

# THÈSE

présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir  
le titre de DOCTEUR  
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Damien DESVIGNE

---

**Bruit rayonné par un écoulement subsonique  
affleurant une cavité cylindrique : caractérisation  
expérimentale et simulation numérique par une  
approche multidomaine d'ordre élevé**

---

Soutenue le 3 Décembre 2010 devant le jury composé de

Christophe BAILLY	Directeur
Xavier GLOERFELT	Examineur
Éric LAMBALLAIS	Examineur
Lionel LARCHEVÊQUE	Examineur
Geoffrey LILLEY	Examineur
Olivier MARSDEN	Co-directeur
Thierry POINSOT	Rapporteur
Pierre SAGAUT	Rapporteur
Aloïs SENGISSSEN	Examineur



## Remerciements

Ce travail, qui a débuté en septembre 2007, s'est déroulé au Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'École Centrale de Lyon. Il a été financé par la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace (FRAE).

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mes directeurs de thèse, Christophe Bailly et Olivier Marsden, respectivement professeur et maître de conférences à l'École Centrale de Lyon, pour leur soutien tout au long de cette thèse. Leur très grande disponibilité et leurs compétences ont largement contribué au bon avancement de mes travaux. La confiance et la grande liberté d'action qu'ils m'ont accordées est quelque chose que j'ai réellement apprécié pendant ces trois années au laboratoire. Olivier Marsden mérite un second tour de remerciements, tant son implication, ses recommandations et sa patience ont été des éléments déterminants à la réussite de cette thèse.

J'associe également à ces remerciements Christophe Bogey, chargé de recherche CNRS au Centre Acoustique, pour ses conseils au sujet des méthodes numériques d'ordre élevé, et son aide précieuse concernant la rédaction d'articles scientifiques.

J'exprime toute ma reconnaissance à Pierre Sagaut, professeur à l'Université Pierre & Marie Curie (Paris VI), ainsi qu'à Thierry Poinsot, directeur de recherche au Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) à Toulouse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de le rapporter.

À Geoffrey Lilley, professeur émérite à University of Southampton (Royaume-uni), merci de m'avoir fait l'immense honneur d'être membre du jury.

Je remercie Éric Lamballais, professeur à l'Université de Poitiers, Xavier Gloerfelt, maître de conférences à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) à Paris, Lionel Larchevêque, maître de conférences à l'Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI) à Marseille, ainsi qu'Aloïs Sengissen, docteur-ingénieur à AIRBUS Toulouse, pour avoir accepté de juger ce travail en faisant partie du jury.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Marc Audran, mon professeur de Mathématiques Spéciales. J'ai été tout-à-fait sensible à sa passion communicative des mathématiques. Ses enseignements ont réellement donné un sens au verbe "réfléchir". Ils m'ont aussi apporté rigueur et confiance en moi.

Je salue aussi l'ensemble des membres du Centre Acoustique pour leur bonne humeur et le climat détendu dans lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Je n'oublie évidemment pas Daniel Juvé et Michel Roger, pour m'avoir fait découvrir toutes les subtilités du jeu de Bridge lors des pauses du midi, ainsi que Frédéric Sturm, pour m'avoir fait partager son savoir rugbystique. Je remercie très chaleureusement tous les doctorants, stagiaires et post-doctorants qui ont contribué à l'excellente convivialité du laboratoire. Notamment Gaëlle et Aroune, à qui je dois de mémorables soirées autour d'un biryani maison et de joutes frénétiques de Bomberman, Didier, Nicolas, tous les deux juste imbattables au concours des plus gros mangeurs de tourteaux fromagers, Édouard, Arthur, les deux Benoît, Adrien, Frédéric, et Arnulfo, avec qui je partage la passion du "1c 5major 12-19 1NT 15-17 2NT 20-21 2♣ strong opening 2♦ game forcing 2c long weak Stayman Texas Blackwood Roudi", Gaël, les deux Benjamin, Azzedine, Piotr, Mikhaïl, Alexios, Cyprien, Julien, Arganthaël.

Une pensée particulière est réservée à mes proches, pour leur soutien, leur confiance, et leur infinie patience. Un très grand merci en particulier à mes parents, que j'ai probablement dû user au téléphone avec des conversations vraisemblablement peu intelligibles sur mes travaux. À ma grand-mère Louissette, à ma sœur Aurélie et à mon frère Maxime pour leurs encouragements, surtout pendant les mois les plus difficiles. À Elena, merci pour ton soutien sans faille et ton attention, qui m'apportent courage et réconfortent mon cœur.

## Résumé

Le bruit de cavité est un phénomène très fréquent dans le domaine des transports aériens. Il survient notamment lors de l'approche à l'atterrissage, où des interactions entre la cellule de l'aéronef et l'écoulement sont à l'origine de fortes émissions tonales. Il devient dès lors une source de pollution acoustique non-négligeable pour les populations résidant à proximité de zones aéroportuaires. Les études numériques et expérimentales décrites jusqu'à présent dans la littérature abordent essentiellement le cas des cavités rectangulaires. Pourtant, les cavités rencontrées en pratique dans l'industrie aéronautique impliquent des géométries souvent plus complexes. Lorsque ces cavités sont soumises à une excitation de nature aérodynamique, leur spécificité géométrique conduit le plus souvent à des réponses acoustiques assez éloignées des estimations issues de modèles académiques construits sur l'observation de cavités rectangulaires. Quelques travaux seulement abordent le cas des cavités cylindriques.

Ce travail est consacré à l'étude aéroacoustique des cavités cylindriques, à l'initiative d'AIRBUS. Il s'inscrit dans le cadre du projet AEROCARV soutenu par la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique & l'Espace (FRAE). Son objectif est de déterminer les mécanismes impliqués dans les émissions acoustiques intenses et tonales pour les configurations étudiées.

Une première partie présente les résultats expérimentaux issus des campagnes de mesures menées dans la soufflerie anéchoïque du Centre Acoustique du LMFA et de l'École Centrale de Lyon. Un modèle semi-empirique, reposant sur l'hypothèse d'une résonance acoustique pilotée par les instabilités présentes dans la couche de cisaillement à l'ouverture de la cavité, est construit à partir du modèle d'Elder (1978). Le modèle permet d'estimer les fréquences susceptibles de dominer l'acoustique rayonnée en champ lointain à partir de la donnée du champ moyen de vitesse longitudinale, que l'on mesure dans le plan de l'écoulement par Vélocimétrie par Imagerie des Particules (PIV).

Une seconde partie est destinée au calcul direct du bruit rayonné par un écoulement laminaire ou turbulent affleurant une cavité cylindrique de référence. Il consiste à calculer le champ acoustique directement à partir de la résolution des équations tridimensionnelles de la mécanique des fluides. Le solveur ALESIA est présenté dans une version modifiée et adaptée à la mise en œuvre d'une approche multidomaine d'ordre élevé faisant intervenir plusieurs maillages se recouvrant. Des techniques d'interpolation sont spécifiquement développées en vue d'assurer une communication bidirectionnelle entre les différents maillages, malgré des contraintes géométriques fortes. Un modèle d'excitation de l'écoulement est aussi développé afin de disposer de fluctuations dans l'écoulement incident, pour le cas turbulent. Ces deux points font l'originalité des calculs réalisés.

Les simulations, menées sur une cavité de rapport d'aspect géométrique égal à 1 et soumise un écoulement incident à Mach 0.2, montrent que le rayonnement acoustique peut être fidèlement reproduit numériquement. La couche de cisaillement est caractérisée par la présence de deux larges structures tourbillonnaires s'amplifiant lors de leur convection. Leur présence s'accompagne de fortes fluctuations de vitesse à l'origine d'un débit aérodynamique de fluide à l'ouverture qui excite la cavité acoustiquement. Une résonance forcée s'établit dans celle-ci, excitant la couche de mélange au voisinage du point de séparation. Ce couplage auto-entretenu est à l'origine du rayonnement acoustique intense et fortement tonal de la cavité. Il s'établit à une fréquence proche de la fréquence prédite par le modèle semi-empirique développé.

**Mots-clés :** cavité cylindrique, écoulement subsonique affleurant, résonance acoustique pilotée par les instabilités de la couche cisailée, modèle d'Elder, calcul direct, simulation des grandes échelles, ordre élevé, approche multidomaine, interpolations décentrées, modèle d'excitation de la couche limite

## Abstract

Cavity noise is a very frequent phenomenon in air transport. It occurs in particular during landing approaches, where airframe–flow interactions are responsible for strong tonal emissions. Accordingly, it turns to be a non negligible source of acoustic pollution for populations living near airport areas. Numerical and experimental studies reported in the literature tackle essentially the case of rectangular cavities. Nevertheless, cavities may often exhibit more complex shapes in practice. When subject to aerodynamic excitations, and because of their geometrical specificity, these cavities may have acoustic responses which can be rather far from estimations resulting from academic models designed for rectangular cavities. Only a small number of studies tackle the case of cylindrical cavities.

The present work requested by AIRBUS is dedicated to the study of aeroacoustics in cylindrical cavities. This work was been supported by the Fondation de Recherche pour l’Aéronautique & l’Espace (FRAE) under contract reference AEROCAN. It aims at discerning the mechanisms responsible for strong and tonal acoustic emissions for the studied configurations.

Experimental data resulting from measurements performed in the anechoic wind-tunnel of the Centre Acoustique at École Centrale de Lyon are presented in a first part. A semi-empirical model based on the hypothesis of a shear-layer driven acoustic resonance is constructed from the Elder model (1978). The model provides an estimation of the frequencies which are likely to be predominant in the far-field acoustics, given the mean streamwise velocity field, currently measured in the flow plane by Particle Image Velocimetry (PIV).

A second part deals with the direct computation of the noise radiated by a laminar or turbulent grazing flow over a standard cylindrical cavity. The method consists in the calculation of the acoustic field directly from the resolution of the tridimensional Navier–Stokes equations. The ALESIA solver is presented in a modified form, adapted to the implementation of a high-order chimera method involving several overlapping grids. Interpolation techniques have been specifically developed to achieve a bidirectional communication between the meshes in spite of strong geometrical constraints. A flow excitation model has also been constructed in order to obtain fluctuations into the incoming flow in the turbulent case. These two last points make the present computations original.

The simulations, which are performed on a cavity of geometric ratio taken as 1 and subject to a grazing flow of Mach 0.2, reveal that it is possible to retrieve the radiated noise numerically with high fidelity. They indicate the presence of two large amplifying vortices in the shear layer. These vortices go with strong velocity fluctuations giving rise to an inflow of fluid at the cavity mouth which excites the cavity acoustically. A forced acoustic resonance occurs into the cavity, then destabilises the shear layer near the separation point. This self-sustained coupling is responsible for strong tonal radiations from the cavity. The frequency of the radiated noise is close to the one predicted by the semi-empirical model.

**Keywords :** cylindrical cavity, subsonic grazing flow, shear-layer driven acoustic resonance, Elder model, direct computation, large eddy simulation, high order, chimera / overlapping grid method, noncentered interpolations, boundary-layer excitation model

# Table des matières

Résumé / Abstract	v
Introduction générale	13
<b>1 Étude bibliographique du bruit de cavité</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction	19
1.2 Cavités rectangulaires	21
1.2.1 Premières études expérimentales	21
1.2.2 Caractère 3-D de l'écoulement et influence de la largeur	22
1.2.3 Terminologie et classification	23
1.2.4 Interactions d'origine aérodynamique	24
1.2.5 Résonance acoustique	34
1.2.6 Mode de sillage	37
1.2.7 Précédentes simulations numériques	38
1.3 Cavités cylindriques	39
1.3.1 Classification	39
1.3.2 Résonance acoustique naturelle	41
1.3.3 Modèle de résonance couplée d'Elder	42
1.3.4 Modèle de résonance couplée de Parthasarathy	42
1.3.5 Quid des modes de Rossiter?	43
1.3.6 Précédentes simulations numériques	43
1.4 Conclusion	45
<b>2 Mesures cinématiques et acoustiques sur des cavités cylindriques</b>	<b>47</b>
2.1 Conditions expérimentales	47
2.1.1 Installation et banc d'essais	47
2.1.2 Maquettes des cavités cylindriques	47
2.1.3 Instrumentation	48
2.1.4 Configurations d'étude	51
2.2 Résultats dans la configuration de référence	51
2.2.1 Description de l'acoustique rayonnée en champ lointain	52
2.2.2 Description de l'écoulement	55
2.2.3 Coefficient de pression aux parois	64
2.2.4 Pression fluctuante aux parois	66
2.2.5 Conclusion	70
2.3 Influence de la vitesse et de la profondeur	70
2.3.1 Acoustique rayonnée en champ lointain	70
2.3.2 Pression fluctuante aux parois	74
2.3.3 Conclusion	76
<b>3 Modèle de résonance acoustique pilotée par la couche de mélange</b>	<b>79</b>
3.1 Déstabilisation de la couche de cisaillement par excitation acoustique (fonction FTF)	79
3.1.1 Déplacement de l'interface	80
3.1.2 Estimation du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité	80
3.1.3 Estimation du maximum de déplacement de l'interface	82
3.1.4 Estimation du débit acoustique à l'ouverture de la cavité	83
3.1.5 Fonction de transfert amont FTF	83
3.2 Mode acoustique de profondeur entretenu (fonction BTF)	84

3.2.1	Estimation de l'impédance acoustique de la cavité . . . . .	84
3.2.2	Estimation de l'impédance acoustique de l'ouverture de la cavité . . . . .	85
3.2.3	Fonction de transfert aval BTF . . . . .	85
3.3	Prédiction des pulsations auto-entretenues . . . . .	85
3.4	Application aux cavités cylindriques étudiées . . . . .	85
3.4.1	Détermination semi-empirique des paramètres du modèle . . . . .	85
3.4.2	Résultats pour la configuration de référence . . . . .	86
3.4.3	Résultats pour les autres configurations . . . . .	87
3.5	Approximation des fréquences des modes I et II . . . . .	88
3.6	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Développement d'un code de simulation avec recouvrement de maillages</b>	<b>91</b>
4.1	Équations de Navier–Stokes pour un fluide compressible . . . . .	91
4.2	Approches numériques du calcul direct du bruit . . . . .	93
4.2.1	Les différentes approches . . . . .	93
4.2.2	Équations de Navier–Stokes filtrées pour la LES . . . . .	95
4.3	Discrétisation du domaine de calcul par recouvrement de maillages . . . . .	100
4.3.1	Méthode de recouvrement de maillages . . . . .	100
4.3.2	Maillage composite d'une cavité cylindrique . . . . .	101
4.4	Flux eulériens et visqueux en 2–D et 3–D . . . . .	104
4.4.1	Formulation 2–D en coordonnées cartésiennes . . . . .	105
4.4.2	Formulation 2–D en coordonnées polaires . . . . .	105
4.4.3	Formulation 3–D en coordonnées cartésiennes . . . . .	107
4.4.4	Formulation 3–D en coordonnées cylindriques . . . . .	108
4.5	Traitement des points intérieurs d'un maillage élémentaire . . . . .	109
4.5.1	Dérivation spatiale . . . . .	109
4.5.2	Filtrage sélectif . . . . .	110
4.5.3	Intégration temporelle . . . . .	113
4.5.4	Critère de stabilité . . . . .	114
4.5.5	Traitement de l'axe en coordonnées polaires ou cylindriques . . . . .	117
4.6	Traitement des points de frontière d'un maillage élémentaire . . . . .	119
4.6.1	Décentrage des schémas de dérivation spatiale et du filtrage . . . . .	120
4.6.2	Condition de rayonnement de Tam & Dong . . . . .	121
4.6.3	Condition de sortie et élaboration d'une zone éponge . . . . .	124
4.6.4	Condition d'entrée . . . . .	124
4.6.5	Condition de paroi solide . . . . .	125
4.6.6	Traitement spécifique des points au coin de fond de cavité . . . . .	126
4.6.7	Condition de périodicité . . . . .	127
4.7	Calcul des champs moyens . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Outils de communication associés à l'utilisation de recouvrements de maillages</b>	<b>131</b>
5.1	Contexte . . . . .	131
5.1.1	Contraintes numériques . . . . .	131
5.1.2	Contraintes géométriques . . . . .	132
5.1.3	Environnement mathématique . . . . .	135
5.2	Techniques d'interpolation 1–D . . . . .	136
5.2.1	Interpolations de Lagrange 1–D . . . . .	136
5.2.2	Interpolations optimisées 1–D . . . . .	141
5.2.3	Mise en œuvre d'une communication bidirectionnelle . . . . .	146
5.3	Interpolations décentrées optimisées 1–D avec contrôle de l'amplification . . . . .	147
5.3.1	Contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation . . . . .	148
5.3.2	Résolution par la méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	149
5.3.3	Résultats numériques . . . . .	151
5.3.4	Interpolation sur la première cellule du support : COI6p5o <sup>1</sup> . . . . .	153
5.3.5	Interpolation sur la seconde cellule du support : COI6p5o <sup>2</sup> . . . . .	155
5.3.6	Stabilité temporelle . . . . .	156
5.3.7	Cas-tests de validation . . . . .	159
5.3.8	Conclusion . . . . .	160
5.4	Décentrage progressif . . . . .	163
5.5	Techniques d'interpolation multidimensionnelle . . . . .	163

5.5.1	Interpolation par produit tensoriel d'interpolations 1-D . . . . .	163
5.5.2	Interpolation de Lagrange 2-D . . . . .	167
5.6	Cas tests de validation . . . . .	171
5.7	Parallélisation du code de simulation . . . . .	176
5.7.1	Plateformes parallèles . . . . .	177
5.7.2	Bibliothèque MPI pour le calcul parallèle . . . . .	177
5.7.3	Parallélisation du maillage cartésien supérieur . . . . .	178
5.7.4	Parallélisation de la cavité . . . . .	179
5.7.5	Efficacité de la parallélisation . . . . .	182
<b>6</b>	<b>Implémentation numérique de la couche limite incidente</b>	<b>191</b>
6.1	Couche limite laminaire . . . . .	191
6.1.1	Équation de Blasius . . . . .	191
6.1.2	Résolution numérique de l'équation de Blasius . . . . .	192
6.1.3	Approximations de la solution de Blasius . . . . .	192
6.2	Couche limite turbulente . . . . .	194
6.2.1	Introduction . . . . .	194
6.2.2	Modèle de perturbation du profil moyen de Sandham <i>et al.</i> . . . . .	197
6.2.3	Développement d'un modèle de perturbation . . . . .	202
<b>7</b>	<b>Calcul direct du bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité cylindrique</b>	<b>221</b>
7.1	Construction du maillage composite . . . . .	221
7.1.1	Pas de discrétisation des maillages élémentaires . . . . .	221
7.1.2	Parallélisation et partitionnement des maillages élémentaires . . . . .	222
7.2	Conditions initiales . . . . .	224
7.2.1	Initialisation de l'écoulement incident . . . . .	224
7.2.2	Initialisation des variables thermophysiques . . . . .	224
7.2.3	Régime transitoire . . . . .	224
7.3	Description de l'acoustique rayonnée . . . . .	224
7.3.1	Signaux temporels de pression fluctuante . . . . .	224
7.3.2	Visualisation du champ de pression fluctuante . . . . .	226
7.3.3	Spectre acoustique . . . . .	228
7.4	Description de l'écoulement . . . . .	229
7.4.1	Champ de vitesse . . . . .	229
7.4.2	Champs turbulents . . . . .	236
7.4.3	Épaississement de la couche de cisaillement . . . . .	239
7.5	Pression statique . . . . .	240
7.5.1	Pression statique dans les plans $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ . . . . .	240
7.5.2	Coefficient de pression aux parois . . . . .	241
7.6	Couche cisailée et larges structures tourbillonnaires . . . . .	243
7.6.1	Cas laminaire . . . . .	243
7.6.2	Cas turbulent . . . . .	248
7.7	Déphasage pression-vitesse au coin aval . . . . .	251
7.7.1	Opérateur de moyennage en phase . . . . .	251
7.7.2	Résultats . . . . .	253
7.8	Vitesse de convection à l'ouverture de la cavité . . . . .	254
7.8.1	Vitesse locale de convection . . . . .	254
7.8.2	Temps moyen de traversée de l'ouverture de la cavité . . . . .	255
7.8.3	Vitesse moyenne de convection . . . . .	256
7.9	Résonance acoustique dans la cavité . . . . .	257
7.9.1	Cas laminaire . . . . .	258
7.9.2	Cas turbulent . . . . .	259
7.9.3	Moyenne quadratique des fluctuations de pression à la paroi latérale . . . . .	261
7.10	Déplacement de l'interface . . . . .	262
7.10.1	Méthode de détermination de l'interface . . . . .	262
7.10.2	Résultats . . . . .	264
7.11	Entrée/Sortie de fluide à l'ouverture de la cavité . . . . .	265
7.12	Conclusion . . . . .	267
	<b>Conclusion générale</b>	<b>271</b>

<b>A</b>	<b>Coefficients des méthodes numériques décentrées</b>	<b>275</b>
A.1	Dérivation spatiale décentrée . . . . .	275
A.2	Filtrage sélectif décentré . . . . .	275
A.3	Interpolations décentrées . . . . .	276
A.3.1	COI6p5o <sup>1</sup> . . . . .	277
A.3.2	COI6p5o <sup>2</sup> . . . . .	278
<b>B</b>	<b>Détails de développement des méthodes d'interpolation</b>	<b>281</b>
B.1	Interpolation optimisée . . . . .	281
B.2	Interpolation optimisée avec contrôle de l'amplification d'interpolation . . . . .	283
B.2.1	Dérivation du Lagrangien . . . . .	283
B.2.2	Méthode de Newton-Raphson et matrice jacobienne . . . . .	285
B.2.3	Étude de stabilité et matrices des opérateurs numériques . . . . .	285
<b>C</b>	<b>Équation d'Orr-Sommerfeld généralisée pour un profil turbulent moyen</b>	<b>291</b>
C.1	Établissement de l'équation . . . . .	291
C.2	Résolution numérique . . . . .	293
C.2.1	Décomposition orthogonale de Tchebychev . . . . .	294
C.2.2	Formulation matricielle . . . . .	301
C.2.3	Résultats . . . . .	302
	<b>Notations</b>	<b>305</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>311</b>





# Introduction générale

## Problématique générale

Les dernières décennies ont vu l'essor considérable des moyens de transport à grande vitesse, ce qui pose le problème de la gestion du bruit qu'ils génèrent. L'industrie aéronautique est particulièrement concernée. En effet, le transport aérien reste aujourd'hui source de nuisances sonores importantes susceptibles d'affecter gravement les populations riveraines des grandes plates-formes aéroportuaires. Face à l'augmentation soutenue du trafic aérien (de l'ordre de 16% dans la zone euro entre 2004 et 2009 pour le nombre de passagers aéroportés, et de 9% pour le fret, selon Eurostat [77, 78]), combinée à l'urbanisation croissante des périphéries des grandes villes qui atteignent dorénavant les zones aéroportuaires initialement éloignées des secteurs urbanisés, de plus en plus de personnes se retrouvent exposées à ces nuisances sonores pouvant porter atteinte à leur santé. À titre illustratif, la figure 1 propose une vue aérienne de la plate-forme aéroportuaire de Paris-Orly, où les installations sont aujourd'hui intégralement implantées dans le dense tissu urbain environnant. Cette vue donne une idée de l'ampleur du nombre de personnes résidant à proximité de l'aéroport et subissant constamment les nuisances sonores d'origine aéroportuaires.

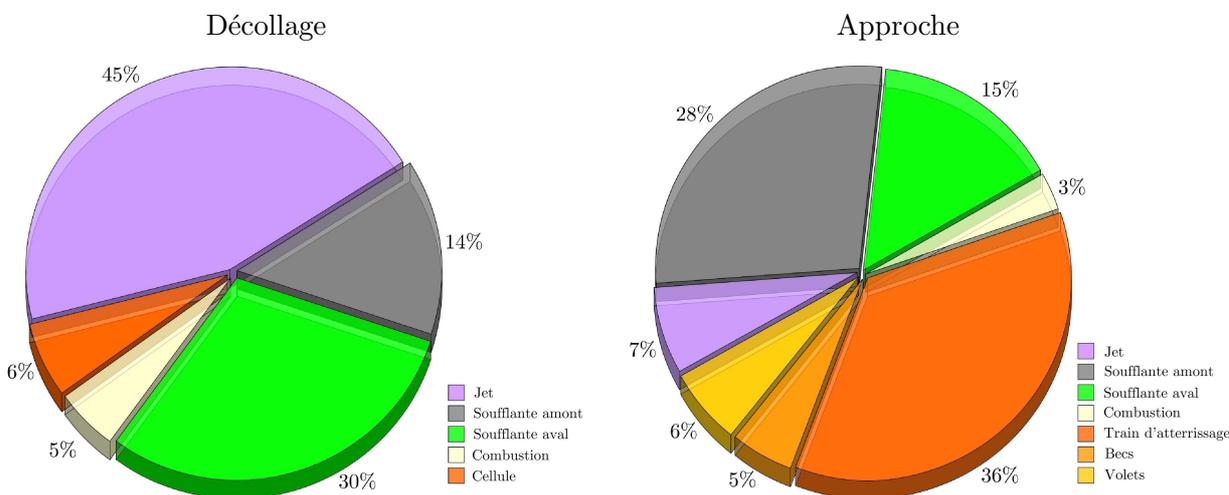
Plusieurs mesures ont été prises ces dernières années pour lutter contre ces nuisances sonores : élimination des appareils les plus bruyants, interdiction des essais-moteurs, limitation des mouvements aéroportuaires de nuit. Le paragraphe II de l'article 11 du Grenelle de l'Environnement (2008) prévoit de renforcer la réglementation concernant les nuisances sonores aéroportuaires [116]. Celui-ci prévoit également des mesures d'ensemble, comme le relèvement



**Fig. 1:** Vue aérienne de la plate-forme aéroportuaire de Paris-Orly (France) en 2010. source : [maps.google.fr](http://maps.google.fr)

de 300 mètres de l'altitude de tous les avions lors de leur arrivée au-dessus de l'Île-de-France, qui doit permettre une diminution de moitié du bruit au sol.

Des efforts sont consentis par les avionneurs dans l'optique de réduire à la source ces nuisances sonores. Des mesures récentes leur ont permis de quantifier avec précision, sur des appareils modernes, les contributions des principales sources acoustiques sur le bruit rayonné en fonction de la phase de vol, comme le montre la figure 2 pour un avion long courrier de la famille Airbus.



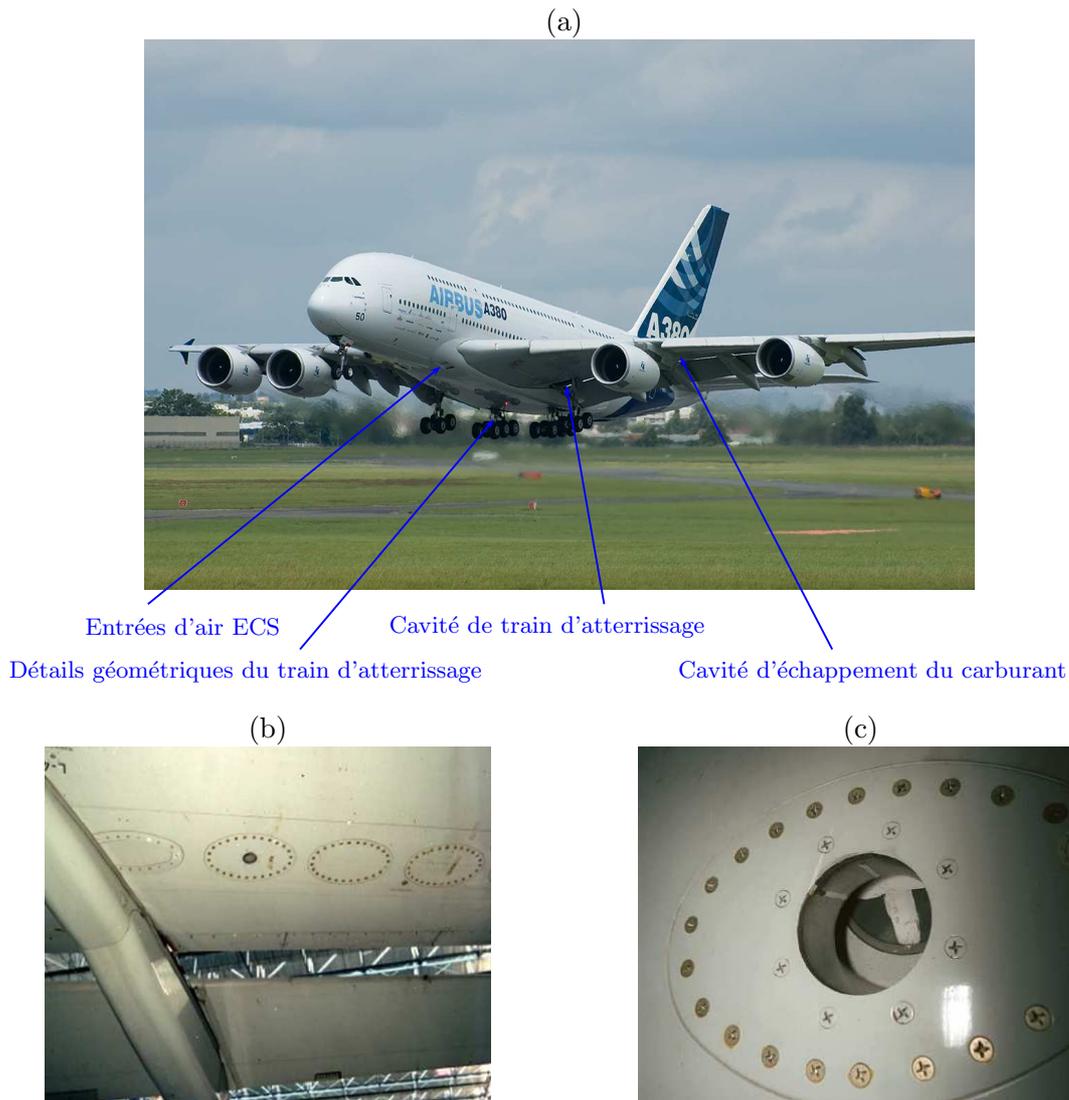
**Fig. 2:** Répartition typique des sources de bruit d'un avion long courrier de la famille Airbus au décollage et en configuration d'approche. (d'après [209])

Les études indiquent que le bruit rayonné au décollage est de nature propulsive, dont les principales sources sont la motorisation (soufflante amont, soufflante aval) et le jet issu des réacteurs. En phase d'approche, le bruit d'origine aérodynamique devient considérable, avec 47% du bruit rayonné provenant de la cellule (*airframe*). La forme extrêmement peu aérodynamique des trains d'atterrissage [107], ainsi que les multiples cavités que l'on retrouve sur certaines pièces, comme les interstices ailes-volets hypersustentateurs (*flaps*) et ailes-becs de bord d'attaque (*slats*), les cavités d'échappement du carburant (*burst-disk cavities*), les entrées d'air des systèmes de contrôle environnemental (*ECS cavities*) etc., contribuent principalement au bruit rayonné par l'aéronef. La figure 3(a) offre une vue générale des localisations des différentes cavités que l'on retrouve sur un Airbus A380. Les figures 3(b) et 3(c) proposent des vues détaillées des cavités d'échappement de carburant que l'on retrouve usuellement sous les ailes.

Parvenir à prédire précisément le bruit rayonné par ces cavités présenterait un intérêt à la fois industriel et scientifique. En effet, cela offrirait la possibilité d'identifier et de mieux comprendre les mécanismes générateurs de bruit, ouvrant la voie à leur contrôle et à la réduction des nuisances que ces cavités engendrent. Quelques modèles analytiques, comme le modèle de Rossiter (1964), permettent d'appréhender relativement simplement certains mécanismes de génération de bruit, et de prédire assez fidèlement les fréquences dominant le spectre acoustique rayonné par des cavités rectangulaires, sans toutefois renseigner sur le niveau de ces pics. La particularité géométrique des cavités que l'on rencontre en pratique ne permet généralement pas l'application directe de ces modèles.

## L'aéroacoustique numérique (CAA – *Computational AeroAcoustics*)

L'outil numérique pourrait répondre en partie à ces besoins. En effet, l'augmentation croissante de la puissance de calcul et de stockage rend envisageable la simulation numérique



**Fig. 3:** (a) Vue générale des localisations des cavités sur un Airbus A380. (b) Cavité d'échappement du carburant. (c) Zoom d'une cavité d'échappement du carburant. (d'après [209])

d'écoulements complexes de fluide avec prise en compte du champ acoustique rayonné.

L'acoustique se révèle cependant bien plus difficile à capturer numériquement que les autres grandeurs de l'écoulement, en raison de la forte différence d'échelle caractérisant les fluctuations acoustiques par rapport aux fluctuations aérodynamiques. Ces fluctuations acoustiques sont typiquement de plusieurs ordres de grandeur plus petites que les oscillations aérodynamiques [232]. De plus, leurs longueurs d'onde sont souvent significativement plus grandes que les dimensions caractéristiques de l'écoulement, telle l'épaisseur de la couche visqueuse pour les écoulements de paroi. On comprend dès lors que le nombre de points à traiter numériquement devient considérable si l'on souhaite résoudre à la fois une couche limite et obtenir quelques longueurs d'onde du bruit généré.

La plupart des théories aéroacoustiques sont développées à partir de l'analogie de Lighthill (1952), qui propose une recombinaison des équations de la mécanique des fluides afin de faire apparaître le bruit généré par un écoulement comme la solution d'une équation de propagation dans un milieu au repos :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_\infty^2 \Delta \rho = \text{div div } \mathbf{T}$$

La quantité  $\rho$  représente la masse volumique du fluide, et  $c_\infty$  la vitesse du son dans le milieu au repos. Le membre de droite de l'équation correspond au terme source acoustique. Le tenseur  $\mathbf{T}$ , appelé tenseur de Lighthill, est construit à partir des champs de vitesse aérodynamique. Cette analogie constitue l'une des premières formulations simples du couplage entre la génération et la propagation du bruit [22].

Une première approche numérique, dite hybride, exploite cette analogie. L'écoulement est d'abord résolu numériquement à l'aide d'un code de calcul de type CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Ce champ aérodynamique permet d'évaluer le tenseur de Lighthill dans l'équation précédente. L'application de l'analogie permet alors d'obtenir le rayonnement acoustique en champ lointain généré par l'écoulement. L'application de cette méthode dans des cas pratiques nécessite toutefois la délimitation d'une zone de sources [154], ce qui peut engendrer des erreurs notamment au niveau des frontières de cette zone où une troncature est effectuée dans les équations. Une estimation correcte du tenseur de Lighthill impose également une bonne connaissance de la précision nécessaire concernant le calcul CFD préliminaire.

Une seconde méthode consiste à résoudre les équations de la mécanique des fluides sur un domaine de calcul suffisamment grand et de manière suffisamment précise pour obtenir directement l'écoulement et son rayonnement acoustique. Aucune analogie n'est employée pour parvenir au champ acoustique rayonné : on parle alors de **calcul direct**. Ce procédé impose cependant de fortes contraintes numériques sur les algorithmes de résolution, car ceux-ci doivent être en mesure de capturer et préserver les fluctuations acoustiques malgré des différences d'échelle conséquentes avec les grandeurs aérodynamiques. Les méthodes de résolution doivent donc être faiblement dissipatives, en vue d'éviter l'atténuation des ondes acoustiques lors de leur propagation, et très peu dispersives, afin de ne pas modifier le contenu fréquentiel des phénomènes simulés.

Le développement de schémas numériques performants faiblement dissipatifs et faiblement dispersifs connaît un formidable essor depuis une vingtaine d'années. Le code de calcul ALESIA, développé en cartésien par Bogey, permet la résolution précise des équations de Navier–Stokes 2–D puis 3–D dans le cadre d'une étude de bruit de jets ronds subsoniques [22]. Le solver a été complété par la suite par Gloerfelt qui y a inclus des conditions de paroi rendant accessible l'étude numérique du rayonnement acoustique généré par un écoulement affleurant une cavité rectangulaire [97]. Le solver a ensuite été décliné dans des versions cylindrique par Barré [10], pour l'étude de jets ronds subsoniques, curviligne et multidomaine par Marsden [153, 154] afin d'étudier le bruit rayonné par des profils.

## Objectifs de l'étude

Il existe à ce jour relativement peu d'études expérimentales et numériques caractérisant le comportement aéroacoustique des cavités cylindriques. On se propose donc dans un premier temps de traiter et de synthétiser l'intégralité des données expérimentales brutes issues de campagnes de mesures menées à la soufflerie anéchoïque du Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon dans le cadre du projet AEROCV, soutenu par la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique & l'Espace (FRAE).

On souhaite aussi développer un code de simulation permettant de mener des calculs aéroacoustiques directs sur de telles cavités. Ce code est construit sur le solver ALESIA autour de schémas numériques explicites d'ordre élevé développés par l'équipe d'aéroacoustique numérique du Centre Acoustique. On proposera ici une version modifiée et adaptée à la mise en œuvre d'une approche multidomaine. Son bon comportement est vérifié à l'aide de comparaisons avec les données expérimentales sur une configuration de référence. Le code de simulation permet d'explorer en détail l'influence de l'état de la couche limite incidente sur la réponse acoustique de la cavité à l'excitation aérodynamique.

Un objectif majeur est également l'identification et la compréhension des mécanismes générateurs de bruit. Un modèle est enfin à envisager, reproduisant le processus de génération

de bruit, dans l'optique de retrouver les fréquences dominant le spectre acoustique rayonné par la cavité.

## Organisation du mémoire

Ce manuscrit comprend sept chapitres. Une première partie introductive propose une synthèse bibliographique des études expérimentales et numériques portant sur l'aéroacoustique se développant dans des cavités rectangulaires et cylindriques. Une analyse des mesures effectuées au Centre Acoustique sur des cavités cylindriques est développée au chapitre 2. Le troisième chapitre revisite le modèle semi-empirique de résonance acoustique pilotée par la couche de mélange, proposé par Elder, en l'adaptant au cas des cavités cylindriques, en vue de prédire les fréquences susceptibles de dominer l'acoustique rayonnée. On présente dans un quatrième chapitre le développement d'un code de simulation d'ordre élevé sur plusieurs maillages se recouvrant. Le recours à plusieurs maillages permet en effet d'utiliser des algorithmes numériques éprouvés tout en tenant compte de la particularité géométrique des cavités considérées, ce que ne permet généralement pas un unique maillage pour des géométries complexes. Le cinquième chapitre présente les outils numériques utilisés en vue d'assurer une communication bidirectionnelle entre les différents maillages constituant le domaine de calcul. Une technique d'interpolation bidimensionnelle décentrée d'ordre élevé est développée dans l'optique de permettre cette communication à proximité de parois. La dernière partie de ce chapitre aborde la mise en œuvre du calcul à grande échelle, et présente des notions de parallélisation. Le sixième chapitre est consacré à l'implémentation numérique d'une couche limite incidente. Le cas d'une couche limite laminaire est d'abord présenté. L'obtention d'une couche limite incidente de type turbulente, présentant des fluctuations ayant des amplitudes raisonnables, nécessite l'élaboration à l'amont de la cavité d'une modèle d'excitation du profil turbulent moyen de vitesse. Le dernier chapitre présente une synthèse des résultats obtenus issus des simulations numériques. Ces résultats sont confrontés aux données expérimentales et aux estimations obtenues à l'aide du modèle d'Elder. Ils permettent d'avancer une explication sur les mécanismes de génération de bruit.



## Chapitre 1

# Étude bibliographique du bruit de cavité

---

Dans tout le manuscrit, la quantité  $\mathbf{u}$  représente la vitesse eulérienne d'une particule fluide, et on note  $(u_1, u_2, u_3)$  ses composantes dans la base orthonormée  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Les quantités  $p$  et  $\rho$  représentent respectivement la pression du fluide et la masse volumique du fluide en un point  $M$ , repéré par ses coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . L'opérateur de moyennage temporel est noté  $\bar{\cdot}$ . Les variables indexées par  $'$  représentent les variables fluctuantes autour de leur moyenne temporelle. Enfin, tous les processus relatifs à la turbulence sont supposés ergodiques, si bien que leur moyenne statistique est égale à leur moyenne temporelle [93].

