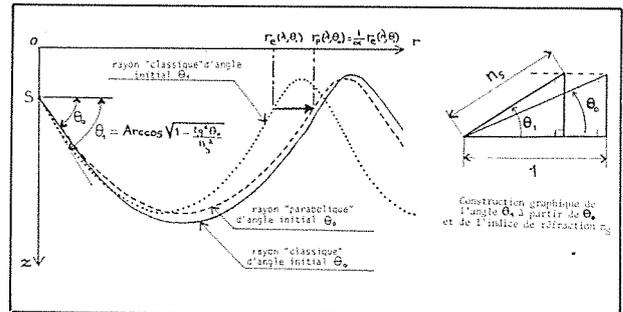


Figure 1

Dans l'approximation paraxiale, un rayon d'angle initial Θ_0 par rapport à l'horizontale a l'allure du rayon "classique" d'angle initial Θ_1 , déformé selon l'axe horizontal par un simple facteur d'échelle ("étiré" si $\alpha < 1$, "aplati" si :

$\alpha > 1$). Il faut noter que Θ_1 est proche de Θ_0 dès lors que Θ_0 est petit ($\Theta_0 < 15^\circ$) et n_s proche de 1. A cette déformation du rayon lui-même, vient s'ajouter un déphasage en :

$$\frac{\omega}{c_0} (1 - n_s^2 \cos^2 \Theta_1) r.$$

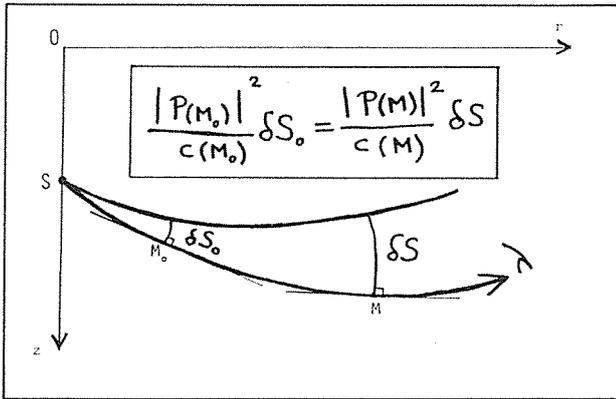


Figure 2
Evolution de l'amplitude de la solution géométrique "classique" le long d'un tube de rayons élémentaire.

L'évolution de l'amplitude du signal acoustique le long d'un rayon paraxial est régie par une loi différente de celle qui gouverne l'évolution de l'amplitude le long d'un rayon "classique". Rappelons que celle-ci peut s'exprimer sous la forme conservative suivante :

$$(9) \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{A^2}{c} \delta S \right) = 0$$

qui exprime que l'intensité acoustique A^2/c est inversement proportionnelle à la surface δS d'une section d'un tube de rayons élémentaires (section selon la normale du rayon).

Une autre forme de cette dernière équation est la suivante :

$$(10) \quad 2 \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} A + A \Delta S = 0.$$

L'amplitude B d'une solution de l'équation parabolique vérifiée, dans le cadre de l'approximation géométrique, l'équation suivante :

$$(11) \quad 2 \left(\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \right) + B \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

qui apparaît comme une version "appauvrie" de l'équation (10). On vérifie simplement que l'intégrale I :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r, z)|^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2 dz$$

se conserve le long de l'axe Or ; une relation de type conservatif, homologue de l'équation (9), dans le cadre de l'approximation paraxiale, est la suivante :

$$(11) \quad \frac{d}{d\lambda} \left(|p_p|^2 \delta \Sigma \right) = 0$$

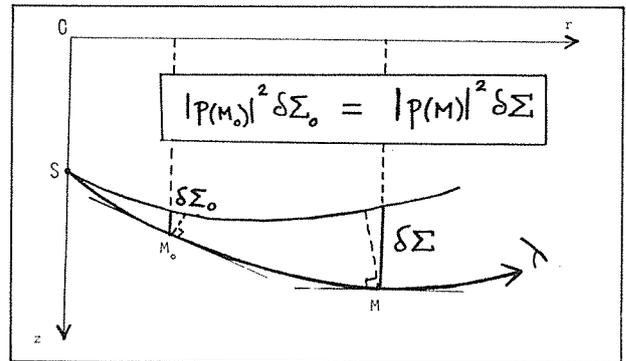


Figure 3
Evolution de l'amplitude de la solution géométrique "paraxiale" le long d'un tube de rayons élémentaires.

