

# Développement de schémas d'interpolation décentrés stables pour le calcul multidomaine en aéroacoustique

D. DESVIGNE, O. MARSDEN, C. BOGEY, C. BAILLY

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509 – Centre acoustique, École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Écully cedex, France

## Résumé :

Une technique d'interpolation explicite décentrée, optimisée, d'ordre élevé avec contrôle de l'amplification est développée afin d'assurer la communication entre différents maillages d'un multidomaine, lorsque les contraintes géométriques ne permettent pas l'usage d'interpolations centrées. Sa stabilité est démontrée théoriquement et validée numériquement sur des cas tests de convection.

## Abstract :

An explicit non-centered optimized high-order interpolation technique with control of the amplification has been developed to handle communication between overset meshes, when centered interpolations can not be used due to geometrical constraints. Its stability is theoretically demonstrated, and is numerically validated with some convection test cases.

**Mots clefs :** interpolation, décentrage, optimisation sous contraintes, multidomaine, stabilité

## 1 Introduction

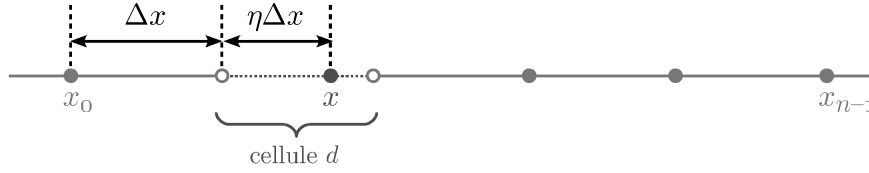
Le développement, au cours de ces deux dernières décennies, de techniques de superposition de maillages, aussi appelées *Chimera method*, ou *Overlapping grid method* ([1],[2]), offre de nouvelles perspectives dans le domaine de la simulation numérique. Ces méthodes rendent en effet accessibles les géométries complexes sans avoir recours à un maillage non structuré. Ceci présente donc un intérêt majeur pour la simulation numérique en aéroacoustique (CAA), dans la mesure où les méthodes numériques développées sont généralement mises en œuvre sur des maillages structurés. Des méthodes d'interpolation centrées précises ont été expérimentées pour assurer la communication entre les différents maillages constituant un multidomaine de calcul, comme les interpolations de Lagrange, les B-splines [3] et les interpolations optimisées de Tam et Kurbatskii [4]. Des études numériques récentes ont montré qu'il était alors possible de simuler avec fidélité des phénomènes acoustiques variés à l'aide de maillages se chevauchant ([5],[6],[7]).

Les méthodes d'interpolation développées dans le cas centré nécessitent généralement un large support de points donneurs (typiquement de 6 à 12 points) pour être suffisamment précises, et par conséquent, ne peuvent être utilisées, pour des raisons géométriques, lorsque le point receveur est trop près de parois. L'interpolation linéaire sur 2 points n'étant pas assez précise pour être utilisée près de bords en CAA, le recours aux interpolations décentrées est la solution envisagée dans ce travail. La méthode présentée est développée conjointement à une méthode de différences finies non dissipative et peu dispersive pour évaluer des dérivées spatiales, une intégration temporelle de Runge-Kutta optimisée, et à un filtrage sélectif pour supprimer les composantes hautes fréquences non résolues par le schéma aux différences finies choisi (voir [8] pour plus de détails).

Une étude préliminaire non présentée dans ce document a montré qu'une généralisation au cas décentré des méthodes d'interpolation de Lagrange ou des méthodes d'interpolation optimisées dans le domaine des nombres d'onde n'était pas satisfaisante. En effet, bien que les méthodes obtenues soient très précises dans le domaine spectral résolu, elles amplifient très fortement, d'un facteur 2 à 100, les composantes à faible longueur d'onde du signal à interpoler, comme par exemple le bruit numérique. Le filtrage sélectif s'avère incapable de compenser une telle amplification haute fréquence à chaque itération, et la simulation est impossible à mener.