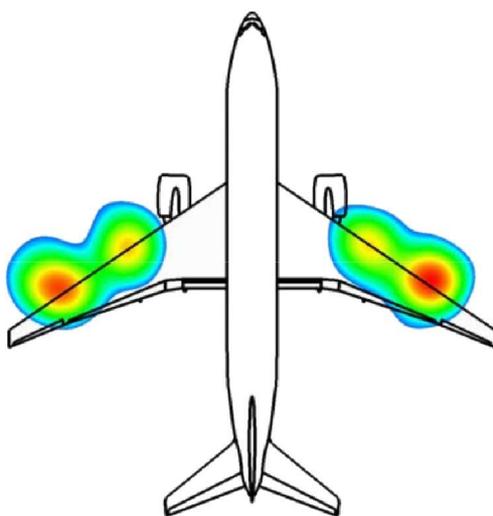
### 1.1 Introduction

Le bruit de cavité apparaît lorsqu'une ouverture est soumise à un écoulement affleurant. Les premières observations réalisées sur des cavités rectangulaires révèlent que dans certaines conditions, des oscillations auto-entretenues peuvent s'y établir. Une analyse spectrale de la pression fluctuante indique la présence de pics intenses [129, 130, 197] dans la signature acoustique du bruit rayonné. En effet, la présence de la cavité dans l'écoulement incident provoque des fluctuations importantes de pression, de masse volumique et de vitesse dans son voisinage, et de fortes ondes acoustiques en champ lointain. Des effets supplémentaires sont aussi observés dans ce cas, comme l'augmentation de la traînée de la cavité [197, 203], des vibrations et la fatigue de la structure [79, 205], ou la modification des transferts thermiques [1, 41].

Les premières campagnes de mesures expérimentales sont menées à partir des années 1950 par l'industrie aéronautique, notamment Boeing Airplane Co., Douglas Aircraft Co. et le Royal Aircraft Establishment, concernant les soutes à bombes d'avions militaires [33, 174, 198]. Les mesures révèlent que pour les cavités parallélépipédiques de grandes dimensions et peu profondes étudiées en présence d'un écoulement dont le nombre de Mach est compris entre 0.6 et 1.2, d'intenses fluctuations périodiques de pression ont lieu dans les soutes à bombes, qui peuvent exciter les modes vibratoires de l'appareil. Les études indiquent aussi que les soutes à bombes sont responsables de 30% de la traînée totale de l'aéronef, et que dans certaines configurations, le niveau de pression acoustique peut atteindre 170 à 180 dB dans le voisinage de l'avion [30], ce qu'ont confirmé de récentes simulations numériques [137].

D'importantes études expérimentales et numériques à plus faibles nombres de Mach ont été effectuées par la National Aeronautics and Space Administration (NASA) dans les années 1970–1980. Elles ont révélé que le bruit rayonné par un avion en configuration d'approche est de nature aérodynamique, et dépend principalement des détails de la structure [139]. Une

campagne de mesures acoustiques menée sur un Lockheed C-5 Galaxy permet de préciser les principales sources de bruit lors d'une approche : la cavité accueillant le train d'atterrissage, les détails géométriques du train d'atterrissage, les gouvernes horizontales et verticales, le fuselage, et la vibration de la structure [95]. Les conclusions du programme mené en 2001 par Boeing Airplane Co. intitulé Quiet Technology Demonstrator vont également dans ce sens. Un pic à  $2\text{ kHz}$  a été détecté et localisé sur un Boeing 777-200 en approche par antennerie [59]. La figure 1.1 révèle que le pic est généré par les cavités anti-gel près des slats, qui permettent la circulation d'air chaud provenant du circuit de distribution interne.



**Fig. 1.1:** Diagramme acoustique à  $2\text{ kHz}$  pour un B 777-200 en approche, montrant la localisation des sources de bruit près du bord d'attaque des ailes. (d'après [59])

Après la réduction progressive du bruit émis par les moteurs, le bruit d'origine aérodynamique devient donc une source de nuisance sonore non-négligeable, pouvant dans un futur proche éventuellement compromettre la certification acoustique de certains appareils. En effet, celle-ci repose sur les normes imposées par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI), qui permettent de classer les avions en fonction de leur niveau de bruit, et qui s'appuient notamment sur les mesures de l'EPNdB (*Effective Perceived Noise Decibel*). Ce critère représente le niveau d'un bruit équivalent stable sur une durée normalisée de 10 secondes qui aurait la même énergie sonore que celle observée pendant la partie la plus bruyante du passage de l'avion. Il se caractérise par une forte pénalisation des émissions aux moyennes et hautes fréquences, fortement génératrices de gêne, rayonnées par l'appareil aux différents points de mesure [67].

Les cavités sont également omniprésentes dans le domaine des transports terrestres. Il s'agit par exemple des cavités très allongées accueillant les pantographes des trains à grandes vitesses ou de l'interstice entre les wagons dans le domaine ferroviaire [132, 165, 171, 172]. Il s'agit des césures de portes ou du toit ouvrant dans l'industrie automobile [127, 189, 190]. De fortes pulsations basses fréquences de pression se produisent par exemple dans l'habitacle du véhicule à certaines vitesses lorsque le toit ouvrant est déployé, ce qui peut entraîner des troubles physiques pour les passagers, et pénaliser le confort acoustique externe des riverains lors du passage du véhicule.

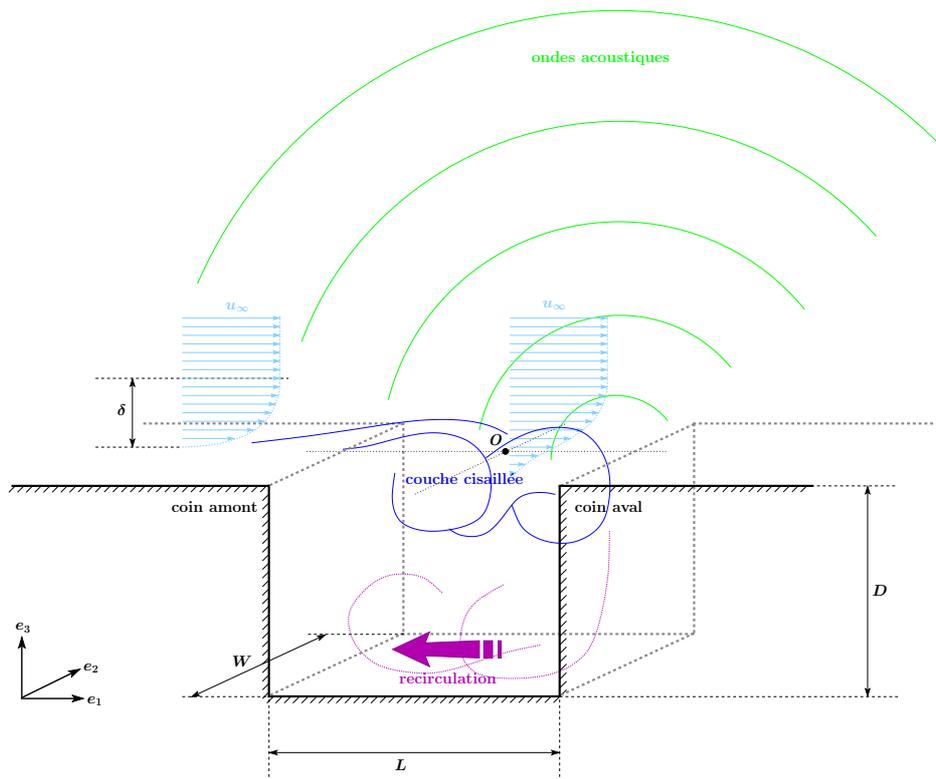
Les cavités jouent aussi un rôle décisif dans la génération du son des instruments à vents, pour lesquels les oscillations intenses dans la cavité ne sont pas nuisibles mais au contraire recherchées. On souhaite en général maximiser le niveau de pression acoustique pour un écoulement donné [177], comme dans le cas des flûtes [247] ou des orgues [83].

De nombreux articles synthétisent les différents phénomènes physiques à l'origine des oscillations de cavité induites par un écoulement affleurant. Les études portent essentiellement

sur des cavités rectangulaires, comme les travaux de Rockwell & Naudascher [195], ceux de Blake & Powell [17], de Komerath [126], de Colonius [49] ou de Cattafesta [38]. On aborde donc dans la partie qui suit le cas des cavités rectangulaires, car il s'agit d'une configuration géométrique abondamment étudiée dans la littérature, et qui permet d'introduire simplement les mécanismes physiques mis en jeu. Le cas spécifique des cavités cylindriques, moins détaillé dans la littérature, sera ensuite discuté.

## 1.2 Cavités rectangulaires

Dans cette partie, on note  $L$  la longueur de la cavité,  $D$  sa profondeur et  $W$  sa largeur. La vitesse de l'écoulement est notée  $u_\infty$  comme le rappelle la figure 1.2.



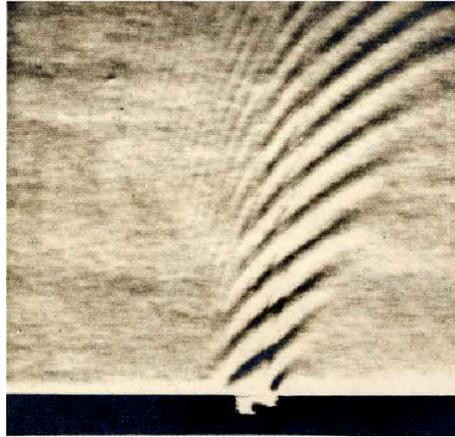
**Fig. 1.2:** Notations pour une cavité rectangulaire soumise à un écoulement affleurant de vitesse  $u_\infty$  et d'épaisseur de couche limite  $\delta$ .

### 1.2.1 Premières études expérimentales

On doit les tous premiers travaux expérimentaux sur les cavités à Wiegardt [246] et Tillmann [240] au début des années 1940. Leurs études sur des cavités rectangulaires et cylindriques s'inscrivent dans un travail plus global consacré à la traînée engendrée par des irrégularités de surface. Les mesures effectuées à bas nombres de Mach (0.04 à 0.08) leur permettent d'évaluer la traînée de la cavité en soustrayant les traînées de la surface aérodynamique obtenues avec et sans cavité. Tillmann montre que la traînée engendrée par la cavité dépend fortement des rapports  $L/D$  et  $L/\delta$ , avec  $\delta$  l'épaisseur de la couche limite incidente. Il observe qu'un maximum de traînée est atteint en certaines valeurs de  $L/D$ . Il montre aussi qu'une modification elliptique de la forme du coin aval de la cavité rectangulaire permet de réduire d'au moins 20% la traînée induite par celle-ci. Wiegardt obtient enfin des images d'un écoulement d'eau au-dessus d'un réservoir rectangulaire et dans celui-ci en y ensemençant de la poudre d'aluminium. Les images révèlent l'existence de tourbillons dans la cavité.

Les études expérimentales suivantes, menées au début des années 1950 par Norton [174] et Brazier [33] s'intéressent également à la traînée induite par les cavités à des fins militaires (soutes à bombes). Leurs mesures confirment l'augmentation très nette de traînée provoquée par la présence de cavités. Des pics intenses sont également mentionnés dans la signature acoustique du bruit rayonné par les cavités rectangulaires dans certaines configurations.

Les travaux de Roshko [197] et Krishnamurty [129, 130] constituent véritablement les premières études consacrées au bruit aérodynamique rayonné par des cavités soumises à un écoulement affleurant. Roshko étudie l'influence des dimensions géométriques de la cavité sur le bruit rayonné, en considérant des cavités parallélépipédiques peu profondes de rapport  $L/D$  variant de 0.4 à 62.5, et à basses vitesses. Il observe qu'un tourbillon principal se forme systématiquement dans la cavité et note la présence de tourbillons secondaires dans les coins inférieurs. Roshko remarque aussi que la traînée induite est essentiellement due à la pression pariétale sur la paroi aval de la cavité lors de l'impact des instabilités. Il note enfin que cette tendance à la formation d'une recirculation ne dépend pas de l'état de la couche limite incidente, mais que la recirculation principale tend à diminuer avec la diminution du rapport  $L/D$ . Krishnamurty complète cette remarque grâce à des mesures d'intensité effectuées sur des cavités parallélépipédiques peu profondes soumises à un écoulement affleurant hautement subsonique ou supersonique à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder. Il précise que les pics fréquentiels observés dans les spectres acoustiques sont beaucoup plus importants quand la couche limite incidente est laminaire, tandis que le contenu spectral est plus large bande lorsque celle-ci est turbulente. Des visualisations par striescopia permettent de mieux observer le rayonnement acoustique tonal, comme le montre la figure 1.3. Krishnamurty note enfin que



**Fig. 1.3:** Observation par striescopia du rayonnement acoustique d'une cavité rectangulaire, de rapport  $L/D = 2$ , induit par un écoulement affleurant à Mach 0.85. La couche limite incidente est laminaire. (d'après [129])

pour un nombre de Mach donné, la fréquence prédominante dans la signature acoustique de la cavité est inversement proportionnelle à la longueur  $L$  de la cavité, aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent.

### 1.2.2 Caractère 3-D de l'écoulement et influence de la largeur

Le caractère tridimensionnel de l'écoulement à l'intérieur de la cavité est mis en évidence par Maull & East au début des années 1960 grâce à une étude expérimentale à faible vitesse de l'influence de la largeur  $W$  [151]. Ils visualisent l'écoulement dans la cavité à l'aide de films d'huile et montrent l'existence d'un certain nombre de cellules de recirculation au fond de la cavité. D'autres campagnes expérimentales ont confirmé le caractère tridimensionnel de l'écoulement dans la cavité. Citons les travaux de Kistler & Tan, qui observent également sur des cavités peu profondes des cellules de recirculation à l'aide d'un mélange de suie et

d'alcool [124], ou ceux de Zhak *et al.* qui visualisent l'écoulement au fond de la cavité à l'aide de poudre d'aluminium [249].

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'influence de la largeur  $W$  sur le rayonnement acoustique de la cavité [2, 45, 46, 101]. Ils observent que la couche cisailée est essentiellement bidimensionnelle pour  $L/W < 1$ . Des effets tridimensionnels dus aux bords peuvent apparaître pour  $L/W > 1$ . Tracy & Plentovich montrent que pour des cavités peu profondes, de rapport d'aspect  $L/D$  supérieur à 2, et pour des écoulements subsoniques ou transsoniques, les pics observés dans la signature acoustique de la cavité sont plus élevés lorsque la largeur  $W$  est petite [241]. Stallings & Wilcox observent qu'en supersonique, les effets de la largeur de la cavité sur le rayonnement acoustique pour des cavités ouvertes sont nettement moins importants que pour des cavités fermées [223]. Gloerfelt *et al.* notent enfin dans [101] que la tridimensionnalisation de l'écoulement, observée pour une cavité de  $L/W = 1.28$ , tend à réduire sa cohérence, entraînant ainsi une diminution de l'intensité rayonnement acoustique.

### 1.2.3 Terminologie et classification

#### 1.2.3.1 Types d'interaction

L'étude bibliographique montre que le bruit tonal observé peut avoir plusieurs origines. Il peut être induit par **des interactions d'origine aérodynamique**. Les instabilités de Kelvin–Helmholtz, se développant dans la couche cisailée à une ou plusieurs fréquences privilégiées, sont amplifiées par un phénomène de bouclage [237] : l'impact des tourbillons contenus dans la couche cisailée sur le coin aval de la cavité génère des ondes acoustiques qui se propagent dans la cavité vers l'amont, et qui viennent exciter la couche de mélange au niveau de la séparation, au coin amont. On parle de rétroaction aéroacoustique (*feedback*).

**Le couplage avec un mode de résonance de la cavité** peut également être à l'origine du bruit tonal observé. Les fluctuations aérodynamiques à l'ouverture de la cavité peuvent exciter acoustiquement la cavité, si la fréquence d'excitation est proche d'une fréquence de résonance de la cavité, et générer des ondes stationnaires dans la cavité. On distingue principalement les modes normaux (transverses et longitudinaux) et les modes de profondeur (mode quart d'onde d'une cavité ouverte à l'une de ses extrémités). À noter que ce couplage avec un mode de résonance est particulièrement observé pour les cavités profondes [71, 177, 182].

Enfin, le bruit tonal de cavité peut être le fait **d'interactions de type élastique**. Les fluctuations générées par l'impact des tourbillons sur le bord aval excitent la structure solide de la cavité. Les vibrations de la paroi amont peuvent alors exciter la couche de mélange. Ce type de couplage est assez rare, car les cavités considérées ont dans la plupart des cas traités des parois parfaitement rigides [97].

#### 1.2.3.2 Classification

Une classification émerge dans les années 1960 notamment sous l'impulsion de Charwat *et al.* [39], complétée plus tard par Sarohia [203, 204], afin d'établir le type d'interaction privilégié, en fonction des paramètres géométriques de la cavité rectangulaire et des paramètres de l'écoulement incident.

Ils observent que pour **une cavité peu profonde** (*shallow*), pour laquelle  $L/D > 1$ , le mécanisme principal de génération de bruit est le bouclage aérodynamique. Pour **une cavité profonde** (*deep*), dont le rapport  $L/D$  est inférieur à 1, la résonance acoustique due aux modes de profondeur coexiste avec la rétroaction aéroacoustique, et peut même devenir prépondérante à faibles nombres de Mach [203]. Pour des **cavités allongées** ( $L/D > 7$ ), la couche de mélange qui se développe au-dessus de la cavité peut se rattacher au fond de la cavité, puis redécoller à l'approche du bord aval. On appelle **cavité fermée** (*closed*) ce genre de cavités, qui peuvent être considérées comme la succession d'une marche descendante puis d'une marche montante. Lorsque la couche cisailée se rattache directement au bord aval, on parle de **cavité ouverte** (*open*).

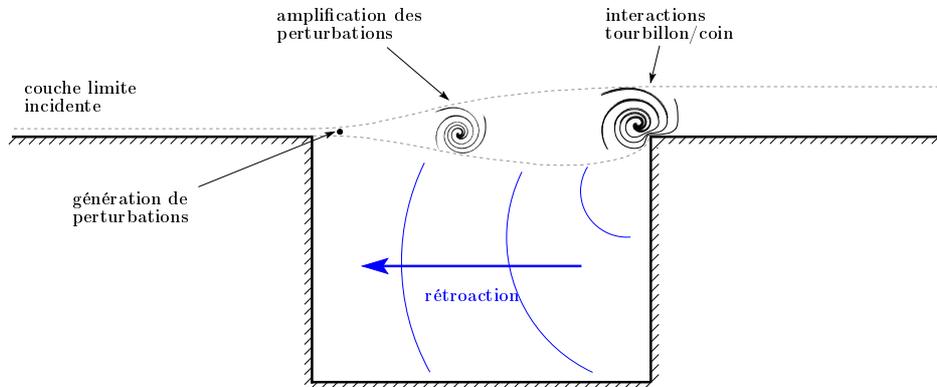
Sarohia rappelle que ces valeurs critiques dépendent fortement d'autres paramètres, comme la vitesse de l'écoulement  $u_\infty$ , l'épaisseur de couche limite  $\delta$ , ou l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_\theta$ , que l'on définit pour une couche limite, en prenant en compte les effets de compressibilité, par :

$$\delta_\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\overline{\rho u_1}}{\rho_\infty u_\infty} \left( 1 - \frac{\overline{\rho u_1}}{\rho_\infty u_\infty} \right) dx_3 \quad (1.1)$$

avec  $\rho_\infty$  la masse volumique de référence. Sarohia met en évidence que la profondeur de la cavité  $D$  n'a que très peu d'influence sur les oscillations pour une cavité peu profonde, sauf quand la profondeur est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite incidente. Des mesures ont montré que dans cette configuration, la profondeur avait un effet stabilisateur considérable lorsque la couche limite incidente est laminaire [203]. Sarohia révèle également l'influence du rapport  $L/\delta_\theta$  sur le comportement de la cavité, et montre que les oscillations n'apparaissent qu'à partir d'une valeur critique.

#### 1.2.4 Interactions d'origine aérodynamique

Des interactions d'origine aérodynamique sont très souvent rencontrées lorsqu'un écoulement cisailé vient impacter un obstacle [195]. Ce type d'interaction, mis en évidence par Sondhaus qui observe que l'impact d'un jet sur un coin produit un son tonal (*edgetone*) [219], est largement illustré dans la littérature, notamment par Rockwell [193, 194]. Ses différents travaux révèlent principalement une modification de la couche cisailée avec l'introduction de l'obstacle et une plus grande organisation de l'écoulement, avec notamment la présence d'ondes auto-entretenues. On propose dans cette partie de détailler les événements successifs constituant la boucle de rétroaction aéroacoustique que l'on observe dans une cavité rectangulaire, et qui sont rappelés sur la figure 1.4.



**Fig. 1.4:** Événements successifs constituant la boucle de rétroaction aéroacoustique dans une cavité rectangulaire.

##### 1.2.4.1 Génération de perturbations

Le mécanisme à l'origine du développement spontané de perturbations au point de séparation (angle amont) est décrit par Lord Rayleigh, pour un fluide non-visqueux : des ondes d'instabilité résultent de la conservation du moment cinétique dans la couche cisailée. En supposant que la couche cisailée ne s'épaississe pas au-dessus de la cavité, et en écrivant l'équation de conservation de la vorticité pour un profil moyen perturbé dans la direction longitudinale et verticale, il met en évidence que la conservation de la vorticité totale s'accompagne nécessairement de la génération d'une onde d'instabilité qui s'amplifie spatialement, si le profil moyen  $\bar{u}_1$  présente un point d'inflexion.

Pour une couche de cisaillement turbulente, le mélange entre l'écoulement rapide du dessus de cavité et de l'écoulement lent dans la cavité est réalisé sur une longueur très courte après le décollement au coin amont. Le profil de vitesse longitudinale  $\bar{u}_1$  peut être approximé par un profil de couche de mélange libre, en tangente hyperbolique [90, 160], qui présente un point d'inflexion en 0 :

$$\bar{u}_1(x_3) = \frac{u_\infty}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{x_3}{\ell_e} \right) \right) \quad (1.2)$$

faisant intervenir  $\ell_e$  la longueur d'échelle de la couche cisailée, qui vaut :

$$\ell_e = 2\delta_\theta = \frac{u_\infty}{2 \left. \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}}$$

On peut estimer cette longueur d'échelle à partir d'un profil de vitesse expérimental.

### 1.2.4.2 Amplification des perturbations

L'élargissement de la couche de cisaillement, ignoré dans l'analyse de Rayleigh et que l'on observe expérimentalement au-dessus de la cavité, peut être pris en compte dans la théorie de la stabilité linéaire des écoulements parallèles non visqueux développée par Michalke [160], notamment par l'intermédiaire de la longueur d'échelle de la couche cisailée  $\ell_e$ , qui dépend en réalité de la position longitudinale  $x_1$ . Cette longueur d'échelle peut être mesurée à partir de plusieurs profils expérimentaux de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  en différentes positions longitudinales  $x_1$ . Le calcul analytique mené par Michalke pour une couche de mélange libre (équation (1.2)) permet d'estimer le nombre d'onde  $k$  d'une perturbation aérodynamique en fonction de sa pulsation adimensionnelle  $\beta$ . Cette pulsation adimensionnelle est calculée à partir de la pulsation  $\omega$  par la relation :  $\beta(x_1) = \omega \ell_e(x_1)/u_\infty$ . Le nombre d'onde  $k$  est complexe : sa partie réelle  $k_r$  traduit la propagation de l'onde dans la couche de cisaillement, tandis que sa partie imaginaire  $-k_i$  est le facteur d'amplification associé à cette perturbation. Les instabilités qui se développent de manière préférentielle dans la couche cisailée sont donc les instabilités qui ont une pulsation adimensionnelle  $\beta$  assurant une amplification maximale.

Rockwell fournit dans [196] un critère pour que des oscillations de la couche cisailée soient auto-entretenues, en considérant la couche cisailée comme infiniment mince. Il considère que la déviation provoquée par la propagation des perturbations est 1-D, dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . En considérant les variations longitudinales du nombre d'onde  $k_r$  et du facteur d'amplification  $k_i$  des perturbations pour calculer l'amplification intégrée totale, il montre qu'une perturbation est auto-entretenu si :

$$\int_0^L \exp \left( \int_0^{x_1} k_i(\xi) d\xi \right) \sin \left( \int_0^{x_1} k_r(\xi) d\xi \right) dx_1 = 0$$

Rockwell valide les fréquences auto-entretenues obtenues par l'équation précédente à l'aide d'une comparaison aux mesures d'Ethembaoglu [196], sur des écoulements à très faible épaisseur de couche limite incidente.

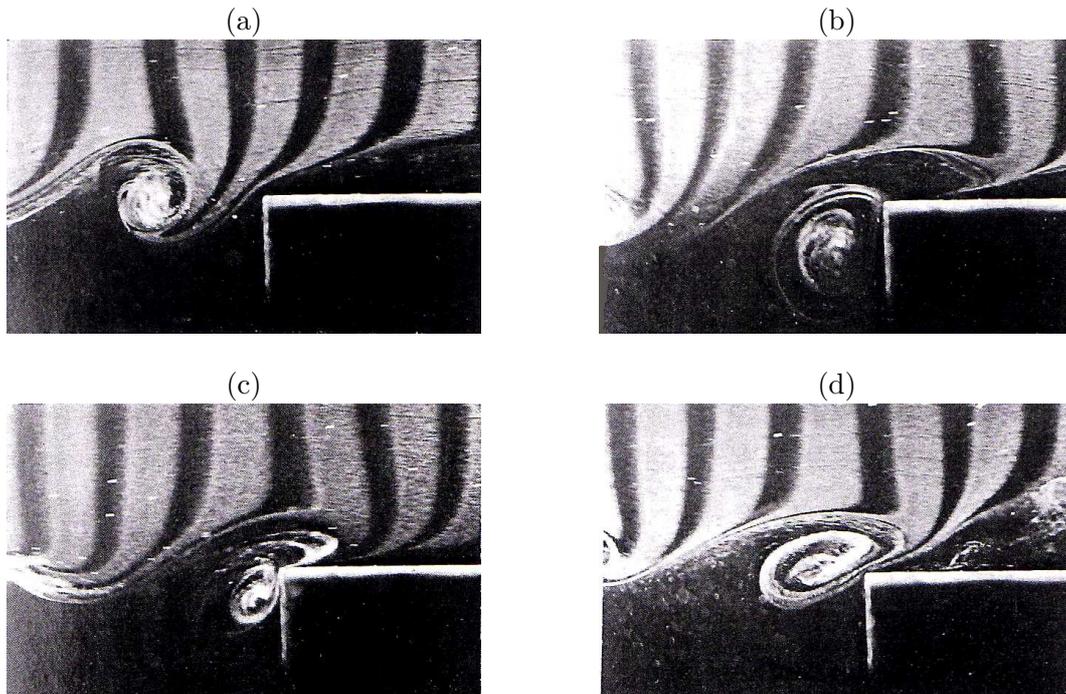
En pratique, l'amplification des instabilités est en fait limitée par des phénomènes non-linéaires [161]. L'approche linéaire peut toutefois donner des estimations d'amplification satisfaisantes lorsque des phénomènes de mélange complexes ne sont pas encore apparus.

### 1.2.4.3 Impact des perturbations au coin aval et génération de fluctuations

Les forces fluctuantes qui s'exercent au niveau du coin aval de la cavité sont à l'origine de fluctuations de pression. Ces forces sont engendrées par la déformation des structures

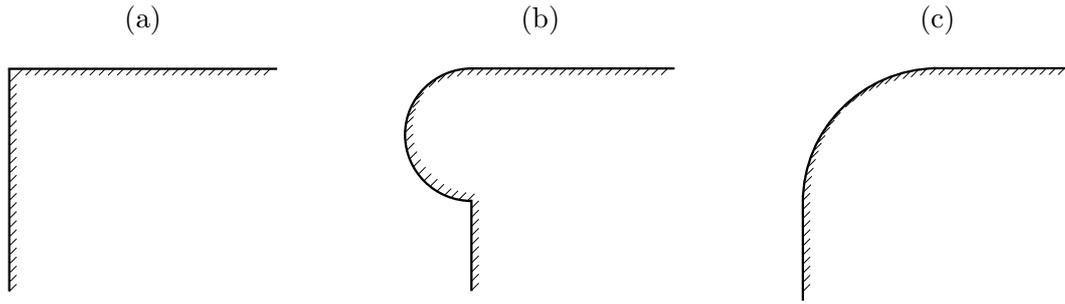
tourbillonnaires lors de leur impact au bord aval. La génération de bruit par des déformations de tourbillons est abordée en détail dans la théorie du *vortex sound* [114].

Rockwell & Knisely étudient l'écrasement des tourbillons à l'aide de visualisations d'un écoulement affleurant d'eau ensemencé de bulles d'hydrogène [194]. Ils distinguent quatre types d'impact. Le tourbillon peut se rattacher complètement à la paroi aval de la cavité, puis être convecté vers le fond (*complete clipping*). Les structures tourbillonnaires peuvent également être intégralement convectées au-dessus du bord aval de la cavité sans être déformées (*complete escape*). On parle de scission partielle (*partial clipping*) lorsque le tourbillon donne naissance à plusieurs tourbillons lors de son impact avec le coin aval, certains se rattachant à la paroi de la cavité, d'autres s'échappant au-dessus du coin aval. Un échappement partiel (*partial escape*) a lieu lorsque le tourbillon est convecté intégralement au-dessus du coin aval avec déformation. Pour des couches limites turbulentes, Rockwell & Knisely observent qu'aucun de ses types d'impact n'est dominant sur les autres. Ils notent plutôt une alternance assez aléatoire entre ces différents types (*jitter*). Les figures 1.5(b), (c), et (d) montrent respectivement un rattachement total, une scission partielle, et un échappement partiel de tourbillons, qui ont pu être observés dans des configurations identiques d'écoulement. Knisely & Rockwell relient dans [125] la déformation des tourbillons lors de leur impact au coin aval aux fluctuations de pression induites, en fonction de la nature de l'impact. Une étude analogue est proposée par Tang & Rockwell [238].



**Fig. 1.5:** Illustrations des différents types d'impact. (a) Tourbillon de la couche cisailée avant impact. (b) Rattachement total à la paroi de la cavité. (c) Scission partielle. (d) Echappement partiel. (d'après [194])

Les travaux de Pereira & Sousa [179] étudient l'influence de la forme géométrique du coin d'impact d'une cavité rectangulaire sur le bruit rayonné par celle-ci, et complètent les observations de Tillmann ou Rockwell & Knisely à ce sujet. Ils étudient le comportement de la couche de cisaillement à l'impact pour trois géométries différentes : un bord carré, un bord présentant un rebord en demi-cerle (*nose-shaped edge*) et un bord arrondi en quart de cercle, comme le montre la figure 1.6. Une visualisation de l'écoulement près du bord aval et des mesures par vélocimétrie laser Doppler (LDA) permettent d'observer que le mécanisme prépondérant lors de l'impact sur le bord carré est la scission partielle, en alternance aléatoire avec un rattachement total à la paroi de la cavité et un échappement partiel des tourbillons.



**Fig. 1.6:** Géométries du coin aval étudiées par Pereira & Sousa [179] : (a) coin carré. (b) coin avec rebord en demi-cercle. (c) coin arrondi en quart de cercle.

Dans le cas du coin arrondi en quart de cercle, le mécanisme prépondérant est le rattachement total des structures tourbillonnaires de la couche de cisaillement à la paroi de la cavité. Ils ne remarquent pas d'atténuation significative de l'amplitude des oscillations acoustiques rayonnées par la cavité, par rapport au cas de la géométrie carrée. Dans le cas du coin présentant un rebord en demi-cercle, le comportement de la couche de cisailée au coin aval est dominé par l'échappement total des tourbillons, ayant pour conséquence une forte réduction du bruit rayonné par la cavité. Ils notent enfin que les trois géométries étudiées ne modifient pas la fréquence du pic dominant observé dans la signature acoustique de la cavité.

#### 1.2.4.4 Relation de phase et modèle de Rossiter

Aussi bien les visualisations proposées par Krishnamurty (figure 1.3), montrant la présence d'oscillations auto-entretenues dans le champ acoustique à des fréquences discrètes, que les différentes observations sur les perturbations auto-entretenues dans la couche de cisaillement, suggèrent l'existence d'un intervalle de temps préférentiel entre l'impact au coin aval des tourbillons et leur génération par déstabilisation de la couche de cisaillement au point de séparation.

Powell dans [184] et Curle dans [56] proposent une relation de phase qui permet de déterminer les fréquences auto-entretenues d'un écoulement en présence d'une rétroaction aéroacoustique, dans le cas de l'impact d'un jet émis depuis une buse sur un coin. Powell affirme que la présence du coin dans l'écoulement provoque des perturbations de vitesse au niveau de la buse, avec une fréquence correspondant aux perturbations subissant le maximum d'amplification dans la couche cisailée. Il obtient la formule empirique suivante :

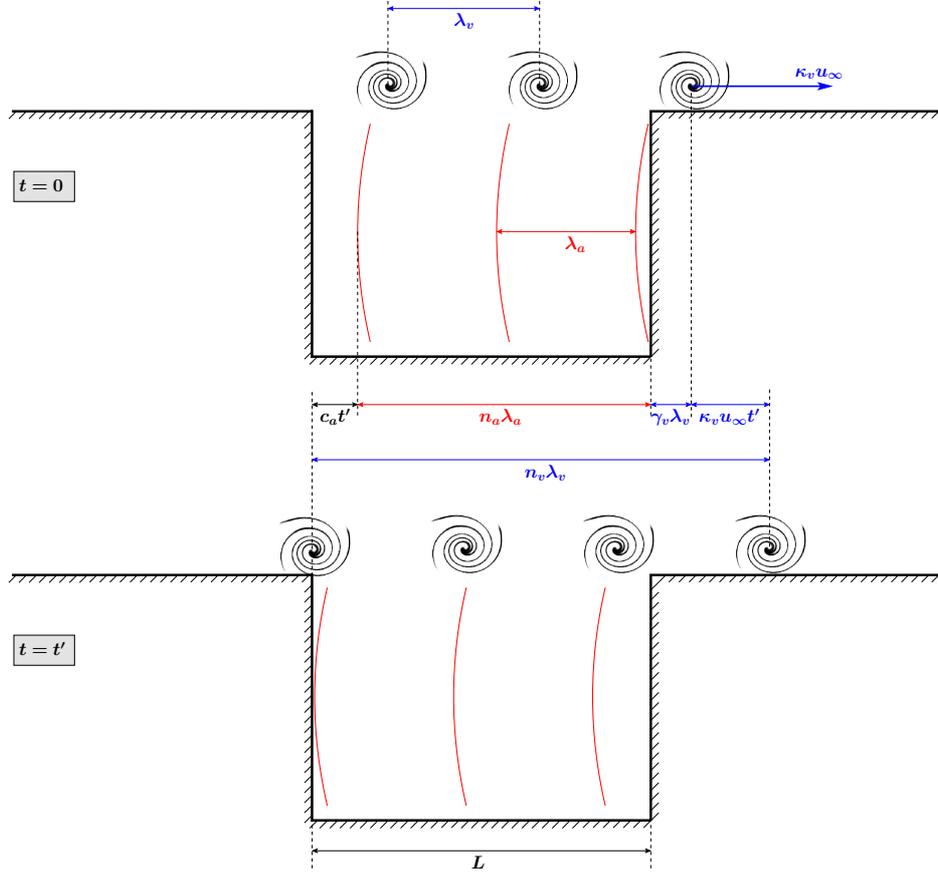
$$\text{St}_n = \frac{f_n L}{u_\infty} = \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{u_c}{u_\infty} \quad (n \in \mathbb{N})$$

avec  $\text{St}$  est le nombre de Strouhal,  $n$  un entier décrivant le mode d'oscillation,  $f_n$  la fréquence correspondante,  $u_c$  la vitesse de convection des perturbations, et  $L$  la distance entre la buse et le coin. La valeur  $1/4$  provient empiriquement d'un bon accord entre la formule et les fréquences obtenues expérimentalement. Il observe également une forte directivité du rayonnement acoustique vers l'amont, ce qui l'amène à proposer l'utilisation de simples sources acoustiques pour modéliser la rétroaction aéroacoustique.

Ces résultats pour l'interaction jet/coin suggèrent l'existence d'une relation de phase entre le coin amont et le coin aval d'une cavité rectangulaire. Rossiter avance ainsi en 1964 l'un des modèles fondamentaux du bruit de cavité [199], en proposant un mécanisme de rétroaction qui lui permet d'expliquer le couplage aéroacoustique qui produit un bruit tonal. Il suppose que c'est le rayonnement acoustique qui provoque l'apparition d'instabilités au bord amont, et que ce sont ces tourbillons qui sont responsables du rayonnement acoustique lors de leur impact sur le bord aval.

Dans toute la suite, on note  $\lambda_a$  la longueur d'onde acoustique et  $\lambda_v$  la longueur d'onde

aérodynamique, qui correspond à l'espacement entre deux tourbillons de la couche de cisaillement. Au temps  $t = 0$ , Rossiter suppose que  $n_a$  fronts d'onde acoustiques sont présents dans la cavité, et que la phase de l'onde acoustique se propageant vers l'amont est nulle. A ce même instant, un tourbillon, qui est convecté à la vitesse  $u_c = \kappa_v u_\infty$  se situe à une distance  $\gamma_v \lambda_v$  au-delà du bord aval de la cavité (voir figure 1.7). Au temps  $t = t'$ , un front d'onde acoustique



**Fig. 1.7:** Modèle de Rossiter de l'écoulement affleurant une cavité rectangulaire : convection des tourbillons et propagation d'ondes acoustiques dans la cavité, à deux instants  $t = 0$  et  $t = t'$ .

atteint le bord amont et donne naissance à un tourbillon. Les tourbillons déjà présents dans la couche cisailée ont donc pendant ce temps été convectés sur la distance  $\kappa_v u_\infty t'$ , et le tourbillon qui se trouvait à une distance  $\gamma_v \lambda_v$  au-delà du coin aval à l'instant  $t = 0$  se retrouve maintenant à une distance  $\gamma_v \lambda_v + \kappa_v u_\infty t'$  du bord aval. En prenant ce tourbillon en compte, il y a donc  $n_v$  tourbillons au-dessus de la cavité. Il vient :

$$n_v \lambda_v = L + \gamma_v \lambda_v + \kappa_v u_\infty t' \quad (1.3)$$

Comme dans le même temps, les fronts d'onde acoustique se sont déplacés vers le bord amont de  $c_a t'$ , avec  $c_a$  la vitesse du son dans la cavité, on a :

$$n_a \lambda_a + c_a t' = L \quad (1.4)$$

En éliminant  $t'$  dans les équations (1.3) et (1.4), on obtient :

$$\frac{n_v \lambda_v - \gamma_v \lambda_v - L}{\kappa_v u_\infty} = \frac{L - n_a \lambda_a}{c_a}$$

En introduisant la fréquence des oscillations  $f = \kappa_v u_\infty / \lambda_v = c_a / \lambda_a$ , et le nombre de Mach

$\text{Ma} = u_\infty/c_\infty$ , où  $c_\infty$  est la vitesse du son au-dessus de la cavité, il vient finalement :

$$\frac{fL}{u_\infty} = \frac{n_a + n_v - \gamma_v}{\frac{1}{\kappa_v} + \text{Ma} \frac{c_\infty}{c_a}}$$

En considérant que la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans la cavité est égale à la célérité du son à l'extérieur, ce qui est le cas si les variations de température sont faibles entre l'intérieur et l'extérieur de la cavité, que l'écoulement est subsonique, et en définissant les modes de Rossiter par  $n = n_a + n_v$ , on obtient la formule suivante :

$$\text{St}_n = \frac{f_n L}{u_\infty} = \frac{n - \gamma_v}{\frac{1}{\kappa_v} + \text{Ma}} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (\text{Rossiter}) \quad (1.5)$$

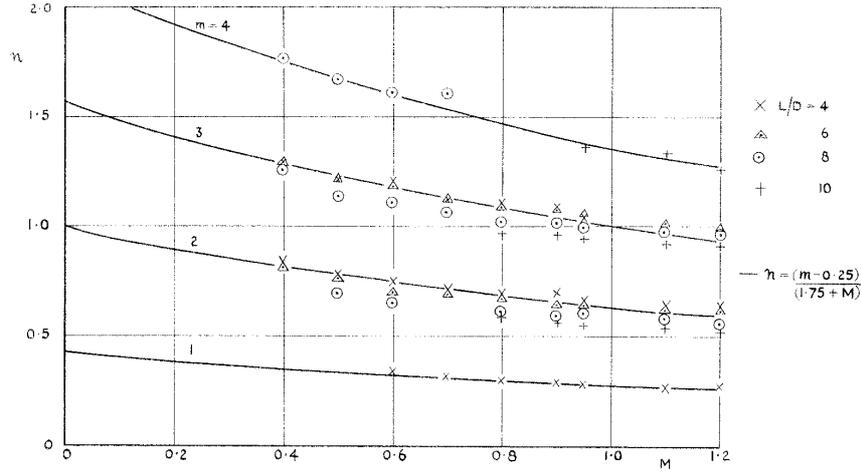
La formule de Rossiter est une formulation semi-empirique, car deux paramètres doivent être déterminés. Il s'agit du rapport  $\kappa_v$  entre la vitesse de convection des instabilités de la couche de cisaillement et la vitesse de l'écoulement moyen au-dessus de la cavité, et du facteur de retard  $\gamma_v$ , qui correspond au retard temporel entre l'instant du passage d'un tourbillon au niveau du bord aval, et l'émission d'une onde acoustique dans la cavité. Elle demeure toutefois très utilisée, car elle découle d'une modélisation physique simple, et elle reste performante pour prédire les fréquences des pics observés dans la signature acoustique de la cavité pour un large domaine de configurations, les travaux de Rossiter explorant le domaine  $(L/D, \text{Ma}) \in [1, 10] \times [0.4, 1.2]$ , comme l'illustre la figure 1.8. Rossiter fixe le rapport de la vitesse de convection des perturbations sur la vitesse de l'écoulement à  $\kappa_v = 0.57$ . Il observe que  $\gamma_v = 1/4$  fournit une bonne concordance du modèle avec les résultats expérimentaux pour une cavité de rapport d'aspect inférieur 4. Il doit cependant recalculer le facteur de retard  $\gamma_v$  pour des cavités plus allongées. Le tableau 1.1 donne les valeurs du facteur de retard en fonction du paramètre géométrique  $L/D$ .