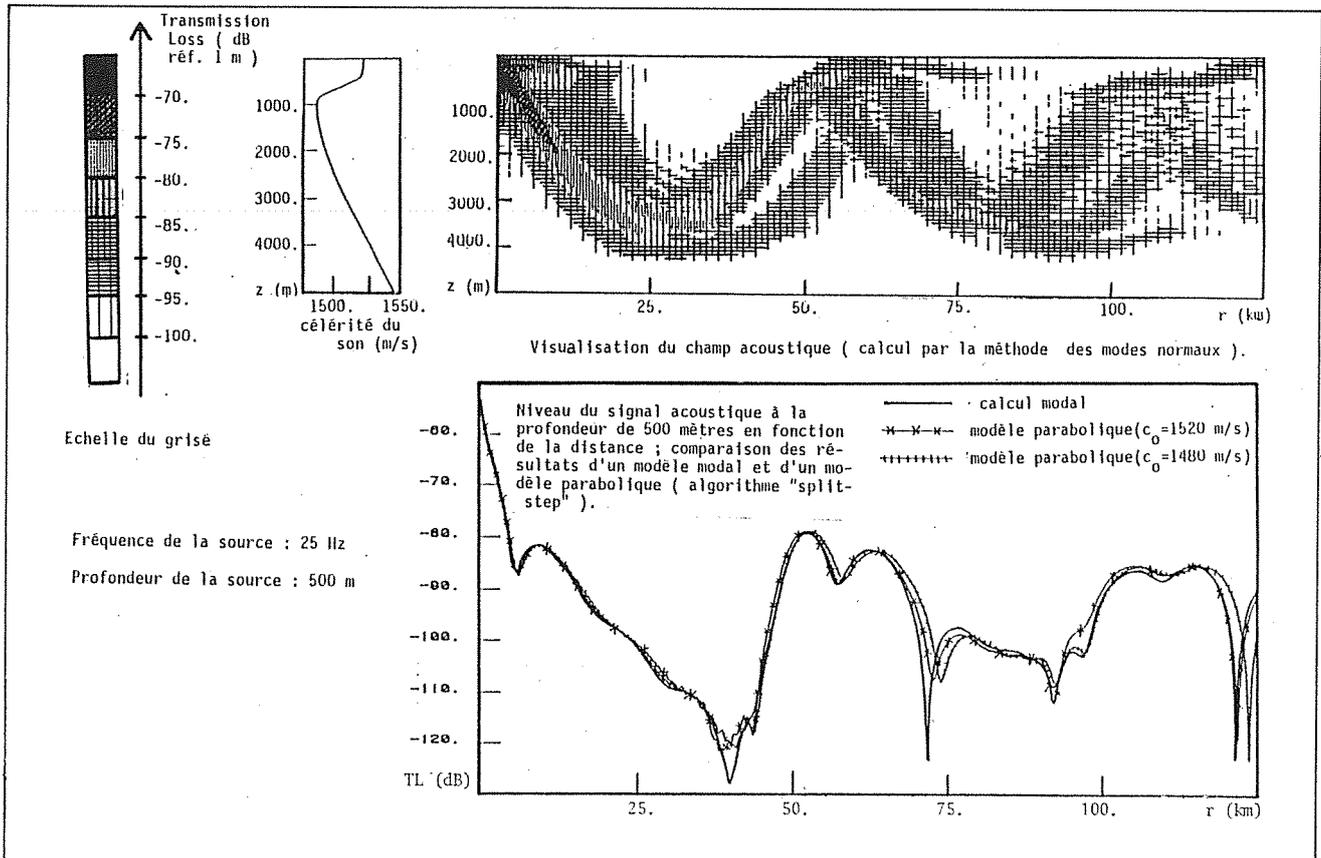


Figure 4

qui exprime que le carré de l'amplitude du signal acoustique est inversement proportionnel à l'aire $\delta\Sigma$ d'un tube élémentaire de rayons, mesurée non plus sur la normale au rayon, mais sur la normale à l'axe Or.