## 2 Construction d'un schéma d'interpolation adapté au cas décentré

Soient  $n$  un entier dans  $\mathbb{N}^*/\{1\}$  et  $\mathcal{S} = \{x_0; x_1; \dots; x_{n-1}\}$  un ensemble de  $n$  réels vérifiant  $x_j = x_0 + j\Delta x$ , pour tout  $j \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ , avec  $\Delta x$  le pas de maillage ( $\Delta x > 0$ ). On suppose que les interpolations sont effectuées dans la cellule  $d$  du support de points donneurs (figure 1). Le point receveur  $x$  s'écrit alors  $x = x_0 + (d-1+\eta)\Delta x$ , où  $\eta$  est la partie fractionnaire de  $(x-x_0)/\Delta x$  ( $\eta \in [0; 1[$ ). Le pas de maillage  $\Delta x$  peut être supposé constant sans perte de généralité : en effet, dans le cas contraire, il suffit d'effectuer les

FIG. 1 – Support d’interpolation décentré sur la cellule  $d$ , avec  $n = 6$  et  $d = 2$ .

interpolations dans le domaine transformé et non dans le domaine physique [3].

Soit  $f$  une fonction discrète de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f_j = f(x_j)$  pour tout  $j \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ . Son interpolation à un point receveur  $x$  est notée  $\tilde{f}(x)$ , dont une formulation 1-D explicite non couplée s’écrit [3] :

$$\forall \eta \in [0; 1[, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} s_j^d(\eta) f_j \quad (1)$$

où les  $s_j^d$  sont les  $n$  coefficients d’interpolation à déterminer, qui dépendent de la position  $\eta\Delta x$  dans la cellule d’interpolation  $d$ . Ces fonctions d’interpolation sont déterminées par la résolution d’un problème de minimisation sous contraintes qui est formulé dans la suite.

• **Fonction à minimiser :**

On note  $f_k$  la fonction harmonique de nombre d’onde  $k$  et de déphasage  $\phi$ . On souhaite minimiser  $\varepsilon_{\text{int}}^d$  l’erreur intégrale d’interpolation sur l’intervalle des nombres d’onde adimensionnels  $[\kappa_l; \kappa_u]$ , qui s’écrit :

$$\varepsilon_{\text{int}}^d(\eta) = \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) \right)^2 d(k\Delta x) \quad (2)$$

avec  $\varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x)$  l’erreur locale d’interpolation :

$$\varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) = \left| \frac{f_k(x) - \tilde{f}_k(x)}{f_k(x)} \right| = \left| 1 - \sum_{j=0}^{n-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta x} \right| \quad (3)$$

et  $\chi = 1 - d - \eta$ . Dans l’équation (2),  $\kappa_l$  est fixé à 0, tandis que  $\kappa_u$  est choisi comme la limite de résolution du schéma aux différences finies optimisées à 11 points de Bogey et Bailly, soit  $2\pi/5$ .

• **Contrainte d’ordre :**

On souhaite que l’interpolation soit d’ordre formel  $p$  ( $p \in \{1; 2; \dots; n-1\}$ ), soit  $\tilde{f}(x_j) = f_j + \mathcal{O}(\Delta x^j)$ . Ainsi, on effectue des développements de Taylor de  $\tilde{f}$  à l’ordre  $p$  aux points  $x_j$ . En les réinjectant dans l’équation (1) et en annulant tous les termes d’ordre non nul, on obtient :

$$\forall r \in \{0; 1; \dots; p-1\}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} s_j^d(\eta) (j + \chi)^r = \delta_0^r \quad (4)$$