$L/D$	$\gamma_v$
4	0.25
6	0.38
8	0.54
10	0.58

**Tab. 1.1:** Facteur de retard  $\gamma_v$  en fonction de  $L/D$ . (d'après [199])

On notera que le modèle de Rossiter ne prend pas en compte plusieurs aspects, comme les caractéristiques de la couche limite incidente, l'influence de la profondeur ou de la largeur, qui peuvent modifier la nature de l'écoulement. La formule de Rossiter ne donne pas de bonnes estimations pour des écoulements à faibles vitesses, comme le montrent les mesures de Tam & Block [237]. Par ailleurs, la formule de Rossiter ne renseigne pas sur les amplitudes des oscillations acoustiques rayonnées. Le modèle ne décrit pas non plus comment les oscillations acoustiques sont générées au bord aval lors de l'impact des perturbations, et comment la rétroaction aéroacoustique excite la couche de cisaillement au point de séparation à l'amont. Tam & Block font remarquer que le modèle de Rossiter tend à localiser à l'extrême les tourbillons dans la couche cisailée, alors que les visualisations par striescopie de Krishnamurty (figure 1.3), ainsi que les travaux expérimentaux de Heller & Bliss [108] n'ont pas révélé une présence localisée de ces tourbillons lors des oscillations de cavité dans le cas d'une couche limite incidente turbulente.

Cependant, tous ces détails ne sont pas cruciaux dans le simple but de prédire les fréquences susceptibles de dominer le rayonnement acoustique. Ils le sont en revanche beaucoup plus dans le but de prédire les fréquences qui apparaissent réellement dans le rayonnement acoustique,



**Fig. 1.8:** Nombre de Strouhal des pics observés dans le spectre du rayonnement acoustique de la cavité en fonction du nombre de Mach : comparaison entre les mesures et les valeurs données par le modèle de Rossier. (d'après [199])

ou dans l'optique de contrôler le bruit rayonné par la cavité.

#### 1.2.4.5 Extensions de la formule de Rossiter

Si le modèle de Rossiter est établi à partir de considérations aéroacoustiques simples, d'autres modèles plus élaborés sont formulés par la suite, afin de prendre en compte des effets ignorés par la modélisation de Rossiter, ou pour s'affranchir des constantes empiriques présentes dans la formule (1.5).

#### Extension aux écoulements hautement supersoniques

Plusieurs auteurs ont exploité le modèle de Rossiter pour l'adapter spécifiquement aux écoulements présentant un faible nombre de Mach [203] ou aux écoulements hautement supersoniques [109]. Heller *et al.* corrigent la formule de Rossiter pour la rendre plus performante en régime supersonique. Ils supposent que la température à l'intérieur de la cavité est sensiblement égale à la température totale au coin amont. La modification de la célérité du son à l'intérieur de la cavité s'écrit alors [109] :

$$\frac{c_\infty}{c_a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2}}$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques. Ils réinjectent cette modification dans la formule de Rossiter pour obtenir la relation suivante :

$$\text{St}_n = \frac{n - \gamma_v}{\frac{1}{\kappa_v} + \frac{n - \gamma_v}{\sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2}}} \quad (\text{Heller } et \text{ al.})$$

#### Modèle sans constantes empiriques

Bilain & Covert reprennent en 1973 l'analyse de Rossiter dans [16], dans le but de trouver une relation de phase ne faisant intervenir aucune constante empirique. Ils modélisent le problème de la cavité rectangulaire en scindant le domaine en deux parties distinctes : l'intérieur

et l'extérieur de la cavité. La couche cisailée séparant les deux régions est modélisée par une fine nappe de vorticité, et le fluide contenu dans les deux régions est supposé non-visqueux. Une source acoustique linéique de pulsation  $\omega$  et présentant un déphasage  $\varphi_d$  est placée sur le bord aval. Elle simule le rayonnement acoustique au niveau du coin aval, et Bilanin & Covert supposent qu'elle n'a pas d'effet sur la nappe de vorticité. Une autre source linéique, de pulsation  $\omega$  et de déphasage  $\varphi_u$  est donc placée sur le bord amont pour simuler l'excitation de la couche cisailée. Ils relient ainsi le mécanisme conducteur des fluctuations acoustiques de la cavité aux instabilités de la nappe de vorticité. La donnée du déphasage entre l'amont et l'aval permet ainsi de déterminer les fréquences dominantes susceptibles d'être observées dans la signature acoustique de la cavité par la relation :

$$\text{St}_n = \frac{n - \frac{\varphi_d + \varphi_u}{2\pi}}{\frac{k_r u_\infty}{\omega} + \text{Ma} \frac{c_\infty}{c_a}} \quad (\text{Bilanin \& Covert}) \quad (1.6)$$

On retrouve la formule de Rossiter (1.5) si l'on choisit par identification  $\gamma_v = (\varphi_d - \varphi_u)/2\pi$  et  $\kappa_v = \omega/(k_r u_\infty)$ . Bilanin & Covert suggèrent de prendre  $\varphi_d = 3\pi/4$ . Le déphasage à l'angle amont  $\varphi_u$  n'est pas explicité. La formulation (1.6) fournit des résultats satisfaisants pour des écoulements supersoniques ( $\text{Ma} > 1.2$ ), alors que des écarts importants sont notés pour des écoulements subsoniques avec  $\text{Ma} < 0.6$ .

Kerschen & Tumin proposent en 2003 une modélisation théorique du problème de cavité, en fondant leur raisonnement sur la diffraction de bord (*edge scattering*) pour des écoulements supersoniques [121]. L'épaisseur de la couche de cisaillement est prise en compte dans la modélisation de la propagation des instabilités, mais demeure infiniment mince aux bords amont et aval. Ils considèrent au bord amont le rapport complexe  $C_{\text{SU}}$  entre l'amplitude complexe des ondes acoustiques provenant du bord aval et l'amplitude complexe des ondes d'instabilité générées à la séparation, et au coin aval le rapport complexe  $C_{\text{US}}$  entre l'amplitude complexe des instabilités contribuant à générer de l'acoustique lors de l'impact sur la paroi aval de la cavité et l'amplitude complexe de l'onde acoustique ainsi produite. Ils montrent alors que :

$$\text{St}_n = \frac{n - \frac{\arg C_{\text{SU}} + \arg C_{\text{US}}}{2\pi}}{\frac{u_\infty}{u_c} + \text{Ma} \frac{c_\infty}{c_a}} \quad (\text{Kerschen \& Tumin})$$

La formule obtenue est sensiblement équivalente à celle obtenue par Bilanin & Covert, mais dans un cadre d'hypothèses diff rent. Une étude de stabilité linéaire est effectuée en vue de caractériser la dynamique de la couche de cisaillement, notamment la vitesse de convection  $u_c$ . Les rapports  $C_{\text{SU}}$  et  $C_{\text{US}}$  sont estimés à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf. Le modèle fournit d'excellents résultats pour des écoulements supersoniques, si bien qu'une extension au cas des écoulements subsoniques est actuellement à l'étude par les auteurs.

### Prise en compte de la profondeur de la cavité

Block propose de généraliser l'approche de Bilanin & Covert pour tenir compte des effets induits par la profondeur  $D$  de la cavité rectangulaire, à faibles nombre de Mach, typiquement  $\text{Ma} \in [0.1, 0.4]$  [19]. L'auteur prend en compte les reflexions sur le fond de la cavité en introduisant des sources images. Il introduit également un déphasage supplémentaire  $\varphi_a$  entre la phase de la source acoustique linéique présente au coin aval et les déplacements positifs de

la couche cisailée à ce bord. La relation de phase s'écrit :

$$St_n = \frac{n - \frac{1}{4} - \frac{\varphi_a + \varphi_u}{2\pi}}{\frac{1}{\kappa} + Ma \left(1 + \frac{0.514}{L/D}\right)} \quad (1.7)$$

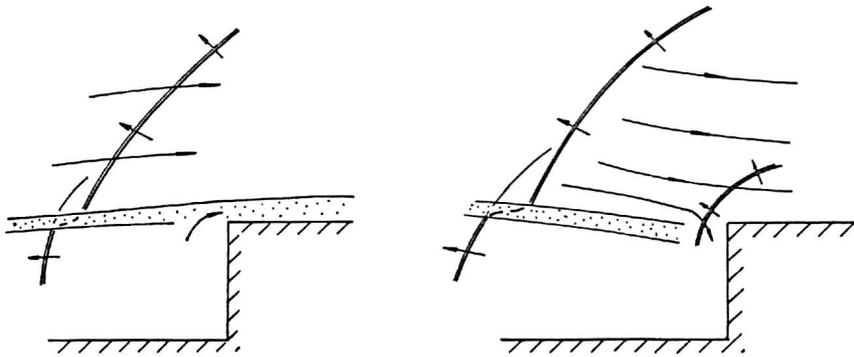
Block suggère que le déphasage  $\varphi_u$  est petit et décide donc de l'ignorer, ce qui correspond à l'hypothèse faite par Rossiter qui n'introduit aucun déphasage au coin amont. L'auteur choisit  $\varphi_a = -\pi/2$ , en supposant qu'un tourbillon s'échappe au-dessus du coin aval lorsque la couche de cisaillement est infléchiée vers le haut, c'est-à-dire à un quart de cycle après la position nulle. La relation (1.7) devient :

$$St_n = \frac{n}{\frac{1}{\kappa} + Ma \left(1 + \frac{0.514}{L/D}\right)} \quad (\text{Block})$$

La correction apportée par Block permet d'améliorer sensiblement les résultats à faible nombre de Mach.

#### 1.2.4.6 Modèle de Tam & Block

Tam & Block mènent en 1978 une étude théorique et expérimentale approfondie sur les cavités peu profondes, présentant un rapport d'aspect  $L/D$  compris entre 2 et 8, en régime subsonique ( $Ma < 0.4$ ) [237]. L'objectif de l'étude est de développer un modèle mathématique linéaire du mécanisme de rétroaction aéroacoustique, afin d'établir des bases théoriques pour le contrôle du bruit rayonné. Tam & Block postulent que les oscillations de la couche cisailée sont un paramètre important à considérer dans la génération de bruit. En effet, les mouvements inférieurs de la couche de cisaillement provoquent l'impact d'instabilités sur la paroi latérale, tandis que ses mouvements supérieurs permettent aux perturbations de s'échapper au-dessus du coin aval, sans impacter la paroi latérale. En effet, son inflexion vers le bas induit un



**Fig. 1.9:** (à gauche) Schématisation de la couche cisailée déviée au-dessus de la cavité lors de ses oscillations. (à droite) Schématisation de la couche cisailée déviée au-dessous de la cavité lors de ses oscillations et impactant la paroi : génération d'ondes acoustiques. (d'après [237])

phénomène d'aspiration du fluide extérieur vers l'intérieur de la cavité, donnant naissance à une zone de forte pression près de la paroi. Une onde de compression est donc générée et celle-ci se propage dans toutes les directions : une partie de cette onde se propage à l'intérieur de la cavité, et subit des réflexions aux parois latérales et au fond de la cavité. Tam & Block supposent que l'écoulement est bidimensionnel, et que l'écoulement moyen dans la cavité est nul. Cette dernière hypothèse repose essentiellement sur les observations de East [70],

dont les résultats montrent qu'il n'existe pas de corrélation entre l'écoulement moyen et le rayonnement acoustique de la cavité rectangulaire. Les auteurs reprennent la modélisation de Bilanin et Covert, en plaçant une source linéique monopolaire au bord aval afin de simuler la rétroaction aéroacoustique. Ils suppriment en revanche la source linéique placée au coin amont, car ils estiment que la prise en compte des conditions aux bords et des réflexions primaires dans la cavité suffisent à rendre compte du mécanisme d'excitation au point de séparation. La prise en compte d'une épaisseur moyenne de quantité de mouvement  $\delta_\theta$  est réalisé à l'aide d'un profil moyen de vitesse longitudinale en tangente hyperbolique (équation (1.2)).

Un calcul analytique de la pression dans une cavité rectangulaire 2-D, et à l'extérieur de celle-ci, est mené à l'aide de méthodes intégrales. On obtient une expression implicite assez complexe, qui permet d'estimer les fréquences des modes en fonction du nombre de Mach, et des rapports  $L/D$  et  $L/\delta_\theta$  :

$$\arg(\phi(f_n)) \equiv 0 [2\pi] \quad (\text{Tam \& Block})$$

avec  $\phi$  le rapport complexe entre le déplacement de la couche cisailée au coin aval et la force de la source acoustique linéique placée au bord aval, donné par [237] :

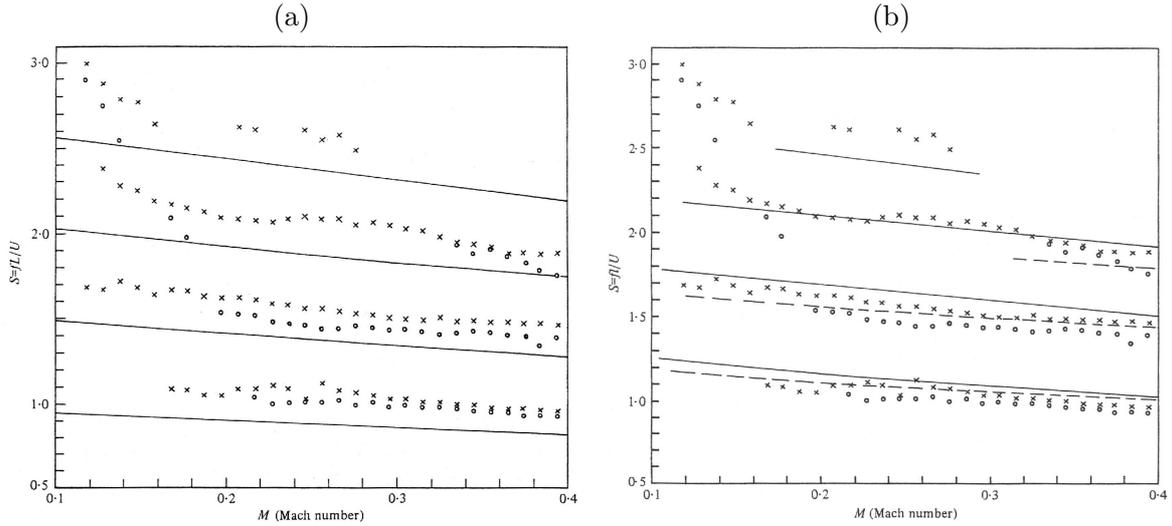
$$\begin{aligned} \phi(f_n) = & \frac{1}{2\pi} \frac{\beta_+ \beta_-}{\left( \frac{\partial \Delta}{\partial K} \right)} \bigg|_{K=k_+, \Phi=f_n} \int_0^L \exp(i k_+ (L - x_1)) \left[ H_0^{(1)} \left( \frac{2\pi f_n (L - x_1)}{c_a} \right) \right. \\ & - \exp \left( i \frac{2\pi f_n \text{Ma} (L - x_1)}{c_\infty (1 - \text{Ma}^2)} \right) H_0^{(1)} \left( \frac{2\pi f_n \text{Ma} (L - x_1)}{c_\infty (1 - \text{Ma}^2)} \right) \\ & + H_0^{(1)} \left( \frac{2\pi f_n (L + x_1)}{c_\infty} \right) + H_0^{(1)} \left( \frac{2\pi f_n \sqrt{(L - x_1)^2 + 4D^2}}{c_a} \right) \\ & \left. - \frac{2\pi f_n}{c_a \beta_-} \bigg|_{K=k_+, \Phi=f_n} \frac{2D}{\sqrt{(L - x_1)^2 + 4D^2}} H_1^{(1)} \left( \frac{2\pi f_n \sqrt{(L - x_1)^2 + 4D^2}}{c_a} \right) \right] dx_1 \end{aligned}$$

$H_l^{(1)}$  est la  $l^{\text{ème}}$  fonction de Hankel de première espèce. La quantité  $k_+$  est le nombre d'onde longitudinal au-dessus de la cavité, et tient compte de l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_\theta$ .  $\Delta$ ,  $\beta_+$  et  $\beta_-$  sont des fonctions du nombre d'onde longitudinal et de la fréquence :

$$\begin{aligned} \beta_+^2(K, \Phi) &= K^2 - \left( \frac{2\pi \Phi - u_\infty K}{c_\infty} \right)^2 & \text{Re}(\beta_+) < 0 \\ \beta_-^2(K, \Phi) &= K^2 - \left( \frac{2\pi \Phi}{c_a} \right)^2 & \text{Re}(\beta_-) < 0 \\ \Delta(K, \Phi) &= \rho_\infty c_\infty^2 (\beta_+ + \beta_-) (K^2 - \beta_+ \beta_-) \end{aligned}$$

Le nombre d'onde  $k_+(f, \delta_\theta)$  peut être estimé à partir de la théorie de la stabilité linéaire des écoulements parallèles non-visqueux de Michalke [160].

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les mesures effectuées sur deux cavités de rapport  $L/D = 2.36$ , comme le montre la figure 1.10(b), sauf pour des nombres de Mach inférieurs à 0.2, où les écarts importants observés suggèrent que les pics spectraux proviennent plutôt du mécanisme de résonance correspondant à un mode de profondeur de la cavité. La transition entre le mécanisme de rétroaction et celui de la résonance semble progressive. L'amélioration des prédictions sur le nombre de Strouhal à bas nombre de Mach est nette, par rapport au modèle de Rossiter, comme le montre la figure 1.10(a). La figure 1.10(b) montre également l'importance de la prise en compte du paramètre  $L/\delta_\theta$ .



**Fig. 1.10:** Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Mach. Données expérimentales :  $\times \times \times$  :  $L = 12$  cm,  $D = 5,05$  cm,  $L/D = 2.36$ ,  $\circ \circ \circ$  :  $L = 7.5$  cm,  $D = 3,175$  cm,  $L/D = 2.36$ . Valeurs estimées : (a) par le modèle de Rossiter. (b) par le modèle de Tam & Block, — :  $L/\delta_\theta = 180$ , - - - :  $L/\delta_\theta = 140$ . (d'après [237])

## 1.2.5 Résonance acoustique

### 1.2.5.1 Résonance acoustique naturelle

La résonance acoustique domine généralement l'acoustique rayonnée par une cavité rectangulaire lorsque l'écoulement incident est très lent, où lorsque la cavité présente une grande dimension par rapport aux autres [62, 69, 70, 182]. Le phénomène est fréquemment observé en musique, où il est responsable de la génération du son de certains instruments. La résonance acoustique est caractérisée par l'existence d'ondes stationnaires dans la cavité, potentiellement dans les trois directions de l'espace, mais préférentiellement dans la direction la plus longue, et dont les fréquences d'oscillation sont estimées par la relation :

$$f_{l,m,n} = \frac{c_\infty}{2\pi} \sqrt{\frac{l^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{W^2} + \frac{n^2\pi^2}{4(D+H')^2}} \quad (l, m, n) \in \mathbb{N}^2 \times \{0, 1, 3, \dots\} \quad (1.8)$$

pour une cavité rectangulaire bafflée, où  $l, m, n$  sont des entiers non tous nuls. La quantité  $D + H'$  représente la profondeur acoustique effective. La correction  $H'$ , nécessaire pour tenir compte de l'inertie du flux acoustique à l'ouverture de la cavité, doit cependant être évaluée en fonction des paramètres géométriques de l'ouverture de la cavité.

East propose une relation dans [70], valable pour des cavités ayant des rapports d'aspect  $L/D$  et  $L/W$  inclus respectivement dans les intervalles  $[0.12, 1.17]$  et  $[0.053, 0.162]$ . Il reprend le travail théorique réalisé par Plumblee *et al.* dans [182], qui étudièrent la réponse d'une cavité rectangulaire à un forçage en pression à son ouverture, en supposant l'écoulement au repos à l'intérieur de la cavité, et uniforme au-dessus. Les auteurs montrent que la réponse de la cavité dans le mode de profondeur fondamentale est donnée par :

$$\frac{\overline{(p_b - \bar{p}_b)^2}}{\overline{(p_f - \bar{p}_f)^2}} = \frac{1}{\left(R_M \sin \frac{2\pi f D}{c_\infty}\right)^2 + \left(X_M \sin \frac{2\pi f D}{c_\infty} - \cos \frac{2\pi f D}{c_\infty}\right)^2}$$

où  $p_b$  et  $p_f$  sont respectivement la pression à la base de la cavité et la pression de forçage à l'ouverture. Les quantités  $R_M$  et  $X_M$  représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance acoustique de l'ouverture de la cavité vue depuis l'intérieur. La

réponse dans le mode de profondeur fondamentale est maximale pour :

$$f = \frac{c_\infty}{4D \left( 1 + A \left( \frac{L}{D} \right)^B \right)}$$

East trouve empiriquement  $A = 0.65$  et  $B = 3/4$ . Finalement, la correction  $H'$  peut être estimée par :  $H' = 0.65 \sqrt[4]{L^3 D}$ .

Liljencrants propose dans [144] une approche différente, en s'appuyant sur la correction proposée par Nomura *et al.* pour une cavité cylindrique bafflée [173]. Il réécrit la correction  $H'$  en fonction de la surface  $S$  de l'ouverture de la cavité :

$$H' = 0.8216 \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (1.9)$$

et remplace cette surface par celle d'une ouverture rectangulaire. La relation obtenue s'écrit :  $H' = 0.4636 \sqrt{LW}$ .

### 1.2.5.2 Couplage avec la couche de cisaillement

En présence d'un écoulement, les tourbillons présents dans la couche de cisaillement peuvent exciter un mode de résonance de la cavité [20]. C'est ce que met en évidence l'étude réalisée par East dans [70], menée pour des écoulements faiblement subsoniques sur des cavités profondes. Il observe la présence d'un pic intense dans la signature acoustique de la cavité, dont la fréquence augmente en fonction du nombre de Mach. L'amplitude de ce pic croît lorsqu'on se rapproche par valeurs inférieures de la fréquence de résonance naturelle de la cavité, puis décroît lorsqu'on s'en éloigne. East explique que ce rayonnement n'est possible que lorsque les perturbations dans la couche de cisaillement à l'ouverture de la cavité sont amplifiées par un couplage avec un mode de résonance de la cavité.

D'autres auteurs, comme Elder [71] ou Parthasarathy [177] étudient le couplage possible entre la couche de cisaillement et les modes de résonance de cavité. Ces études, menées sur des cavités cylindriques, sont revisitées dans la partie qui leur est consacrée (voir partie 1.3).

### 1.2.5.3 Seuil d'apparition du couplage

East montre que le couplage ne peut intervenir que si le nombre de Mach est suffisamment élevé [70]. La démonstration repose sur l'estimation de la fréquence dominante dans la couche cisailée, qui est approximée à l'aide de la formule de Rossiter, en négligeant le terme relatif au nombre de Mach :  $f_n = \kappa_v (n - \gamma_v) u_\infty / L$ . Le couplage avec le mode de profondeur fondamentale donne que cette fréquence est proche de la fréquence de résonance, qui vérifie  $fD/c_\infty \geq 0.15$  pour les rapports d'aspect et nombres de Mach considérés. Ces deux relations permettent d'obtenir l'inégalité :

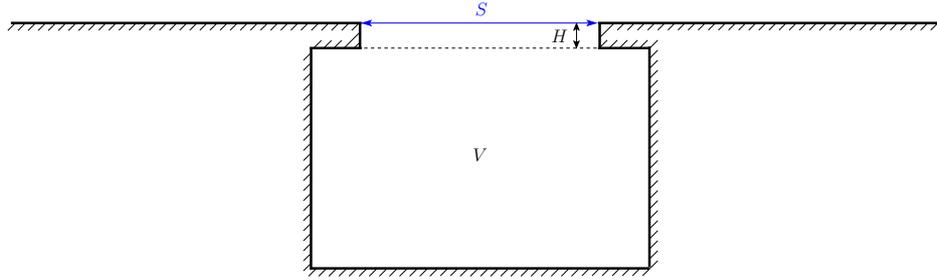
$$\text{Ma} \geq \frac{L}{D} \frac{0.15}{\kappa_v (n - \gamma_v)}$$

Le fait que le nombre  $n$  de tourbillons à l'ouverture de la cavité vaille souvent 1 ou 2 dans les écoulements usuels montre l'existence d'un nombre de Mach critique en-deça duquel les oscillations associées aux fréquences discrètes sont très petites.

### 1.2.5.4 Résonateur de Helmholtz

Lorsque la cavité est recouverte partiellement de rebords, comme c'est le cas par exemple pour le toit ouvrant d'un véhicule, la cavité apparaît comme un large volume présentant un

goulot à l'ouverture, telle une bouteille. L'entrée d'air dans la cavité entraîne alors une augmentation de la pression à l'intérieur, qui tend à éjecter de l'air du résonateur. Cette éjection d'air s'accompagne d'une diminution de la pression à l'intérieur du résonateur. L'inertie de la colonne d'air dans le goulot fait alors que la pression dans le résonateur devient inférieure à la pression externe, entraînant un nouvel appel d'air dans le résonateur. Le résonateur se comporte finalement comme un système masse-ressort, où l'air dans le goulot joue le rôle d'une masse acoustique, et le cœur du résonateur celui du ressort acoustique, lorsque les longueurs d'onde acoustiques considérées sont grandes devant les dimensions géométriques du résonateur. La figure 1.11 montre un exemple de résonateur, où l'on a noté  $V$  son volume,  $S$  la surface de la section transverse du goulot, et  $H$  la hauteur du goulot.



**Fig. 1.11:** Résonateur de Helmholtz de volume  $V$ , et dont le goulot, de hauteur  $H$  a une section transverse de surface  $S$ .

Il est possible d'estimer la fréquence d'oscillation de ce système à l'aide d'un modèle linéaire simple. En supposant que la colonne d'air présente dans le goulot du résonateur se déplace de  $d\xi$ , le volume d'air déplacé dans le résonateur vaut  $dv = S d\xi$ . En supposant l'air comme un gaz parfait, et la cavité adiabatique, la loi de Laplace permet d'évaluer la variation de pression  $dp$  dans le résonateur :

$$dp = -\frac{\gamma p}{V} dv$$

où  $p$  est la pression à l'intérieur du résonateur. Cette variation de pression engendre une force de rappel  $dF$  sur la colonne d'air du goulot, qui vaut  $dF = S dp = -\gamma p S^2 / V d\xi$ . Une application du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir une équation de son mouvement :

$$\rho S H \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2}{V} \xi = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un système harmonique non-amorti, dont la fréquence d'oscillation est donnée par :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma p S}{\rho V H}} = \frac{c_\infty}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V H}}$$

où l'on suppose que la célérité du son à l'intérieur et à l'extérieur du résonateur sont égales. En pratique, la hauteur du goulot doit être corrigée, pour tenir compte de l'inertie du flux acoustique au deux ouvertures du goulot (vers l'extérieur et l'intérieur du résonateur). La fréquence de Helmholtz du résonateur est généralement estimée par :

$$f = \frac{c_\infty}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V(H + 2H')}} \quad (1.10)$$

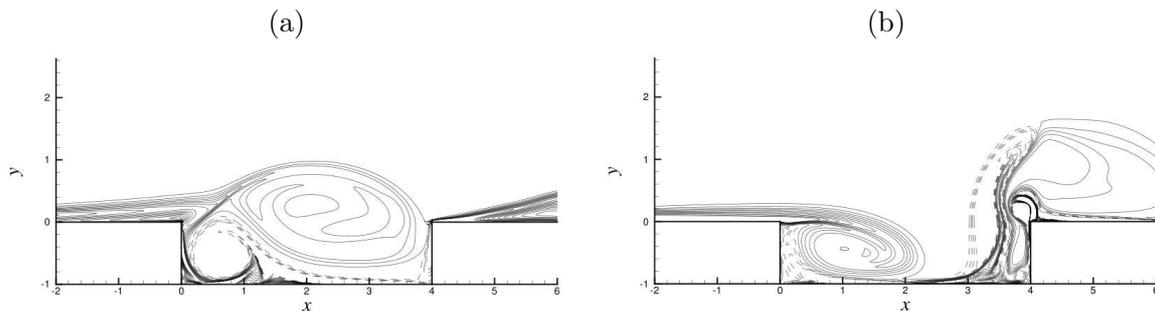
La correction  $H'$  peut être estimée par la relation (1.9).

En présence d'un écoulement affleurant, la formule (1.10) doit être modifiée à nouveau pour prendre en compte la destabilisation de la couche limite incidente [180]. Golliard propose dans [96] un modèle semi-empirique pour estimer le bruit rayonné par une cavité de type résonateur de Helmholtz en présence d'un écoulement turbulent à faible nombre de Mach. Le modèle repose sur l'hypothèse que le bruit large bande observé est le résultat d'une réponse passive de la cavité à une source acoustique située à son ouverture. Dans le cas présent, cette source est les perturbations turbulentes de la couche limite incidente. Les estimations fournies par le modèle se comparent favorablement aux mesures expérimentales recueillies sur une cavité rectangulaire de  $10 \times 14.4 \times 10 \text{ cm}$  avec une ouverture rectangulaire de  $7 \text{ mm}$  dans l'envergure, en présence d'un écoulement turbulent d'épaisseur de couche limite  $\delta = 32 \text{ mm}$  et de vitesse  $16.9 \text{ m/s}$  ou  $38.8 \text{ m/s}$ .

### 1.2.6 Mode de sillage

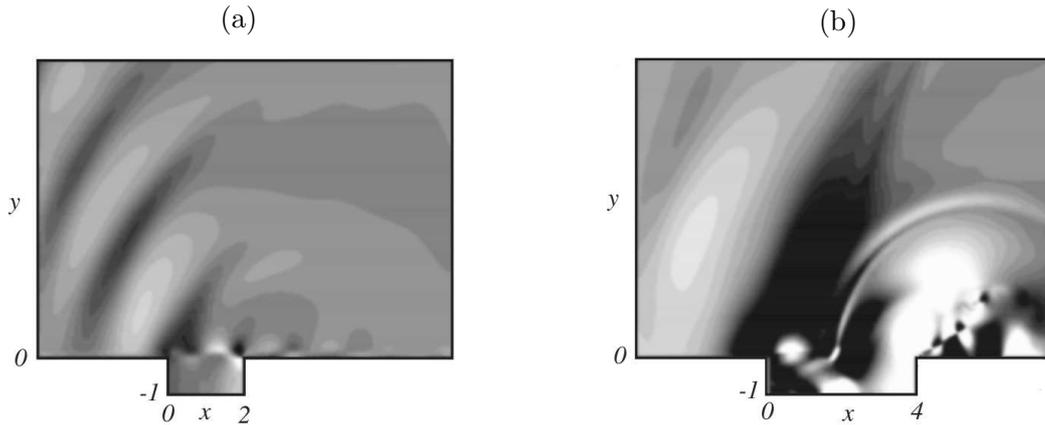
Gharib & Roshko mettent en évidence, pour de faibles épaisseurs de couche limite laminaire incidente et des écoulements d'eau à très basse vitesse ( $u_\infty = 0.27 \text{ m/s}$ ), l'existence d'un mode de sillage (*wake mode*), dans le cadre de leurs études expérimentales menées sur des cavités axisymétriques [92]. Ils observent que l'écoulement oscillant au-dessus de la cavité devient asymétrique, par rapport au plan longitudinal de la cavité, et ne recolle plus forcément au niveau du bord aval de la cavité. L'écoulement présente alors de fortes fluctuations qui ressemblent davantage à un sillage que générerait un corps à arêtes vives, plutôt qu'à une couche de cisaillement libre. Les auteurs mesurent aussi un accroissement significatif de la traînée induite par la cavité.

La transition vers le mode de sillage est étudié numériquement en détail par Colonius *et al.* dans [50] pour des couches limites incidentes laminares et des écoulements compressibles. Le mode de sillage se caractérise par la taille de la structure tourbillonnaire lâchée à l'angle amont, qui est proche de celle de la cavité. Le tourbillon est suffisamment gros pour provoquer un décollement de l'écoulement incident au niveau du coin amont. L'écoulement affleurant est alors fortement dévié dans la cavité, comme le montre la figure 1.12(a). La structure tourbillonnaire est ensuite violemment éjectée de la cavité au niveau de l'angle aval (figure 1.12(b)), et sa grande taille entraîne un nouveau décollement de l'écoulement. Le rayonnement



**Fig. 1.12:** Isocontours de vorticité instantanée à deux instants différents, pendant un cycle du mode de sillage, pour une cavité de rapport d'aspect  $L/D = 4$ , avec une épaisseur de quantité de mouvement initiale vérifiant  $L/\delta_\theta = 102.1$ , et pour un écoulement à Mach 0.6. (d'après [50])

acoustique est profondément différent de celui obtenu lorsque les oscillations dans la cavité sont le résultat d'une rétroaction aéroacoustique. Le spectre acoustique du bruit rayonné n'est pas dominé par une ou deux fréquences correspondant à des modes de Rossiter, mais présente plutôt des composantes larges bandes, avec l'émergence de très basses fréquences, comme le montre la figure 1.13. Cette figure représente le rayonnement acoustique pour deux cavités excitées par un écoulement à Mach 0.6, présentant respectivement un rapport d'aspect  $L/D = 2$ , qui est le lieu d'une rétroaction aéroacoustique (figure 1.13(a)) et  $L/D = 4$ , qui fonctionne en mode de sillage (figure 1.13(b)). Colonius *et al.* notent aussi que l'éjection de



**Fig. 1.13:** Dilatation instantanée, pour un écoulement affleurant de Mach 0.6. (a) Cavité de rapport d'aspect  $L/D = 2$  : mode de Rossiter. (b) Cavité de rapport d'aspect  $L/D = 4$  : mode de sillage. (d'après [50])

la structure tourbillonnaire s'accompagne d'une forte impulsion haute fréquence de pression. L'étude paramétrique menée par l'équipe de Colonius montre que le mode de sillage apparaît pour les cavités plutôt allongées, indépendamment du nombre de Mach de l'écoulement.

L'existence de modes de sillage a aussi été observée numériquement par Gloerfelt *et al.* dans [100], ou par Shieh & Morris pour des couches limites incidentes turbulentes [213]. Les études expérimentales menées par Kriesels *et al.* sur des raccords cylindriques de canalisation montrent une structure d'écoulement qui ressemble étroitement à un mode de sillage [128].

### 1.2.7 Précédentes simulations numériques

De nombreuses études numériques ont été menées, depuis les toutes premières simulations de Borland de 1977, s'appuyant sur une résolution 2-D des équations d'Euler [30]. On présente dans cette partie seulement quelques références. Un inventaire plus exhaustif des simulations numériques effectuées sur des cavités rectangulaires est disponible dans les références [97] ou [34].

Les premiers calculs sont systématiquement réalisés pour des écoulements supersoniques. En effet, le rayonnement acoustique de la cavité est alors une succession d'ondes de choc dont les fortes amplitudes peuvent être capturées par un code CFD. Les premiers calculs CFD sont menés en 1980 par Hankey & Shang dans [106]. Ils proposent une résolution numérique en instationnaire des équations de Navier–Stokes moyennées (RANS) sur une cavité peu profonde de rapport d'aspect  $L/D = 2.55$  soumise à un écoulement affleurant à Mach 1.5. La discrétisation est réalisée à l'aide de schémas aux différences finies de McCormack [158], et d'un modèle de viscosité turbulente de Cebeci–Smith [217], sur un maillage cartésien 2-D de  $78 \times 52$  points. Les résultats obtenus sont encourageants, et la pression pariétale obtenue numériquement est en bon accord avec les mesures effectuées par Heller & Bliss dans [108], ainsi que la fréquence du pic spectral obtenue par le calcul. Même si une solution numérique d'une durée plus longue permettrait une analyse spectrale plus fine, cette première simulation montre les capacités prometteuses de l'outil numérique, en vue de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu dans le rayonnement acoustique d'une cavité.

Les simulations RANS effectuées dans les années 1990 montrent cependant que les résultats sont sensibles à la dissipation induite par le modèle de turbulence choisi. La majorité des auteurs ont recours au modèle de Baldwin–Lomax [7] pour sa simplicité. On trouve néanmoins quelques références où d'autres modèles de turbulence sont utilisés. Le modèle à deux équations  $k - \varepsilon$  est par exemple implémenté par Shih *et al.* [214] pour simuler l'acoustique d'une cavité supersonique.

Les premiers calculs RANS 3-D, effectués par Rizzetta [191] sur une cavité rectangulaire de

rapports  $L/D = 5.07$  et  $L/W = 1.9$  excitée par un écoulement affleurant à Mach 1.5 donnent des résultats qui se comparent favorablement aux données expérimentales de Kaufman *et al.* [119]. Cependant cette simulation n’apporte pas d’amélioration sensible par rapport aux simulations 2-D déjà effectuées, ce qui confirme numériquement le caractère bidimensionnel en moyenne de la couche cisailée pour cette configuration.

Sinha *et al.* font remarquer dans [215] que le recours à des équations moyennées tend toutefois à surestimer la viscosité turbulente amortissant les fluctuations de pression, et par conséquent à sous-estimer les niveaux acoustiques obtenus numériquement. Ils initient donc le recours aux simulations des très grandes échelles (VLES), fermées par un modèle de sous-maille de Smagorinsky, car ils estiment qu’elles fournissent une meilleure représentation des interactions aéroacoustiques. Les résultats qu’ils obtiennent s’accordent davantage aux expériences.

Banks *et al.* proposent dans [8] une formulation variationnelle complète 2-D pour des cavités rectangulaires peu profondes, en vue d’une résolution par des méthodes de type éléments finis. Ils découpent le domaine de calcul en deux parties : le fluide est supposé visqueux et incompressible au-dessus de la cavité, compressible et non-visqueux à l’intérieur. Les deux régions communiquent par des conditions d’interface dans la couche de cisaillement supposée infiniment mince. Le modèle dresse un cadre mathématique rigoureux, mais aucune simulation n’est présentée.

Nécessitant une grande puissance de calcul et une forte capacité de stockage, la simulation numérique directe (DNS) est envisagée par des auteurs uniquement pour étudier des cavités en 2-D à faible nombre de Reynolds. C’est le cas de Colonius *et al.*, qui utilisent des schémas faiblement dispersifs et faiblement dissipatifs de Tam & Webb [235] et des conditions aux limites non-réfléchissantes pour effectuer une DNS sur des cavités de rapport d’aspect  $L/D$  variant de 1 à 5, soumises à un écoulement affleurant dont le nombre de Mach varie entre 0.2 et 0.8 [50]. Gloerfelt montre qu’il est possible d’obtenir le champ acoustique rayonné par une cavité rectangulaire de rapport d’aspect  $L/D = 3$  soumise à un écoulement à Mach 0.7 à l’aide d’une simulation des grandes échelles 2-D [97]. Le rayonnement acoustique obtenu s’accorde favorablement aux visualisations par striescopie de Krishnamurty.

