

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

*Spécialité : ACOUSTIQUE*

Présentée par

**Yves DELRIEUX**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

**ANALYSE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE  
A BASSE ALTITUDE PAR L'EQUATION  
PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE**

Soutenue le 21 novembre 1991,

devant la commission d'examen composée de :

M <sup>lle</sup> COMTE-BELLOT	Président
M. K. ATTENBOROUGH	
M. M. BRUNEAU	Rapporteur
M. Y. GABILLET	
M. D. JUVE	
M. P. MALBÉQUI	



# THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON

*Spécialité : ACOUSTIQUE*

Présentée par

**Yves DELRIEUX**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

**ECOLE CENTRALE DE LYON**  
BIBLIOTHEQUE  
B.P. 163 - 69131 ECULLY CEDEX  
FRANCE



## **ANALYSE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE A BASSE ALTITUDE PAR L'EQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE**

Soutenue le 21 novembre 1991,

devant la commission d'examen composée de :

M<sup>lle</sup> COMTE-BELLOT

Président

M. K. ATTENBOROUGH

M. M. BRUNEAU

Rapporteur

M. Y. GABILLET

M. D. JUVE

M. P. MALBÉQUI

ONERA  
29, avenue de la Division Leclerc  
92320 CHATILLON

T 1452  
ECOLE CENTRALE DE LYON  
BIBLIOTHEQUE  
BP 163 F - 69131 ECULLY CEDEX



## **REMERCIEMENTS**

*Cette thèse a été effectuée à la division acoustique de l'ONERA, dirigée par M. Fournier, que je remercie pour son accueil.*

*Je remercie Mme le Professeur Comte-Bellot ainsi que MM. Attenborough, Bruneau, Gabillet et Juvé qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.*

*Je remercie MM. Lewy et Elias pour leur aide et leurs nombreux conseils.*

*Je remercie Melle Pophillat pour sa disponibilité lors des expériences, Mme Canard-Caruana pour sa participation au traitement des résultats expérimentaux, ainsi que MM. Chombart, Lebigot et Remblière pour la préparation des essais.*

*Je remercie également Mmes Raffard et Bataille pour leur aide lors de l'édition de cette thèse.*

*Enfin, je remercie particulièrement M. Malbéqui pour sa compétence et son soutien constant lors de ces trois années.*



# ANALYSE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE A BASSE ALTITUDE PAR L'EQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE

par Yves DELRIEUX

**Résumé** - L'étude de la propagation acoustique à basse altitude connaît un intérêt grandissant dans le but de réduire les nuisances à proximité des industries, du trafic routier ou des aéroports. Cette étude peut être menée en résolvant numériquement une équation d'onde. Deux approches classiques de la solution de cette équation sont la méthode des rayons qui est une approximation haute fréquence qui néglige les effets de diffraction et la méthode des modes normaux.

Dans cette étude, nous utilisons une méthode numérique basée sur l'approximation parabolique introduite par Tappert. L'équation parabolique bidimensionnelle (EP2D) est généralement utilisée pour décrire la propagation du son émis par une source monochromatique dans un milieu supposé présenter une symétrie de révolution. Cependant, dans certains cas, la symétrie n'est pas respectée par la topographie ou par la présence d'un vent transverse à la direction de propagation.

L'objectif de cette thèse est d'analyser les effets tridimensionnels sur la propagation acoustique au moyen de l'équation parabolique tridimensionnelle (EP3D). Nous présentons une méthode numérique de résolution de l'EP3D à l'aide d'un schéma aux différences finies basé sur la méthode des directions alternées.

La validité de l'EP3D est montrée par comparaison avec des mesures de diffraction par un écran acoustique de longueur finie effectuées dans une chambre anéchoïque. Une seconde série de mesures effectuées en soufflerie met en évidence les effets tridimensionnels du vent et de la topographie pour différents types d'obstacles.

**Mots-clés** (Lexique CEDOCAR) : PROPAGATION SON - PROPAGATION ATMOSPHERIQUE - DIFFERENCES FINIES - DIFFRACTION - EQUATION PARABOLIQUE - DIRECTIONS ALTERNÉES

## LOW ALTITUDE ACOUSTIC PROPAGATION ANALYSIS BY USE OF A THREE-DIMENSIONAL PARABOLIC WAVE EQUATION

**Abstract** - Long range sound propagation in the atmosphere near the ground has to be investigated in order to predict noise levels of industrial plants, traffic or aircraft. It can be described by means of numerical resolution of the wave equation. Two common approaches to the solution of this equation are the ray theory and the normal-mode theory. The first one is valid only for sufficiently high frequencies and does not give adequate prediction of the intensity level due to the neglect of diffraction effects. In the second approach, propagation is described in terms of characteristic functions called normal-modes, each mode being a solution to the equation that satisfies the boundary conditions.

In this study, we use another numerical method based on the parabolic approximation introduced by Tappert. The two-dimensional parabolic equation (2DPE) is generally applied to describe sound propagation from a point source in a media which is assumed to be cylindrically symmetric.

The aim of this thesis is to study the three-dimensional effects on sound propagation by use of the three-dimensional parabolic equation (3DPE). A numerical method for solving the 3DPE is presented and an implicit finite-difference scheme based on the alternating directions method is formulated.

The validity of the 3DPE is shown by comparison with measurements carried out in an anechoic chamber where the diffraction behind a thin barrier of finite length is studied.

The three-dimensional effects of wind and topology are shown by experimentations carried out in a wind tunnel for different types of wedges and screens.

**Keywords** (NASA Thesaurus) : SOUND PROPAGATION - ATMOSPHERIC PROPAGATION - FINITE DIFFERENCE - DIFFRACTION - PARABOLIC EQUATION - ALTERNATING DIRECTIONS



## TABLE DES MATIERES

	Pages
1 - AVANT-PROPOS .....	7
2 - INTRODUCTION .....	9
3 - PROPAGATION ACOUSTIQUE A BASSE ALTITUDE .....	11
3.1. Description de l'atmosphère comme milieu de propagation .....	11
3.1.1. Profils de température .....	11
3.1.2. Gradients de vitesse du vent .....	12
3.1.3. Turbulences thermique et cinématique .....	12
3.2. Influences de la météorologie et de la topographie sur la propagation acoustique à basse altitude .....	13
3.2.1. Absorption atmosphérique .....	13
3.2.2. Effets de la température .....	14
3.2.3. Effets du vent .....	15
3.2.4. Effets de la turbulence .....	15
3.2.5. Effets du relief .....	16
3.2.6. Effets de la nature du sol .....	18
4 - METHODES DE CALCUL DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE .....	19
4.1. Méthode des rayons .....	19
4.1.1. Loi de Snell .....	19
4.1.2. Méthode des caractéristiques .....	20
4.1.3. Calcul de la pression acoustique par la méthode des rayons .....	21
4.2. Méthode des faisceaux gaussiens .....	22
4.3. Méthode des modes normaux .....	23
4.4. Méthode de l'équation parabolique .....	25
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	27
5 - EQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE (EP2D) .....	31
5.1. Etablissement de l'équation parabolique bidimensionnelle .....	31
5.2. Interprétation géométrique de l'approximation parabolique .....	33
5.3. Dérivation asymptotique de l'équation parabolique .....	34
5.3.1. Approximation de Q .....	35
5.3.2. Méthode de De Santo .....	38
5.4. Propagation des modes normaux dans l'approximation parabolique ..	39
5.5. Relation entre la solution de l'équation de Helmotz et la solution de l'équation parabolique en espace libre .....	42
6 - METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE .....	45
6.1. Méthode "Split-Step Fourier" .....	45
6.1.1. Introduction des conditions aux limites dans l'algorithme "Split-Step Fourier" .....	47
6.1.2. Pas d'échantillonnage vertical et pas d'intégration .....	47
6.2. Méthode des différences finies .....	48
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	51
7 - INTRODUCTION A LA PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE .....	53
7.1. Synthèse bibliographique sur la propagation tridimensionnelle .....	53
7.1.1. Tracés de rayons tridimensionnels dans l'océan .....	53
7.1.2. Application de la méthode de l'équation parabolique à la propagation sous-marine tridimensionnelle .....	54
7.1.3. Calcul des fonctions de Green tridimensionnelles pour un indice de réfraction à profil quadratique .....	55
7.2. Mise en évidence des effets tridimensionnels de la météorologie et de la topographie par la méthode des rayons .....	56

8 - EQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE (EP3D) .....	59
8.1. Etablissement de l'équation parabolique tridimensionnelle (EP3D) ...	59
8.2. Choix du système de coordonnées .....	60
8.2.1. EP3D en coordonnées cartésiennes .....	60
8.2.2. EP3D en coordonnées sphériques .....	62
8.2.3. Conclusion .....	63
9 - RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE : APPLICATION A LA PROPAGATION ATMOSPHERIQUE .....	65
9.1. Méthode des directions alternées .....	67
9.2. Stabilité, consistance et convergence du schéma aux différences finies	68
9.2.1. Rappel des définitions .....	68
9.2.2. Consistance du schéma 3D .....	69
9.2.3. Stabilité du schéma aux différences finies .....	70
9.3. Détermination des coefficients de l'équation parabolique discrétisée .	74
9.4. Initialisation du schéma numérique .....	76
9.5. Conditions aux limites du maillage .....	77
9.5.1. Conditions au sol .....	77
9.5.2. Conditions sur les frontières du maillage .....	78
9.6. Résolution numérique de l'EP3D .....	80
9.6.1. Algorithme de résolution de l'EP3D .....	84
9.6.2. Temps de calcul et détermination des pas $\Delta r$ , $\Delta z$ et $\Delta \theta$ .....	85
9.7. Equation parabolique dans un écoulement unidirectionnel .....	86
10 - PROPAGATION EN PRESENCE D'ECRANS ACOUSTIQUES .....	89
10.1. Calcul du champ acoustique en présence d'un mur dans l'approximation parabolique 2D .....	90
10.2. Méthode des intégrales de Fresnel .....	91
10.3. Propagation en présence d'un écran dans l'approximation parabolique 3D	92
10.3.1. Diffraction en milieu homogène au repos .....	92
10.3.2. Diffraction par un écran en présence d'un vent transverse ....	95
ANNEXE A - Discrétisation de l'équation [9.9] .....	95
ANNEXE B - Discrétisation de l'équation [9.10] .....	97
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	99
11 - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE .....	101
11.1. Mesures de diffraction en chambre anéchoïque .....	101
11.1.1. Objectifs de l'expérience .....	101
11.1.2. Configuration des mesures réalisées en chambre sourde .....	102
11.2. Mesures de diffraction en soufflerie .....	103
11.2.1. Configurations des mesures effectuées en soufflerie .....	103
11.3. Analyse des résultats des expériences en chambre sourde et en soufflerie	104
11.3.1. Mesures en chambre anéchoïque .....	104
11.3.2. Mesures en soufflerie .....	105
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	107
CONCLUSION .....	109
FIGURES .....	111

## AVANT-PROPOS

L'étude de la propagation acoustique à basse altitude fait l'objet de nombreuses recherches et présente un intérêt pratique pour de nombreux problèmes de nuisance (bruit au voisinage d'installations industrielles importantes, bruits routiers,...) et dans le domaine de l'aéroustique pour la prévision du bruit des avions au niveau du sol.

L'analyse de ces problèmes consiste à évaluer le niveau acoustique en fonction de la distance de propagation à partir de la source de bruit (que l'on suppose en général ponctuelle) en essayant de tenir compte au mieux des effets du sol (relief, nature) et des différents paramètres aérologiques (vent et température) de la basse atmosphère. L'influence respective de chacun de ces paramètres peut, en général pour des configurations de base, être analysée à l'aide de modèles analytiques simples. En particulier, l'effet du sol est un paramètre important qui a donné lieu à de nombreuses études. Dans une revue [1], Attenborough montre les différentes approches possibles pour modéliser la nature du sol.

En général, la prise en compte des gradients de vent et de température est plus complexe et nécessite le développement de méthodes numériques. La méthode de l'approximation géométrique permet d'étudier la propagation lorsque la longueur d'onde acoustique est petite devant l'échelle de inhomogénéités du milieu. Cette technique est utilisée par l'ISL (Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis) [2] et le CSTB (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment) [3] pour la propagation à longues distances. Cependant, l'acoustique géométrique permet difficilement d'accéder au niveau acoustique en présence de caustiques (enveloppe de rayons) et dans les zones d'ombres rencontrées avec un vent contraire.

La méthode de l'équation parabolique utilisée initialement par Tappert et Hardin [4] en acoustique sous-marine et par Claerbout [5] en sismologie a aussi été appliquée depuis quelques années à la propagation atmosphérique [6-8]. Toutefois, dans ce dernier domaine, seul le traitement numérique de l'équation parabolique bidimensionnelle (EP2D) a, jusqu'à présent, été réalisé. Le calcul est effectué dans ces conditions dans un plan contenant la source et le récepteur et ne permet pas de prendre en compte les effets tridimensionnels qui peuvent apparaître en présence de vent transverse à la direction de propagation ou avec des obstacles de dimensions finies.



## 2 - INTRODUCTION

Cette thèse présente la mise en évidence des effets tridimensionnels sur la propagation et concerne plus précisément la résolution numérique de l'équation parabolique tridimensionnelle (EP3D) ainsi que la réalisation d'expériences de base pour la validation du schéma numérique proposé.

Les chapitres 3 et 4 rappellent l'influence respective des gradients de vent et de température et de la turbulence cinématique et thermique sur la propagation. Une technique numérique a été développée pour prendre en compte dans l'EP2D standard les effets combinés de la météorologie et de la topographie du terrain. Les résultats montrent que la présence d'un vent portant a tendance à renforcer le niveau acoustique dans la zone d'ombre d'un obstacle (écran ou colline). Différentes techniques numériques en usage sont aussi rappelées : l'approximation géométrique, la méthode des modes normaux et la méthode plus récente des faisceaux gaussiens.

Dans les chapitres 5 et 6, nous présentons l'équation parabolique bidimensionnelle. Les différents développements et approximations de l'équation parabolique (E.P. grands angles, relation de De Santo) qui peuvent être appliqués à l'EP2D sont exposés. Cette étude s'appuie en partie sur le travail de DEA de l'auteur [9] qui concerne la comparaison entre différents développements de l'E.P. appliqués à la propagation sous-marine. Nous présentons ensuite les deux principales techniques numériques utilisées pour la résolution de l'EP2D : la méthode "Split-Step Fourier" et la méthode des différences finies. Ce dernier chapitre permet de dégager l'intérêt d'utiliser l'E.P. associée à une résolution aux différences finies pour la propagation atmosphérique.

Les chapitres 7 à 10 sont consacrés à la propagation tridimensionnelle. Dans un premier temps, nous présentons à l'aide de publications récentes l'état actuel des recherches qui portent sur la propagation sous-marine.

Une méthode de tracés de rayons permettant de prendre en compte la météorologie et la topographie a été développée. Les résultats obtenus mettent en évidence des effets tridimensionnels en présence de vent et de relief. Le développement de l'EP3D en coordonnées cylindriques à partir de l'équation de Helmholtz est ensuite présenté. La résolution numérique de l'EP3D est effectuée par la méthode des directions alternées. Le système matriciel à résoudre à chaque pas de calcul suivant la portée est ainsi séparé en deux systèmes tridiagonaux. Le choix du schéma numérique aux différences finies et la prise en compte des conditions aux limites sont discutés. Des calculs obtenus en présence d'un écran et d'un vent montrent les effets 3D rencontrés.

Le chapitre 11 est consacré à l'aspect expérimental de l'étude. Nous présentons des expériences de diffraction pour différents types d'obstacles (écran mince, parallélépipède, calotte sphérique) réalisées en chambre sourde à l'ONERA et dans la soufflerie atmosphérique du CSTB à Nantes. Un bon accord est obtenu entre les mesures et les calculs de l'EP3D pour la diffraction par l'écran. Les expériences en soufflerie mettent en évidence les effets 3D combinés du vent et des obstacles sur la propagation.



## PREMIÈRE PARTIE

### 3 - PROPAGATION ACOUSTIQUE À BASSE ALTITUDE

#### 3.1 - Description de l'atmosphère comme milieu de propagation

Pour la propagation acoustique, on s'intéresse à la partie de l'atmosphère comprise entre le sol et quelques centaines de mètres d'altitude.

Les caractéristiques principales de l'atmosphère sont les inhomogénéités de température et de vitesse du vent. Ces inhomogénéités sont liées à de nombreux paramètres tels que l'ensoleillement, l'hygrométrie, la végétation ou le relief, etc.

Une description complète du milieu est difficile comme l'ont montré de nombreuses campagnes de relevés des grandeurs météorologiques. Il est néanmoins possible de modéliser, à l'aide de valeurs moyennes, les profils de température et de vent en fonction de l'heure, de la saison et du lieu de mesure. Ces modélisations semi-empiriques sont décrites dans les ouvrages consacrés à la météorologie et nous utiliserons, par la suite, des cas types de profils de vent et de température. Après une description météorologique de l'atmosphère, on analyse les effets des différents paramètres aérologiques et topographiques sur la propagation acoustique.

##### 3.1.1 - Profils de température

En règle générale, on observe un gradient de température négatif durant la journée, les couches de l'atmosphère proches du sol étant réchauffées par le soleil. Inversement, la nuit, les profils sont le plus souvent positifs, le sol étant plus froid que l'air en altitude (voir figure 1).

À partir d'une centaine de mètres, la température décroît régulièrement et l'on observe alors le phénomène d'inversion de température.

Cette allure générale des profils est modulée en fonction de la saison et de la couverture nuageuse. En effet, si le ciel est dégagé en été, les températures augmentent rapidement au sol et les gradients sont importants. En revanche, en hiver, un ciel dégagé s'accompagne généralement de refroidissement.

Par temps couvert, les phénomènes sont très différents. En été, les nuages cachent le soleil et la température reste modérée et plus uniforme en fonction de l'altitude. En hiver, la couche nuageuse permet de conserver la chaleur (relative) près du sol et les gradients sont alors quasi nuls (voir figure 1).

### 3.1.2 - Gradients de vitesse du vent

De même que la température, la vitesse du vent est une donnée difficile à modéliser du fait de sa grande instabilité au cours du temps. Elle est de plus dépendante de la nature du sol et de la végétation qui modifient les gradients aux très faibles altitudes. On peut cependant dégager les tendances suivantes :

La vitesse du vent est plus importante au milieu de la journée que la nuit (voir figure 2a).

La vitesse du vent est la même à partir d'une certaine hauteur quelle que soit l'heure du jour ; les gradients sont donc plus importants la nuit que le jour sauf très près du sol, comme le montre la figure 2b.

Dans la suite de cette étude, nous choisirons un profil de vent issu de la loi de Prandtl sous la forme :

$$V = V_{10} \left( \frac{z}{10} \right)^{\alpha}$$

où  $V_{10}$  est la vitesse du vent à 10 mètres du sol,  $z$  est l'altitude en mètres, et  $\alpha$  un coefficient représentatif de la rugosité du terrain. A titre d'exemple, une valeur classique de  $\alpha$  pour un terrain labouré est 0,18. Cette description du profil de vent est proche des exemples donnés sur la figure 2.

### 3.1.3 - Turbulences thermique et cinématique

Le troisième phénomène représentatif du milieu de propagation est la turbulence qui est indissociable de la température et du vent. On distingue ainsi deux types de turbulences dans l'atmosphère :

- La turbulence thermique engendrée par les différences de températures aux différentes altitudes. Les variations de masse volumique de l'air entraînent des phénomènes de convection appelés ascendances thermiques.

Les échelles caractéristiques de cette turbulence sont une longueur de l'ordre de 200 à 1500 mètres et une durée de 30 secondes à 15 minutes [11]. Ce sont donc des phénomènes lents et à grande échelle spatiale.

- La turbulence cinématique due aux perturbations causées par la rugosité du terrain sur le vent. Des mouvements perpendiculaires à la direction du vent sont créés par les contraintes de cisaillement qui sont elles-mêmes provoquées par les différences de vitesse du vent entre deux couches horizontales. Des tourbillons sont ainsi formés qui perturbent sensiblement les écoulements d'air près du sol.

Les échelles de cette turbulence sont : une durée caractéristique de l'ordre de la seconde et une échelle spatiale de l'ordre du mètre à 1 mètre d'altitude [11].

### **3.2 - Influences de la météorologie et de la topographie sur la propagation acoustique à basse altitude**

#### **3.2.1 - Absorption atmosphérique**

Sous le terme d'absorption atmosphérique sont englobés les effets de la viscosité du fluide, les échanges d'énergie entre molécules et la diffusion thermique. De nombreux auteurs ont tenté de modéliser les phénomènes d'absorption par des modèles semi-empiriques et des modèles théoriques. Il apparaît que l'absorption atmosphérique est proportionnelle à la distance parcourue et à un coefficient qui dépend de la fréquence, de la température et de l'humidité de l'air.

Nous ne ferons pas ici l'inventaire de toutes les formules semi-empiriques ou théoriques ; on peut cependant, à titre d'exemple, citer le modèle de Kneser et Knudsen [12] [13] qui caractérise l'absorption atmosphérique sous la forme :

$$\mu = A \times f + 2 \mu_{\max} \times \frac{f/f_r}{1 + (f/f_r)^2}$$

où :

- $\mu$  est l'atténuation de l'amplitude de la pression acoustique par longueur d'onde,
- $A$  est un coefficient lié à la température et à la célérité du son :

$$A = (16,5 + 0,1 T) 10^{-12} \times C_0$$

- $\mu_{\max}$  est un coefficient d'absorption maximale de la pression sur une longueur d'onde, lié à la température :  $\mu_{\max} = 0,0017$  (sans dimension).
- $f_r$  est la fréquence de relaxation liée à la concentration en vapeur d'eau, en pourcentage de mole  $h$ , et obtenue par une formule empirique :

$$f_r = 3,05 \cdot 10^4 \cdot h^{1,3} \text{ en Hz.}$$

Nous présentons, figure 3, un modèle d'absorption atmosphérique en fonction de la fréquence de la source [14].

On constate une importante atténuation pour les hautes fréquences, de l'ordre de 10 dB par 100 mètres à 10 kHz.

Dans le cadre de cette étude, les distances de propagation sont de l'ordre de quelques centaines de mètres et les fréquences d'une dizaine à une centaine de Hertz. Dans ces conditions, l'absorption atmosphérique est inférieure à 0,2 dB (pour  $f = 100$  Hz et  $d_{\max} = 1000$  m) et n'est pas prise en compte.

### 3.2.2 - Effets de la température

La température, et plus précisément ses gradients, ont un effet sur la propagation par le biais de la célérité du son.

Les deux grandeurs sont reliées par la relation :

$$c = 331,8 \sqrt{\frac{T + 273}{273}}$$

où  $T$  est la température en degrés Celsius et  $c$  la célérité du son en mètres par seconde.

L'effet de la température peut être analysé à l'aide de la loi géométrique de Snell :

$$\frac{c_1}{\sin i_1} = \frac{c_2}{\sin i_2}$$

Dans le cas d'un gradient positif de température ( $c_2 > c_1$ ), un rayon se propageant avec une incidence normale  $i_1$  sera dévié vers le sol ( $i_2 > i_1$ ) et inversement, les rayons auront tendance à être déviés vers le ciel dans le cas de gradients thermiques négatifs ( $i_2 < i_1$ ).

On peut donc prévoir un niveau acoustique supérieur en cas de gradient de température positif et inférieur en cas de gradient de température négatif.

Afin d'illustrer ces phénomènes, nous avons effectué deux tracés de rayons à l'aide de la méthode des caractéristiques. Dans les deux cas, nous avons choisi des gradients de célérité constants.

Pour le tracé 4a, le gradient est positif, ce qui correspond aux profils observés généralement la nuit. On constate une concentration des rayons acoustiques près du sol où le niveau acoustique est important. Le tracé de la figure 4b est effectué avec un gradient négatif et l'on observe la création d'une zone d'ombre acoustique. Le niveau théorique est nul dans cette partie de l'espace. En pratique, les phénomènes de réfraction négligés par la méthode des rayons, entraînent un niveau faible mais non nul dans cette région.

### 3.2.3 - Effets du vent

Nous avons vu précédemment que les gradients de vent étaient généralement positifs en basse altitude. Nous avons effectué deux tracés de rayons par la méthode des caractéristiques, le premier correspond à une configuration en vent portant, le second à une configuration en vent contraire (figure 5).

Le profil de vent choisi est de la forme :

$$u = v_{10} (z/10)^{0,2} \text{ avec } v_{10} = 10 \text{ m/s (36 km/h).}$$

Les résultats montrent une grande similitude avec les tracés en présence de gradients de température.

Le vent portant provoque une courbure des rayons vers le sol et donc une augmentation du niveau acoustique aux faibles altitudes. Le vent contraire engendre une courbure des rayons vers le ciel et donc une diminution du niveau près du sol avec création d'une zone d'ombre acoustique.

### 3.2.4 - Effets de la turbulence

L'effet de la turbulence sur la propagation acoustique a fait l'objet de nombreuses études (Tatarski [15], Ishimaru [16], Blanc-Benon, Juvé [17]).

Pour illustrer les effets de la turbulence sur la propagation à basse altitude, nous reprenons des résultats présentés dans les références [11] et [18].

La première présente les résultats de mesures effectuées en site propre et le second une modélisation de la turbulence cinématique pour des calculs par la méthode de l'équation parabolique.

Pour les essais en site propre, on s'intéresse aux fluctuations des niveaux acoustiques en un point donné en fonction du temps.

La campagne d'essais a eu lieu en octobre 85 à Villeau (Beauce) sur un terrain plat et dégagé avec une ligne de microphones située dans la direction du vent dominant.

Les conditions météorologiques étaient les suivantes : temps clair avec peu de vent ( de 0 à 2 m/s à 96 m) et de faibles gradients de température.

L'effet de la diffusion par la turbulence se caractérise par les fluctuations du niveau acoustique. La figure 6 montre que l'écart-type représentatif de ces fluctuations augmente avec la fréquence et avec l'éloignement du microphone par rapport à la source. L'écart-type moyen est de 1 dB à 250 Hz et 2,5 dB à 2500 Hz pour un récepteur placé à 30 m de la source. Cet écart-type atteint 7,5 dB à 250 Hz pour un microphone placé à 100 m de la source.

La méthode de l'équation parabolique permet d'analyser les effets de la turbulence sur un ensemble de réalisations du champ acoustique [18].

La figure 7 montre que la turbulence diffuse les ondes acoustiques dans l'espace. Les figures d'interférences sont estompées et le niveau acoustique au niveau du sol diminue.

### 3.2.5 - Effets du relief

Nous avons ici étudié, par des calculs avec la méthode des rayons et de l'équation parabolique bidimensionnelle, la propagation en présence d'une colline entre la source acoustique et le récepteur.

Pour les calculs avec l'équation parabolique bidimensionnelle, le relief est introduit en modifiant la condition à la limite sur le sol. Cette méthode et un ensemble de résultats effectués par l'auteur sont présentés en détail dans la référence [19].

Les calculs que nous présentons aux figures 8 et 9 ont été effectués pour les configurations suivantes :

La colline est décrite par l'altitude du sol en fonction de la distance horizontale  $r$  ; sa hauteur maximale est de 5 mètres. L'équation de la forme de la colline est :

$$z_{\text{sol}} = \frac{5}{1 + (r/30)^2}$$

La source acoustique est située à la hauteur  $z_s = 1,5$  m et à 70 mètres du sommet de la colline.

Pour les calculs en présence de vent portant, nous avons choisi un profil décrit dans la référence [20]. La forme de la colline étant douce, nous considérons que le vecteur vitesse reste horizontal dans tout le domaine de calcul. La composante horizontale s'écrit :  $u = u_{\text{amont}} + \Delta u$ , où  $u_{\text{amont}}$  est la vitesse du vent en amont de la colline.

$$u_{\text{amont}} = \frac{u_*}{0,4} \ln\left(\frac{z}{0,03}\right)$$

$u_*$  est la vitesse de friction et a été choisie telle que :

$$u_* = 17,4 \text{ m/s}$$

ce qui correspond à une vitesse de vent de 40 km/heure à l'altitude de la source  $z_s = 1,5$  mètres.

$\Delta u$  est la perturbation de la vitesse du vent introduite par la colline, elle s'écrit :

$$\Delta u = 16,0 \times \ln^{-2}\left(\frac{1}{0,03}\right) \cdot \left\{ \frac{1 - \left(\frac{r}{30}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{30}\right)^2} \ln\left(\frac{\Delta z}{0,03}\right) - \frac{2\left(\frac{r}{30}\right)}{\left(1 + \left(\frac{r}{30}\right)^2\right)^2} \frac{\Delta z - 0,03}{1} \ln\left(\frac{\Delta z}{0,03}\right) \right\}$$

$l$  représente l'épaisseur de la région perturbée par la colline et est obtenue par résolution de l'équation :

$$\frac{1}{30} \ln\left(\frac{1}{0,03}\right) = 2 K^2$$

où  $K$  est la constante de Von Karman ( $K \approx 0,4$ ).

$\Delta z$  représente l'altitude par rapport à la colline :

$$\Delta z = z - \frac{5}{1 + \left(\frac{r}{30}\right)^2}$$

En l'absence de vent, le tracé de rayons de la figure 8a montre que la colline crée une zone d'ombre acoustique délimitée par le rayon issu de la source et tangent au sol. Le calcul effectué par la méthode parabolique, dont le résultat est présenté figure 9a montre que le niveau dans la zone d'ombre n'est pas nul (les niveaux indiqués sont référencés par rapport au niveau à 1 mètre de la source). La différence de niveaux avec le champ libre est de 4 dB à 10 mètres de la source au niveau du sol. Malgré la faible hauteur de la colline (vis-à-vis de la longueur d'onde acoustique  $\lambda = 3,4$  m), on constate une diminution non négligeable du niveau sonore dans la zone d'ombre.

La figure 8b montre les trajectoires des rayons en présence du gradient de vent. Celles-ci sont déviées vers le sol comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 3, il en résulte qu'une partie des rayons pénètre dans la zone d'ombre. On peut donc s'attendre à ce que le niveau acoustique remonte derrière la colline en présence de vent portant. Le calcul parabolique confirme cette prévision comme le montre la figure 9b où les lignes isobares sont fortement déformées près du sol. À 220 mètres de la source et au niveau du sol, le niveau acoustique est de - 40 dB en champ libre, - 44 dB avec la colline et sans vent, et - 37 dB avec la colline et le vent portant.

### 3.2.6 - Effets de la nature du sol

Pour analyser les effets de l'impédance du sol sur la propagation à grande distance, on utilise classiquement le modèle de Delany et Bazley [13] qui s'écrit :

$$Z = 1 + 9,08 (f/\sigma)^{-0,75} + i . 11,9 (f/\sigma)^{-0,73}$$

où  $Z$  est l'impédance du sol en fonction de la fréquence  $f$  et de la résistance à l'écoulement  $\sigma$  (en rayls).

Pour les exemples numériques considérés effectués avec l'équation parabolique, nous avons choisi deux types de sol, l'un très absorbant (neige fraîche :  $\sigma = 30$ ), l'autre un peu moins absorbant (pelouse :  $\sigma \approx 200$ ). La source est située en  $r_s = -20$  m et  $z_s = 1,5$  m, la fréquence est de 100 Hz.

En l'absence de vent (figure 10), il apparaît une différence de niveau importante près du sol : - 10 dB à 220 mètres de la source entre le sol couvert de neige et la pelouse.

Nous avons repris les calculs précédents en ajoutant un profil de vent de type :

$$V = 10 (z/10)^{0,2}.$$

Les différences entre les résultats des calculs avec la pelouse et la neige sont plus marquées en présence de vent. Le niveau à 220 mètres de la source est de - 35 dB pour la pelouse et - 53 dB pour la neige, soit une différence de 18 dB (figure 11).

## 4 - MÉTHODES DE CALCUL DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE

### 4.1 - Méthode des rayons

La méthode des rayons est une description Lagrangienne de la propagation acoustique. Elle consiste à suivre au cours du temps les déplacements des points d'une surface d'onde. La trajectoire complète d'un point donné issue de la source est appelée rayon acoustique. Le calcul de la pression acoustique est effectué dans un deuxième temps [21].

Les deux méthodes classiques de calcul des trajectoires des rayons acoustiques sont la loi de Snell et la méthode des caractéristiques. Ces deux méthodes géométriques reposent sur les deux hypothèses suivantes :

- le milieu propagatif est faiblement inhomogène,
- les effets de diffraction sont négligeables.

Nous verrons par la suite les limitations qu'apportent la deuxième hypothèse dans le cadre de la propagation aérienne.

#### 4.1.1 - Loi de Snell

La loi de Snell est purement géométrique. On suppose que le milieu propagatif est composé de couches horizontales caractérisées par une célérité du son et une composante horizontale du vent dans une direction donnée.

À la traversée de chaque plan horizontal, on obtient un invariant dont Snell a montré qu'il était égal à :

$$A = \frac{c_1}{\sin \alpha_1} + V_1 = \frac{c_2}{\sin \alpha_2} + V_2$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les célérités du son,

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les angles d'incidence du rayon,

et  $V_1$  et  $V_2$  les composantes horizontales du vent, respectivement dans les couches 1 et 2.

Il est possible, à l'aide de cette loi, de suivre la trajectoire d'un rayon acoustique pas à pas. En se fixant un incrément  $dx$ , on détermine par la loi de Snell la nouvelle incidence et l'incrément vertical  $dz$ .

#### 4.1.2- Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est issue directement des équations de conservation en milieu lentement variable :

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div}(\zeta \vec{V}) = 0$$

où  $\zeta$  est la masse volumique et  $\vec{V}$  la vitesse du fluide.

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} + \frac{1}{\zeta} \text{grad } p = 0$$

où  $p$  est la pression.

- Conservation de l'entropie :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } \sigma = 0$$

À ces trois équations s'ajoute une équation d'état du fluide qui donne une relation entre pression, densité et entropie :

$$p = p(\zeta, \sigma).$$

Le système formé des équations de conservation est linéarisé en séparant les grandeurs moyennes des grandeurs fluctuantes du fait de la perturbation . On définit alors une fréquence et un vecteur d'onde locaux en considérant que, dans un petit domaine, l'onde peut être considérée comme plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \psi(\vec{r}, t) \\ \omega(\vec{r}, t) = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

où  $\psi$  est une fonction définie par :

$$p = p_0 e^{i\psi}, \quad v = v_0 e^{i\psi}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{i\psi}$$

$p_0$ ,  $v_0$  et  $\sigma_0$  étant des fonctions lentement variables de l'espace et du temps.

Après linéarisation et différents regroupements, on obtient l'équation de dispersion :

$$(\omega - \vec{k} \cdot \vec{V})^2 - k^2 c^2 = 0$$

Cette équation fournit alors le système vectoriel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = c \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} + \vec{V} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} = -\|\vec{k}\| \text{grad } c - \sum_{i=1}^3 k_i \text{grad } V_i \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce système est résolu simplement, en se fixant un incrément de temps  $dt$ , un vecteur d'onde initial  $\vec{k}_0$  et la position de la source  $\vec{r}_0$ . La première étape de calcul est la détermination de la position du rayon à l'aide de l'équation :

$$\vec{r} = \left( \vec{r}_0 + c \frac{\vec{k}_0}{\|\vec{k}_0\|} + \vec{V} \right)$$

On calcule ensuite les composantes du vecteur d'onde en fonction des grandeurs météorologiques locales  $c$  et  $\vec{V}$ . La trajectoire complète du rayon est ainsi obtenue de proche en proche par incrémentation du pas de temps  $dt$ .

#### 4.1.3 - Calcul de la pression acoustique par la méthode des rayons

Le calcul de la pression par la méthode des rayons repose sur l'hypothèse que l'énergie transportée par un tube de rayon est constante. Un tube de rayon est défini par la partie de l'espace comprise entre deux rayons voisins issus de la source. Si l'on raisonne dans le plan vertical, on fait partir de la source acoustique deux rayons très proches séparés d'un angle  $\delta\alpha$  et on considère à chaque instant  $t_i$  la distance  $\Delta l_i$  entre les deux positions des points correspondant aux rayons suivis.

Si  $p_0$  est la pression de référence et  $\Delta l_0$  la distance entre les deux rayons à la distance curviligne  $S_0$ , on peut écrire la relation [21] :

$$p_1 \Delta l_1 S_1 = p_0 \Delta l_0 S_0$$

qui fournit la pression acoustique en un point donné :

$$p_1 = p_0 \frac{\Delta l_0 S_0}{S_1 \Delta l_1}$$

La méthode des rayons ne permet pas de calculer la pression acoustique dans toutes les configurations. Il arrive fréquemment, notamment pour d'importantes distances de propagation, que les trajectoires de deux rayons issus de la source se croisent ; la pression acoustique calculée en ces points est alors infinie. Une autre limitation est due à l'impossibilité de calculer le niveau sonore dans les zones d'ombre. Ces zones peuvent être créées par la présence d'obstacles entre la source et le récepteur ou par des gradients verticaux de vent et de température. Dans ces conditions, le niveau acoustique calculé par la méthode des rayons est nul, ce qui est contraire à la réalité.

#### 4.2 - Méthode des faisceaux gaussiens

Afin de pallier ces limitations de la méthode des rayons, différents auteurs ont proposé la méthode des faisceaux gaussiens combinant la technique des rayons et l'approximation parabolique [22] et [23]. Le principe de cette méthode consiste à effectuer un tracé de rayons, puis à résoudre une équation de propagation dans un système de coordonnées centré sur le rayon. La pression acoustique en un point donné est alors calculée par sommation des contributions de chaque faisceau.

La première étape du calcul consiste à résoudre l'équation des rayons en coordonnées curvilignes :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c(r, z)} \frac{dr}{ds} \right) = - \frac{1}{c^2(r, z)} \nabla c(r, z) \quad (\text{référence [22]})$$

où  $r(s)$  et  $z(s)$  sont les coordonnées du rayon en fonction de la longueur de l'arc  $s$  et  $c(r, z)$  est la célérité locale du son. Cette équation des rayons est utilisée par M.B. Porter et Homer P. Bucker [23] pour les calculs de propagation sous-marine où les grandeurs caractéristiques du milieu sont la température  $T$  et la salinité  $S$ .

Pour les calculs atmosphériques, Y. Gabillet et M. Rosen [22] utilisent le système d'équations vectorielles (4.1).

La seconde étape du calcul est la résolution d'une équation parabolique écrite dans le système de coordonnées liées au rayon considéré. Le faisceau gaussien obtenu s'écrit sous la forme :

$$u(s, n) = A \sqrt{c(s)/r_q(s)} \exp \left[ -i \omega \left\{ \tau(s) + 0,5 [p(s)/q(s)] n^2 \right\} \right]$$

où  $A$  est une constante arbitraire,

$\tau(s)$  est le temps de parcours,  $\tau(s) = \int_0^s \frac{1}{c(s)} ds$ ,

$n$  est la distance par rapport au rayon (voir figure 12a),

$p(s)$  et  $q(s)$  sont obtenus à partir des équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{ds} = c(s)p(s) \\ \frac{dp}{ds} = - \frac{\partial^2 c(s)}{\partial n^2} \times q(s) \cdot c(s)^{-2} \end{array} \right.$$

La dernière étape du calcul consiste à sommer les contributions des différents rayons en un point donné.

Y. Gabillet et M. Rosen montrent que la méthode des faisceaux gaussiens permet le calcul du niveau dans la zone d'ombre créée par un vent contraire (figures 12b et 12c).

De même, les calculs de M.B. Porter et H.P. Bucker dans l'océan montrent un bon accord avec les résultats de la méthode des modes normaux et notamment un niveau acoustique correct dans les zones d'ombre et les caustiques (figure 13).

#### 4.3 - Méthode des modes normaux

La méthode est une résolution de l'équation de Helmholtz par séparation des variables d'espace.

Considérons l'équation de Helmholtz en coordonnées cartésiennes où  $r$  représente la portée et  $z$  l'altitude :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0$$

$k_0$  est le nombre d'onde :

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $c_0$  la célérité moyenne du son.

$n$  est l'indice local de réfraction :

$$n = \frac{c_0}{c}$$

La pression  $p$  est décomposée en produit de deux fonctions de  $r$  et  $z$  :

$$p = u(r) \cdot v(z)$$

L'équation de Helmholtz se réécrit alors :

$$v \frac{d^2 u}{d r^2} + u \frac{d^2 v}{d z^2} + k_0^2 n^2 u v = 0 .$$

En séparant les termes dépendant uniquement de  $z$  et ceux ne dépendant que de  $r$ , on peut découpler l'équation sous la forme :

$$- \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{d r^2} = \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{d z^2} + k_0^2 n^2 = T^2$$

Il est nécessaire à ce moment du calcul de se limiter aux cas d'un milieu stratifié.

On est alors en présence d'un système de deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v}{d z^2} + (k_0^2 n^2 - T^2) v = 0 \\ \frac{d^2 u}{d r^2} = -u T^2 \end{array} \right.$$

Le problème se ramène alors à déterminer un ensemble discret de fonctions modales  $v_m(z)$  et les nombres d'onde modaux  $T_m$  solutions de l'équation :

$$\frac{d^2 v_m(z)}{d z^2} + (k_0^2 n^2 - T_m^2) v_m(z) = 0$$

associée à des conditions limites.

La pression est alors écrite comme somme discrète :

$$P(r, z) = \sum_m X_m V_m(z) e^{i T_m r} ,$$

les solutions de l'équation :

$$\frac{d^2 u}{d r^2} = -u T_m^2 \quad \text{étant directement calculables :} \quad u = e^{i T_m r}$$

La solution de l'équation de Helmholtz peut être approchée d'aussi près que l'on veut en prenant un nombre suffisant de modes.

#### 4.4 - Méthode de l'équation parabolique

La méthode de l'équation parabolique constituant une partie importante de cette étude, nous reviendrons en détail sur ses développements dans les chapitres suivants. Nous rappelons ici l'obtention, les limitations et les avantages de cette équation.

La méthode repose sur l'hypothèse qu'il existe un système de coordonnées où la pression acoustique est séparable, et une direction de propagation privilégiée.

La nature elliptique de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0$$

est supprimée en écrivant :

$$p = S(r) \psi(r, z)$$

où  $r$  est la direction de propagation privilégiée.

Après divers développements et approximations détaillés plus loin, on obtient une équation parabolique :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

Cette équation peut être résolue facilement par la méthode "Split Step Fourier" utilisant les transformations de Fourier rapides ou la méthode aux différences finies.

Les limitations théoriques de l'approximation parabolique sont les suivantes :

- Les variations spatiales de l'indice de réfraction doivent être faibles.
- La propagation doit se faire selon des angles faibles par rapport à l'horizontale.

Nous verrons par la suite que ces deux conditions réductrices sont en général satisfaites dans le cadre de la propagation à basse altitude.

L'équation parabolique permet de tenir compte des effets combinés du sol et des grandeurs météorologiques. De plus, sa résolution numérique est plus simple et plus rapide que celle de l'équation de Helmholtz.



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA PREMIÈRE PARTIE

- [1] K. ATTENBOROUGH  
"Review of Ground Effects on Outdoor sound propagation from continuous broadband sources".  
Applied acoustics, 24 - pp 289 - 319 (1988)
- [2] J. VERMOREL  
"La propagation acoustique dans la basse atmosphère".  
Rapport institut franco - allemand de recherches de Saint-Louis n° R126/87
- [3] M. ROSEN  
"Effet du vent sur la propagation du son au voisinage du sol".  
Rapport final de synthèse CSTB n° 2.87.008 (décembre 1988).
- [4] F.D. TAPPERT  
"The parabolic wave equation " in " Wave propagation in ocean acoustics".  
pp 224 - 287, Springer Verlag (1979).
- [5] J.F. CLAERBOUT  
"Fundamentals of geophysical data processing".  
Mac Graw Hill (1976).
- [6] K.E. GILBERT M.J. WHITE  
"Application of the parabolic equation to sound propagation in a refracting atmosphere".  
Journal of the acoustical society of America, 85 (2) pp 630.637 (1989).
- [7] S. CANDEL  
"Résolution numérique de problèmes de propagation, de rayonnement et de diffusion dans le cadre de l'approximation parabolique".  
Rapport ONERA n° 1978 - 5 (1978).
- [8] Guy-Philippe OSWALD  
"Propagation acoustique extérieure : résolution par des méthodes paraboliques".  
Revue d'acoustique - n° 72 - pp 128 - 140 (1985).
- [9] Y. DELRIEUX  
"Résolution numérique de l'équation parabolique par transformées de Fourier, Applications à l'acoustique sous-marine".  
Rapport de DEA, Ecole Centrale de Lyon, (juillet 1987).

- [10] R. GEIGER  
 "The Climate near the ground".  
 Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1966).
- [11] S. CANARD-CARUANA  
 "Propagation acoustique à basse altitude : effets de la turbulence atmosphérique (Essais de Villeau)".  
 Rapport technique ONERA N° 15/3641 PY (juillet 1990).
- [12] S. CANARD  
 "Synthèse bibliographique sur la propagation acoustique à très basse altitude".  
 Rapport final ONERA N° 6/3641 PY 240 P (avril 1987).
- [13] J.E. PIERCE and T.F.W. EMBLETON  
 L.C. SUTHERLAND  
 "Review of noise propagation in the atmosphere".  
 J. Acoust. Soc. Am., Vol. 61, No. 6, pp. 1403-1418 (june 1977).
- [14] H.E. BASS, L.C. SUTHERLAND, J.E. PIERCE, L. EVANS  
 "Absorption of sound in the atmosphere".  
 Physical acoustics, Principles and Methods.  
 Volume XVII, pp. 145 → 232, Edited by W.P. MASON, R.N. THUSTON.  
 Academic Press, Inc. (1984).
- [15] TARTARSKI V.I.  
 "The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation".  
 Israel Program of scientific translations - Jerusalem (1971).
- [16] ISHIMARU A.  
 "Theorie and application of wave propagation and scattering in random media".  
 Proceedings IEEE - Vol 65 (1977).
- [17] PH. BLANC-BENON, D. JUVÉ, M. KARWEIT and G. COMTE-BELLOT  
 "Simulation numérique de la propagation des ondes acoustiques à travers une turbulence cinématique".  
 J. acoustique 3 - pp 1 - 8 (mars 1990).
- [18] P. MALBEQUI  
 "Utilisation d'un modèle ARMA dans le cadre de la propagation en milieu turbulent".  
 Rapport final ONERA n° 14/3641 PY (avril 1990).

- [19] Y. DELRIEUX  
"Propagation acoustique tridimensionnelle à basse altitude".  
Rapport technique ONERA N° 13/3641 PY (avril 1990).
- [20] P.S. JACKSON, J.C., R. HUNT  
"Turbulent wind flow over a low hill".  
Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 101, pp. 929-955 (1975).
- [21] J. VERMOREL  
"La propagation acoustique dans la basse atmosphère".  
Rapport institut franco-allemand de recherches de Saint-Louis N° R 126/87.
- [22] Y. GABILLET and M. ROSEN  
"Computation of the wind effect on outdoor sound propagation by use of the gaussian beam tracing method".  
Inter-Noise 89, Newport Beach, CA, USA.
- [23] MICHAEL B. PORTER, HOMER P. BUCKER  
"Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields".  
J. Acoust. Soc. Am. 82 (4) (october 1987).



## DEUXIÈME PARTIE

### 5 - ÉQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE (EP2D)

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de l'équation parabolique que nous avons choisie pour calculer la propagation acoustique en basse altitude. Nous détaillons les avantages et les limitations ainsi que les nombreux développements dont elle a fait l'objet. Les interprétations de l'approximation parabolique sont faites en 2D mais sont transposables au cas tridimensionnel.

#### 5.1 - Établissement de l'équation parabolique bidimensionnelle

On considère que la propagation du champ de pression est décrite par l'équation d'onde inhomogène :

$$\Delta \pi - \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = 0 \quad [5.1]$$

où  $c(\vec{x})$  est la célérité locale du son,

et on s'intéresse à une onde monochromatique de pulsation  $\omega$  :

$$\pi(\vec{x}, t) = p(\vec{x}, t) e^{-i\omega t} \quad [5.2]$$

Ce qui fournit l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2(\vec{x})} p = 0 \quad [5.3]$$

On écrit plus généralement cette équation sous la forme :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0 \quad [5.4]$$

$$\text{où } k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \text{ et } n = \frac{c_0}{c(\vec{x})}$$

$c_0$  est une valeur moyenne de la célérité du son.

Nous considérons un système de coordonnées cylindriques, une direction principale de propagation autour de l'axe  $r$  et nous cherchons le champ de pression sous la forme :

$$p(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) S(r) \quad [5.5]$$

Cette décomposition permet de réécrire l'équation de Helmholtz de la manière suivante :

$$\psi \left( \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} \right) + S \left[ \Delta \psi + \left( \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \frac{dS}{dr} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 n^2 \psi \right] = 0$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} = -k_0^2 S \\ \Delta \psi + \left( \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \frac{dS}{dr} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 n^2 \psi = k_0^2 \psi \end{cases}$$

S vérifie ainsi :

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + k_0^2 S = 0 \quad [5.6]$$

La solution de cette équation de Bessel se présente sous la forme d'une fonction de Hankel d'ordre zéro :

$$S(r) = H_0^1(k_0 r)$$

Nous conserverons pour la suite l'approximation de S en champ lointain :

$$S(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{i k_0 r - \frac{\pi}{4}}$$

L'équation en  $\psi$  s'écrit :

$$\Delta \psi + \left( \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \frac{dS}{dr} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi k_0^2 (n^2 - 1) = 0$$

soit :

$$\Delta \psi + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad [5.7]$$

L'approximation paraxiale ou parabolique consiste à considérer que, si  $L$  est une échelle de variation de  $\psi$  selon  $r$ , la dépendance de  $p$  en  $r$  étant essentiellement portée par la fonction  $S(r)$ , on a  $L \gg \lambda$  et ainsi :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \left( \sim \frac{\psi}{L^2} \right) \ll 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \sim \frac{\psi}{\lambda L} \right)$$

En considérant que le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$  est négligeable (les fronts d'ondes étant quasi plans loin de la source), on obtient l'équation parabolique bidimensionnelle standard :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0} \quad [5.8]$$

Cette équation parabolique est une équation aux dérivées partielles à condition initiale, dont la résolution s'effectue dans le sens des  $r$  croissants.

## 5.2 - Interprétation géométrique de l'approximation parabolique

L'approximation parabolique permet de décrire le champ acoustique dans les conditions suivantes :

- Le milieu est faiblement inhomogène, c'est-à-dire que les variations de l'indice de réfraction se font sur des échelles de longueurs grandes devant les échelles de variation de la pression.
- La propagation se fait selon des angles faibles par rapport à l'horizontale. En pratique, l'ouverture angulaire maximum doit être de  $\pm 15^\circ$ .

La première condition est remplie dans la plupart des configurations de propagation atmosphérique rencontrées.

Pour la seconde condition, nous avons représenté figure 14a un tube de rayon issu de la source  $S$  placée à 10 mètres du sol. Nous observons que, pour un récepteur situé à 2 mètres du sol, la distance minimum à respecter pour remplir la condition des angles faibles est de 45 mètres. L'approximation dite des "petits angles" (équation parabolique standard) ne présente donc pas, pour la propagation à grande distance, une contrainte restrictive.

La loi de Snell montre, par ailleurs, qu'un rayon issu de la source avec un angle faible conserve au cours de la propagation une direction proche de l'horizontale. On a :

$$n(z_s) \cos \theta_0 = n(z) \cos \theta_1.$$

Pour une fluctuation de température de 20 °, la variation de célérité du son est de 12 m/s. La valeur extrême de l'incidence est donc :

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{c(z)}{c(z_s)} \cos \theta_0\right);$$

pour  $\theta_0 \approx 15^\circ$ , on obtient  $\theta_1 \approx 20^\circ$ .

Dans la majorité des configurations de température observées, la propagation reste donc centrée autour de la direction principale (figure 14b).

### 5.3 - Dérivation asymptotique de l'équation parabolique

De nombreux auteurs ont proposé de nouveaux développements dans le but de construire d'autres équations de type parabolique plus proches de l'équation de Helmholtz. Nous présentons les principales méthodes rencontrées dans la littérature.

Les méthodes reposent sur une approximation d'un opérateur obtenu à partir de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0$$

On considère la grandeur  $u = p\sqrt{r}$  que l'on injecte dans l'équation de Helmholtz. On obtient :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right] u(r, z) = 0$$

Les développements sont obtenus à partir de l'opérateur :

$$Q = \left( n^2 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{1/2}.$$

L'équation d'Helmholtz devient :

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2 Q^2 \right) u = 0}$$

Si l'on appelle  $P$  l'opérateur  $\partial/\partial r$ , on peut alors factoriser cette nouvelle équation sous la forme :

$$(P^2 + k_0^2 Q^2) u = (P + i k_0 Q)(P - i k_0 Q) u + i k_0 [P, Q] u = 0$$

où le commutateur  $[P, Q]$  vaut :

$$[P, Q] = PQ - QP.$$

Dans le cas d'un milieu stratifié, ce commutateur est nul. Dans le cas d'un milieu non stratifié, il sera supposé nul en première approximation .

La partie progressive de l'onde est solution de l'équation :

$$(P - i k_0 Q) u = 0 \quad [5.9]$$

### 5.3.1 - Approximation de $Q$

Afin d'alléger les écritures, on introduit les notations suivantes :

$$\varepsilon = n^2 - 1$$

$$\mu = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$Q$  s'écrit alors :

$$Q = (1 + \varepsilon + \mu)^{1/2}.$$

Un développement limité au premier ordre donne :

$$Q_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2}$$

ce qui conduit à l'équation parabolique classique :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

avec  $\psi = u e^{-i k_0 r}$ .

Tappert [4] propose également le développement suivant :

$$Q_2 = (1 + \mu)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} + i k_0 \psi - i k_0 \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \psi - \frac{i k_0}{2} (n^2 - 1) \psi = 0$$

Pour un milieu homogène, ce développement est une représentation exacte de l'équation d'Helmholtz de même que celui que proposent D.J. Thomson et N.R. Chapman [24] :

$$Q_3 = (1 + \mu)^{1/2} + [(1 + \varepsilon)^{1/2} - 1]$$

L'équation parabolique correspondante est alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} + i k_0 \psi - i k_0 \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \psi - i k_0 (n - 1) \psi = 0$$

D'après les auteurs, cette dernière équation est moins sensible au choix de la célérité moyenne  $c_0$  et réduit les erreurs pour des angles de propagation supérieurs à 15°. C'est pourquoi ce type de développements porte le nom de "grands angles". Thompson et Chapman proposent par ailleurs d'estimer l'erreur introduite de la manière suivante : soit  $E_i$  un terme d'erreur choisi tel que :

$$E_i = Q_i^2 - Q^2$$

$$\text{où } Q = (1 + \varepsilon + \mu)^{1/2}$$

Les trois développements précédents introduisent les erreurs :

$$\begin{aligned} E_1 &= Q_1^2 - Q^2 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2}\right)^2 - (1 + \varepsilon + \mu) \\ &= \frac{1}{4} (\varepsilon^2 + \varepsilon\mu + \mu\varepsilon + \mu^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= Q_2^2 - Q^2 = \left\{ (1 + \mu)^{1/2} - \frac{\varepsilon}{2} \right\}^2 - (1 + \varepsilon + \mu) \\ &= \varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{4} - 1 \right) + \frac{\varepsilon}{2} (1 + \mu)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} (1 + \mu)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= Q_3^2 - Q^2 = \left\{ (1 + \mu)^{1/2} + [(1 + \varepsilon)^{1/2} - 1] \right\}^2 - (1 + \varepsilon + \mu) \\ &= 2 [1 - n + (1 + \mu)^{1/2}] + n (1 + \mu)^{1/2} + (1 + \mu)^{1/2} n \end{aligned}$$

Si l'on considère un milieu où l'indice  $n$  s'écrit :

$$n = 1 + \delta n$$

où  $\delta n$  est constant, et pour une composante du champ de la forme  $e^{i k_0 (r \cos \theta + z \sin \theta)}$ , on a  $|\mu| = \sin^2 \theta$ .

Les erreurs sont majorées par :

$$|E_1| \leq \frac{1}{4} [|\delta n|(2 + |\delta n|) + \sin^2 \theta]^2$$

$$|E_2| \leq \frac{1}{4} [|\delta n|(2 + |\delta n|)][|\delta n|(2 + |\delta n|) + 4(\cos \theta - 1)]$$

$$|E_3| \leq 2|\delta n| |\cos \theta - 1|$$

Sur la figure 15 sont représentées les erreurs  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  pour  $|\delta n| = 0,1$  et pour  $|\theta| = 20^\circ$ .