• **Contrainte d’amplification :**

Cette contrainte a pour objectif de borner l’amplification d’interpolation. On impose que pour tout nombre d’onde, l’amplification locale est majorée par  $1 + \alpha_{\text{tol}}$ , où  $\alpha_{\text{tol}}$  est le seuil de tolérance d’amplification (typiquement  $\alpha_{\text{tol}} = 0.03$ ). Une légère amplification est ainsi tolérée, mais celle-ci reste par construction très modérée, comparée aux facteurs d’amplification obtenus pour une généralisation au cas décentré des méthodes d’interpolation de Lagrange ou des méthodes d’interpolation optimisées. Afin d’obtenir une contrainte souple, on approxime le maximum sur  $k\Delta x \in [0; \pi]$  de l’amplification locale par sa norme  $L^{2q}$ . Le contrôle de l’amplification s’écrit :

$$\int_0^\pi \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) \right)^{2q} d(k\Delta x) = (1 + \alpha_{\text{tol}})^{2q} \quad (5)$$

où  $\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x)$  est l’amplification locale d’interpolation :

$$\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) = \left| \frac{\tilde{f}_k(x)}{f_k(x)} \right| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta x} \right| \quad (6)$$

Le choix de  $q$  est un problème délicat car  $q$  dépend théoriquement de la longueur du support d'interpolation  $n$ , de l'ordre formel d'interpolation  $p$ , de la position d'interpolation  $\eta$  et du décentrage  $d$ . Les simulations ont montré que  $q = 30$  assurait la convergence de l'algorithme d'obtention des coefficients d'interpolation et une bonne précision du calcul.

Le problème d'optimisation sous contraintes est résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En introduisant les multiplicateurs  $\lambda_r$  associés au  $p$  contraintes d'ordre et le multiplicateur  $\mu$  associé à la contrainte d'amplification, le lagrangien  $\mathcal{L}$  associé au problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{n-1}^d, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}, \mu) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) \right)^2 d(k\Delta x) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{n-1} s_j^d (j + \chi)^r - \delta_r^0 \right) \\ &+ \mu \left( \int_0^\pi \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta x) \right)^{2q} d(k\Delta x) - (1 + \alpha_{\text{tol}})^{2q} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Les coefficients d'interpolation sont alors obtenus en résolvant le système non linéaire suivant :

$$\forall l \in \{0; 1; \dots; n-1\}, \forall r \in \{0; 1; \dots; p-1\}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_l^d} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_r} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \quad (8)$$

Le système non linéaire (8) est résolu numériquement à l'aide d'une méthode itérative de Newton-Raphson. Des régressions polynômiales en  $\eta$  d'ordre élevé par morceaux ont été effectuées afin de faciliter la détermination et la manipulation des coefficients d'interpolation correspondants dans la suite.

On note  $\text{COI}npp^d$  la méthode d'interpolation décentrée sur  $n$  points, d'ordre  $p$ , avec un décentrage  $d$ , et avec le contrôle de l'amplification, et  $\text{OI}npp^d$  la même méthode sans la prise en compte de la contrainte sur l'amplification.