L’accès aux nombres de Reynolds plus élevés est rendu possible par la simulation des grandes échelles. Larchevêque *et al.* montrent dans [138] que la LES permet de simuler fidèlement l’écoulement de cavité et le bruit rayonné, en comparant favorablement les résultats de leurs simulations aux mesures expérimentales de Forestier [85].

## 1.3 Cavités cylindriques

Alors que les cavités rectangulaires ont fait l’objet de nombreuses investigations, la littérature est relativement peu fournie en études consacrées aux cavités cylindriques. C’est pourtant une géométrie que l’on retrouve fréquemment dans l’industrie des transports. Seuls quelques articles, que l’on se propose de revisiter, abordent cette spécificité géométrique. La figure 1.3 rappelle les principales notations utilisées dans la suite. On note  $D$  le diamètre de la cavité,  $H$  sa profondeur, et  $\beta$  la position angulaire prise à partir du coin aval, dans le sens trigonométrique.

### 1.3.1 Classification

L’étude pionnière menée par Hiwada *et al.* en 1983 [113] tente d’établir, à partir d’observations expérimentales, une classification selon le comportement de la cavité en fonction du rapport d’aspect  $D/H$ . L’étude est effectuée sur une cavité cylindrique de 65 mm de diamètre, dont la profondeur peut être ajustée pour obtenir des rapports d’aspect variant de 1 à 10. La cavité est excitée par un écoulement affleurant  $u_\infty$  variant de 10 à 25 m/s.

- Un écoulement **stable et symétrique** est observé lorsque la cavité est peu profonde  $D/H \geq 5$  ou lorsque la cavité à un rapport d’aspect  $D/H$  compris entre 1 et 1.25. Cette

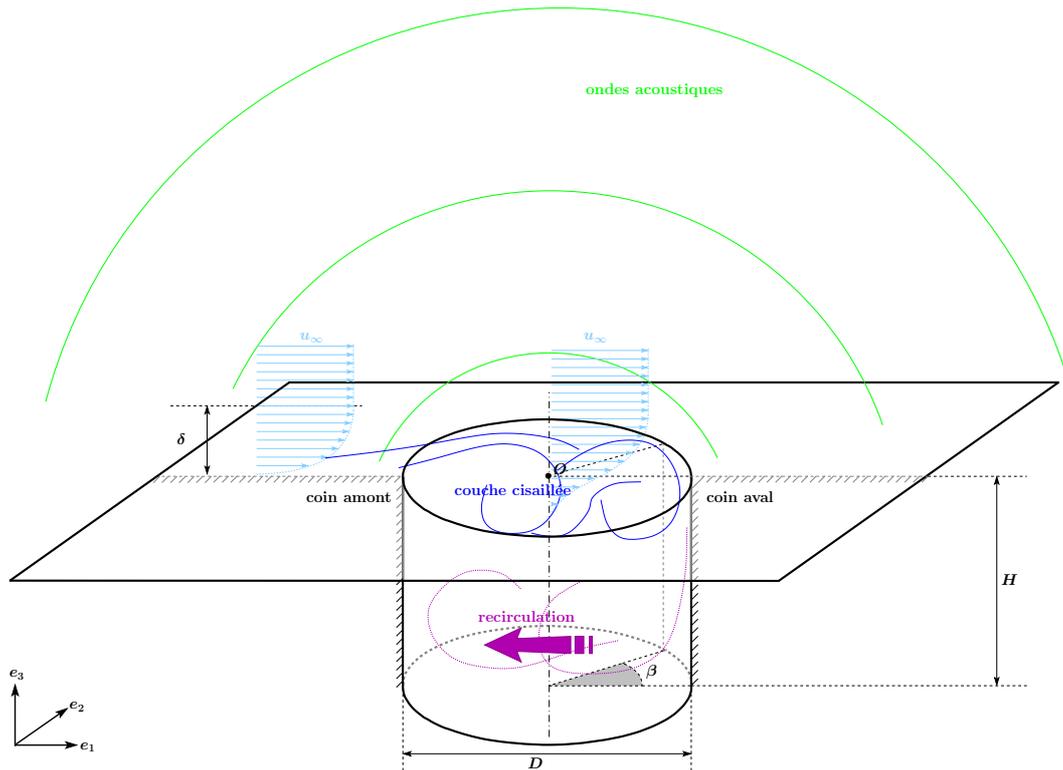


Fig. 1.14: Notations pour une cavité cylindrique soumise à un écoulement affleurant de vitesse  $u_\infty$  d'épaisseur de couche limite  $\delta$ .

- symétrie est par exemple observée sur le coefficient de pression mesurée au fond de la cavité, comme le montre la figure 1.15(a), pour un rapport d'aspect de 1.
- Ils observent un écoulement **instable avec un phénomène de battement rapide de la couche de cisaillement** (*flapping*), pour un rapport d'aspect compris entre 2.5 et 5.
  - Pour des rapports d'aspect compris entre 1.4 et 2.5, l'écoulement est **asymétrique par rapport au plan de l'écoulement, et bistable** (*switching*). La figure 1.15(b), montre l'asymétrie des isocontours du coefficient de pression au fond de la cavité pour un rapport d'aspect de 2. Ils montrent que lorsque l'asymétrie s'est développée dans la cavité, il est possible de basculer vers l'autre état stable asymétrique par l'introduction de perturbations forcées.

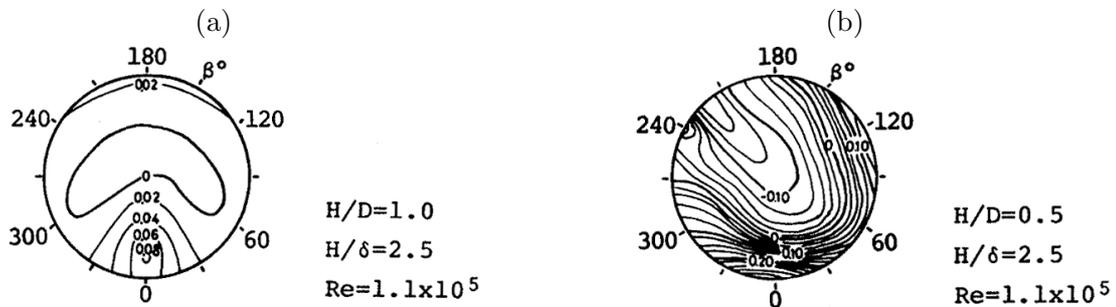


Fig. 1.15: Isocontour du coefficient de pression. (a)  $D/H = 1$ . (b)  $D/H = 2$  (d'après [113]).

Hiwada *et al.* observent aussi que le choix de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  et de la vitesse de l'écoulement  $u_\infty$  n'affectent que très peu la trace générale du coefficient de pression ou du coefficient de transfert de chaleur aux parois de la cavité.

Une étude expérimentale menée par Haigermoser *et al.* vient étayer les précédentes observations [105]. Une campagne de vélocimétrie par imagerie de particules (*Particle Image Velocimetry – PIV*) est effectuée sur une cavité de rapport d'aspect  $D/H = 2$ , soumise à un écoulement turbulent affleurant d'épaisseur de couche limite  $\delta = 22.5 \text{ mm}$  et de vitesse  $u_\infty = 22.5 \text{ m/s}$ . L'expérience met en évidence un espacement irrégulier entre les tourbillons au-dessus de la cavité, ce qui démontre que le lâcher de tourbillons au coin amont de la cavité se fait de manière irrégulière. Ils remarquent également l'établissement d'une recirculation aérodynamique asymétrique dans la cavité. Une turbulence élevée est enfin observée près du coin aval de la cavité, lorsque l'écoulement extérieur est entraîné à l'intérieur de la cavité, et dans les régions où le fluide sort de la cavité et interagit avec la couche limite incidente.

### 1.3.2 Résonance acoustique naturelle

Les fréquences de résonance naturelle d'une cavité cylindrique bafflée peuvent être estimées grâce à la relation [18] :

$$f_{l,m,n} = \frac{c_\infty}{2\pi} \sqrt{\frac{4z_{l,m}^2}{D^2} + \frac{n^2\pi^2}{4(H+H')^2}} \quad (l, m, n) \in \mathbb{N}^2 \times \{0, 1, 3, \dots\} \quad (1.11)$$

où  $l \in \mathbb{N}$  représente le nombre de diamètres nodaux (correspondant aux modes azimutaux),  $m \in \mathbb{N}$  le nombre de cercles nodaux (correspondant aux modes radiaux) et  $n \in \{0, 1, 3, \dots\}$  le nombre de quart-d'onde dans la profondeur (modes de profondeur). La quantité  $z_{l,m}$  représente le  $m^{\text{ème}}$  zéro de la dérivée de la  $l^{\text{ème}}$  fonction de Bessel de première espèce  $J_l$ , et  $H + H'$  la profondeur acoustique effective, dont la correction  $H'$  vaut  $0.4108D$  pour une cavité cylindrique bafflée [173]. Le tableau 1.2 donne des approximations des premiers  $z_{l,m}$ , obtenus à partir des courbes représentatives de la dérivée des fonctions de Bessel de première espèce  $J'_0, J'_1, J'_2, J'_3$  et  $J'_4$  (figure 1.16).

		$l$				
		0	1	2	3	4
$m$	0	0	1.841	3.054	4.201	5.318
	1	3.832	5.331	6.706	8.015	9.282
	2	7.016	8.536	9.970	11.346	12.682

Tab. 1.2: Table des premiers  $z_{l,m}$ .

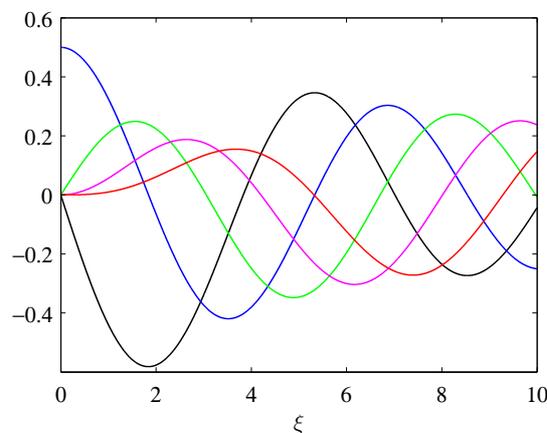


Fig. 1.16: Courbe représentative de la dérivée des premières fonctions de Bessel de première espèce. — :  $J'_0$ , — :  $J'_1$ , — :  $J'_2$ , — :  $J'_3$ , — :  $J'_4$ .

Dybenko & Savory observent une résonance acoustique pour des cavités cylindriques ayant

un diamètre de  $76 \text{ mm}$  et de rapport d'aspect  $D/H$  de 5 ou de 1.4, excitées par un écoulement affleurant de  $u_\infty = 27 \text{ m/s}$  [69]. En effet, un pic intense est observé proche de la fréquence fournie par l'équation (1.11) pour le premier mode de profondeur, dans les deux configurations.

### 1.3.3 Modèle de résonance couplée d'Elder

Elder propose dans [71] un modèle en vue d'expliquer le comportement tonal des cavités cylindriques profondes excitées par un écoulement affleurant turbulent. La partie expérimentale de son étude est menée sur une cavité cylindrique de  $61 \text{ mm}$  de diamètre et de  $264 \text{ mm}$  de profondeur, couverte par une fente rectangulaire réglable, et soumise à un écoulement affleurant de  $27 \text{ m/s}$ . La couche cisailée se développe ainsi au-dessus de l'ouverture rectangulaire, tandis que la résonance de la cavité est régie par sa géométrie cylindrique.

Le modèle proposé par Elder repose sur l'hypothèse d'un pilotage du développement de la couche cisailée par des ondes stationnaires qui se forment dans la cavité et qui correspondent à des modes acoustiques de profondeur. Il suppose aussi que le débit aérodynamique de fluide qui entre et sort de la cavité permet de maintenir l'amplitude de ces ondes stationnaires, comme c'est le cas pour des tuyaux d'orgue [72]. La conversion du débit acoustique en flux/reflux aérodynamique est modélisée à l'aide d'une fonction de transfert qu'il nomme *Forward Transfer Function* (FTF). Une seconde fonction de transfert, nommée *Backward Transfer Function* (BTF), décrit la manière dont la cavité profonde convertit le débit aérodynamique de fluide en acoustique. Alors que la fonction de transfert BTF est modélisée en introduisant l'impédance acoustique de la cavité vue depuis l'ouverture et l'impédance acoustique de l'ouverture vue depuis l'intérieur de la cavité, la fonction de transfert FTF est beaucoup plus délicate à évaluer. Le débit aérodynamique est estimé à l'aide d'un modèle 1-D du déplacement vertical de l'interface de la couche de mélange. Le déplacement s'écrit comme la somme d'un déplacement d'origine acoustique et d'un déplacement engendré par l'onde qui se développe et s'amplifie le long de l'ouverture rectangulaire de la cavité. L'estimation proposée par Elder du débit aérodynamique fait finalement intervenir la dimension transverse à l'écoulement de la fente rectangulaire placée à l'ouverture de la cavité, et le maximum de déplacement de la couche limite. Le flux volumique acoustique est estimé en supposant que la phase du déplacement acoustique de l'interface est constante dans la direction transverse à l'écoulement.

Des oscillations harmoniques auto-entretenues sont obtenues lorsque le produit de ces deux fonctions de transfert vaut 1. Elder utilise en outre cette condition pour déterminer la longueur de la fente rectangulaire à l'ouverture de la cavité permettant d'obtenir une fréquence d'émission égale à la fréquence d'un des modes de profondeur naturels de la cavité. Ce modèle est revisité dans la section 3.

### 1.3.4 Modèle de résonance couplée de Parthasarathy

Parthasarathy *et al.* proposent dans [177] un modèle pour estimer la fréquence principale du rayonnement acoustique de cavités cylindriques profondes ayant un rapport d'aspect  $D/H$  d'environ 0.38, soumises à un écoulement à faible nombre de Mach ( $\text{Ma} \in [0.12, 0.24]$ ). Ils supposent que les cavités profondes se comportent comme des résonateurs, et que les oscillations de la couche cisailée à l'ouverture de la cavité assurent un mécanisme d'excitation pour la résonance. Ainsi une cavité profonde peut avoir simultanément une résonance acoustique naturelle, de nature géométrique, et/ou une résonance forcée due aux instabilités dans la couche cisailée.

Ils proposent un modèle d'oscillateur 1-D piloté par les instabilités de l'écoulement à l'ouverture de la cavité. Le modèle reprend l'équation d'oscillations libres dans un conduit, en y ajoutant un terme de forçage dans le second membre, traduisant la convection des oscillations à l'ouverture de la cavité. Le modèle permet d'estimer la première fréquence de résonance forcée, mais de manière non-explicite. Une comparaison entre les résultats prédits par le modèle et des mesures effectuées sur une cavité cylindrique de  $5.1 \text{ mm}$  de diamètre et  $13.2 \text{ mm}$  de

profondeur excitée par des écoulements à faible nombre de Mach est menée avec succès. Ils observent que leurs données peuvent être relativement bien décrites par la relation empirique :

$$f = \frac{c_\infty}{4(1 - \text{Ma})(D + H)} \quad (1.12)$$

### 1.3.5 Quid des modes de Rossiter ?

La pertinence du modèle de Rossiter, qui explique le rayonnement acoustique de cavités rectangulaires comme la conséquence d'une rétroaction aéroacoustique, est beaucoup moins évidente dans le cas cylindrique, car la longueur  $L$  utilisée dans le modèle d'origine (équation (1.5)) n'est plus constante dans la direction transverse à l'écoulement, mais dépend de la position angulaire  $\beta$ . Formellement, le modèle de Rossiter peut être réécrit pour une géométrie cylindrique :

$$\frac{f_n D \cos \beta}{u_\infty} = \frac{n - \gamma_v}{\frac{1}{\kappa_v} + \text{Ma}} \quad (1.13)$$

Expérimentalement, on observe généralement la présence de pics dans la signature acoustique du rayonnement de la cavité cylindrique [69], et non une bande de fréquences où les niveaux sont intenses, ce que l'on obtiendrait en faisant varier  $\cos \beta$  entre 0 et 1.

Cependant, Dybenko & Savory observent que pour une cavité ayant un diamètre de 76 mm et un rapport d'aspect de  $D/H = 2.1$  soumise à un écoulement de 27 m/s, la fréquence du pic observé dans le bruit rayonné par la cavité, mesurée à 147 Hz, est en accord avec l'estimation fournie par la formule (1.13) dans le plan de l'écoulement passant par le centre  $O$  de la cavité ( $\beta = 0$ ) [69]. Ils en concluent que l'acoustique rayonnée par la cavité cylindrique dans cette configuration est reliée d'une façon ou d'une autre à un mécanisme de rétroaction aéroacoustique dans la cavité. N'observant pas ce pic pour d'autres rapports d'aspect testés ( $D/H = 5$  et  $D/H = 1.4$ ), Dybenko & Savory suggèrent que la boucle de rétroaction aéroacoustique est également à l'origine de la dissymétrie de l'écoulement et de la forte traînée observée pour le rapport d'aspect de 2.1.

Czech *et al.* proposent dans [59] une adaptation de la formule de Rossiter pour le cas cylindrique. La longueur effective  $L$  est évaluée par analogie avec une cavité carrée de même surface que la cavité circulaire considérée. On trouve  $L^2 = \pi D^2/4$ . Finalement l'adaptation de la formule de Rossiter donne :

$$\frac{f_n \sqrt{\pi} D}{2 u_\infty} = \frac{n - \gamma_v}{\frac{1}{\kappa_v} + \text{Ma}}$$

Cette formule donne d'assez bonnes estimations de la fréquence dominant le rayonnant acoustique de la cavité cylindrique pour une cavité de 19.6 mm de diamètre soumise à un écoulement affleurant dont le nombre de Mach est compris entre 0.1 et 0.3 [59].

### 1.3.6 Précédentes simulations numériques

La spécificité géométrique des cavités cylindriques n'est abordée numériquement que dans la littérature très récente. Outre les difficultés de mise en œuvre de méthodes numériques robustes pour cette géométrie, le peu de données expérimentales publiées à ce jour pour des cavités cylindriques limite singulièrement le nombre d'éléments de comparaison en vue de valider les codes de simulation.

Hering *et al.* effectuent une simulation d'un écoulement turbulent sur des cavités cylindriques de rapport d'aspect  $D/H$  de 5, 2.1 et 1.4 [110]. Ils ont recours au code commercial FLUENT, qui utilise la méthode des volumes finis. Ils effectuent la simulation en stationnaire,

et comparent les champs moyens de vitesse et de pression pariétale à des mesures effectuées à la soufflerie de l'Université de Western Ontario sur une cavité de 76 mm de diamètre, en présence d'un écoulement de 27 m/s. Ils observent un coefficient de pression symétrique pour les cas  $D/H = 5$  et  $D/H = 1.4$  sur la paroi latérale et sur la paroi de fond de la cavité. Le coefficient de pression est asymétrique pour la cavité au rapport d'aspect  $D/H = 2.1$ . Quantitativement, les résultats se comparent favorablement aux données expérimentales pour les écoulements symétriques sauf pour le cas  $D/H = 2.1$ . L'asymétrie observée dans la simulation pour ce rapport d'aspect n'est en effet pas aussi marquée que dans les résultats expérimentaux. Le coefficient de pression à la paroi est aussi largement sous-estimé. Ces calculs en stationnaire permettent donc d'illustrer les observations d'Hiwada *et al.*, mais ne peuvent aborder la question du rayonnement acoustique engendré, qui nécessiterait des simulations en instationnaire.

Grottadaurea & Rona proposent dans [103] deux simulations en DES réalisées sur deux cavités de 10 cm de diamètre et de rapport d'aspect  $D/H$  respectif 0.7 et 2.5, en présence d'un écoulement affleurant de 80 m/s. Leur algorithme de résolution est fondé sur une méthode des volumes finis d'ordre 2, qui s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul à l'aide d'un maillage curviligne composé de 1.3 million de points. La couche limite turbulence incidente est implémentée à l'aide d'un profil de vitesse moyenne  $\bar{u}_1$  de Spalding [222], et d'un modèle empirique de perturbations. Les auteurs observent dans les deux configurations la présence d'instabilités périodiques dans l'écoulement, dont la période croît avec la profondeur. La directivité du rayonnement acoustique de la cavité diffère selon les deux cas simulés. La cavité peu profonde présente un lobe principal assez marqué vers l'amont, tandis que la cavité profonde montre l'existence d'un lobe secondaire vers l'aval. Dans un plan perpendiculaire à l'écoulement, l'étude révèle que l'acoustique rayonnée en champ proche est symétrique pour la cavité profonde et asymétrique pour la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 2.5$ . Qualitativement, la nature asymétrique du rayonnement acoustique en champ proche obtenue pour la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 2.5$  pourrait s'expliquer par l'asymétrie de l'écoulement dans cette configuration, observée par Hiwada *et al.* [113]. Il manque cependant à cette étude une comparaison à des données expérimentales (périodes des perturbations, niveaux acoustiques en champ proche, directivité, etc.) pour valider complètement l'étude numérique.

Une autre simulation numérique du bruit rayonné par une cavité cylindrique est proposée par Mincu *et al.* dans [162], sur une cavité de 10 cm de diamètre et de rapport d'aspect  $D/H = 1$ , soumise à un écoulement de 70 m/s. Un profil de vitesse sans perturbation est imposé à l'entrée du domaine de calcul. La simulation est réalisée à l'aide d'une méthode numérique hybride : un calcul LES est effectué dans le voisinage de la cavité, en vue de capturer les instabilités tourbillonnaires se développant et le rayonnement acoustique en champ proche. Ces perturbations en champ proche sont ensuite injectées dans un code de propagation afin d'obtenir le rayonnement acoustique en champ lointain. La simulation montre l'établissement d'un écoulement symétrique dans la cavité. Les résultats numériques sont comparés aux données expérimentales issues d'une campagne de mesures menée par l'ONERA sur cette géométrie, mais en présence d'une couche limite incidente turbulente. Malgré une sous-estimation de l'amplitude du rayonnement acoustique, les résultats sont en bon accord avec les mesures. Ce calcul tend aussi à montrer que le champ acoustique n'est que faiblement influencé par la présence ou non de fluctuations dans la couche limite incidente. Chicheportiche & Gloerfelt proposent dans [43] un calcul direct du bruit rayonné par un écoulement affleurant sur la même géométrie que Mincu *et al.* et pour un écoulement de 70 m/s. Un profil turbulent moyen est implémenté à l'entrée du domaine de calcul, mais aucune perturbation de ce profil n'est appliquée pour rendre plus réaliste la couche limite turbulente incidente. Les résultats issus de l'étude numérique se comparent assez favorablement aux mesures effectuées dans le cadre du programme AEROCV. Les niveaux de turbulence obtenus numériquement dans la cavité reste cependant inférieurs aux niveaux mesurés expérimentalement. L'étude met enfin en évidence des différences dans la dynamique de l'écoulement par rapport aux cavités rectangulaires.

## 1.4 Conclusion

L'étude bibliographique met en évidence la complexité du comportement aérodynamique des cavités. Elle révèle que différentes interactions entre l'écoulement affleurant et l'acoustique générée peuvent avoir lieu dans la cavité. Il s'agit d'interactions aérodynamiques avec la présence d'une rétroaction aéroacoustique dans la cavité, ou de couplages entre la couche de cisaillement et un mode de résonance. Le résultat de ces interactions, bien que de nature différente, est l'établissement de fluctuations auto-entretenuës à l'origine d'un rayonnement acoustique tonal intense. La géométrie de la cavité ( $L, W, D, H$ ), ainsi que les caractéristiques de l'écoulement affleurant ( $u_\infty, \delta, \delta_\theta$ ), sont des paramètres importants pour le choix préférentiel d'un type d'interaction plutôt qu'un autre. Alors que l'acoustique d'une cavité rectangulaire peu profonde est généralement dominée par un pic lié à la rétroaction aéroacoustique, l'acoustique des cavités profondes est souvent de nature résonante. Cette séparation idéale entre deux comportements de nature différente n'est pas si nette en pratique, car il peut exister des jeux de paramètres pour lesquels ces deux types d'interactions peuvent coexister simultanément.

La structure complexe de l'écoulement de cavité peut être mieux appréhendée grâce aux techniques modernes de mesure. La vélocimétrie laser Doppler permet par exemple des mesures précises et non-intrusives de la vitesse instantanée de l'écoulement en un point donné. Elle est par exemple utilisée par Forestier dans [85] pour une étude expérimentale complète d'une cavité profonde en régime transonique. Il s'agit également de la vélocimétrie par imagerie de particules, qui permet notamment d'obtenir des cartographies précises de l'écoulement instantané dans un plan perpendiculaire à la caméra, comme le montrent les visualisations de Lin & Rockwell d'un écoulement turbulent affleurant une cavité [145].

L'outil numérique se montre également très prometteur. La puissance de calcul aujourd'hui disponible permet le recours à méthodes de résolution d'ordre élevé sur des maillages raffinés. De nombreuses études numériques montrent qu'il est possible de simuler fidèlement le bruit rayonné par une cavité, en retrouvant une partie de la physique de l'écoulement.



## Chapitre 2

# Mesures cinématiques et acoustiques sur des cavités cylindriques

---

Dans le cadre du projet AEROCAV, soutenu par le Fondation de Recherche Aéronautique et Espace (FRAE), plusieurs campagnes expérimentales ont été effectuées au Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon, sur des cavités cylindriques de rapport d'aspect  $D/H$  variant de 0.67 à 2, et pour des écoulements subsoniques compris entre 50 et 110  $m/s$ . L'objectif de ces campagnes est de constituer une base de données complète, pour un large éventail de jeux de paramètres, en vue d'apporter des éléments de compréhension sur l'origine du rayonnement acoustique des cavités cylindriques. Des mesures acoustiques, cinématiques et de pression pariétale ont été réalisées par Emmanuel Jondeau & Pascal Souchotte. On présente ici une analyse de cette base de données expérimentales.

## 2.1 Conditions expérimentales

### 2.1.1 Installation et banc d'essais

Les essais ont été réalisés dans la soufflerie anéchoïque du Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Le principe de fonctionnement de la soufflerie est détaillé dans [84]. Celle-ci permet de disposer d'un jet pariétal subsonique. La buse de ce jet est une veine de section rectangulaire de 0.5  $m$  de largeur et de 0.25  $m$  de hauteur. Le jet se développe ensuite sur une plaque plane de 0.8  $m$  de longueur et de 0.6  $m$  de largeur, biseautée en aval en vue de réduire le décollement de l'écoulement et le rayonnement acoustique parasite qui en résulte. On s'assure du développement complet de la couche limite turbulente en plaçant une bande de toile émeri en amont du convergent amenant l'écoulement à la cavité. La figure 2.1 permet de voir schématiquement le banc d'essais considéré.

### 2.1.2 Maquettes des cavités cylindriques

Quatre maquettes, toutes de diamètre  $D = 10$   $cm$ , ont été réalisées pour ces campagnes expérimentales. La première maquette, non instrumentée, est destinée à l'étude du rayonnement acoustique (figure 2.2(a)). Elle dispose d'un piston en fond de cavité qui permet de faire varier la profondeur. La seconde maquette, de 10  $cm$  de profondeur, sert aux mesures de la pression pariétale, et est instrumentée en conséquence (figure 2.2(b)). Une troisième maquette de 10  $cm$  de profondeur également, et construite en plexiglas, permet d'envisager des mesures

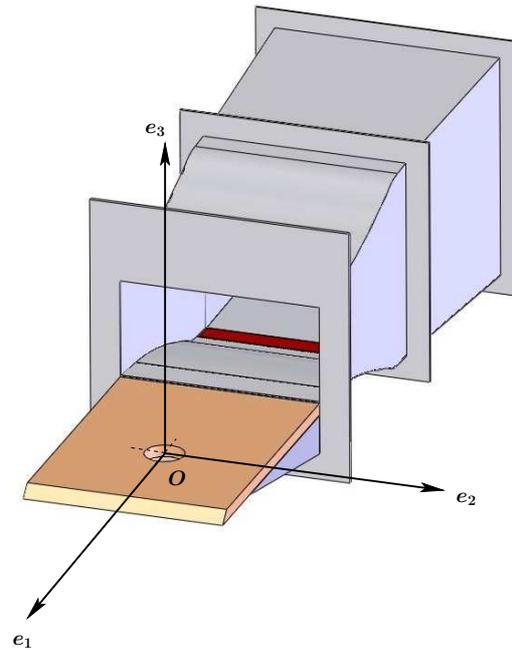


Fig. 2.1: Schéma du banc d'essais, et repère de référence. La bande de toile émeri est représentée en bordeaux.

cinématiques dans la cavité par Vélocimétrie Laser Doppler (LDA) (figure 2.2(c)). Une quatrième maquette est constituée d'une plaque rigide qui permet de mesurer le bruit de fond de l'installation (figure 2.2(d)).

## 2.1.3 Instrumentation

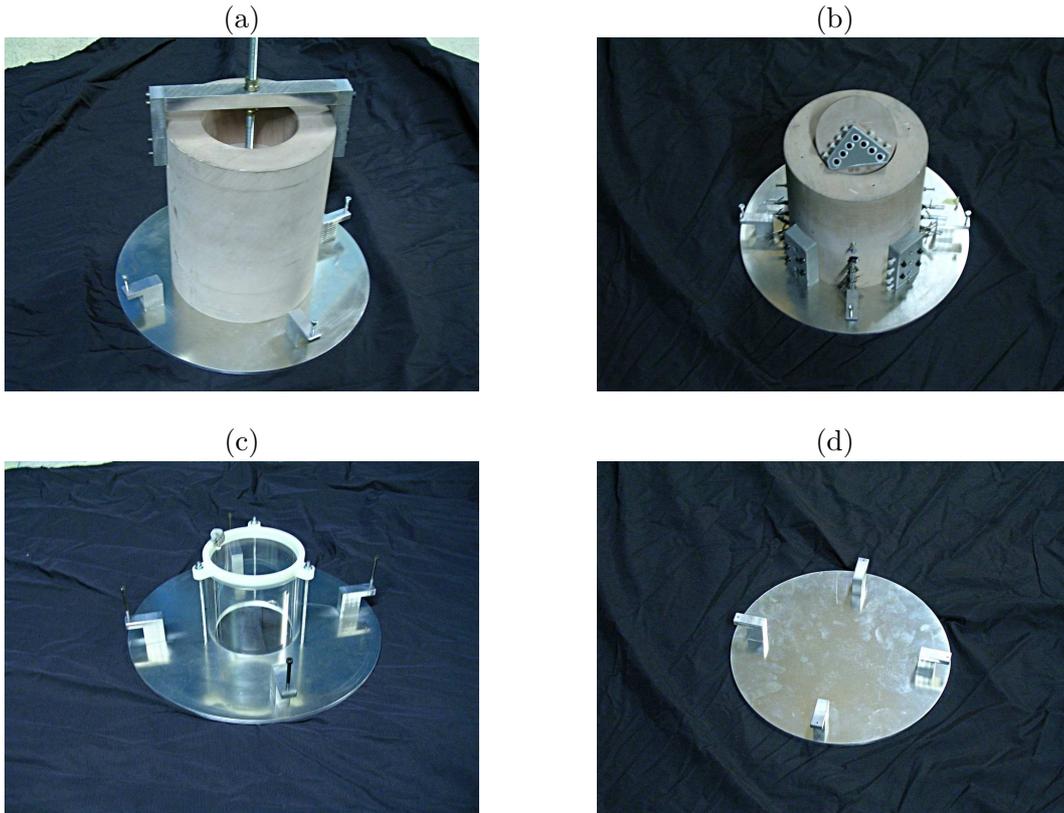
### 2.1.3.1 Mesures cinématiques au fil chaud

Les profils de vitesse incidente  $u_1$  sont mesurés à l'aide d'une sonde à fil chaud simple. Elle délivre des signaux temporels, qui sont échantillonnés à la fréquence de  $10\text{ kHz}$  sur une durée d'enregistrement de  $10\text{ s}$  à l'aide d'un analyseur PXI National Instruments piloté par LABVIEW. Un tube de Pitot est placé à coté de la sonde à fil chaud en vue d'avoir une seconde estimation de la vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$ . Le fonctionnement de la sonde à fil chaud repose sur le principe suivant : l'écoulement refroidit un fil en platine très fin chauffé par effet Joule par un courant électrique. Comme la résistance électrique augmente avec la température, il suffit de mesurer la diminution de cette résistance électrique provoquée par le refroidissement de la sonde pour obtenir la vitesse de l'écoulement perpendiculaire à l'axe du fil métallique. Bailly & Comte-Bellot détaillent dans [6] comment retrouver la vitesse à partir de la résistance électrique.

Les mesures sont menées à  $225\text{ mm}$  à l'amont du centre  $O$  de la cavité. Une trentaine de points de mesure est effectuée dans la direction verticale à la plaque  $\mathbf{e}_3$ , assurant une résolution spatiale acceptable. Un raffinement est réalisé près de la paroi. L'erreur de positionnement vertical du fil chaud est estimée à  $0.5\text{ mm}$ . En chacun des points de mesure, l'évolution temporelle de la vitesse est enregistrée afin d'estimer la valeur moyenne du champ de vitesse  $\bar{u}_1$  et le champ fluctuant  $u'_1$ . La figure 2.5(a) montre l'instrumentation mise en œuvre pour la mesure de la couche limite amont par fil chaud.

### 2.1.3.2 Mesures cinématiques par LDA

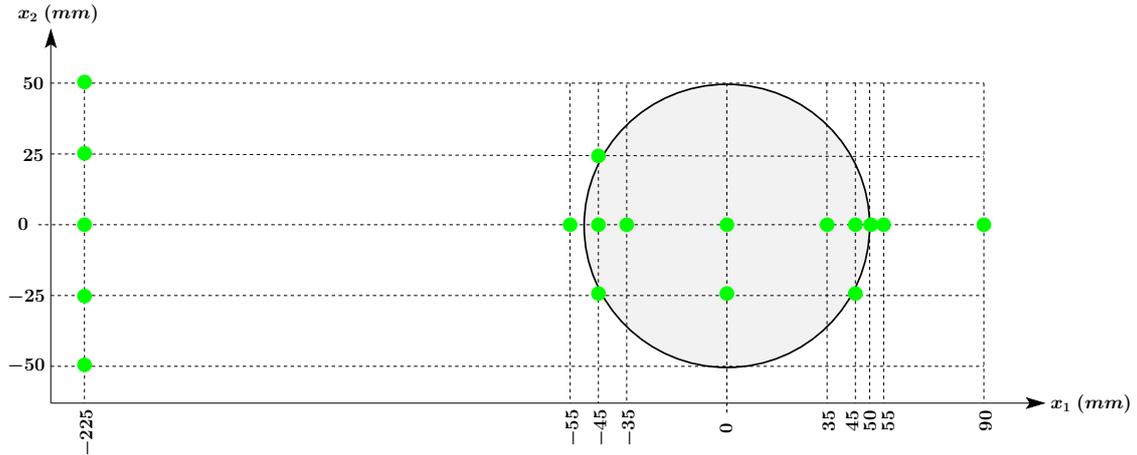
La Vélocimétrie Laser Doppler (*Laser Doppler Anemometry* – LDA) est une technique de mesure optique qui permet d'effectuer des mesures cinématiques dans la cavité de manière non-intrusive. Seule la configuration  $D/H = 1$  est explorée avec cette méthode. L'écoulement est



**Fig. 2.2:** Vue des quatre maquettes avant leur implantation sur le banc d'essais. (a) Cavité à profondeur réglable. (b) Cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$  instrumentée en vue de mesurer la pression pariétale. (c) Cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$  en plexiglas pour les mesures LDA. (d) Plaque rigide permettant de mesurer le bruit de fond.

ensemencé en continu à l'aide d'un générateur de fumée. Le fonctionnement de base de la LDA implique l'intersection de deux rayons laser monochromatiques, cohérents, et focalisés. Cette intersection est caractérisée par un réseau de franges d'interférence, constituant le volume de mesure. Lorsqu'une particule de fumée traverse ce réseau de franges, elle diffuse un signal lumineux vers un photomultiplicateur avec une modulation en fréquence (décalage Doppler). La fréquence  $f_s$  du signal lumineux reçu par le photomultiplicateur dépend linéairement de la vitesse  $u$  normale aux franges d'interférence, par la relation  $f_s = u/i$ , où  $i$  est l'interfrange du réseau d'interférences, qui vaut :  $i = \lambda/(2 \tan(\theta/2))$ .  $\theta$  est l'angle entre les deux faisceaux. Il est considéré comme petit, si bien que l'interfrange peut être approximée par  $i = \lambda/\theta$ .  $\lambda$  représente la longueur d'onde du laser source. On obtient avec cette méthode l'intensité de la vitesse, mais pas son sens. Cette indétermination est levée à l'aide d'une cellule de Bragg placée sur l'un des faisceaux. Une description détaillée de la LDA est disponible dans [6].

Une sonde à 2 paires de faisceaux laser de couleurs différentes, placées sur deux plans perpendiculaires, permet d'accéder directement à la mesure de deux composantes de vitesse (voir la figure 2.5(b)). La sonde que l'on utilise fournit deux couples de faisceaux laser de diamètre de  $2.2 \text{ mm}$ , distants de  $39 \text{ mm}$  et ayant une distance focale de  $250 \text{ mm}$ . Ces couples de faisceaux laser ont une longueur d'onde respective de  $\lambda = 514,4 \text{ nm}$  et  $\lambda = 488.0 \text{ nm}$ . L'angle formé par les faisceaux est de  $\theta = 8.94^\circ$  pour les deux couples. Le réseau d'intéférences est constitué de 22 franges. L'analyse des signaux est réalisée avec le processeur Dantec modèle BSA F80, piloté par le logiciel BSAFLOW. Chaque point de mesure est réalisé par moyennage sur plus de 200000 particules. La figure 2.3 montre les différentes positions  $(x_1, x_2)$  où les 2 composantes de vitesse  $(u_1, u_2)$  sont mesurées. Les profils verticaux de vitesse sont obtenus en effectuant en ces positions  $(x_1, x_2)$  une cinquantaine de mesures à différentes positions verticales.



**Fig. 2.3:** Coordonnées  $(x_1, x_2)$  des points de mesure par LDA des 2 composantes de vitesse  $(u_1, u_2)$ , représentés par un point  $\bullet$  (coordonnées en  $mm$ ).

### 2.1.3.3 Mesures cinématiques par PIV

La technique de Vélocimétrie par Imagerie de Particules (*Particle Image Velocimetry* – PIV) est utilisée dans ce travail pour mesurer de manière non-intrusive le champ de vitesse instantané  $u_1$  et  $u_3$  dans le plan de l'écoulement au niveau de l'ouverture, pour la configuration  $D/H = 1$ . Son principe de fonctionnement est le suivant. Le fluide est d'abordensemencé en continu à l'amont avec de la fumée. L'écoulement est illuminé par un flash laser dans une fenêtre d'acquisition. Une caméra haute résolution réalise des captures d'image de la lumière diffusée par les particules. Le laps de temps entre les deux clichés est très court, si bien que le champ de vitesse peut être obtenu en effectuant une corrélation croisée entre deux images successives. Avec l'acquisition d'un nombre élevé d'images, on peut estimer des quantités statistiques de la vitesse.

La caméra PIV est inclinée d'un angle de  $7^\circ$  par rapport au plan normal à la plaque plane, afin de visualiser complètement la couche de cisaillement au-dessus et à l'intérieur de la cavité. Pour obtenir une fenêtre de travail dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , une correction est à apporter aux images en raison de la distorsion optique engendrée par l'inclinaison. On utilise l'algorithme décrit par Soloff *et al.* dans [218]. La fenêtre d'acquisition PIV est constituée de 160 pixels dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , et de 100 pixels dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . Les images sont enregistrées à la fréquence de 3  $kHz$ . 10 essais ont été réalisés, chacun étant composé de l'enregistrement de 2700 images PIV.