Ce calcul d'erreur met en évidence l'intérêt de la décomposition de Thomson et Chapman :

- Pour un indice constant, la courbe d'erreur en fonction de l'angle reste toujours en dessous des deux autres courbes et notamment de celle portant sur le développement  $Q_2$ .

Il est à remarquer que les deux développements  $Q_2$  et  $Q_3$  ne diffèrent que sur la partie concernant l'indice de réfraction, les deux courbes restent parallèles, l'écart entre les deux étant présent pour un angle  $\theta$  nul. La courbe  $|E_1|$  diverge très rapidement pour des angles supérieurs à une vingtaine de degrés.

- Pour un angle constant, les courbes  $|E_1|$  et  $|E_2|$  sont presque identiques car les développements ne diffèrent que pour la partie portant sur la dérivée seconde.

Là aussi, l'écart existe dès l'origine car le développement  $Q_2$  est exact pour un milieu homogène, le développement  $Q_1$  ne l'étant pas.

La courbe  $|E_3|$  est, là aussi, située beaucoup plus près de la valeur zéro.

De ces deux courbes ressort que l'on peut attendre une bonne amélioration des résultats pour des angles assez élevés et pour des profils de célérité à forts gradients d'indice.

D'autres approximations sont proposées dans la littérature à partir de l'opérateur  $Q$ . On peut notamment conserver certains termes d'ordre supérieur, par exemple :

$$Q = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{8} (\varepsilon^2 + \mu^2 + \varepsilon\mu + \mu\varepsilon)$$

ce qui fournit une nouvelle équation parabolique :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = i k_0 \left( \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{1}{2 k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{8 k_0^4} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi$$

On peut attendre de ces développements une amélioration des résultats pour des angles de propagation supérieurs à 15°. Ces différents développements ont été essentiellement appliqués à la propagation sous-marine où les distances sont très importantes.

Dans le cadre d'un travail de DEA [9], l'auteur a effectué une étude quantitative et qualitative des différentes équations à l'aide de la méthode "Split-Step Fourier" présentée au chapitre 6.

Les conclusions de cette étude sont les suivantes :

- Le développement  $Q_2$  présente une amélioration très sensible à l'approximation classique en réduisant le décalage des interférences observées sur les grandes distances de propagation.
- La méthode de Thomson et Chapman est la plus performante et présente les avantages suivants :
  - rapidité de mise en place à partir des algorithmes classiques,
  - temps de calcul inchangés,
  - meilleure adaptation aux profils de célérités à forts gradients,
  - meilleurs résultats pour des ouvertures de source importantes.
- Le développement d'ordre supérieur présenté en dernier lieu donne des résultats identiques au développement  $Q_2$ .

Les améliorations apportées à l'équation parabolique par les auteurs tels que Tappert, Thomson et Chapman reposent sur le même principe :

Développer l'opérateur racine carrée de  $Q$  de façon à s'approcher au mieux de la solution exacte de l'équation d'Helmholtz. John De Santo propose une autre solution dans la référence [14].

### 5.3.2 - Méthode de De Santo

La méthode de John De Santo [25] est différente. Elle consiste à établir une meilleure approximation entre la solution de l'équation de Helmholtz et de l'équation parabolique.

La relation de départ introduite par Polijanskii est la suivante :

$$P(r, z) = A_0 \int_0^{\infty} \psi(t, z) e^{\frac{ik_0}{2t}(r^2 + t^2)} t^{-1} dt$$

Polijanskii a démontré que cette relation était une relation exacte entre  $\psi$  et  $P$ .

Un calcul par la méthode de la phase stationnaire de cette intégrale fournit la relation :

$$p(r, z) = \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{k_0 r}} \psi(r, z) \left\{ 1 + \frac{1}{k_0 \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[ \frac{1}{8 k_0 r} + \dots \right] + \frac{i r}{2 k_0 \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left[ 1 + \dots \right] \right\}$$

De cette relation, De Santo ne conserve que les termes prépondérants :

$$p(r, z) = \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{k_0 r}} \left\{ \psi + \frac{i r}{2 k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right\}$$

Cette relation permet de corriger de façon simple la valeur du champ  $\psi$ . La détermination de  $\psi$  s'effectuant de pas en pas dans la direction  $r$ , on calcule  $\psi(r + \Delta r)$  et  $\psi(r + 2\Delta r)$  et on évalue la dérivée seconde de  $\psi$  par rapport à  $r$  à la distance  $r + \Delta r$  :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \Big|_{r + \Delta r} \simeq \frac{\psi(r) - 2\psi(r + \Delta r) + \psi(r + 2\Delta r)}{\Delta r^2}$$

La relation établie par De Santo permet alors de corriger la valeur de  $p$  à la distance  $r + \Delta r$ .

Des comparaisons entre la solution modale de l'équation de Helmholtz et la solution corrigée de l'équation parabolique ont montré l'efficacité de la méthode de De Santo. Cette technique apporte une correction sur la position des interférences qui sont décalées dans l'approximation parabolique pour de très grandes distances de propagation sous-marines.

Une autre interprétation de l'approximation parabolique peut être faite à l'aide de la méthode des modes normaux présentée au chapitre 4 et appliquée à l'équation parabolique standard. Cette interprétation a été introduite par S. Mc Daniel [26].

#### 5.4 - Propagation des modes normaux dans l'approximation parabolique

Afin de comparer les solutions modales de l'équation de Helmholtz et de l'équation parabolique, on effectue une séparation des variables  $r$  et  $z$  de l'équation standard :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

On pose pour cela :

$$\psi(r, z) = u_p(r) v_p(z),$$

et l'équation parabolique se réécrit alors :

$$u_p \frac{d^2 v_p}{dz^2} + 2 i k_o v_p \frac{d u_p}{dr} + k_o^2 (n^2 - 1) u_p v_p = 0$$

soit :

$$\frac{1}{v_p} \frac{d^2 v_p}{dz^2} + \frac{2 i k_o}{u_p} \frac{d u_p}{dr} + k_o^2 (n^2 - 1) = 0 \quad [5.10]$$

On se limite alors au cas d'un milieu stratifié, c'est-à-dire où  $n$  ne dépend que de l'altitude  $z$ .

L'équation [5.10] peut être alors décomposée en :

$$\frac{1}{v_p} \left\{ \frac{d^2 v_p}{dz^2} + k_o^2 n^2 v_p \right\} = \frac{1}{u_p} \left\{ k_o^2 u_p - 2 i k_o \frac{d u_p}{dr} \right\} = T_p^2$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v_p}{dz^2} + (k_o^2 n^2 - T_p^2) v_p = 0 \\ 2 i k_o \frac{d u_p}{dr} - (k_o^2 - T_p^2) u_p = 0 \end{array} \right. \quad [5.11]$$

$$2 i k_o \frac{d u_p}{dr} - (k_o^2 - T_p^2) u_p = 0 \quad [5.12]$$

On peut rapprocher ce système modal de celui que nous avons obtenu à partir de l'équation de Helmholtz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v}{dz^2} + (k_o^2 n^2 - T^2) v = 0 \\ \frac{d^2 u}{dr^2} = -u T^2 \end{array} \right. \quad [5.13]$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -u T^2 \quad [5.14]$$

L'équation en  $v(z)$  étant identique à l'équation [5.11], l'ensemble discret des fonctions modales  $v_m(z)$  et des nombres d'onde modaux  $T_m$  est le même pour les deux équations.

L'équation s'intègre directement :

$$u_{p_m}(r) = A_m e^{-i \left( k_0 - \frac{T_m^2}{k_0} \right) \frac{r}{2}}$$

Ce qui permet d'écrire  $\psi$  sous la forme de la somme discrète :

$$\psi(r, z) = \sum_m A_m V_m(z) e^{-i \left( k_0 - \frac{T_m^2}{k_0} \right) \frac{r}{2}}$$

On obtient alors la valeur de la pression :

$$p_p(r, z) = \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}} \psi(r, z) = \sum_m A_m V_m(z) e^{i \left( k_0 + \frac{T_m^2}{k_0} \right) \frac{r}{2}}$$

La pression obtenue pour les deux équations est donc :

Pour l'équation de Helmholtz :

$$P_H(r, z) = \sum_m X_m V_m(z) e^{i T_m r}$$

Pour l'équation parabolique :

$$P_p(r, z) = \sum_m A_m V_m(z) e^{i \left( k_0 + \frac{T_m^2}{k_0} \right) \frac{r}{2}}$$

et la différence entre les deux décompositions réside donc dans la phase de chaque mode  $m$  :

$$\Delta \phi_m = \frac{T_m^2}{2 k_0} + \frac{k_0}{2} - T_m$$

Les deux décompositions ne coïncident que pour le mode correspondant à  $\Delta\phi_m = 0$  soit  $T_m = k_0$ . Les conséquences sont que lorsque les deux solutions coïncident à la distance  $r_0$ , le déphasage de chaque mode à la distance  $r$  est :

$$\Delta\phi_m = \left( \frac{T_m^2}{2k_0} + \frac{k_0}{2} - T_m \right) (r - r_0)$$

La contribution de chaque mode  $m$  est donc déformée selon l'axe  $r$  entraînant un décalage de la phase croissant avec la distance de propagation, et par suite une modification de la position des interférences.

Une autre interprétation de l'approximation parabolique est possible, dans le cas d'un milieu homogène, à l'aide de la fonction de Green en espace libre de l'équation de Helmholtz.

### **5.5 - Relation entre la solution de l'équation de Helmholtz et la solution de l'équation parabolique en espace libre**

La solution de l'équation de Helmholtz en espace libre, dans un milieu homogène de célérité du son  $c$ , est de la forme :

$$p = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} e^{ik\sqrt{r^2 + z^2}}$$

L'approximation parabolique impose que la propagation s'effectue autour de la direction horizontale, c'est-à-dire que  $z \ll r$ . On peut alors faire un développement limité du terme  $\sqrt{r^2 + z^2}$  en conservant le premier ordre pour l'amplitude et le deuxième ordre pour la phase :

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + z^2} &= r^2 \left( 1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{1/2} \\ &\approx r + \frac{z^2}{2r} \end{aligned}$$

On obtient alors une valeur approchée de  $p$  pour la région située près de l'axe  $Oz$  :

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{1}{r} e^{ik_0(r + z^2/2r)} \\ &= \frac{1}{r} e^{ik_0 r} e^{ik_0 z^2/2r} \end{aligned}$$

On retrouve donc une écriture de la pression sous la forme d'une onde cylindrique modulée en phase et en amplitude par une fonction  $\psi$  :

$$p = \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}} \psi$$

où :

$$\psi = \frac{e^{i k_0 z^2 / 2r}}{\sqrt{r}}$$

Il est alors facile de vérifier que cette fonction  $\psi(r, z)$  est solution de l'équation parabolique en milieu homogène :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

L'équation parabolique représente donc une approximation de l'équation de Helmholtz pour une direction privilégiée proche de l'axe horizontal Or.



## 6 - MÉTHODES DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE

La résolution de l'équation parabolique standard EP :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad [6.1]$$

peut s'effectuer à l'aide de :

- la méthode "Split-Step Fourier",
- la méthode des différences finies.

Par la nature même de l'EP, le front d'onde  $\psi(r, z)$  est uniquement fonction du front précédent  $\psi(r - \Delta r, z)$  et de ses variations par rapport à  $z$ . Le principe de la résolution est donc de calculer le champ  $\psi$ , à partir d'un champ initial  $\psi_0$ , de proche en proche suivant la direction  $r$ .

### 6.1 - Méthode "Split-Step Fourier"

Cette méthode a été introduite par Tappert [4]. Elle consiste à appliquer à l'équation parabolique une transformation de Fourier selon la direction  $z$  :

$$\text{TF} \left\{ (\psi(r, z)) \right\} = \tilde{\psi}(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, z) e^{-i s z} dz$$

L'EP devient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{-i s z} dz + 2 i k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r} e^{-i s z} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} k_0^2 (n^2 - 1) \psi e^{-i s z} dz = 0$$

Le premier terme de cette équation se calcule en effectuant une intégration par partie,  $\psi$  et ses dérivées successives tendent vers zéro quand  $z$  devient infini :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{-i s z} dz &= - \frac{s^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, z) e^{-i s z} dz \\ &= -s^2 \tilde{\psi}(r, s) \end{aligned}$$

Le second terme s'écrit :

$$2 i k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r} e^{-i s z} dz = 2 i k_0 \frac{\partial \tilde{\psi}(r, s)}{\partial r}$$

La troisième intégrale nécessite une hypothèse afin de pouvoir extraire le terme  $(n^2 - 1)$  de l'intégrale ; on considère pour cela que l'indice local de réfraction varie peu vis-à-vis des variations du champ acoustique.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - 1) \psi e^{-i s z} dz &= (n^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi e^{-i s z} dz \\ &= (n^2 - 1) \tilde{\psi}(r, s) \end{aligned}$$

L'équation obtenue après calcul des différentes intégrales est la suivante :

$$-s^2 \tilde{\psi} + 2 i k_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \tilde{\psi} = 0$$

Cette équation s'intègre directement :

$$\tilde{\psi}(r + \Delta r, s) = \tilde{\psi}(r, s) e^{\left\{ \frac{-k_0^2 (n^2 - 1) + s^2}{2 i k_0} \right\} \cdot \Delta r}$$

et finalement le champ  $\psi(r + \Delta r, z)$ , est obtenu par une transformation de Fourier inverse :

$$\psi(r + \Delta r, z) = \exp \left\{ \frac{i k_0}{2} (n^2 - 1) \Delta r \right\} \cdot \text{TF}^{-1} \left\{ e^{\frac{-i s^2 \Delta r}{2 k_0}} \text{F}[\psi(r, z)] \right\}$$

En pratique, le champ est calculé pas à pas à partir d'une distribution initiale  $\psi(r = r_0, z)$ , et en utilisant des transformations de Fourier discrètes.

### 6.1.1 - Introduction des conditions aux limites dans l'algorithme "Split-Step Fourier"

La méthode "Split-Step" est bien adaptée à la propagation sous-marine où les profils de célérité du son créent un chenal acoustique. L'énergie acoustique est canalisée à faible profondeur vis-à-vis des distances de propagation. Ce phénomène est dû au fait que la célérité du son croît régulièrement à partir d'une certaine profondeur.

La méthode "Split-Step" impose que la fonction  $\psi$  et ses dérivées successives par rapport à  $z$  tendent vers zéro avec la profondeur. En effet, le domaine d'intégration étant limité en profondeur, il est impératif de ne pas créer d'effets de repliement lors de l'application de transformées de Fourier discrètes.

Par ailleurs, dans le cadre de la propagation sous-marine, la condition de réflexion totale à la surface est prise en compte en ajoutant symétriquement à la surface un demi-espace fictif. Le profil de célérité est choisi symétrique et on impose l'imparité de la fonction  $\psi$  ou  $z$ . On crée ainsi une source virtuelle image de la source réelle et déphasée de  $\pi$ .

### 6.1.2 - Pas d'échantillonnage vertical et pas d'intégration

Les résultats que nous présentons ici ont été obtenus par Cristol [27].

Le théorème de Shannon impose un pas d'intégration vertical :

$$\Delta z = \frac{2 \cdot h_m}{N - 1}$$

si  $h_m$  est la profondeur du domaine et  $N$  le nombre de points de l'échantillonnage vertical. Ceci afin de calculer correctement la transformée de Fourier :

$$\tilde{\psi}(r, s) = F \left\{ \psi(r, z) \right\}$$

Pour le calcul de la transformée de Fourier inverse, le théorème de Shannon impose :

$$\Delta s = \left( \frac{N}{2} - 1 \right)^2 \frac{2}{N^2 h_m} \text{ sur le domaine } \left[ - \left( \frac{N}{2} - 1 \right)^2 \frac{1}{N h_m} - \Delta S, \left( \frac{N}{2} - 1 \right)^2 \frac{1}{N h_m} \right]$$

Pour le pas  $\Delta r$ , il n'existe pas de critère général, la pratique montre que pour les profils d'indice les plus fréquemment observés, un pas de l'ordre de plusieurs centaines de mètres suffit, pour le domaine des basses fréquences ( $f \leq 200$  Hz).

De même, la pratique montre que le théorème de Shannon est légèrement insuffisant ; le pas d'échantillonnage vertical doit être de quelques fois inférieur à la longueur d'onde.

La rapidité d'exécution et la simplicité théorique de mise en place de l'algorithme "Split-Step" en font un outil très performant pour la résolution des problèmes de propagation acoustique sous-marine à longue distance. Il est cependant moins bien adapté à la propagation à basse altitude où le chenal acoustique n'est pas établi et où les conditions aux limites sont plus complexes (conditions de Neumann et de Fourier).

## 6.2 - Méthode des différences finies

Dans le cadre de la propagation aérienne, nous avons choisi de résoudre l'équation parabolique par une méthode aux différences finies. Celle-ci permet en particulier d'appliquer une condition de Fourier au sol de type :

$$Z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i \omega}{c} \psi = 0$$

où Z représente l'impédance caractéristique du sol.

Le domaine du calcul est représenté par un maillage dont les noeuds constituent les points de calcul de la fonction  $\psi$ .

La méthode des différences finies consiste à exprimer les dérivées successives de  $\psi$  en fonction de sa valeur en des points contigus du maillage. On utilise pour cela les développements de Taylor :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(r + \Delta r) = \psi(r) + \Delta r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\Delta r^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \dots + \frac{\Delta r^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n} \right) + \dots \\ \psi(z + \Delta z) = \psi(z) + \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\Delta z^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \dots + \frac{\Delta z^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} \right) + \dots \end{array} \right.$$

où  $\Delta r$  et  $\Delta z$  sont les pas du maillage dans les directions Or et Oz.

On note  $\psi_{i,j}$  la valeur discrétisée du champ au point de coordonnées  $i \Delta r, j \Delta z$  :

$$\psi_{i,j} = \psi(i \Delta r, j \Delta z).$$

Les relations discrétisées donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} + \Delta r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{i,j} + \frac{\Delta r^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_{i,j} + \dots + \frac{\Delta r^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n} \right)_{i,j} + \dots \\ \psi_{i,j+1} = \psi_{i,j} + \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j} + \frac{\Delta z^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_{i,j} + \dots + \frac{\Delta z^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} \right)_{i,j} + \dots \end{array} \right.$$

En ne conservant que le terme d'ordre  $\Delta r$  du premier développement, il vient :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta r}$$

Pour le calcul de la dérivée seconde par rapport à  $z$  on utilise une différence centrée :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2}$$

L'équation parabolique discrétisée est :

$$\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} + 2ik_0 \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta r} + k_0^2(n^2 - 1)\psi_{i,j} = 0,$$

et la relation entre le champ  $\psi$  à la distance  $r + \Delta r$  et le champ  $\psi$  à la distance  $r$  s'écrit :

$$\boxed{\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} - \frac{\Delta r}{2ik_0} \left\{ \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} + k_0^2(n^2 - 1)\psi_{i,j} \right\}}$$

La résolution de ce système d'équation est présentée dans la suite dans le cas tridimensionnel, ainsi que les conditions aux limites qui lui sont associées.



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA DEUXIÈME PARTIE

- [24] D.J. THOMSON and N.R. CHAPMAN  
"A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation".  
JASA 74 (6) (december 1983).
- [25] J.A. DE SANTO  
"Relation between the solutions of the Helmholtz and parabolic equations for sound propagation".  
J. Acoust. Soc. Am., 58 (6), pp. 295-297 (august 1977).
- [26] S. Mc DANIEL  
"Propagation of normal modes in the parabolic approximation".  
J. Acoust. Soc. Am., 57 (2), pp. 307-311 (february 1975).
- [27] Xavier CRISTOL  
"Résolution numérique par transformée de Fourier de l'équation parabolique. Applications à la propagation acoustique sous-marine".  
Thèse de Docteur-Ingénieur - École Centrale de Lyon (28 janvier 1987).



## TROISIÈME PARTIE

### 7- INTRODUCTION À LA PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE

#### 7.1 - Synthèse bibliographique sur la propagation tridimensionnelle

Les méthodes numériques de calcul de la propagation acoustique étaient jusqu'à ces dernières années limitées aux configurations bidimensionnelles. Il s'est avéré qu'il était important dans de nombreux cas de figure d'utiliser une représentation du milieu prenant en compte les variations des grandeurs caractéristiques de ce milieu dans les trois directions spatiales. Les recherches actuelles portent essentiellement sur la propagation sous-marine. Nous avons retenu trois publications qui présentent les différentes méthodes de calcul actuellement développées : la méthode des rayons, la méthode de l'équation parabolique et des calculs analytiques.

##### 7.1.1 - Tracés de rayons tridimensionnels dans l'océan

La référence [28] présente un calcul de rayons dans l'océan en présence d'un tourbillon thermique à grande échelle. Le code de calcul utilisé a été développé pour le tracé de rayons électromagnétiques dans l'ionosphère et repose sur la résolution des équations de Hamilton.

Le tourbillon thermique est décrit par les variations de la célérité du son en fonction des trois coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\Phi$  sous la forme suivante :

$$c(r, \theta, \Phi) = c_0 \left[ 1 - S \exp \left\{ \left( \frac{r-r_0}{W_r} \right)^2 + \left( \frac{\theta-\theta_0}{W_\theta} \right)^2 + \left( \frac{\Phi-\Phi_0}{W_\Phi} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$$

où  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\Phi_0$  sont les coordonnées sphériques du centre de la perturbation dans un repère dont l'origine est le centre de la terre.  $S$  est une constante correspondant à l'amplitude de la perturbation.  $W_r$ ,  $W_\theta$  et  $W_\Phi$  sont des coefficients liés à la forme de la perturbation.

La figure 16 représente un tracé de rayons propres (rayons qui sont issus de la source et dont la trajectoire passe par le récepteur considéré). Les paramètres du calcul sont les suivants :

- centre du tourbillon à 500 km de la source et à 800 mètres de profondeur,
- source à 1200 mètres de profondeur,
- récepteur à 1000 mètres de profondeur et à 1000 km de la source,
- $W_\theta = 1,34^\circ$ ,  $W_\Phi = 1,34^\circ$  et  $W_r = 1,2$  km.

Pour le tracé 16a, le centre de la perturbation se trouve dans le plan vertical source-récepteur. Pour le tracé 16b, le centre de la perturbation est déplacé de 60 km latéralement. Les trajectoires des rayons propres ainsi que le champ de pression vertical au niveau du récepteur sont alors modifiés. La figure 17a montre la déviation que subissent les rayons dans le plan horizontal. La déviation atteint 5,1 km à 1000 km de la source pour le rayon qui passe le plus près du centre de la perturbation. La figure 17b représente le tracé des rayons propres lorsque la perturbation est décentrée. Les rayons qui atteignent le récepteur sont issus de la source avec un angle positif et subissent une courbure en traversant le tourbillon.

Ces résultats permettent de prévoir un effet important des variations tridimensionnelles de l'indice de réfraction sur la propagation sous-marine à longue distance .

### 7.1.2- Application de la méthode de l'équation parabolique à la propagation sous-marine tridimensionnelle

La référence [29] présente un calcul de propagation à travers un tourbillon thermique que l'on rencontre dans le Gulf-Stream. R.N. Baer utilise l'équation parabolique qu'il résout à l'aide de la méthode "Split-Step".

L'équation parabolique utilisée est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad \text{où } k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

où  $\psi$  est relié à la pression  $p$  par la relation :

$$p(r, \theta, z) = \psi(r, \theta, z) e^{i k_0 r} / \sqrt{r}$$

L'indice local de réfraction  $n$  est fonction des trois coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  :

$$n(r, \theta, z) = \frac{c_0}{c(r, \theta, z)}$$

Le champ  $\psi(r + \Delta r, \theta, z)$  est relié au champ  $\psi(r, \theta, z)$  par la relation :

$$\psi(r + \Delta r, z, \theta) = e^{i k_0 \frac{(n^2 - 1)}{2} \Delta r} \times F_{\theta}^{-1} \left\{ e^{-i m^2 \Delta r / [2 k_0 r (r + \Delta r)]} \right\} \\ \times F_{\theta} \left\{ F_z^{-1} e^{-i l^2 \Delta r / 2 k_0} F_z (\psi(r, \theta, z)) \right\}$$

où  $F$  et  $F^{-1}$  sont les transformations de Fourier directe et inverse dans les directions indiquées par leur indice.

Les résultats présentés par Baer montrent qu'en présence d'un tourbillon thermique, une partie de l'énergie acoustique est déplacée latéralement du côté de la perturbation, comme pourrait le prévoir la théorie des rayons.

Perkins et Baer [30] préconisent une simplification de ces calculs dans certaines configurations en utilisant la méthode Nx2D. Cette technique consiste à effectuer  $N$  fois le calcul dans un plan vertical en faisant varier l'angle azimutal  $\theta$ . Un gain de temps de 40 à 50 % est obtenu par rapport au calcul 3D ainsi qu'une réduction sensible de la mémoire nécessaire au stockage des matrices. Une conclusion de cet article est que la méthode Nx2D est bien adaptée au calcul sous-marin lorsque les conditions aux limites ne créent pas de réflexions parasites transverses et dans les cas où l'indice de réfraction ne crée pas de focalisations trop importantes dans le plan vertical.

### 7.1.3 - Calcul des fonctions de Green tridimensionnelles pour un indice de réfraction à profil quadratique

Les auteurs de la référence [31] montrent que pour certaines catégories de profils de l'indice de réfraction, il est possible de calculer les fonctions de Green en espace libre de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 G + k_0^2 n^2 G = -\delta(r - r_S)$$

où  $k_0 = \omega/c_0$  et  $r$  et  $r_S$  sont les positions du récepteur et de la source.

La forme générale de l'indice doit être :

$$n^2 = 1 - 2(Q_x X + Q_y Y + Q_z Z) + \Omega_x^2 X^2 + \Omega_y^2 Y^2 + \Omega_z^2 Z^2$$

où  $X, Y$  et  $Z$  sont les coordonnées cartésiennes.

Différents résultats sont présentés en fonction des paramètres  $Q_x, Q_y, Q_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ . Ces résultats montrent que, à grandes distances, les effets tridimensionnels deviennent importants et que notamment du fait de la création de caustiques, les niveaux acoustiques peuvent être très inférieurs aux niveaux attendus en négligeant le couplage azimutal.

Les principales conclusions des différents auteurs sont qu'il est nécessaire, dans un grand nombre de configurations, de prendre en compte les effets de couplage azimutal et ce d'autant plus que les distances de propagation sont importantes.

## **7.2 - Mise en évidence des effets tridimensionnels de la météorologie et de la topographie par la méthode des rayons**

Nous avons développé un algorithme de résolution des équations caractéristiques présentées au chapitre 4, prenant en compte les variations de célérité du son et de vent dans les trois directions spatiales. Cet algorithme permet en outre de modéliser une topographie quelconque du terrain.

Le système vectoriel (4.1) fournit 6 équations :

$$d x_i = \left[ c \frac{k_i}{\|k\|} + V_i \right] dt \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3 ,$$

$$d k_i = - \left[ \|k\| \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} + k_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + k_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + k_k \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \right] dt \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3 .$$

Soit  $x_i^n$  et  $k_i^n$  les coordonnées respectives du point de la surface d'onde suivi et du vecteur d'onde à l'instant  $t$  ; les coordonnées du point à l'instant  $t + dt$  sont :

$$x_i^{n+1} = x_i^n + d x_i, \quad \text{et les composantes du vecteur d'onde} \quad k_i^{n+1} = k_i^n + d k_i.$$

La prise en compte des réflexions sur le sol s'effectue de la manière suivante :

Le sol est défini en tout point par sa hauteur  $z_0$  et sa normale  $\vec{n}$ . À chaque pas de calcul, un test est effectué pour vérifier que la hauteur de la nouvelle position du point de la surface d'onde suivie est supérieure à l'altitude du sol. Dans le cas contraire, une interpolation linéaire est effectuée afin de calculer la portion d'incrément de trajectoire parcourue jusqu'au sol. Nous reprenons le calcul à la première étape en utilisant la position du point de réflexion ainsi calculée et le nouveau vecteur d'onde obtenu en ce point à l'aide de la loi géométrique de réflexion totale décrite figure 18.

Nous présentons, figure 19, les résultats de calculs menés en présence d'un sol plan et de vent dont les composantes sont :

$$\begin{cases} V_x(z) = 10 (z/10)^{0,2} \\ V_y(z) = 10 (z/10)^{0,2} \\ V_z(z) = 0 \end{cases}$$

La source est située à 10 mètres de hauteur.

Nous avons tiré 21 rayons dans le plan vertical Oxz. Ces rayons sont issus de la source à partir du site  $- 10^\circ$  jusqu'au site  $+ 10^\circ$  avec un incrément de  $1^\circ$ . Le tracé 19b montre l'effet du vent transverse sur la trajectoire des rayons. On constate une déviation de l'ensemble du faisceau dans la direction transverse de l'ordre de 60 à 80 mètres.

Nous avons effectué un calcul en présence d'un relief modélisé par une colline de 30 mètres de hauteur. Afin d'obtenir des tracés lisibles, le milieu considéré est homogène. Le tracé 20a met en évidence la zone d'ombre géométrique créée par la colline. Les tracés 20b et c montrent que les trajectoires des rayons qui se réfléchissent sur le sol ne restent pas dans un plan vertical. La présence d'un relief provoque donc une modification de la propagation des rayons.



## 8 - ÉQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE (EP3D)

### 8.1 - Établissement de l'équation parabolique tridimensionnelle (EP3D)

L'EP3D est obtenue, comme l'EP2D, à partir de l'équation d'onde en milieu homogène :

$$\Delta \pi - \frac{1}{c^2(X)} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = 0 \quad [8.1]$$

où  $c(X)$  est la célérité du son à la position  $X$ .

En considérant un système de coordonnées où  $r$ ,  $z$  et  $\theta$  représentent respectivement la portée, l'altitude et l'azimut, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2(X)} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = 0 \quad [8.2]$$

En prenant les solutions monochromatiques de la forme :

$$\pi(r, \theta, z, t) = p(r, \theta, z) e^{-i \omega t},$$

on obtient pour  $p(r, \theta, z)$  l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(X)} p = 0 \quad [8.3]$$

On définit le nombre d'onde  $k_0 = \omega/c_0$ , où  $c_0$  est la célérité moyenne du son, et un indice local de réfraction  $n(X) = c_0/c(X)$ . L'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 p = 0 \quad [8.4]$$

De la même manière qu'en 2D, on suppose qu'il existe une direction privilégiée de propagation et que la pression  $p$  est décomposable en produit d'une fonction  $S(r)$  à variation rapide, et d'une enveloppe  $\Psi(r, \theta, z)$  à variation plus lente.

$S(r)$  est solution d'une équation de Bessel :

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + k_0^2 S = 0 \quad [8.5]$$

et est égale à la fonction de Hankel de première espèce notée :  $H_0^{(1)}(k_0 r)$ .

En champ lointain,  $S(r)$  s'écrit :

$$S(r) = \sqrt{\frac{2}{i n k_0 r}} \exp[i k_0 r]$$

La fonction  $\psi(r, \theta, z)$  est alors solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad [8.6]$$

En supposant que le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$  est négligeable ce qui revient à supprimer les ondes rétrodiffusées, on obtient l'EP3D standard:

$$\boxed{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0} \quad [8.7]$$

A l'aide de l'approximation parabolique, on remplace un problème elliptique défini par l'équation de Helmholtz et des conditions aux limites associées, par un problème parabolique aux conditions initiales beaucoup plus simple à résoudre numériquement.

## 8.2 - Choix du système de coordonnées

Nous avons introduit l'équation parabolique dans un système de coordonnées cylindriques, mais l'EP3D peut être écrite dans différents systèmes de coordonnées. Nous présentons les équations obtenues dans des repères cartésiens et sphériques et nous justifions ensuite le choix que nous avons fait d'utiliser un repère cylindrique.

### 8.2.1 - EP3D en coordonnées cartésiennes

L'établissement de l'EP3D en coordonnées cartésiennes s'effectue en choisissant comme direction principale de propagation un des axes du repère orthonormé (dans la suite, l'axe  $Ox$ ).

Le champ de pression est alors écrit sous la forme :

$$p(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{i k_0 x} \quad [8.8]$$

L'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 p = 0$$

devient :

$$\left[ (i k_0)^2 \psi + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] e^{i k_0 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} e^{i k_0 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{i k_0 x} + k_0^2 n^2 \psi e^{i k_0 x} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

L'approximation parabolique consiste alors à négliger le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  par rapport au terme  $2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , ce qui revient à exclure les ondes qui pourraient se propager dans la direction des  $x$  négatifs.

On obtient donc une équation parabolique dans la direction  $x$  :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0} \quad [8.9]$$

Nous pouvons alors faire deux remarques :

- Cette équation est très proche de l'équation en coordonnées cylindriques [8,7], seule la forme du laplacien transverse les différencie.
- Les deux équations sont identiques si on les ramène à deux équations bidimensionnelles :

EP2D cylindrique :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$

en négligeant le terme :  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$ .

EP2D cartésienne :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$

en négligeant le terme :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ .

Les directions  $Oy$  et  $Ox$  sont alors confondues.

### 8.2.2 - EP3D en coordonnées sphériques

Dans le système sphérique :  $r$  représente la distance radiale,  $\Phi$  l'azimut et  $\theta$  l'angle de site. Nous écrivons la forme :

$$p(r, \theta, \Phi) = \psi(r, \theta, \Phi) \frac{e^{i k_0 r}}{4 \pi r}$$

En remplaçant  $p$  dans l'équation de Helmholtz, on obtient l'équation suivante :

$$2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

En négligeant le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ , on obtient une équation parabolique dans la direction radiale  $r$  :

$$2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad [8.10]$$

Cette équation présente une forme plus compliquée que les deux précédentes ; on peut cependant la simplifier en ne considérant que la partie de l'espace située près du plan horizontal ( $\theta \approx \pi/2$ ). Cette simplification donne l'équation :

$$2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

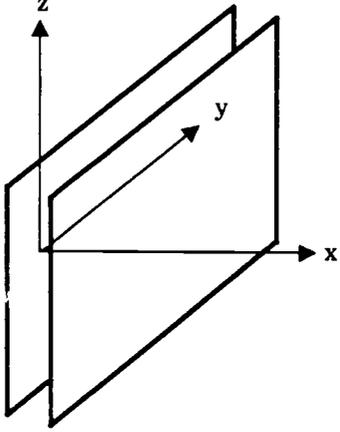
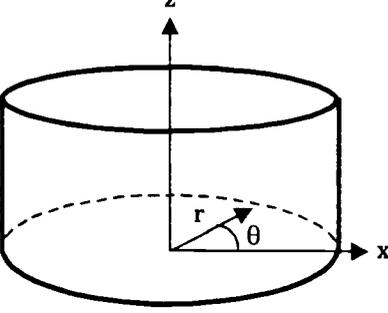
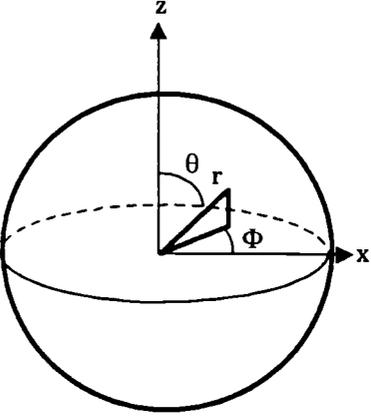
### 8.2.3 - Conclusion

Le système de coordonnées retenu est la représentation cylindrique du champ acoustique. Il semble que cette représentation du champ acoustique soit la plus proche de la réalité physique compte tenu des effets des gradients sur la propagation.

Les représentations cartésiennes et sphériques sont moins bien adaptées à la propagation à basse altitude :

- la représentation cartésienne nécessite une direction privilégiée axiale et un front d'onde plan. De plus, elle nécessite la prise en compte de deux conditions aux limites liées au terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ .
- la représentation sphérique centrée sur la source permet difficilement de considérer la condition à la limite sur le sol, celui-ci n'étant pas situé sur une direction du repère.

Ces résultats peuvent être résumés dans le tableau suivant [7] :

COORDONNÉES CARTÉSIENNES	COORDONNÉES CYLINDRIQUES	COORDONNÉES SPHÉRIQUES
$p(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{i k_0 x}$	$p(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{2}{i \pi k_0 r}} e^{i k_0 r} \psi(r, \theta, z)$	$p(r, \theta, \Phi) = \psi(r, \theta, \Phi) \frac{e^{i k_0 r}}{4 \pi r}$
<p style="text-align: center;"><b>EP3D :</b></p> $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$	<p style="text-align: center;"><b>EP3D :</b></p> $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$	<p style="text-align: center;"><b>EP3D :</b></p> $2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$ $+ \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi^2}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$
<p style="text-align: center;"><b>EP2D correspondante :</b></p> $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$	<p style="text-align: center;"><b>EP2D correspondante :</b></p> $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$	<p style="text-align: center;"><b>EP2D correspondante :</b></p> $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $+ k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$
		

## 9- RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE TRIDIMENSIONNELLE : APPLICATION À LA PROPAGATION ATMOSPHÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de résolution de l'EP3D en coordonnées cylindriques (8.7) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0.$$

Cette résolution est effectuée par un schéma aux différences finies où la fonction  $\psi$  est discrétisée. Le domaine de calcul est décrit par un maillage dont les lignes sont définies par les trois coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ . Les pas du maillage dans les trois directions sont respectivement :  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$  et  $\Delta z$ . On note  $\psi_{i,j,k}$  la valeur de  $\psi$  au point de maillage  $(i\Delta r, j\Delta \theta, k\Delta z)$ .

La nature de l'équation parabolique permet d'établir une relation entre le champ  $\psi$  à la distance  $r$  et le champ  $\psi$  à la distance  $r + \Delta r$ . Pour cela, on utilise un opérateur obtenu à partir du développement de Taylor du champ  $\psi$  par rapport à  $r$  :

$$\psi(r + \Delta r) = \left( 1 + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + \dots \right) \psi(r)$$

que l'on note :

$$\psi(r + \Delta r) = \exp \left[ \Delta r \frac{\partial}{\partial r} \right] \psi(r)$$

Cette équation, écrite aux points du maillage, devient :

$$\psi_{i+1,j,k} = \exp \left[ \Delta r \frac{\partial}{\partial r} \right] \psi_{i,j,k}$$

La dérivée de  $\psi$  par rapport à  $r$  est fournie par l'EP3D :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{-1}{2 i k_0} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \right\} \quad [9.1]$$

Cette dérivée est introduite dans l'opérateur  $\exp[ \ ]$  :

$$\psi_{i+1,j,k} = \exp \left[ \Delta r \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \right\} \right] \psi_{i,j,k}$$

Les dérivées secondes en  $z$  et en  $\theta$  sont alors calculées par les différences centrées :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_{i,j,k} = \frac{\Psi_{i,j,k-1} - 2\Psi_{i,j,k} + \Psi_{i,j,k+1}}{\Delta z^2}$$

et :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \Psi_{i,j,k} = \frac{\Psi_{i,j-1,k} - 2\Psi_{i,j,k} + \Psi_{i,j+1,k}}{\Delta \theta^2}$$

Pour simplifier l'écriture on pose :

$$\Omega_{\theta} = \frac{-\Delta r}{2 i k_0 r^2}$$

$$\Omega_z = \frac{-\Delta r}{2 i k_0}$$

$$\delta_{\theta}^2 = \Omega_{\theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\delta_z^2 = \Omega_z \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

L'EP3D discrétisée s'écrit avec ces notations :

$$\Psi_{i+1,j,k} = \exp \left[ \delta_z^2 + \delta_{\theta}^2 + \frac{i k_0}{2} (n^2 - 1) \right] \Psi_{i,j,k}$$

[9.2]

### 9.1 - Méthode des directions alternées

La méthode des directions alternées (Alternating Directions Implicit), a été introduite par les numériciens pour la résolution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Cette équation peut être discrétisée sous la forme :

$$u_{i,j}^{n+1} = \exp \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] u_{i,j}^n$$

Cette écriture est peu différente de l'équation [9.2], le paramètre temps remplaçant la coordonnée radiale  $r$ , et nous avons adapté certains résultats de cette méthode à la résolution de l'EP3D.

L'EP3D comprend le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$  représentant un caractère elliptique par rapport aux variables  $z$  et  $\theta$ . Par rapport à l'EP2D, la résolution de l'EP3D est donc plus complexe, et il est intéressant de se ramener à la résolution successive de deux EP2D, c'est - à - dire à la résolution de deux systèmes tridiagonaux. Cette technique est la base de la méthode des directions alternées.

La méthode des directions alternées consiste à effectuer une séparation de l'opérateur exponentiel en deux parties, l'une comportant les termes associés à la variable  $\theta$ , l'autre les termes associés à la variable  $z$  :

$$\psi_{i+1,j,k} = \exp[\delta_z^2] \cdot \exp[\delta_\theta^2] \cdot \exp \left[ \frac{ik_0}{2} (n^2 - 1) \right] \psi_{i,j,k} \quad [9.3]$$

On introduit, à ce moment du calcul, une variable auxiliaire  $\psi^*$  permettant de découpler cette équation et qui se ramène au système suivant.

$$\left. \begin{aligned} \exp \left[ -\gamma \delta_\theta^2 - \alpha \delta \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i+\frac{1}{2},j,k}^* &= \exp \left[ (1-\xi) \delta_z^2 + (1-\alpha) \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i,j,k} \\ \exp \left[ -\xi \delta_z^2 - \beta \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i+1,j,k} &= \exp \left[ (1-\gamma) \delta_\theta^2 + (1-\beta) \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i+\frac{1}{2},j,k}^* \end{aligned} \right\} [9.4]$$

La fonction  $\psi^*$  n'est qu'un auxiliaire de calcul, et n'a pas de sens physique. La notation  $i + \frac{1}{2}$  est commode mais ne signifie pas que la fonction  $\psi^*$  soit définie à la distance  $r + \frac{\Delta r}{2}$ .

Parallèlement à la méthode des directions alternées, nous avons introduit dans le système [9.4], les quatre coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\xi$ . Les coefficients  $\gamma$  et  $\xi$  déterminent la nature du schéma aux différences finies. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  portent sur le terme  $\frac{ik_0}{4}(n^2 - 1)$ .

Une étude présentée au paragraphe 9.3 permet d'ajuster ces coefficients et montre qu'ils ont un effet sensible sur les calculs de propagation en présence de vent.

Après avoir développé les opérateurs  $\exp[.]$ , on obtient le schéma suivant :

$$\left. \begin{aligned} \left[ 1 - \gamma \delta_\theta^2 - \alpha \delta \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* &= \left[ 1 + (1 - \xi) \delta_z^2 + (1 - \alpha) \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i, j, k} \\ \left[ 1 - \xi \delta_z^2 - \beta \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + 1, j, k} &= \left[ 1 + (1 - \gamma) \delta_\theta^2 + (1 - \beta) \frac{ik_0}{4} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \end{aligned} \right\} [9.5]$$

## 9.2 - Stabilité, consistance et convergence du schéma aux différences finies

### 9.2.1 - Rappel des définitions

Pour qu'un schéma numérique permette la résolution exacte d'une équation aux dérivées partielles, il faut qu'il respecte les trois conditions suivantes :

**Consistance** : Un schéma est consistant si l'erreur de troncature (différence entre l'équation de départ et le schéma) tend vers zéro quand  $\Delta\theta$ ,  $\Delta r$  et  $\Delta z$  tendent vers zéro.

**Stabilité** : Un schéma est stable si la différence entre la solution exacte du schéma et la solution numérique ne diverge pas.

**Convergence** : Un schéma est convergent si l'erreur entre la solution analytique de l'équation de départ et la solution exacte du schéma tend vers zéro avec les dimensions du schéma.

D'après le théorème de Lax, dans le cas d'une équation aux dérivées partielles linéaire, la stabilité et la consistance d'un schéma numérique entraînent sa convergence.

### 9.2.2 - Consistance du schéma 3D

L'étude de la consistance du schéma se ramène au calcul de l'erreur de troncature introduite par les développements limités effectués. Cette erreur représente la différence entre l'équation de départ et l'équation discrétisée :

$$\frac{1}{\Delta z^2} (\psi_{i,j,k-1} - 2\psi_{i,j,k} + \psi_{i,j,k+1}) + \frac{1}{r^2 \Delta \theta^2} (\psi_{i,j-1,k} - 2\psi_{i,j,k} + \psi_{i,j+1,k}) + \frac{2ik_0}{\Delta r} (\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i,j,k}) + k_0^2 (n^2 - 1) \psi_{i,j,k} = 0$$

Les développements de Taylor donnent :

$$\left[ \begin{aligned} \psi_{i,j,k-1} &= \psi_{i,j,k} - \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta z^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_{i,j,k} - \frac{\Delta z^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta z^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)_{i,j,k} - o(\Delta z^5) \\ \psi_{i,j,k+1} &= \psi_{i,j,k} + \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta z^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta z^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta z^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)_{i,j,k} + o(\Delta z^5) \\ \psi_{i,j-1,k} &= \psi_{i,j,k} - \Delta \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta \theta^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)_{i,j,k} - \frac{\Delta \theta^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta \theta^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} \right)_{i,j,k} - o(\Delta \theta^5) \\ \psi_{i,j+1,k} &= \psi_{i,j,k} + \Delta \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta \theta^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta \theta^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta \theta^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} \right)_{i,j,k} + o(\Delta \theta^5) \\ \psi_{i+1,j,k} &= \psi_{i,j,k} + \Delta r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta r^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_{i,j,k} + \frac{\Delta r^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right)_{i,j,k} + o(\Delta r^4) \end{aligned} \right.$$

L'équation approchée devient :

$$\frac{1}{\Delta z^2} \left[ 2 \frac{\Delta z^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\Delta z^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) + o(\Delta z^6) \right] + \frac{1}{r^2 \Delta \theta^2} \left[ 2 \frac{\Delta \theta^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + 2 \frac{\Delta \theta^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} \right) + o(\Delta \theta^6) \right] + \frac{2ik_0}{\Delta r} \left[ \Delta r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\Delta r^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + o(\Delta r^3) \right] + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0$$

L'erreur de troncature  $E_t$  est donc :

$$E_t = -\frac{\Delta z^2}{12} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) - \frac{\Delta \theta^2}{12 r^2} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} \right) - i k_0 \Delta r \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) - o(\Delta z^4) - o(\Delta \theta^4) - o(\Delta r^2)$$

Cette erreur tend bien vers zéro avec les pas du maillage. La consistance du schéma est vérifiée.

### 9.2.3 - Stabilité du schéma aux différences finies

Les coefficients  $\xi$  et  $\gamma$  utilisés lors de la séparation de l'opérateur  $\exp [ \ ]$  doivent être choisis pour assurer la stabilité du schéma aux différences finies considéré.

La stabilité est garantie si l'erreur numérique introduite à chaque pas de calcul  $\Delta r$  ne s'amplifie pas au cours du calcul. Pour le vérifier, nous utilisons la méthode de Von Neumann qui consiste à écrire la fonction  $\psi$  sous la forme :

$$\psi_{i,j,k} = \phi(r) e^{i\alpha\theta} e^{i\beta z} \quad [9.6]$$

On définit alors un facteur d'amplification  $G$  tel que :

$$G = \frac{\phi(r + \Delta r)}{\phi(r)}$$

La stabilité du schéma est assurée si ce facteur d'amplification reste, en module, inférieur ou égal à 1, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les deux étapes de la résolution sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \gamma \delta_\theta^2) \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = (1 + (1 - \xi) \delta_z^2) \psi_{i, j, k} \quad (1) \\ (1 - \xi \delta_z^2) \psi_{i + 1, j, k}^* = (1 + (1 - \gamma) \delta_\theta^2) \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \quad (2) \end{array} \right.$$

Par définition :

- le schéma implicite correspond à  $\xi = \gamma = 1$ ,
- le schéma explicite correspond à  $\xi = \gamma = 0$ ,
- le schéma de Crank-Nicholson à  $\xi = \gamma = 1/2$ ,

Le facteur d'amplification de l'étape 1 est déterminé :

$$\begin{aligned} \psi_{i+\frac{1}{2},j,k}^* - \gamma \Omega_{\theta} \left( \psi_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^* - 2 \psi_{i+\frac{1}{2},j,k}^* + \psi_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^* \right) \\ = \psi_{i,j} + \Omega_z (1-\xi) (\psi_{i,j,k-1} - 2 \psi_{i,j,k} + \psi_{i,j,k+1}) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation [9.6], on obtient :

$$\begin{aligned} \phi^* e^{i\alpha\theta} e^{i\beta z} - \Omega_{\theta} \gamma \left[ \phi^* e^{i\alpha(\theta-\Delta\theta)} e^{i\beta z} - 2 \phi^* e^{i\alpha\theta} e^{i\beta z} + \phi^* e^{i\alpha(\theta+\Delta\theta)} e^{i\beta z} \right] \\ = \phi(r) e^{i\alpha\theta} e^{i\beta z} + \Omega_z (1-\xi) \left[ \phi(r) e^{i\alpha\theta} e^{i\beta(z-\Delta z)} - 2 \phi(r) e^{i\alpha\theta} e^{i\beta z} + \phi(r) e^{i\alpha\theta} e^{i\beta(z+\Delta z)} \right] \end{aligned}$$

Le facteur d'amplification  $G^*$  de la première étape est donc :

$$G^* = \frac{\phi^*}{\phi(r)} = \frac{1 + \Omega_z (1-\xi) (e^{-i\beta\Delta z} - 2 + e^{i\beta\Delta z})}{1 - \Omega_{\theta} \gamma (e^{-i\alpha\Delta\theta} - 2 + e^{i\alpha\Delta\theta})}$$

$$G^* = \frac{1 - 2 \Omega_z (1-\xi) (\cos \beta \Delta z - 1)}{1 + 2 \Omega_{\theta} \gamma (\cos \alpha \Delta \theta - 1)}$$

$$G^* = \frac{1 - 2 \Omega_z (1-\xi) \sin^2 \left[ \frac{\beta \Delta z}{2} \right]}{1 + 2 \Omega_{\theta} \gamma \sin^2 \left[ \frac{\alpha \Delta \theta}{2} \right]}$$

Un calcul similaire pour l'étape (2) donne :

$$G^{**} = \frac{\phi(r+\Delta r)}{\phi^*} = \frac{1 - (1-\gamma) \Omega_{\theta} \cdot 2 \cdot \sin^2 \left[ \frac{\alpha \Delta \theta}{2} \right]}{1 + 2 \Omega_z \xi \sin^2 \left[ \frac{\beta \Delta z}{2} \right]}$$

Le module de  $G$  est alors déterminé de la manière suivante :

$$|G| = |G^* G^{**}| = \left| \frac{\left(1 - 2\Omega_z(1-\xi)\sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)\right) \cdot \left(1 - 2(1-\gamma)\Omega_\theta\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta\theta}{2}\right)\right)}{\left(1 + 2\Omega_\theta\gamma\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta\theta}{2}\right)\right) \cdot \left(1 + 2\Omega_z\xi\sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)\right)} \right|$$

Le module de  $G$  est comparé à 1 en fonction des deux paramètres de discrétisation  $\xi$  et  $\gamma$ .

Schéma explicite :

$$\xi = \gamma = 0$$

alors :

$$|G| = \left| \left\{1 - 2\Omega_z\sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)\right\} \left\{1 - 2\Omega_\theta\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta\theta}{2}\right)\right\} \right|$$

$\Omega_z$  et  $\Omega_\theta$  étant imaginaires purs,  $|G| > 1$ .

Le schéma explicite est inconditionnellement instable.

Schéma de Crank-Nicholson :

$$\xi = \gamma = 1/2$$

$$|G| = \left| \frac{\left\{1 - \Omega_z\sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)\right\} \cdot \left\{1 - \Omega_\theta\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta\theta}{2}\right)\right\}}{\left\{1 - \Omega_z\sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)\right\} \cdot \left\{1 - \Omega_\theta\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta\theta}{2}\right)\right\}} \right| = 1$$

Le schéma est à la limite de la stabilité.

Schéma implicite :

$$\xi = \gamma = 1$$

$$|G| = \left| \frac{1}{\left\{ 1 + 2 \Omega_{\theta} \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta \theta}{2} \right) \right\} \cdot \left\{ 1 + 2 \Omega_z \sin^2 \left( \frac{\beta \Delta \theta}{2} \right) \right\}} \right|$$

|G| est alors toujours strictement inférieur à 1.

Le schéma implicite est inconditionnellement stable.

La nature du schéma est en pratique très sensible. Nous avons effectué différents calculs avec le schéma de Crank-Nicholson qui est à la limite de la stabilité numérique d'après le critère de Von Neumann. Un résultat obtenu en milieu homogène à une fréquence de 100 Hz, et une source située à 1,5 m au-dessus d'un sol parfaitement réfléchissant (figure 21) montre que le schéma numérique diverge rapidement (à partir de 30 mètres du premier front soit une dizaine de longueurs d'onde).

Nous utiliserons dans la suite le schéma purement implicite dont la stabilité est assurée.

On peut citer d'autres développements rencontrés dans la littérature :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \delta_{\theta}^2 \right\} \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \delta_z^2 \right\} \psi_{i, j, k} \\ \left\{ 1 - \frac{1}{2} \delta_z^2 \right\} \psi_{i + 1, j, k} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \delta_{\theta}^2 \right\} \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k} \end{array} \right.$$

Ce développement connu sous le nom de "formules de Peaceman-Rachford" correspond, dans notre cas, au schéma de Crank-Nicholson dont nous avons constaté l'instabilité.

Formules d'Yakonov :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\theta}^2\right) \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left(1 + \frac{1}{2} \delta_{\theta}^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} \delta_z^2\right) \psi_{i, j, k} \\ \left(1 - \frac{1}{2} \delta_z^2\right) \psi_{i + 1, j, k} = \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \end{array} \right.$$

Formules de Douglas-Rachford :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \delta_{\theta}^2\right) \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left(1 + \delta_z^2\right) \psi_{i, j, k} \\ \left(1 - \delta_z^2\right) \psi_{i + 1, j, k} = \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* - \delta_{\theta}^2 \psi_{i, j, k} \end{array} \right.$$

On peut ainsi multiplier les développements en fonction de leur adaptation au problème à résoudre. Nous conserverons la séparation la plus simple des opérateurs que nous avons présentée précédemment.

### 9.3 - Détermination des coefficients de l'équation parabolique discrétisée

En considérant le schéma implicite ( $\xi = y = 1$ ), le système [9.5] devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \delta_{\theta}^2 \alpha \frac{ik_o}{4} (n^2 - 1)\right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left[1 + (1 - \alpha) \frac{ik_o}{4} (n^2 - 1)\right] \psi_{i, j, k} \\ \left[1 - \delta_z^2 \beta \frac{ik_o}{4} (n^2 - 1)\right] \psi_{i + 1, j, k} = \left[1 + (1 - \beta) \frac{ik_o}{4} (n^2 - 1)\right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \end{array} \right.$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ont été introduits pour pondérer le terme portant sur l'indice de réfraction en différents points du maillage. Pour ajuster la valeur de ces coefficients, nous avons repris la démarche présentée dans la référence [32], qui traite la discrétisation de l'EP2D : on détermine les coefficients par comparaison des solutions analytique et numérique dans le cas de la propagation en présence de vent uniforme.

Avec un nombre de Mach uniforme dans la direction  $r$ , l'indice de réfraction du milieu est donné par [7] :

$$n^2 - 1 = \left( \frac{c_0}{c_0 + u} \right)^2 - 1 = \left( \frac{1}{1 + M} \right)^2 - 1$$

$M$  étant très inférieur à 1,

$$n^2 - 1 \approx -2M.$$

L'EP3D s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - 2 k_0^2 M \psi = 0$$

On montre que la solution de cette équation est :

$$\psi = \exp(-i k_0 M r) \exp\left(i k_0 \frac{z^2}{2 r}\right) / \sqrt{r}$$

Cette expression indique que, à l'approximation parabolique, le module du champ acoustique n'est pas modifié par la présence d'un Mach radial  $M$ . Cette propriété va permettre de fixer les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  par comparaison des résultats avec la solution analytique de l'équation.