### 3 Résultats numériques et stabilité

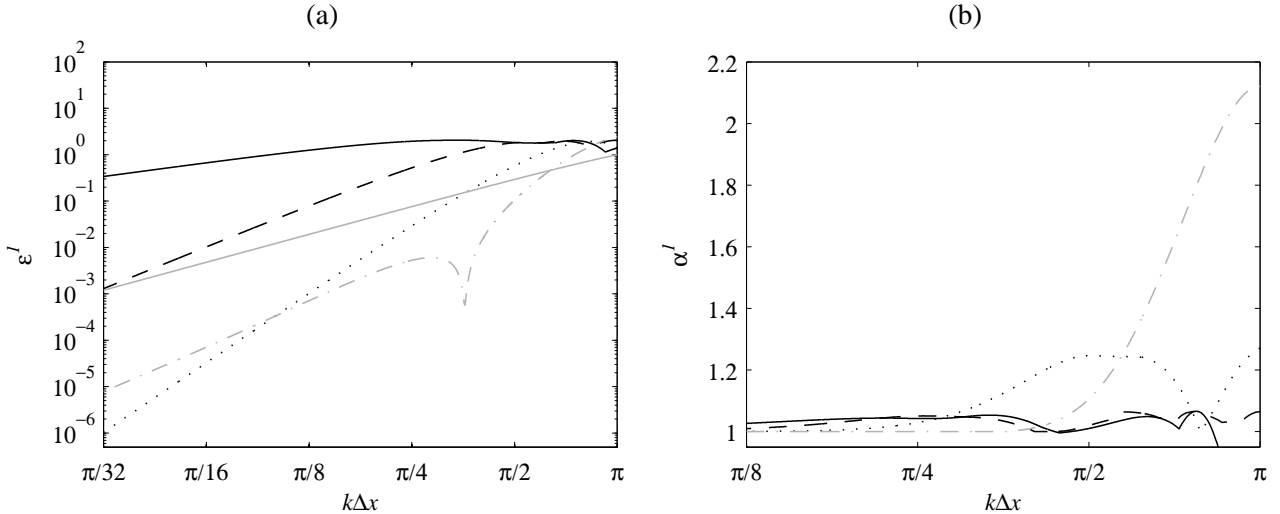


FIG. 2 – (a) : Maximum d'erreur d'interpolation locale pour un décentrage sur la première cellule, en fonction du nombre d'onde. (b) : Maximum d'amplification locale d'interpolation pour un décentrage sur la première cellule, en fonction du nombre d'onde. —  $\text{COI6p1o}^1$  ---  $\text{COI6p3o}^1$ , .....  $\text{COI6p5o}^1$ , —  $\text{OI2p2o}^1$ , —  $\text{OI6p3o}^1$ .

La figure 2(a) montre dans le domaine des nombres d'onde le maximum d'erreur locale d'interpolation pour des méthodes décentrées sur la première cellule, tandis que la figure 2(b) montre le maximum d'amplification associé. On s'aperçoit que pour les méthodes avec contrôle de l'amplification, l'erreur sature près de 2 pour les hauts nombres d'onde (ce qui correspond alors à un déphasage proche de  $\pi$ ), et chutent rapidement pour des nombres d'onde plus faibles. On observe également que plus l'ordre formel est élevé, plus l'erreur décroît rapidement quand le nombre d'onde diminue. Les figures révèlent aussi, en observant les courbes obtenues pour  $\text{OI6p3o}^1$  et  $\text{COI6p3o}^1$  que la diminution significative de l'amplification d'interpolation s'est faite au prix d'une augmentation de l'erreur d'interpolation quel que soit le nombre d'onde. Cependant, l'erreur obtenue pour  $\text{COI6p5o}^1$  reste de plusieurs ordres de grandeur en-deçà de celle obtenue pour une interpolation linéaire ( $\text{OI2p2o}^1$ ) dans le domaine résolu  $[0; 2\pi/5]$ , ce qui est très satisfaisant. On remarque enfin que l'amplification

d'interpolation pour les méthodes avec contrôle reste largement en-deçà de l'amplification obtenue avec des méthodes sans contrôle, mais que l'amplification est supérieure à 1 pour certains nombres d'onde du domaine résolu.

• Étude de stabilité :

À la vue des résultats précédents, les méthodes d'interpolation optimisées décentrées avec contrôle de l'amplification s'avèrent par construction toujours amplificatrices, mais beaucoup plus modérément que les méthodes d'interpolation décentrées optimisées sans contrôle. La partie qui suit étudie la stabilité temporelle de ces méthodes lorsqu'elles sont utilisées conjointement avec un schéma aux différences finies [8], une intégration temporelle de Runge-Kutta optimisée à 6 étapes, et un filtrage sélectif optimisé à 11 points d'ordre 6, dont la dissipation est inférieure à  $5 \times 10^{-3}$  pour des nombres d'onde inférieurs à  $\pi/2$ .