### 2.1.3.4 Mesures des pressions pariétales

Les mesures pariétales de pression statique et fluctuante sont effectuées sur la cavité instrumentée de 20 prises de pression insérées aux parois de la maquette. Elles sont positionnées sur un réseau en croix à 4 branches, aux profondeurs 10  $mm$ , 25  $mm$ , 50  $mm$  et 75  $mm$ . 4 capteurs sont placés sur la paroi de fond aux rayons 0  $mm$ , 12.5  $mm$ , 25  $mm$  et 37.5  $mm$ . L'ensemble peut pivoter par pas angulaire de  $10^\circ$ , ce qui permet d'effectuer 144 points de mesure à la paroi de la cavité, et 72 pour le fond. Ces prises de pression sont reliés au système PXI National Instruments, couplé au logiciel IDEAS TEST. L'enregistrement se fait sur une période de 64  $s$ , avec une fréquence d'échantillonnage de 12.8  $kHz$ . La figure 2.5(c) offre une vue d'ensemble de l'installation.

### 2.1.3.5 Mesures acoustiques par une antenne mobile

Les mesures acoustiques en champ lointain sont effectuées à l'aide de microphones disposés sur un arc de cercle de 1  $m$  de rayon, centré sur la cavité. Les signaux délivrés par les mi-

crophones sont échantillonnés à  $25\text{ kHz}$  par un analyseur PXI National Instrument piloté par LABVIEW, sur une durée d'acquisition variant de 40 à 100 s. Pour les mesures de directivité, la fréquence d'échantillonnage est abaissée à  $2.5\text{ kHz}$ . L'antenne mobile est constituée de 7 microphones placés à des angles de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $135^\circ$  et  $150^\circ$  par rapport au plan de la plaque. L'antenne mobile pivote autour de l'axe  $e_3$  sur le secteur angulaire  $[45^\circ, 130^\circ]$ . Ce secteur est limité en raison de la présence de la buse, qui fait obstruction à la rotation. La figure 2.4 schématise l'antenne mobile montée sur le banc d'essais et ses angles limites de rotation.

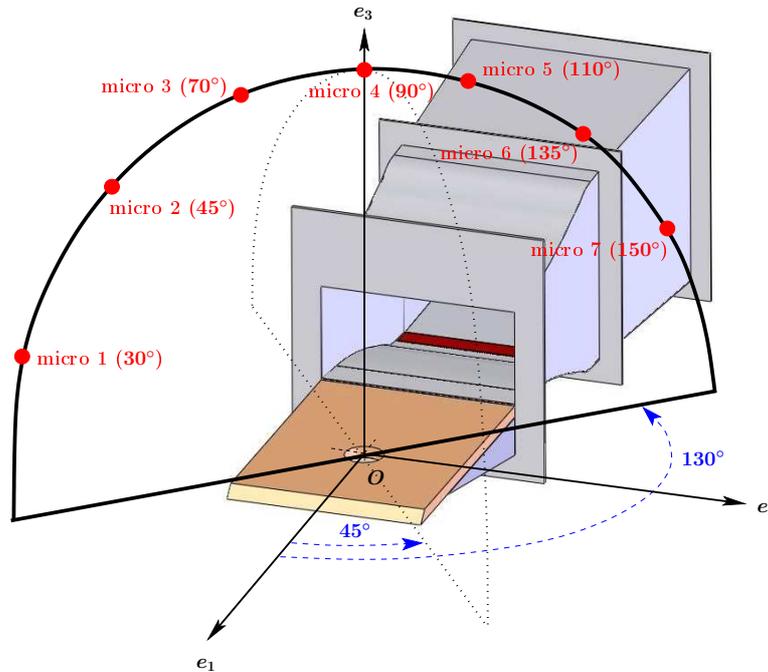


Fig. 2.4: Schéma de l'antenne acoustique mobile, installée sur le banc d'essais, et ses angles limites de rotation.

### 2.1.4 Configurations d'étude

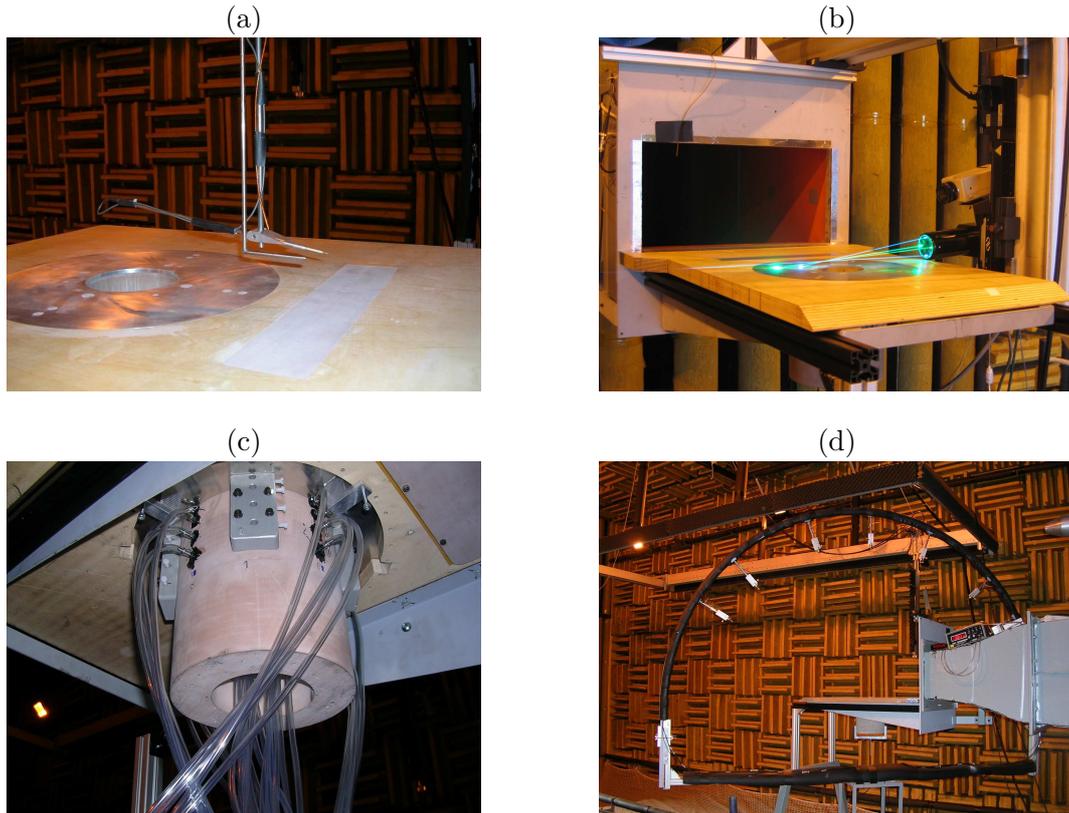
Dans toute la suite, la configuration de référence est la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$ , en présence d'un écoulement affleurant à  $u_\infty = 70\text{ m/s}$ . C'est le cas le mieux documenté dans la base de données expérimentales, où des mesures cinématiques LDA, des champs PIV, des mesures de pression pariétale et des données acoustiques sont disponibles.

L'influence de la profondeur de la cavité est étudiée à l'aide de la maquette à profondeur ajustable. Des mesures acoustiques sont effectuées pour les profondeurs  $H = 0\text{ mm}$  (mesure du bruit de fond),  $H = 50\text{ mm}$ ,  $H = 100\text{ mm}$ ,  $H = 125\text{ mm}$  et  $H = 150\text{ mm}$ . Ces quatre dernières profondeurs permettent donc d'étudier des cavités cylindriques de rapport d'aspect respectif  $D/H = 2$ ,  $D/H = 1$ ,  $D/H = 0.8$  et  $D/H = 0.67$ .

L'influence de la vitesse de l'écoulement est examinée sur la maquette à profondeur variable, grâce aux mesures effectuées pour des vitesses variant de  $50\text{ m/s}$  à  $110\text{ m/s}$ , par palier de  $5\text{ m/s}$ . Des mesures LDA ont été effectuées pour des écoulements de  $70\text{ m/s}$  et  $90\text{ m/s}$  sur la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$ . Des données PIV sont disponibles uniquement pour la configuration de référence.

## 2.2 Résultats dans la configuration de référence

On présente dans cette partie les résultats obtenus lors de l'étude du cas de référence correspondant à une cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$ , soumise à un écoulement affleurant



**Fig. 2.5:** Montages de mesure. (a) Mesures cinématiques à l'aide d'une sonde à fil chaud. (b) Mesures cinématiques par LDA à l'aide d'une sonde à 4 faisceaux laser (ici dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ ). (c) Mesures des pressions pariétales à l'aide d'un réseau de capteurs insérés à la paroi de la maquette. (d) Mesures acoustiques à l'aide d'une antenne mobile de 7 microphones.

de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

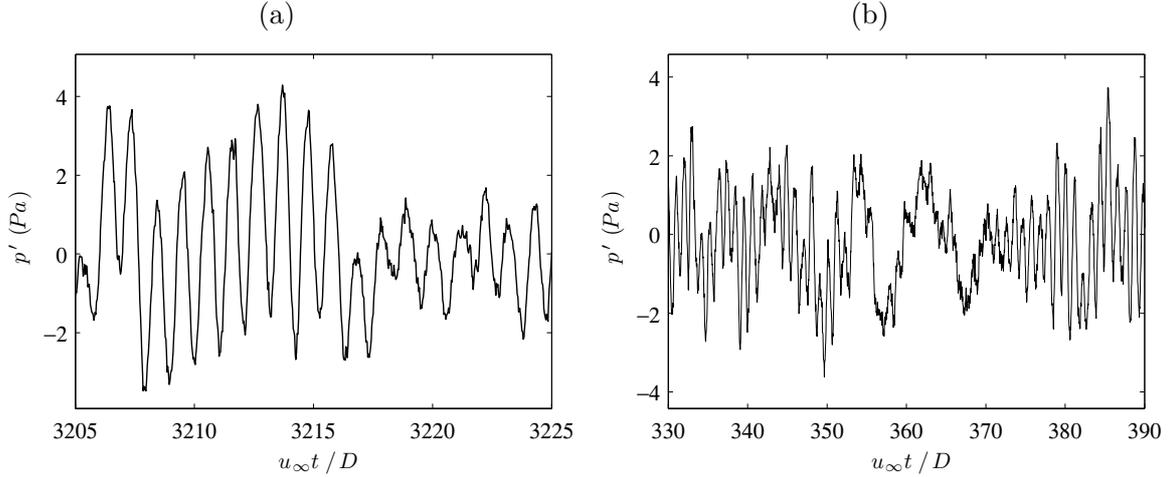
## 2.2.1 Description de l'acoustique rayonnée en champ lointain

### 2.2.1.1 Signal temporel de pression fluctuante

Une visualisation du signal de pression fluctuante enregistré par le micro situé sur l'antenne mobile à  $1 \text{ m}$  au-dessus de la cavité est proposée à la figure 2.6. La figure 2.6(a) montre des oscillations pseudo-périodiques fortement marquées à une fréquence  $f$ . Cependant, deux phénomènes sont mis en évidence. En effet, le niveau des fluctuations varie d'une part assez fortement localement, donnant l'impression d'un phénomène de battement. Le signal révèle une multitude de zones, comme l'intervalle  $u_\infty t/D \in [3218, 3225]$  représenté sur la figure 2.6(a), où l'amplitude des oscillations est divisée par 3 ou 4, par rapport aux zones dites de bouffées, correspondant aux régions où les fluctuations de pression présentent une grande amplitude. D'autre part, le second phénomène est illustré par la figure 2.6(b) : la fréquence porteuse des oscillations ne semble pas constante sur l'ensemble du signal. En effet, la figure révèle des zones où la fréquence porteuse peut varier fortement localement, comme l'intervalle  $u_\infty t/D \in [350, 370]$  sur la figure. Alors que la fréquence  $f$  domine largement les zones de bouffées, les zones de faibles amplitudes à la fréquence  $f$  peuvent être assez marquées par des fréquences plus basses sur des durées atteignant 20 temps de traversée convective de la cavité.

### 2.2.1.2 Spectre acoustique

L'obtention du spectre acoustique en champ lointain nécessite un traitement des mesures temporelles de pression  $p$  enregistrées par le micro placé à  $1 \text{ m}$  au-dessus de la cavité puis



**Fig. 2.6:** Signal temporel de pression fluctuante mesuré à 1 m au-dessus de la cavité, et représenté à différents intervalles de temps. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

échantillonnées à la fréquence  $f_e = 1/\Delta t$ , donnant le signal discret de longueur  $\mathcal{N}$  :  $p[n] = p(n\Delta t)$  ( $n \in \{0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ ), avec  $\Delta t$  le pas de discrétisation temporelle.

### Méthode de Welch

La densité spectrale de puissance (DSP) est estimée à l'aide de la méthode de Welch [245]. Cette méthode consiste dans un premier temps à pondérer le signal échantillonné  $p[n]$  par une fenêtre glissante de longueur  $N$ , construite à partir d'une fenêtre génératrice  $w(t)$ . On choisit dans ce travail une fenêtre génératrice de type Hanning de période  $T = N\Delta t$ . En pratique, la fréquence d'échantillonnage est relativement élevée, de l'ordre de 13 kHz, et on choisit  $N = 4096$ . La fenêtre génératrice est donnée par :

$$w(t) = \begin{cases} 0.5 \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \right) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fenêtre glissante discrète  $w_m[n]$  est donnée à la position  $m$  par :

$$w_m[n] = w((n - mD_w)\Delta t)$$

où  $D_w$  est le décalage entre deux positions de la fenêtre. Il n'y a pas de chevauchement quand  $D_w = N$ . Il y a en revanche un recouvrement de 50% en choisissant  $D_w = N/2$ . En pratique, on choisit un taux de recouvrement de 25%, en prenant  $D_w = 3N/4$ . Pour chaque position de la fenêtre  $m$ , on calcule le périodogramme échantillonné  $P_m$  à partir du signal échantillonné et fenêtré  $w_m[n]p'[n] = w_m[n](p[n] - \bar{p})$  :

$$P_m(f) = \frac{|\widehat{w_m p'}(f)|^2}{N}$$

L'opérateur  $\widehat{\phantom{x}}$  représente la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné, évaluée à la fréquence discrète  $f_k = k f_e/N$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  par :

$$\widehat{w_m p'}(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} w_m[n + mD_w] p'[n + mD_w] \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N}\right)$$

On effectue enfin la moyenne de tous les périodogrammes, ce qui donne un périodogramme lissé  $P_W$  :

$$P_W(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_m(f)$$

avec  $M = E(N/D_w)$  le nombre de positions de la fenêtre. La densité spectrale de puissance est enfin exprimée en  $dB/Hz$  par :

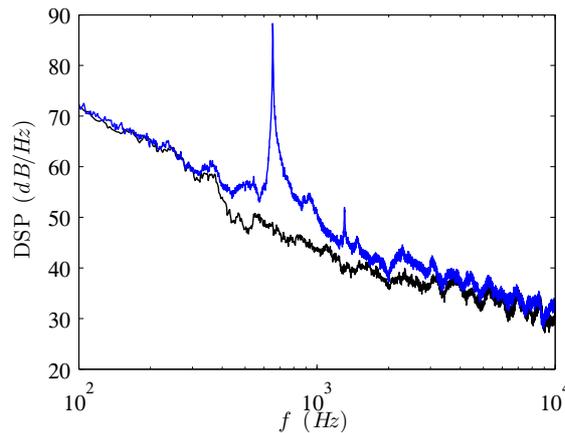
$$\text{DSP}(f) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_W(f)}{P_{\text{ref}}} \right)$$

La quantité  $P_{\text{ref}}$  est le carré de la pression acoustique de référence, que l'on prend classiquement à  $P_{\text{ref}} = 4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^2$ .

L'avantage de cette méthode est que l'estimateur ainsi construit est sans biais et présente une faible variance, ce qui n'est pas le cas de l'estimation par périodogramme simple calculé sur l'ensemble du signal échantillonné. Le fait d'avoir recours à un recouvrement entre deux positions successives de la fenêtre de pondération permet d'améliorer la résolution, et de réduire la variance de l'estimateur par rapport à d'autres méthodes, comme la méthode de Bartlett.

## Résultats

La figure 2.7 présente la densité spectrale de puissance obtenue avec la méthode de Welch en champ lointain à 1 m au-dessus de la cavité (micro 4), avec et sans cavité, à une résolution fréquentielle de  $\Delta f = 1.5 \text{ Hz}$ . Le cas sans cavité permet d'avoir une estimation du bruit de fond de l'installation. Ce bruit est large bande et provient notamment de la turbulence générée par l'écoulement du jet incident sur la plaque plane. Cette mesure permet ainsi de mettre en évidence l'influence de la présence de la cavité sur le rayonnement acoustique. Celle-ci est surtout perceptible sur le domaine fréquentiel [300, 3000] Hz. À l'instar de ce que l'on observe

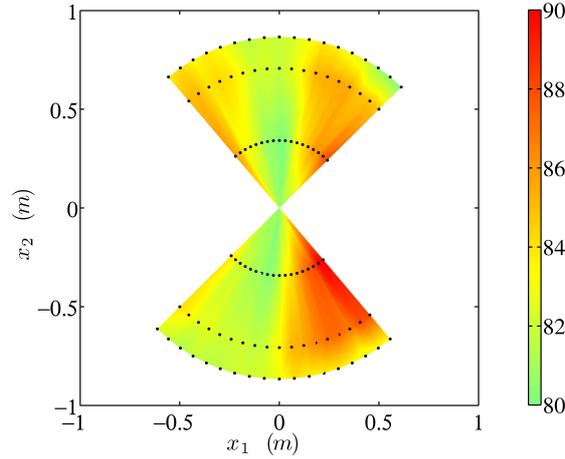


**Fig. 2.7:** Densité spectrale de puissance du rayonnement acoustique de la cavité mesurée à 1 m au-dessus de son centre. — :  $H = 0 \text{ mm}$ , — :  $H = 100 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

sur des cavités rectangulaires, on remarque l'émergence d'un certain nombre de pics dans le contenu fréquentiel du rayonnement acoustique de la cavité ronde de référence. Un pic très intense de 89.3 dB à  $f = 656 \text{ Hz}$ , dépasse de plus de 30 dB le niveau sonore ambiant. Sa prédominance rend donc le rayonnement acoustique de la cavité fortement tonal. La première harmonique de ce pic émerge également à  $f = 1310 \text{ Hz}$ , dépassant de 7 dB le niveau ambiant.

### 2.2.1.3 Directivité

La directivité du rayonnement acoustique en champ lointain au-dessus de la cavité est disponible à partir du traitement des signaux temporels de pression enregistrés par les microphones placés sur l'antenne mobile. Pour chaque position de l'antenne et pour chaque microphone, la densité spectrale de puissance est estimée à l'aide de la méthode de Welch, en ne conservant dans la suite que la valeur obtenue à la fréquence  $f = 656 \text{ Hz}$ , étant donné la nature tonale du rayonnement acoustique. La figure 2.8 synthétise les résultats obtenus pour l'ensemble des positions de mesure. La cartographie suggère un rayonnement presque



**Fig. 2.8:** Densité spectrale de puissance (en  $\text{dB/Hz}$ ) à la fréquence  $f = 656 \text{ Hz}$ , selon la position de l'antenne mobile (vue de dessus). Les positions de mesure sont représentées par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

symétrique. Il est un peu plus marqué vers l'aval, avec des niveaux proches de  $90 \text{ dB}$ . Le rayonnement est également plus prononcé vers l'amont, dans le cône  $[110^\circ, 250^\circ]$ , avec des niveaux de l'ordre de  $85 \text{ dB}$ . C'est dans la direction perpendiculaire à l'écoulement que le rayonnement à la fréquence de  $656 \text{ Hz}$  semble le moins marqué, où le niveau atteint est estimé à  $80 \text{ dB}$ .

## 2.2.2 Description de l'écoulement

### 2.2.2.1 Couche limite incidente

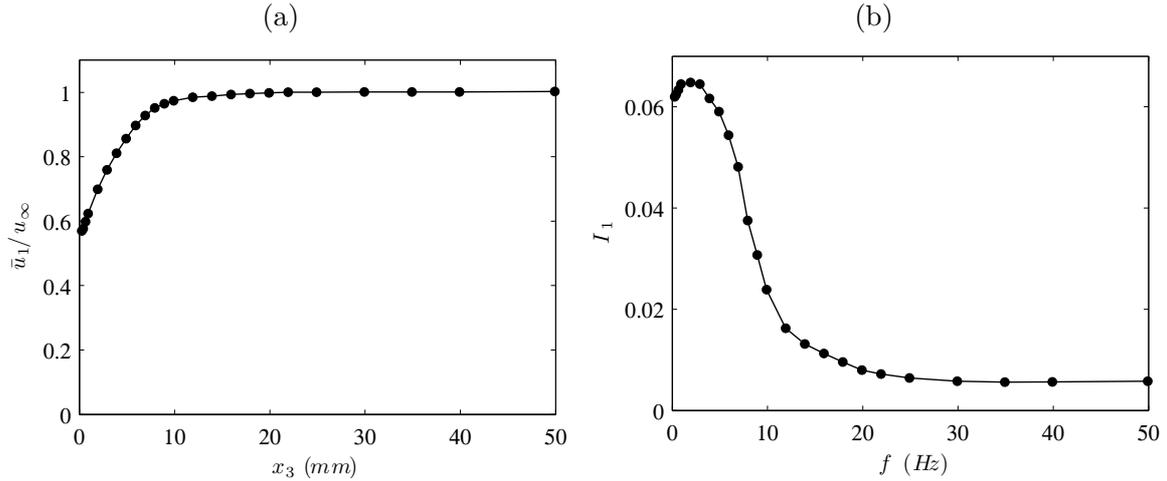
La couche limite incidente est mesurée au fil chaud à  $225 \text{ mm}$  en amont du centre de la cavité, dans le plan de l'écoulement. Elle est turbulente et pleinement développée, en raison de la bande de toile émeri placée à l'amont pour forcer la transition vers le régime turbulent. Les figures 2.9(a) et (b) montrent respectivement les profils de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  et la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse longitudinale  $u'_1$  en fonction de l'altitude  $x_3$ , normalisée par la vitesse  $u_\infty$ . Cette moyenne quadratique, que l'on note  $u'_{n,\text{rms}}$  pour les fluctuations de vitesse dans la direction  $\mathbf{e}_n$ , est calculée par la relation :

$$u'_{n,\text{rms}} = \sqrt{u_n'^2} = \sqrt{(u_n - \bar{u}_n)^2}$$

Le taux de fluctuations présenté à la figure 2.9(b) est donc estimé par :

$$I_n = \frac{u'_{n,\text{rms}}}{u_\infty}$$

Le profil de vitesse moyenne permet de mesurer l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ , définie comme l'altitude minimale à partir de laquelle  $\bar{u}_1 \geq 99\% u_\infty$ . On trouve expérimentalement



**Fig. 2.9:** (a) Profil de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  en fonction de l'altitude  $x_3$  à l'amont de la cavité. (b) Taux de fluctuations  $I_1$  en fonction de l'altitude  $x_3$  à l'amont de la cavité. Les points de mesure sont représentés par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

$\delta \simeq 15$  mm. L'intégration de ce profil permet également d'estimer l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_\theta$ , qui vaut 1.8 mm. La configuration de référence correspond donc aux rapports  $D/\delta = 6.7$  et  $D/\delta_\theta = 55$ . Le maximum du taux de fluctuations longitudinales  $I_1^M$ , mesuré à 6.5%, est observé à la position  $x_3 \simeq 3$  mm de la paroi. Le niveau non-nul du taux de fluctuations au-delà de la couche limite est probablement d'origine acoustique : il semble être engendré par les fortes ondes acoustiques rayonné par la cavité vers l'amont.

### Estimation de la vitesse de frottement

Une variable essentielle de la turbulence pariétale est la vitesse de frottement  $u_\tau$  à la paroi, qui sert généralement d'échelle de vitesse dans les descriptions de profils. Elle est définie par :

$$u_\tau = \sqrt{\nu_\infty \left. \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}}$$

où  $\nu_\infty$  est la viscosité cinématique de l'air, que l'on fixe à  $\nu_\infty = 1.5 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s.

L'étude qui suit développe la possibilité d'estimer cette variable directement à partir des mesures du profil de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$ . L'évaluation de la vitesse de frottement demande *a priori* une estimation à la paroi du gradient vertical de vitesse moyenne longitudinale. Une approximation à l'ordre 1 de ce gradient, à l'aide de la relation  $\bar{u}_1(x_3(1))/x_3(1)$ , où  $x_3(1)$  est l'altitude du point de mesure le plus proche de la paroi, n'est pas envisageable en pratique pour calculer la vitesse de frottement. En effet, le premier point de paroi  $x_3(1)$  est généralement hors de la sous-couche visqueuse, et donc bien trop loin de la paroi pour que l'approximation à l'ordre 1 soit satisfaisante. C'est le cas dans l'étude expérimentale présentée ici, où le premier point de paroi est placé à  $x_3(1) = 0.25$  mm pour les mesures au fil chaud, alors que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse est estimée à 0.005 mm.

Clauser propose dans [47] une méthode pour estimer la vitesse de frottement, par extrapolation des mesures directes du profil de vitesse moyenne  $\bar{u}_1$ . La méthode présuppose que les points de mesure suivent la loi logarithmique "universelle", définie par [6] :

$$\frac{\bar{u}_1^{\text{th}}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_3 u_\tau}{\nu_\infty} + C$$

où  $\kappa = 0.41$  est la constante de von Kármán, et  $C = 5.1$ . On obtient une famille de profils théoriques, en fonction de choix de  $u_\tau$ . On retient le profil qui s'ajuste au mieux aux mesures

expérimentales, c'est à dire celui qui minimise le résidu  $\Phi$ , défini par :

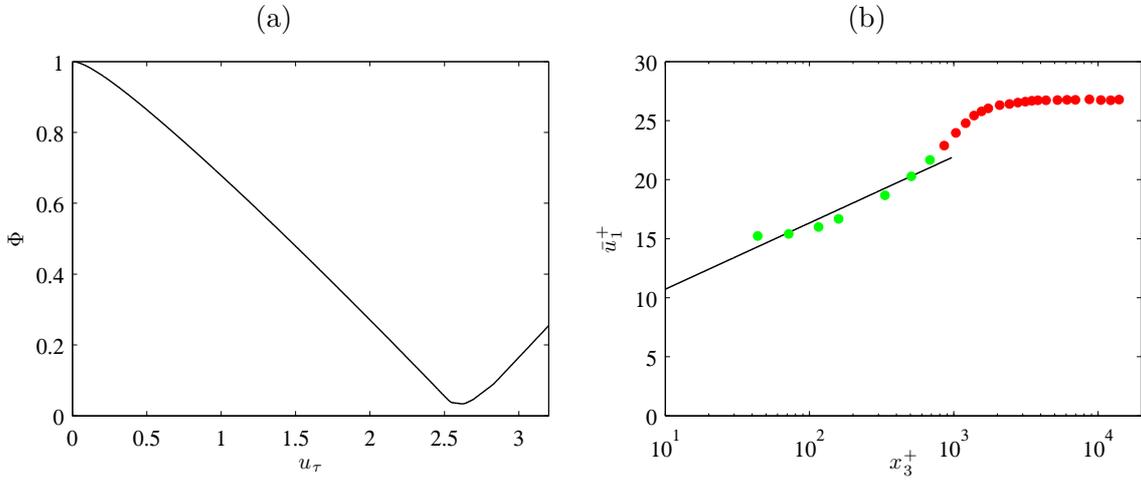
$$\Phi(u_\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|\bar{u}_1(x_3(k)) - \bar{u}_1^{\text{th}}(x_3(k))|}{\bar{u}_1^{\text{th}}(x_3(k))}$$

avec  $N$  le nombre de points de mesure,  $\bar{u}_1$  le profil de vitesse longitudinale mesuré,  $\bar{u}_1^{\text{th}}$  le profil théorique obtenu par la loi logarithmique universelle, et  $x_3(k)$  l'altitude du  $k^{\text{ème}}$  point de mesure pour les données expérimentales.

La figure 2.10(a) montre l'évolution du résidu  $\Phi$  en fonction de la vitesse de frottement  $u_\tau$ . On y observe la présence d'un minimum, localisé en  $u_\tau \simeq 2.62 \text{ m/s}$ . La figure 2.10(b) présente le profil universel correspondant en échelles de paroi, superposé aux points de mesure. Les variables de paroi sont définies par :

$$x_3^+ = \frac{x_3 u_\tau}{\nu_\infty} \quad \text{et} \quad \bar{u}_1^+ = \frac{\bar{u}_1}{u_\tau}$$

Les points de mesure représentés par des points rouges n'ont pas été retenus dans la méthode



**Fig. 2.10:** (a) Courbe représentative du résidu  $\Phi$  en fonction de la vitesse de frottement  $u_\tau$ . (b) Profil de vitesse moyenne longitudinale universel et profil mesuré représenté en échelles de paroi, pour une vitesse de frottement assurant le minimum du résidu  $\Phi$ . Les points de mesure utiles à la méthode de Clauser sont représentés par le symbole  $\bullet$ , les points de mesure non-conservés par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

de Clauser, car on a estimé qu'ils n'étaient pas situés dans la zone logarithmique, mais plutôt dans la loi de sillage, en zone externe de la couche limite. Seuls les points de mesure représentés par des points verts ont donc été utiles à l'estimation de  $u_\tau$ .

Kendall & Koochesfahani proposent dans [120] une solution analogue, lorsque l'on dispose de points de mesure dans la zone de transition entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique de l'écoulement. Les auteurs proposent de remplacer la loi logarithmique dans la méthode de Clauser, par un profil de Spalding, qui offre, en une seule équation, une description fidèle de la loi de sous-couche linéaire et de la loi logarithmique. Le profil est formulé de manière implicite par [222] :

$$x_3^+ = \bar{u}_1^{\text{th}+} + \exp(-\kappa C) \left( \exp(\kappa \bar{u}_1^{\text{th}+}) - 1 - \kappa \bar{u}_1^{\text{th}+} - \frac{(\kappa \bar{u}_1^{\text{th}+})^2}{2} - \frac{(\kappa \bar{u}_1^{\text{th}+})^3}{6} \right)$$

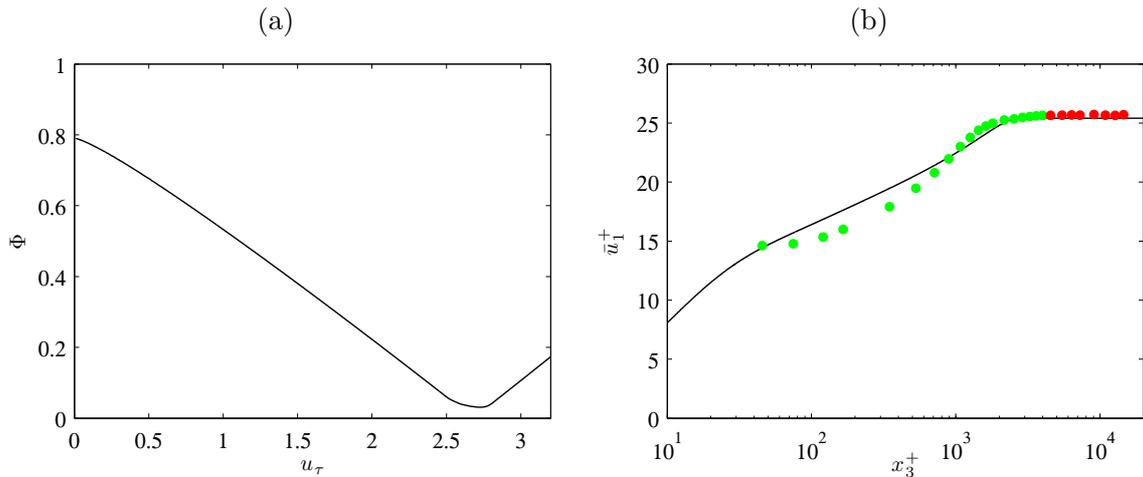
Dans ce travail, cette méthode ne peut améliorer l'estimation précédente de la vitesse de frottement, car aucun point de mesure n'est disponible dans la zone de transition entre la sous-couche linéaire et la zone logarithmique.

On propose de profiter de l'information apportée par les points de mesure présents dans la loi de sillage pour tenter d'améliorer l'estimation de la vitesse de frottement. Pour cela, on remplace la loi logarithmique dans la méthode de Clauser par un profil à une équation développé par Guarini *et al.* dans [104]. Ce profil décrit les lois linéaire et logarithmique de paroi, auxquelles est ajouté un terme de sillage pour raccorder la zone logarithmique à la zone d'écoulement libre, où  $\bar{u}_1 = u_\infty$ . Ce terme de sillage est de la forme  $\Pi_w/\kappa \mathcal{W}(x_3/\delta)$ , avec  $\Pi_w$  le coefficient de sillage, et  $\mathcal{W}$  la fonction de sillage. Il résulte de l'étude exhaustive de profils expérimentaux réalisée par Coles dans [48]. Une formulation explicite donne, pour  $x_3 \leq \delta$  :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{\text{th}+} &= \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa x_3^+) + C_g \left( 1 - \exp\left(-\frac{x_3^+}{\eta_g}\right) - \frac{x_3^+}{\eta_g} \exp(-b_g x_3^+) \right) \\ &+ \frac{1}{\kappa} \left( (1 + 6\Pi_w) \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^2 - (1 + 4\Pi_w) \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^3 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les constantes du modèle sont fournies dans [181], et valent :  $C_g = C - \ln \kappa/\kappa$ ,  $\Pi_w = 0.20$ ,  $\eta_g = 11$  et  $b_g = 0.33$ .

La figure 2.11(a) montre l'évolution du résidu  $\Phi$  en fonction de  $u_\tau$ . Le minimum de résidu a été déplacé : il est maintenant localisé en  $u_\tau \simeq 2.73$  m/s. La figure 2.11(b) montre le profil de Guarini *et al.* correspondant, et superposé aux points de mesure, en échelles de paroi. Pour réaliser cette étude, on a conservé tous les points présents dans le sillage, et quelques points au-delà de l'épaisseur de couche limite, comme le montre la figure 2.11(b). L'estimation trouvée est assez sensible à l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  mesurée.



**Fig. 2.11:** (a) Courbe représentative du résidu  $\Phi$  en fonction de la vitesse de frottement  $u_\tau$ . (b) Profil de vitesse moyenne longitudinale de Guarini *et al.* et profil mesuré représenté en échelles de paroi, pour une vitesse de frottement assurant le minimum du résidu  $\Phi$ . Les points de mesure utiles à la méthode sont représentés par le symbole  $\bullet$ , les points de mesure non-conservés par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

Une valeur de comparaison peut enfin être obtenue analytiquement à partir du profil de Guarini *et al.* et de la connaissance de la vitesse de l'écoulement et de l'épaisseur de couche limite. Pour cela, il suffit de réécrire la relation (2.1) à la position  $\delta$ . En remarquant que les termes  $\exp(-\delta^+/\eta_g)$  et  $\delta^+/\eta_g \exp(-b_g \delta^+)$  peuvent être négligés, puisque  $\delta^+/\eta_g \gg 1$  et  $b_g \delta^+ \gg 1$ , on obtient une expression implicite de  $u_\tau$  :

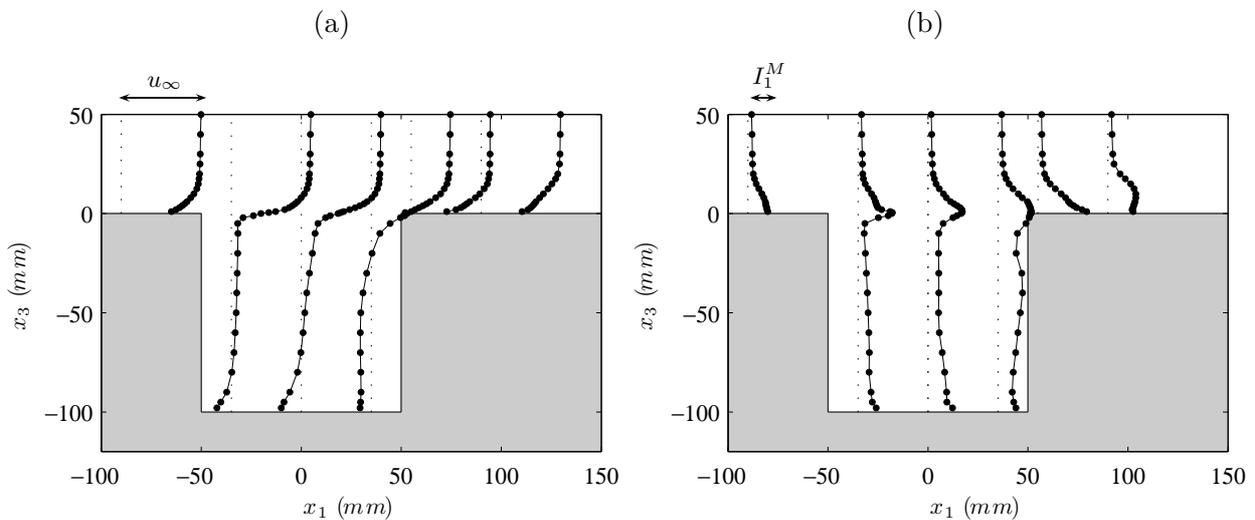
$$\delta = \frac{u_\infty}{\kappa u_\tau} \left( \exp\left(\frac{\kappa u_\infty}{u_\tau} - \kappa C_g - 2\Pi_w\right) - 1 \right)$$

Les quantités  $\delta$  et  $u_\infty$  étant connues, la vitesse de frottement peut être estimée par dichotomie à l'aide de la relation précédente. On trouve pour le cas étudié  $u_\tau \simeq 2.75$  m/s. On retiendra

cette valeur dans toute la suite.

### 2.2.2.2 Champs de vitesse

Des profils de vitesse moyenne longitudinale mesurés par LDA dans le plan  $x_2 = 0$  sont représentés à la figure 2.12(a), aux positions  $x_1 = -35, 0, 35, 55$  et  $90$  mm. Ces profils montrent une recirculation de l'ordre de  $20$  m/s, localisée proche de la paroi de fond de la cavité. Les vitesses longitudinales sont faibles au milieu de la cavité, de l'ordre de 15% de la vitesse de l'écoulement libre. Le profil en  $x_1 = -35$  mm est inflexionnel, proche d'un profil de couche de mélange libre pouvant être approximé par un profil en tangente hyperbolique. Il montre que la transition de la couche limite turbulente incidente vers une couche de cisaillement nécessite une distance relativement courte, inférieure à  $\delta$ . Enfin le point d'inversion, correspondant à une vitesse moyenne nulle, se trouve de plus en plus près de l'ouverture de la cavité, au fur et à mesure que l'écoulement se développe dans la cavité. La figure 2.12(b) montre des profils de

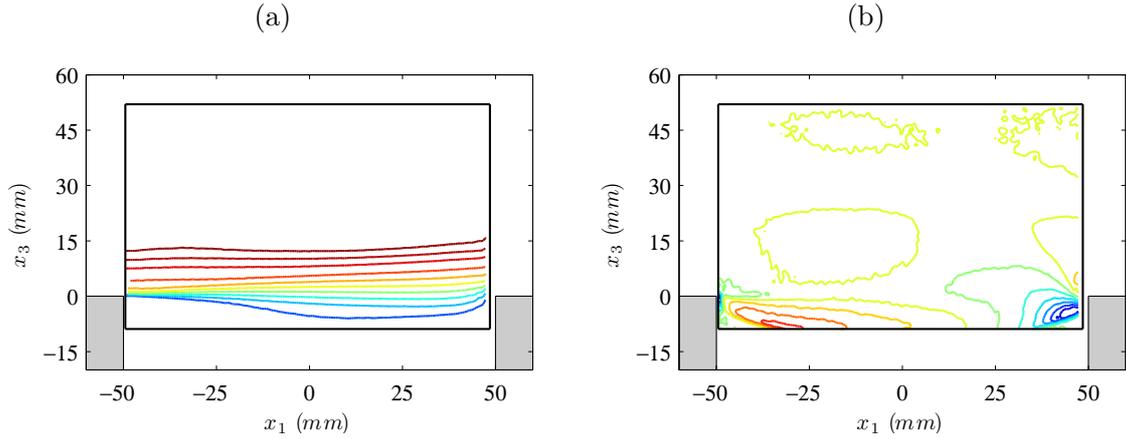


**Fig. 2.12:** Profils mesurés par LDA dans le plan  $x_2 = 0$  aux positions  $x_1 = -35, 0, 35, 55$  et  $90$  mm, avec un rappel du profil incident en  $x_1 = -90$  mm. (a) Vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$ . (b) Taux de fluctuations longitudinales  $I_1$ . Les points de mesure sont représentés par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

taux du turbulence longitudinale estimés à partir d'enregistrements en temps des fluctuations de vitesse longitudinale. Ces profils révèlent la présence d'un pic de turbulence proche de  $x_3 = 0$  dans la couche cisailée. Le niveau de turbulence est aussi relativement élevé près du bord aval, comme le révèle le profil en  $x_1 = 35$  mm, et près de la paroi de fond de la cavité. Ceci montre donc la présence de structures tourbillonnaires intenses dans la recirculation, provenant vraisemblablement de l'impact de la couche de cisaillement au niveau du coin aval.