Nous avons effectué différents calculs de propagation en présence d'un Mach radial en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour ces configurations, la source est placée à l'altitude  $z_S = 1,5$  m, et sa fréquence est de 100 Hz (la longueur d'onde acoustique correspondante est de 3,4 m). La résolution numérique est réalisée avec les pas  $\Delta r = \lambda/6$ ,  $\Delta z = \lambda/10$  et  $\Delta \theta = 2^\circ$ . Le schéma aux différences finies est initialisé à la distance  $r_0 = 20$  m. Le choix de ces paramètres est discuté plus loin et assure une bonne convergence du schéma aux différences finies.

Les figures 22 à 25 représentent le champ acoustique calculé au niveau du sol ( $z = 0$ ), dans une tranche horizontale, et référencé par rapport au champ libre à 1 mètre de la source.

La figure 22 obtenue avec un nombre de Mach  $M = 0$ , sert de référence pour les comparaisons. Une figure identique est obtenue en calculant la solution analytique de l'équation parabolique homogène.

Pour  $\alpha = \beta = 1$  (figure 23) et  $\alpha = \beta = 0$  (figure 24), on observe des différences sensibles (de l'ordre de 6 dB pour un nombre de Mach égal à 0,1) par rapport à la configuration avec Mach nul.

En revanche, pour  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  et  $\alpha = \beta = 1/2$  (figure 25), avec  $M = 0,1$ , on obtient un bon accord avec la solution avec nombre de Mach nul.

Bien que ces deux dernières discrétisations conviennent, on retiendra a priori la solution  $\alpha = \beta = 1/2$  qui attribue un poids équivalent aux termes portant l'indice de réfraction, comme nous l'avons fait pour la résolution de l'EP2D.

Le schéma numérique retenu, est donc finalement le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ 1 - \delta_{\theta}^2 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right\} \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left\{ 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right\} \psi_{i, j, k} \\ \left\{ 1 - \delta_z^2 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right\} \psi_{i + 1, j, k} = \left\{ 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right\} \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \end{array} \right. \quad [9.7]$$

Nous avons obtenu un système d'équations paraboliques dans les directions  $\theta$  et  $z$ . On remarque que la première équation porte sur les dérivées secondes de  $\psi$  par rapport à l'azimut  $\theta$ , la seconde comporte les dérivées secondes de  $\psi$  par rapport à l'altitude  $z$ . Ce système permet d'établir une relation entre le champ acoustique  $\psi$  à la distance  $r$  au champ acoustique  $\psi$  à la distance  $r + \Delta r$ . Ce passage s'effectue en résolvant deux systèmes tridiagonaux successifs associés à des conditions aux limites adéquates.

Afin d'initialiser le calcul, il est nécessaire de se donner la valeur du champ acoustique  $\psi(\theta, z)$  à une distance que nous noterons  $r_0$  (figure 26).

#### 9.4 - Initialisation du schéma numérique

L'initialisation du schéma numérique peut s'effectuer de plusieurs manières. Il est possible de calculer au voisinage de la source, la valeur du champ de pression  $p(r_0, \theta, z)$  par une méthode autre que la méthode parabolique, par exemple la méthode des rayons ou la méthode des modes normaux.

Nous supposons que, au voisinage de la source acoustique, les échelles spatiales de variation de l'indice sont suffisamment grandes pour ne pas modifier le champ acoustique sur la distance  $r_0$ . Nous considérons donc que le milieu au voisinage immédiat de la source est homogène.

Le champ initial est déterminé par une source ponctuelle placée au-dessus d'un sol parfaitement réfléchissant.

À la solution analytique de l'équation de Helmholtz de ce problème :

$$p(r_o, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{r_o^2 + (z - z_S)^2}} e^{i k_o \sqrt{r_o^2 + (z - z_S)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_o^2 + (z + z_S)^2}} e^{i k_o \sqrt{r_o^2 + (z + z_S)^2}}$$

où  $z_S$  est l'altitude de la source, nous préférons la solution de l'équation parabolique :

$$\psi(r_o, \theta, z) = \frac{\exp\left[i k_o (z - z_S)^2 / 2 r_o\right]}{\sqrt{r_o}} + \frac{\exp\left[i k_o (z + z_S)^2 / 2 r_o\right]}{\sqrt{r_o}} \quad [9.8]$$

Cette initialisation permet de limiter les réflexions numériques au sommet du maillage, car elle élimine dès l'origine la contribution de la propagation selon des angles importants par rapport à l'horizontale. Le champ est ainsi initialisé par une onde acoustique qui suit l'approximation paraxiale.

### 9.5 - Conditions aux limites du maillage

L'EP3D nécessite, pour sa réalisation numérique, deux types de conditions aux limites : une condition au sol, et des conditions sur les limites du maillage, (figure 26).

La première condition est fixée par la nature du problème physique considéré ; les conditions sur les limites du maillage sont plus délicates à déterminer car elles doivent permettre d'éliminer les réflexions numériques parasites.

#### 9.5.1 - Condition au sol

La prise en compte de la condition au sol ne présente pas de difficulté dans la méthode des différences finies. Elle se traduit par une condition d'impédance du type :

$$Z \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{i \omega}{c_o} \psi_{z=0} = 0$$

où  $Z$  représente l'impédance du sol.

Pour des calculs avec sol absorbant, cette impédance est introduite à l'aide du modèle de Delany et Bazley [12] :

$$Z = 1 + 9,08 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,75} + i 11,9 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,73}$$

où  $f$  est la fréquence et  $\sigma$  la résistance à l'écoulement exprimée en rayls.

À titre d'exemples numériques :

$\sigma =$	30,	pour la neige,
$\sigma =$	200,	pour la pelouse,
$\sigma =$	1800,	pour un terrain sablonneux,
$\sigma =$	6000,	pour la terre humide,
et $\sigma =$	30000,	pour l'asphalte.

### 9.5.2- Conditions sur les frontières du maillage

Pour la résolution de l'EP3D, deux formes de conditions aux limites sur les frontières du maillage doivent être considérées :

- une sur la frontière supérieure du maillage,
- deux sur les plans délimitant le secteur angulaire du maillage.

Une analyse de la condition en altitude sur la frontière supérieure du maillage a déjà été effectuée pour la résolution de l'EP2D [33]. La technique consiste à imposer à l'altitude  $z_{\max}$ , déterminant la frontière supérieure, l'impédance de l'onde acoustique. Cette impédance est calculée à partir de la fonction de Green en espace libre de l'EP. L'étude montre que cette condition permet d'éviter les réflexions numériques en milieu inhomogène (en présence de gradients de vent ou de température). Cette technique est reprise dans le logiciel développé pour l'EP3D.

La fonction de Green de l'EP3D s'écrit en milieu homogène :

$$G(r, \theta, z) = \exp \left[ i k_0 \frac{z^2}{2r} \right] / \sqrt{r}$$

L'impédance de l'onde est donnée par :

$$Z = \frac{-\frac{i\omega}{c_0} G}{\frac{\partial G}{\partial z}} \Bigg|_{z=z_{\max}} = \frac{-\frac{i\omega}{c_0} \Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \Bigg|_{z=z_{\max}}$$

Nous verrons dans le chapitre suivant la discrétisation de cette condition d'impédance sur le maillage.

Une étude des conditions aux limites sur les plans délimitant le secteur angulaire du maillage a déjà été présentée dans [33] : en s'inspirant de l'analyse ci-dessus, on imposait sur les frontières du maillage l'impédance de l'onde acoustique calculée en milieu homogène. La fonction de Green de l'EP3D étant, dans ce cas, indépendante de l'azimut  $\theta$ , la condition aux limites est de type Neumann et s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = -\theta_{\max} \quad \text{et} \quad \theta = +\theta_{\max}.$$

Différents calculs ont été effectués par cette méthode qui montrent que l'ouverture angulaire doit être assez importante (de l'ordre de  $150^\circ$ ) pour éviter les réflexions numériques.

Une autre technique utilisée en acoustique sous-marine consiste à calculer le champ en milieu inhomogène avec l'EP2D sur les plans  $\theta = \theta_{\max}$  et  $\theta = -\theta_{\max}$ . La résolution de l'EP3D est ensuite réalisée en injectant pour conditions aux limites la valeur du champ sur ces plans (conditions de type Dirichlet). Cette méthode est efficace si le milieu est faiblement inhomogène mais complique sensiblement la procédure de calcul.

Nous proposons une nouvelle méthode simple pour s'affranchir des conditions aux limites. Le champ est calculé dans tout l'espace, c'est-à-dire pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$  et on impose pour la résolution, la périodicité du champ à  $2\pi$  par rapport à la variable  $\theta$ . Cette technique engendre un surcroît du temps de calcul mais permet, en revanche, de disposer du champ dans toutes les directions.

En pratique, la résolution de l'EP3D par la méthode des directions alternées associée aux conditions aux limites présentées ci-dessus, ne pose pas de difficultés. Les étapes des calculs permettant, à partir du système d'équations [9.7], d'établir les deux systèmes tridiagonaux (l'un portant sur la variable  $\theta$ , l'autre sur la variable  $z$ ) sont détaillées dans le paragraphe suivant.

### 9.6 - Résolution numérique de l'EP3D

La résolution de l'EP3D est réalisée pas à pas dans la direction  $r$  à partir du champ initial  $r_0$ . Le passage du champ  $\psi(r, \theta, z)$  au champ  $\psi(r + \Delta r, \theta, z)$  s'effectue en résolvant deux systèmes tridiagonaux (figure 26b).

Le premier système tridiagonal porte sur la variable  $\theta$  :

$$\left[ 1 - \delta_\theta^2 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left[ 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \psi_{i, j, k} \quad [9.9]$$

associée à la condition limite de périodicité.

La discrétisation de cette équation est présentée dans l'annexe A. La résolution de ce système fournit la valeur de la fonction intermédiaire  $\psi_{i + 1/2, j, k}^*$ . La seconde étape permet de calculer la valeur du champ  $\psi_{i + 1, j, k}$ .

Le second système tridiagonal porte sur la variable  $z$  :

$$\left[ 1 - \delta_z^2 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + 1, j, k} = \left[ 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* \quad [9.10]$$

La forme de cette équation est identique à la précédente, cependant les conditions aux limites qui lui sont associées sont totalement différentes. Pour la résolution de ce système, nous utilisons une méthode identique à la méthode utilisée pour la résolution de l'EP2D qui est basée sur l'algorithme de Roach. La discrétisation de cette équation est présentée dans l'annexe B.

Le système d'équations peut être écrit sous la forme :

$$\boxed{B_k \psi_{i + 1, j, k + 1} + A_k \psi_{i + 1, j, k} + C_k \psi_{i + 1, j, k - 1} = D_k}$$

l'indice  $k$  variant de 2 à  $N_z - 1$ , si  $N_z$  est le nombre de points du maillage vertical. La résolution de ce système est effectuée pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$ , soit  $N_\theta$  fois si  $N_\theta$  est le nombre de points du maillage azimutal (voir figure 26). La forme matricielle est donnée dans l'annexe B avec la valeur des coefficients  $B_k$ ,  $A_k$ ,  $C_k$  et  $D_k$ .

Le système [9.10] est équivalent à la forme récurrente :

$$\psi_{i+1,j,k} = E_k \psi_{i+1,j,k+1} + F_k \quad [9.11]$$

On peut aussi écrire :

$$\psi_{i+1,j,k-1} = E_{k-1} \psi_{i+1,j,k} + F_{k-1} \quad [9.12]$$

soit, en substituant  $\psi_{i+1,j,k-1}$  dans [9.11] :

$$B_k \psi_{i+1,j,k+1} + A_k \psi_{i+1,j,k} + C_k (E_{k-1} \psi_{i+1,j,k} + F_{k-1}) = D_k$$

On obtient une relation entre  $\psi_{i+1,j,k}$  et  $\psi_{i+1,j,k-1}$  :

$$\psi_{i+1,j,k} = \frac{-B_k}{A_k + C_k E_{k-1}} \psi_{i+1,j,k+1} + \frac{D_k - C_k F_{k-1}}{A_k + C_k E_{k-1}}$$

Par identification avec [9.11], on obtient les récurrences :

$$E_k = \frac{-B_k}{A_k - C_k E_{k-1}}$$

$$F_k = \frac{D_k - C_k F_{k-1}}{A_k + C_k E_{k-1}}$$

[9.13]

Les coefficients  $E_k$  et  $F_k$  sont calculés à partir de  $E_1$  et  $F_1$  que l'on obtient grâce à la condition à la limite sur le sol :

$$\psi_{i+1,j,1} = E_1 \psi_{i+1,j,2} + F_1 \quad (\text{relation [9.12]})$$

- Pour une condition de Neumann (sol réfléchissant) :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{est discrétisée en :} \quad \frac{\psi_{i+1,j,2} - \psi_{i+1,j,1}}{\Delta z} = 0$$

Par identification, il vient :

$$E_1 = 1 \quad , \quad F_1 = 0$$

- Pour une condition mixte (sol à impédance Z) :

$$Z \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{i\omega}{c_0} \psi \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{est discrétisée en :} \quad Z \frac{\psi_{i+1,j,2} - \psi_{i+1,j,1}}{\Delta z} + \frac{i\omega}{c_0} \psi_{i+1,j,1} = 0$$

Par identification, il vient :

$$\psi_{i+1,j,1} = \psi_{i+1,j,2} \left( -\frac{Z}{\Delta z} \right) / \left( \frac{i\omega}{c_0} - \frac{Z}{\Delta z} \right)$$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= \frac{Z/\Delta z}{Z/\Delta z - \frac{i\omega}{c_0}} \\ F_1 &= 0 \end{aligned}}$$

Les coefficients  $E_k$  et  $F_k$  étant calculés à l'aide des récurrences 4, on utilise la relation 2 et la condition à la limite supérieure du maillage pour le calcul de  $\psi_{i+1,j,k}$  pour  $k = 1$  à  $N_z$ .

La relation récurrente [9.11] s'écrit au sommet du maillage :

$$\psi_{i+1,j,N_z-1} = E_{N_z-1} \psi_{i+1,j,N_z} + F_{N_z-1}$$

La condition à la limite s'écrit :

$$Z_G \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=z_{\max}} + \frac{i\omega}{c_0} \psi \Big|_{z=z_{\max}} = 0 \quad \text{ou} \quad Z_G = \frac{-\frac{i\omega}{c_0} G}{\frac{\partial G}{\partial z}} \Big|_{z=z_{\max}}$$

La discrétisation de cette relation donne :

$$Z_G \frac{(\Psi_{i+1,j,N_z} - \Psi_{i+1,j,N_z-1})}{\Delta z} + \frac{i\omega}{c_0} \Psi_{i+1,j,N_z} = 0$$

et par identification :

$$\Psi_{i+1,j,N_z-1} = \Psi_{i+1,j,N_z} \left( \frac{Z_G}{\Delta z} + \frac{i\omega}{c_0} \right) \times \frac{\Delta z}{Z_G}$$

soit :

$$\Psi_{i+1,j,N_z} \left( \frac{Z_G}{\Delta z} + \frac{i\omega}{c_0} \right) \frac{\Delta z}{Z_G} = E_{N_z-1} \Psi_{i+1,j,N_z} + F_{N_z-1}$$

Finalement, on obtient la valeur de  $\Psi_{i+1,j,N_z}$  :

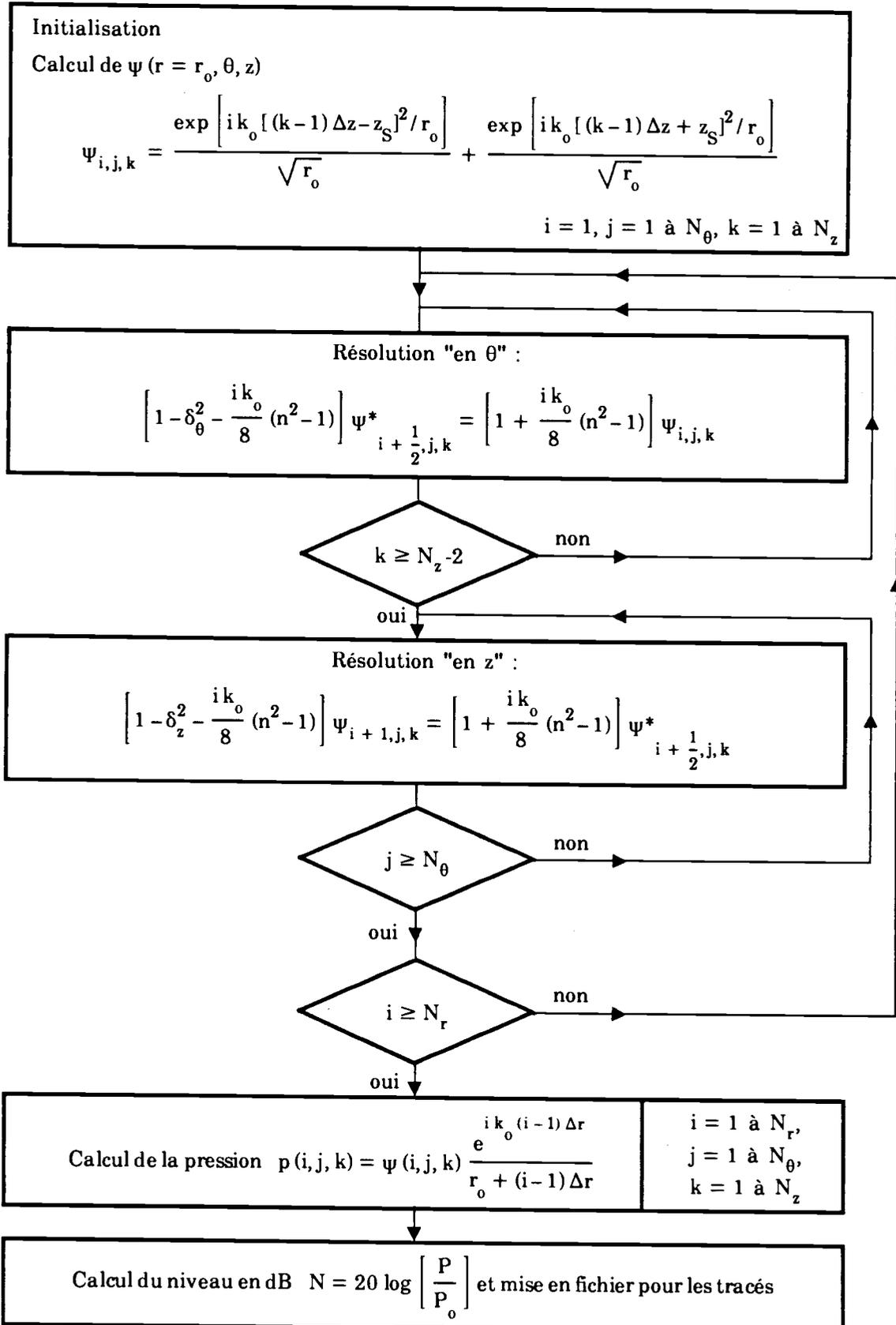
$$\Psi_{i+1,j,N_z} = \frac{F_{N_z-1}}{1 + \frac{i\omega \Delta z}{c_0 Z_G} - E_{N_z-1}}$$

On peut ainsi, grâce à la récurrence [9.13], calculer  $\Psi_{i+1,j,k}$  pour k variant de 1 à  $N_z$ .

Ces différentes étapes peuvent être résumées sous la forme d'un algorithme de résolution numérique.

### 9.6.1 - Algorithme de résolution de l'EP3D

L'algorithme de résolution de l'EP3D par la méthode des directions alternées est le suivant :



### 9.6 2. - Temps de calcul et détermination des pas $\Delta r$ , $\Delta z$ et $\Delta \theta$

L'estimation des pas du maillage compatibles avec une bonne convergence du schéma numérique a été réalisée, dans un premier temps, pour les calculs bidimensionnels. De nombreux calculs ont été menés en fonction de la longueur d'onde acoustique et les comparaisons dans le cas de la propagation en milieu homogène ont permis de déterminer la taille du maillage [26].

Les calculs tridimensionnels en milieu homogène ont abouti aux mêmes conclusions : un pas  $\Delta r$  égal à  $\lambda/6$  et un pas vertical  $\Delta z = \lambda/10$  permettent d'obtenir une bonne précision du schéma aux différences finies. Le choix du pas  $\Delta \theta$  est plus difficile à déterminer. Il dépend de la fréquence mais est aussi fonction de la distance maximum de propagation (plus on s'éloigne de la source, plus le pas  $r\Delta \theta$  azimutal est grand). Pour les calculs en présence d'obstacle, on choisit un pas  $\Delta \theta$ , ou plus exactement un arc  $r_{\max} \Delta \theta$ , suffisamment faible pour observer correctement les interférences (voir chapitre 10).

Le temps de calcul est proportionnel à la taille du maillage utilisé donc à la fréquence et à la distance maximum. A titre d'exemple, pour un maillage  $400 (n\Delta r) \times 180 (n\Delta \theta) \times 75 (n\Delta z)$ , le temps CPU sur Cray XMP est de 10 mn. Ceci correspond à une distance de propagation de l'ordre de 250 mètres à 100 Hz ou de 2500 mètres à 10 Hz. Un calcul équivalent par la méthode N2D prend environ 2 mn 30 s. Une réduction importante du temps de calcul peut être obtenue grâce à l'utilisation d'un pas variable dans la direction radiale  $r$ . P. Malbéqui [27] propose une variation parabolique du pas  $\Delta r$  en fonction de la distance :

$$\Delta r(r) = \frac{\lambda}{6 r_0^2} \frac{(r_m + r_0)}{(r_m - r_0)} (r - r_0)^2 + \frac{\lambda}{6}$$

où  $r_m$  est la distance maximum et  $r_0$  la distance du front initial. La valeur initiale du pas est de  $\lambda/6$  ce qui correspond à la valeur donnée plus haut. Le temps de calcul ainsi réduit permet d'atteindre des distances de propagation environ 5 fois plus grandes que celles du pas fixe. Ce pas variable peut être implanté sans difficultés sur le code 3D utilisé.

### 9.7- Équation parabolique dans un écoulement unidirectionnel

Nous avons vu au chapitre 8 que la vitesse du vent était introduite dans l'équation parabolique par l'intermédiaire de l'indice local de réfraction  $n$  sous la forme d'un produit scalaire avec le vecteur d'onde  $k$ .

On écrit  $n$  sous la forme :

$$n = \frac{c_0}{c + u(z) \cos \theta}$$

où  $c$  est la célérité locale du son,  $c_0$  est la célérité moyenne du son et  $u(z)$  la composante horizontale du vent dans direction  $\theta = 0$ .

Nous considérons donc en première approximation, que le vecteur d'onde reste dans la direction radiale  $r$  au cours de la propagation.

La théorie des rayons montre que ce n'est pas le cas dans la réalité. En présence d'un unidirectionnel, les fronts d'onde subissent des courbures, de sorte que le vecteur d'onde tend à se rapprocher de la direction du vent.

Afin de juger de la validité de l'approximation effectuée, nous avons développé une équation parabolique dans le cas d'un écoulement unidirectionnel à partir de l'équation de Helmholtz convectée :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{D^2}{Dt^2} p + \frac{2}{i\omega} \frac{\partial u(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = 0 \quad [9.14]$$

Le terme  $\frac{D^2}{Dt^2}$  représente la dérivée particulière seconde et s'écrit :

$$\frac{D^2}{Dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + u(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u(z) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + u(z)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Pour une source monochromatique de pulsation  $\omega$ , la pression est de la forme :

$$P = p e^{-i\omega t}$$

L'équation [9.14] se réécrit alors :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p + i\omega \frac{2u(z)}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u(z)^2}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{i\omega} \frac{\partial u(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = 0 \quad \text{avec : } n = \frac{c_0}{c}$$

Comme pour l'équation parabolique classique, nous écrivons :

$$p(r, \theta, z) = \psi(r, \theta, z) \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}}$$

Après avoir effectué le changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left\{ \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \cos \theta \psi i k_0 - \frac{1}{2r} \psi \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right\} \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{2}{i \omega} \frac{u(z) \partial p}{\partial z \partial x \partial z} = \left\{ \frac{2 i}{i \omega} \frac{u(z)}{\partial z} \right\} \left[ \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} i k_0 - \frac{1}{2r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} \right] \frac{e^{i k_0 r}}{\sqrt{r}}$$

L'hypothèse de parabolisation consiste à négliger le terme  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$  (voir chapitre 8). Les termes

en  $\frac{u(z)^2}{c_0^2}$  sont également négligés,  $u(z)$  étant très inférieur à  $c_0$ . Après simplification nous obtenons

l'équation parabolique convectée :

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( 1 + \frac{u(z)}{c} \cos \theta \right) + \frac{1 \partial \psi}{r \partial \theta} \left( - 2 i k_0 \frac{u(z)}{c} \sin \theta \right) \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left\{ - \frac{2 i}{\omega} \cos \theta \frac{\partial u(z)}{\partial z} \left( i k_0 - \frac{1}{2r} \right) \right\} + \psi \left[ k_0^2 (n^2 - 1) + 2 i k_0 \left( i k_0 - \frac{1}{2r} \right) \frac{u(z)}{c} \cos \theta \right] = 0 \end{aligned}}$$

A rapprocher de l'équation parabolique standard :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 i k_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi \left[ k_0^2 (n^2 - 1) \right] = 0.$$

La composante du vent, qui dans l'équation standard n'apparaît que dans l'indice  $n$  intervient ici

sur le terme en  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  mais porte aussi sur les dérivées premières de  $\psi$  par rapport à  $z$  et à  $\theta$ .

Ces deux dérivées ne sont pas présentes dans l'équation standard.

Nous constatons par ailleurs une modification du terme en  $\psi$  qui porte l'indice local de réfraction. Nous appellerons  $n_p$  l'indice de l'équation parabolique standard et  $n_c$  l'indice de l'équation parabolique convectée. Un développement limité de  $k_0^2 (n_p^2 + 1)$  donne :

$$\begin{aligned} k_0^2 (n_p^2 - 1) &= k_0^2 \left\{ \left( \frac{c_0}{c + u(z) \cos \theta} \right)^2 - 1 \right\} \\ &= k_0^2 \left\{ \frac{c_0^2}{c^2} \left( 1 - 2 \frac{u(z)}{c} \cos \theta \right) - 1 \right\}, \end{aligned}$$

Le terme correspondant de l'équation convectée est :

$$k_0^2 (n_c^2 - 1) + 2 i k_0 \left( i k_0 - \frac{1}{2r} \right) \frac{u(z)}{c} \cos \theta = k_0^2 \left\{ \frac{c_0^2}{c^2} - 2 \frac{u(z)}{c} \cos \theta - \frac{i k_0 u(z)}{rc} \cos \theta - 1 \right\}$$

Il apparaît que les deux termes ne diffèrent que par la présence de  $\frac{i k_0}{r} \frac{u(z)}{c} \cos \theta$ .

Ces modifications de l'équation classique ont été introduites dans l'algorithme de résolution. Différents calculs ont été menés pour plusieurs fréquences et avec des profils de vent variés. Les résultats montrent une grande similitude entre le calcul par la méthode de l'EP3D standard et l'équation parabolique convectée. On observe par ailleurs peu de différences avec les calculs N2D.

Dans le cas d'écoulements unidirectionnels, on peut donc se contenter d'effectuer des calculs par la méthode N2D. Le terme de couplage entre les différents plans verticaux ne produit pas de modifications sensibles sur le champ acoustique.

Un exemple de calcul en présence d'un vent unidirectionnel est donné sur la figure 27. Le vent est de la forme :

$$v = 10 (z/10)^{0,2},$$

la source est située à 1,5 m de haut et émet à 100 Hz. Le résultat est présenté sous forme de lignes isobares. Le niveau de référence est de 0 dB à 1 mètre de la source et le tracé est effectué dans le plan horizontal à l'altitude  $z = 2m$ . On observe une augmentation du niveau dans la direction correspondant au vent portant et une diminution dans la direction opposée (vent contraire).

## 10 - PROPAGATION EN PRÉSENCE D'ÉCRANS ACOUSTIQUES

Comme nous l'avons montré dans l'introduction à la propagation tridimensionnelle, la présence d'un obstacle entre la source et le récepteur peut engendrer des effets 3D. Nous avons dans un premier temps étudié la propagation acoustique en présence d'un écran droit parfaitement rigide avec l'EP2D. Les premières applications montrent que l'approximation parabolique 2D permet de modéliser correctement la diffraction du son par le sommet de l'écran. La validation est obtenue par comparaison avec les résultats de calculs de diffraction dans l'approximation de Fresnel.

Nous avons ensuite adapté cette méthode aux calculs 3D afin de vérifier, par comparaison avec les expériences en chambre sourde décrites au chapitre 11, que le schéma aux différences finies utilisé prend correctement en compte le couplage azimutal.

### 10.1 - Calcul du champ acoustique en présence d'un mur dans l'approximation parabolique 2D

La géométrie du problème est définie sur la figure 28. On considère une source acoustique monopolaire émettant à une fréquence  $f = 10$  Hz, placée au-dessus d'un sol parfaitement réfléchissant et en amont d'un écran vertical. Celui-ci est supposé parfaitement rigide et de faible épaisseur. Le milieu de propagation est homogène au repos.

L'écran est modélisé par une section rectangulaire et est discrétisé sur le maillage. La pression sur les points du maillage internes à l'écran est annulée. Au sommet de l'écran, la condition de réflexion permet d'écrire :  $\partial p / \partial z = 0$  (figure 28a).

La résolution est effectuée jusqu'à l'écran de façon classique. À partir de l'abscisse de l'écran, le maillage vertical est réduit (figure 27b). Lorsque le côté aval du mur est atteint, la valeur du champ  $\psi(r_{\text{mur}}, z > z_{\text{mur}})$  est déterminée et l'on pose  $\psi(r_{\text{mur}}, z < z_{\text{mur}}) = 0$ . On poursuit alors le calcul sur le maillage vertical complet avec la condition à l'altitude  $z = 0$ .

La pression est ainsi obtenue dans le domaine, avec les limitations suivantes :

- L'approximation parabolique ne permet pas de prendre en compte la partie rétrodiffusée de l'onde : les réflexions sur le mur, qui modifient le champ en amont de celui-ci, sont ignorées.
- L'angle entre la ligne source-récepteur et l'horizontale doit être inférieur à  $15^\circ$ .

## 10.2 - Méthode des intégrales de Fresnel

Le calcul de la propagation au-dessus d'un sol plan en présence d'un mur peut être effectué par la méthode d'intégrales de Fresnel [34].

Dans un premier temps, on considère une source monopolaire et on cherche le champ acoustique diffracté par un écran semi-infini, délimité par une arête rectiligne perpendiculaire aux rayons incidents.

Le calcul de Fresnel, qui utilise le principe de Huygens, consiste à intégrer la contribution de chaque élément de surface du demi-plan vertical laissé libre par l'écran. La pression en aval de l'écran à une distance supérieure à une longueur d'onde acoustique est exprimée par H.J. Jonasson [35] sous la forme :

$$p = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{ikR}}{kR_x} F(X),$$

avec  $F(X) = \int_X^\infty e^{i\tau^2} d\tau$  (intégrale de Fresnel).

Les grandeurs géométriques sont définies figure 29a et :

$$R_1 = r + r_o, \quad R_2 = \left\{ \frac{(R_1 + R) \cdot R_1}{2} \right\}^{1/2} \quad X = \sqrt{k(R_1 - R)}$$

Ce résultat permet, à l'aide du principe de superposition, d'introduire dans le calcul un sol plan réfléchissant. Nous considérons, pour cela, une source image  $S_2$ , (figure 29b) qui permet d'introduire les réflexions sur le sol en amont de l'écran. Pour tenir compte des ondes acoustiques qui se réfléchissent sur le sol en aval du mur, et il est nécessaire de rajouter au récepteur réel  $R_3$  un récepteur image  $R_4$  symétrique par rapport au sol (voir figure 29b).

La pression totale au point de calcul  $R_3$  est donc la somme de quatre contributions :

$$P_T = P_{13} + P_{14} + P_{23} + P_{24}$$

Chaque contribution  $P_{ij}$  est calculée comme pour le mur semi-infini en considérant l'émetteur  $i$  et le récepteur  $j$ .

Un exemple de résultats obtenus avec l'EP2D et les intégrales de Fresnel est donné sur la figure 30. Les configurations de calcul sont les suivantes : la source est située à 30 m du mur et à 1 m au-dessus du sol. La fréquence est de 100 Hz. Le mur a une hauteur de 5 m.

Pour les calculs avec l'EP2D, le pas horizontal  $\Delta r = \lambda/6$  et le pas vertical  $\Delta z = \lambda/10$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde acoustique). Le choix de ces valeurs discuté dans [32] assure une bonne convergence pour la résolution de l'EP2D.

Sur la figure 30, les courbes représentent les iso-valeurs de la pression avec 1 dB entre deux contours successifs. Le niveau de référence est de 0 dB à 1 mètre de la source. Il apparaît que les deux méthodes sont en très bonne concordance. Les résultats montrent, en outre, la création d'une zone d'ombre importante derrière l'écran qui apporte une réduction de 8 dB par rapport au champ libre. On observe aussi la création d'une zone d'interférences au bas du mur.

D'autres configurations ont été examinées par ces deux méthodes, en fonction de la fréquence de la source, sa position et la hauteur du mur ont permis de valider l'EP2D avec un mur sur de nombreux exemples.

La méthode de Fresnel permet de calculer le champ acoustique diffracté par d'autres obstacles que le mur. Dans le rapport [33], nous avons décrit la méthode dans le cas d'un dièdre. Les comparaisons effectuées avec les résultats de la méthode parabolique en présence d'obstacles présentée dans la référence [33] montrent aussi un excellent accord.

### **10.3 - Propagation en présence d'un écran dans l'approximation parabolique 3D**

Pour simplifier les calculs, on considère, comme première application de l'EP3D avec un obstacle, le cas d'un écran acoustique dont la géométrie est adaptée aux systèmes de coordonnées cylindriques. L'écran est défini par une hauteur et une ouverture angulaire fixées (voir figure 31). Pour la résolution, l'écran est discrétisé sur un ensemble de points du maillage. La pression est imposée à zéro sur les points correspondant à l'intérieur de l'écran. Au sommet de l'écran, supposé rigide, on impose une condition de type Neumann :  $\partial\psi/\partial z = 0$ . La résolution de l'EP3D est conduite classiquement jusqu'à la distance  $r_{\text{mur}}$  correspondant à la position de l'écran.

À l'aplomb de l'obstacle, le calcul porte sur les points situés entre le sommet de l'écran et la frontière supérieure du maillage. Les calculs sont effectués en tenant compte des hypothèses de l'équation parabolique : les ondes rétrodiffusées sont négligeables et les angles de propagation sont limités à  $15^\circ$  par rapport à l'horizontale.

Le calcul licite du champ acoustique est donc limité à une région de l'espace et en particulier à une zone située en aval de l'écran.

Nous présentons des calculs de diffraction par l'écran obtenus sans et avec vent. La configuration de base est la suivante (voir figure 32) :

- le mur mesure 10,5 m de haut et a une ouverture angulaire de 34 ° ;
- la source acoustique est placée à 30 m en amont de l'écran à une hauteur  $z_S = 5$  m. Sa fréquence est de 100 Hz ;
- le niveau acoustique est tracé en fonction de l'azimut  $\theta$ , sur un demi-cercle à 200 m de la source et à une hauteur de 4,5 m. Ce niveau, présenté en dB, est référencé par rapport au niveau en champ libre à un mètre de la source.

### 10.3.1 - Diffraction en milieu homogène au repos

Nous présentons d'abord un calcul effectué par la méthode N2D qui permet, par la suite, de mettre en évidence les différences obtenues avec le calcul 3D. La méthode N2D consiste à résoudre N fois l'équation parabolique 2D dans un plan vertical correspondant à un azimut  $\theta$  donné. Ainsi, cette méthode détermine la propagation en fonction de l'azimut mais néglige le couplage entre les différents plans de calculs successifs. On observe sur la figure 33 que le niveau acoustique dans la zone d'ombre de l'écran (définie pour  $\theta$  variant de  $-18^\circ$  à  $18^\circ$ ) est de  $-52$  dB et qu'il atteint  $-41,5$  dB dans la zone éclairée par la source.

La figure 34 montre le résultat du calcul 3D. Par rapport à la méthode N2D, la résolution de l'EP3D permet de prendre en compte les effets de bord de l'écran : dans la zone éclairée, on observe des oscillations du champ acoustique autour d'une valeur moyenne, et dans la zone d'ombre, il apparaît un schéma d'interférences. En particulier, dans la direction  $\theta = 0^\circ$  au centre de l'écran, le niveau chute de 17,5 dB par rapport au niveau que l'on obtiendrait en l'absence d'obstacle.

L'écart de niveau entre le calcul N2D et le calcul 3D est tracé à la figure 35. On retrouve le même niveau avec les deux méthodes pour les points situés loin de l'écran ( $\theta$  variant de  $-90^\circ$  à  $-50^\circ$  et de  $50^\circ$  à  $90^\circ$ ). En revanche, des différences sensibles apparaissent (de l'ordre de 6 dB) dans la zone d'ombre et au voisinage de celle-ci. Ce tracé montre l'intérêt du calcul 3D lorsque l'on cherche à déterminer le champ acoustique dans cette région de l'espace.

### 10.3.2 - Diffraction par un écran en présence d'un vent transverse

Nous avons analysé dans ce paragraphe les effets combinés de l'écran étudié ci-dessus avec un profil de vent de la forme :

$$v(z) = v_{10} \left( \frac{z}{10} \right)^{0,2}$$

où  $v_{10}$  représente la vitesse du vent (en m/s) à l'altitude 10 m.

La direction du vent considérée est sensiblement parallèle à la largeur de l'écran (voir la géométrie du problème à la figure 31). Pour les directions de propagation correspondant à l'ouverture angulaire de l'écran, on se trouve dans une configuration de vent transverse.

La figure 36 montre le résultat obtenu en utilisant la méthode N2D avec  $v_{10} = 5$  m/s. On retrouve les tendances classiques de l'effet du vent sur la propagation : en vent contraire (dans la direction  $\theta = 90^\circ$ ) le niveau est minimum, et en vent portant (dans la direction  $\theta = -90^\circ$ ) le niveau est maximum. Plus précisément, on observe que, dans la zone éclairée, le niveau décroît de façon monotone pour  $\theta$  variant de  $-90$  à  $90^\circ$ , et dans la zone d'ombre, le niveau acoustique est, comme pour la configuration sans vent, atténué d'une dizaine de décibels.

Avec  $v_{10} = 5$  m/s, on retrouve pour le calcul 3D (figure 37), la même forme de schéma de diffraction que pour la configuration sans vent. Il apparaît cependant que le niveau acoustique est plus important en vent portant qu'en vent contraire.

Pour  $v_{10} = 10$  m/s, les effets du vent sur la propagation sont plus sensibles. Avec le calcul N2D (voir figure 37), on observe une différence de 12,5 dB entre la position en vent portant et celle en vent contraire.

Par ailleurs, le calcul 3D (figure 39) met en évidence un léger décalage de la position des interférences par rapport à la configuration sans vent.

La figure 40 montre la différence entre les calculs N2D et 3D. Dans, et au voisinage de la zone d'ombre, les écarts entre les deux méthodes sont assez importants et plus marqués que pour la configuration sans vent.

La figure 41 représente la différence de niveau entre la configuration au repos et celle en présence d'un vent  $v_{10} = 10$  m/s obtenue avec les calculs 3D. Cette figure montre les modifications sur la propagation apportées par le vent : bien que le schéma de diffraction soit peu modifié par le vent, il apparaît localement des différences importantes mises en évidence notamment par la présence de deux pics à  $-10$  dB et  $10$  dB. Ces pics sont dus au décalage de la position des interférences.



## ANNEXE A

### DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION [9.9]

$$\left[ 1 - \delta_\theta^2 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \Psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* = \left[ 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right] \Psi_{i, j, k}$$

- L'indice  $i$  est fixé et déterminé par la distance  $r$ .
- L'indice  $j$  varie de 1 à  $N_\theta$ ,  $n_\theta$  étant le nombre de points dans la direction  $\theta$ .
- L'indice  $k$  est fixé pour chaque inversion de la matrice.  $k$  varie de 2 à  $N_z - 2$ .

En développant l'opérateur  $\delta_\theta^2$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{\Omega_\theta}{\Delta_\theta^2} \Psi_{i + \frac{1}{2}, j-1, k}^* + \left( 1 - \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) - \frac{2\Omega_\theta}{\Delta_\theta^2} \right) \Psi_{i + \frac{1}{2}, j, k}^* + \frac{\Omega_\theta}{\Delta_\theta^2} \Psi_{i + \frac{1}{2}, j+1, k}^* = \left( 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right) \Psi_{i, j, k}$$

$j$  variant de 1 à  $N_\theta$ .

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ M_\theta \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{i, 1, k}^* \\ \Psi_{i, 2, k}^* \\ \vdots \\ \Psi_{i, j, k}^* \\ \vdots \\ \Psi_{i, N_\theta, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right) \Psi_{i, 1, k} \\ \left( 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right) \Psi_{i, 2, k} \\ \vdots \\ \Psi \left( 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right) \Psi_{i, j, k} \\ \vdots \\ \left( 1 + \frac{ik_0}{8} (n^2 - 1) \right) \Psi_{i, N_\theta, k} \end{bmatrix}$$

où  $M_\theta$  est une matrice carrée d'ordre  $N_\theta$  égale à :

$$M_\theta = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A_1 & C & & & & & & & & B \\ \hline B & A_2 & C & & & & & & & \\ \hline & B & A_3 & C & & & & & & \\ \hline & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & & & & \\ \hline & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & & & \\ \hline & & & & B & A_j & C & & & \\ \hline & & & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & \\ \hline & & & & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ \hline & & & & & & & B & A_{N_\theta-1} & C \\ \hline C & & & & & & & & B & A_{N_\theta} \\ \hline \end{array}$$

Les termes B et C sont constants et égaux à :

$$B = C = \frac{\Omega_\theta}{\Delta_\theta^2}$$

Le terme  $A_j$  dépend de l'azimut  $\theta$  par la présence de l'indice local de réfraction  $n$  :

$$A_j = 1 - \frac{2 \Omega_\theta}{\Delta_\theta^2} - \frac{i k_o}{8} (n^2 - 1)$$

La condition de périodicité apparaît par la présence des termes B et C qui ne sont pas sur l'une des trois diagonales.

Ce système est résolu  $N_z - 2$  fois à chaque pas de calcul  $\Delta r$  et fournit la valeur intermédiaire  $\Psi_{i+1/2,j,k}^*$



où  $M_z$  est une matrice carrée d'ordre  $N_z$  égale à :

$$[M_z] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{i\omega}{c} - \frac{Z}{\Delta z} & \frac{Z}{\Delta z} & & & & & & & & \\ \hline B & A_2 & C & & & & & & & \\ \hline & B & A_3 & C & & & & & & \\ \hline & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & & & & \\ \hline & & & B & A_j & C & & & & \\ \hline & & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & B & A_{N_z-2} & C & \\ \hline & & & & & & & B & A_{N_z-1} & C \\ \hline & & & & & & & & \frac{Z_G}{\Delta z} & \frac{i\omega}{c} + \frac{Z_G}{\Delta z} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Les termes de cette matrice tridiagonale sont les suivants :

$$B = C = \frac{\Omega_z}{\Delta z^2}$$

et :

$$A_k = \left( 1 - \frac{2\Omega_z}{\Delta z^2} + \frac{ik_0}{8}(n^2 - 1) \right)$$

La valeur de  $A_k$  dépend de la valeur de l'indice local de réfraction  $n$  calculé au point  $\psi((i+1)\Delta r, j\Delta\theta, k\Delta z)$ .

Ce système est résolu  $N_\theta$  fois et fournit la valeur du champ discrétisé  $\psi(r + \Delta r, z, \theta)$ .

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA TROISIÈME PARTIE

- [28] J.A. MERCER, W.J. FELTON, J.R. BOOKER  
"Three dimensional Eigenrays through ocean mesoscale structure".  
J. Acoust. Soc. Am., 78, pp. 157-165 (1985).
- [29] Ralph N. BAER  
"Propagation through a three dimensional eddy including effects on an array".  
J. Acoust. Soc. Am., 69, pp. 70-75 (1981).
- [30] John S. PERKINS and Ralph N. BAER  
"An approximation to the three dimensional parabolic-equation method for acoustic propagation".  
J. Acoust. Soc. Am., 72, pp. 515-522 (1982).
- [31] J.K. JENG, C.H. LIU  
"Wave propagation in media with three dimensional quadratic index profile".  
J. Acoust. Soc. Am., 81, pp. 1732-1740 (1987).
- [32] P. MALBEQUI et S. CARRARD-CARVANA  
"Étude de la propagation acoustique en basse altitude".  
Rapport final ONERA N° 11/3641 PY (novembre 1988).
- [33] Y. DELRIEUX  
"Propagation acoustique tridimensionnelle à basse altitude".  
Rapport technique ONERA N° 13/3641 PY (avril 1990).
- [34] G. BRUHAT  
"Cours de physique générale".  
Optique 6ème Edition revue et complétée par A. KASTLER, MASSON (1965).
- [35] H.G. JONASSON  
"Sound reduction by barriers on the ground".  
Journal of sound and vibration, Vol. 22, pp. 113-126 (1972).

[36] P. MALBEQUI

"Etude de la convergence du schéma aux différences finies pour la propagation acoustique atmosphérique à l'approximation parabolique. Calcul statistique du champ sonore en présence d'une turbulence cinématique".

Rapport de synthèse ONERA N° 8/3641 PY (mai 1987).

[37] P. MALBEQUI

Etude d'un réseau à pas variable et comparaisons entre la méthode des rayons et l'équation parabolique dans le cadre de la propagation acoustique atmosphérique.

Rapport final ONERA N° 12/3641 PY (septembre 1989).

## QUATRIÈME PARTIE

### ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE MESURES DE DIFFRACTION EN CHAMBRE ANÉCHOÏQUE

#### 11 - ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA PROPAGATION TRIDIMENSIONNELLE

Dans le cadre de l'étude, deux campagnes d'essais ont été menés afin, dans un premier temps d'obtenir une validation du logiciel présenté au chapitre précédent, et dans un second temps de mettre en évidence les effets tridimensionnels sur la propagation.

La première série d'expériences a eu lieu en chambre sourde. Elle consistait à mesurer les phénomènes de diffraction du son par différents obstacles dans un milieu homogène au repos.

La seconde expérience s'est déroulée dans la soufflerie du CSTB (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment) où des mesures de diffraction en présence d'écoulements ont été réalisées.

##### 11.1 - Mesures de diffraction en chambre anéchoïque

###### 11.1.1 - Objectifs de l'expérience

Dans le chapitre 10, nous avons montré l'importance des effets 3D lors de la propagation en présence d'écrans acoustiques. Il est nécessaire de valider la méthode numérique proposée afin de vérifier que la prise en compte du terme de couplage azimutal  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$  est effectuée de manière correcte.

Les résultats présentés dans les diverses publications sont insuffisants pour obtenir une validation correcte du code de calcul. Les résultats expérimentaux de Pirinchiera [28] permettent une première comparaison avec le calcul parabolique 3D.

R. Pirinchiera présente le niveau acoustique mesuré derrière un écran plan de hauteur 10,5 cm et de largeur 20 cm, la source acoustique est placée au niveau du sol et 30 cm en avant de l'écran. Cette source émet à la fréquence de 10 kHz. Le tracé 42a représente le niveau mesuré par un microphone placé à 20 cm derrière l'écran et se déplaçant transversalement à 4,5 cm de hauteur.

Le calcul avec l'EP3D effectué dans la même configuration est présenté sur le tracé 42b. On constate un bon accord entre les résultats expérimentaux et le calcul 3D. La position des interférences dues à la diffraction par les bords verticaux de l'écran est identique et le niveau acoustique est semblable sur les deux tracés.

L'objectif des expériences de mesure de diffraction est d'obtenir une validation plus complète du code de calcul 3D.

### 11.1.2 - Configuration des mesures réalisées en chambre sourde

Afin de simuler dans la chambre de dimensions réduites (quelques mètres) les effets de propagation sur des distances d'une centaine de mètres aux fréquences d'émission comprises dans la bande 50 à 1000 Hz, les expériences sont réalisées avec un facteur d'échelle de 1/20. Les spécifications techniques de la chambre sourde sont données dans [23].

Dans un premier temps, on utilise une émission acoustique continue qui permet, en raison de l'anéchoïcité, de caractériser le champ diffracté par l'obstacle sans traitement du signal particulier.

Trois fréquences ont été choisies pour l'ensemble des mesures : 1.2 kHz, 5 kHz, 10 kHz (60, 250, 500 Hz à l'échelle 1). Toutes les grandeurs utilisées par la suite sont à l'échelle de 1/20.

Le sol réfléchissant a été réalisé à l'aide d'un plancher en contreplaqué surfacé déposé sur une épaisse couche de polystyrène. La source acoustique est une chambre de compression JBL type 2420.

Les premières mesures effectuées ont été réalisées sans obstacle afin de contrôler la réponse de la source et la nature du sol utilisé.

Un réseau de microphones fixés sur une antenne verticale a permis de mesurer le champ vertical et de comparer les mesures aux calculs. La position des interférences entre le champ direct et le champ réfléchi sur le sol, relevée par un réseau de microphones vertical est conforme à celle donnée par le calcul. Nous avons ainsi vérifié que le sol se comporte comme un matériau réfléchissant et que la source acoustique peut être assimilée à une source ponctuelle. Une autre série de mesures avec un réseau horizontal a montré que la source était quasi omnidirectionnelle pour les ouvertures angulaires de  $\pm 60^\circ$ .

Pour les mesures de diffraction, trois obstacles ont été considérés. Un écran rigide en acier, une calotte sphérique en mousse de polyuréthane dont la surface est traitée pour la rendre réfléchissante, et un parallélépipède de contreplaqué renforcé et surfacé. Les dimensions des obstacles ont été choisies de façon à obtenir des effets de diffraction sensibles aux fréquences considérées.

- Écran rectangulaire : hauteur 20 cm, largeur 50 cm.
- Calotte sphérique : hauteur 20 cm, rayon 30 cm.
- Parallélépipède : hauteur 20 cm, longueur 50 cm, largeur 50 cm.

Le relevé des niveaux acoustiques est effectué à l'aide de 20 microphones placés sur un support horizontal et espacés de 10 cm (voir les figures 43, 44 et 45).

Pour améliorer la résolution spatiale, les mesures sont effectuées pour deux positions successives du support décalées de 5 cm. Le niveau est ainsi mesuré tous les 5 cm et sur 40 positions.

Pour l'ensemble des mesures, la source est placée à 9,2 cm du sol et à 1 mètre du début de l'obstacle (mur et "boîte") et à 1 mètre du sommet de la calotte (voir figure 43). La hauteur du support des microphones est fixée à 10 cm. Pour chaque configuration de mesure, le support des microphones est placé aux distances : 2 m, 2,5 m et 3 m de la source (voir figure 43).

### **11.2 - Mesures de diffraction en soufflerie**

Les mesures de diffraction en présence d'écoulement ont été réalisées en collaboration avec le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB). La vitesse du vent dans la veine peut varier de 0 m/s à 30 m/s. Les caractéristiques de la veine sont résumées sur la figure 46.

Les parois de la veine d'essais ne sont pas traitées acoustiquement. Pour s'affranchir des réflexions sur les murs et le plafond, on utilise une méthode TDS (Time Delay Spectrometry) développée par Heyser [30]. Cette méthode est implantée au CSTB sur micro-ordinateur pour une mesure du niveau acoustique en temps réel. Cependant, étant donné ses contraintes techniques (occupation en place mémoire des trains d'ondes), la procédure du CSTB ne permet d'analyser qu'un seul signal microphonique. Les résultats obtenus seront donnés pour une position du microphone et sous forme d'une représentation du niveau en fonction de la fréquence. Si l'on souhaite relever le champ acoustique en plusieurs points derrière l'obstacle, l'utilisation de la méthode TDS opérationnelle au CSTB requiert un temps d'occupation de la soufflerie important. Afin de limiter la durée des essais, nous avons exploité la méthode TDS mise au point au préalable lors des essais en chambre sourde. Le traitement est réalisé en temps différé sur les enregistrements magnétiques des signaux. Nous avons ainsi pu utiliser un réseau de microphones disposés sur un support identique à celui de l'expérience en chambre sourde.

#### **11.2.1 - Configuration des mesures effectuées dans la soufflerie**

Pour les mesures dans la soufflerie, nous avons utilisé l'écran et la calotte sphérique. Afin de ne pas introduire trop de turbulence qui pourrait perturber la mesure du champ acoustique, l'écran est orienté parallèlement à la direction du vent. Les mesures de diffraction sont effectuées en présence d'un écoulement transverse par rapport à la direction source, axe de l'obstacle (voir figure 47).

De même que pour l'expérience en chambre sourde, les mesures sont effectuées avec un facteur d'échelle de 1/20.

La méthode TDS consiste à envoyer sur le haut-parleur (tweeter ou chambre de compression) un signal sinusoïdal d'amplitude constante et dont la fréquence décroît linéairement avec le temps. Le signal reçu par le microphone est composé du signal direct émis par la source et reçu avec un certain retard, du signal réfléchi par le sol et reçu avec un retard légèrement supérieur, et des signaux réfléchis par les parois de la veine. Seuls les deux premiers signaux doivent être conservés. Pour ce faire, le signal reçu est multiplié par le signal émis puis filtré pour séparer le signal utile des signaux parasites.

Pour que les signaux directs et réfléchis soient séparables, une différence de temps de parcours de 3 ms est nécessaire. Les microphones et le haut-parleur doivent donc être éloignés des parois de la veine d'une distance au moins égale à 50 cm.

La largeur de la veine étant de 4 mètres, la distance maximum de propagation est de 3 mètres (soit 60 mètres en échelle réelle) (voir figure 47). L'écran et le sommet de la colline sont placés dans tous les cas à 1 m de la source. La hauteur de la source et des récepteurs est égale à 10 cm dans tous les cas.

Pour les mesures en présence d'écoulements, les profils de vent sont de la forme :

$$u = u_{\text{réf}} \left( \frac{z}{z_{\text{réf}}} \right)^{\alpha}$$

La vitesse choisie est  $u_{\text{réf}} = 8$  m/s, où  $u_{\text{réf}}$  représente la valeur moyenne de vitesse du vent à l'altitude  $z_{\text{réf}} = 50$  cm. La valeur de  $\alpha$  mesurée lors des essais est voisine de 0,1 au centre de la veine d'essais. Le détail des relevés anémométriques est donné dans la référence [31].

### **11.3 - Analyse des résultats des expériences en chambre sourde et en soufflerie**

#### **11.3.1 - Mesures en chambre anéchoïque**

Pour s'affranchir de la directivité de la source, les résultats expérimentaux présentés dans la suite sont normalisés par rapport au niveau mesuré en champ libre. De même, les résultats numériques obtenus avec l'EP3D ou la méthode par équation intégrale sont référencés par rapport à la décroissance géométrique en  $1/r$ .

Les figures 48 et 49 montrent une première comparaison des mesures et des résultats obtenus par la méthode d'équations intégrales. La ligne de microphones est située pour ces configurations à 3 m de la source (voir figure 43). Il apparaît à la fréquence de 5 kHz (figure 48) et la fréquence de 10 kHz (figure 49) un très bon accord entre la mesure et le calcul. Cette concordance montre les possibilités des équations intégrales à traiter des problèmes de diffraction en présence d'arêtes vives représentées ici par les bords de l'écran et permet aussi d'apprécier la bonne résolution spatiale de la mesure.

La comparaison des mesures et des calculs par l'EP3D est présentée sur les figures 50 à 53. Pour les calculs par l'EP3D, l'écran est adapté au maillage en coordonnées cylindriques. Il est ainsi modélisé par un arc de cercle de faible ouverture angulaire ( $\pm 14^\circ$ ) que l'on peut considérer comme une bonne approximation de l'écran plan.

L'ensemble des figures 50 à 53 montre un très bon accord entre la mesure et le calcul pour l'EP3D pour différentes positions entre la source et les microphones (2 ; 2,5 et 3 m) et aux fréquences de 5 et 10 kHz.

Plus précisément, le calcul permet de retrouver le schéma de diffraction dans la zone d'ombre et au voisinage de celle-ci ; la position et le niveau des interférences sont bien calculés.