On considère l'équation de convection suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = f_k(x) = e^{ikx+i\phi} \end{cases} \quad (9)$$

avec  $c_0$  une constante. La perturbation initiale se propage sans déformation à la vitesse  $c_0$  et la solution théorique s'écrit  $u_{th}(x, t) = e^{ik(x-c_0t)+i\phi}$ .

On souhaite résoudre numériquement cette équation sur un multidomaine de pas de maillage  $\Delta x$  constant constitué uniquement de la zone de superposition qu'on prendra minimale (voir figure 3), en limitant au maximum le nombre de nœuds libres, et où aucun nœud ne doit à la fois être receveur et donneur pour assurer une intégration temporelle correcte. On choisit de transférer l'information du maillage M vers le maillage M' par une méthode COI8p4o<sup>1</sup> ou OI8p4o<sup>1</sup> tandis que le transfert de M' vers M se fait par une méthode centrée OI8p2o<sup>4</sup>, non amplificatrice par définition. En supposant la valeur théorique à chaque pas de temps aux nœuds

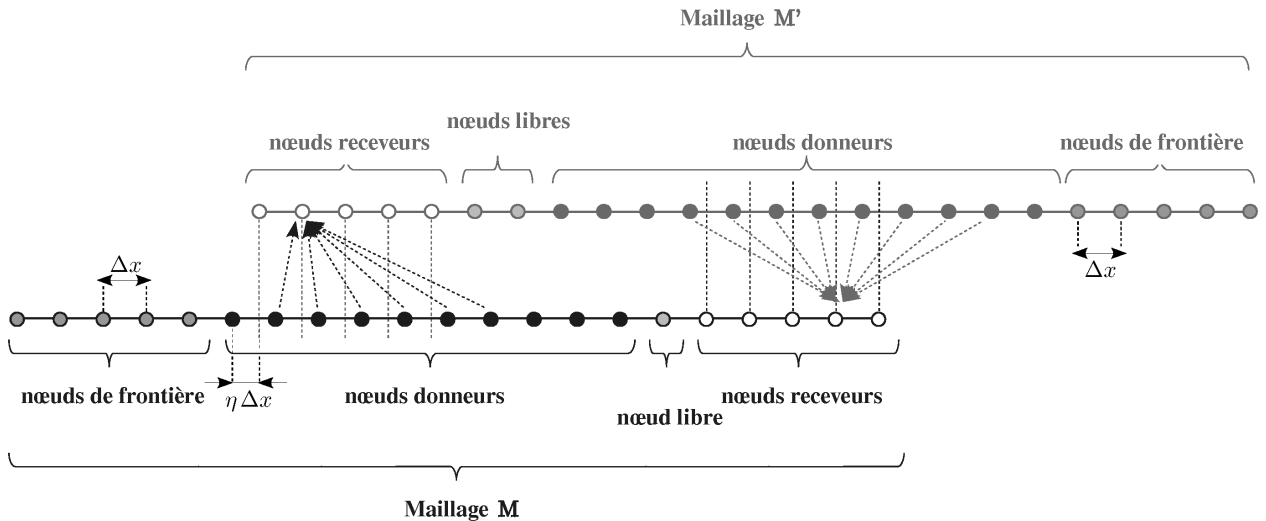


FIG. 3 – Détail de la fonction de chaque nœud de maillage pour une zone de superposition minimale, avec  $n = 6$  et  $d = 1$ .

de frontière, il est possible d'écrire matriciellement la résolution numérique en instationnaire du problème. En notant  $\mathcal{U}^m$  le vecteur des inconnues sur les deux maillages M et M' au temps  $m\Delta t$ , avec  $m \in \mathbb{N}$ , et en définissant une matrice d'intégration temporelle  $\mathcal{M}_{TI}$ , une matrice d'interpolation  $\mathcal{M}_{INT}$ , et une matrice de filtrage  $\mathcal{M}_{SF}$ , l'avancement temporel de la solution est géométrique :

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{M}_{iter} \mathcal{U}^m \quad (10)$$

où  $\mathcal{M}_{iter} = \mathcal{M}_{SF} \mathcal{M}_{INT} \mathcal{M}_{TI}$ .