Les deux équations (9) et (11) sont proches l'une de l'autre dès lors que le milieu est faiblement inhomogène ($c \approx c_0$) et la pente de la tangente du rayon faible ($\Theta \approx 0$).

L'identification entre solution géométrique "classique" et solution géométrique "paraxiale" n'est réalisée que pour un rayon vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} n_s \cos \Theta_0 = 1 \text{ (identité du rayon et de la phase)} \\ T = \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \text{ en tout point du rayon} \end{cases}$$

$$\text{ou : } \begin{cases} \cos \Theta = \cos \Theta_0 = 1 \\ c_0 = c_s. \end{cases}$$

La seconde condition exprime que le rayon doit être une droite horizontale, comme par exemple dans le cas d'un rayon émis horizontalement à la profondeur de l'"axe" des profils de célérité du son de type SOFAR.

4. CONCLUSION

La modélisation numérique du rayonnement acoustique dans les guides d'onde de l'acoustique sous-marine par l'algorithme "split-step" se révèle particulièrement performante à l'usage. Outre sa simplicité d'application et sa rapidité d'exécution, elle intègre les effets de diffraction (contrairement aux rayons) et est la plus efficace sur le domaine fréquentiel sur lequel l'approximation géométrique ne se justifie pas ($f < 100$ Hz) ; elle exige moins d'espace de calcul qu'un modèle de modes normaux (qui nécessite le stockage d'un nombre important de modes et qui est virtuellement inadaptable au cas de milieux non stratifiés). Dès lors que le faisceau acoustique à modéliser est compatible avec les exigences de l'approximation paraxiale et que les paramètres numériques d'intégration sont correctement ajustés (pas d'intégration en r, échantillonnage vertical,...), le champ prédit par le modèle parabolique est très proche du champ "exact", solution de l'équation de Helmholtz. Cependant le choix de la célérité du son de référence c_0 (a priori arbitraire) influe sur la posi-

tion de certains traits typiques du champs (franges d'interférences, zones de convergence). L'analyse modale montre que c_0 doit être choisi de façon à ce que le nombre d'onde $k_0 = \omega/c_0$ corresponde au centre de la bande des modes les plus excités. En pratique l'utilisation d'une moyenne de $c(z)$ sur la profondeur donne des résultats très convenables dans la majorité des cas.

Pour s'affranchir de ce problème de choix de c_0 , diverses solutions ont été proposées [6], [7] au prix d'une augmentation sensible des temps de calcul, voire de l'abandon de la technique FFT. En tout état de cause une comparaison détaillée de l'équation parabolique avec une méthode exacte (modes normaux) reste à effectuer notamment en ce qui concerne les erreurs de phase et leur influence sur le calcul des temps de parcours dans une version temporelle de l'équation parabolique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F.D. TAPPERT - "The parabolic equation method in wave propagation in ocean acoustics", Springer Verlag, 1979.
- [2] S. McDANIEL - "Propagation of normal modes in the parabolic approximation", J. Acoust. Soc. Am., 57, 2, pp. 307-311, 1975.
- [3] S. McDANIEL - "Parabolic approximation for underwater sound propagation", J. Acoust. Soc. Am. 58, 6, pp. 1778-1854, 1975.
- [4] F.D. JENSEN - "The use of the parabolic equation method in sound propagation modelling", SACLANT ASW Research Center, 1975.
- [5] M.K. BROCK, R.N. BUCHAL et C.W. SPOFFORD - "Modifying the soundspeed profile to improve the accuracy of the parabolic equation method", J. Acoust. Soc. Am. 62, 3, pp. 543-552, 1977.
- [6] J.A. de SANTO, J.S. PERKINS et R.N. BAER - "A correction to the parabolic equation", J. Acoust. Soc. Am. 64, 6, pp. 1664-1666, 1978.
- [7] F.D. TAPPERT, DING LEE - "A range refraction parabolic equation", J. Acoust. Soc. Am., 76, 6, pp. 1797-1803, 1984.

Ce travail a bénéficié du soutien de la D.R.E.T. dans le cadre du contrat Jeune Chercheur n° 84/1432.