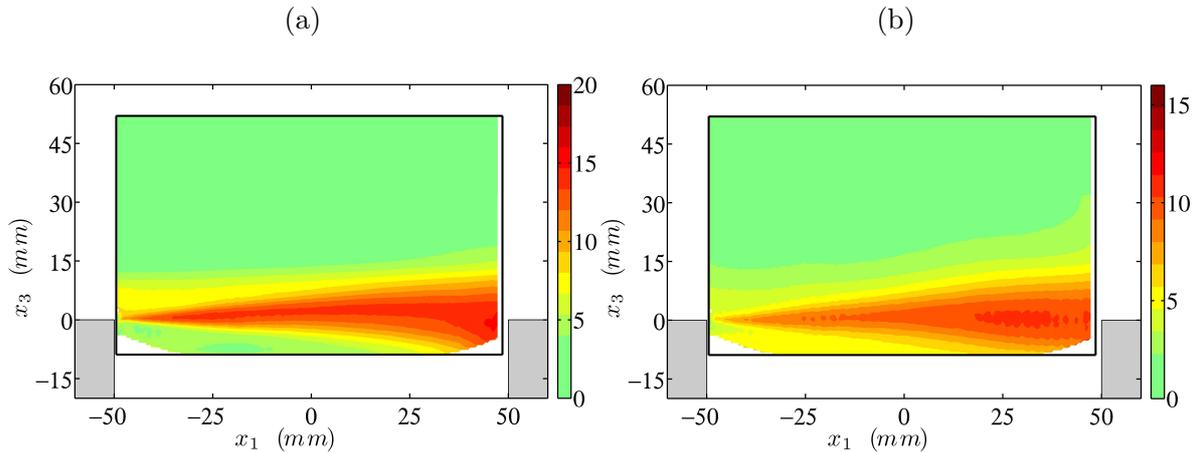
La PIV permet d'apporter une visualisation détaillée des champs de vitesse dans la couche de mélange. Les figures 2.13(a) et (b) présentent respectivement des isocontours des champs de vitesse moyenne longitudinale et verticale dans le plan  $x_2 = 0$ . La première figure confirme que la vitesse moyenne longitudinale est de l'ordre 15% de la vitesse de l'écoulement libre, sous la couche de cisaillement, mais varie sensiblement en fonction de la position  $x_1$ . La recirculation qui a lieu dans la cavité est particulièrement mise en évidence sur la seconde figure, où un flux sortant, avec une vitesse moyenne verticale de 2 à 5 m/s, est visible sur les 3 premiers quarts de la cavité, et un flux entrant à plus de 5 m/s proche du bord aval. L'écoulement recolle enfin au niveau du bord aval, comme le montre l'isocontour à 20% de la vitesse  $u_\infty$  sur la figure 2.13(a).

Les taux de fluctuations atteignent environ 13% pour les fluctuations longitudinales et



**Fig. 2.13:** Isocontours des champs mesurés par PIV dans le plan  $x_2 = 0$  à l'ouverture de la cavité. La fenêtre PIV est représentée par le rectangle noir. (a) Vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$ . Isocontours à 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95 et 98% de la vitesse  $u_\infty$ . (b) Vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$ . Isocontours de -5 à 5 m/s par pas de 1 m/s. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

10% pour les fluctuations verticales, comme le montrent les figures 2.14(a) et (b). Les profils



**Fig. 2.14:** Taux de fluctuations (en %) obtenu par PIV. (a) Turbulence longitudinale  $I_1$ . (b) Turbulence verticale  $I_3$ . La fenêtre PIV est représentée par le rectangle noir. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

du taux de fluctuations longitudinales basculent au coin amont d'un profil caractéristique de couche limite, avec un maximum très proche de la paroi (voir la figure 2.9(b)), en un profil de couche de mélange, avec des niveaux de turbulence comparables à ceux que mesurent Pereira & Sousa pour des géométries rectangulaires [179], qui sont de l'ordre de 15%.

### 2.2.2.3 Épaississement de la couche de cisaillement

On propose dans cette partie plusieurs critères pour quantifier l'épaississement de la couche de cisaillement. Un critère fréquemment utilisé pour les couches de cisaillement libres est d'évaluer l'évolution longitudinale de l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_\theta$ . Pour une couche de cisaillement libre correspondant à un écoulement cisailé de vitesse libre  $u_\infty$  dans la direction  $\mathbf{e}_1$  au-dessus de l'interface, et  $\bar{u}_-$  dans la direction  $-\mathbf{e}_1$  au-dessous de l'interface, on définit l'épaisseur de quantité de mouvement par la relation :

$$\delta_{\theta_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_-(x_1)}{u_\infty - \bar{u}_-(x_1)} \left( 1 - \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_-(x_1)}{u_\infty - \bar{u}_-(x_1)} \right) dx_3$$

L'inconvénient avec cette relation est qu'elle n'est pas directement applicable dans le cas de la cavité, en raison de la non-uniformité de l'écoulement sous l'ouverture de la cavité. Il se pose aussi un autre problème, lié à la fenêtre d'acquisition des mesures PIV, dont le bord inférieur est très proche du bord inférieur de la couche de cisaillement.

Un second critère est donc proposé. Ce critère consiste à approximer, au sens des moindres carrés, chaque profil de vitesse moyenne longitudinale mesuré à une position  $x_1$  par un profil de couche de mélange libre. Ceci permet de profiter de la bonne concordance avec ce type de profil de la partie supérieure des profils de vitesse mesurés, et d'estimer l'épaisseur de quantité de mouvement par extrapolation de la partie inférieure des profils mesurés sur un profil de couche de mélange libre. Cette démarche permet d'avoir une estimation assez cohérente avec la définition usuelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour des couches de mélange libres, tout en s'affranchissant du caractère non-uniforme de l'écoulement dans la cavité. Cependant, les profils PIV étant tronqués dans la partie inférieure de la cavité, en raison des dimensions de la fenêtre d'acquisition PIV, un biais peut être introduit par cet estimateur. Les profils de vitesse moyenne longitudinale sont approximatés par une tangente hyperbolique [160] :

$$\widetilde{u}_1(x_1, x_3) = a(x_1) \left( c(x) + \tanh \left( \frac{x_3 - b(x_1)}{2\delta_{\theta_2}(x_1)} \right) \right)$$

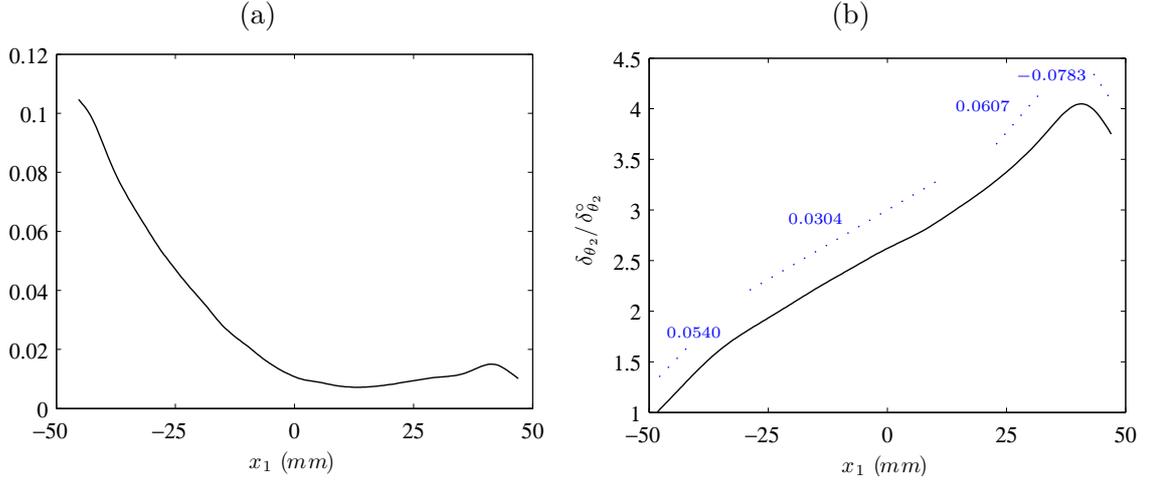
où  $\delta_{\theta_2}$  est l'épaisseur de quantité de mouvement à la position longitudinale  $x_1$ . Les quantités  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions de la position longitudinale, constituant des degrés de liberté pour approximer au mieux les profils de vitesse mesurés. Pour chacune des positions  $x_1$ , les quantités  $\delta_{\theta_2}$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont obtenues en minimisant l'erreur intégrale d'approximation  $\varepsilon_{\tanh}$  :

$$\varepsilon_{\tanh}(x_1) = \left( \frac{1}{h_{\text{PIV}}} \int_{x_3 \in \mathcal{H}_{\text{PIV}}} \left( \frac{\bar{u}_1(x_1, x_3) - \widetilde{u}_1(x_1, x_3)}{u_\infty} \right)^2 dx_3 \right)^{1/2}$$

avec  $\mathcal{H}_{\text{PIV}}$  l'intervalle d'acquisition de la fenêtre PIV dans le sens de la hauteur, et  $h_{\text{PIV}}$  sa longueur. La minimisation portant sur un nombre relativement restreint de paramètres, celle-ci peut être réalisée en explorant exhaustivement un pavé de  $\mathbb{R}^4$ . On note  $\delta_{\theta_2}^\circ$  la valeur de l'épaisseur de la quantité de mouvement au coin amont de la cavité.

La figure 2.15(a) montre l'erreur intégrale d'approximation  $\varepsilon_{\tanh}$  en fonction de la position longitudinale  $x_1$ . L'erreur décroît en fonction du développement de la couche de cisaillement sur les 3 premiers quarts de la distance de développement. Elle reste acceptable proche du point de séparation. L'erreur d'approximation croît enfin légèrement à l'approche du bord aval en raison du rattachement de la couche de cisaillement. La figure 2.15(b) présente la courbe représentative de l'épaisseur de quantité de mouvement en fonction de la position longitudinale, dans l'axe de l'écoulement. Elle révèle quatre zones distinctes. Une première zone, qui s'étend du bord amont jusqu'à environ  $x_1 = -35 \text{ mm}$ , est le lieu d'un épaissement rapide de la couche de cisaillement, avec un taux de croissance de  $d\delta_{\theta_2}/dx_1 = 0.0540$ . Une seconde portion, caractérisée par une croissance plus lente de  $d\delta_{\theta_2}/dx_1 = 0.0304$  et s'étendant jusqu'à environ  $20 \text{ mm}$  du coin aval, succède ensuite à cette première zone de forte croissance. Au niveau du coin aval, on observe une courte zone de croissance très prononcée, s'étendant jusqu'à moins de  $10 \text{ mm}$  du bord aval, suivie d'une portion de forte décroissance, provoquée par le recollement de l'écoulement sur la plaque. Ces valeurs peuvent être comparées à titre indicatif à des données expérimentales obtenues sur des cavités rectangulaires. Sarohia mesure un taux de croissance maximal de  $d\delta_\theta/dx_1 = 0.022$  sur des cavités rectangulaires à faibles nombres de Reynolds soumises à des écoulements laminaires [203]. Forestier *et al.* mesurent un taux de croissance de  $d\delta_\theta/dx_1 = 0.042$  pour des cavités rectangulaires soumises à un écoulement à Mach 0.8 [86].

Un dernier critère moins conventionnel peut être formulé directement à partir de la définition (1.1), en restreignant les bornes d'intégration aux altitudes où la vitesse moyenne longitudinale est comprise entre 20% et 100% de  $u_\infty$ , valeurs choisies arbitrairement pour



**Fig. 2.15:** (a) Courbe représentative de l'erreur intégrale d'approximation  $\varepsilon_{\tanh}$  en fonction de la position longitudinale  $x_1$ . (b) Courbe représentative de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_{\theta_2}$  en fonction de la position longitudinale  $x_1$ , dans le plan  $x_2 = 0$ . Le diamètre longitudinal de la cavité est scindé en 4 portions où les asymptotes linéaires sont représentées par les lignes en pointillés bleus. La valeur de la pente  $d\delta_{\theta_2}/dx_1$  est donnée pour chacune des portions. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

caractériser la couche de cisaillement :

$$\delta_{\theta_3}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{u}_1(x_1, x_3)}{u_\infty} \left( 1 - \frac{\bar{u}_1(x_1, x_3)}{u_\infty} \right) \mathbf{1}_{\{\bar{u}_1(x_1, x_3)/u_\infty \in [0.2, 1]\}} dx_3 \quad (2.2)$$

On note  $\delta_{\theta_3}^\circ$  la valeur de l'épaisseur de la quantité de mouvement définie par l'équation (2.2) au coin amont de la cavité  $x_1 = -0.05$  mm. Ce critère présente l'avantage de s'affranchir du biais possible du critère précédent. En effet, la fenêtre d'acquisition de la PIV considérée permet de capturer intégralement l'isocontour de vitesse moyenne longitudinale correspondant à 20% de la vitesse de l'écoulement (premier isocontour bleu sur la figure 2.12(a)). Il présente cependant l'inconvénient d'avoir une signification physique différente de l'épaisseur de quantité de mouvement, telle qu'on la définit pour des couches de mélange libres.

La figure 2.16 montre les variations longitudinales de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_{\theta_3}$ . On y observe 4 zones distinctes. Une première zone de croissance lente, qui s'étend du coin amont à  $x_1 = -20$  mm est suivie d'une zone à croissance rapide de  $d\delta_{\theta_3}/dx_1 = 0.0343$ , jusqu'à  $x_1 = 10$  mm. Une zone de croissance très lente est ensuite observée jusqu'à environ 15 mm du bord aval. S'en suit une décroissance assez forte, localisée proche du bord aval, engendrée par le recollement de l'écoulement au coin aval.

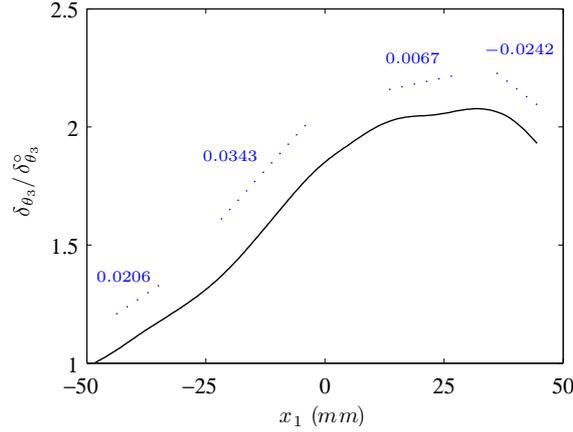
#### 2.2.2.4 Organisation de la couche de mélange

Une étude concernant la présence de larges structures dans la couche de cisaillement est réalisée en calculant les coefficients de corrélation spatiale des vitesses fluctuantes longitudinales et verticales, définis dans le plan  $x_2 = 0$  par :

$$\mathcal{R}_{u'_m, u'_n}(x_1, x_3) = \frac{\overline{u'_m(x_1^\circ, x_3^\circ) u'_n(x_1, x_3)}}{u'_{m, \text{rms}}(x_1^\circ, x_3^\circ) u'_{n, \text{rms}}(x_1^\circ, x_3^\circ)}$$

où  $(x_1^\circ, x_3^\circ)$  est le point de référence. Les moyennes temporelles sont effectuées par moyennage des 27000 images issues de la PIV.

Les figures 2.17 et 2.18 montrent respectivement les coefficients de corrélation longitudinaux  $\mathcal{R}_{u'_1, u'_1}$  et normaux  $\mathcal{R}_{u'_3, u'_3}$  pour différents points de référence. Les échelles de couleurs ont été saturées à  $\pm 40\%$  afin de mettre en évidence les régions de la couche de cisaillement



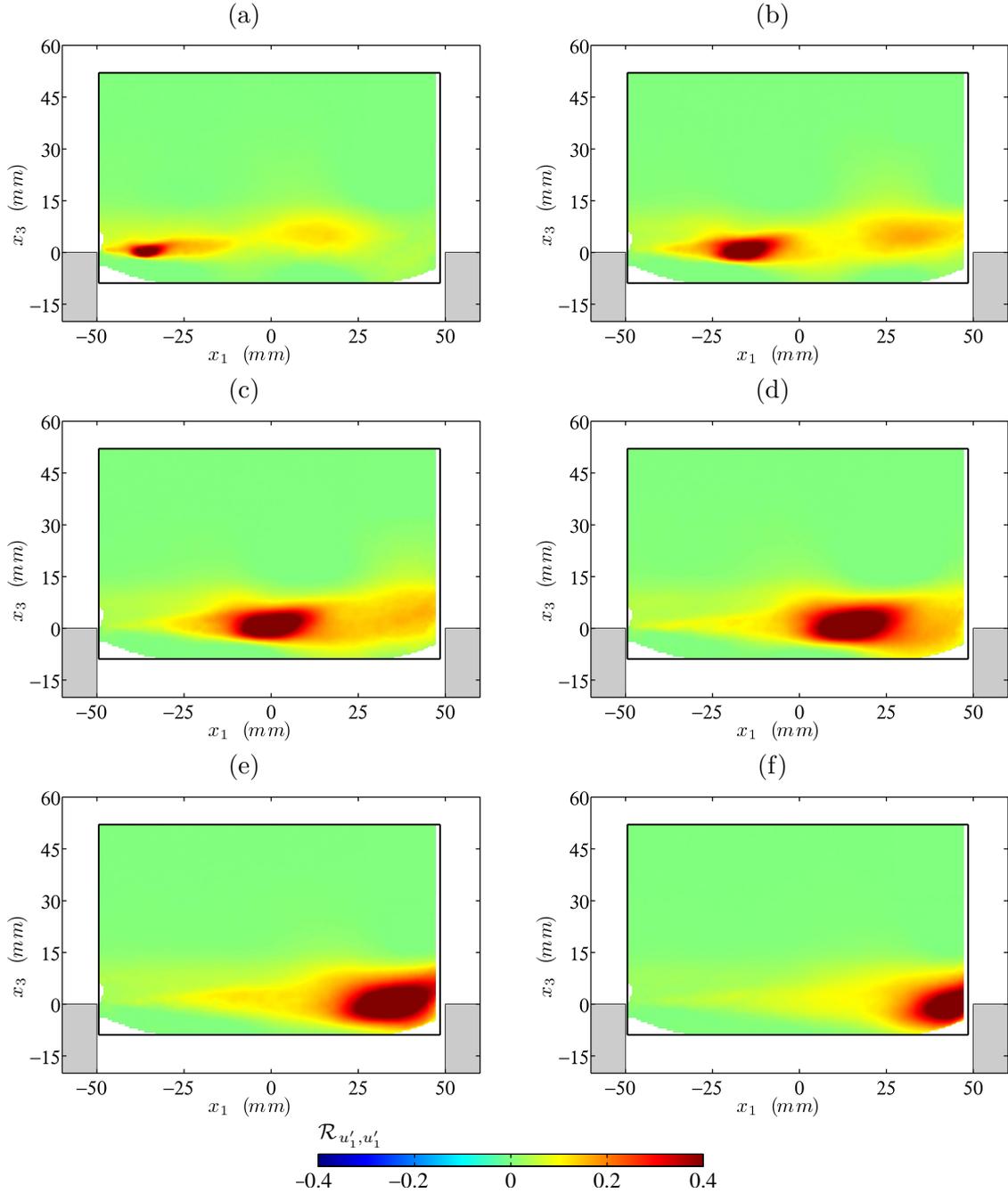
**Fig. 2.16:** Courbe représentative de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_{\theta_3}$  en fonction de la position longitudinale  $x_1$ , dans le plan  $x_2 = 0$ . Le diamètre longitudinal de la cavité est scindé en 4 portions où les asymptotes linéaires sont représentées par les lignes en pointillés bleus. La valeur de la pente  $d\delta_{\theta_3}/dx_1$  est donnée pour chacune des portions. Écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

à forts niveaux de corrélation, supérieurs à 10%. Les coefficients de corrélation longitudinaux montrent un pic principal centré sur le point de référence, et ayant une forme elliptique. Pour les valeurs négatives de la position longitudinale de référence (figure 2.17(a) et (b)), un fort niveau de corrélation (15% environ) est visible à 50 mm à l'aval du pic principal. Les coefficients de corrélation normaux présentent un pic elliptique dans la direction  $\mathbf{e}_3$  centré sur le point de référence. Les figures 2.18(e) et (f) révèlent aussi la présence d'une corrélation marquée de 10 à 15% à 50 mm en amont de l'écoulement.

Ces résultats suggèrent la présence en moyenne de 2 larges structures assez corrélées dans la couche de cisaillement, espacées d'environ 50 mm. Une mesure précise donne une longueur d'onde aérodynamique de  $\lambda_a = 50.9 \text{ mm}$ . Le temps moyen de traversée des structures entre les positions  $(x_1^\circ - \lambda_a, 0)$  et  $(x_1^\circ, 0)$  peut être *a priori* estimé en considérant le maximum du coefficient de corrélation spatio-temporelle des fluctuations de vitesse longitudinale ou verticale entre ces deux positions, avec  $x_2 = x_3 = 0$  :

$$\mathcal{R}_{u'_n, u'_n}(x_1^\circ, x_1^\circ - \lambda_a, \tau) = \frac{\overline{u'_n(x_1^\circ, t)u'_n(x_1^\circ - \lambda_a, t + \tau)}}{\overline{u'_{n\text{rms}}(x_1^\circ, x_3^\circ)u'_{n\text{rms}}(x_1^\circ, x_3^\circ)}} \quad (2.3)$$

où  $\tau$  est le décalage temporel. Cependant, la fréquence d'acquisition de 3 kHz du matériel PIV ne permet pas d'évaluer correctement ce maximum en raison de la sous-discrétisation temporelle des échantillons (4.5 images par période). L'étude au point  $x_1^\circ = 35 \text{ mm}$  ou  $x_1^\circ = 45 \text{ mm}$  sur les fluctuations de vitesse verticale suggère un encadrement du retard  $\tau$  assurant un maximum de corrélation, compris entre  $-1.67$  et  $-1.33 \text{ ms}$ , ce qui correspond à une fréquence des structures comprise entre 600 Hz et 750 Hz. Cet encadrement, en bon accord avec la fréquence tonale rayonnée par la cavité mesurée à 656 Hz, suggère un rôle prépondérant de ces larges structures présentes dans la couche de cisaillement sur le contenu spectral du rayonnement acoustique de la cavité. Une estimation plus précise pourrait être obtenue à l'aide d'une acquisition haute fréquence par LDA au point amont  $x_1^\circ - \lambda_a$ , et par fil chaud au point aval  $x_1^\circ$ . Cette technique permettrait en effet d'obtenir des signaux mieux échantillonnés (typiquement à 25 kHz), et donc une estimation plus affinée du temps moyen de traversée  $\tau$ , et donc de la fréquence des structures dans la couche cisailée.



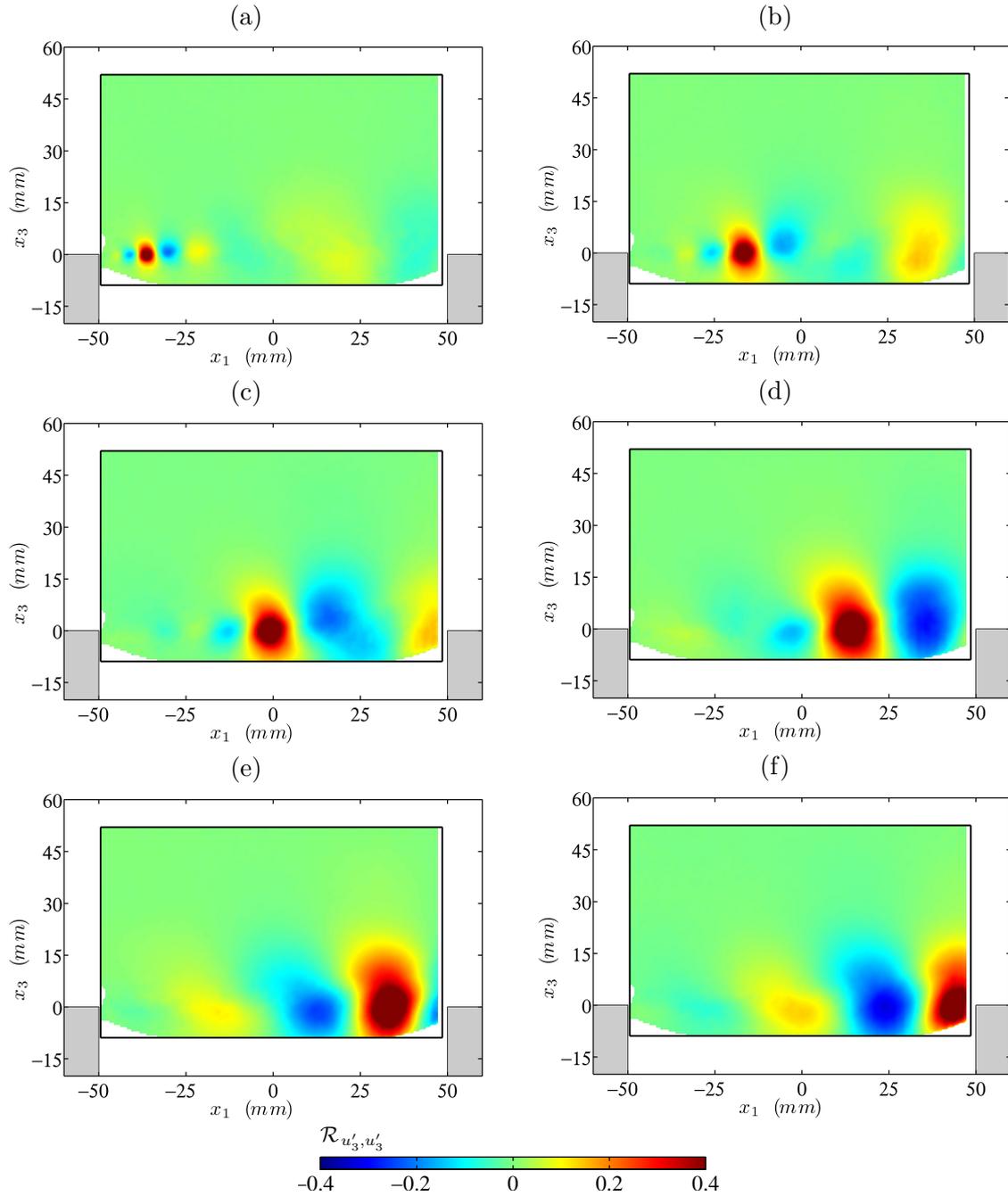
**Fig. 2.17:** Coefficient de corrélation de vitesse longitudinale  $\mathcal{R}_{u'_1, u'_1}$  dans le plan  $x_2 = 0$ , calculé en différents points de référence  $(x_1^\circ, x_3^\circ)$ , avec  $x_3^\circ = 0$ . (a)  $x_1^\circ = -35$  mm. (b)  $x_1^\circ = -15$  mm. (c)  $x_1^\circ = 0$  mm. (d)  $x_1^\circ = 15$  mm. (e)  $x_1^\circ = 35$  mm. (f)  $x_1^\circ = 45$  mm. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

### 2.2.3 Coefficient de pression aux parois

Le coefficient de pression  $C_p$  permet de quantifier la pression exercée par le fluide sur les parois de la cavité. On le définit pour un écoulement faiblement subsonique comme le rapport de la pression relative et de la pression dynamique :

$$C_p = \frac{\bar{p} - p_\infty}{1/2 \rho_\infty u_\infty^2}$$

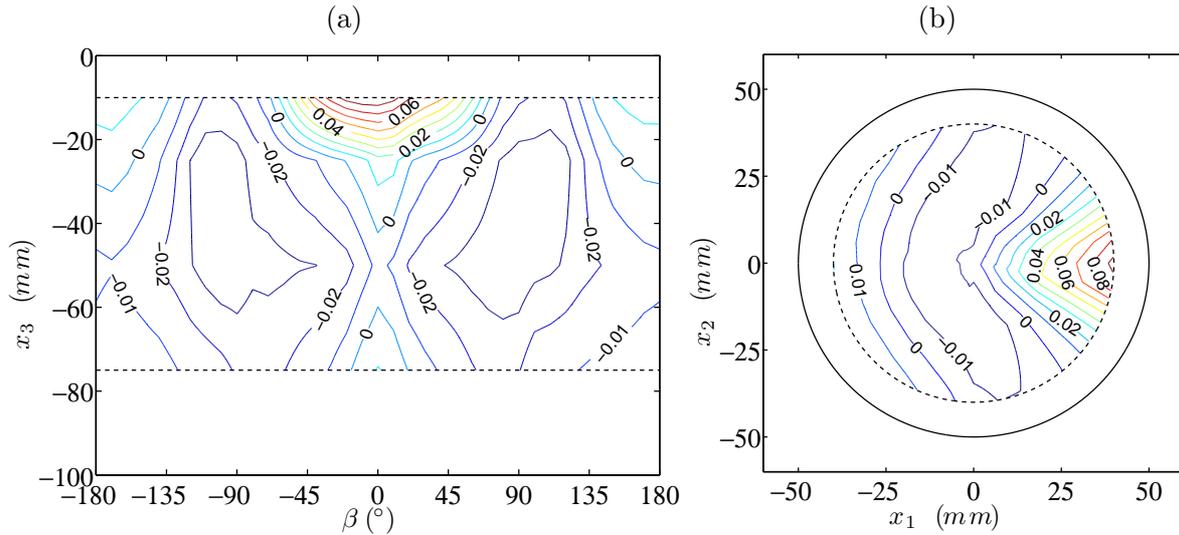
Les figures 2.19(a) et (b) présentent des isocontours du coefficient de pression respectivement sur la paroi latérale de la cavité et sur la paroi de fond. La distribution de pression est



**Fig. 2.18:** Coefficient de corrélation de vitesse verticale  $\mathcal{R}_{u'_3, u'_3}$  dans le plan  $x_2 = 0$ , calculé en différents points de référence  $(x_1^o, x_3^o)$ , avec  $x_3^o = 0$ . (a)  $x_1^o = -35$  mm. (b)  $x_1^o = -15$  mm. (c)  $x_1^o = 0$  mm. (d)  $x_1^o = 15$  mm. (e)  $x_1^o = 35$  mm. (f)  $x_1^o = 45$  mm. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

presque symétrique par rapport à l'axe de l'écoulement  $\mathbf{e}_1$ . La très faible asymétrie observée peut provenir d'un alignement imparfait des positions des prises de pression pariétale. La zone d'impact de la couche de cisaillement au coin aval est clairement visible, correspondant à la région où le coefficient de pression est positif, centrée sur la position  $\beta = 0^\circ$ .

On remarque également que l'impact au coin aval génère un mouvement général du fluide vers le fond de la cavité, comme le montre la trace de positivité du coefficient de pression le long de l'axe  $\beta = 0^\circ$  en fonction de la profondeur, et sur la paroi de fond de la cavité. Ce mouvement est à l'origine d'une grande zone de recirculation dans la cavité dont l'axe de rotation est sensiblement perpendiculaire à l'axe de l'écoulement, comme le montrent les isocontours négatifs du coefficient de pression centrés autour des positions angulaires  $\beta =$



**Fig. 2.19:** Isocontours du coefficient de pression  $C_p$ . (a) Paroi latérale. La position  $\beta = 0^\circ$  correspond au coin aval, comme le montre la figure 1.3. (b) Paroi de fond. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

$\pm 90^\circ$ . Ils sont de forme ovoïde, et non circulaire comme dans le cas d'une cavité rectangulaire, en raison de la circularité de la paroi latérale de la cavité.

Les isocontours du coefficient de pression obtenus à la paroi de fond s'accordent bien avec les résultats expérimentaux d'Hiwada *et al.* [113] pour une cavité ronde ayant un rapport d'aspect identique. L'isocontour nul présente une forme caractéristique en fer à cheval, comme on peut le voir sur la figure 1.15(a). La positivité du coefficient de pression proche du bord amont au fond de la cavité indique la présence d'une recirculation contrarotative, comme on peut souvent l'observer sur des cavités rectangulaires. Toutefois, la forme en croissant où le  $C_p$  est positif suggère que la recirculation contrarotative ne se fait pas autour de l'axe  $\mathbf{e}_2$ , mais plutôt autour d'un axe variable, en raison de la géométrie circulaire de la paroi amont.

## 2.2.4 Pression fluctuante aux parois

Les fluctuations de pression au niveau des parois peuvent avoir plusieurs origines. Il peut s'agir de fluctuations d'origine aérodynamique, notamment en raison de l'impact de la couche de cisaillement sur la paroi latérale aval de la cavité ou de la recirculation intense qui s'établit dans la cavité. Il peut aussi s'agir de fluctuations d'origine acoustique, liées au phénomène de résonance, dont les fréquences naturelles peuvent être estimées par la relation (1.11) pour une cavité ronde bafflée. Le tableau 2.1 donne les fréquences de résonance naturelle des premiers modes pour la cavité de référence.

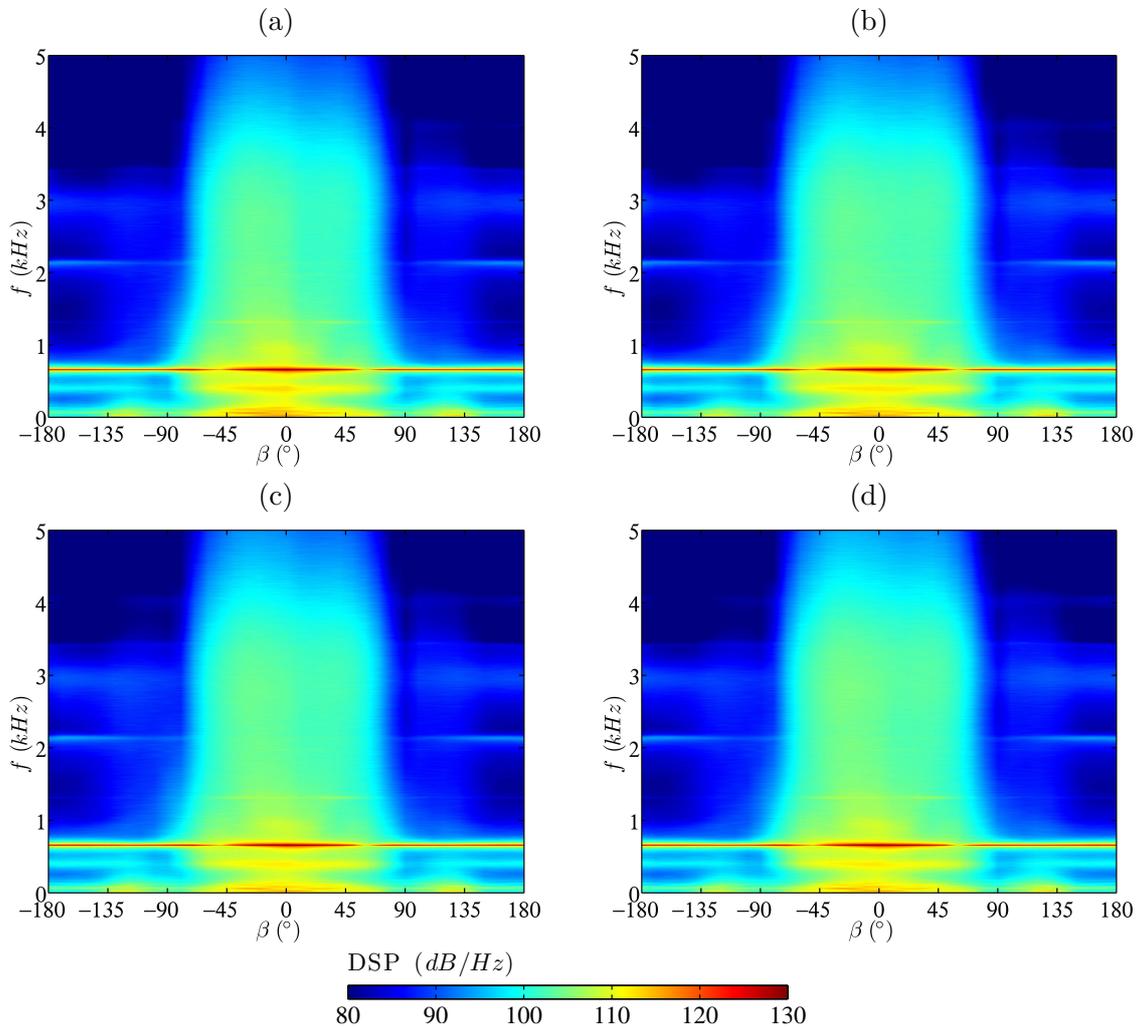
### 2.2.4.1 Paroi latérale de la cavité

Les figures 2.20(a), (b), (c) et (d) présentent les spectres des fluctuations de pression à la paroi latérale de la cavité, obtenus par la méthode de Welch sur 500 séquences et à l'aide d'un fenêtrage de Hanning, pour des profondeurs respectives de  $x_3 = -10 \text{ mm}$ ,  $x_3 = -25 \text{ mm}$ ,  $x_3 = -50 \text{ mm}$ , et  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Comme lors de l'étude de la pression statique aux parois, une légère asymétrie est observée par rapport à la direction de l'écoulement  $\beta = 0^\circ$ . Les spectres varient peu en forme et en niveau en fonction de la profondeur des points d'observation.

La zone d'impact de la couche de cisaillement, s'accompagnant d'un écoulement turbulent le long de la paroi aval de la cavité, est mis en évidence par la frange de niveaux intenses s'étirant de  $\pm 60^\circ$  par rapport au coin aval ( $\beta = 0^\circ$ ), quelle que soit la profondeur dans la cavité des points d'observation. Cette frange est large bande, et de forts niveaux de fluctuations sont observés jusqu'à une fréquence d'environ  $3.5 \text{ kHz}$ . Pour des positions angulaires au-delà de

mode $(l, m, n)$	fréquence (Hz)
(0,0,1)	608
(0,0,3)	1824
(1,0,0)	2010
(1,0,1)	2100
(1,0,3)	2714
(0,0,5)	3039
(2,0,1)	3389
(1,0,5)	3644
(2,0,3)	3801
(0,1,0)	4184
(0,1,1)	4228

**Tab. 2.1:** Fréquences de résonance naturelle des premiers modes pour la cavité de référence.  $l$  correspond aux modes azimutaux,  $m$  aux modes radiaux, et  $n$  aux modes de profondeur.