La matrice  $\mathcal{M}_{iter}$  étant diagonalisable, la stabilité temporelle de la zone de superposition est donnée par :

$$\Lambda(\sigma, CFL) = \max_{\substack{\nu \in \text{Spec } \mathcal{M}_{iter} \\ \eta \in [0; 1[ \\ k\Delta x \in [0; \pi]}} \left| \nu(\eta, k\Delta x, \sigma, CFL) \right| \leq 1 \quad (11)$$

où  $\sigma$  est la force du filtrage sélectif et  $CFL = c_0\Delta t/\Delta x$  la constante de Courant-Friedrichs-Lewy.

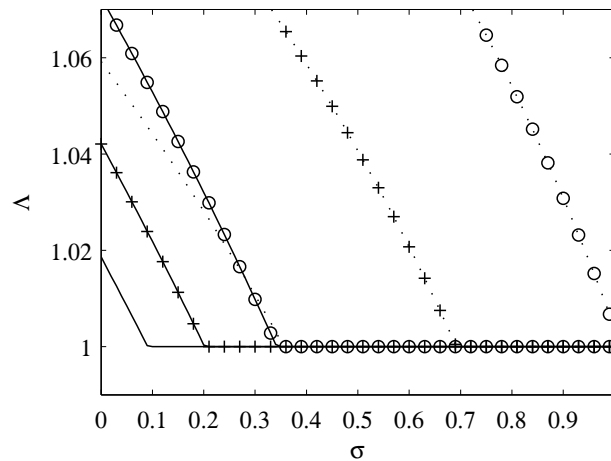


FIG. 4 –  $\Lambda$  en fonction de la force du filtrage sélectif  $\sigma$ , pour différentes valeurs du CFL, et pour des méthodes d'interpolation sur 8 points d'ordre 4 décentrées sur la première cellule, avec et sans contrôle d'amplification.  
 — COI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 0.4), - - - COI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 0.8), —○— COI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 1.2), ···· OI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 0.4), -·-·-· OI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 0.8), ···○··· OI8p4o<sup>1</sup> (CFL = 1.2)

La figure 4 montre l'évolution du critère  $\Lambda$  en fonction de la force du filtrage et du CFL.  $\Lambda$  est une fonction décroissante de la force du filtrage et une fonction croissante du CFL. À CFL constant, on observe que la stabilité ( $\Lambda \leq 1$ ) est obtenue plus rapidement pour les méthodes d'interpolation avec contrôle de l'amplification que leurs méthodes associées sans ce contrôle. Ainsi l'ajout d'une contrainte sur l'amplification d'interpolation a rendu la stabilité de la zone de superposition moins dépendante du filtrage sélectif : pour des CFL  $\leq 1.2$ , la stabilité temporelle est assurée pour un filtrage faible ( $\sigma \leq 0.35$ ), tandis qu'elle n'est obtenue que pour de très forts filtrages dans le cas d'interpolations décentrées sans contrainte sur l'amplification d'interpolation. Ces méthodes peuvent même être inconditionnellement instables, comme c'est le cas pour le schéma OI8p4o<sup>1</sup> à CFL = 1.2.

L'ajout du contrôle de l'amplification d'interpolation rend donc possible l'utilisation d'interpolations décentrées sans avoir à diminuer drastiquement le CFL et/ou augmenter considérablement la force du filtrage sélectif, ce qui n'était pas possible à l'aide d'interpolations décentrées sans contrainte sur l'amplification.