Les figures 50 et 52 mettent en évidence l'évolution du schéma d'interférences en fonction de la distance entre la source et la ligne de microphones (2 ; 2,5 et 3 m) à la fréquence de 5 kHz. Ces trois figures montrent que les interférences sont d'autant plus marquées que la distance d'observation est importante. A la distance de 3 m et face à la source (figure 50), il apparaît que l'effet de masque apporté par l'écran est assez important et entraîne une réduction du niveau de 15 dB. On observe par ailleurs que l'accord entre la mesure et l'EP3D à la distance de 2 m (figure 52) face à la source est un peu moins bon. On peut expliquer cette différence par le fait que l'approximation petits angles de l'EP n'est pas bien respectée pour cette position.

La figure 53 montre une autre comparaison entre la mesure et le calcul à la fréquence de 10 kHz et pour une distance entre la source et la ligne microphonique de 3 m. On observe que la figure d'interférence mesurée n'est pas parfaitement symétrique par rapport à la position de la source en raison des variations spatiales rapides du champ acoustique à cette fréquence.

D'autres configurations de mesures ont été examinées, en particulier pour la fréquence de 1,2 kHz. Pour ces configurations, l'expérience et le calcul montrent des effets de diffraction négligeables, la longueur d'onde acoustique étant de l'ordre des dimensions caractéristiques de l'écran.

### 11.3.2 - Mesures en soufflerie

Les essais effectués en soufflerie ont pour objet d'analyser les effets combinés du relief et du vent. Les calculs par l'EP3D (chapitre 10) ont montré que la présence du vent peut modifier légèrement la position des interfaces derrière un écran placé parallèlement à l'écoulement.

En présence de la colline on peut attendre des effets plus sensibles dans la mesure où celle-ci peut modifier localement l'écoulement.

Quelques configurations avec l'écran ou la colline, avec et sans vent, sont examinées.

Les résultats que nous présentons sont obtenus en temps réel avec la méthode TDS développée par le CSTB. Les niveaux acoustiques sont représentés en un point en fonction de la fréquence (de 2 à 20 kHz). Les niveaux sont référencés par rapport au champ libre.

Les figures 54-a et 54-b montrent le niveau sans vent, respectivement derrière l'écran et la colline, pour le microphone placé face à la source (voir figure 47). L'écran et la colline apportent une réduction moyenne de l'ordre de 10 dB dans la bande de fréquence de 3 à 20 kHz.

Bien que les dimensions caractéristiques de la colline et de l'écran soient du même ordre, les figures de diffraction sont différentes.

Pour la colline, on observe deux interférences importantes aux fréquences de 4 et 9 kHz ; et avec l'écran, une interférence à 12 kHz.

Pour les mesures avec vent, le profil est de la forme :

$$u(z) = 8 \left( \frac{z}{10} \right)^{0,1} \text{ (en m/s)}$$

La figure 55 montre la différence de niveau entre la mesure sans et avec vent en présence de l'écran pour les points placés à 0,25 m de part et d'autre de l'axe de symétrie (médiatrice de la ligne de microphones). Les courbes sont centrées autour de 0 dB, ce qui indique que l'effet du vent est faible. Il apparaît cependant à 9 kHz une remontée du niveau pour le point situé en aval de l'écoulement (vent portant) et une réduction du niveau pour le point situé en amont (vent contraire).

La figure 56 représente le niveau mesuré en dehors de la zone d'ombre de l'écran par deux microphones situés à 1,5 m de l'axe de symétrie en amont (figure 56-a) et en aval (figure 56-b) de l'écoulement. Les deux courbes identiques en l'absence de l'écoulement, sont différentes avec l'écoulement qui met en évidence la création d'une interférence pour le microphone placé en aval.

Les effets du vent et de la colline sont ensuite analysés. La figure 57 montre la différence de niveau entre les configurations sans et avec vent pour le microphone face à la source. Il apparaît un pic positif à 9 kHz et un pic négatif à 12 kHz qui correspondent respectivement à la disparition et à la création d'une interférence causée par le vent. La figure 58 présente la différence de niveau observée, avec et sans vent, pour deux microphones situés à 0,5 m de part et d'autre de l'axe de symétrie et dans la zone d'ombre de la colline. Le vent, pour cette configuration, modifie sensiblement le schéma d'interférences. Pour le microphone placé en aval (figure 58-a) il apparaît une nette interférence autour de 9 kHz qui n'est pas présente en amont (figure 58-b).

Sur les tracés de la figure 59, les microphones sont situés hors de la zone d'ombre à 1 m de part et d'autre de l'axe de symétrie. Le microphone correspondant à la figure 59-a est situé en aval (vent portant) et le microphone correspondant à la figure 59-b est en amont (vent contraire). On constate, là aussi, que le niveau est peu perturbé par l'écoulement pour le microphone amont, alors qu'il l'est de façon importante (de l'ordre de 10 dB) pour le microphone aval.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA QUATRIÈME PARTIE

[28] R. Pirinchiera

"Model study of the sound propagation behind barriers of finite length"

J. Acoust. Soc. Am. 87 (5), May 1990.

[29] J. Lambourion et S. Lévy

"Réalisation et réception technique d'une chambre sourde à Palaiseau"

RT ONERA N° 21/7249 N, Novembre 1988.

[30] R. C. Heyser

"Acoustical measurements by time delay spectrometry"

J.A.E.S., Volume 15, N° 4, 1967.

[31] G. Barnaud

"Calibration du champ de vitesse et de turbulence du vent en soufflerie atmosphérique dans le cadre d'une étude de la propagation des ondes acoustiques à basse altitude"

Rapport CSTB-EN-ECA 91.13C, Juin 1991.



## CONCLUSION

Nous avons analysé dans ce mémoire la propagation acoustique à basse altitude avec la méthode de l'équation parabolique tridimensionnelle. D'une façon générale, cette méthode permet de prendre en compte les effets du sol combinés avec ceux des gradients de température et de vent qui peuvent varier avec la portée.

La résolution numérique de l'équation parabolique est effectuée en coordonnées cylindriques par un schéma aux différences finies. Cette technique permet, par rapport à la méthode "Split Step Fourier" utilisant les FFT, d'introduire facilement les conditions aux limites du problème. On peut ainsi imposer une condition de Neumann ou mixte pour un sol rigide ou absorbant, et une condition mixte de non réflexion des ondes sur la frontière supérieure du maillage.

Par rapport à l'EP2D, l'EP3D comprend le terme supplémentaire lié à la dépendance du champ acoustique suivant l'azimut qui complique sensiblement sa résolution. Le système matriciel associé à l'EP3D, à résoudre à chaque pas de calcul suivant la portée, est séparé en deux systèmes tridiagonaux par la méthode des directions alternées. Cette technique a permis ainsi de se ramener à la résolution successive de deux EP2D dont les algorithmes sont bien établis.

La prise en compte des conditions aux limites a été analysée. En particulier, une méthode est proposée pour s'affranchir des conditions de non réflexion sur les plans délimitant le secteur angulaire du maillage. La solution consiste à calculer le champ dans tout le domaine en faisant varier l'azimut  $\theta$  de 0 à  $2\pi$  et à imposer parallèlement une condition de périodicité du champ à  $2\pi$  par rapport à la variable  $\theta$ .

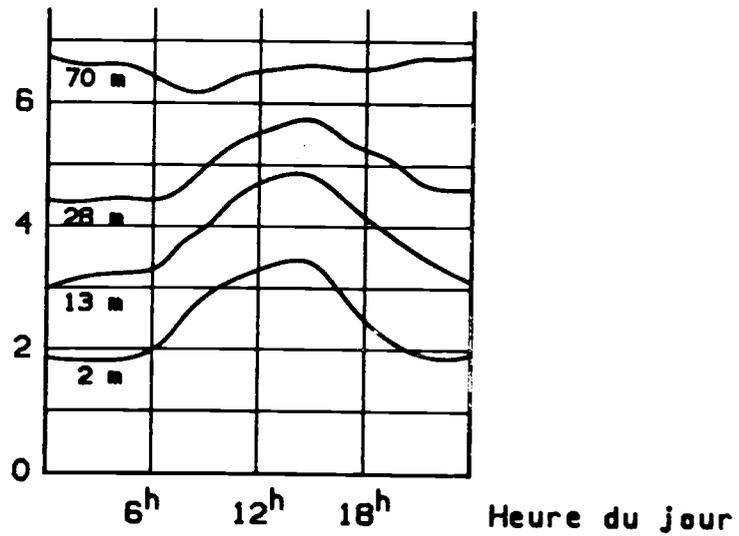
Des calculs en présence d'un écran et d'un vent dont la direction est parallèle à l'écran ont été effectués. La comparaison des calculs 2D et 3D met en évidence des différences sensibles du champ acoustique, notamment dans la zone d'ombre de l'obstacle et autour de celle-ci. Il apparaît de plus que le calcul 3D, qui tient compte de la dépendance azimutale du champ acoustique, permet de retrouver les effets du bord de l'écran.

Une expérience de diffraction acoustique avec différents obstacles a été effectuée (écran, parallélépipède, colline) dans la chambre anéchoïque de l'ONERA à Palaiseau. Les résultats expérimentaux et numériques sont en bon accord et permettent de valider le schéma numérique proposé pour l'EP3D. Une expérience en soufflerie permet de mesurer les effets combinés d'obstacles et du vent sur la propagation près du sol.





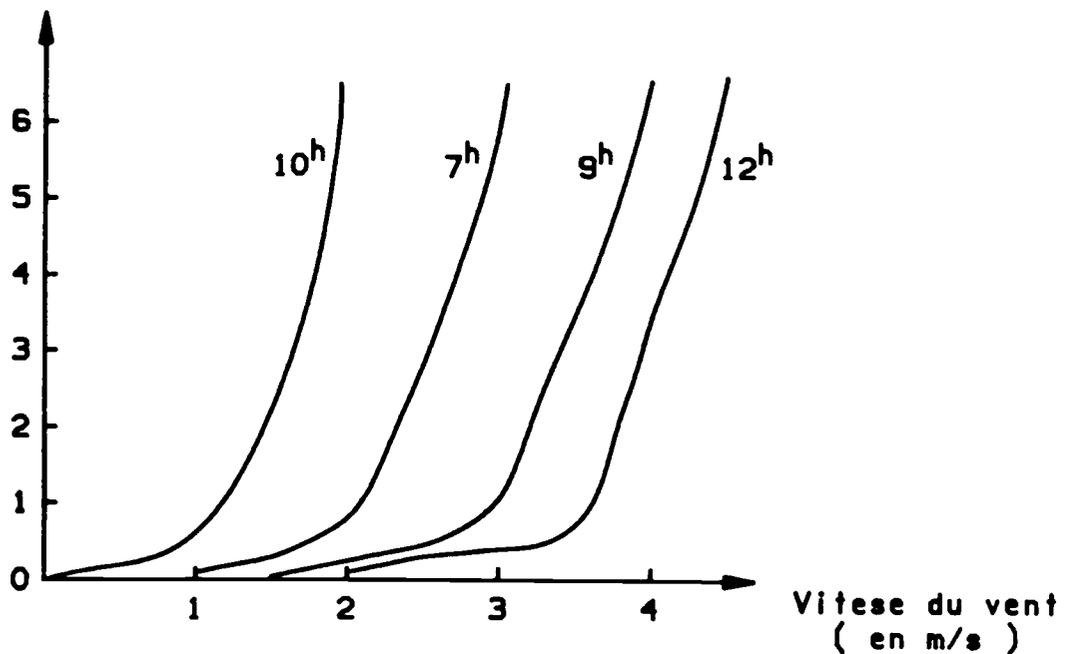
Vitesse du vent  
( en m/s )



Variations de la vitesse du vent au  
cours d'une journée

Extrait de la référence [10]

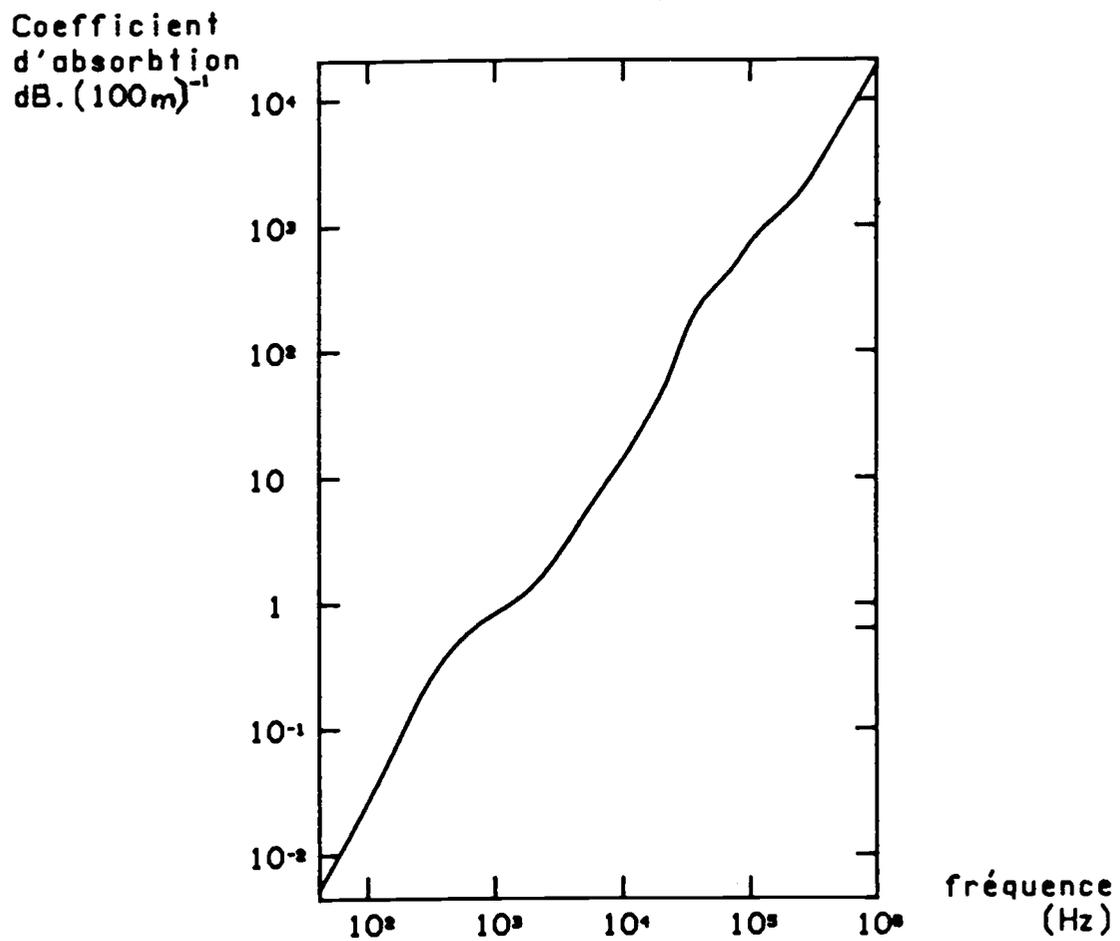
Altitude  
( en m )



**Figure 2**

Profils du vent en fonction de l'heure du jour

Inspirée de la référence [10] (page 28)

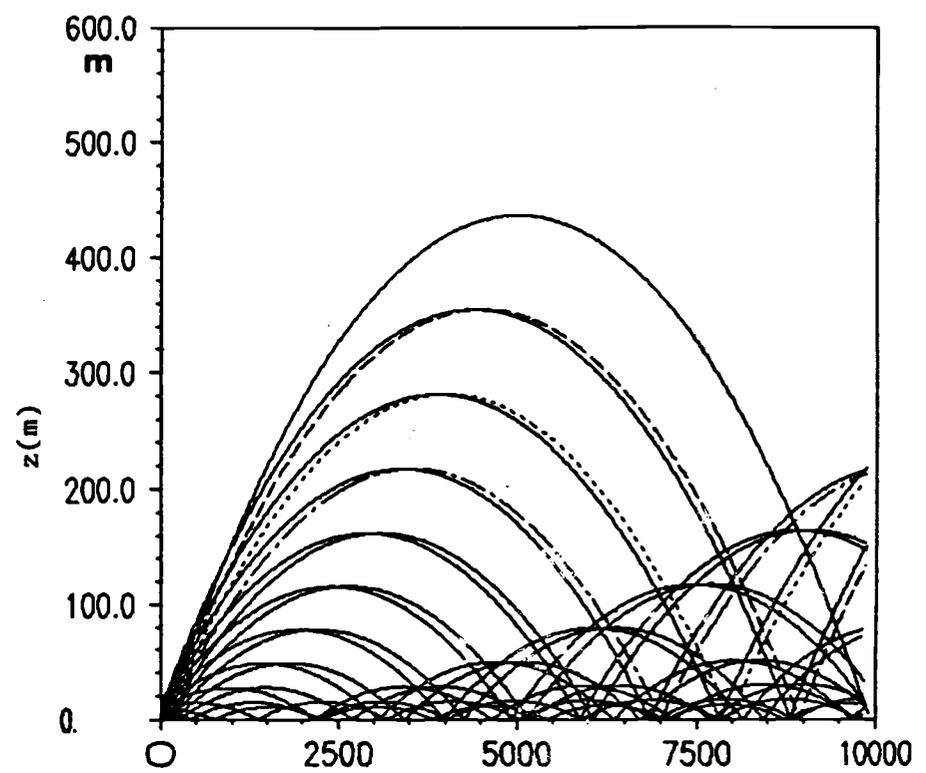


**Figure 3**

**Absorption atmosphérique en dB/100 m à 20°C, 1 atmosphère et  
pour une humidité relative de 70 %  
Extrait de la référence [14] (page 28)**



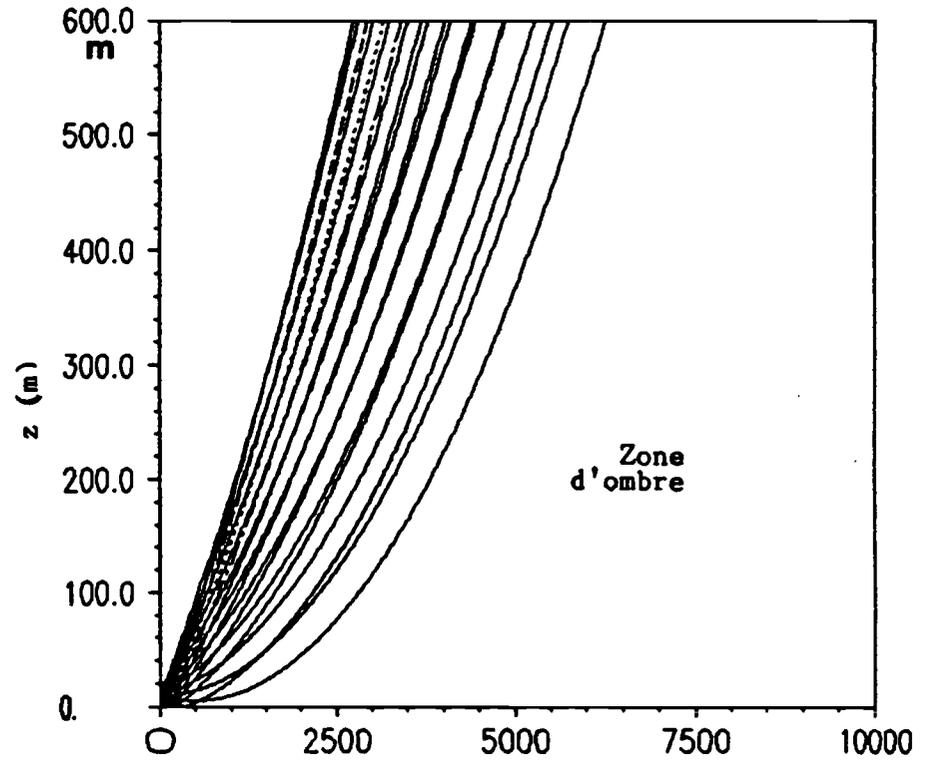
a)  $c$  (m/s)



$r$  (m)



b)  $c$  (m/s)

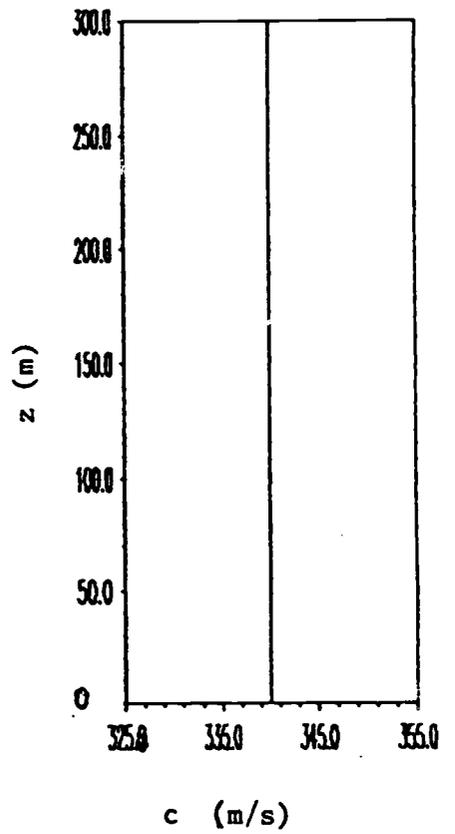
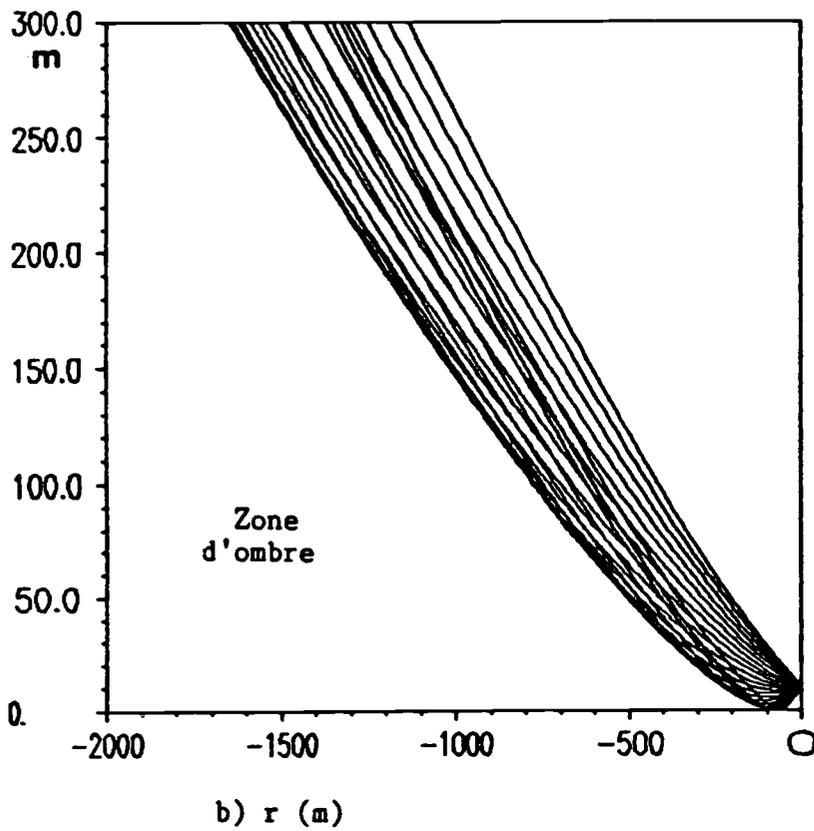
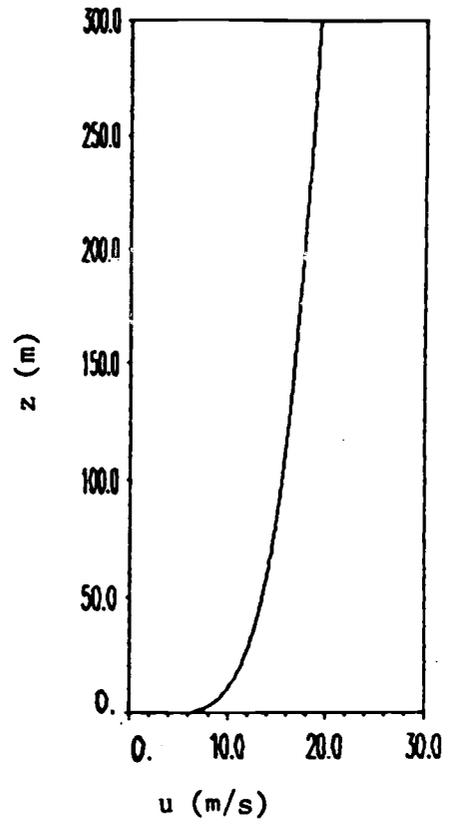
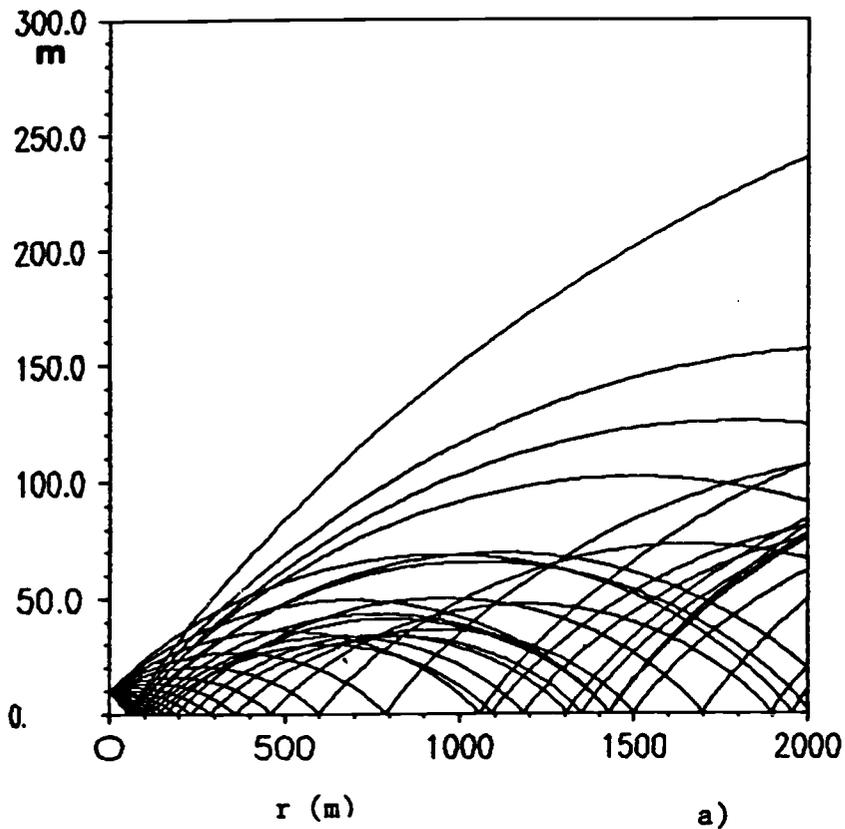


$r$  (m)

**Figure 4**

Tracés de rayons avec gradients de célérité positif (a) et négatif (b)

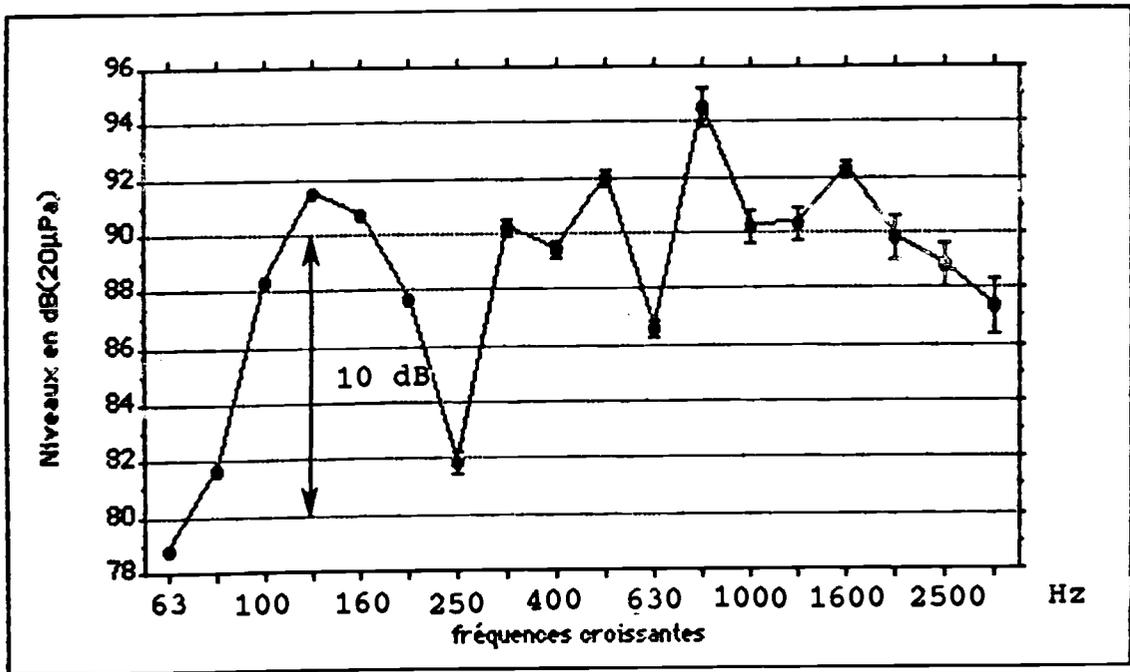
Source à 10 m du sol - Site initial -  $10^\circ$  - Incrément +  $2^\circ$



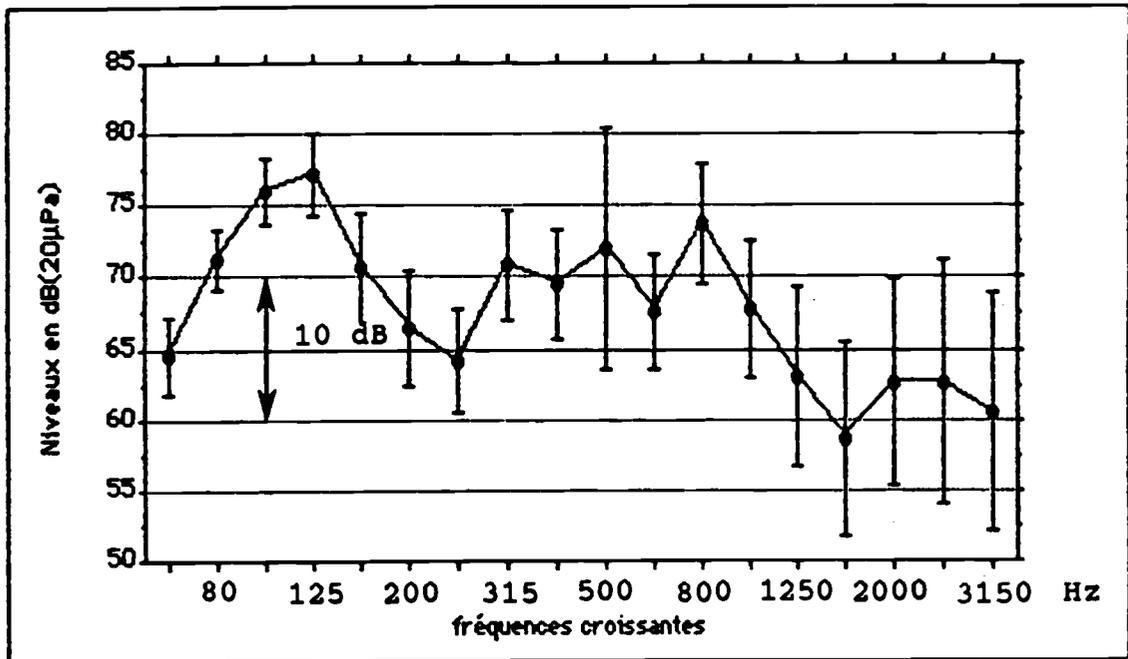
**Figure 5**

Tracés de rayons avec vent de la forme :

$$u = v_{10} (z/10)^{0,2} ; v_{10} = 10 \text{ m/s}$$



microphone à 30 m

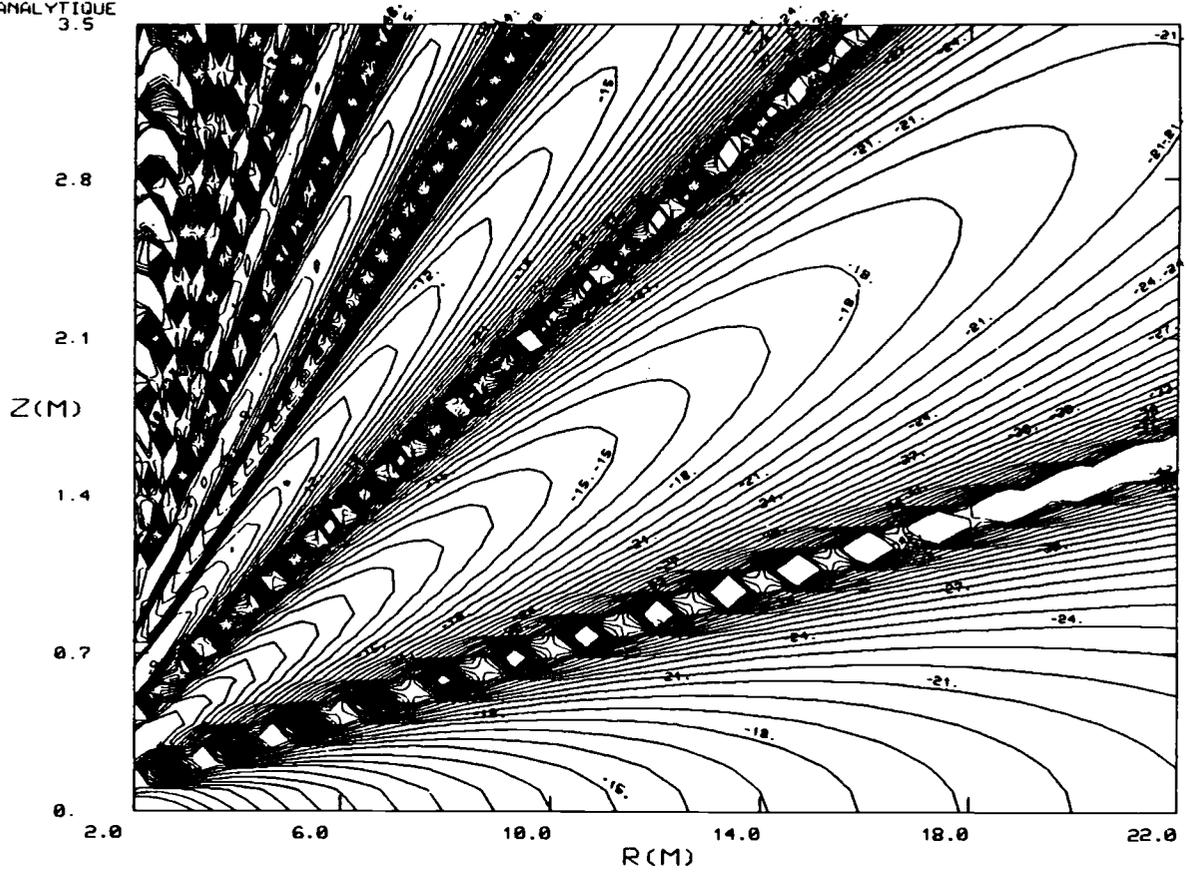


microphone à 100 m

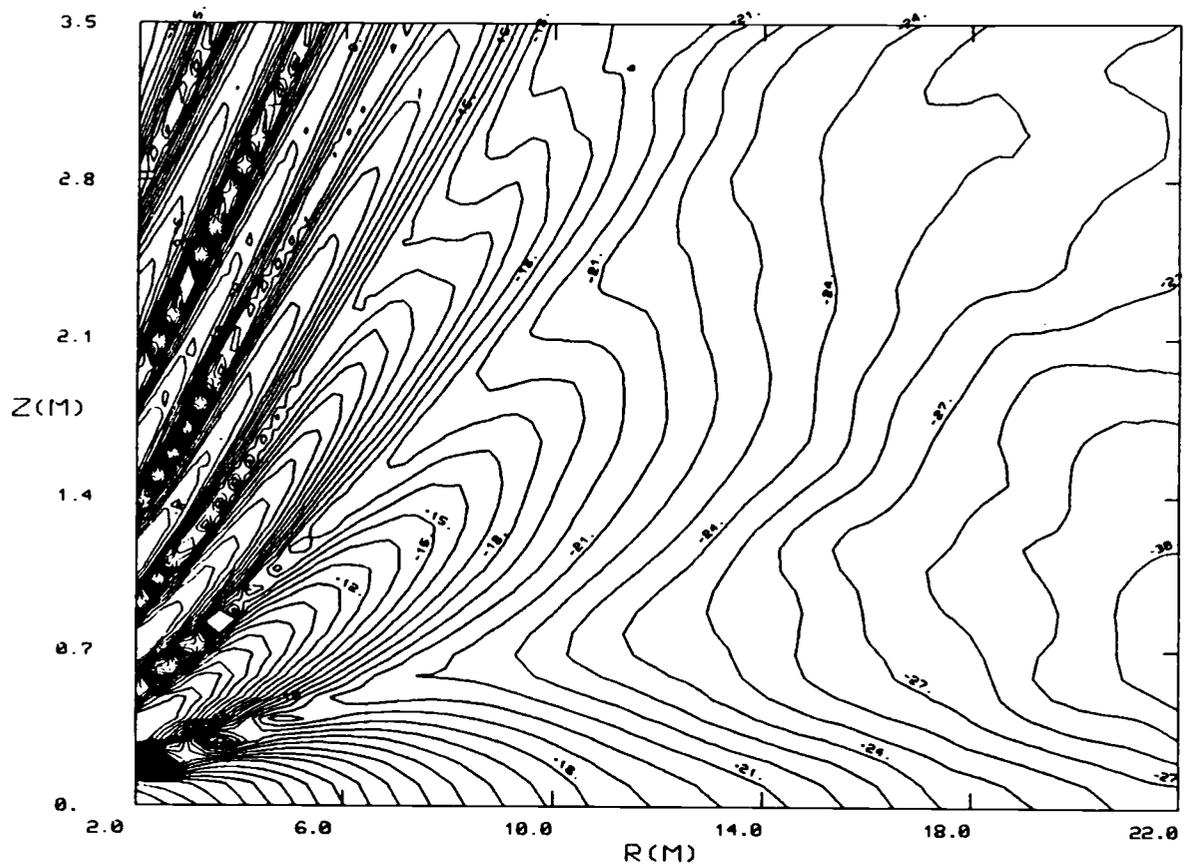
**Figure 6**

**Niveau moyen et écart-type pour tous les essais  
classés par ordre de fréquences croissantes**

SOL RIGIDE  
ANALYTIQUE  
3.5



SOL RIGIDE

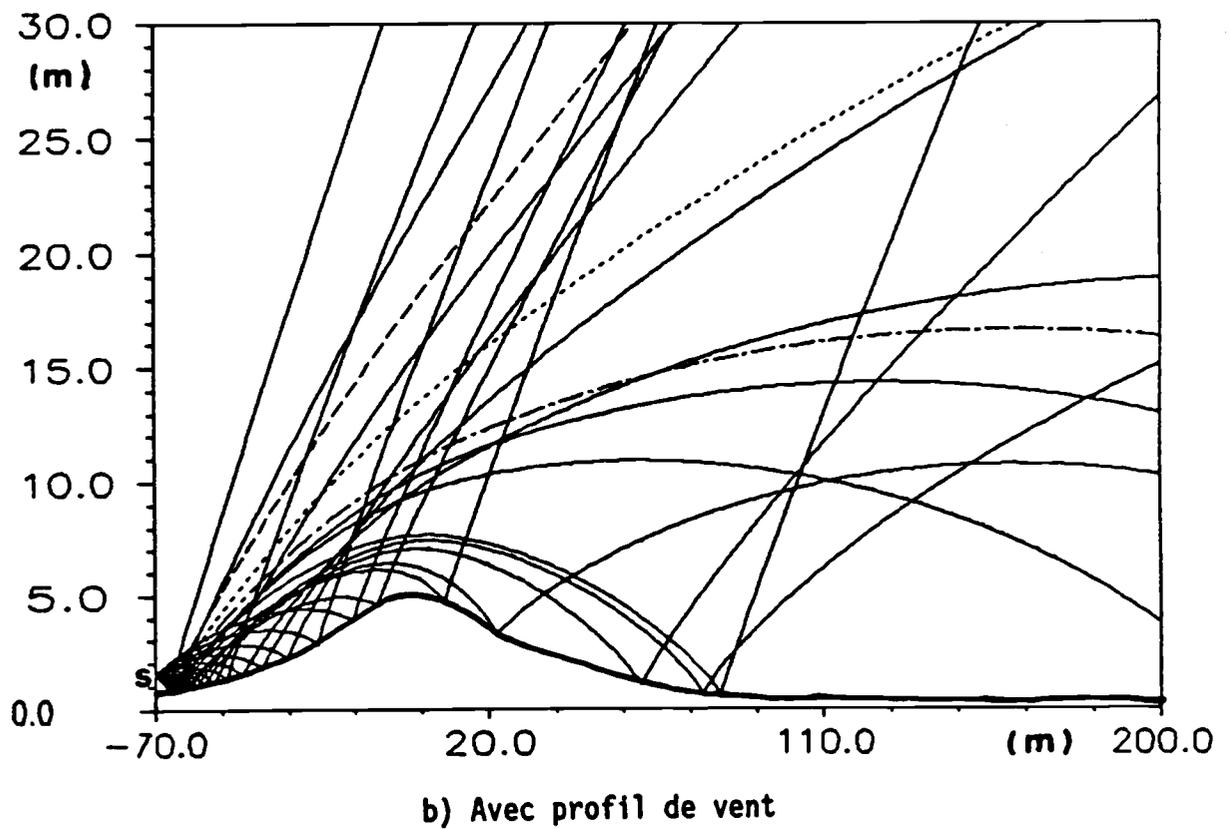
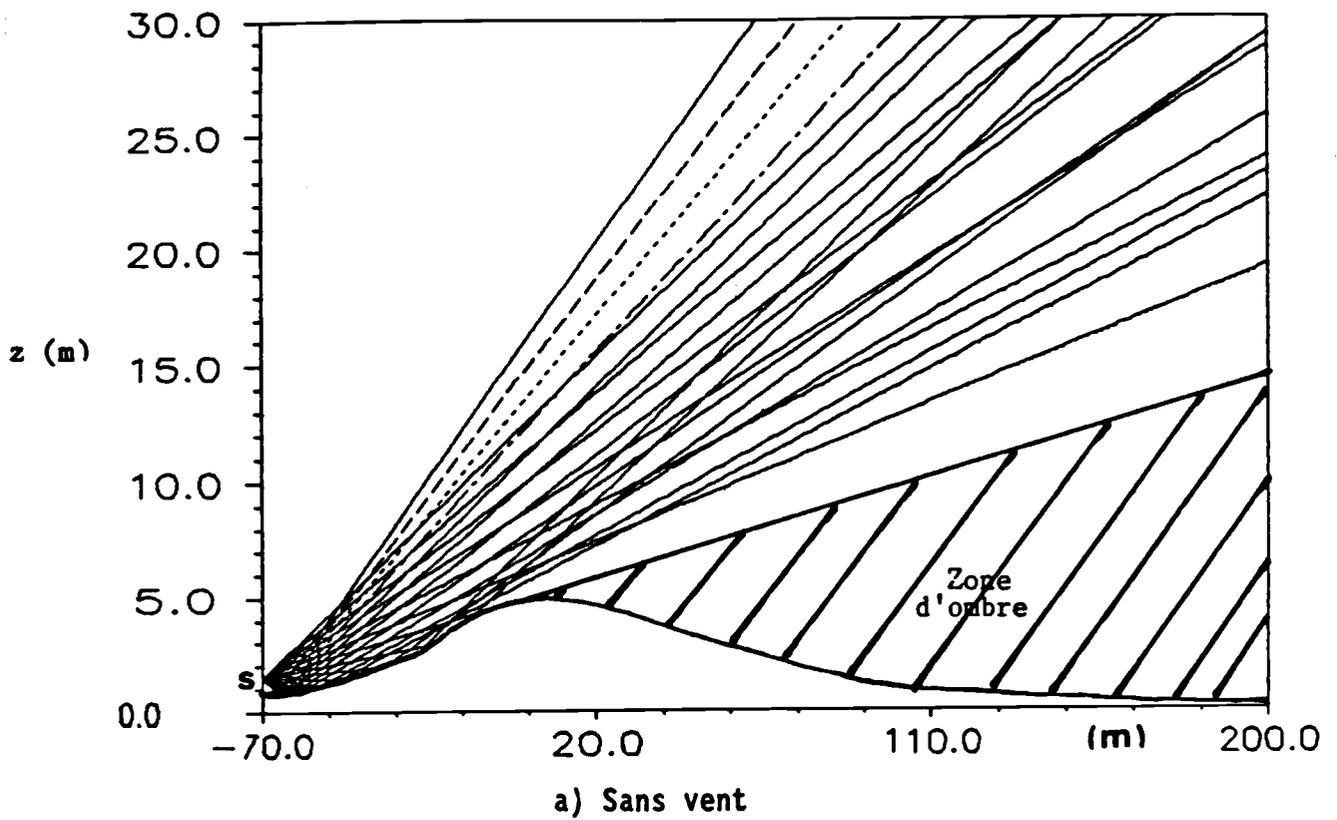


**Figure 7**

**Effet de la turbulence sur la propagation**

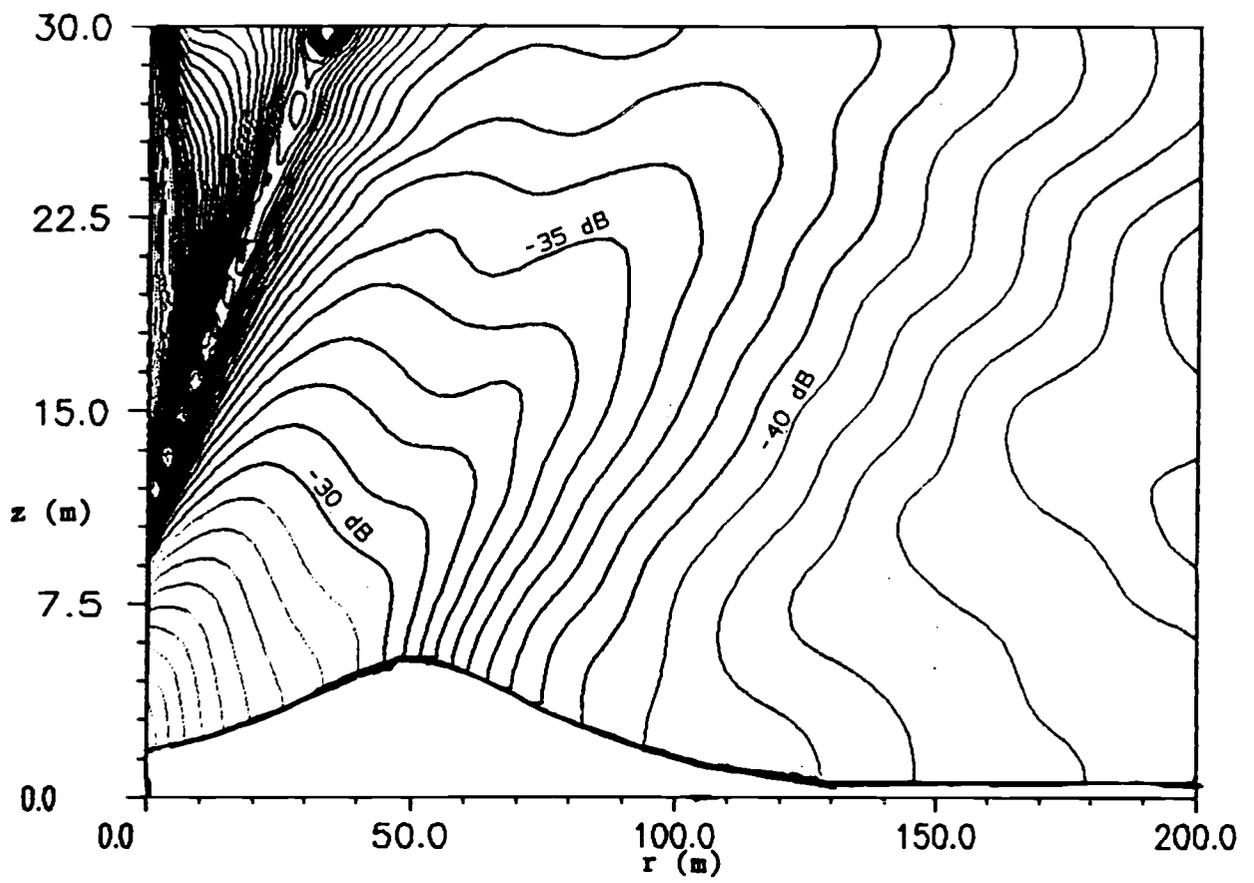
**a) Solution analytique en milieu homogène**

**b) Calcul parabolique avec turbulence cinématique  
Fréquence 1 kHz**

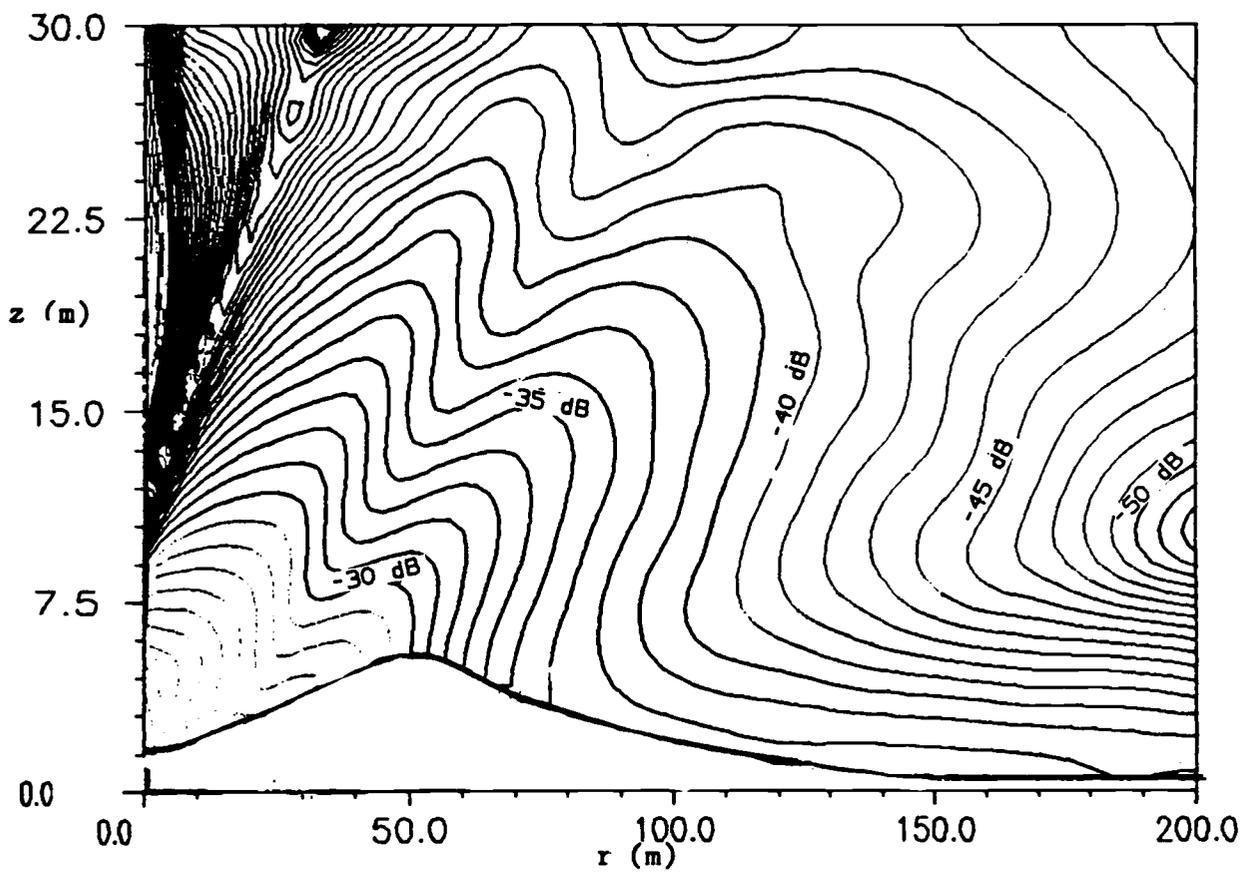


**Figure 8**

Tracés de rayons au-dessus d'une colline d'équation :  $z_{\text{sol}} = \frac{5}{1 + (r/30)^2}$