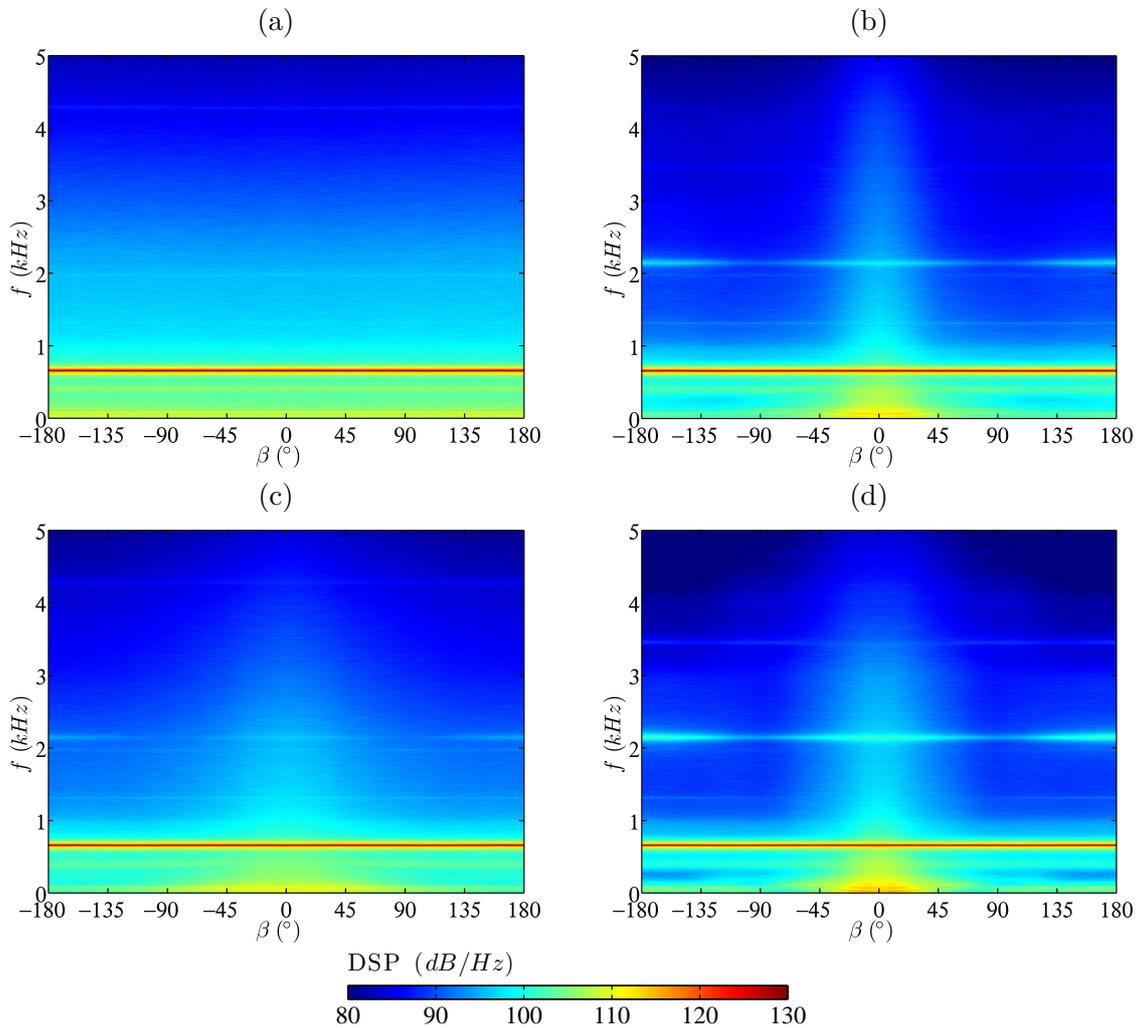
**Fig. 2.20:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi latérale de la cavité, en fonction des positions angulaire  $\beta$  et de profondeur  $x_3$ . (a)  $x_3 = -10$  mm. (b)  $x_3 = -25$  mm. (c)  $x_3 = -50$  mm. (d)  $x_3 = -75$  mm. Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70$  m/s.

$\pm 65^\circ$ , le spectre ne semble pas affecté par l'impact de la couche cisailée et les pics restants sont alors de nature acoustique. Quelle que soit la position angulaire, un pic très intense est observé à la fréquence  $f = 656$  Hz, qui correspond à la fréquence tonale de l'acoustique rayonnée en

champ lointain (voir la figure 2.7). Ce pic est d'ailleurs plus intense dans la zone d'impact des tourbillons au bord aval qu'ailleurs, ce qui suggère que la couche de cisaillement est aussi fortement marquée par cette fréquence. Le pic secondaire obtenu à la fréquence  $f \simeq 2130 \text{ Hz}$  indique la présence du mode de résonance (1,0,1) dans la cavité, correspondant au premier mode azimutal combiné avec le premier mode de profondeur. Enfin, des composantes basses-fréquences sont présentes dans les spectres quelle que soit la position  $x_3$ , notamment à la fréquence  $f = 395 \text{ Hz}$ .

#### 2.2.4.2 Paroi de fond de la cavité

Les figures 2.21(a), (b), (c) et (d) montrent les spectres des fluctuations de pression à la paroi de fond de cavité en fonction de l'angle  $\beta$  pour différentes positions radiales :  $r = 0 \text{ mm}$ ,  $r = 12.5 \text{ mm}$ ,  $r = 25 \text{ mm}$  et  $r = 37.5 \text{ mm}$ . La cartographie pour  $r = 0$  est obtenue en dupliquant le spectre mesuré en  $\beta = 0^\circ$  pour chaque position angulaire  $\beta$ .



**Fig. 2.21:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi de fond de la cavité, en fonction des positions angulaire  $\beta$  et radiale  $r$ . (a)  $r = 0 \text{ mm}$ . (b)  $r = 12.5 \text{ mm}$ . (c)  $r = 25 \text{ mm}$ . (d)  $r = 37.5 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

Les spectres, présentant tous une forme symétrique par rapport à la direction de l'écoulement  $\beta = 0^\circ$ , sont très marqués par la fréquence  $f = 656 \text{ Hz}$ , quelle que soit la position radiale. Ces figures révèlent également la présence de modes azimutaux et radiaux. En effet, le pic observé à la fréquence  $f \simeq 2130 \text{ Hz}$  sur les figures 2.21(b) à (d) indique la présence du mode azimutal (1,0,1), tandis que le pic à la fréquence  $f \simeq 4.3 \text{ kHz}$  correspond au mode radial

(0,1,1), nettement visible sur les figures 2.21(a) et (c). Le mode azimutal (1,0,1) se remarque très distinctement, en raison de la présence de maxima à la position  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 180^\circ$ , et de minima près des angles  $\beta = \pm 90^\circ$ . Le second mode azimutal (2,0,1) est enfin perceptible sur les figures 2.21(b) et (d), où un pic est observé à la fréquence  $f \simeq 3.4 \text{ kHz}$ .

### 2.2.4.3 Fonction de cohérence

Les résultats précédents peuvent être étayés à l'aide d'une étude de cohérence entre les signaux de pression fluctuante aux parois, puisque ceux-ci sont enregistrés simultanément. La fonction de cohérence  $\mathcal{C}_{0,1}^2$  entre deux signaux de pression fluctuante  $p'_0 = p'(\mathbf{x}_0)$  et  $p'_1 = p'(\mathbf{x}_1)$  s'exprime par définition en fonction de la fréquence  $f$  :

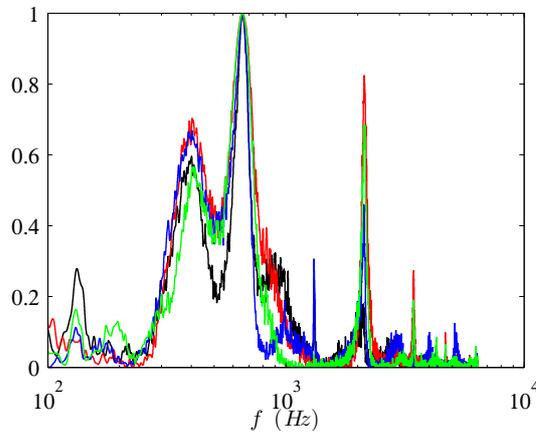
$$\mathcal{C}_{0,1}^2(f) = \frac{|P_{W_{0,1}}(f)|^2}{P_{W_0}(f) P_{W_1}(f)}$$

La quantité  $P_{W_{0,1}}$  représente le spectre de puissance croisé lissé des signaux  $p'_0$  et  $p'_1$ . Il est obtenu à l'aide de la méthode de Welch décrite à la partie 2.2.1.2, en calculant les périodogrammes échantillonnés  $P_m$  par la relation :

$$P_m = \frac{\widehat{w_m p'_0} \widehat{w_m p'_1}^*}{N}$$

où l'opérateur  $*$  représente la conjugaison complexe. Les quantités  $P_{W_0}$  et  $P_{W_1}$  représentent respectivement les densités spectrales de puissance des signaux  $p'_0$  et  $p'_1$ .

La figure 2.22 présente l'amplitude au carré de la fonction de cohérence entre l'amont et l'aval de la cavité, c'est à dire entre les prises de pression placées à la position angulaire  $\beta = 0^\circ$  (paroi aval) et celles placées en  $\beta = 180^\circ$  (paroi amont). La fonction de cohérence est calculée pour chaque profondeur disponible. La cohérence à la fréquence  $f = 656 \text{ Hz}$  est



**Fig. 2.22:** Courbe représentative de la fonction de cohérence  $\mathcal{C}^2$ , entre l'amont ( $x_1 = -R$ ) et l'aval ( $x_1 = R$ ) de la cavité, dans le plan de l'écoulement, pour différentes profondeurs. — :  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -25 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -50 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .

presque parfaite (supérieure à 99.7%) quelle que soit la profondeur, ce qui indique une très forte corrélation acoustique entre les parois amont et aval de la cavité. On observe aussi un pic significatif de la cohérence vers  $f = 400 \text{ Hz}$ , qui pourtant n'est pas vraiment marquée dans le spectre acoustique rayonné en champ lointain de la cavité. Les modes de résonance acoustique sont également clairement visibles autour des fréquences  $f = 2130 \text{ Hz}$ ,  $f = 3.4 \text{ kHz}$  et  $f = 4.6 \text{ kHz}$ . À noter enfin la présence d'un pic secondaire, pour les profondeurs de  $10 \text{ mm}$  et  $25 \text{ mm}$ , autour de la fréquence  $f = 1310 \text{ Hz}$ , qui correspond à la première harmonique du pic principal.

### 2.2.5 Conclusion

Les mesures expérimentales acoustiques indiquent, pour la configuration de référence, la présence d'un rayonnement acoustique tonal intense de la cavité caractérisé par un pic à la fréquence  $f = 656 \text{ Hz}$ . Une étude de directivité montre que ce rayonnement est plus intense de 5 à 10  $\text{dB}$  vers l'amont et l'aval à 1  $\text{m}$  de la cavité, que perpendiculairement à l'écoulement. Des mesures cinématiques effectuées par LDA indiquent la présence d'une large recirculation dans la cavité. Cette recirculation prend naissance au bord aval de la cavité, notamment avec l'impact de la couche de cisaillement qui amorce l'établissement d'un flux turbulent intense de fluide vers l'intérieur de la cavité le long de la paroi aval, comme l'indique les mesures de pression statique à la paroi latérale. Des mesures PIV mettent en évidence la présence en moyenne de deux larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement. Des mesures de pression fluctuante aux parois montrent que la couche de cisaillement est fortement marquée à la fréquence du rayonnement tonal de la cavité, et indiquent la présence de plusieurs autres modes acoustiques de résonance dans la cavité, que l'on ne retrouve pas dans le champ acoustique rayonné.

## 2.3 Influence de la vitesse et de la profondeur

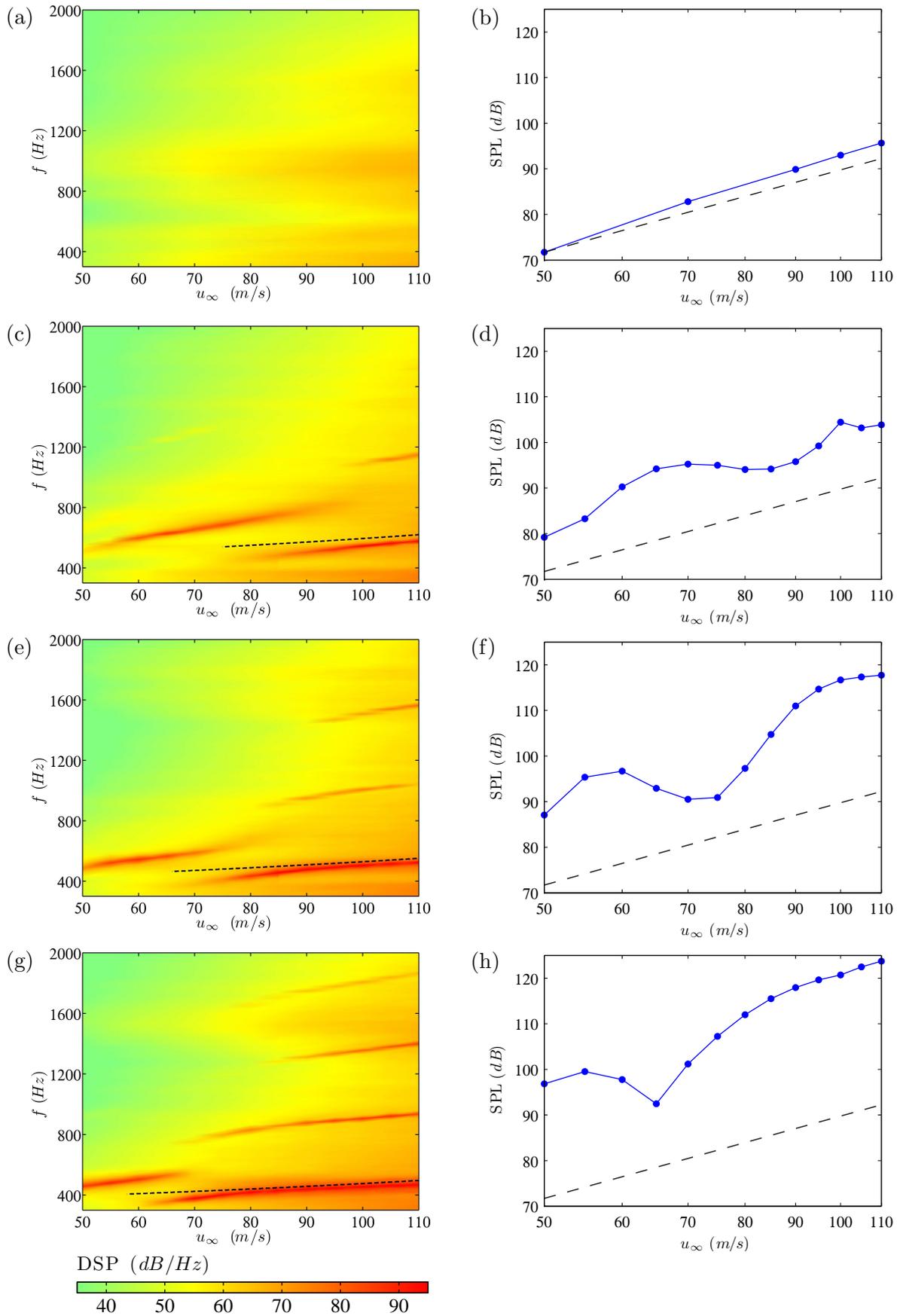
### 2.3.1 Acoustique rayonnée en champ lointain

Une montée en vitesse, de 50  $\text{m/s}$  à 110  $\text{m/s}$ , est réalisée sur la cavité à profondeur variable, afin d'explorer le comportement acoustique en champ lointain, en fonction de la vitesse de l'écoulement et du rapport d'aspect  $D/H$ . Des mesures acoustiques sont effectuées à l'aide de l'antenne mobile à 1  $\text{m}$  au-dessus du centre de la cavité, pour les 4 configurations géométriques décrites à la section 2.1.4, à savoir des cavités de profondeur  $H = 50 \text{ mm}$ ,  $H = 100 \text{ mm}$ ,  $H = 125 \text{ mm}$  et  $H = 150 \text{ mm}$ .

#### 2.3.1.1 Spectre et niveau de pression acoustique

Les figures 2.23(a), (c), (e) et (g) présentent les spectres acoustiques en fonction de la vitesse de l'écoulement pour des profondeurs de cavité valant respectivement  $H = 50 \text{ mm}$ ,  $H = 100 \text{ mm}$ ,  $H = 125 \text{ mm}$  et  $H = 150 \text{ mm}$ . Les cartographies de densité spectrale de puissance mettent en évidence l'existence d'un ou plusieurs pics qui déterminent ainsi des modes acoustiques dans le rayonnement en champ lointain. La figure 2.23(c) révèle l'existence de deux modes pour la cavité de 100  $\text{mm}$  de profondeur sur l'intervalle de vitesse étudié. Un premier mode, noté I, s'étend fréquemment de 450  $\text{Hz}$ , pour une vitesse d'écoulement de 80  $\text{m/s}$ , à 570  $\text{Hz}$  pour 110  $\text{m/s}$ . Un second mode, noté II, est visible pour des vitesses variant de 50 à 95  $\text{m/s}$ , et dont la fréquence varie de 500  $\text{Hz}$  à 820  $\text{Hz}$ . Les cartographies 2.23(e) et (g) montrent que la fréquence de ces modes, à une vitesse donnée, diminue avec l'augmentation de la profondeur de la cavité. Aussi, le mode I apparaît pour des vitesses plus faibles, et son niveau acoustique maximal croît avec la profondeur. Les seuils d'apparition et de disparition du mode II se déplacent vers des vitesses plus faibles, et son niveau maximal tend à décroître légèrement. Des harmoniques du mode I sont enfin présentes de manière assez intense dans la signature acoustique. Leur nombre dépend de la profondeur de la cavité. Une seule harmonique est présente pour la cavité de profondeur 100  $\text{mm}$ , pour une vitesse supérieure à 100  $\text{m/s}$ . Avec l'augmentation de la profondeur de la cavité, une seconde puis une troisième harmonique apparaissent, et sont visibles pour des vitesses plus faibles : 80 à 90  $\text{m/s}$  pour la cavité de profondeur 125  $\text{mm}$ , 70 à 80  $\text{m/s}$  pour la cavité de profondeur 150  $\text{mm}$ .

La fréquence du mode I obtenue expérimentalement est comparée à la fréquence fondamentale de résonance pilotée par la couche de cisaillement estimée grâce à la relation (1.12) du modèle de Parthasarathy *et al.* [177]. Ses variations en fonction de la vitesse de l'écoulement sont représentées en pointillés noirs sur les figures 2.23(c), (e) et (g). Ce modèle ayant été



**Fig. 2.23:** À gauche : Densité spectrale de puissance (en  $\text{dB/Hz}$ ) en fonction de la vitesse  $u_\infty$  de l'écoulement, pour différentes profondeurs de cavité. --- : Fréquence du mode I estimée par le modèle de Parthasarathy *et al.* (équation (1.12), [177]). À droite : Niveau de pression acoustique correspondant (en  $\text{dB}$ ) en fonction de la vitesse  $u_\infty$  de l'écoulement, pour différentes profondeurs de cavité. — : SPL. --- : Loi en  $u_\infty^6$ . (a) et (b) :  $H = 50 \text{ mm}$ . (c) et (d) :  $H = 100 \text{ mm}$ . (e) et (f) :  $H = 125 \text{ mm}$ . (g) et (h) :  $H = 150 \text{ mm}$ . Les points de mesure sont représentés par le symbole  $\bullet$ .

construit et ajusté pour des cavités relativement profondes ( $D/H \simeq 0.4$ ), il paraît légitime d'observer un écart assez important entre les résultats de mesure et l'estimation de Parthasarathy *et al.*, pour la cavité de  $D/H = 1$ . L'estimation de la fréquence du mode I par le modèle de Parthasarathy *et al.* est meilleure pour les cavités plus profondes ( $H = 125 \text{ mm}$  et  $H = 150 \text{ mm}$ ), et les écoulements dont la vitesse est supérieure à  $90 \text{ m/s}$ . Toutefois, le modèle ne parvient pas à retrouver la faible concavité de la courbe représentative du pic acoustique en fonction de la vitesse. Malgré cela, l'assez bonne concordance entre l'estimation fournie par le modèle et les mesures pour les cavités profondes peut suggérer que le rayonnement acoustique du type mode I proviendrait d'un couplage entre le mode de résonance dans la profondeur et le premier mode de la couche de cisaillement, d'après la modélisation faite par les auteurs.

Les figures 2.23(b), (d), (f) et (h) montrent le niveau de pression acoustique (*Sound Pressure Level* – SPL) correspondant, en fonction de la vitesse. Ce niveau de pression acoustique est une mesure logarithmique du bruit effectif. Il est calculé directement à partir de la densité de puissance acoustique surfacique  $P_T$ , qui peut être évaluée par intégration fréquentielle du périodogramme lissé  $P_W$  :

$$P_T = \int_0^{+\infty} P_W(f) df = \int_0^{+\infty} P_{\text{ref}} 10^{\text{DSP}(f)/10} df$$

Ainsi, le niveau de pression acoustique vaut :

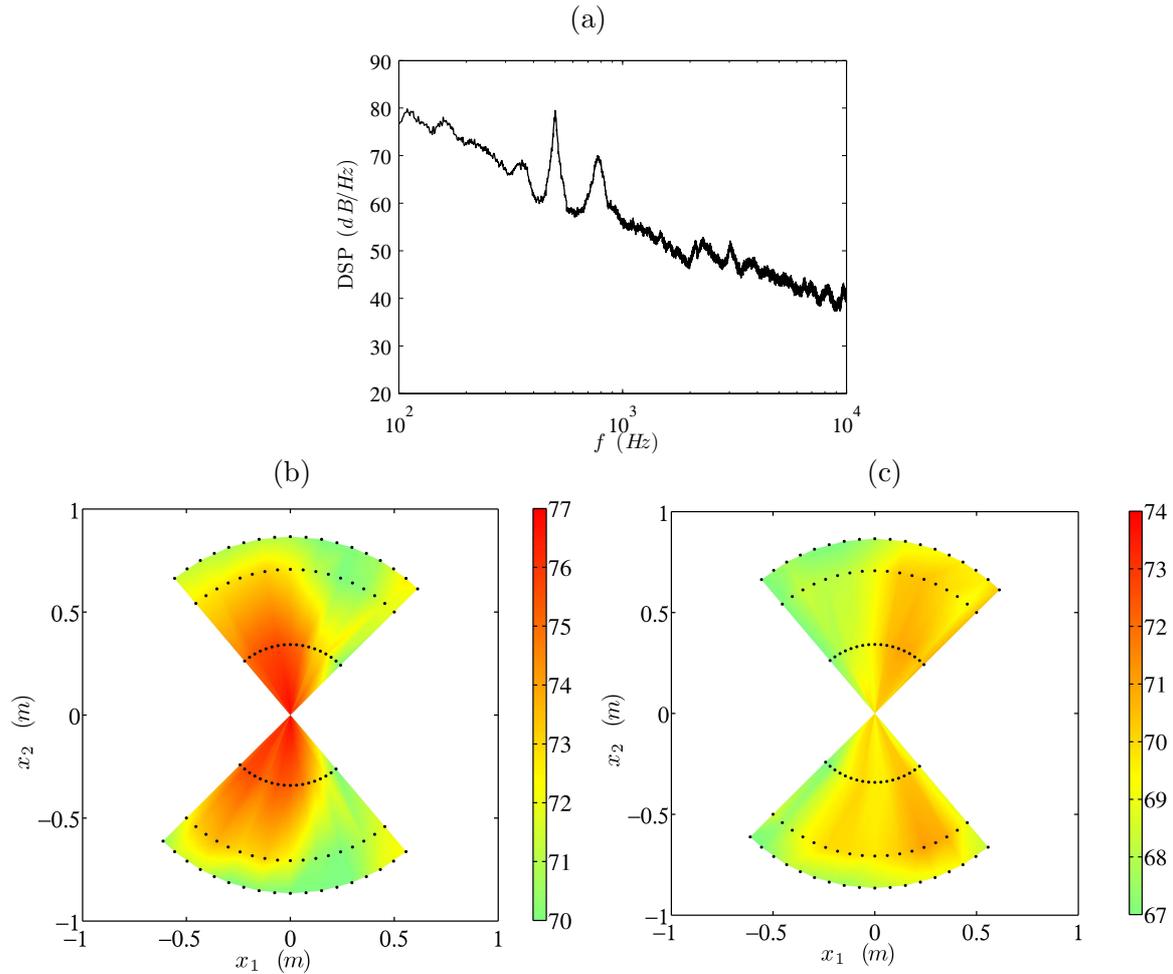
$$\text{SPL} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_T}{P_{\text{ref}}} \right) = 10 \log_{10} \left( \int_0^{+\infty} 10^{\text{DSP}(f)/10} df \right)$$

Pour la cavité de  $50 \text{ mm}$  de profondeur, le niveau de pression acoustique varie presque linéairement, en échelles logarithmiques, en fonction de la vitesse. Ce niveau est comparé à une évolution en  $u_\infty^6$  du niveau de pression acoustique, ajusté pour correspondre à la mesure du niveau sonore pour  $50 \text{ m/s}$ . Cette dépendance en  $u_\infty^6$  est caractéristique d'un mécanisme de production de bruit dipolaire compact, telles des fluctuations turbulentes sur une surface rigide, comme le montrent Curle [57] et Ffowcs-Williams & Hall [82]. La comparaison montre que la loi en  $u_\infty^6$  décrit relativement bien l'augmentation du niveau de pression acoustique en fonction de la vitesse lorsqu'aucun mode n'est présent (figure 2.23(a)) suggérant que le rayonnement acoustique est alors principalement le résultat de l'interaction de la couche cisailée sur la paroi aval de la cavité. Pour la cavité de  $100 \text{ mm}$  de profondeur, le niveau de pression acoustique varie, sur l'intervalle de vitesse étudié, de  $79 \text{ dB}$  à  $50 \text{ m/s}$ , à  $104.5 \text{ dB}$  à  $100 \text{ m/s}$ , avec la présence d'un maximum local à  $95.2 \text{ dB}$  à  $70 \text{ m/s}$ , correspondant au mode II. Un minimum local est à remarquer pour une vitesse de  $85 \text{ m/s}$ , qui correspond à la configuration où les modes I et II coexistent simultanément, d'après la figure 2.23(a). Le niveau de pression acoustique est enfin globalement supérieur, quelle que soit la vitesse, à celui obtenu pour la cavité de  $50 \text{ mm}$  de profondeur. Pour les cavités de profondeur  $125$  et  $150 \text{ mm}$ , les niveaux de pression acoustique sont globalement encore plus intenses. On observe dans les deux cas une réduction du niveau de pression acoustique lorsque les deux modes coexistent simultanément.

### 2.3.1.2 Directivité

L'influence de la vitesse sur la directivité est étudiée dans cette partie uniquement sur la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$ , pour des écoulements de  $50$ ,  $90$ , et  $110 \text{ m/s}$ .

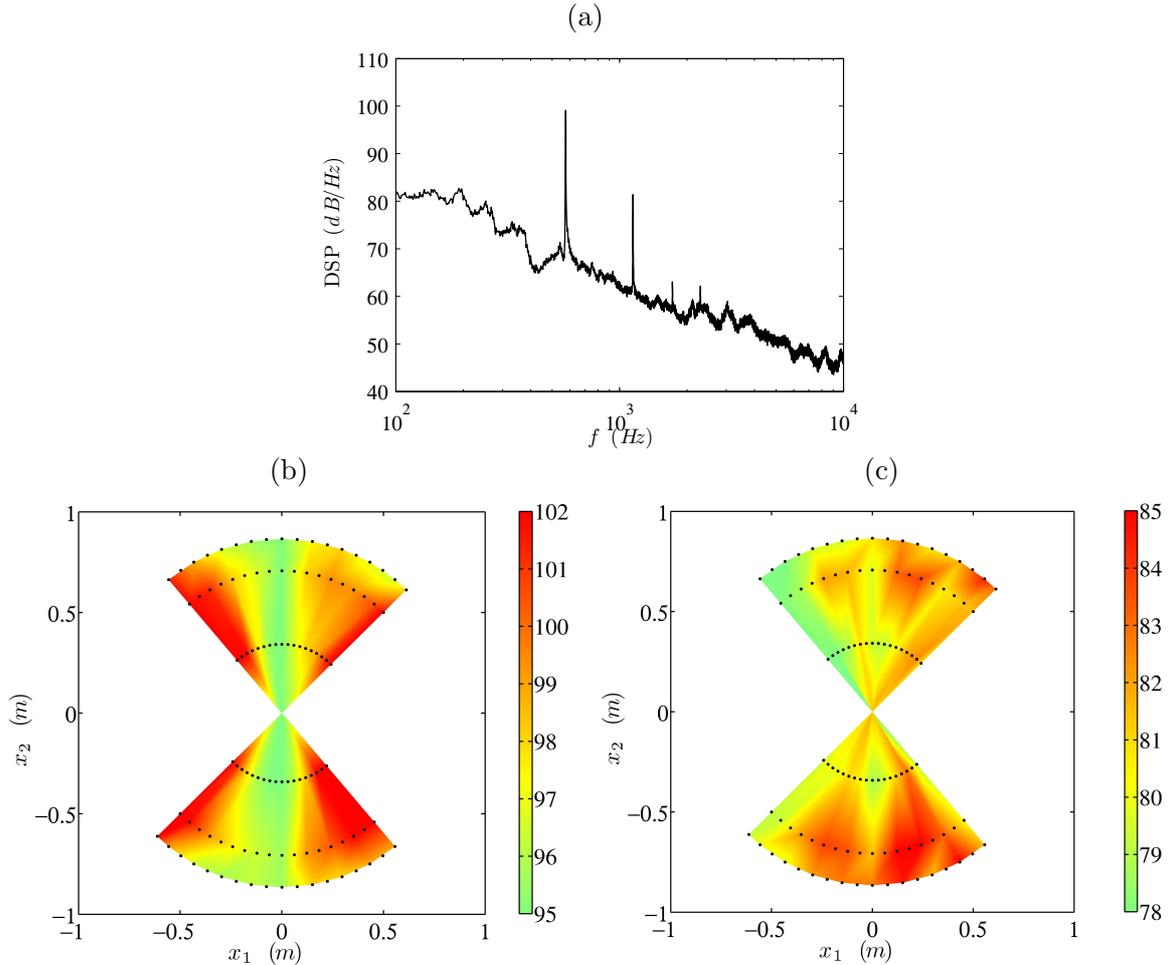
La figure 2.24 présente les résultats des mesures de directivité pour un écoulement de  $90 \text{ m/s}$ . Le spectre acoustique mesuré à  $1 \text{ m}$  au-dessus de la cavité (figure 2.24(a)) indique précisément les fréquences des deux pics correspondant aux modes I et II observés précédemment sur la figure 2.23(a). Le premier pic se situe à une fréquence de  $500 \text{ Hz}$  et le second à  $790 \text{ Hz}$ . Ces deux pics n'émergent pas autant du bruit ambiant que dans le cas à  $70 \text{ m/s}$ , où le dépassement du mode prépondérant était de plus de  $30 \text{ dB}$ . Ici le mode I émerge d'environ  $18 \text{ dB}$ , tandis que le mode II ne se démarque que de  $11 \text{ dB}$ . La cartographie de directivité du



**Fig. 2.24:** (a) Densité spectrale de puissance du rayonnement acoustique de la cavité mesurée à 1 m au-dessus de son centre. (b) Densité spectrale de puissance (en  $dB/Hz$ ) à la fréquence  $f = 500$  Hz (mode I), selon la position de l'antenne mobile (vue de dessus). (c) Densité spectrale de puissance (en  $dB/Hz$ ) à la fréquence  $f = 776$  Hz (mode II), selon la position de l'antenne mobile (vue de dessus). Les positions de mesure sont représentées par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 90$  m/s.

mode I (figure 2.24(b)) révèle une directivité symétrique par rapport au plan  $x_2 = 0$  nettement orientée vers l'amont de la cavité. La cartographie du mode II (figure 2.24(c)) montre une directivité plutôt dirigée vers l'aval. Ainsi, chacun des modes est rayonné préférentiellement dans une direction. Cette tendance est donc différente du cas où il n'y a qu'un seul mode, précédemment discuté à la partie 2.2.1.3 pour un écoulement de 70 m/s, où le mode présent (mode II) était rayonné de manière assez identique à la fois vers l'amont et l'aval de la cavité.

Les résultats des mesures acoustiques pour un écoulement de 110 m/s sont présentés à la figure 2.25. Cette configuration correspond à la présence dans la signature acoustique du mode I, dont la fréquence est de 574 Hz, et de sa première harmonique, à la fréquence 1148 Hz (figure 2.25(a)). On distingue d'autres harmoniques d'ordre supérieur, autour de 1725 Hz et de 2295 Hz, mais leur niveau acoustique correspondant est négligeable par rapport à ceux du mode I et de sa première harmonique. La cartographie de la densité spectrale de puissance à la fréquence du mode I (figure 2.25(b)) montre que la directivité est orientée de manière assez identique vers l'amont et vers l'aval, comme dans le cas à un unique mode, le mode II, pour un écoulement de 70 m/s. La zone de plus faible directivité est particulièrement resserrée dans la direction verticale à l'écoulement, dans le secteur angulaire  $\pm[85^\circ, 100^\circ]$ . La première harmonique semble surtout rayonner vers l'aval, et perpendiculairement à la cavité, comme le montre la figure 2.25(c).

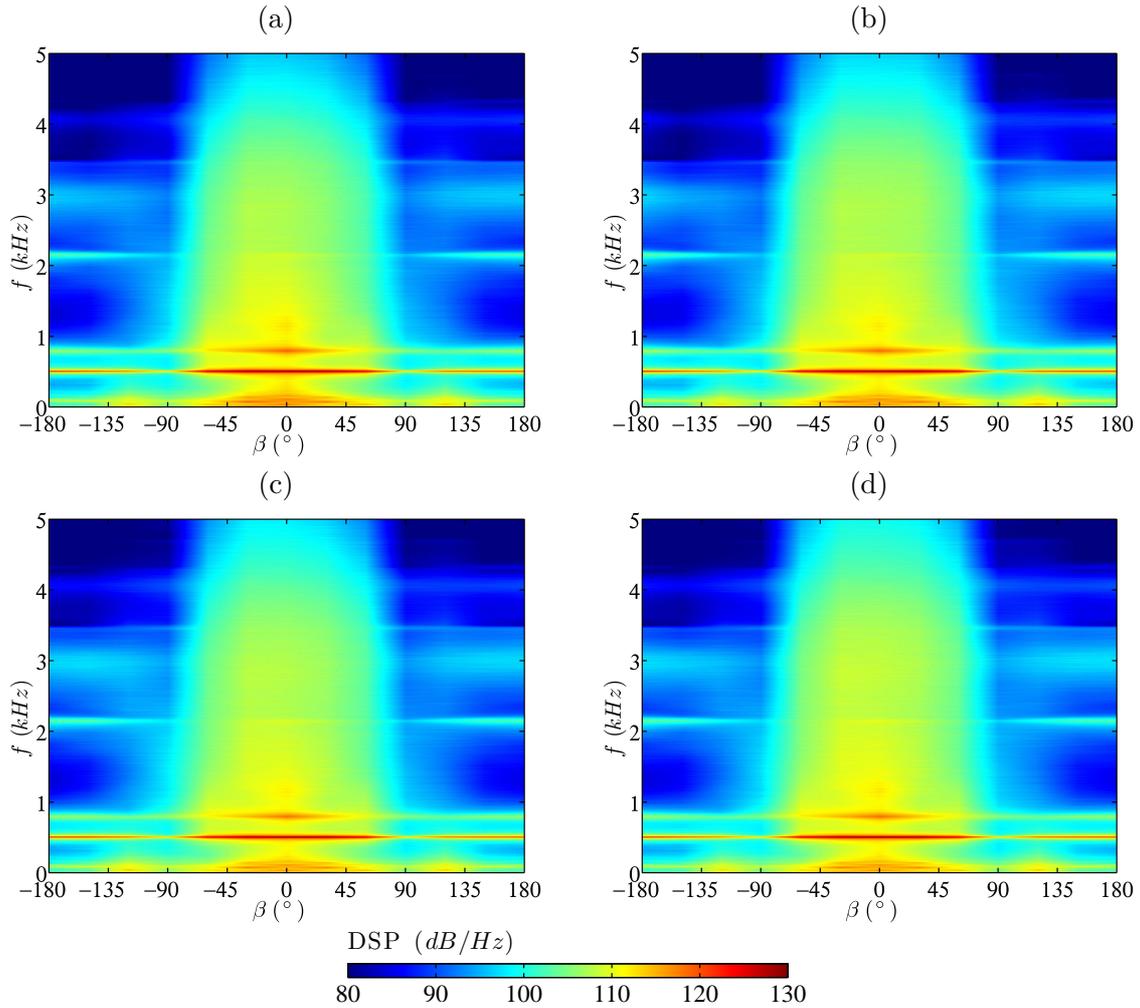


**Fig. 2.25:** (a) Densité spectrale de puissance du rayonnement acoustique de la cavité mesurée à  $1\text{ m}$  au-dessus de son centre. (b) Densité spectrale de puissance (en  $\text{dB/Hz}$ ) à la fréquence  $f = 574\text{ Hz}$  (mode I), selon la position de l'antenne mobile (vue de dessus). (c) Densité spectrale de puissance (en  $\text{dB/Hz}$ ) à la fréquence  $f = 1148\text{ Hz}$  (première harmonique du mode I), selon la position de l'antenne mobile (vue de dessus). Les positions de mesure sont représentées par le symbole  $\bullet$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 110\text{ m/s}$ .

### 2.3.2 Pression fluctuante aux parois

Des mesures de pression fluctuante aux parois sont disponibles pour la cavité de rapport d'aspect  $D/H = 1$  soumise à un écoulement affleurant à  $90\text{ m/s}$ . Il s'agit d'une configuration où coexistent simultanément les modes acoustiques I et II.

Les figures 2.26(a), (b), (c) et (d) montrent les spectres des fluctuations de pression sur la paroi latérale de la cavité, pour des profondeurs respectives de  $x_3 = -10\text{ mm}$ ,  $x_3 = -25\text{ mm}$ ,  $x_3 = -50\text{ mm}$ , et  $x_3 = -75\text{ mm}$ . Les deux pics présents dans le rayonnement acoustique en champ lointain sont visibles quelle que soit la position angulaire  $\beta$  et pour les 4 profondeurs considérées. Le pic basse fréquence à  $500\text{ Hz}$  ainsi que celui plus haute fréquence, à  $795\text{ Hz}$ , émergent considérablement plus du bruit de fond que n'émergent ces deux pics dans le spectre acoustique en champ lointain, la différence étant d'environ  $5\text{ dB}$ . On remarque également la présence des modes de résonance azimutaux couplés au mode de profondeur  $(1,0,1)$  et  $(2,0,1)$ , autour des fréquences  $f = 2150\text{ Hz}$  et  $f = 3400\text{ Hz}$ , dont l'émergence par rapport au bruit ambiant est davantage marquée que dans le cas d'un écoulement affleurant à  $70\text{ m/s}$ . On observe enfin l'émergence de deux plages de fréquences, autour de  $3\text{ kHz}$  et de  $4.1\text{ kHz}$ , et dont l'origine n'a pas été déterminée. La zone d'impact de la couche de cisaillement s'étend sur un secteur de  $\pm 60^\circ$  autour de la position angulaire correspondant au coin aval de la cavité

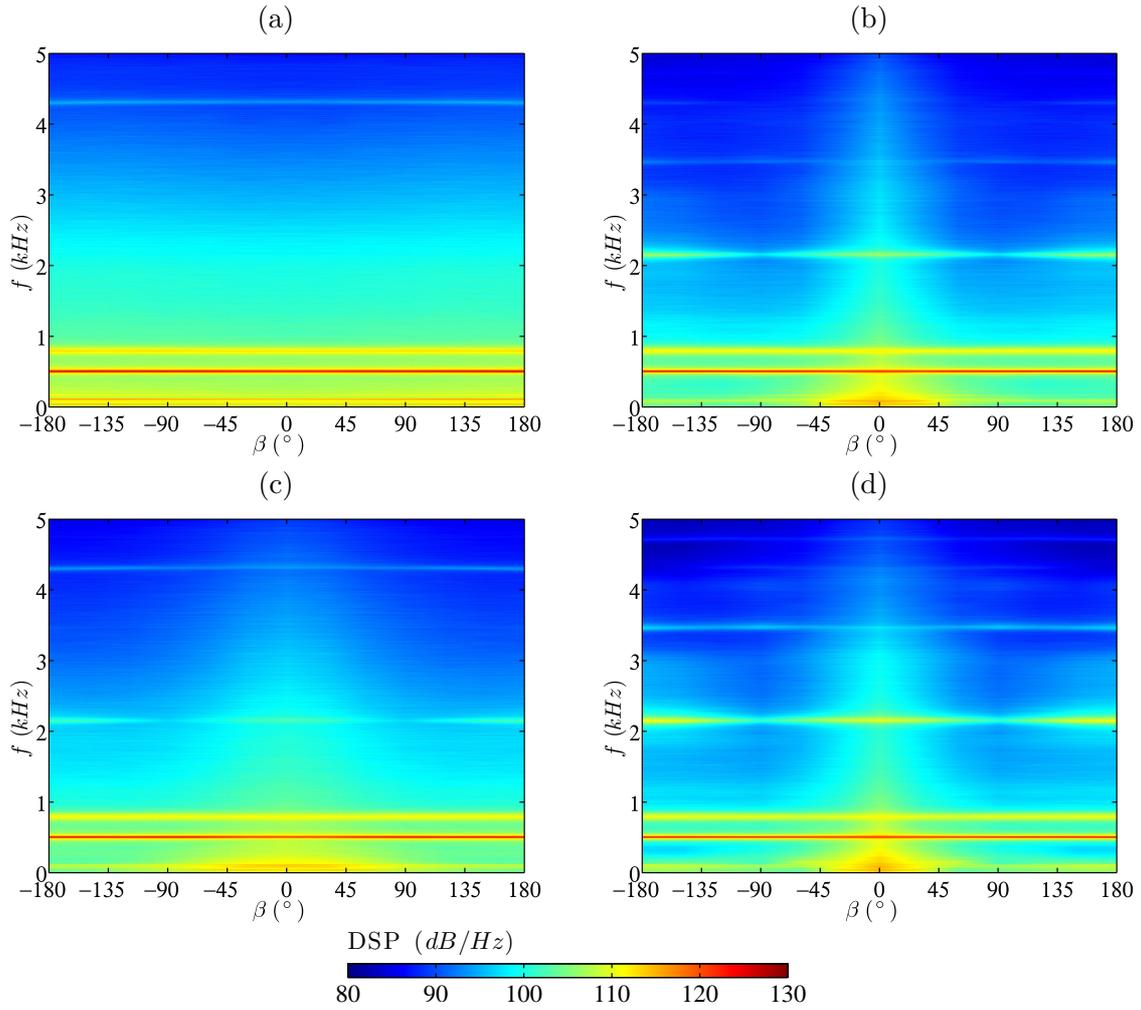


**Fig. 2.26:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi latérale de la cavité, en fonction des positions angulaire  $\beta$  et de profondeur  $x_3$ . (a)  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . (b)  $x_3 = -25 \text{ mm}$ . (c)  $x_3 = -50 \text{ mm}$ . (d)  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 90 \text{ m/s}$ .