#### 4 Cas-tests de validation

On résout dans cette partie l'équation de convection sur le multidomaine précédent allongé à ses extrémités, et en ajoutant à l'équation de convection un terme source simulant le bruit numérique ambiant : on le modélise par une fonction harmonique ayant une très faible amplitude mais oscillant avec une longueur d'onde sur 2 points de maillage. On choisit de convecter un paquet d'onde ayant de grandes longueurs d'onde (typiquement 30 points de maillage) et une amplitude  $10^5$  fois plus grande que celle du bruit numérique ambiant. CFL est fixé à 0.4, la force du filtrage à  $\sigma = 0.15$  et les interpolations décentrées sont effectuées à la position  $\eta = 0.49$ .

La figure 5 montre le résultat de la convection bruitée pour deux interpolations décentrées testées, avec et sans contrôle de l'amplification. Elle révèle que la méthode sans contrôle est temporellement instable. Le bruit numérique modélisé est en effet considérablement amplifié dans la zone où sont effectuées des interpolations décentrées. Cette erreur est ensuite convectée dans la zone d'interpolation centrée et transférée depuis M' vers le maillage M. L'erreur se propage alors dans le sens contraire à la convection et atteint rapidement la zone d'interpolation décentrée pour générer à nouveau une très forte amplification. Par ce phénomène de bouclage, la simulation se retrouve rapidement contaminée et le paquet d'onde n'est absolument pas retrouvé sur le maillage M' lors de sa convection sur le multidomaine. Un calcul montre que  $\Lambda = 1.035$  pour OI8p4o<sup>1</sup> ce qui permettait de prédire une instabilité temporelle, que l'on observe numériquement avec le jeu de paramètres choisis. Pour la méthode associée avec contrôle de l'amplification COI8p4o<sup>1</sup>, on montre que  $\Lambda = 1$ . Les observations numériques confirment que la méthode décentrée est stable temporellement, et le signal est parfaitement retrouvé sur la maillage M' lors de sa convection sur le multidomaine. Une étude similaire a été menée pour  $\sigma = 0.8$  et a révélé que les deux méthodes d'interpolation testées sont stables, ce que prédisait le critère  $\Lambda$ .