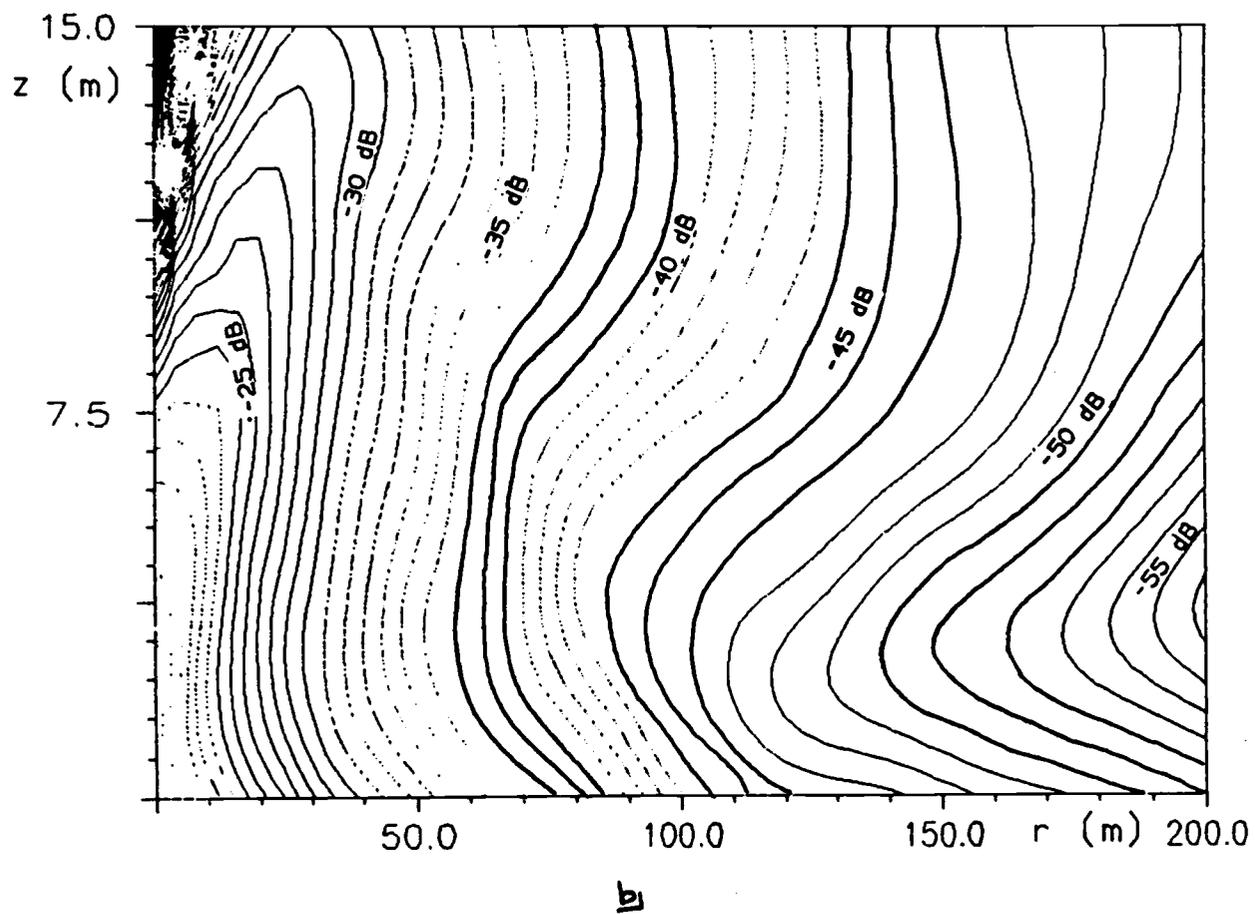
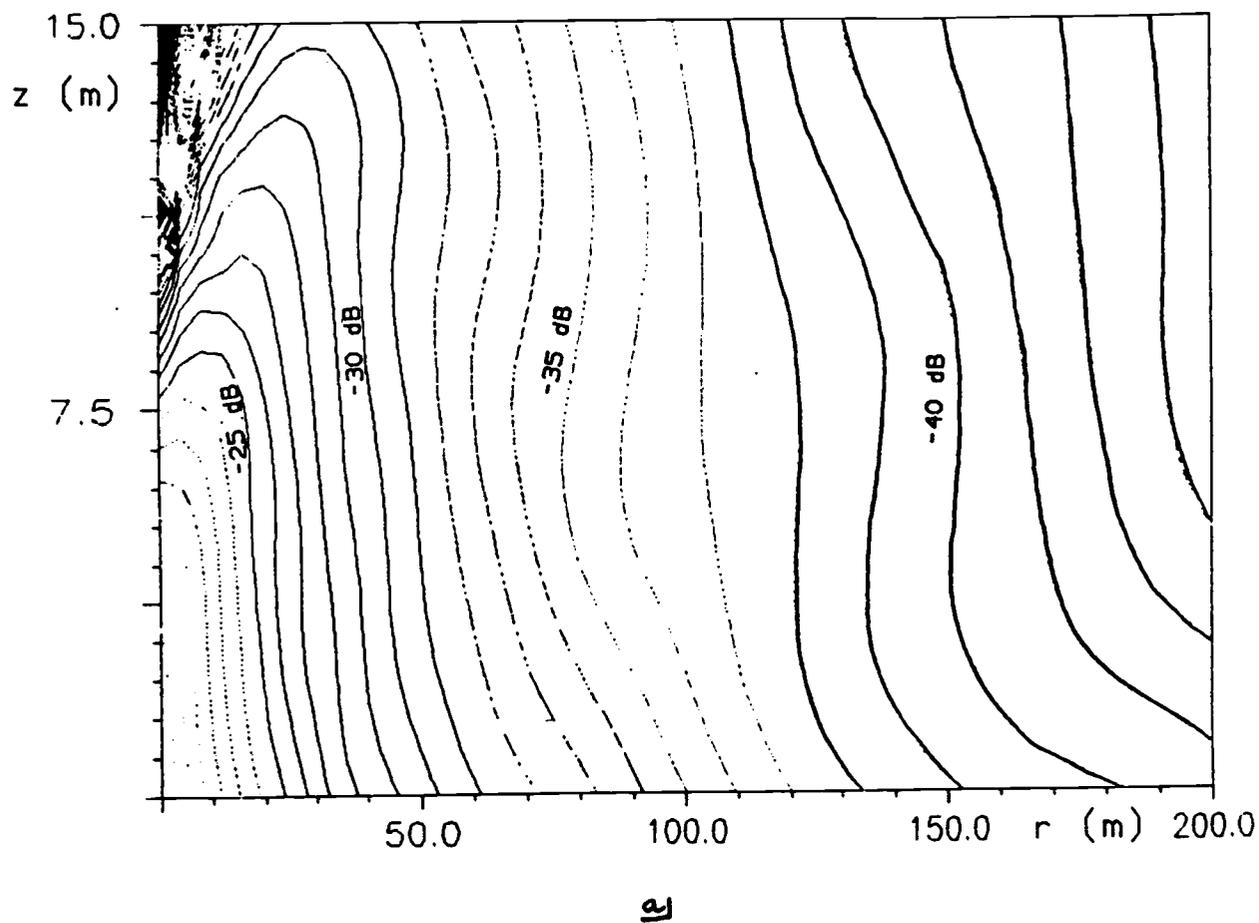
a)  $u(r,z) = 0$



b)  $u(r,z) \neq 0$

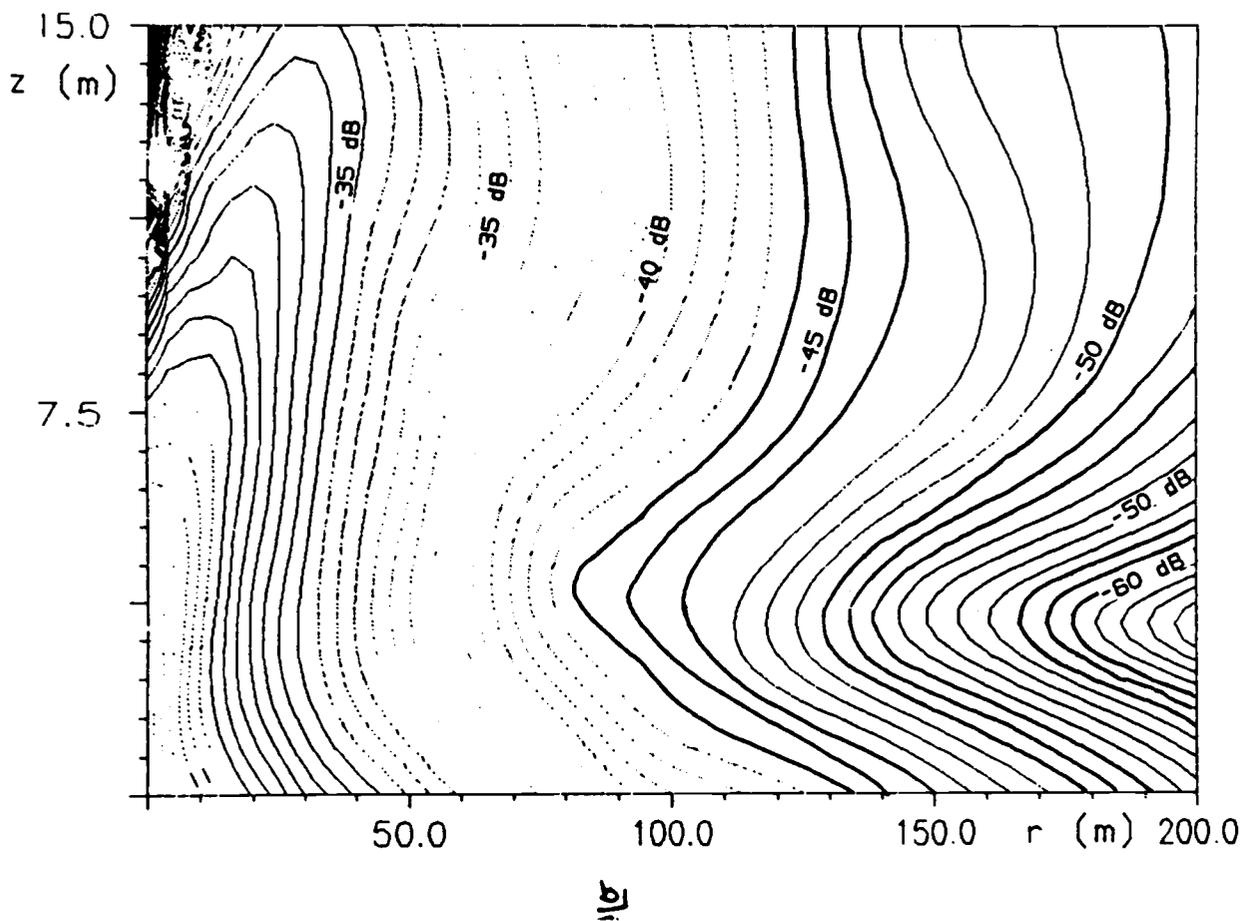
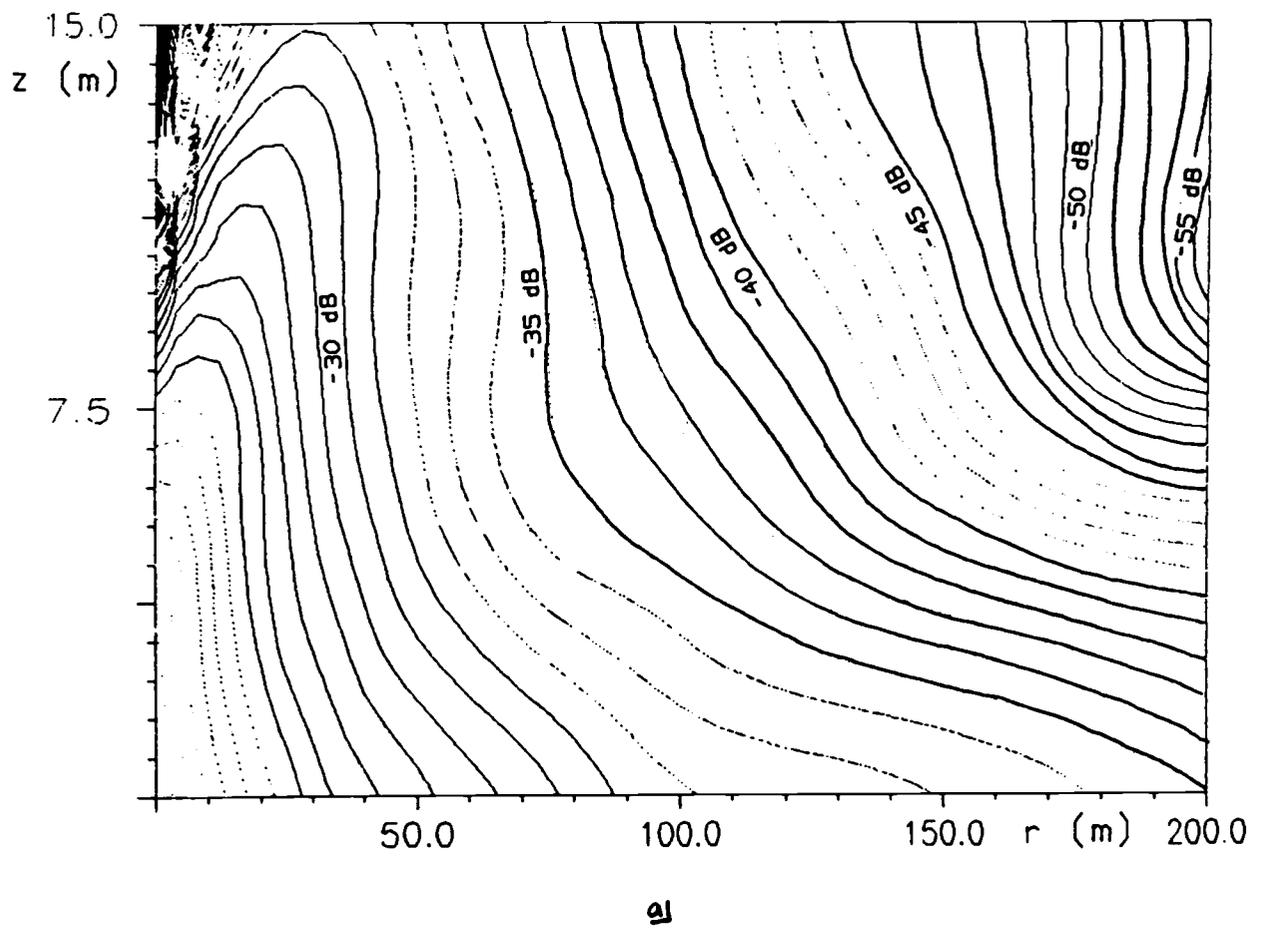
**Figure 9**

**Propagation au-dessus d'une colline**  
**Méthode de l'équation parabolique**  
**Source:  $r_s = -20$  m ;  $z_s = 1,5$  m**  
**Fréquence: 100 Hz**



**Figure 10**

**Méthode de l'équation parabolique**  
**Propagation avec sol absorbant**  
**a) Pelouse b) Neige**

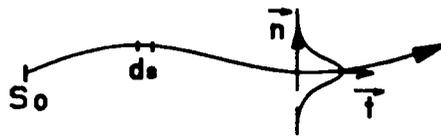


**Figure 11**

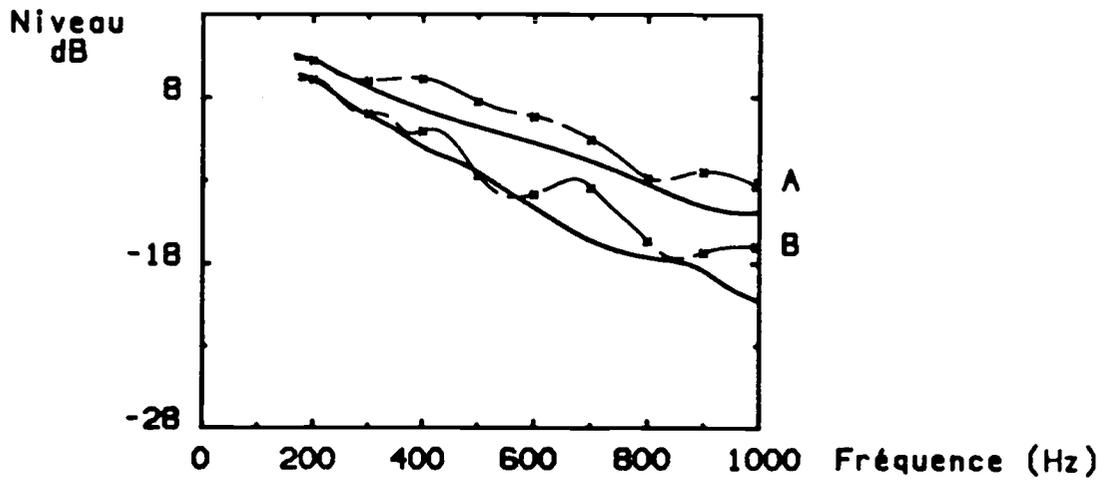
**Méthode de l'équation parabolique  
 Propagation avec sol absorbant et vent**

$$V = 10 (z/10)^{0,2}$$

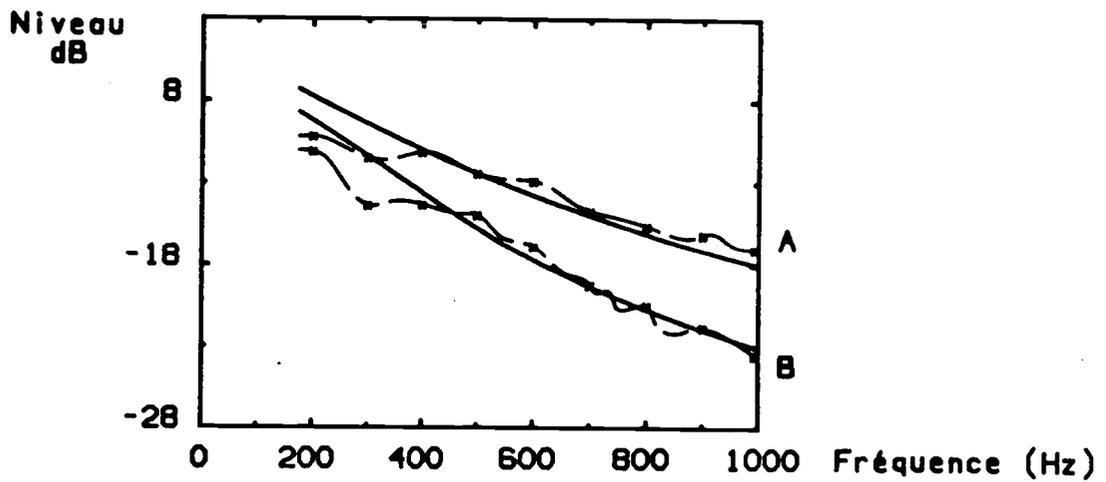
**a) Pelouse b) Neige**



a) Système de coordonnées curvilignes



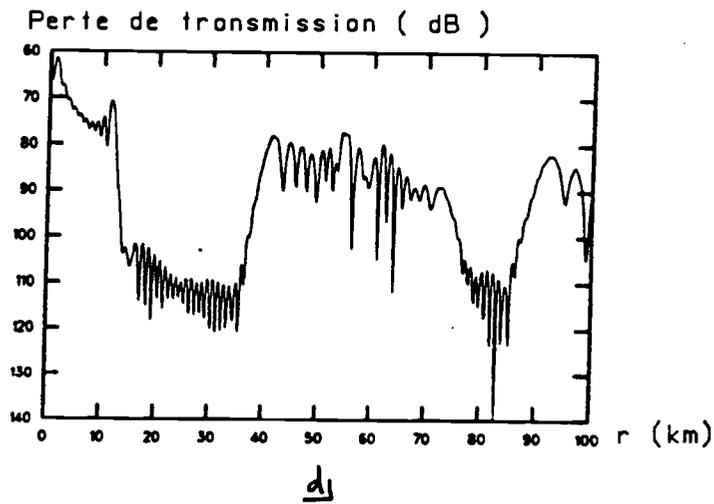
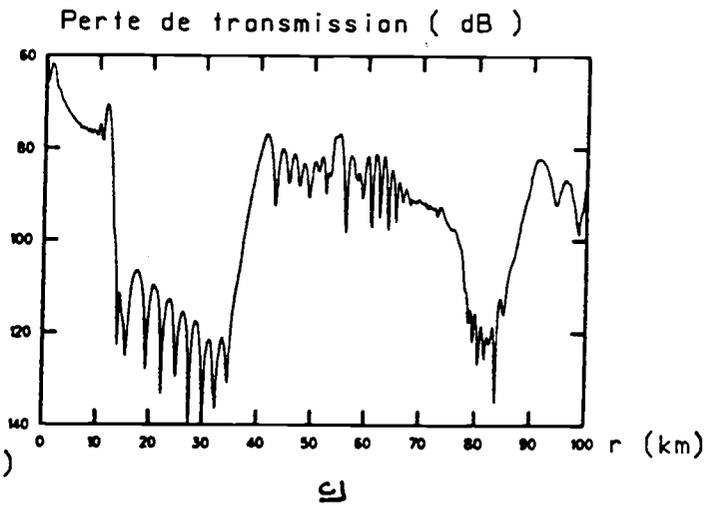
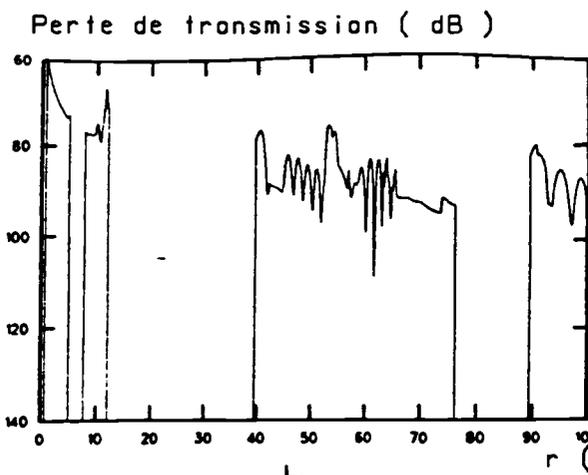
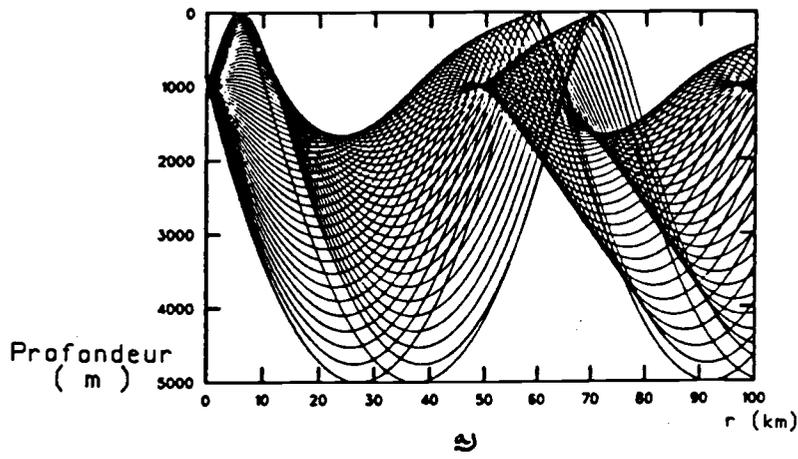
b)  $V = -5 \text{ m/s}$



c)  $V = -10 \text{ m/s}$

**Figure 12**

b) et c) Comparaison des résultats obtenus par la méthode  
des faisceaux gaussiens et des mesures  
hauteur de la source : 1 m  
hauteur du récepteur : 1 m  
A distance de propagation : 80 m  
B distance de propagation : 100 m  
d'après la référence [22] (page 29)



**Figure 13**

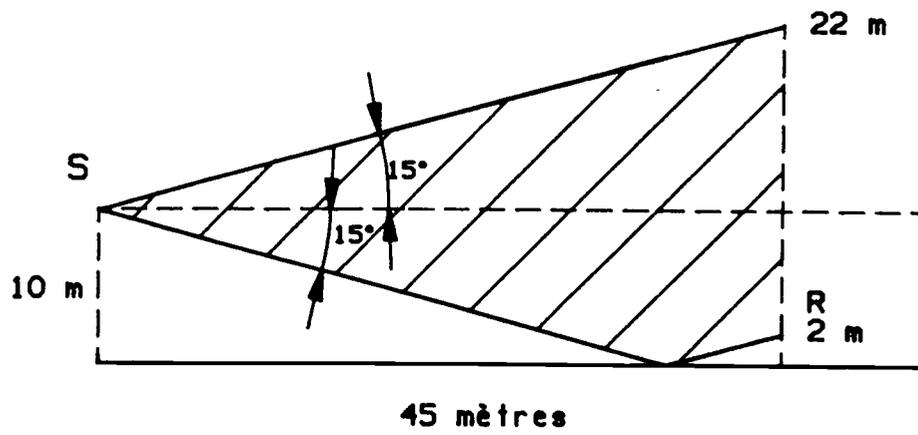
**Comparaison des résultats de différentes méthodes**

**b) Rayons classiques**

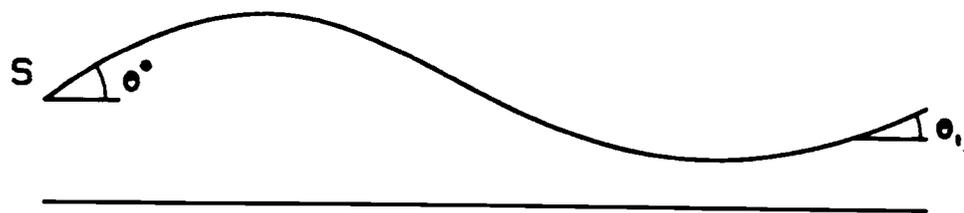
**c) Faisceaux gaussiens**

**d) Modes normaux**

**Récepteur et source à 1000 mètres de profondeur.  $f = 50$  Hz.**



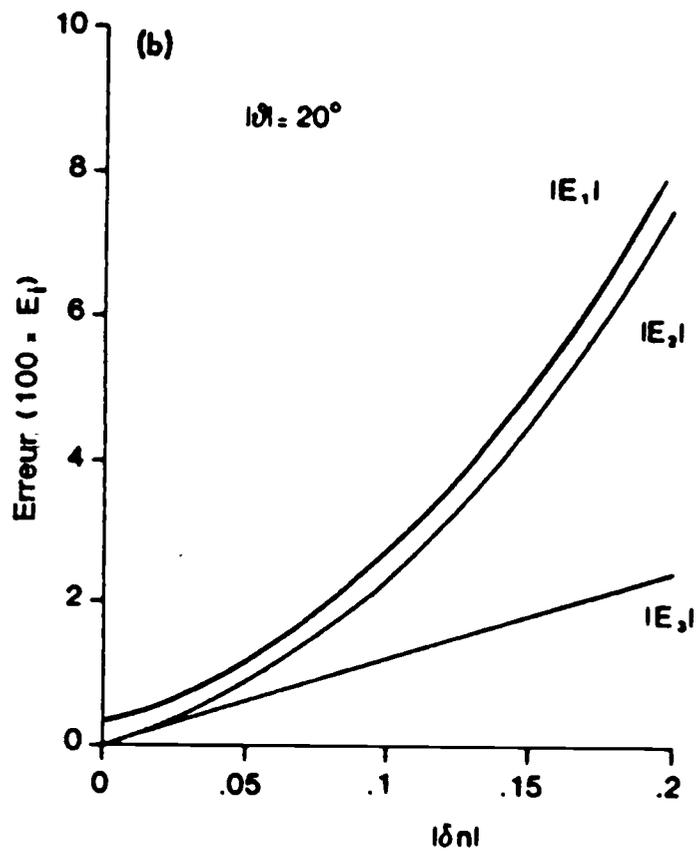
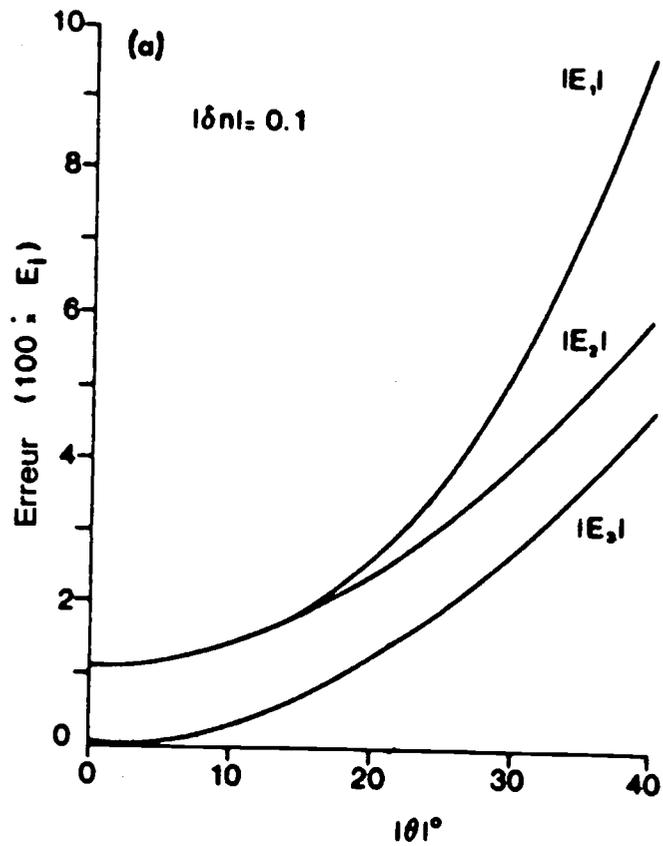
a)



b)

**Figure 14**

**Interprétation géométrique de l'approximation parabolique**



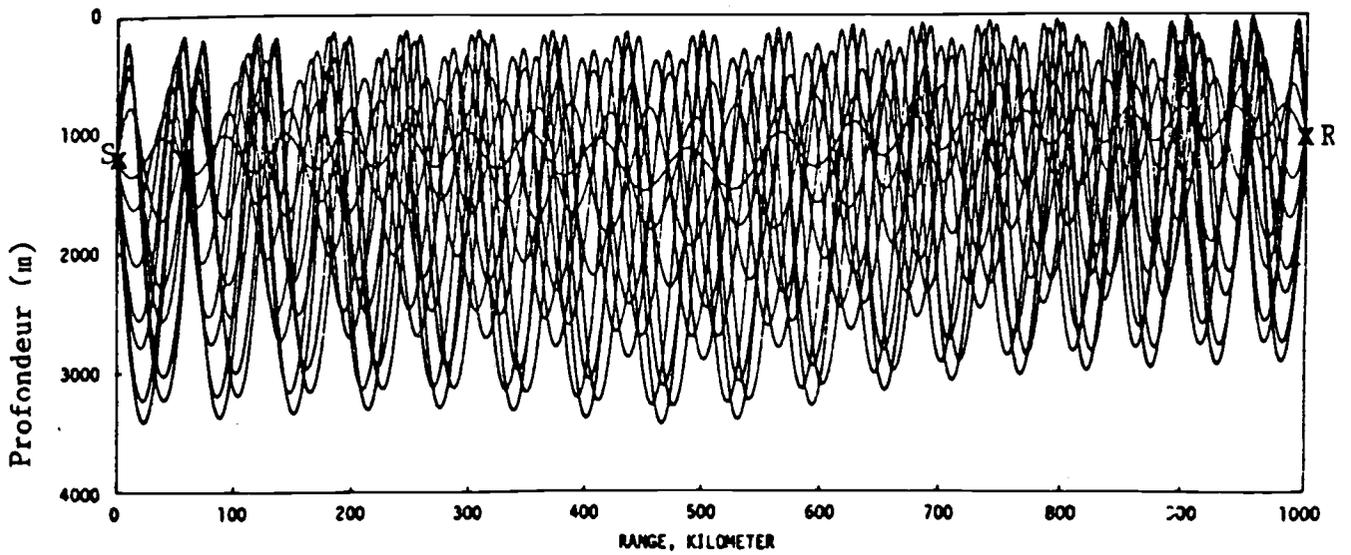
**Figure 15**

**Estimation des erreurs introduites par les différents développements de l'opérateur Q**

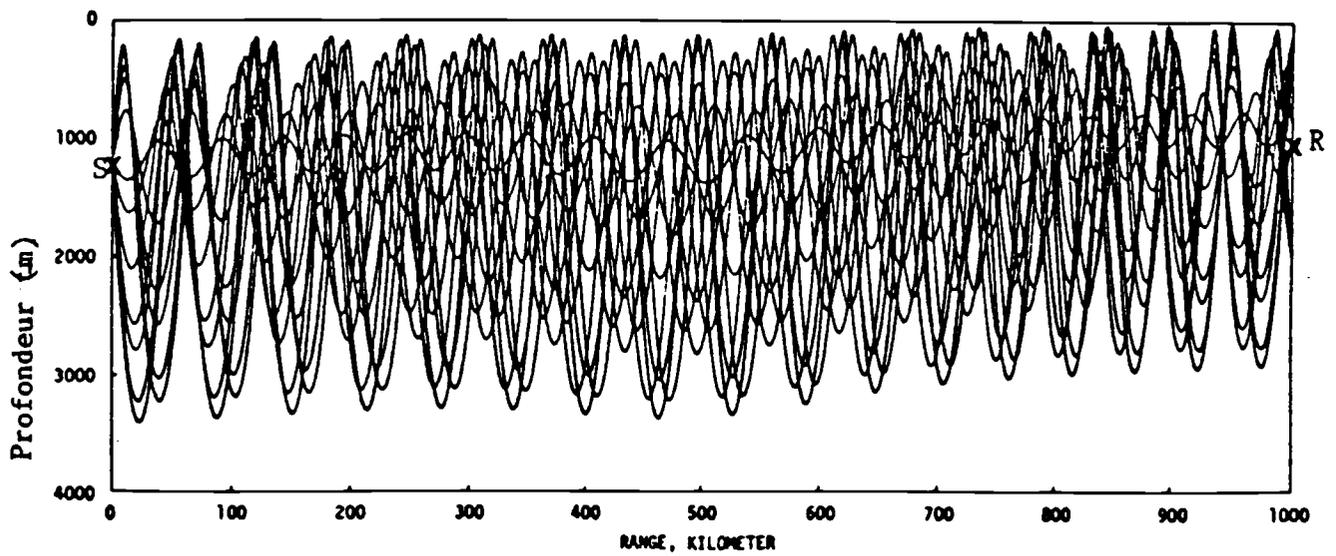
**E1 = Erreur associée à l'équation parabolique standard**

**E2 = Erreur associée au développement proposé par Tappert**

**E3 = Erreur associée au développement proposé par Thomson et Chapman**



**a) Rayons propres avec perturbation centrée sur l'axe émetteur-récepteur**



**b) Rayons avec perturbation décentrée de 60 km latéralement**

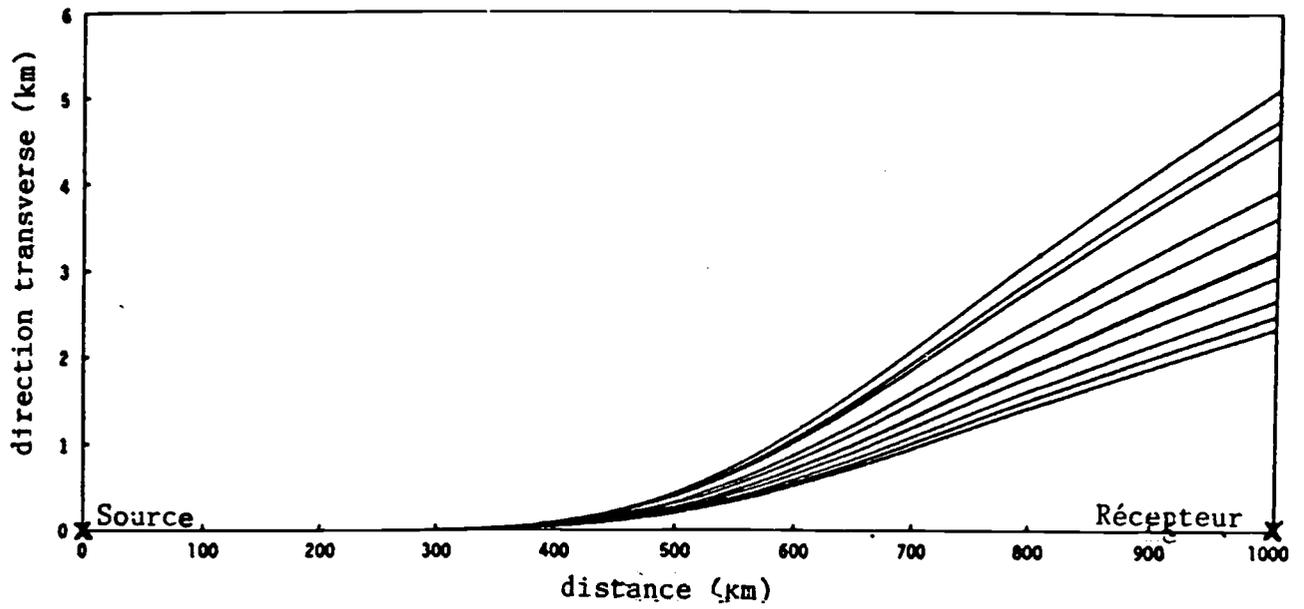
**Profondeur de la source : 1200 m**

**Profondeur du récepteur : 1000 m**

**Centre de la perturbation :  $r = 500$  km**

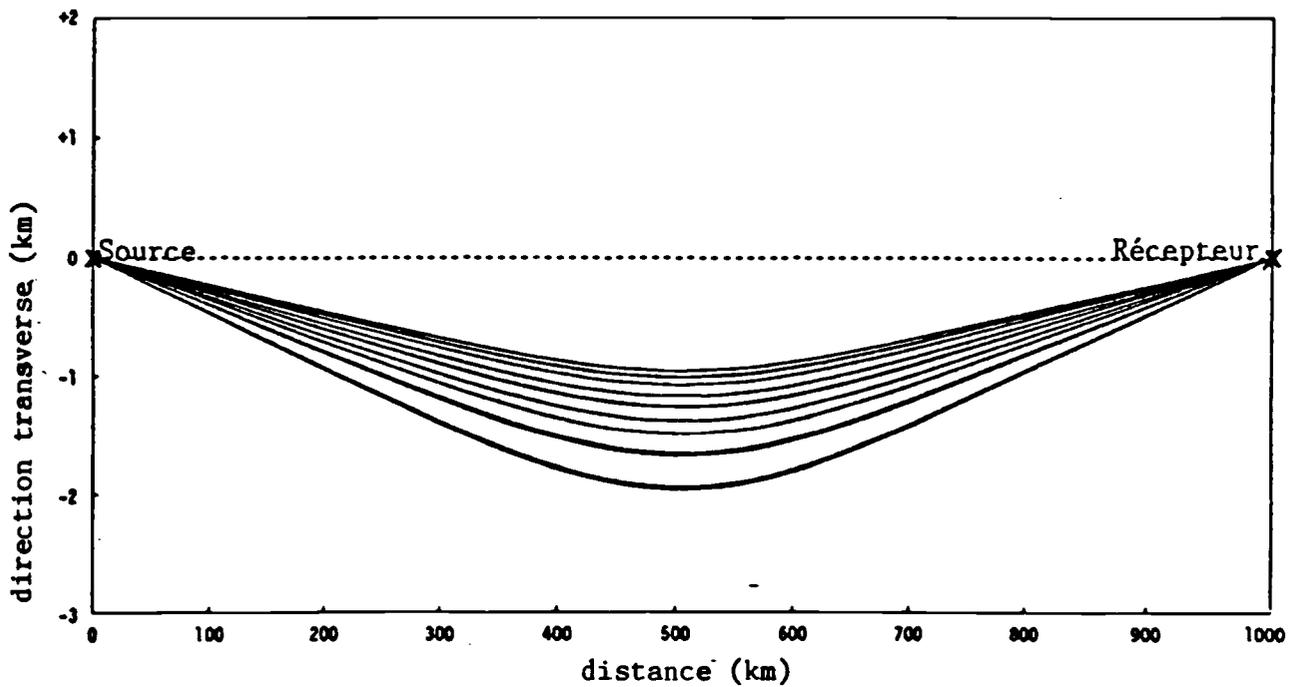
**$z = 800$  m**

**Figure 16**



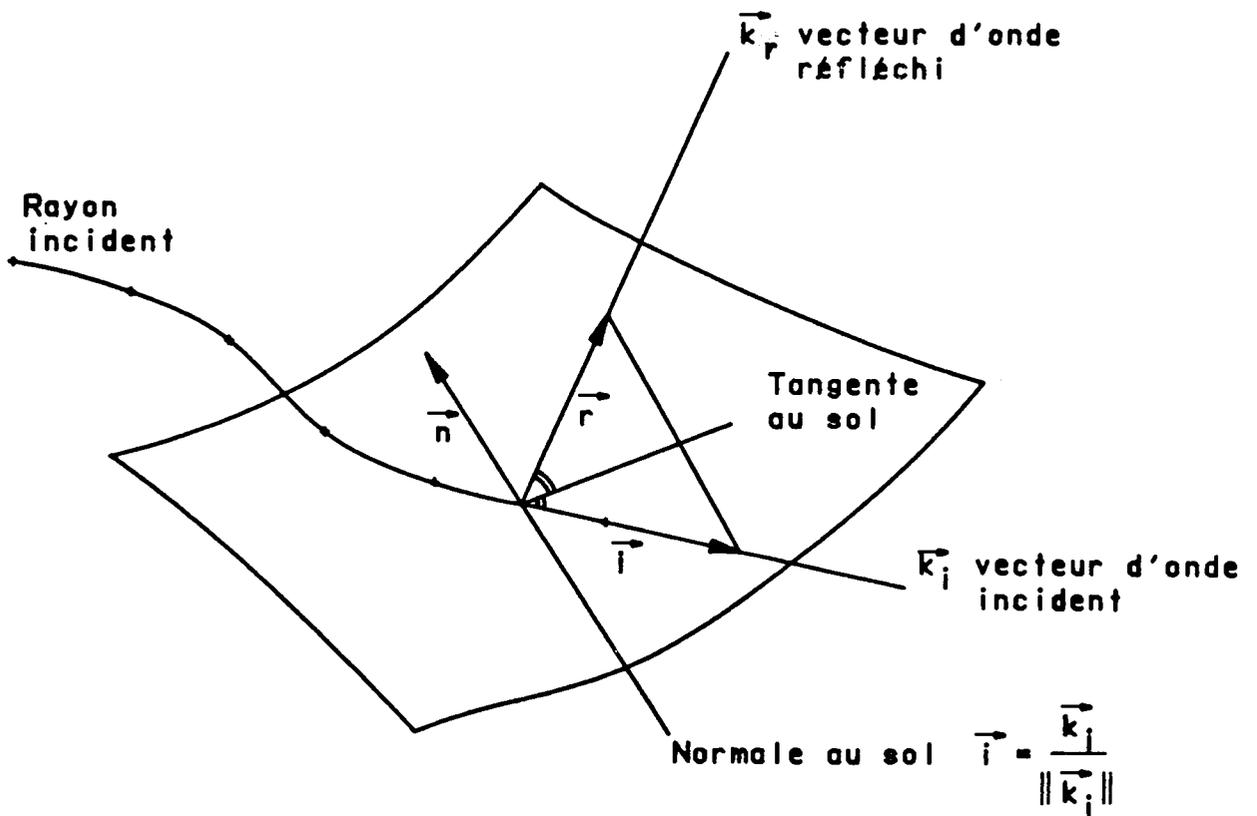
a) Rayons dans le plan  $(r, y)$

Configuration de la figure [16b]



b) Rayons propres correspondant à la configuration décentrée

**Figure 17**



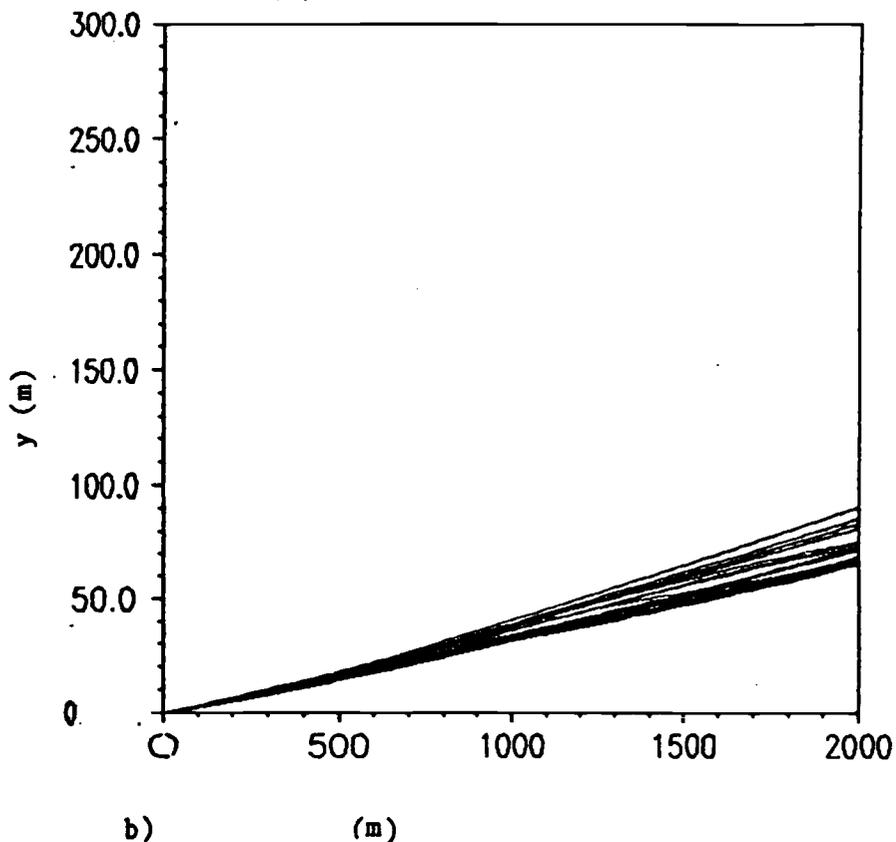
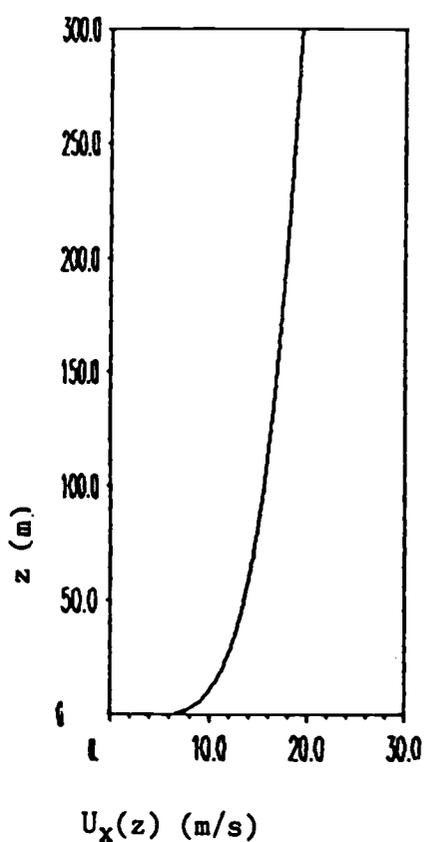
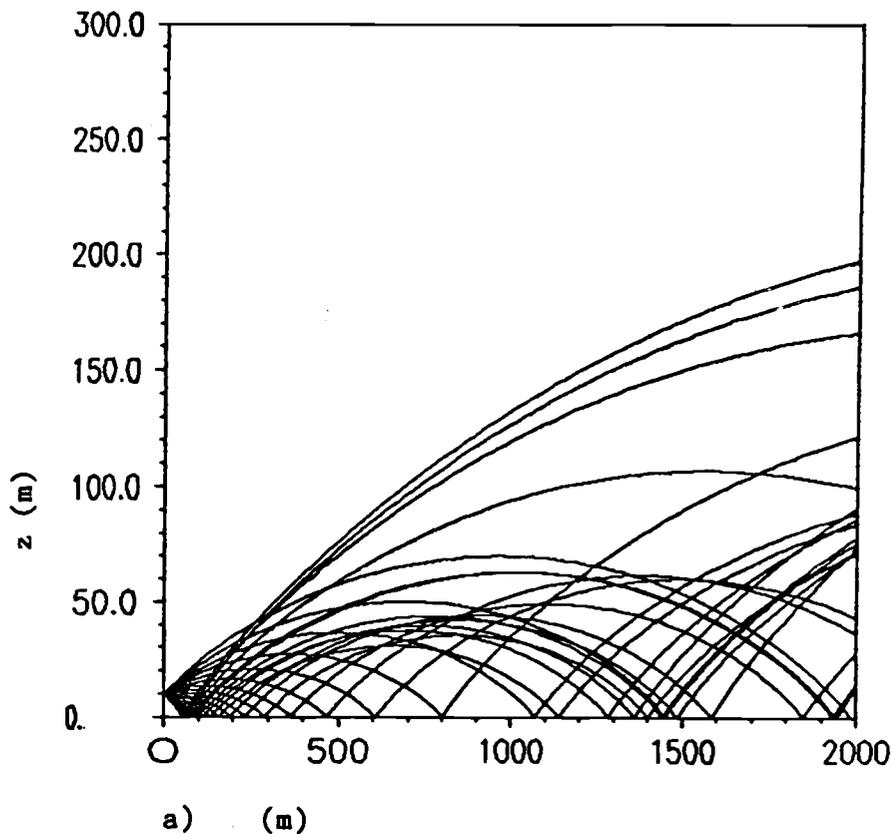
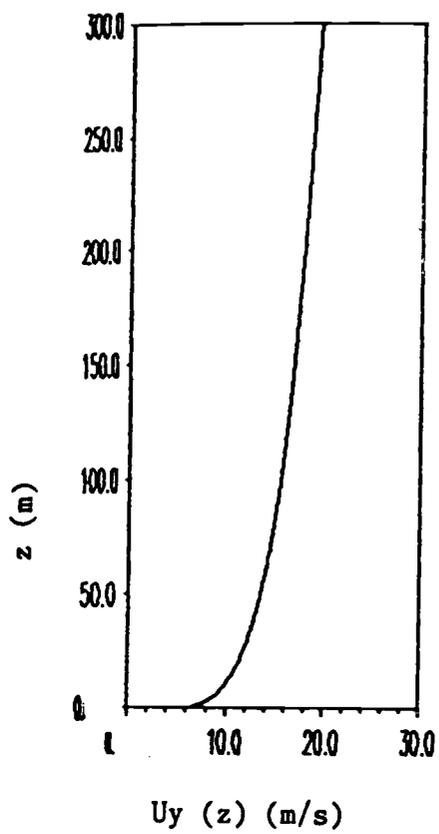
Le vecteur unitaire qui porte  $\vec{k}_i$ , est défini par la loi de réflexion totale :

$$\vec{r} = \vec{i} - 2 [\vec{i} \cdot \vec{n}] \vec{n}$$

Le vecteur  $\vec{k}_r$  est défini par sa direction  $\vec{u}$  et son module qui est fourni par l'équation des caractéristiques

**Figure 18**

**Modélisation de la réflexion d'un rayon sonore sur un sol non plan**

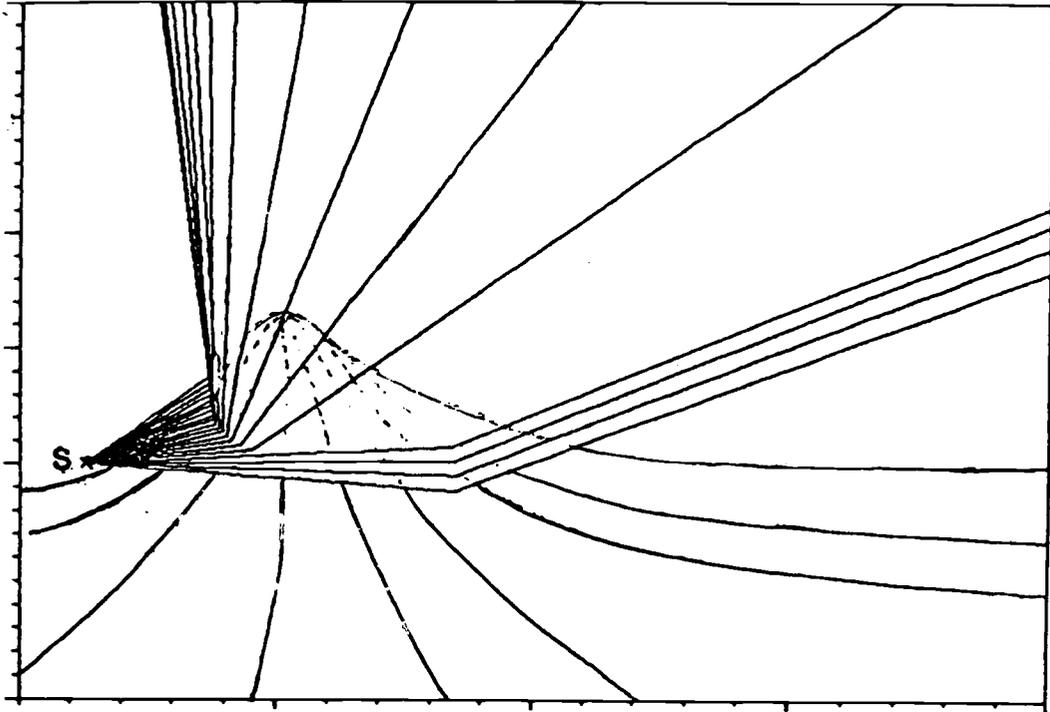


**Figure 19**

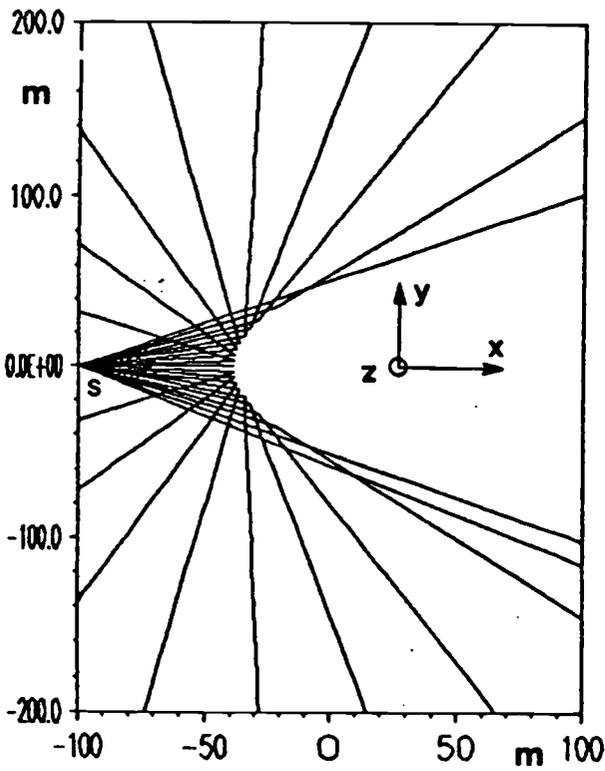
**Tracés de rayons en présence de vent transverse**

a) dans le plan  $(O, z)$

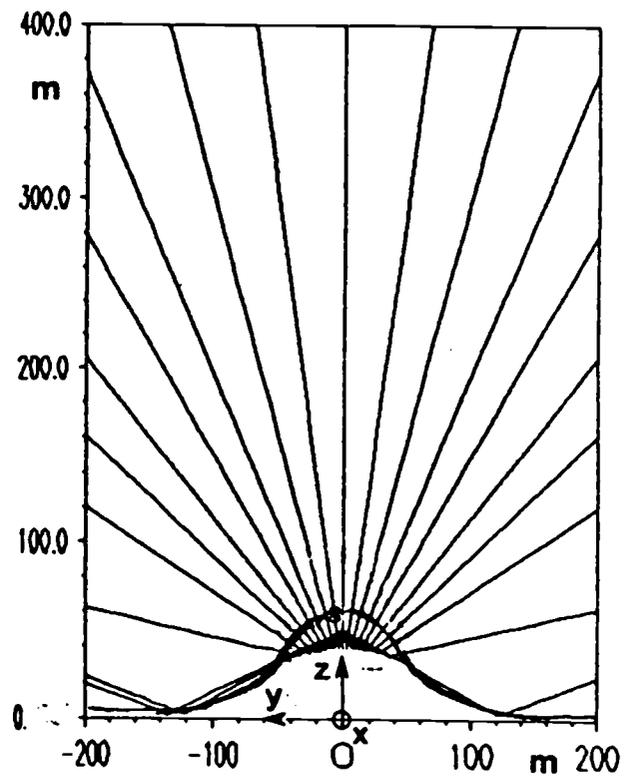
b) dans le plan  $(O, y)$



a) Vue en perspective

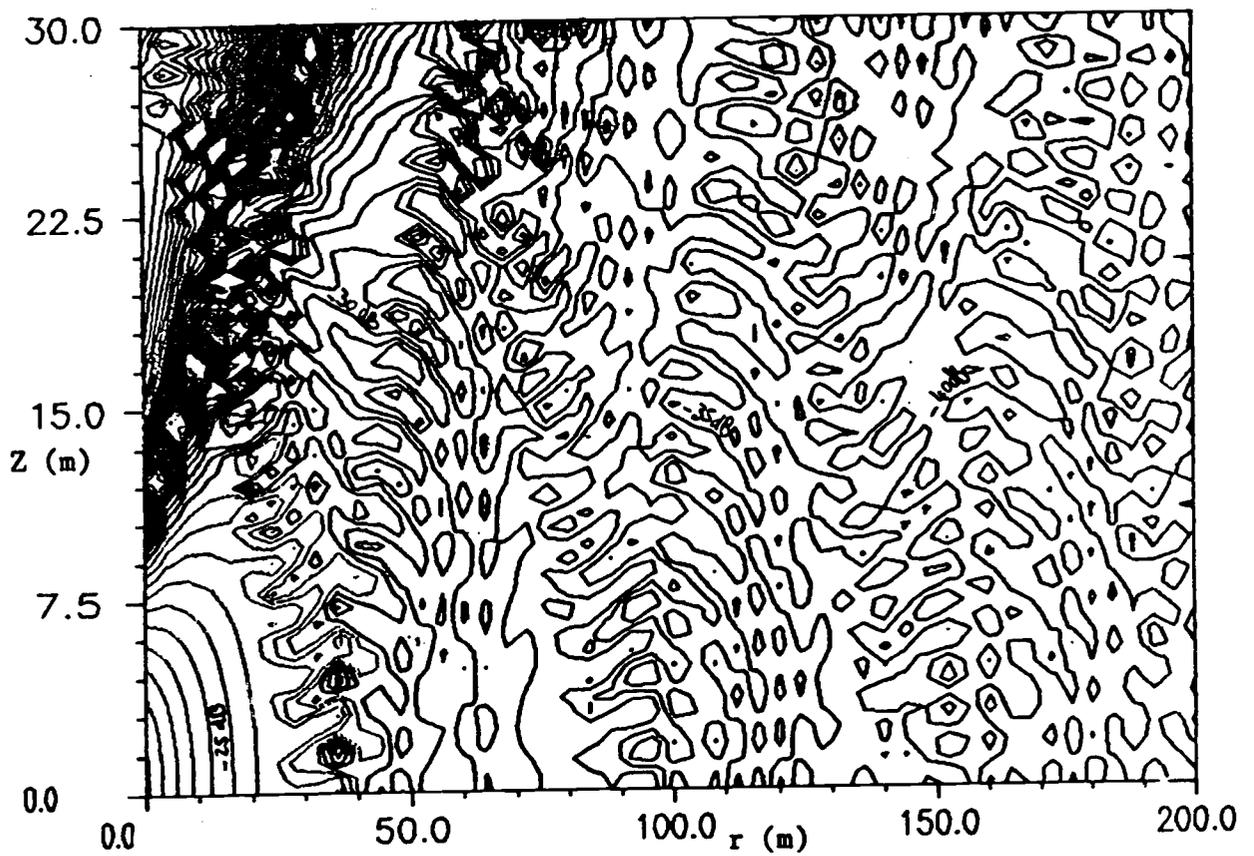


b) Projection dans le plan horizontal (O, x, y)



c) Projection dans le plan vertical (O, x, y)

Figure 20



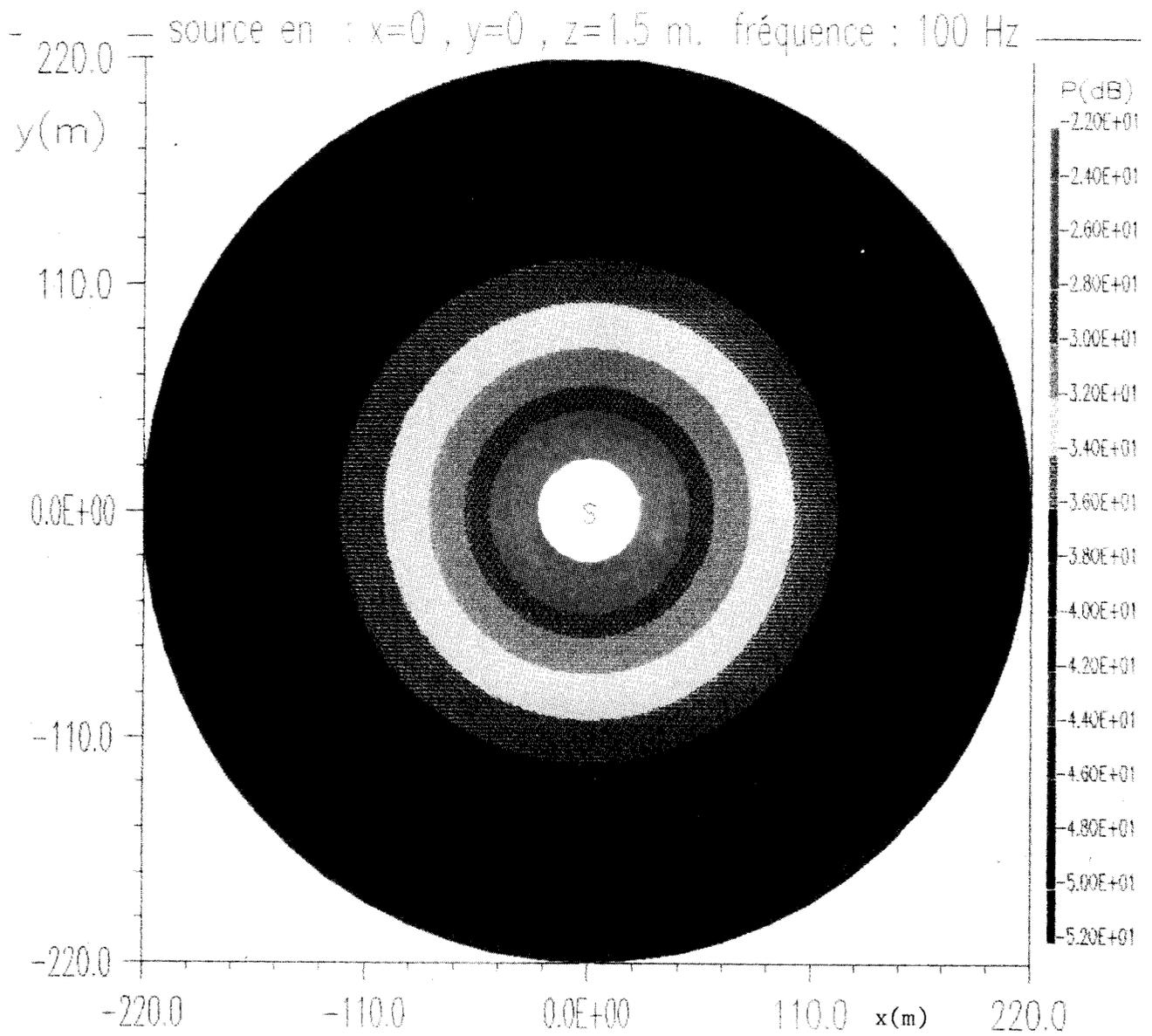
**Figure 21**

**Propagation en milieu homogène**

**Source :  $r_s = -20$  m ;  $z_s = 1,5$  m ; Fréquence : 100 Hz**

**Schéma de Crank-Nicholson**





**Figure 22**

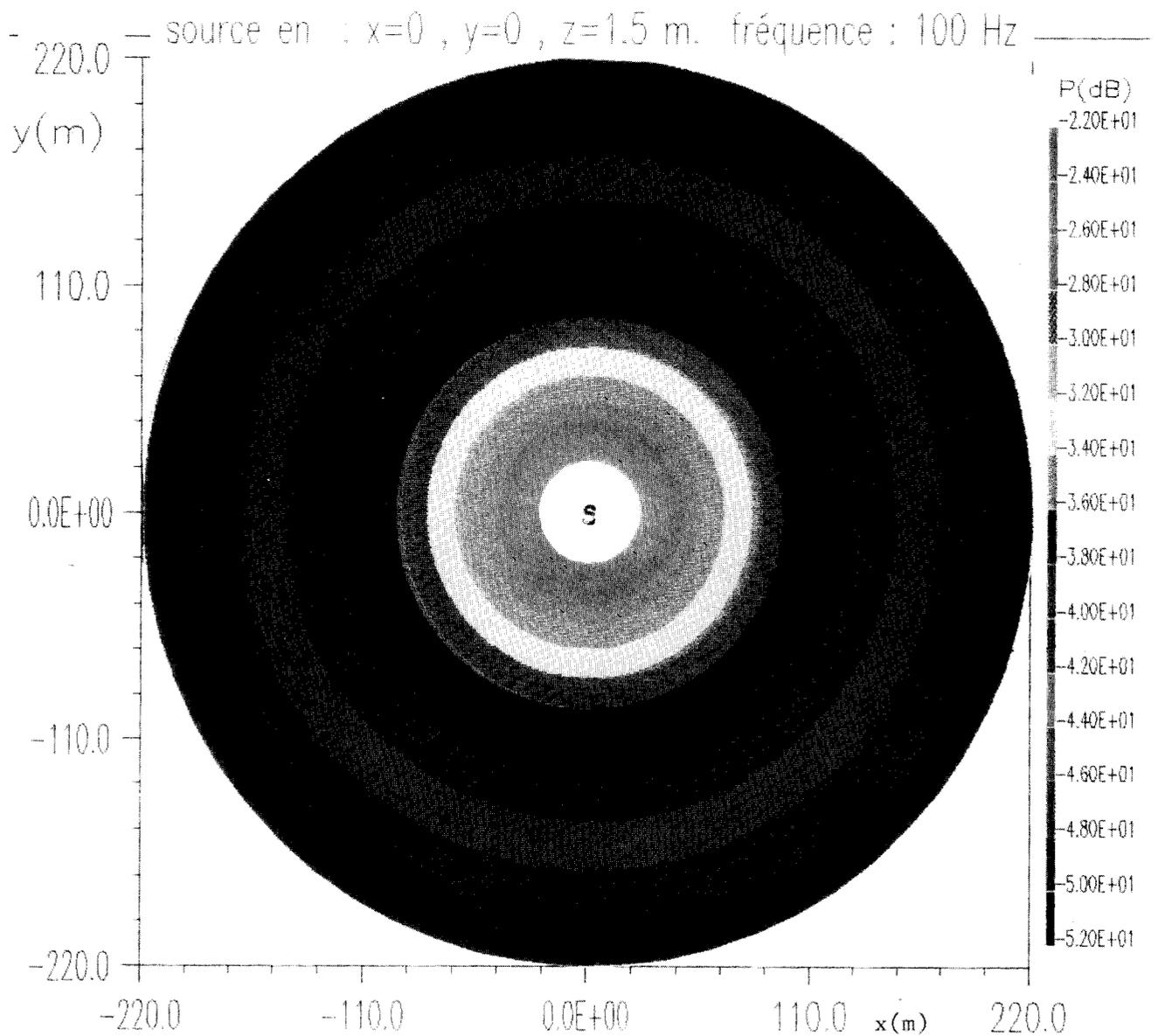
**Niveau acoustique dans le plan horizontal à l'altitude  $z = 0$  m**

**Propagation au-dessus d'un sol rigide**

**Équation parabolique 3D**

**Vent nul**





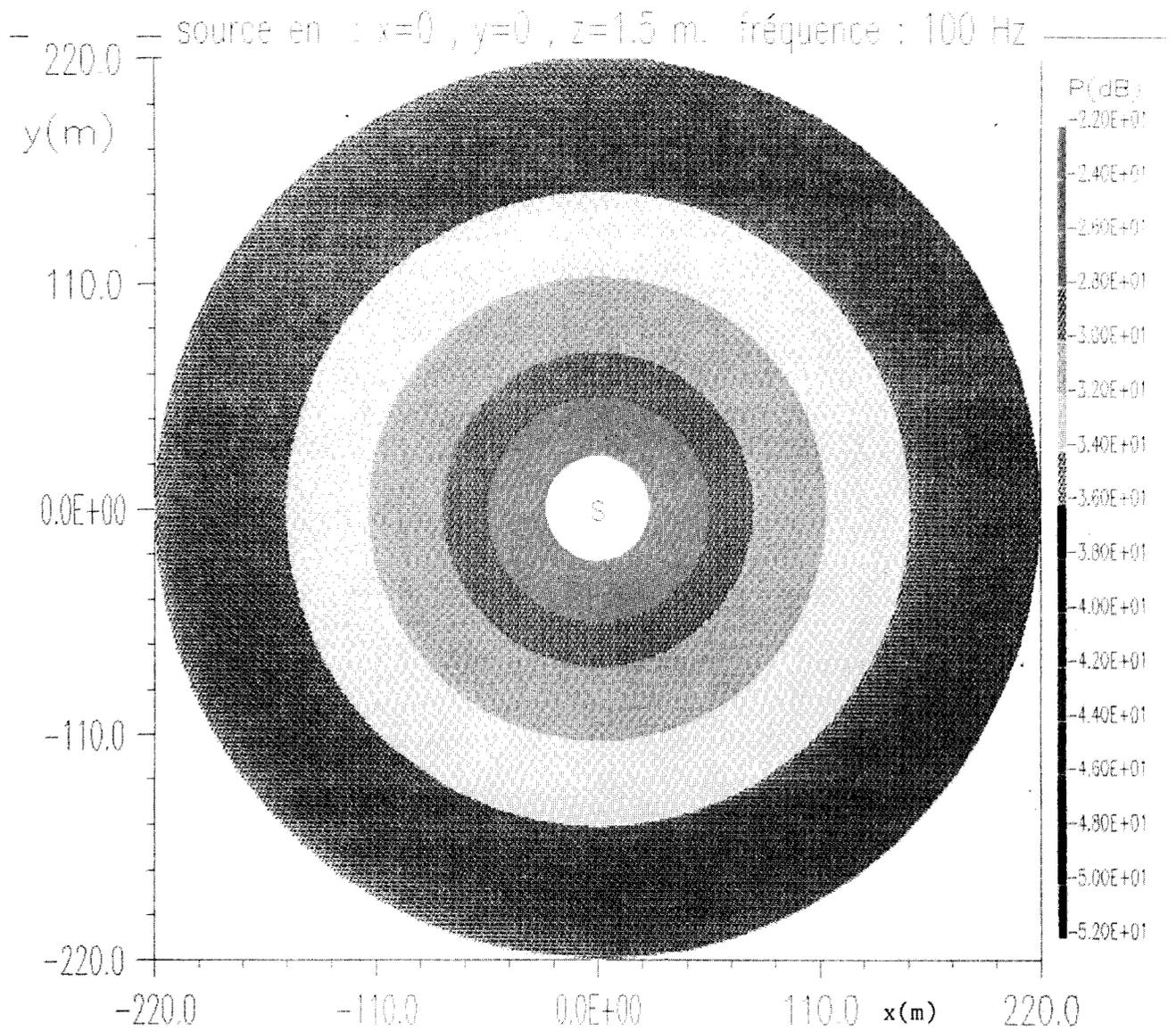
**Figure 23**

**Niveau acoustique dans le plan horizontal à l'altitude  $z = 0$  m**

**Équation parabolique 3D. Mach radial  $M = 0,1$**

**Paramètres de pondération :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$**





**Figure 24**

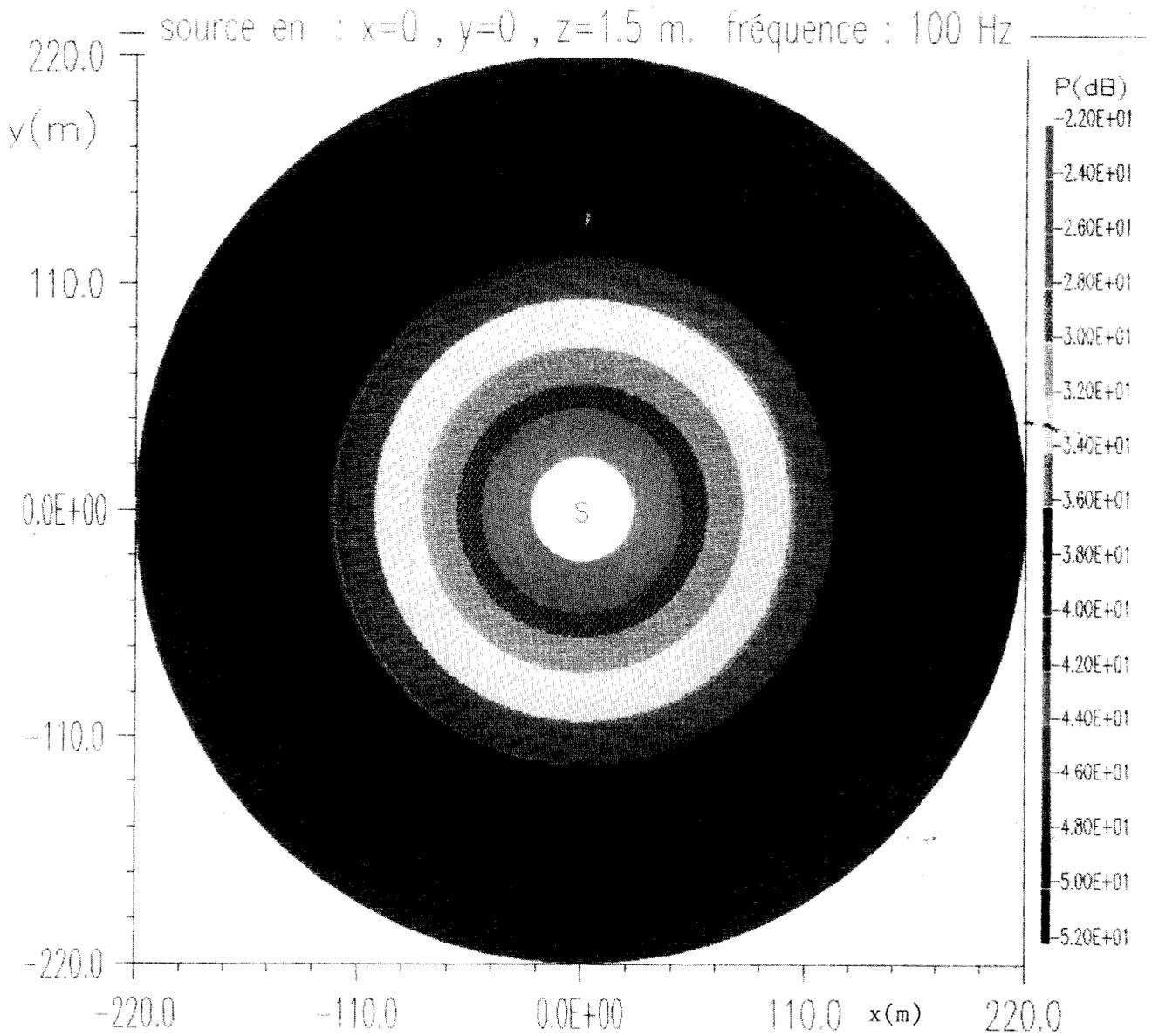
**Niveau acoustique dans le plan horizontal à l'altitude  $z = 0$**

**Équation parabolique 3D. Mach radial  $M = 0,1$**

**Paramètres de pondération :**

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0$$





**Figure 25**

**Niveau acoustique dans le plan horizontal à l'altitude  $z = 0$**

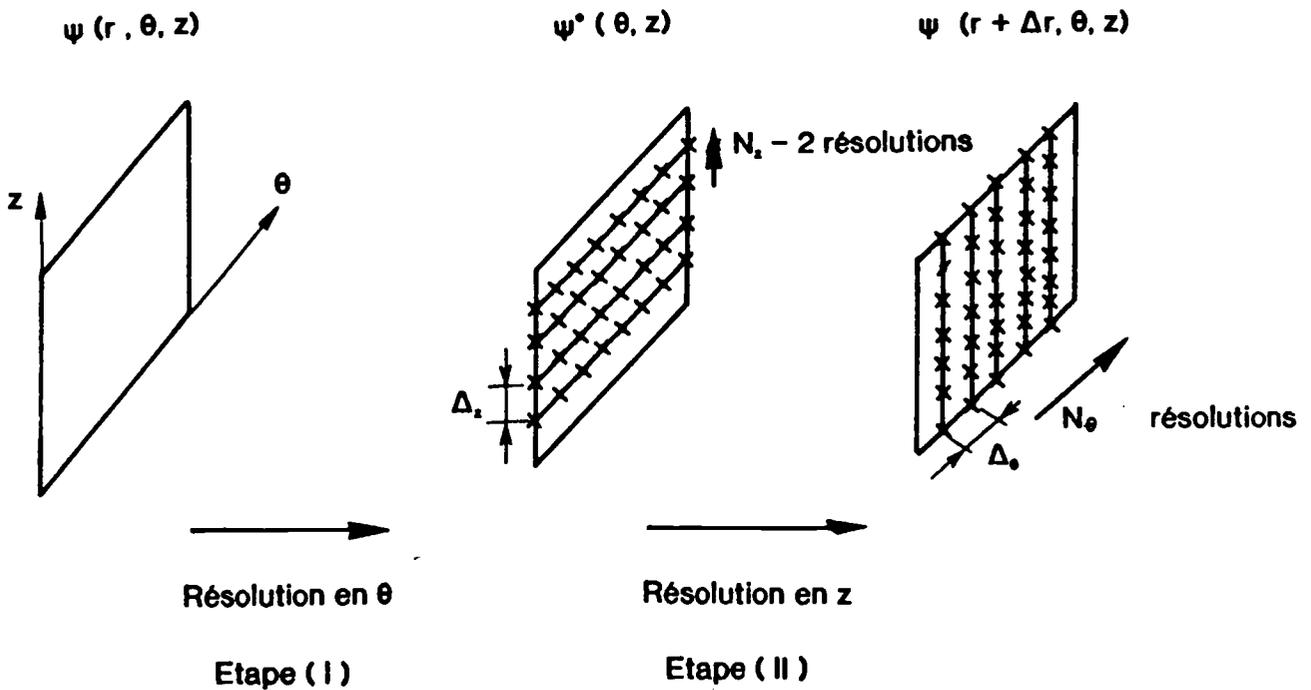
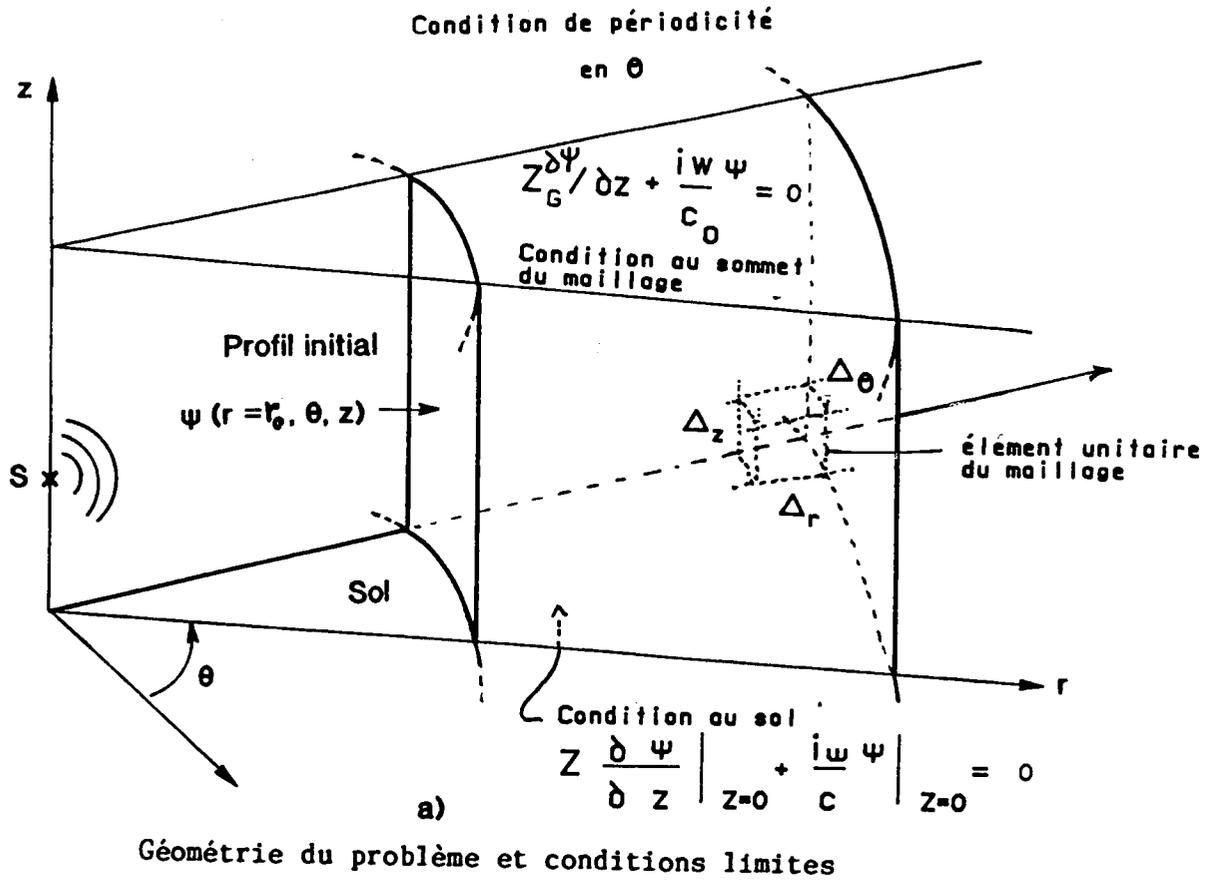
**Équation parabolique 3D. Mach radial  $M = 0,1$**

**Paramètres de pondération :**

$$\alpha = 1/2 \quad \beta = 1/2$$

$$\text{ou } \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

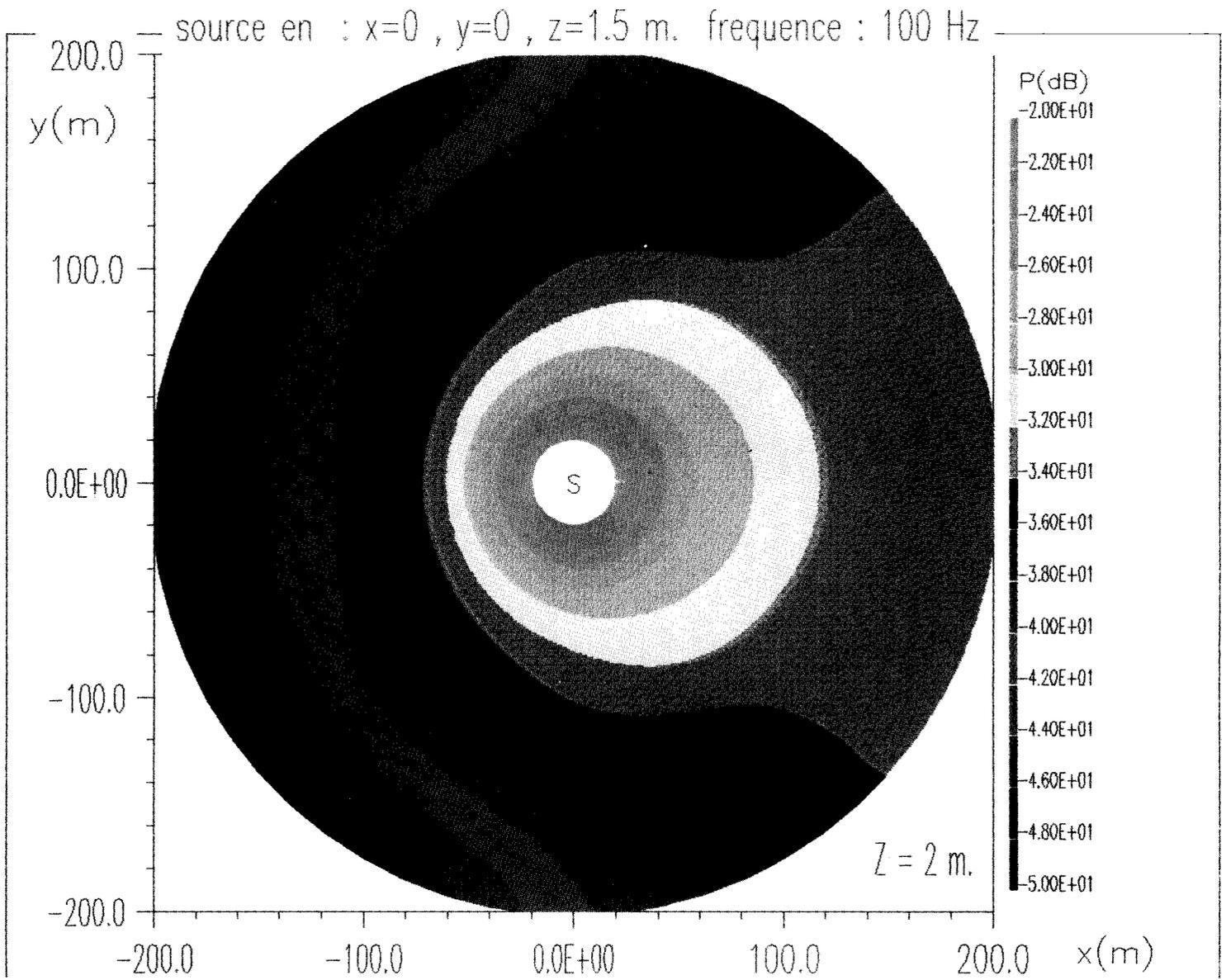




**Figure 26**

Résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle





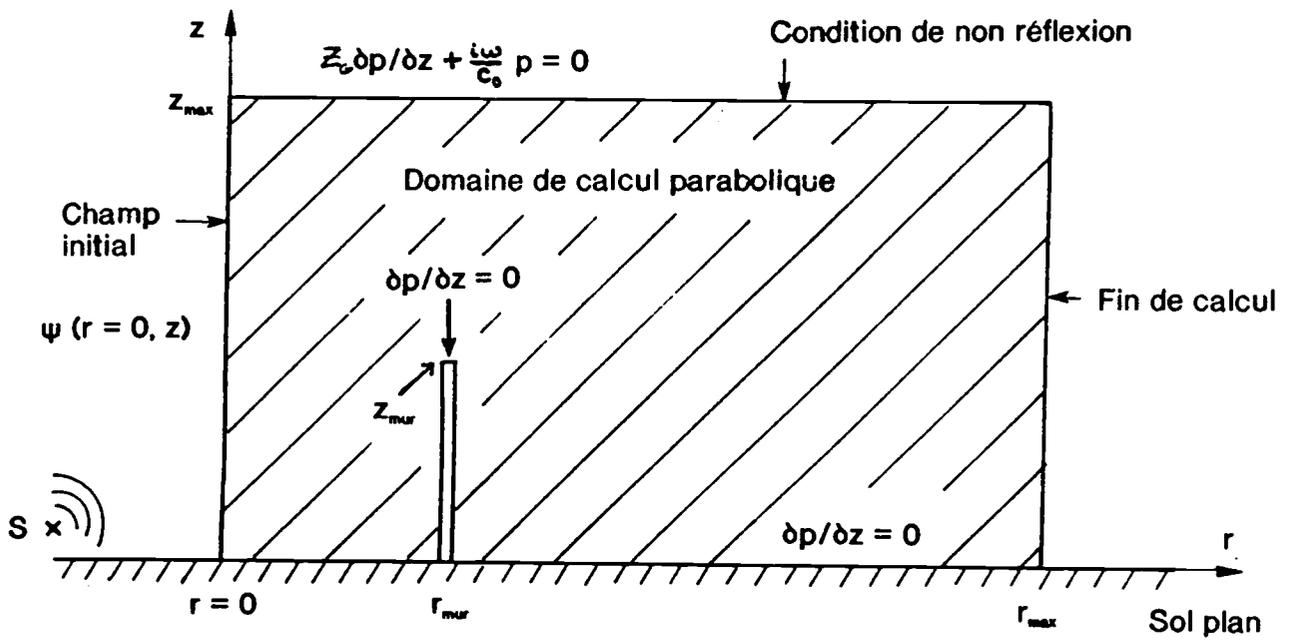
**Figure 27**

**Propagation en présence d'un vent unidirectionnel**

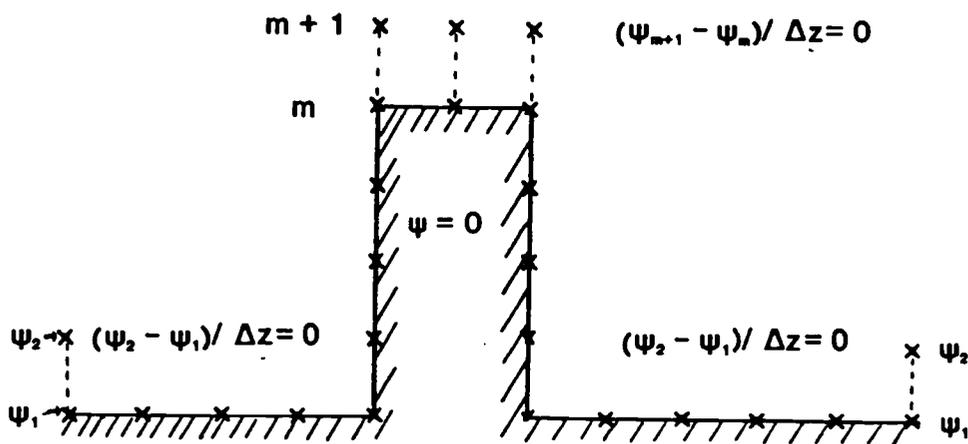
$$V_x(z) = 10 (z/10)^{0,2}$$

**Niveau acoustique en dB référencé par rapport au niveau à 1 m de la source**





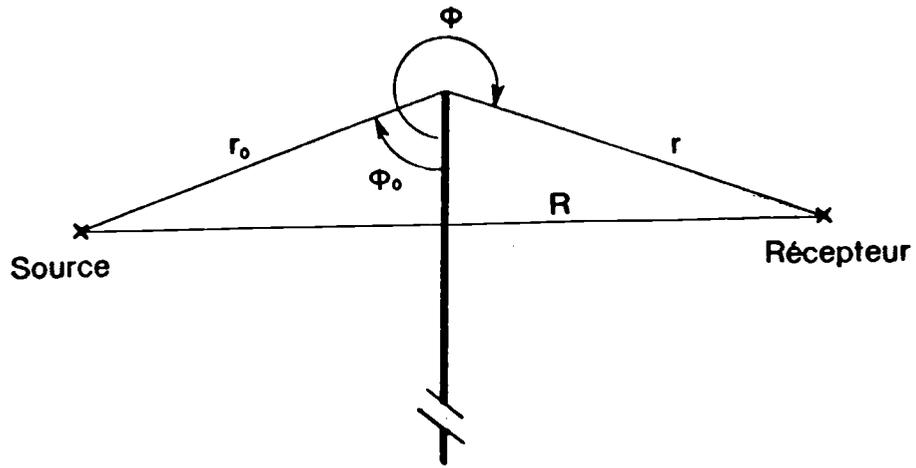
a) Géométrie du problème



b) Maillage du mur

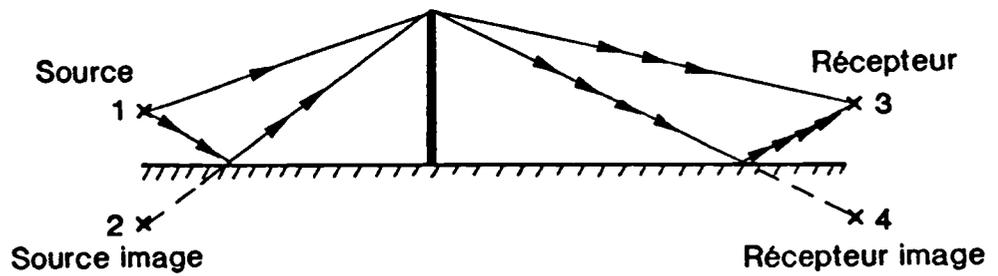
**Figure 28**

**Propagation en présence d'un mur**  
**Méthode parabolique**



a)

Géométrie du problème du mur semi-infini

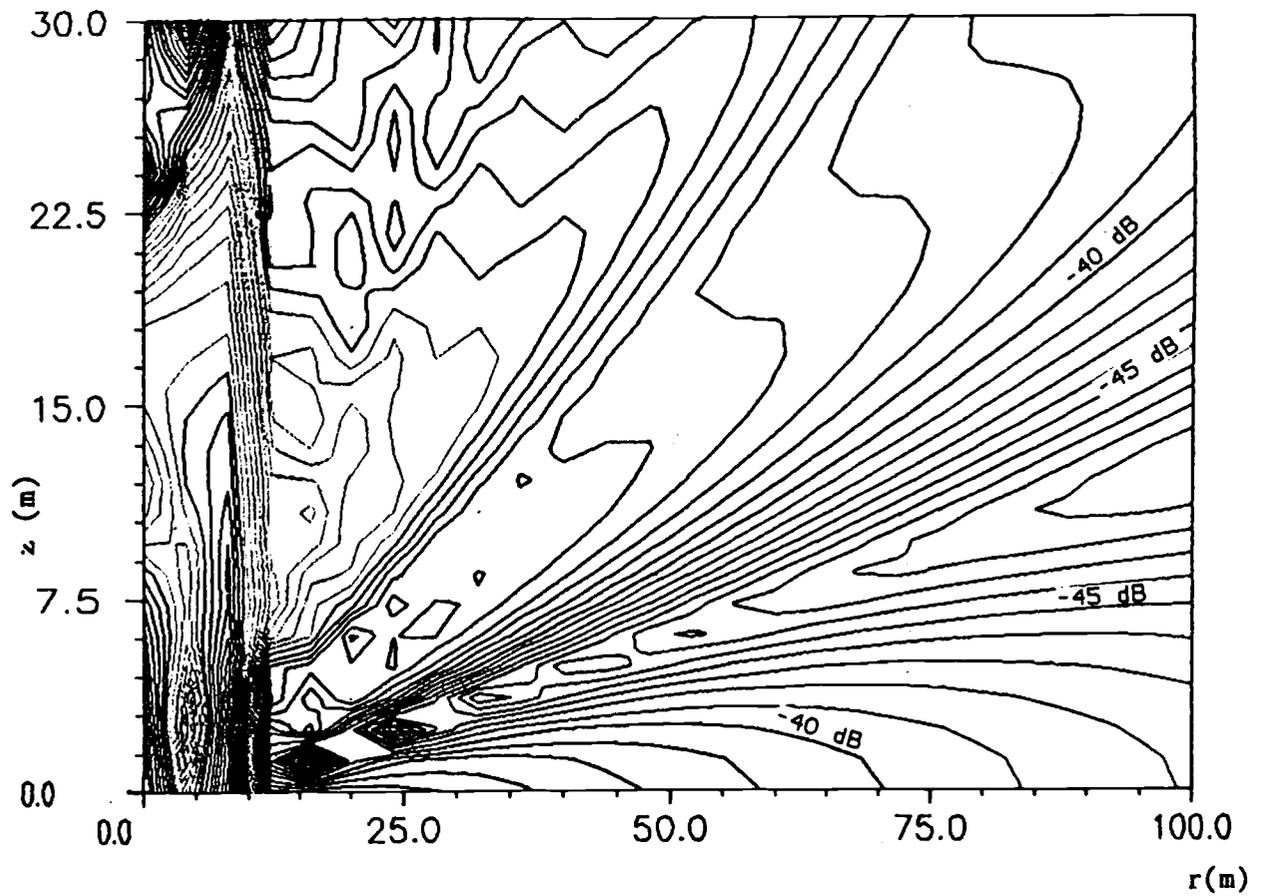


b)

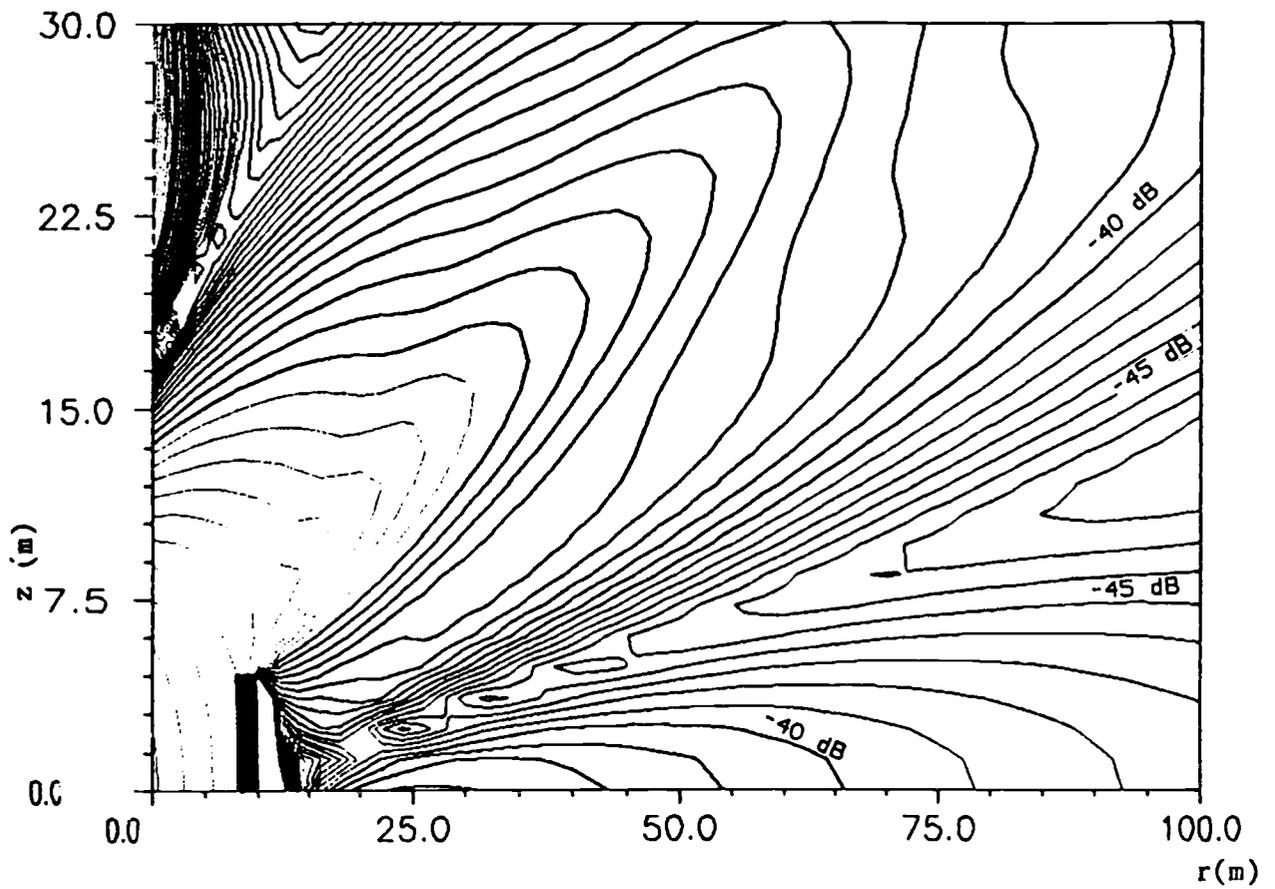
Géométrie du problème du mur avec un sol parfaitement réfléchissant

**Figure 29**

**Méthode des intégrales de Fresnel**



a) Fresnel

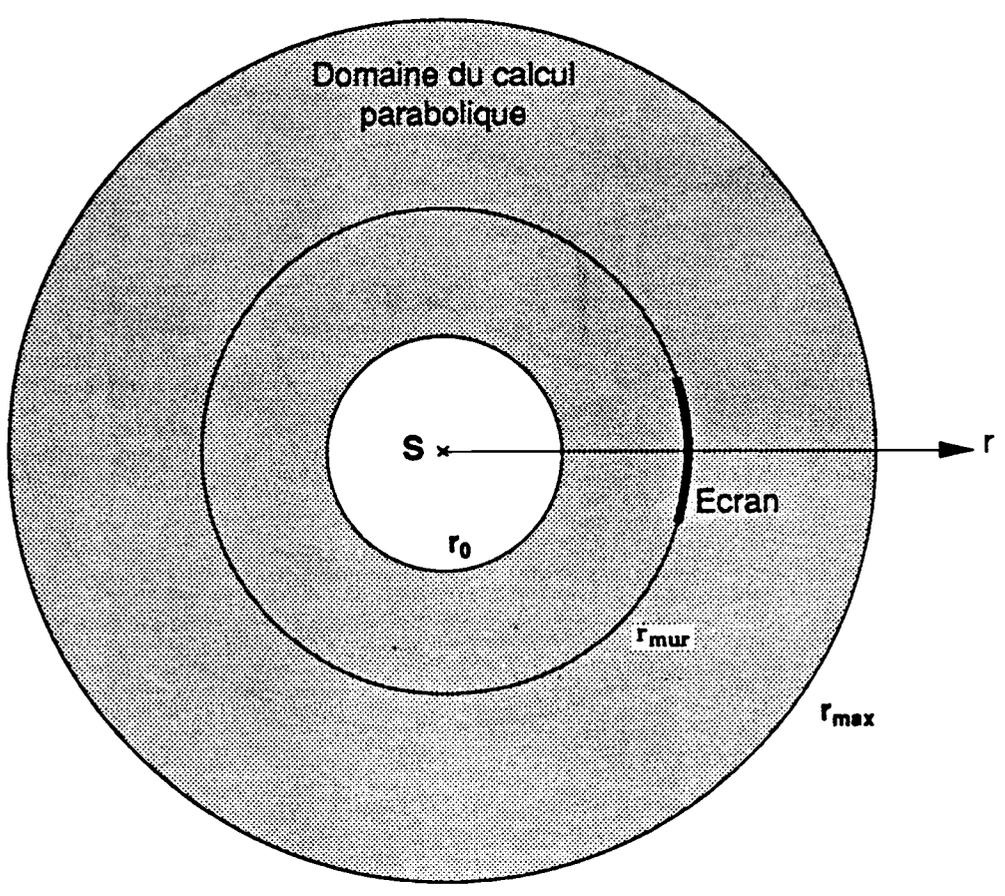
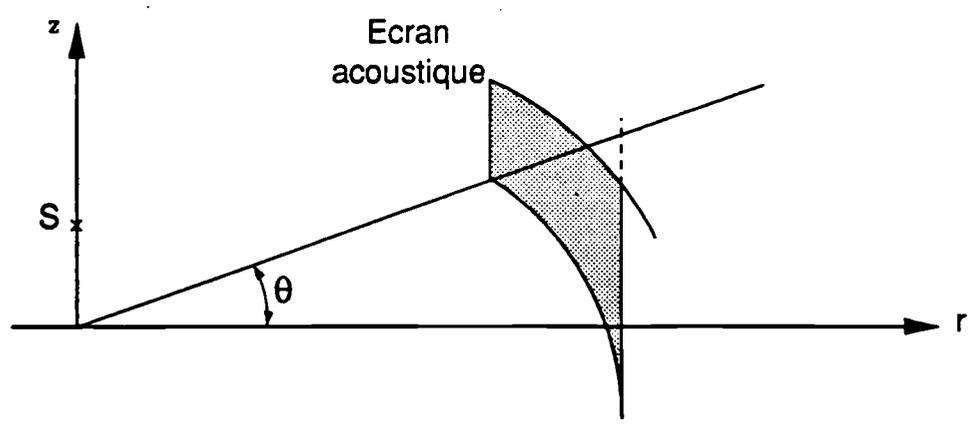


b) Méthode parabolique

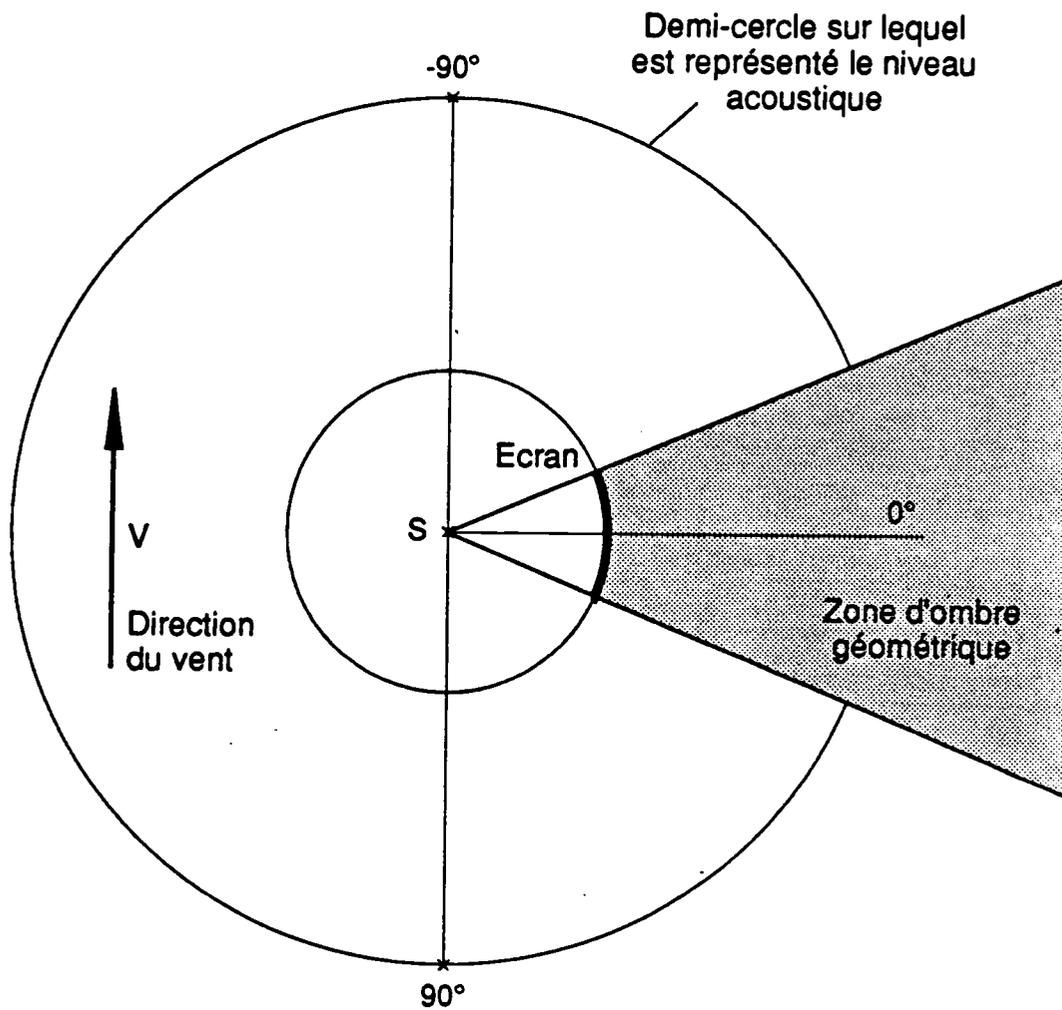
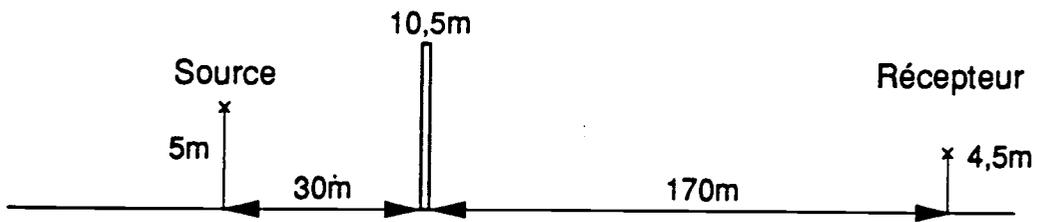
**Figure 30**

**Propagation en présence d'un mur**

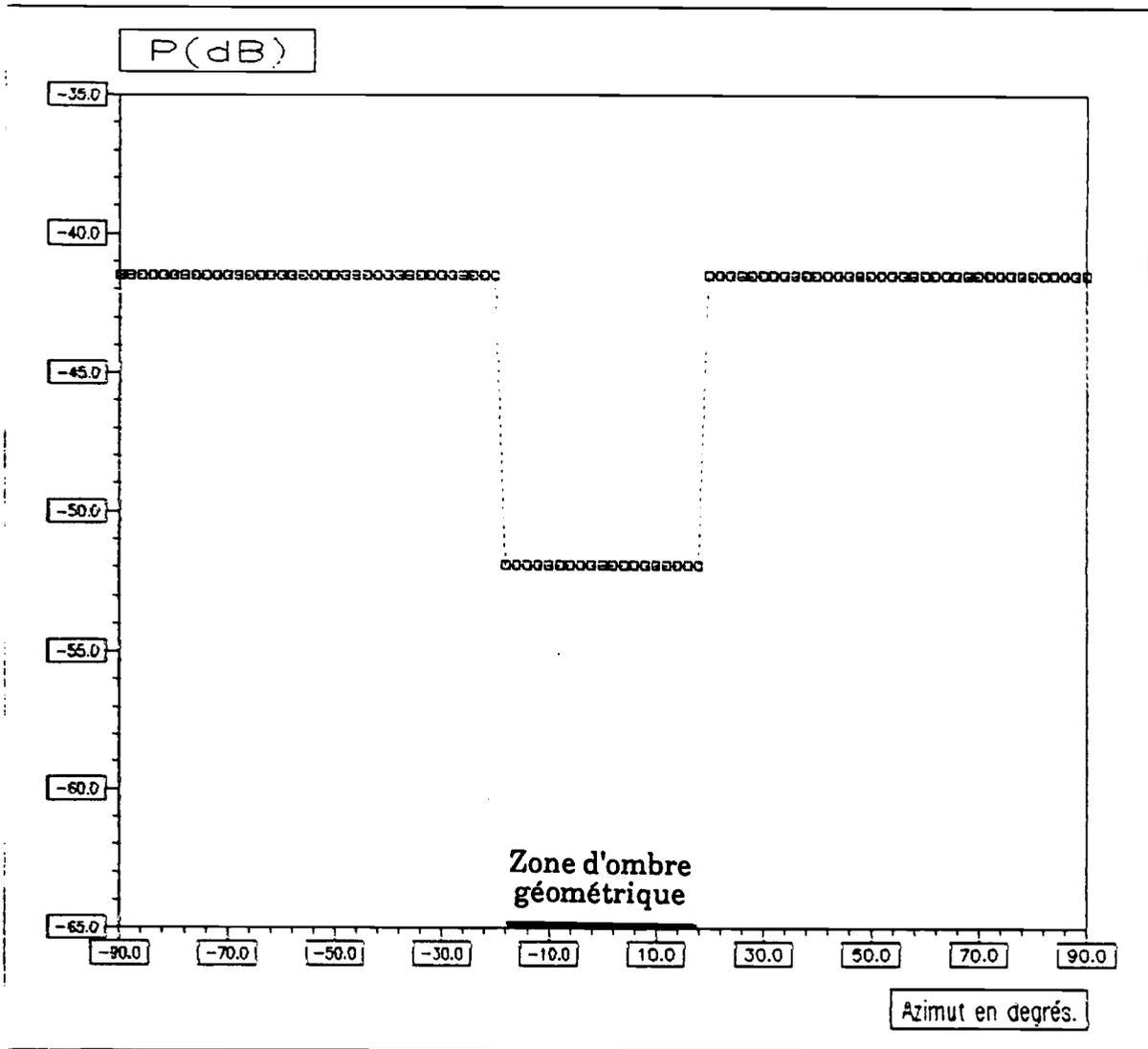
**Source:  $r_s = -20$  m ;  $z_s = 1$  m ; Fréquence: 10 Hz ; Hauteur du mur: 5 m**