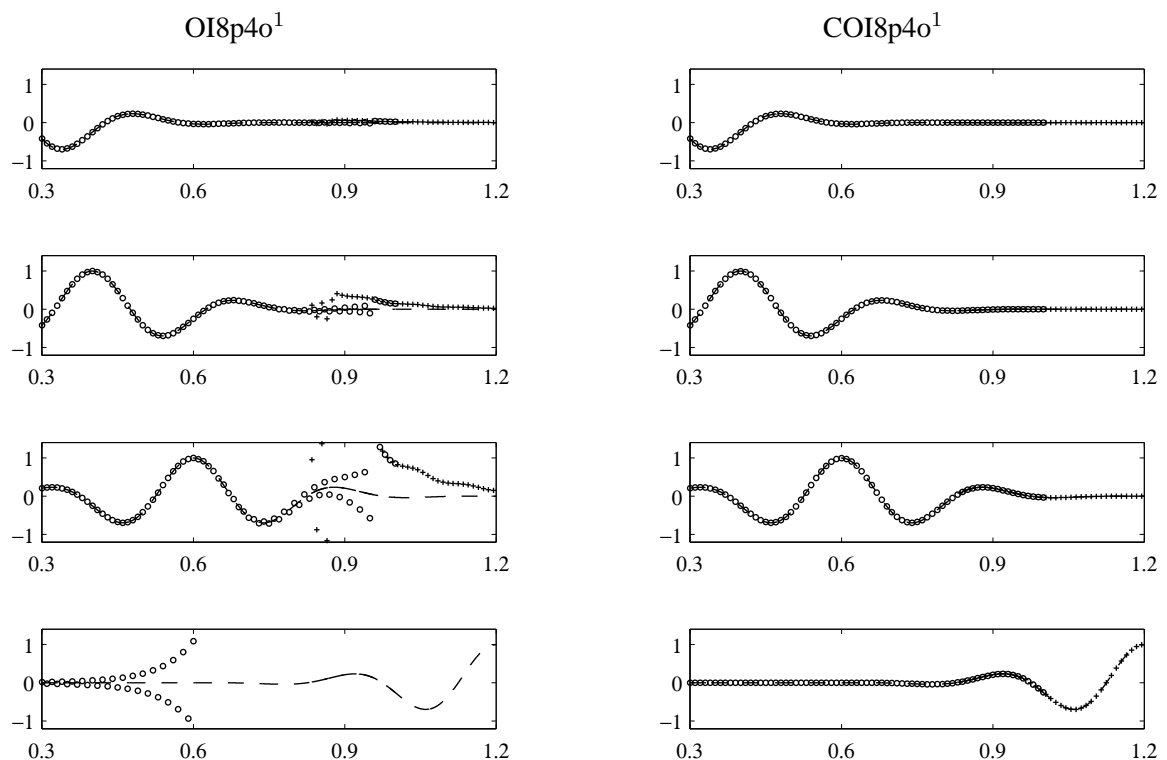


FIG. 5 – Convection bruitée d’un paquet d’onde basses fréquences sur un multidomaine. --- Solution analytique, o o o Solution numérique sur le maillage M, + + + Solution numérique sur la maillage M’.

## 5 Conclusion

Ce travail présente la construction d’une méthode d’interpolation explicite optimisée d’ordre élevé adaptée au cas décentré. Très faiblement amplificatrice, son utilisation couplée à un filtrage sélectif permet d’assurer de manière stable et précise la communication entre différents maillages se recouvrant. Un critère de stabilité a aussi été formulé de manière explicite en fonction de différents paramètres. La stabilité de la méthode développée a été testée sur des cas de convection bruitée 1-D et le critère de stabilité formulé s’est avéré prédictif. La résolution numérique du système non-linéaire issu de l’annulation du gradient du Lagrangien associé au problème d’optimisation (équation (8)) a été menée pour un vaste choix de paramètres  $n$ ,  $d$ , et  $p$ . Les résultats ont montré que les méthodes d’interpolation décentrées les plus performantes sont COI6p5o<sup>1</sup> et COI6p5o<sup>2</sup>, pour un décentrage respectif sur la première et seconde cellule du support d’interpolation. Une mise en œuvre de ces méthodes dans un solveur Navier-Stokes 3-D est actuellement effectuée en vue de simuler le bruit rayonné par une cavité cylindrique peu profonde soumise à un écoulement affleurant.

## Références

- [1] Benek J., Steger J., Dougherty F., and Buning P. Chimera : a grid-embedding technique. Technical report, AEDC TR-85-64, 1986.
- [2] Desquesnes G., Terracol M., Manoha E., and Sagaut P. On the use of high order overlapping grid method for coupling in CFD/CAA. *J. of Computational Physics*, 220, 355–382, 2006.
- [3] Sherer S. and Scott J. High-order compact finite-difference methods on general overset grids. *J. of Computational Physics*, 210, 459–496, 2005.
- [4] Tam C. and Kurbatskii K. A wavenumber-based extrapolation and interpolation method for use in conjunction with high-order finite difference schemes. *J. of Computational Physics*, 107, 262–281, 2000.
- [5] Lummer M., Delfs J., and Lauke T. Simulation of sound generation by vortices passing the trailing edge of airfoils. *AIAA Paper 2002-2578*, 2002.
- [6] Marsden O., Bogey C., and Bailly C. High-order curvilinear simulations of flows around non-cartesian bodies. *J. of Computational Acoustics*, 13, 731–748, 2005.
- [7] Freund J., Lele S., and Moin P. Direct simulation of a mach 1.92 jet and its sound field. *AIAA Paper 1998-2291*, 1998.
- [8] Bogey C. and Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computation. *J. of Computational Physics*, 194, 194–214, 2004.