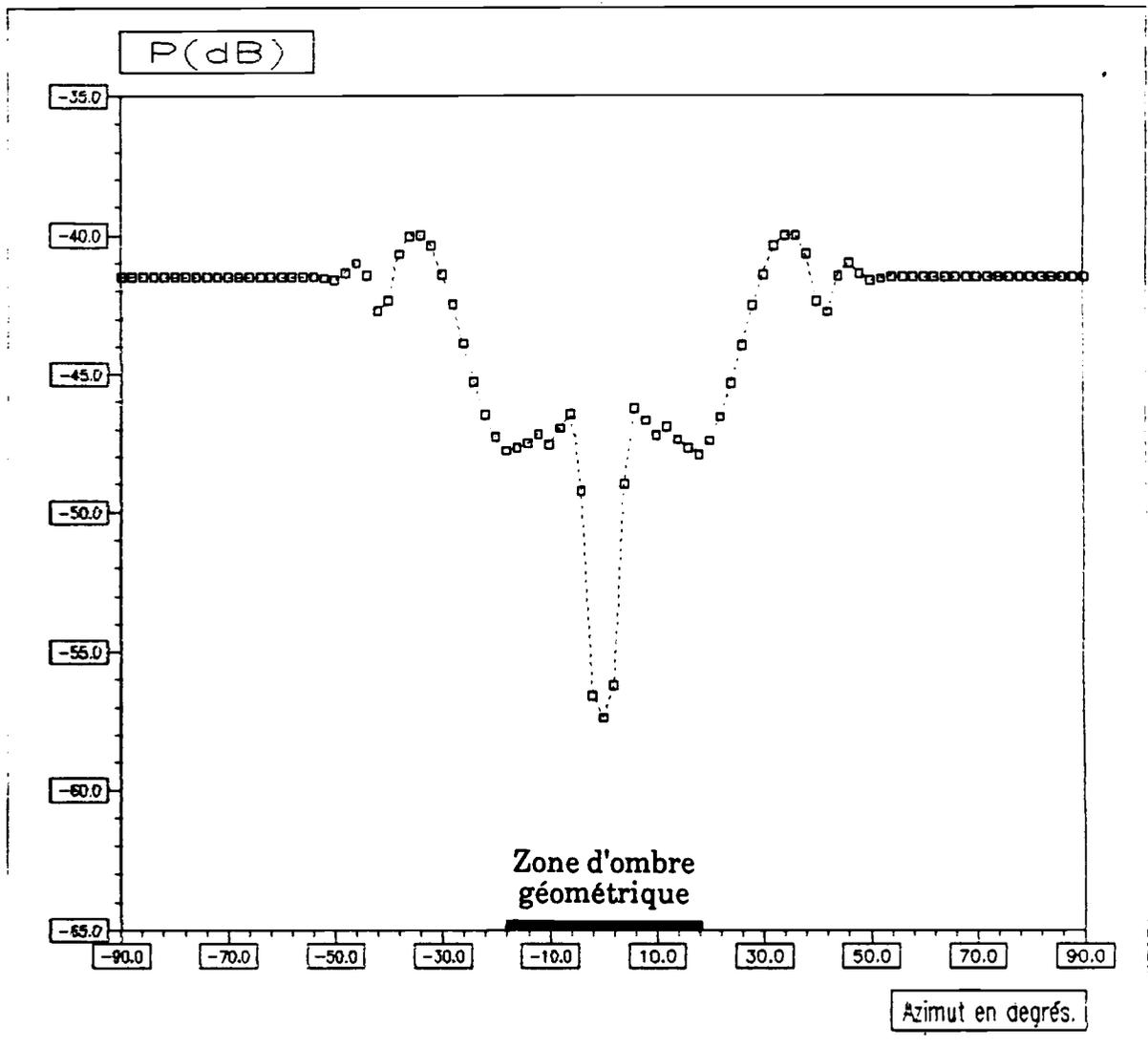
**Figure 31**



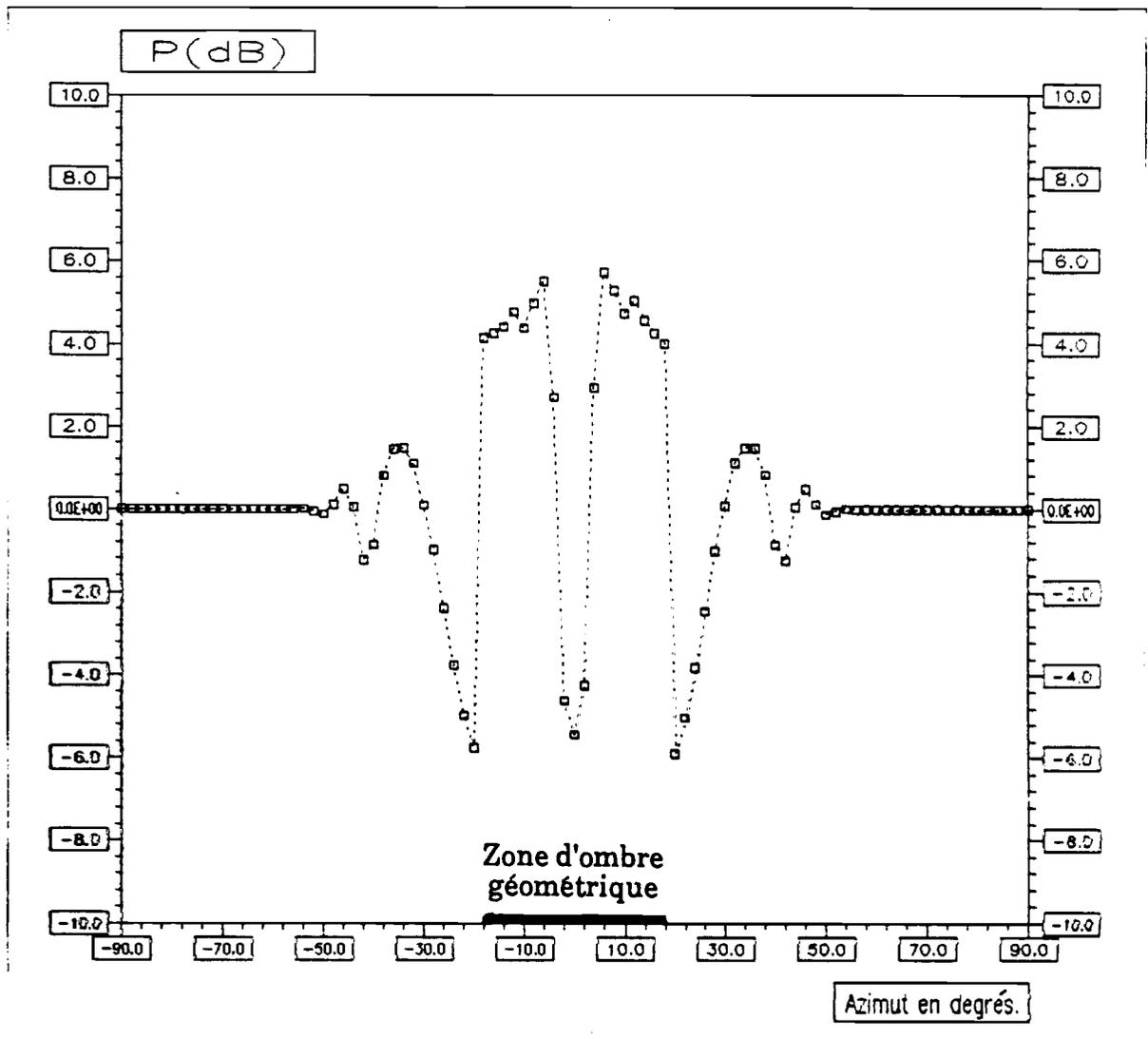
**Figure 32**



**Figure 33**  
**Diffraction par un écran**  
**Équation parabolique 2D**  
**Vent nul**



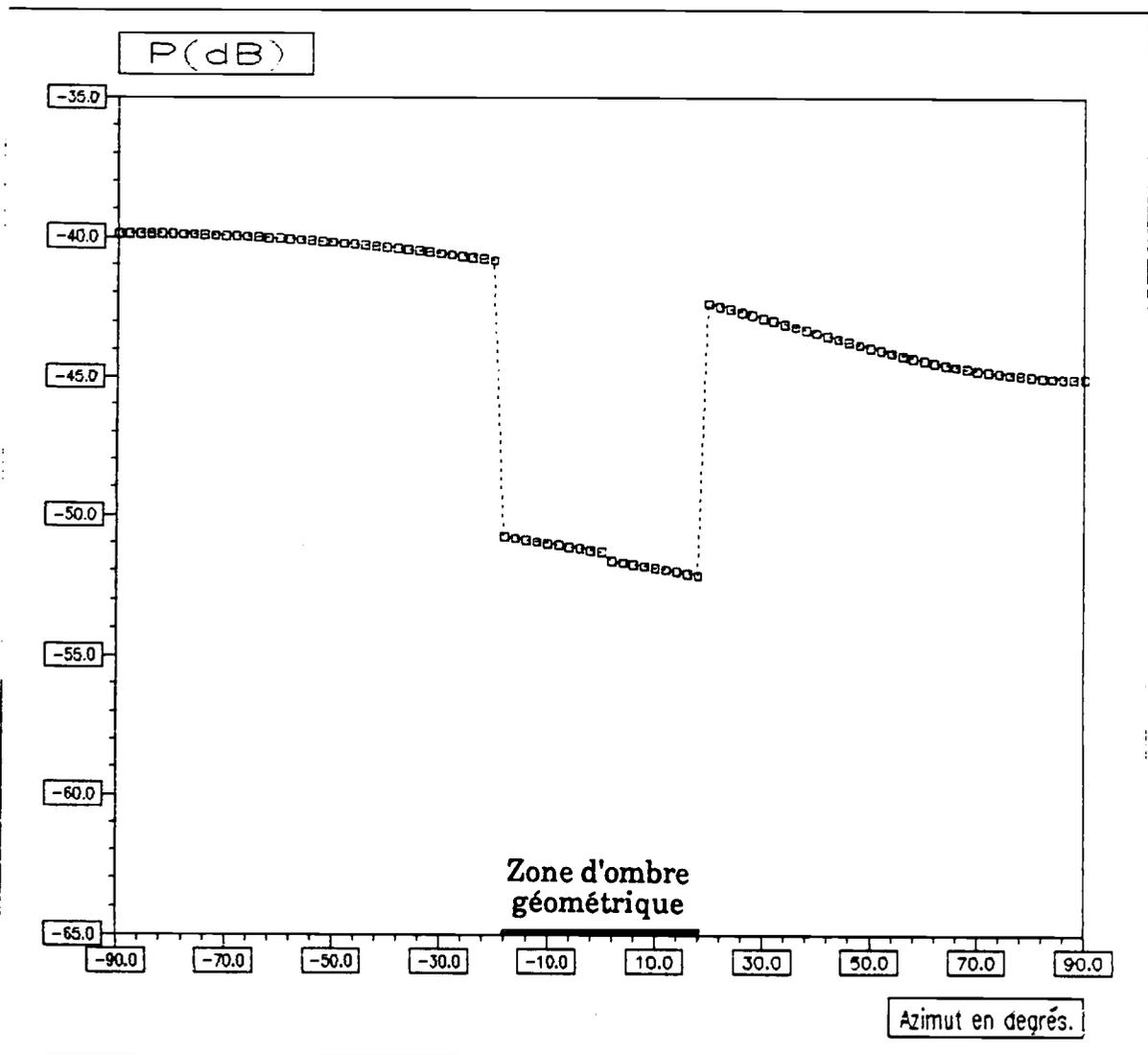
**Figure 34**  
**Diffraction par un écran**  
**Équation parabolique 3D**  
**Vent nul**



**Figure 35**

**Différences de niveau entre les calculs 2D et 3D**

**Vent nul**

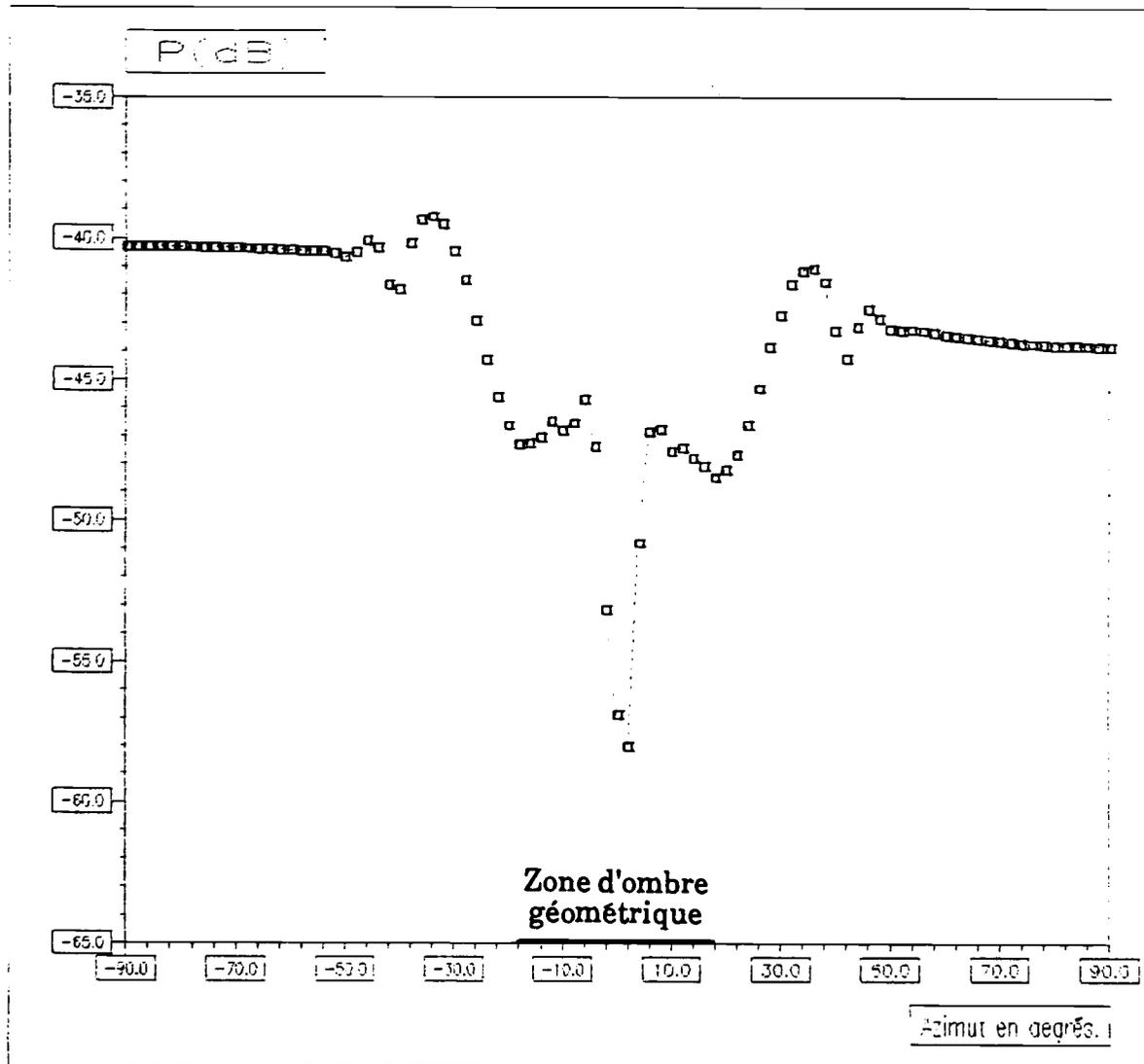


**Figure 36**

**Diffraction par un écran**

**Équation parabolique 2D**

$$V = 5 \times (z/10)^{0,2}$$

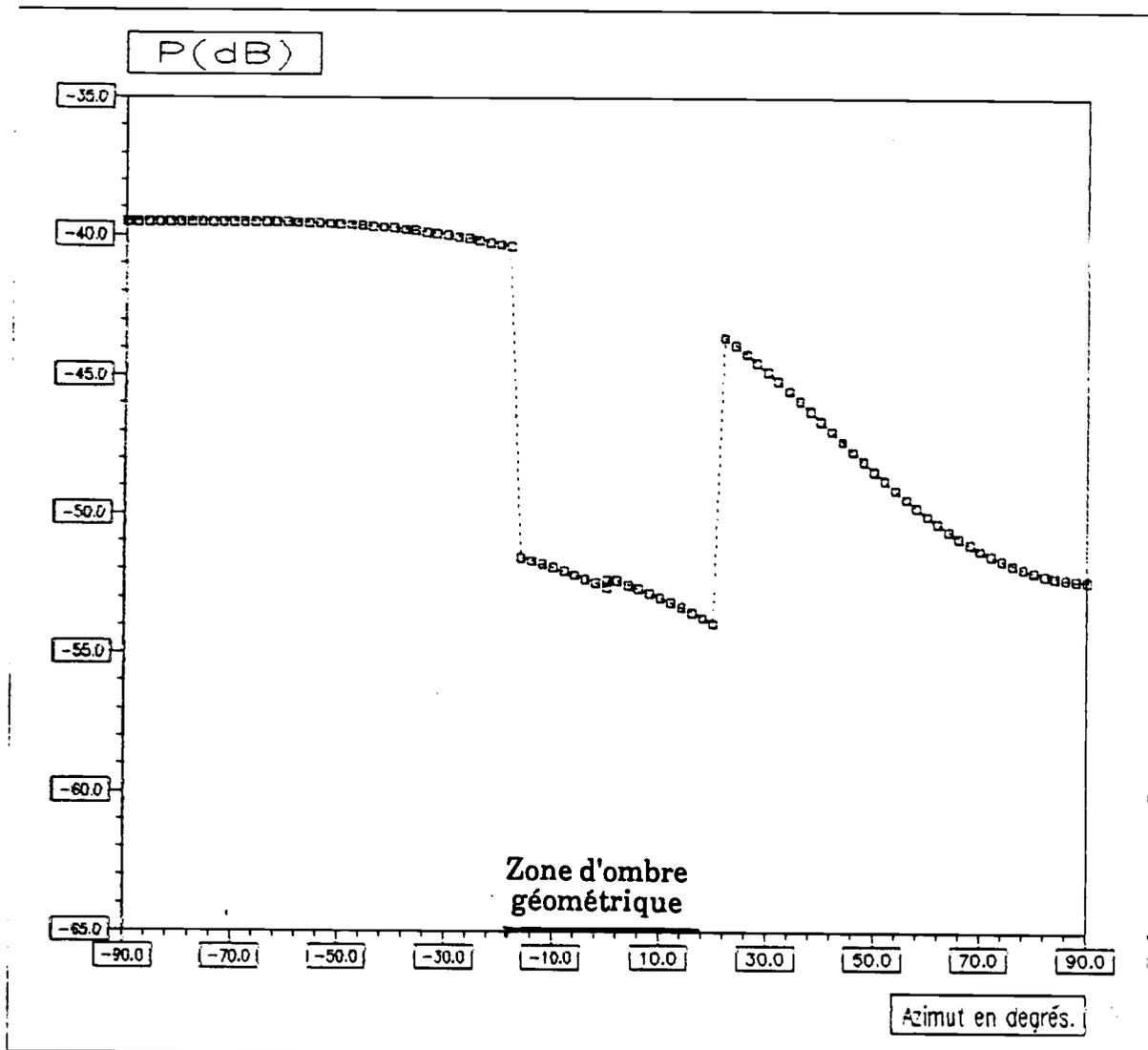


**Figure 37**

**Diffraction par un écran**

**Équation parabolique 3D**

$$V = 5 \times (z/10)^{0,2}$$

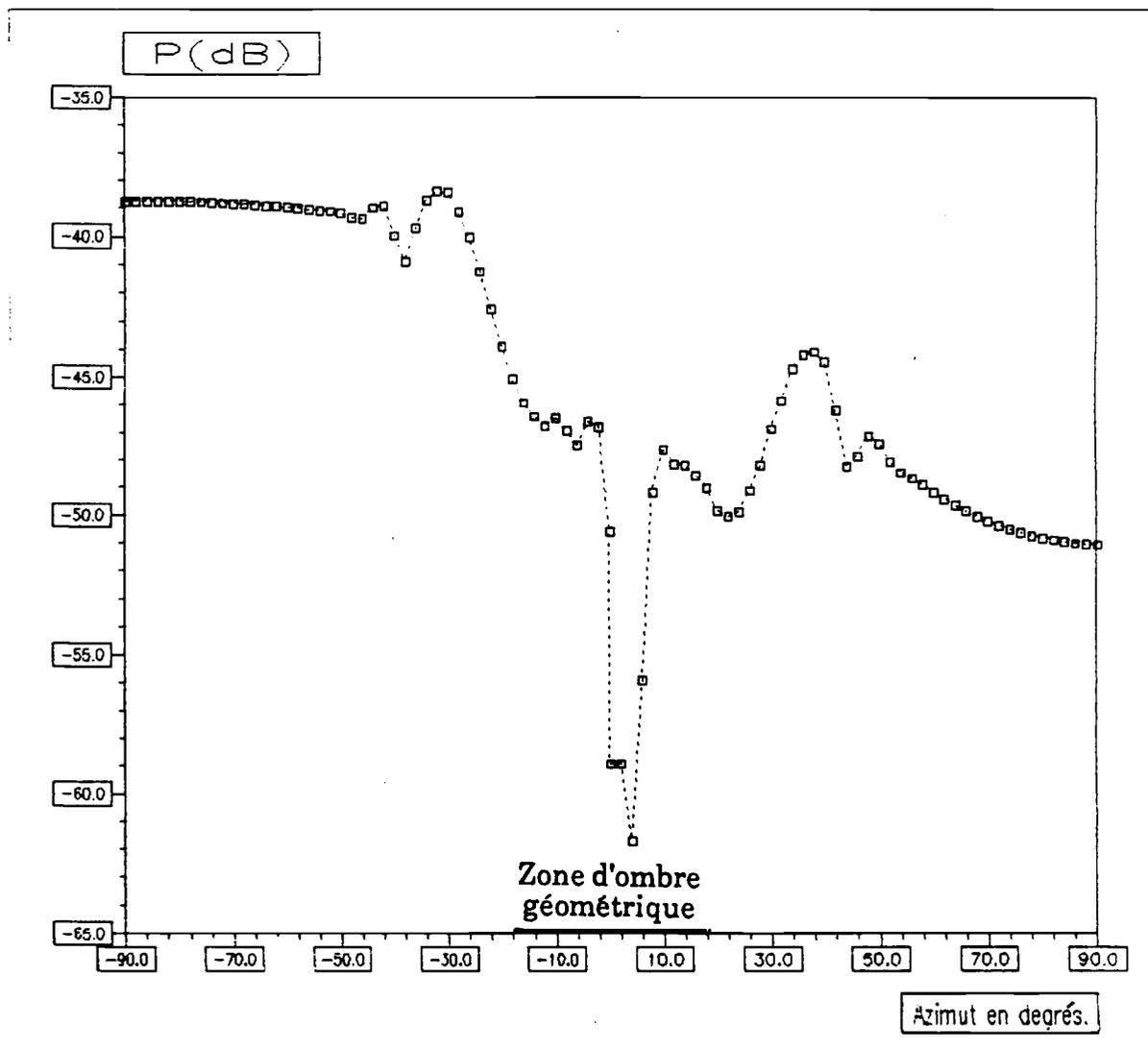


**Figure 38**

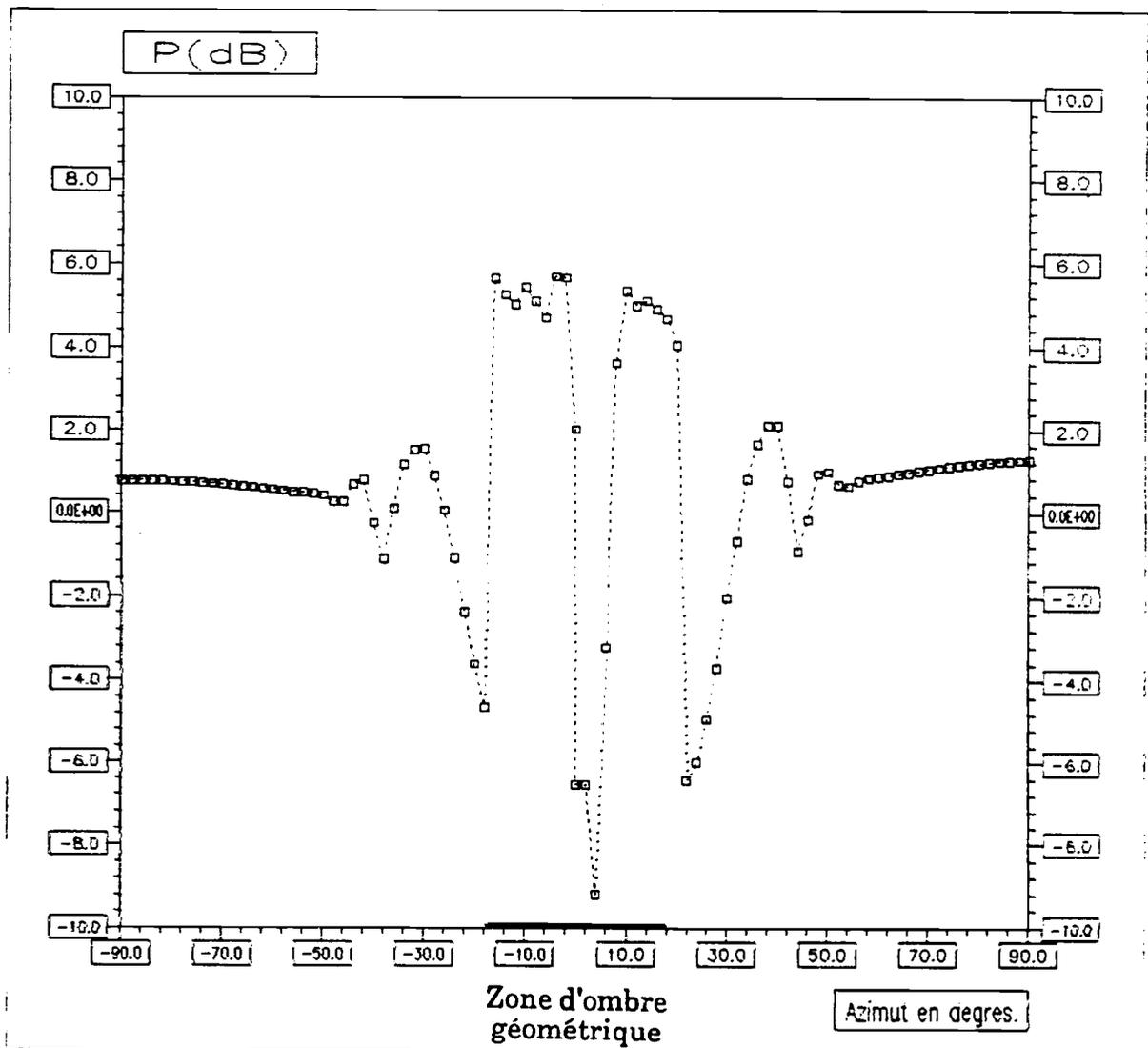
**Diffraction par un écran**

**Équation parabolique 2D**

$$V = 10 \times (z/10)^{0.2}$$



**Figure 39**  
**Diffraction par un écran**  
**Équation parabolique 3D**  
 $V = 10 \times (z/10)^{0.2}$

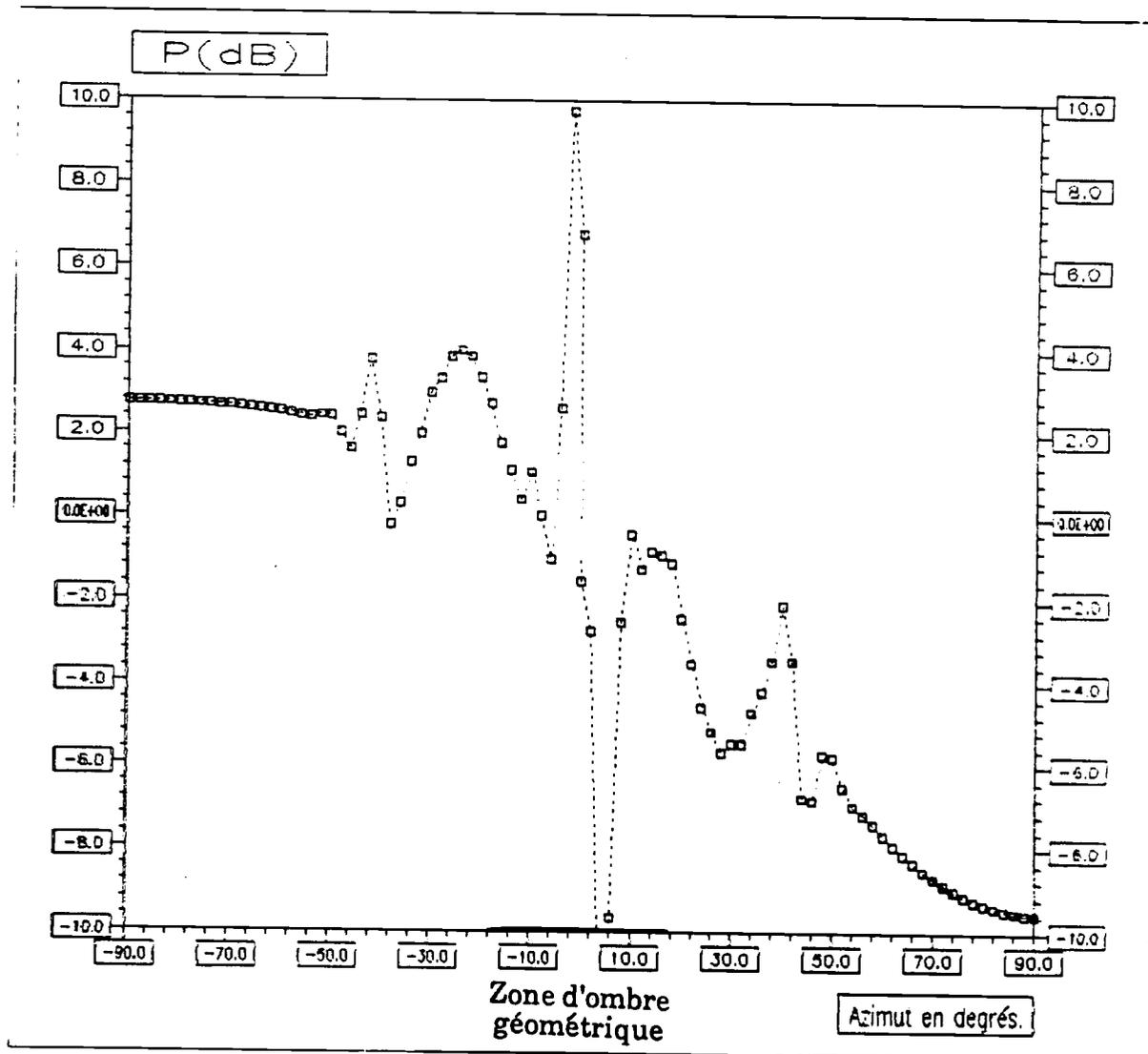


**Figure 40**

**Diffraction par un écran**

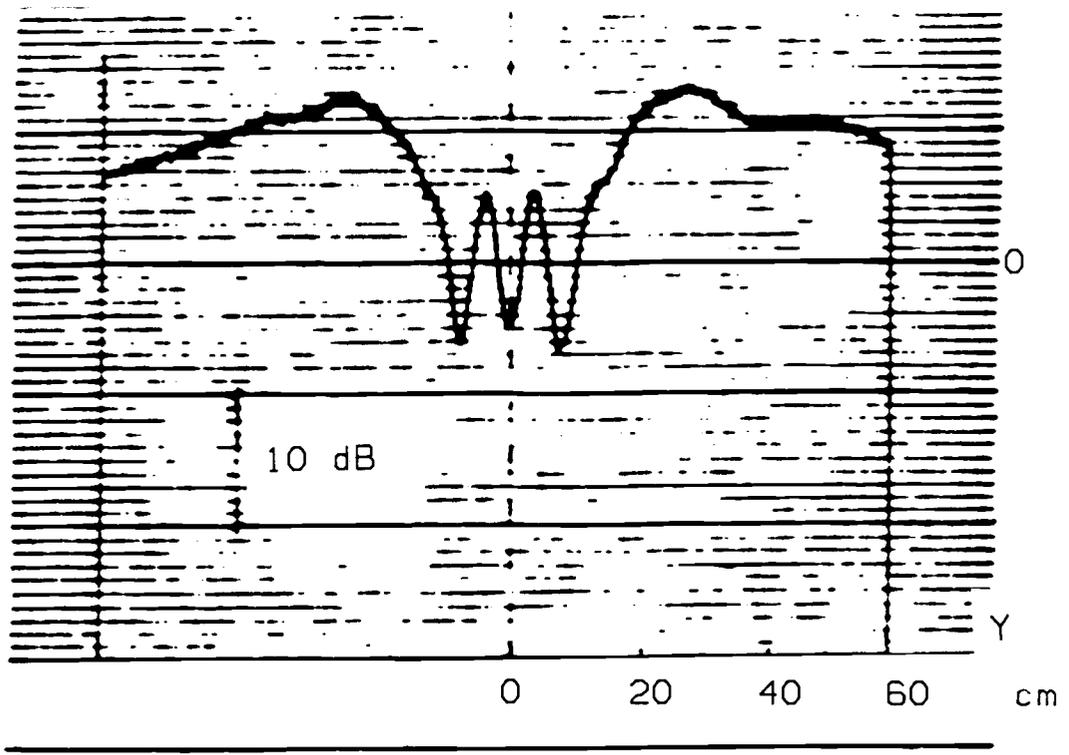
**Différence de niveau entre les calculs 2D et 3D**

$$V = 10 \times (z/10)^{0,2}$$

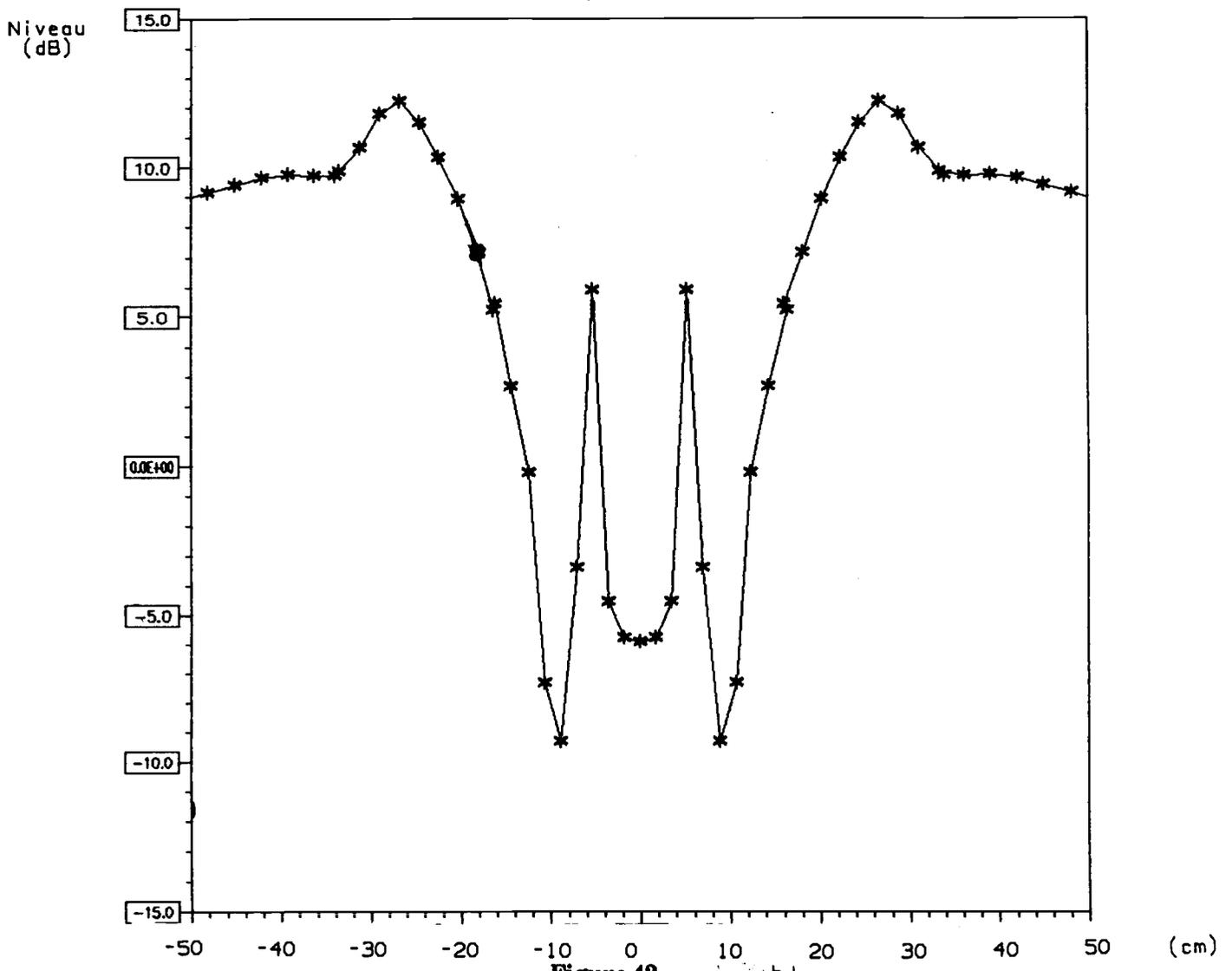


**Figure 41**

**Effets du vent sur la diffraction par un écran**  
**Différence entre les calculs 3D sans vent**  
**et le calcul 3D avec vent**



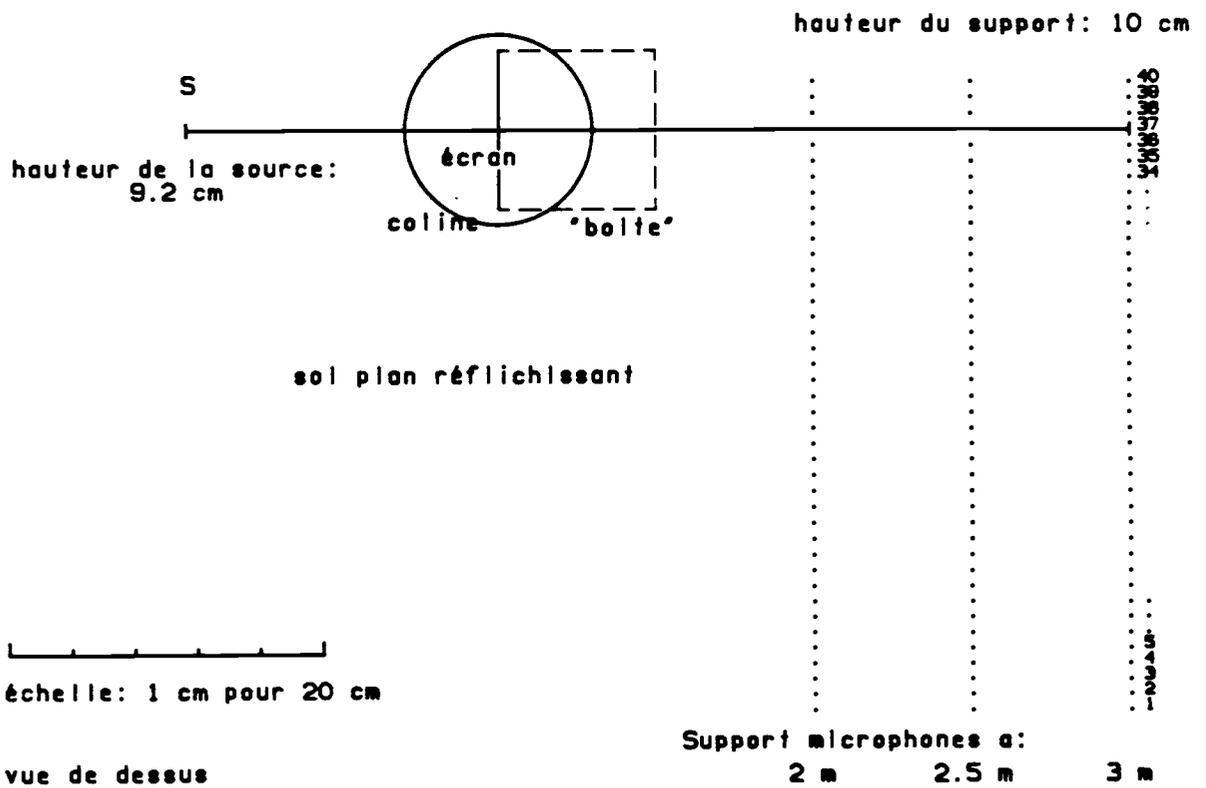
a)



b)

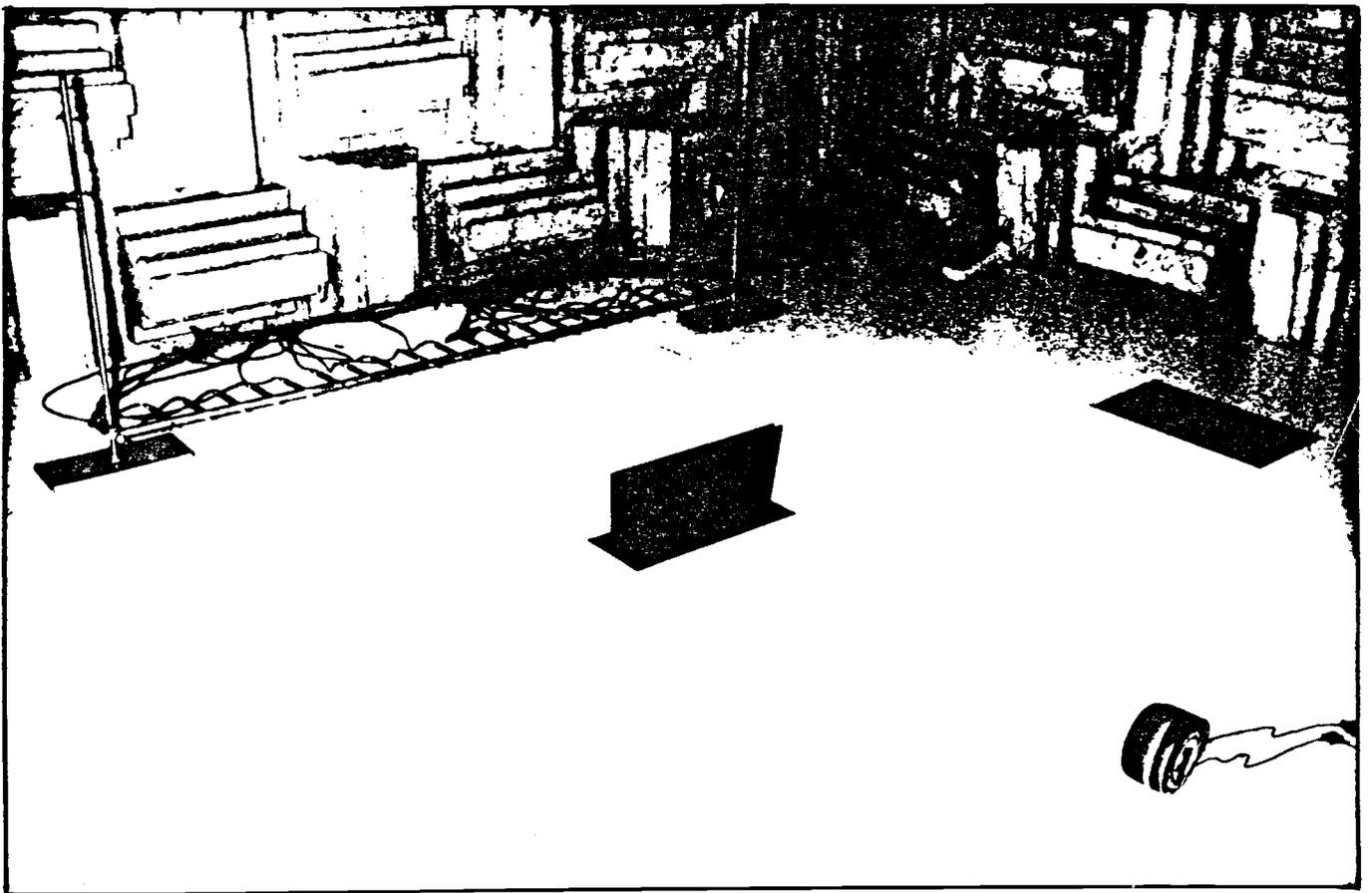
a) Résultats expérimentaux. Extrait de [28] (page 107)  
 b) Calcul par la méthode de l'EP3D

Parois de la chambre sourde



**Figure 43**

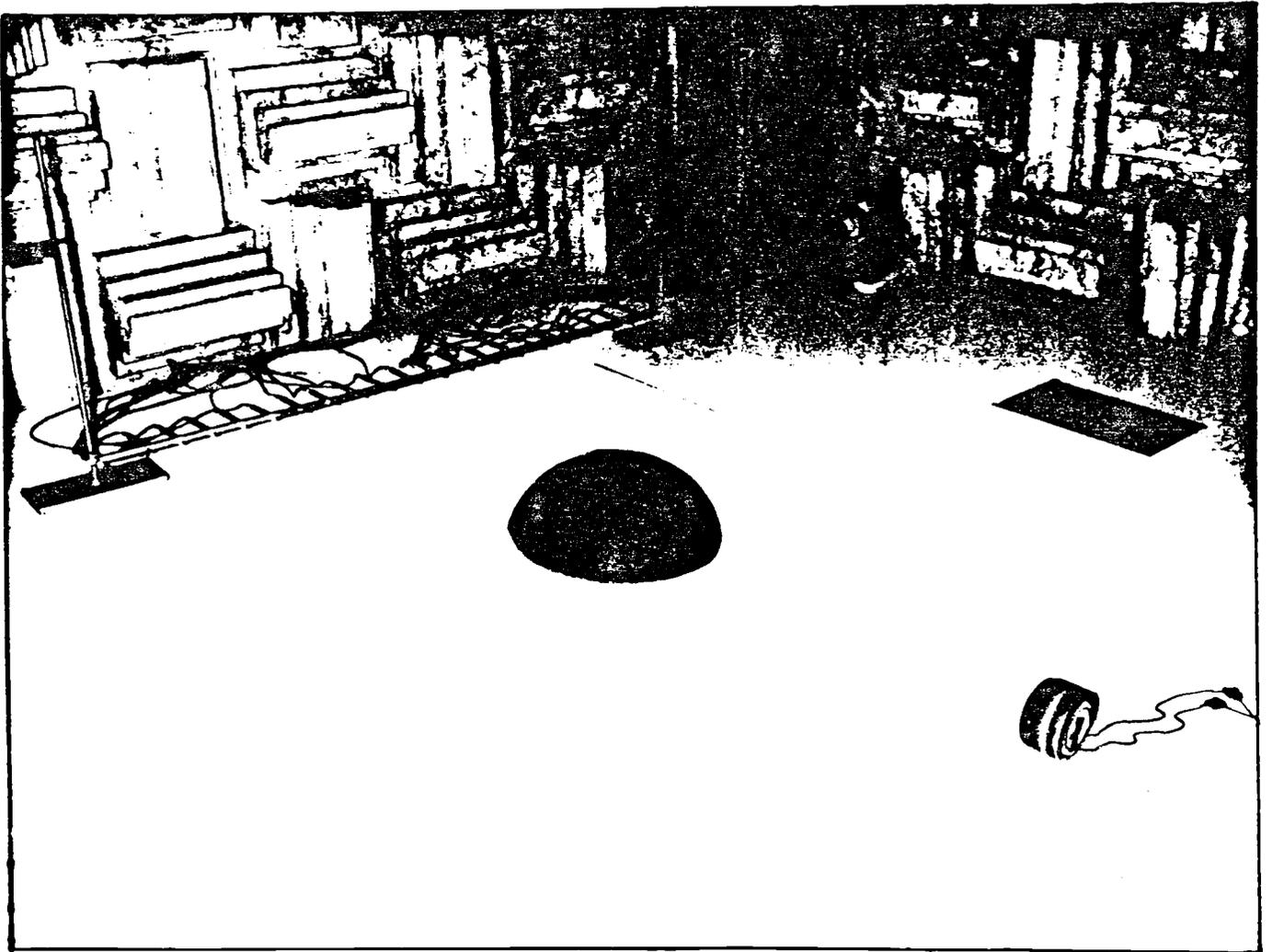
**Configuration des mesures**



**Figure 44**

**Expérience en chambre sourde**

**Vue présentant la source, l'écran et le support des microphones**

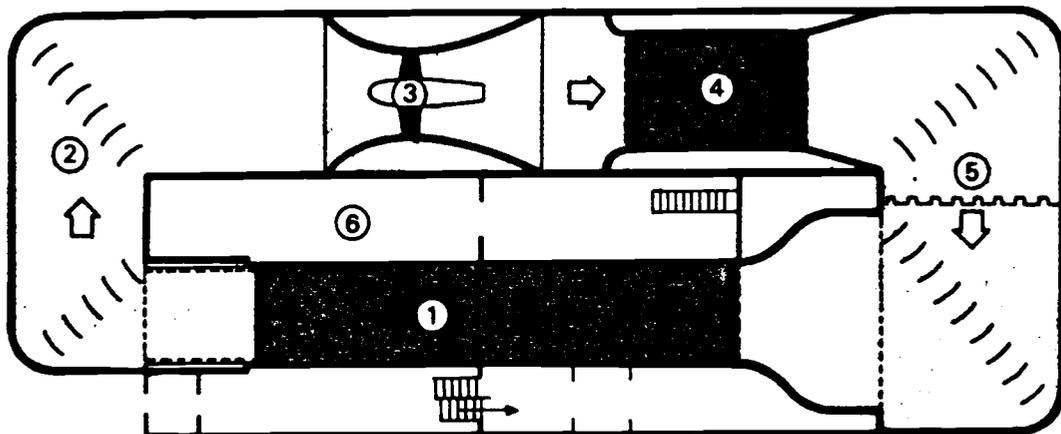


**Figure 45**

**Expérience en chambre sourde**

**Vue présentant la source, la colline et le support des microphones**

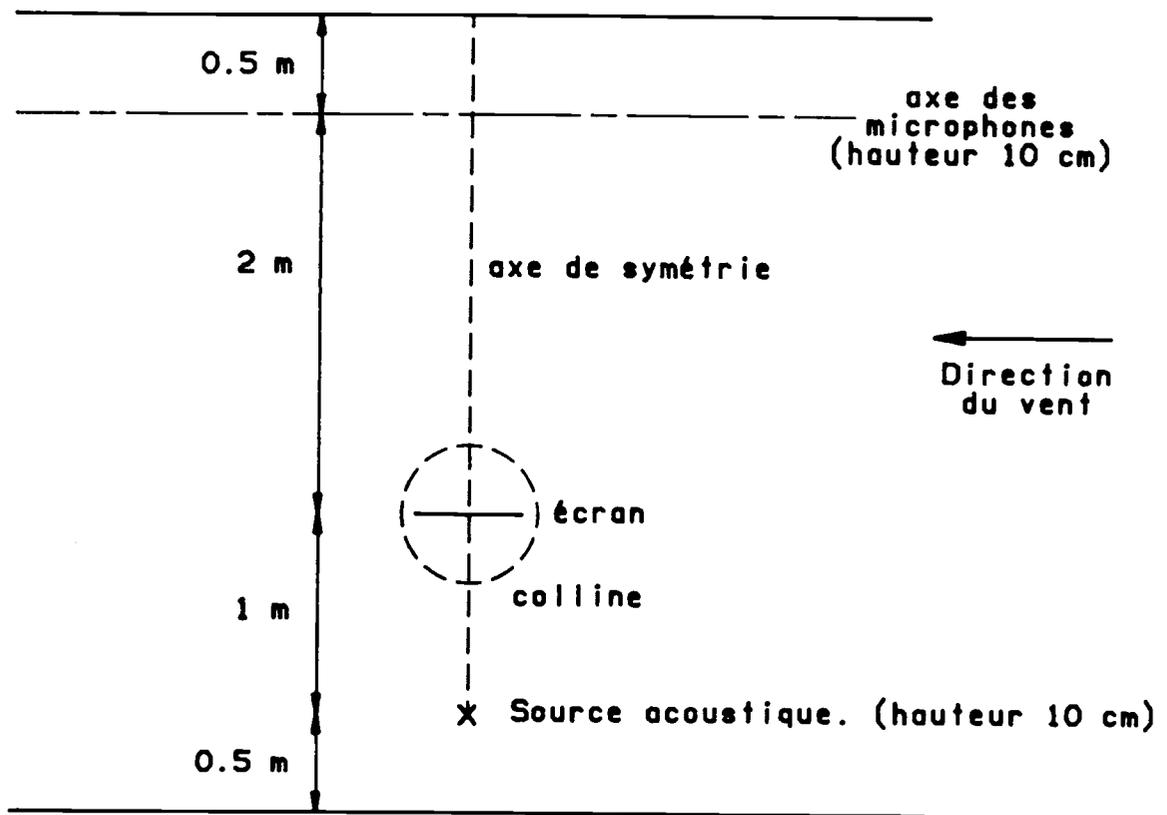
## Plan de la soufflerie atmosphérique



- 1 Veine principale :  $L = 20$  m,  $l = 4$  m, hauteur réglable de 2 m à 3 m - vitesse de l'écoulement 0 à 30 m/s - Reproduction du vent naturel à échelle réduite - Table tournante et support de sonde pilotés par microprocesseur - Chambre de visualisation laser - Fosse de mesure.
- 2 Ecoulement de retour.
- 3 Propulseur avec hélice à pas variable - Traitement acoustique poussé.
- 4 Veine industrielle.
- 5 Echangeur chaud ou froid (contrôle de température).
- 6 Caisson de mesures : environnement de mesure et informatique (PDP 11/34 et 11/23 - VAX 11/75 C).

**Figure 46**

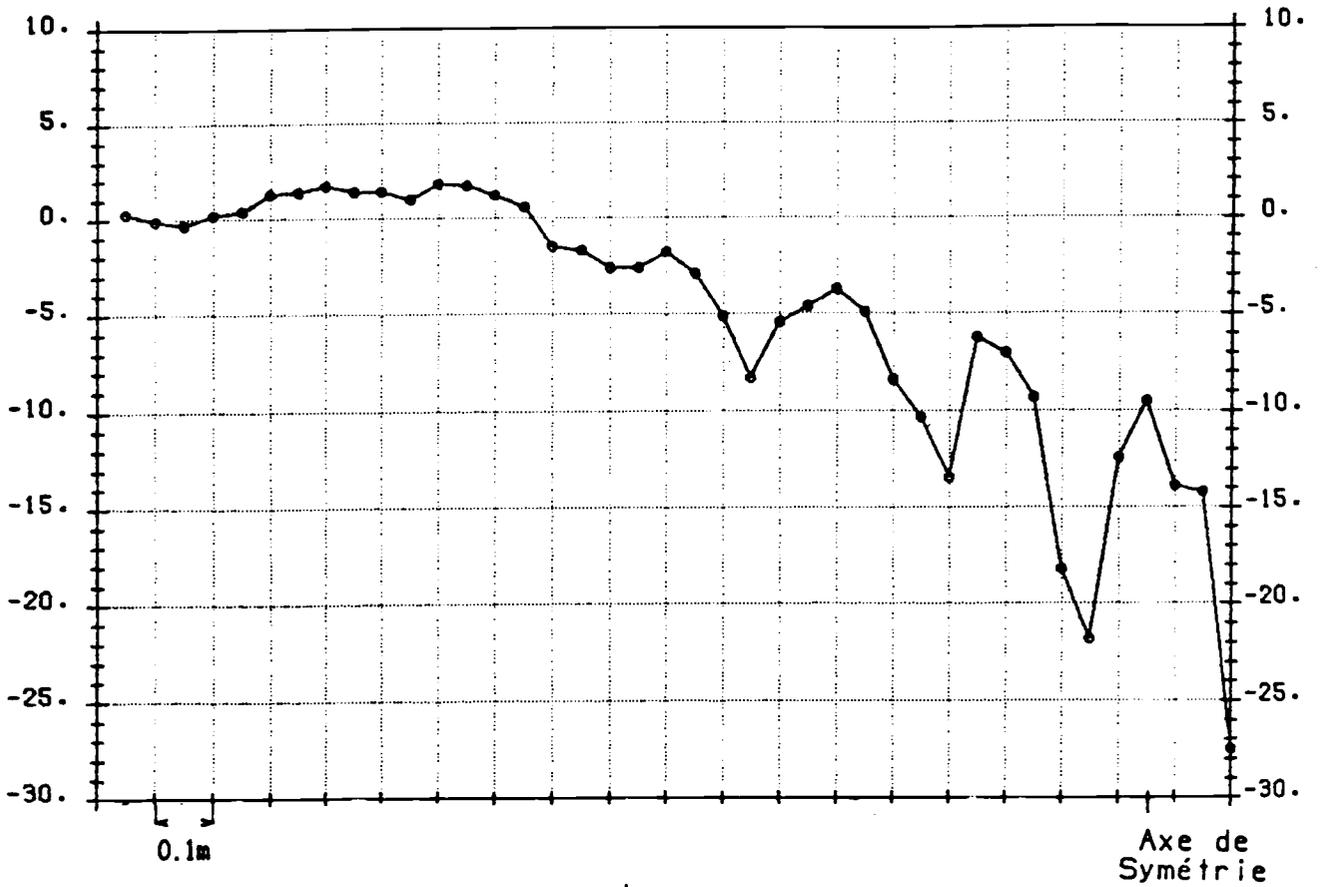
**Caractéristiques techniques de la soufflerie  
du CSTB à Nantes**



**Figure 47**

**Configuration des mesures en soufflerie**

niveau (dB)



a]

Niveau (dB)

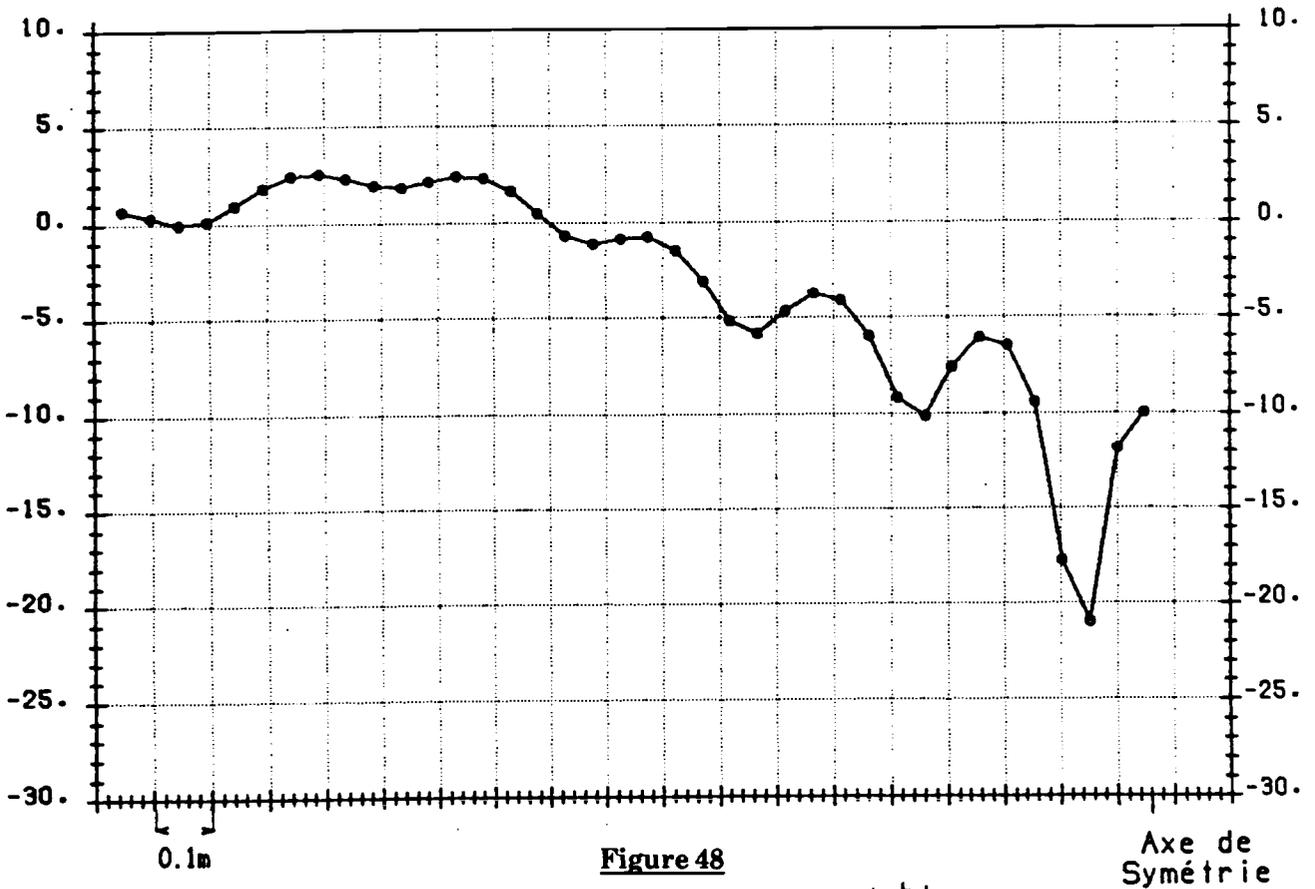
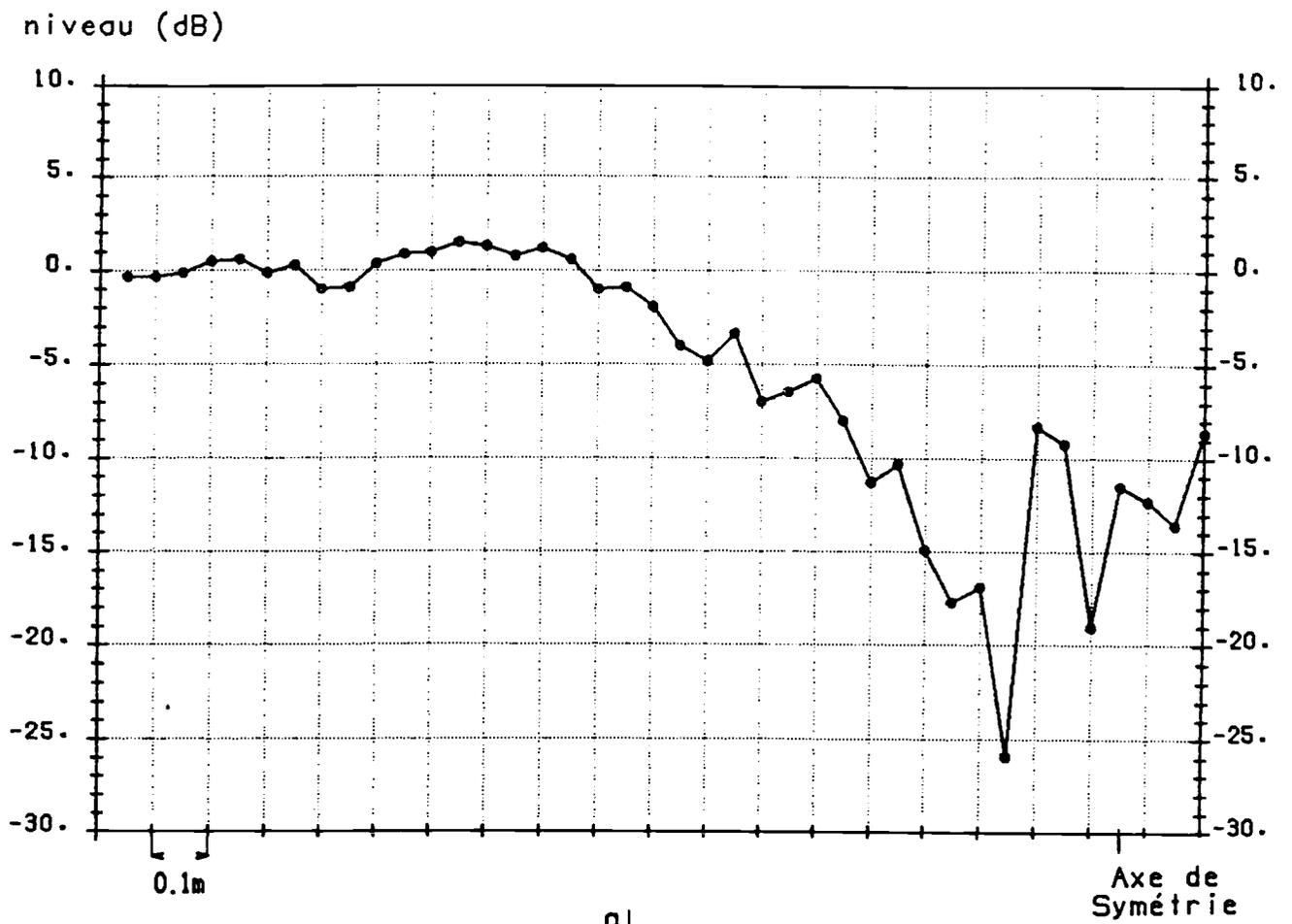


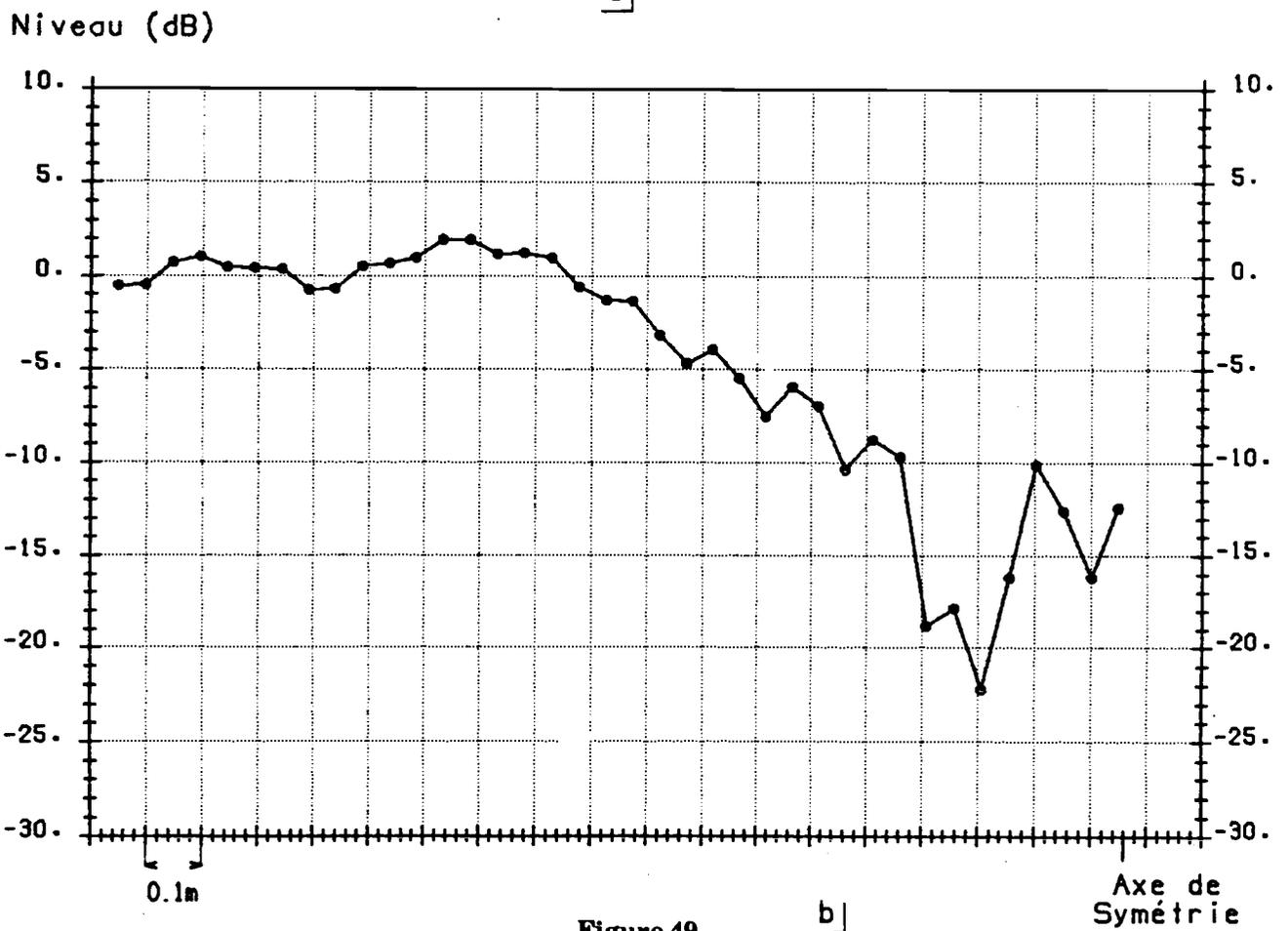
Figure 48

b]

Comparaison entre  
a) Mesures en chambre sourde  
b) Méthode intégrale.  $F = 5$  kHz



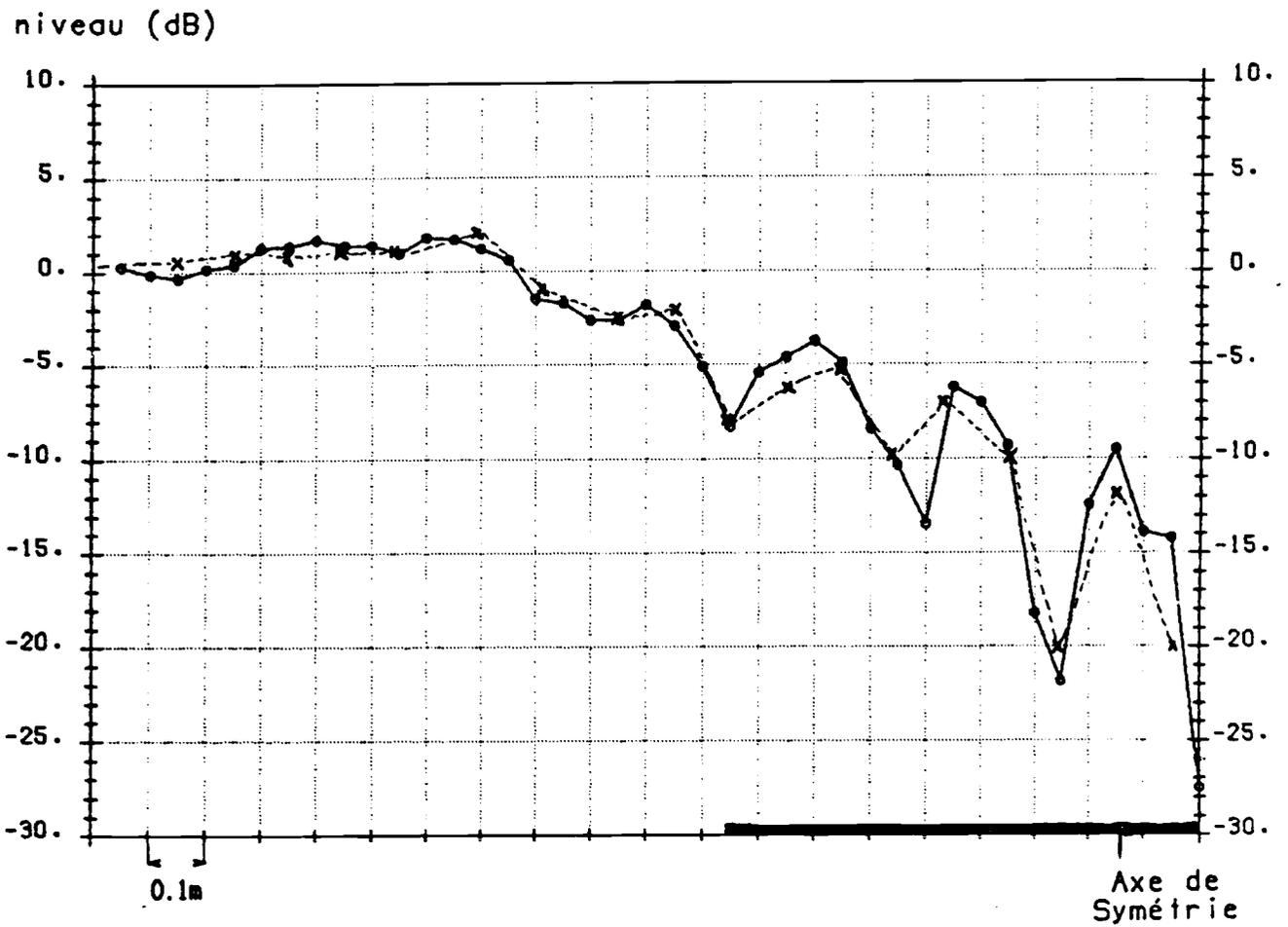
a]



b]

Figure 49

Comparaison entre  
 a) Mesures en chambre sourde  
 b) Méthode intégrale.  $F = 10$  kHz



**Figure 50**

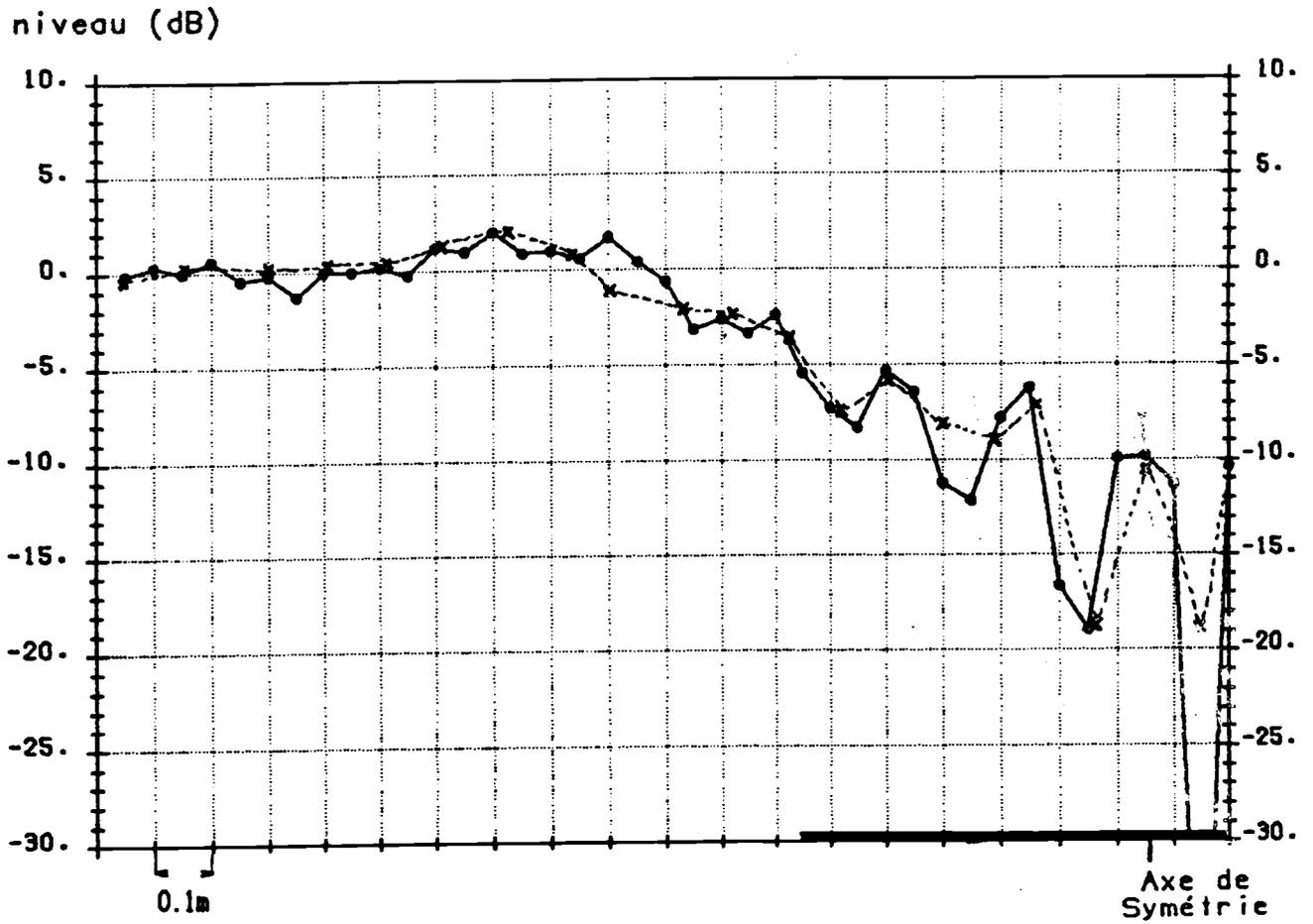
**Comparaison des résultats**

(●—●) : Mesures en chambre sourde

(×----×) : EP3D

**F = 5 kHz, antenne à 3 m de la source**

**En trait épais sur l'axe horizontal : zone d'ombre géométrique**



**Figure 51**

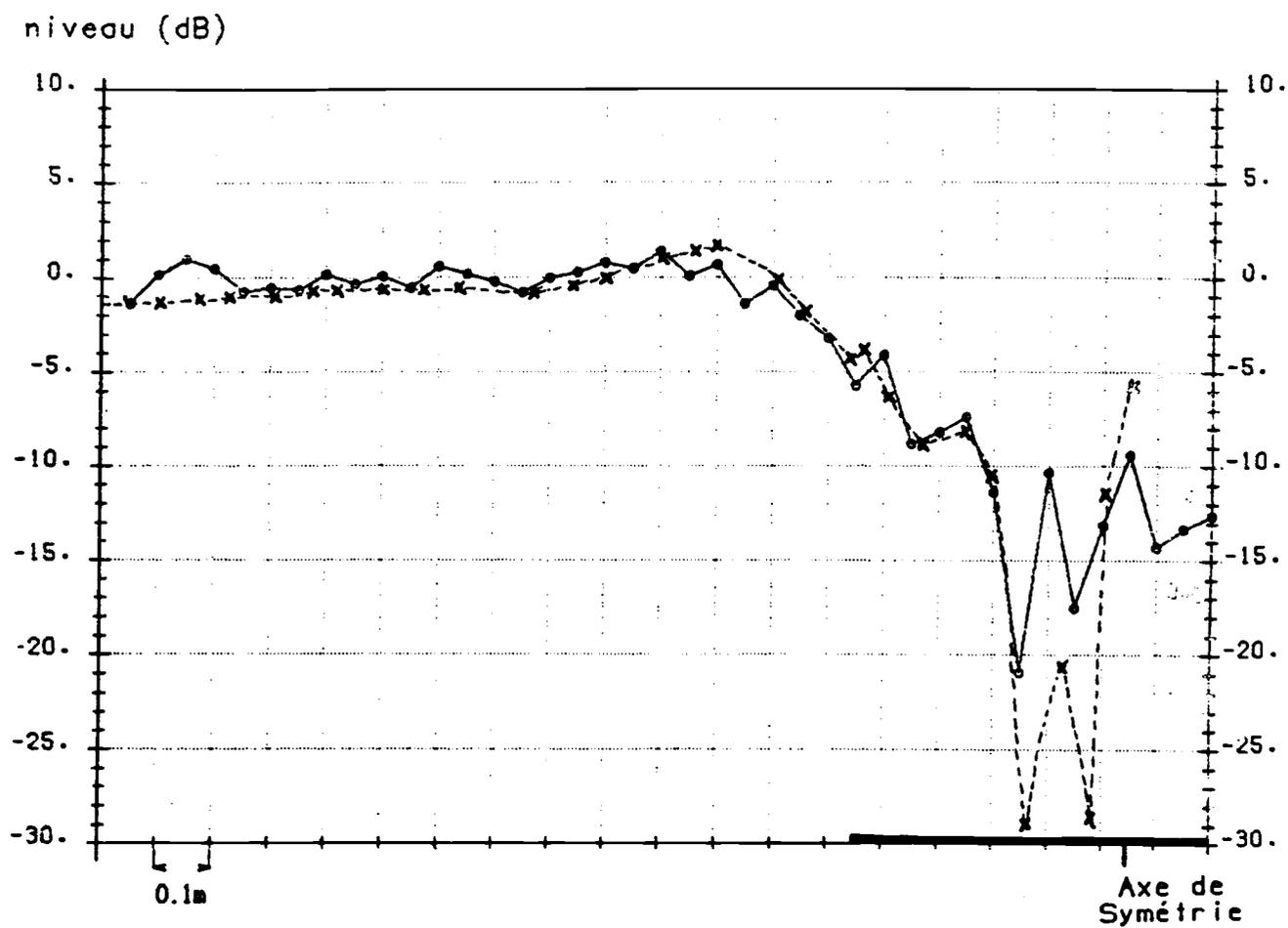
**Comparaison des résultats**

(●—●) : Mesures en chambre sourde

(×----×) : EP3D

F = 5 kHz, antenne à 2,5 m de la source

En trait épais sur l'axe horizontal : zone d'ombre géométrique



**Figure 52**

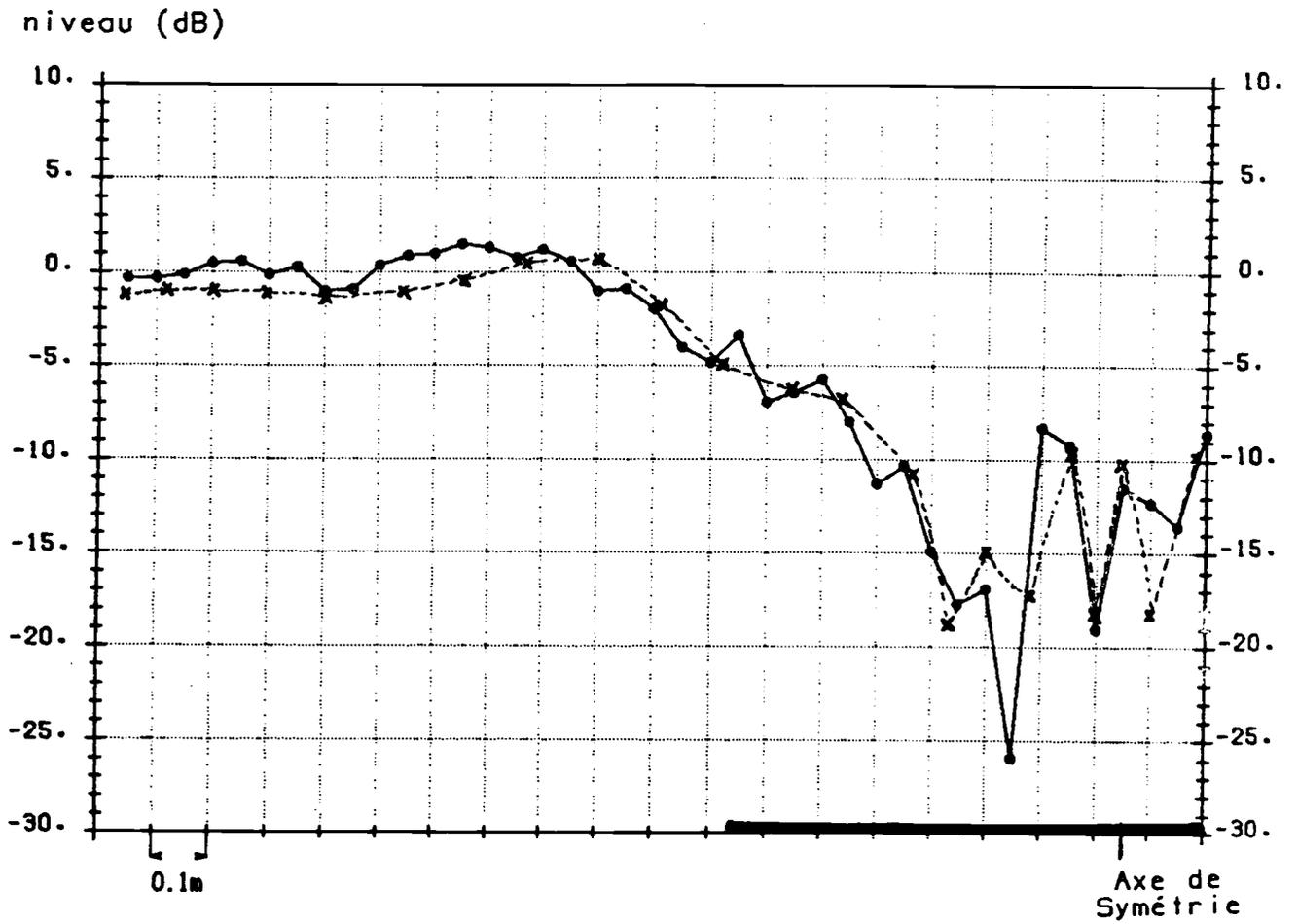
**Comparaison des résultats**

(●—●) : Mesures en chambre sourde

(×-----×) : EP3D

F = 5 kHz, antenne à 2 m de la source

En trait épais sur l'axe horizontal : zone d'ombre géométrique



**Figure 53**

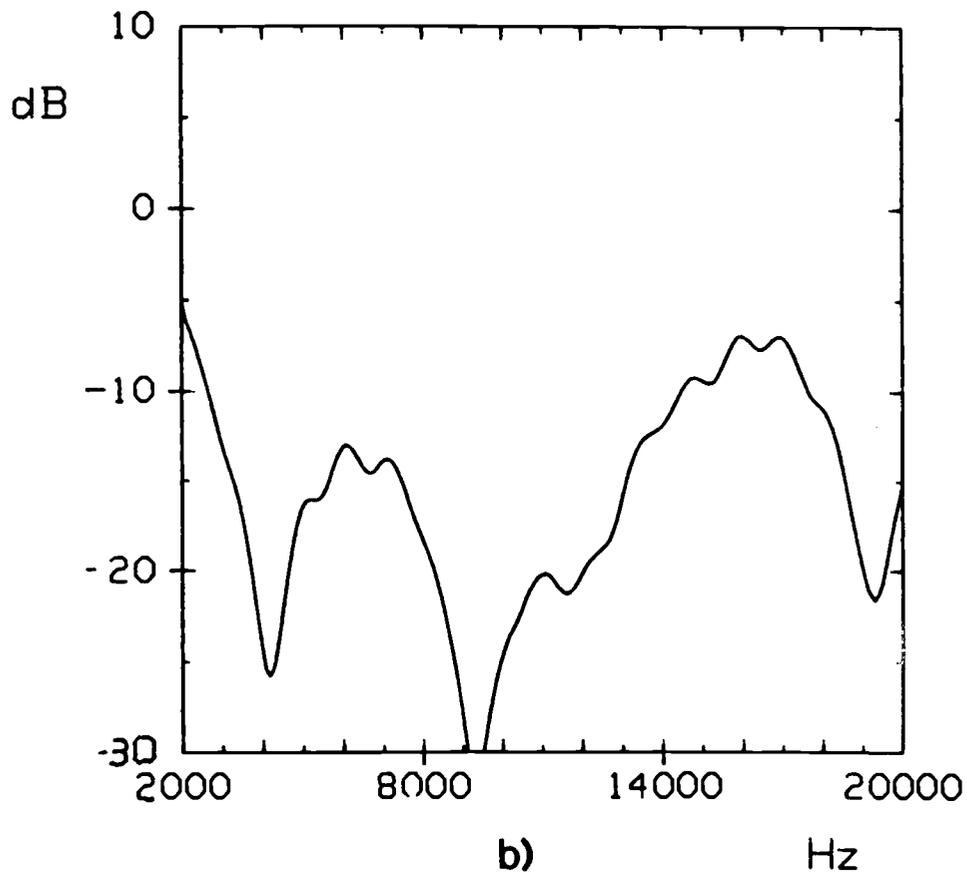
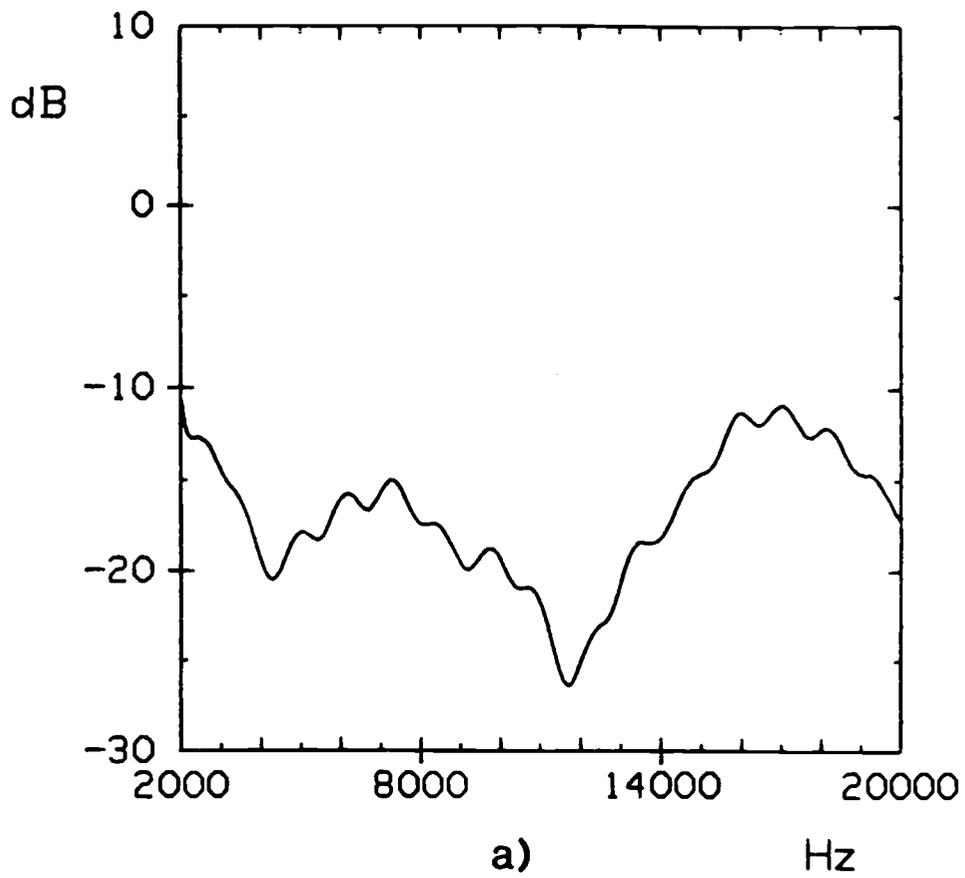
**Comparaison des résultats**

(●—●) : Mesures en chambre sourde

(×---×) : EP3D

**F = 10 kHz, antenne à 3 m de la source**

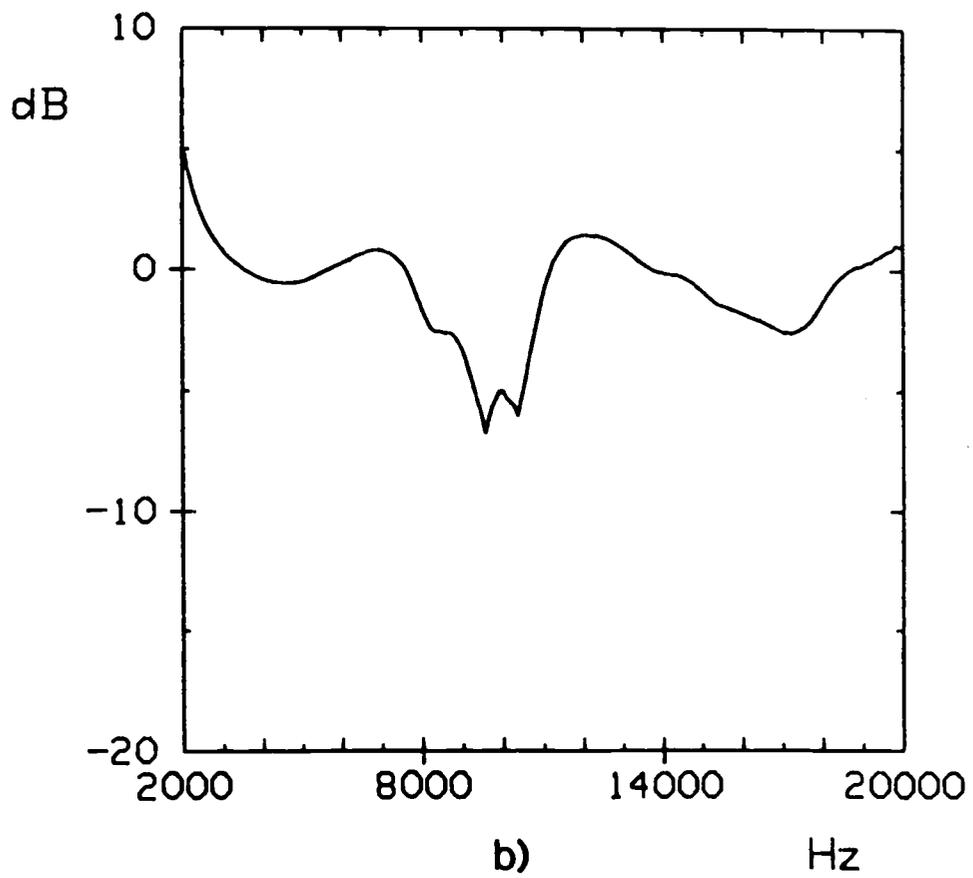
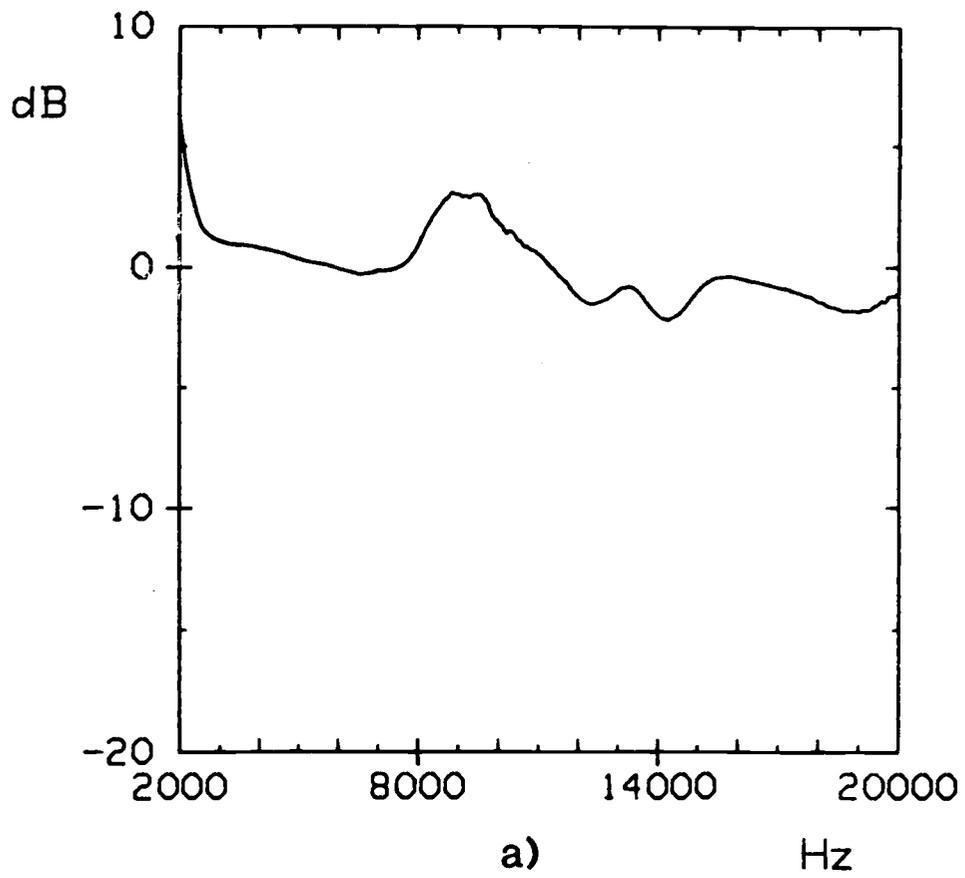
**En trait épais sur l'axe horizontal : zone d'ombre géométrique**



**Figure 54**

**a) Mesure sans vent avec écran droit**

**b) Mesure sans vent avec colline**

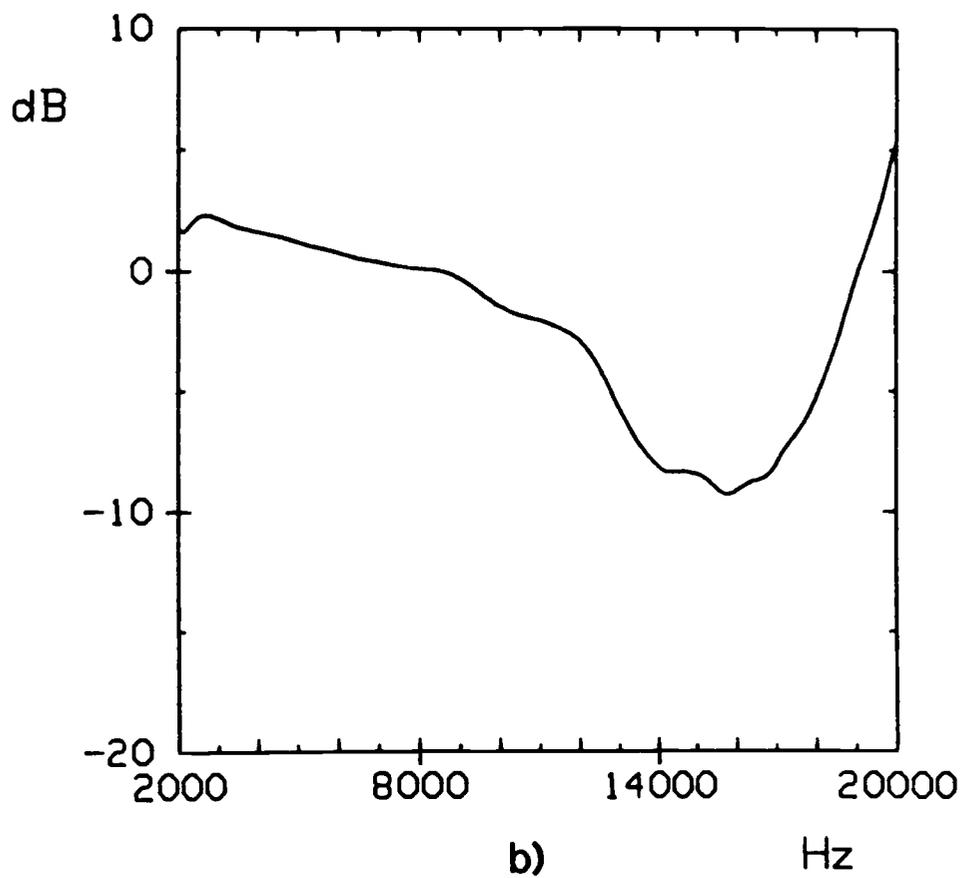
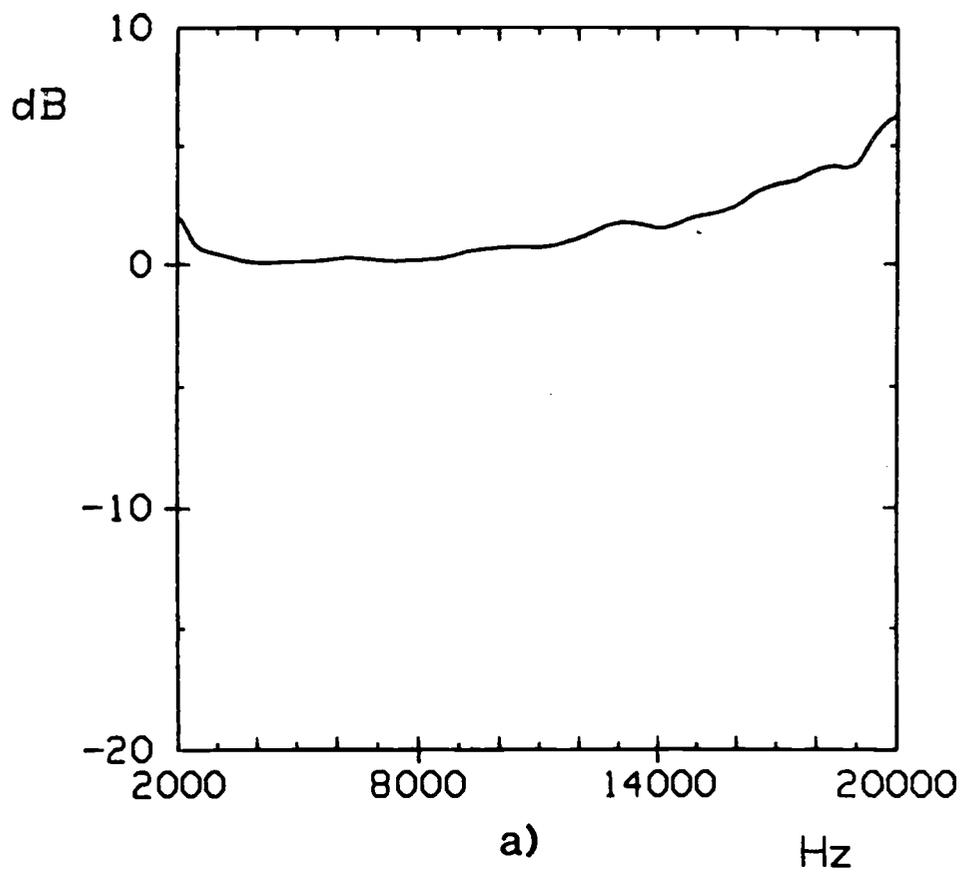


**Figure 55**

**Différences de niveau entre configuration avec vent et sans vent**

**a) Microphone situé à 0,25 m de l'axe (vent "portant")**

**b) Microphone situé à 0,25 m de l'axe (vent "contraire")**

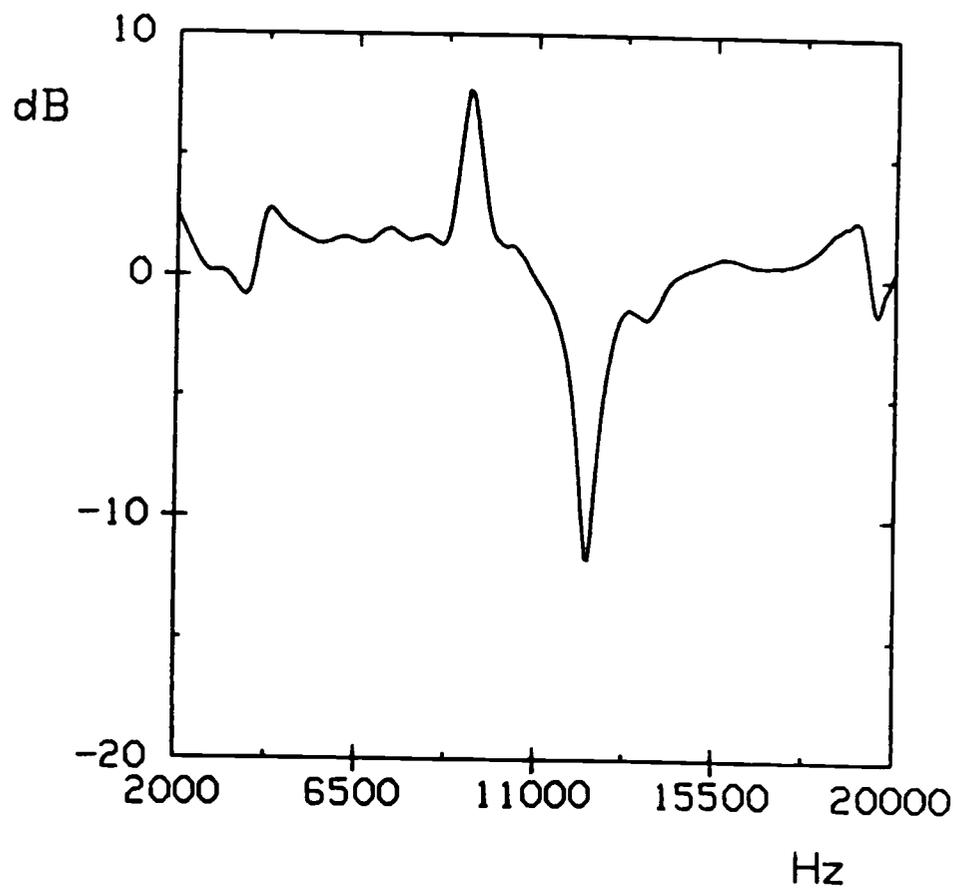


**Figure 56**

**Niveaux relatifs au cas sans vent**

**a) Microphone situé à 1,5 m de l'axe, en amont**

**b) Microphone situé à 1,5 m de l'axe, en aval**

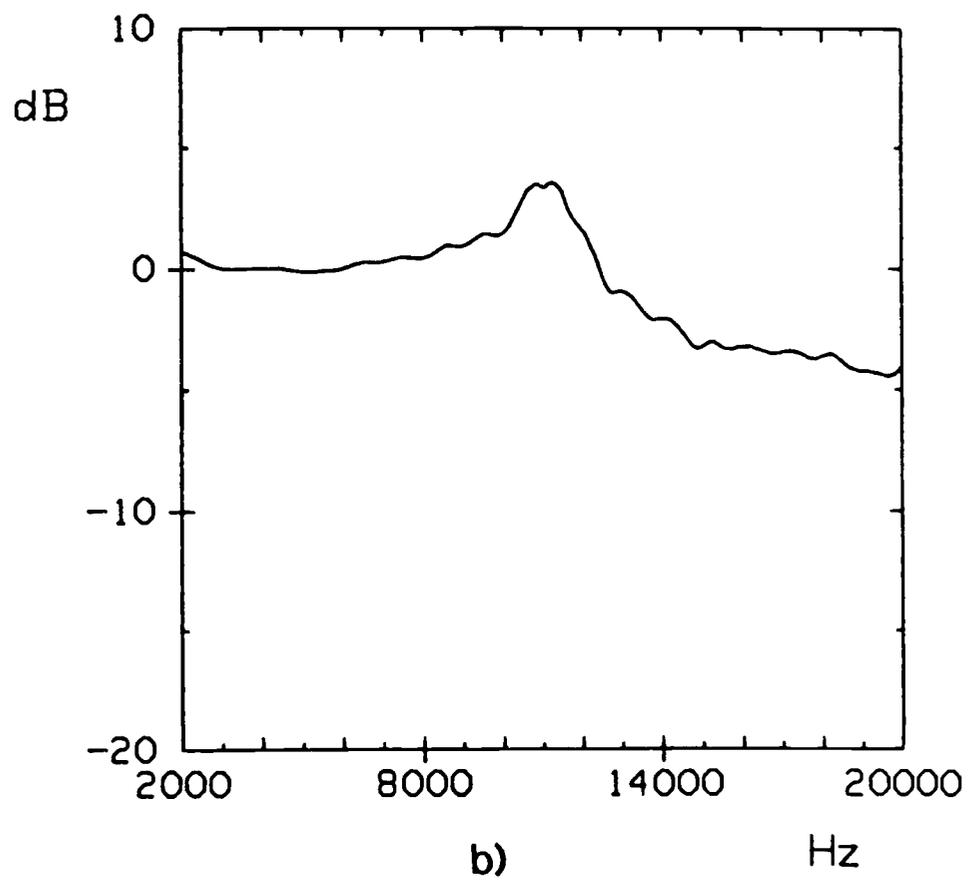
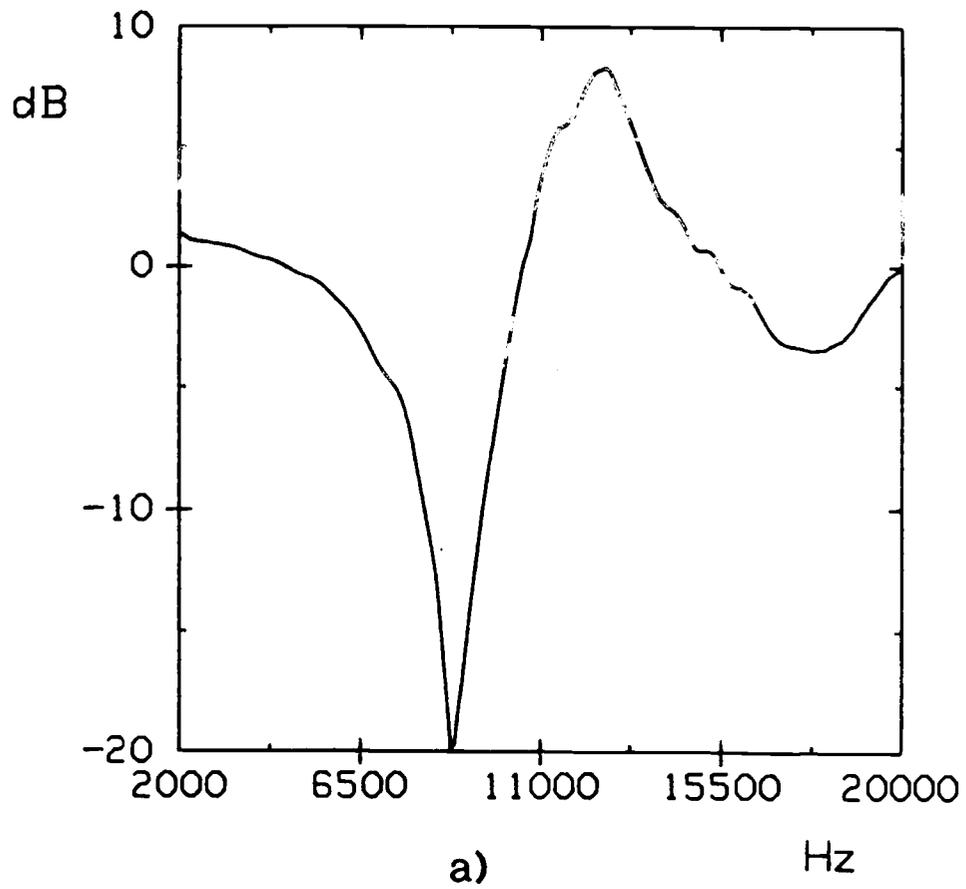


**Figure 57**

**Niveau acoustique relatif au cas sans vent.**

**Microphone situé dans l'axe de symétrie**

**Obstacle : calotte sphérique**

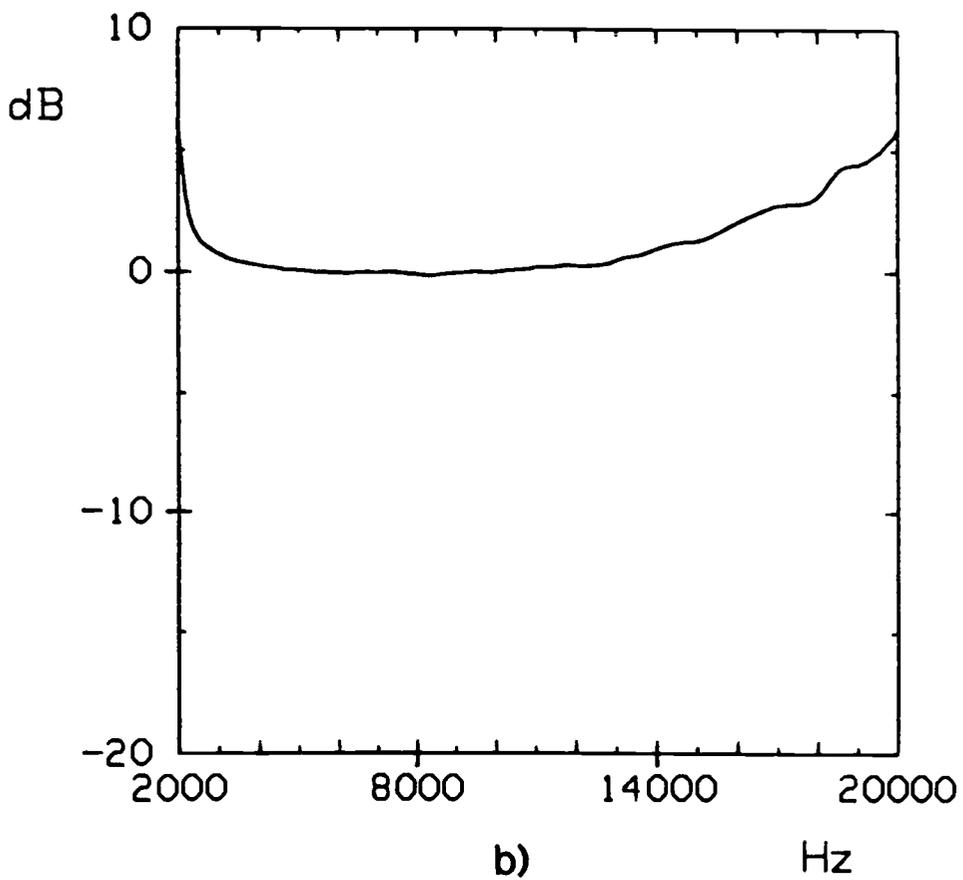
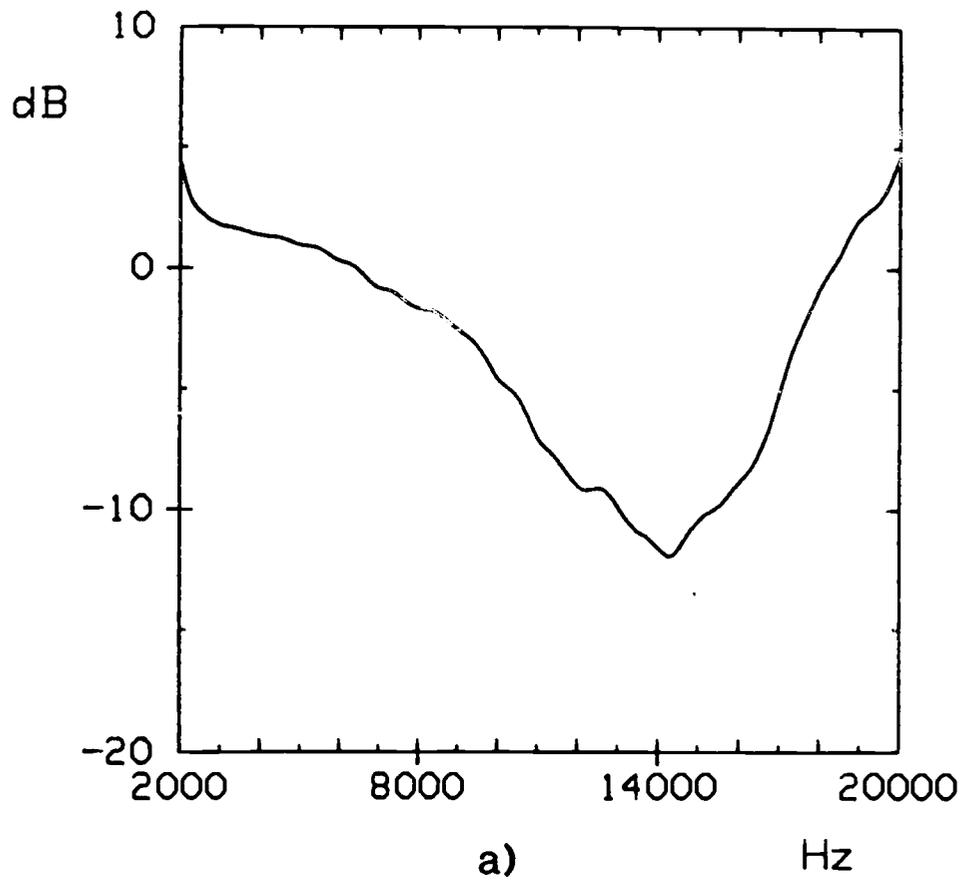


**Figure 58**

**Niveau sonore relatif au cas sans vent**

**a) Microphone situé à 0,5 m de l'axe (vent "portant")**

**b) Microphone situé à 0,5 m de l'axe (vent "contraire")**



**Figure 59**

**Niveau sonore relatif au cas sans vent**

**a) Microphone situé à 1 m de l'axe symétrie (vent "portant")**

**b) Microphone situé à 1 m de l'axe symétrie (vent "contraire")**



# AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr D. JUVE            Professeur - Département ACOUSTIQUE - ECL,

et les rapports de

Mr G. COMTE-BELLOT            Professeur - Département ACOUSTIQUE - ECL,

Mr M. BRUNEAU    Pr - Lab. Acoustique - Université du Maine - B.P. 535 -  
72017 LE MANS CEDEX,

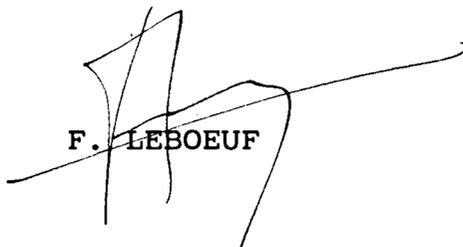
Monsieur **DELRIEUX Yves**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 12 novembre 1991

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la Recherche

  
F. LEBOEUF