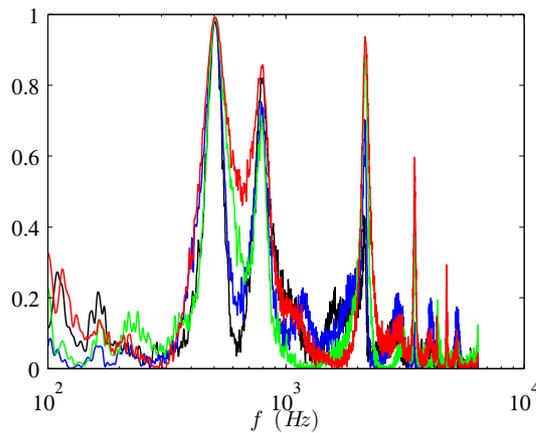
( $\beta = 0^\circ$ ).

Les figures 2.27(a), (b), (c) et (d) présentent les spectres des fluctuations de pression sur la paroi de fond de cavité en fonction de l'angle  $\beta$  pour différentes positions radiales :  $r = 0 \text{ mm}$ ,  $r = 12.5 \text{ mm}$ ,  $r = 25 \text{ mm}$  et  $r = 37.5 \text{ mm}$ . Les deux pics à  $500 \text{ Hz}$  et  $795 \text{ Hz}$  émergent également du bruit ambiant à la paroi de fond quel que soit le rayon d'observation et la position angulaire. Les modes de résonance acoustique (1, 0, 1) et (2, 0, 1) se démarquent également assez nettement. On note enfin la présence du mode radial couplé au premier mode de profondeur (0, 1, 1) à la fréquence  $f = 4.3 \text{ kHz}$ . Ces modes acoustiques émergent également davantage ici que dans le cas de référence avec un écoulement affleurant à  $70 \text{ m/s}$ .

La figure 2.28 montre la fonction de cohérence entre l'amont et l'aval de la cavité pour un écoulement affleurant de  $90 \text{ m/s}$ , et pour diverses profondeurs des prises de pression. Une très forte cohérence est obtenue, quelle que soit la profondeur, aux fréquences correspondant aux deux pics présents dans le rayonnement acoustique en champ lointain. Le mode I, qui est plus intense d'environ  $8 \text{ dB}$  que le mode II en champ lointain, présente une cohérence de plus de 99% entre les parois amont et aval de cavité, tandis que la cohérence du mode II est comprise entre 72 et 86% en fonction de la profondeur des capteurs. Les modes de résonance acoustique (1,0,1) et (2,0,1) émergent enfin très nettement dans la fonction de cohérence, bien plus que dans le cas à  $70 \text{ m/s}$ , notamment pour les mesures effectuées en fond de cavité ( $x_3 = -75 \text{ mm}$ ).



**Fig. 2.27:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi de fond de la cavité, en fonction des positions angulaire  $\beta$  et radiale  $r$ . (a)  $r = 0 \text{ mm}$ . (b)  $r = 12.5 \text{ mm}$ . (c)  $r = 25 \text{ mm}$ . (d)  $r = 37.5 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ .



**Fig. 2.28:** Courbe représentative de la fonction de cohérence  $\mathcal{C}^2$ , entre l'amont ( $x_1 = -R$ ) et l'aval ( $x_1 = R$ ) de la cavité, dans le plan de l'écoulement, pour différentes profondeurs. — :  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -25 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -50 \text{ mm}$ . — :  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Vitesse de l'écoulement :  $u_\infty = 90 \text{ m/s}$ .

### 2.3.3 Conclusion

L'étude paramétrique met en évidence la présence d'un ou plusieurs pics dans le rayonnement acoustique tonal des cavités cylindriques, en fonction du rapport d'aspect  $D/H$  de la

cavité et de la vitesse de l'écoulement affleurant. La fréquence de ces pics augmente avec la vitesse de l'écoulement, et diminue avec la profondeur de la cavité. L'intervalle de variations fréquentielles des pics en fonction de la vitesse de l'écoulement tend également à s'amincir autour de la fréquence de résonance  $f_{0,0,1}$ , indiquant une augmentation du facteur de qualité de la résonance avec l'augmentation de la profondeur. Pour les vitesses comprises entre 50 et 70 à 90  $m/s$  suivant la profondeur de la cavité, le mode II est dominant, tandis que le mode I devient prépondérant pour les vitesses plus élevées. On note une zone de transition où ces deux modes acoustiques peuvent coexister simultanément, et caractérisée par un niveau de pression acoustique moins élevé que lorsqu'un seul mode domine. Pour les vitesses testées les plus élevées, on remarque l'apparition d'une ou plusieurs harmoniques du mode I dans la signature acoustique de la cavité. Les mesures de directivité révèlent que le rayonnement acoustique à la fréquence dominante est préférentiellement orienté vers l'amont et l'aval de la cavité, lorsqu'il n'y a qu'un seul mode. Ce n'est pas le cas quand les deux modes coexistent, pour un écoulement à 90  $m/s$  par exemple, où le rayonnement du mode I est orienté vers l'amont de la cavité, tandis que celui du mode II est dirigé préférentiellement vers l'aval. Dans cette configuration d'écoulement, les mesures de pression fluctuante aux parois révèlent que ces deux pics marquent également fortement les spectres de pression à la paroi. Elles mettent enfin en évidence la présence dans la cavité de fluctuations liées aux modes de résonance acoustique azimutaux et radiaux couplés au premier mode de profondeur.



## Chapitre 3

# Modèle de résonance acoustique pilotée par la couche de mélange

---

On présente dans cette partie une modélisation semi-empirique du mécanisme potentiellement à l'origine du bruit tonal rayonné, à la vue des résultats expérimentaux. L'approche repose essentiellement sur le modèle de résonance acoustique pilotée par la couche de mélange d'Elder [71], présenté à la partie 1.3.3, et repris ici dans un cadre d'hypothèses différent.

En effet, la cavité cylindrique considérée ici n'est pas recouverte d'une fente rectangulaire. La conséquence est que la dimension transverse  $L_2$  de l'ouverture de la cavité, constante dans le modèle d'Elder en raison de la présence de la fente rectangulaire, n'est plus constante dans le cas d'une ouverture cylindrique. Elle dépend de la position longitudinale  $x_1$ , et vaut  $L_2 = 2\sqrt{R^2 - x_1^2}$ , où  $R$  est le rayon de la cavité. De plus, en raison de la géométrie circulaire, il n'est pas aussi naturel, contrairement au cas de l'ouverture rectangulaire, de supposer que la phase du déplacement de l'interface est constante dans la direction transverse à l'écoulement. Cependant, en restreignant le modèle à une zone relativement étroite le long du diamètre longitudinal de la cavité, on peut négliger le déphasage transversal du déplacement de l'interface. Enfin, la modélisation ici concerne des cavités de rapports d'aspect  $D/H$  proche de 1, moins profondes que celles considérées par Elder, et des écoulements deux à quatre fois plus rapides, dont la vitesse est comprise entre 50 et 110  $m/s$ .

Comme dans le cadre du modèle d'Elder, la modélisation se fait en deux temps, avec le même formalisme de fonctions de transfert amont (FTF) et aval (BTF). Dans un premier temps, on modélise l'influence des ondes stationnaires correspondant aux modes acoustiques de profondeur sur la formation d'instabilités dans la couche de cisaillement au niveau du bord amont (fonction de transfert FTF). On modélise ensuite comment ces instabilités vont permettre de maintenir l'amplitude de ces ondes stationnaires proche du bord aval (fonction de transfert BTF).

### 3.1 Déstabilisation de la couche de cisaillement par excitation acoustique (fonction FTF)

Cette partie a pour objectif de modéliser la formation d'instabilités dans la couche de cisaillement par couplage avec les ondes stationnaires relatives aux modes acoustiques de profondeur qui existent dans la cavité. Elle repose essentiellement sur l'étude de l'interface de la cavité, définie comme l'ensemble des points d'inflexion des profils de vitesse longitudinale.

### 3.1.1 Déplacement de l'interface

Les particules de fluide sont mises en mouvement vertical au niveau de l'ouverture de la cavité en raison d'ondes stationnaires dans la cavité de pulsation  $\omega$ , liées à la présence d'un mode acoustique de profondeur. Ces particules traversent alors le plan de l'ouverture  $x_3 = 0$  à la vitesse acoustique verticale  $u_M$ , ce qui génère un déplacement de l'interface  $\xi_a$  s'écrivant en notation complexe :

$$\xi_a = \frac{u_M}{i\omega} \exp(i\omega t)$$

Le déplacement local de l'interface s'accompagne de la convection de la déviation ainsi générée. Cette déviation se déplace vers le bord aval en s'amplifiant. Le déplacement de l'interface  $\xi_v$  dû au passage de cette déviation s'écrit :

$$\xi_v = A \chi(x_2) \exp\left(\int_{-R}^{x_1} k_i(x) dx\right) \exp(i(\omega t - k_r x_1))$$

La partie réelle  $k_r$  du nombre d'onde complexe  $k$ , relative à la convection de la déviation, vaut  $k_r = \omega/u_c$ , avec  $u_c$  la vitesse de convection de la déviation. La partie imaginaire  $k_i$  de  $k$ , relative à l'amplification associée, peut être estimée en fonction de la pulsation  $\omega$  par la théorie de la stabilité linéaire des écoulements cisailés de Michalke [160]. La quantité  $A$  est une constante à déterminer. Le déplacement total  $\xi$  peut être calculé par :

$$\xi(x_1, x_2, t) = \frac{u_M}{i\omega} \exp(i\omega t) + A \chi(x_2) \exp\left(\int_{-R}^{x_1} k_i(x) dx\right) \exp(i(\omega t - k_r x_1))$$

On s'intéresse dans la suite au déplacement de l'interface dans le plan  $x_2 = 0$ , en prenant  $\chi(x_2) = 1$ . La valeur de  $A$  est déterminée en remarquant que le point d'inflexion est à l'altitude  $x_3 = 0$  au coin amont, soit :

$$\xi(-R, t) = 0$$

ce qui donne :

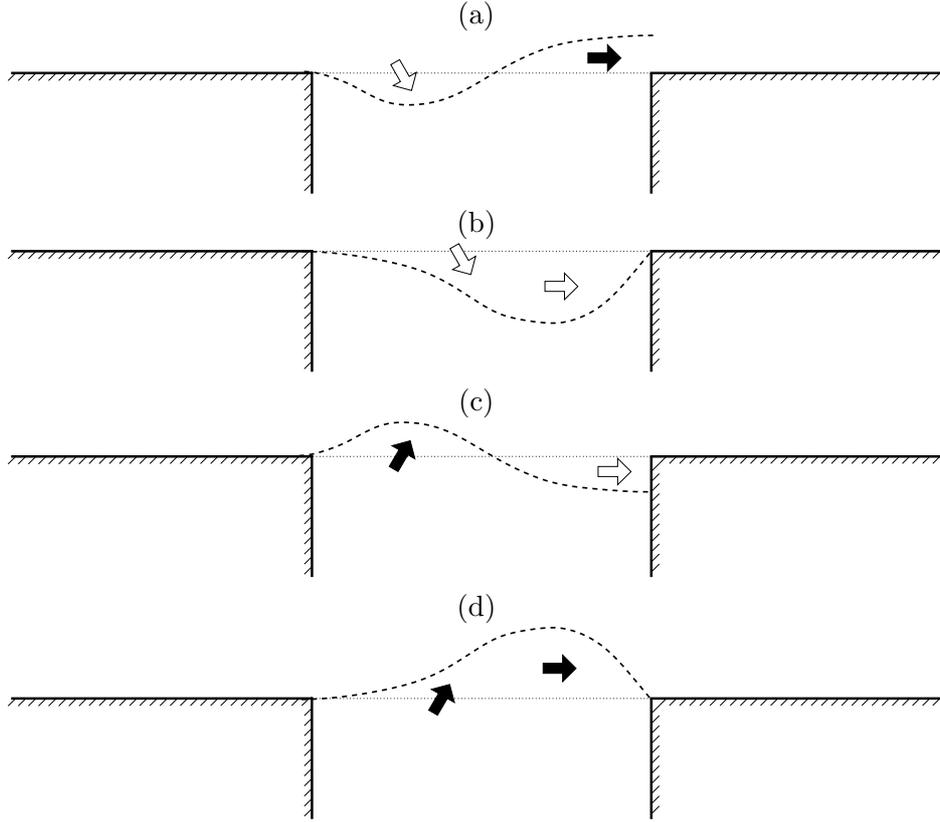
$$\xi(x_1, t) = \frac{u_M}{i\omega} \exp(i\omega t) \left(1 - \exp\left(\int_{-R}^{x_1} k_i(x) dx\right) \exp(-ik_r(x_1 + R))\right) \quad (3.1)$$

Il s'agit là de l'équation du déplacement du point d'inflexion. Elle n'est réellement valable que proche du bord amont en raison de la non-prise en compte d'effets non-linéaires susceptibles d'intervenir lors de la convection de la déviation à l'ouverture de la cavité.

### 3.1.2 Estimation du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité

Une détermination exacte du débit de fluide à l'ouverture de la cavité nécessite de disposer d'une base de données détaillée pour pouvoir procéder à une intégration précise du champ de vitesse dans le plan  $x_3 = 0$ . Elder propose une autre méthode d'estimation, fondée sur l'observation du comportement de l'interface au cours d'une période acoustique, comme le représente la figure 3.1.

Elder explique que, lorsque l'interface redescend vers l'intérieur de la cavité et rencontre exactement le coin aval (on parle de fermeture au coin aval), le débit aérodynamique de fluide noté  $q_+$  entrant dans la cavité est maximal (figure 3.1(b)). Ce débit peut être estimé par continuité en calculant le débit de fluide traversant la surface verticale entre l'ouverture de la cavité ( $x_3 = 0$ ) et le maximum de déplacement de l'interface  $\xi_M$ , qui a lieu à la position longitudinale  $x_M$  (figure 3.2(a)).



**Fig. 3.1:** Comportement de l'interface pendant une période acoustique, d'après Elder [71]. (a) Un quart de période avant la fermeture au coin aval. Le maximum de déplacement vers l'extérieur est atteint en  $x_1 = R$ . Le flux net aérodynamique de fluide dans la cavité est nul. (b) Fermeture au coin aval. Le flux entrant dans la cavité est maximal. (c) Un quart de période après la fermeture au coin aval. Le flux net de fluide sortant de la cavité est nul. (d) Une demie période après la fermeture au coin aval. Le flux net de fluide sortant de la cavité est maximal. Les flèches blanches représentent un débit entrant de fluide, et les flèches noires un débit sortant.

En effet, à cet instant, le fluide est entré dans la cavité proche du bord amont, mais ne s'est pas encore échappé proche du bord aval, puisqu'il est en train de convecter la déviation vers le bord aval, à la vitesse moyenne  $\bar{u}_+$ .

La dimension transverse de la surface d'intégration du flux  $q_+$  est délicate à estimer, si l'on veut s'affranchir du déphasage transversal potentiel du déplacement de l'interface, et conserver l'aspect 1-D de la modélisation. On choisit dans la suite de l'approximer par la dimension transverse de la cavité à la position longitudinale du maximum de déplacement de l'interface, que l'on note  $L_2^M$ , et qui vaut  $L_2^M = 2\sqrt{R^2 - x_M^2}$ . On peut donc estimer le débit entrant par :

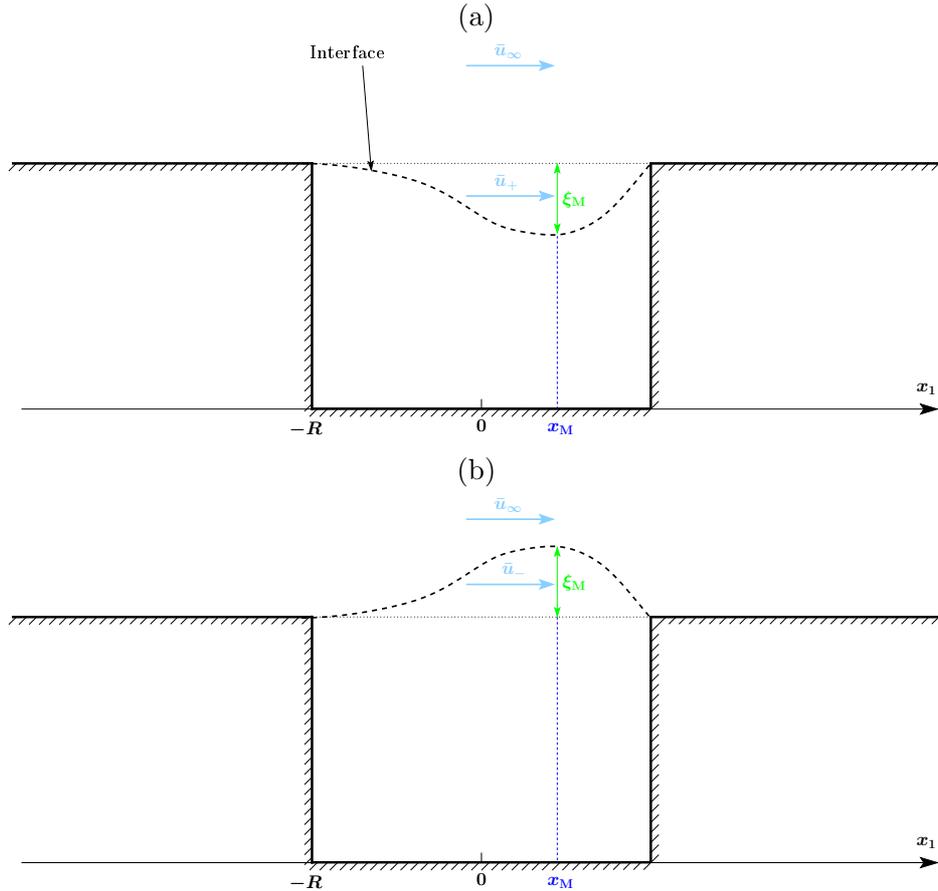
$$q_+ = L_2^M \bar{u}_+ \xi_M$$

De la même manière, une demie-période plus tard, le déplacement est maximal au-dessus de l'ouverture (figures 3.1(d) et 3.2(b)), et le flux sortant  $q_-$  peut être approximé par :

$$q_- = L_2^M \bar{u}_- \xi_M$$

Ainsi, le débit aérodynamique de fluide dans la cavité peut être estimé par la relation :

$$q_J = L_2^M \xi_M \frac{\bar{u}_+ + \bar{u}_-}{2} = L_2^M \xi_M u_0$$



**Fig. 3.2:** Illustration de l'estimation du débit aérodynamique de fluide (a) entrant dans la cavité. (b) sortant de la cavité.

où  $u_0$  est la vitesse moyenne longitudinale à l'altitude  $x_3 = 0$ , au niveau de l'ouverture de la cavité. L'évaluation du débit aérodynamique nécessite finalement de connaître le maximum de déplacement de l'interface  $\xi_M$ .

### 3.1.3 Estimation du maximum de déplacement de l'interface

L'évaluation du maximum de déplacement de l'interface  $\xi_M$  est une étape assez délicate. En effet, l'expression (3.1), qui correspond à un modèle linéaire d'amplification et de convection, n'est valable que proche du bord amont. Cependant, quand la déviation est convectée, celle-ci voit un déplacement acoustique effectif variant avec la position longitudinale  $x_1$ . Une modélisation lagrangienne permet de quantifier l'amplitude du déplacement acoustique effectif, après une convection de la déviation sur jusqu'à la position longitudinale  $x_1$ , en suivant une particule de fluide convectée à la vitesse  $u_0$ . Le déplacement acoustique effectif  $\xi_{a,\text{eff}}$  est donné par :

$$\xi_{a,\text{eff}} = \int_0^{(x_1+R)/u_0} \frac{u_M}{i\omega} \exp(i\omega t) dt = \frac{u_M}{\omega^2} \left( 1 - \exp(i\omega(x_1 + R)/u_0) \right)$$

Dans l'expression ci-dessus, le bord amont est repéré par la position longitudinale  $-R$ . Si le temps de convection à travers l'ouverture de la cavité est comparable à la période acoustique, ou s'il est multiple de celle-ci, alors ce terme décroît progressivement proche du bord aval et sa contribution sur le déplacement total y est alors très réduite, ce que remarque Elder pour son cas. En tenant compte de ses observations, et en notant que l'amplification de la déviation

est effective uniquement sur le premier rayon longitudinal lors sa convection et sature dans la seconde partie de l'ouverture de la cavité en raison d'effets non-linéaires, le déplacement total peut être évalué proche du bord aval par :

$$\xi(x_1, t) = \frac{u_M}{\omega} \exp\left(\int_{-R}^R k_i(x) dx\right) \exp(i(\omega t - k_r(x_1 + R) + \pi/2)) \quad (3.2)$$

En basculant en notation réelle, le déplacement proche du bord aval s'écrit :

$$\xi(x_1, t) = \frac{u_M}{\omega} \exp\left(\int_{-R}^R k_i(x) dx\right) \sin(k_r(x_1 + R) - \omega t)$$

Le maximum de déplacement (positif ou négatif) est donc atteint à l'instant  $t_M$  et à la position longitudinale  $x_M$  vérifiant :

$$k_r(x_M + R) - \omega t_M = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

À ce même instant  $t_M$ , le déplacement de l'interface est supposé nul au bord aval (fermeture au coin aval, voir les figures 3.1 et 3.2), ce qui impose que :

$$k_r D - \omega t_M = \pi + n\pi \quad (3.4)$$

En combinant les équations (3.3) et (3.4), on obtient :

$$k_r(x_M + R) = k_r D - \frac{\pi}{2}$$

soit :

$$x_M + R = D - \frac{\lambda_v}{4} \quad (3.5)$$

Finalement, le maximum de déplacement de l'interface est approximé par :

$$\xi_M = \frac{u_M}{\omega} \exp\left(\int_{-R}^R k_i(x) dx\right) \exp(i(\omega t - (k_r D - \pi)))$$

### 3.1.4 Estimation du débit acoustique à l'ouverture de la cavité

Théoriquement, le débit acoustique  $q_M$  à l'ouverture de la cavité est évalué par :

$$q_M = \int_0^R u_M \exp(i\omega t) 2\pi r dr = \pi u_M R^2 \exp(i\omega t)$$

Cependant, pour rester cohérent avec la largeur de la fenêtre d'intégration utilisée lors de l'estimation du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité, on choisit de considérer comme surface d'intégration non pas le disque de l'ouverture, mais plutôt le rectangle de longueur  $D$  et de largeur  $L_2^M$ . Le flux acoustique est donc approximé par :

$$q_M = u_M D L_2^M \exp(i\omega t)$$

### 3.1.5 Fonction de transfert amont FTF

La fonction de transfert amont (FTF) permet d'évaluer la conversion du débit acoustique en un débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité, et quantifie ainsi le processus d'excitation de la couche de cisaillement par un mode acoustique de profondeur. Elle se calcule

par la relation :

$$\text{FTF}(\omega) = \frac{q_J}{q_M}$$

Elle s'écrit explicitement :

$$\text{FTF}(\omega) = \frac{u_0}{D\omega} \exp\left(\int_{-R}^R k_i(x) dx\right) \exp(-i(k_r D - \pi))$$

## 3.2 Mode acoustique de profondeur entretenu (fonction BTF)

On modélise dans cette partie la conversion des fluctuations de l'interface en fluctuations correspondant à un mode acoustique de profondeur. On considère que le débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité voit celle-ci comme un circuit résonant parallèle [71], dont la pression acoustique produite  $p_M$  vaut :

$$p_M = \frac{Z_M Z_C}{Z_M + Z_C} q_J$$

où  $Z_M$  est l'impédance acoustique de l'ouverture de la cavité, caractérisée par un vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur, et  $Z_C$  l'impédance de la cavité, vue depuis l'ouverture. À l'ouverture de la cavité, cette pression acoustique produit le flux acoustique  $q_M$  :

$$q_M = -\frac{p_M}{Z_M}$$

Le signe négatif provient de la convention selon laquelle le flux entrant dans la cavité est repéré positivement. On obtient finalement :

$$q_M = -\frac{Z_C}{Z_M + Z_C} q_J$$

### 3.2.1 Estimation de l'impédance acoustique de la cavité

L'impédance acoustique de la cavité, vue depuis l'ouverture, peut être évaluée à partir de la théorie des tuyaux d'orgue de Cremer & Ising [55], en supposant que la célérité du son vaille  $c_\infty$  dans la cavité et en négligeant les effets de compressibilité :

$$Z_C(\omega) = \frac{\rho_\infty c_\infty}{\pi R^2} (\alpha_0 D - i \cotan k_a D)$$

où  $k_a$  est le nombre d'onde acoustique, valant  $k_a = \omega/c_\infty$ , et  $\alpha_0$  le coefficient d'atténuation acoustique par unité de longueur dans un tuyau. Il est estimé par la relation [71] :

$$\alpha_0 = 2.76 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{\omega R^2}{2\pi}}$$

Dans la suite, on néglige l'atténuation acoustique dans le tuyau, car son effet est vraiment minime sur le domaine fréquentiel considéré. L'impédance acoustique de la cavité s'écrit finalement :

$$Z_C(\omega) = -i \frac{\rho_\infty c_\infty}{\pi R^2} \cotan \frac{\omega D}{c_\infty}$$

### 3.2.2 Estimation de l'impédance acoustique de l'ouverture de la cavité

L'impédance acoustique de l'ouverture de la cavité, vue depuis l'intérieur, est estimée grâce à la relation suivante, en négligeant le terme de résistance non-linéaire, petit devant le terme de résistance linéaire pour des cavités ayant un rapport d'aspect  $D/H$  proche de 1 [71] :

$$Z_M(\omega) = \frac{\rho_\infty c_\infty}{\pi R^2} \left( \frac{1}{2} (k_a R)^2 + i k_a H' \right)$$

### 3.2.3 Fonction de transfert aval BTF

La fonction de transfert aval (BTF) peut être explicitée par :

$$\text{BTF}(\omega) = \frac{q_M}{q_J} = -\frac{Z_C}{Z_M + Z_C} = \frac{i \cotan \frac{\omega D}{c_\infty}}{\frac{1}{2} \left( \frac{\omega R}{c_\infty} \right)^2 + i \left( \frac{\omega H'}{c_\infty} - \cotan \frac{\omega D}{c_\infty} \right)}$$

## 3.3 Prédiction des pulsations auto-entretenues

Les pulsations des oscillations harmoniques susceptibles d'être auto-entretenues par le couplage entre un mode acoustique de profondeur et la couche de cisaillement, sont les pulsations vérifiant la condition complexe :

$$\text{FTF}(\omega) \times \text{BTF}(\omega) = 1$$

Ce système peut être réécrit :

$$\begin{cases} |\text{FTF} \times \text{BTF}|(\omega) = 1 \\ \arg(\text{FTF})(\omega) = \arg(1/\text{BTF}(\omega)) = -\arg(\text{BTF})(\omega) \end{cases} \quad (3.6)$$

En pratique, il paraît illusoire d'espérer vérifier les deux conditions simultanément, notamment en raison des nombreuses approximations réalisées pour estimer l'amplitude de la fonction de transfert amont FTF. Le membre de gauche dans la première équation du système (3.6) renseigne sur le comportement en amplitude du système (amplification ( $> 1$ ), auto-entretien ( $= 1$ ), ou amortissement ( $< 1$ )) aux excitations de pulsation  $\omega$ , tandis que la seconde équation renseigne sur la pulsation des oscillations potentiellement auto-entretenues. On choisit donc de ne conserver que la seconde équation du système (3.6) pour déterminer les fréquences auto-entretenues par le système résonant.

## 3.4 Application aux cavités cylindriques étudiées

### 3.4.1 Détermination semi-empirique des paramètres du modèle

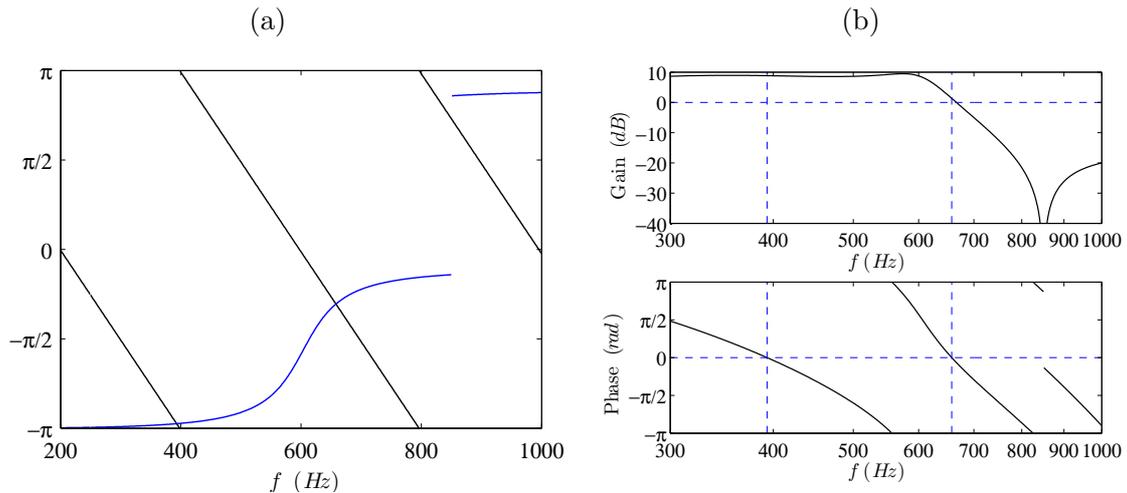
Le modèle précédent est semi-empirique. En effet, certains paramètres nécessitent des mesures expérimentales pour pouvoir être évalués. Il s'agit par exemple de la vitesse moyenne  $u_0$  sur l'axe  $x_3 = 0$  et du nombre d'onde aérodynamique  $k_r$  fonction de la vitesse de convection  $u_c$ , qui peuvent être estimés à partir de la connaissance du champ de vitesse longitudinale à l'ouverture de la cavité. Ce champ de vitesse permet également de calculer l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_{\theta_2}$  en fonction de la position longitudinale, paramètre nécessaire dans les tables de Michalke pour évaluer l'amplification locale  $-k_i$  en fonction de la pulsation. Enfin des mesures de pression pariétale sont nécessaires pour estimer la vitesse acoustique des particules de fluide  $u_M$ .

Le cas de référence peut ainsi être traité en détail, à partir du champ de vitesse PIV disponible pour  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$  et des mesures de pression pariétale disponibles. La vitesse moyenne  $u_0$  est mesurée à  $u_0 = 25 \text{ m/s}$ , tandis que la vitesse de convection  $u_c$  est estimée par  $u_c/u_\infty = 0.55$ . Les variations longitudinales de l'épaisseur de quantité de mouvement sont disponibles à la figure 2.15. La vitesse acoustique des particules de fluide  $u_M$  est estimée à  $2.5 \text{ m/s}$  à partir des enregistrements de pression pariétale au fond de la cavité.

Pour les autres configurations, des extrapolations linéaires de pente  $u_\infty/70$  sont effectuées sur la valeur de  $u_0$ ,  $u_c$  et sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_{\theta_2}$  à partir des résultats de mesure obtenus pour la configuration de référence. On suppose que la vitesse  $u_M$  ne varie que faiblement en fonction du rapport d'aspect de la cavité considérée et de la vitesse de l'écoulement affleurant.

### 3.4.2 Résultats pour la configuration de référence

La figure 3.3 présente les résultats obtenus pour la configuration de référence :  $D/H = 1$  et  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ . La figure 3.3(a) montre les courbes représentatives de l'argument de la fonction de transfert amont et de l'inverse de la fonction de transfert aval, en fonction de la fréquence  $f$  de l'excitation. Sur le domaine fréquentiel considéré,  $f \in [200, 1000] \text{ Hz}$ , ces courbes s'intersectent deux fois. La première intersection a lieu en  $f = 393 \text{ Hz}$  et la seconde en  $f = 658 \text{ Hz}$ . Se sont donc les seules fréquences susceptibles d'être auto-entretenues, puisqu'elles vérifient la seconde équation du système (3.6). La figure 3.3(b) représente le diagramme de



**Fig. 3.3:** (a) Courbe représentative de l'argument de la fonction de transfert amont (FTF), représentée par —, et de l'inverse de la fonction de transfert aval  $\text{BTF}^{-1}$ , représentée par —. (b) Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\text{FTF} \times \text{BTF}$ . Les positions  $f = 393 \text{ Hz}$  et  $f = 658 \text{ Hz}$  sont repérées par les lignes bleues verticales.

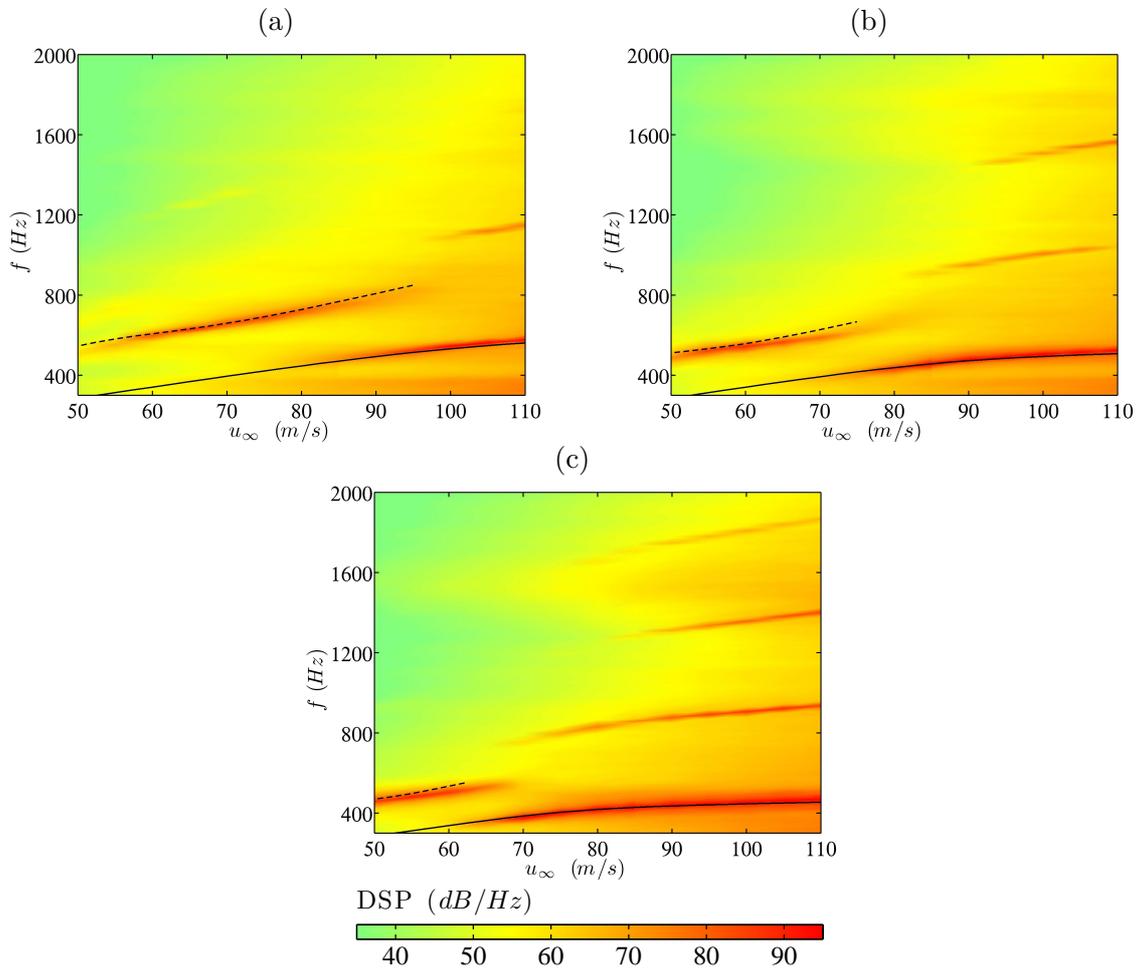
Bode de la fonction de transfert  $\text{FTF} \times \text{BTF}$  du système. On retrouve sur le diagramme des phases les deux fréquences précédentes assurant la nullité de la phase de la fonction de transfert. Le diagramme du gain confirme que sous les diverses approximations réalisées pour estimer la fonction de transfert amont du système, il n'est pas envisageable de retrouver un gain nul aux fréquences auto-entretenues.

Ces fréquences vérifient approximativement la relation  $k_r D = 2\pi M - \pi/2$ , obtenue par Elder quand les fréquences auto-entretenues coïncident avec les fréquences de résonance naturelle de la cavité, où l'entier  $M$  correspond au nombre de larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche cisailée. La fréquence  $f = 393 \text{ Hz}$  correspond donc au mode I auto-entretenu par couplage entre le premier mode de profondeur et le premier mode de la couche de cisaillement, et la fréquence  $f = 658 \text{ Hz}$  au mode II auto-entretenu par couplage entre le premier mode de profondeur et le second mode de la couche de cisaillement. Le modèle

suggère ainsi que le pic à  $f = 656 \text{ Hz}$  mesuré dans le spectre acoustique de la cavité en champ lointain provient d'un couplage entre le premier mode de résonance acoustique dans profondeur et le second mode de la couche de cisaillement. Il suggère également que le pic observé à  $395 \text{ Hz}$  dans les densités spectrales de puissance au niveau de la paroi latérale de la cavité (figure 2.20(a) à (d)) ou dans la fonction de cohérence entre la pression fluctuante au coin amont et celle au coin aval (figure 2.22), provient de la présence du mode I dans la couche de cisaillement.

### 3.4.3 Résultats pour les autres configurations

Les résultats obtenus par le modèle d'Elder pour les autres configurations étudiées sont synthétisés aux figures 3.4(a) à (c) pour une profondeur de cavité de 100, 125 et 150  $\text{mm}$  respectivement. Ces figures proposent une comparaison avec les spectres acoustiques obtenus expérimentalement en champ lointain. Le modèle offre de très bonnes estimations des



**Fig. 3.4:** Estimations des fréquences des deux premiers modes par le modèle d'Elder en fonction de la vitesse de l'écoulement, superposées aux spectres acoustiques mesurés à 1  $\text{m}$  au-dessus de la cavité. — : mode I, --- : mode II. (a)  $H = 100 \text{ mm}$ . (b)  $125 \text{ mm}$ . (c)  $H = 150 \text{ mm}$ .

fréquences des modes I et II en fonction de la vitesse, pour les trois profondeurs de cavité considérées. Le mode I est particulièrement bien prédit par le modèle, qui réussit à capturer également la concavité de la courbe représentative du pic en fonction de la vitesse. L'estimation du mode II est également satisfaisante, sauf pour les vitesses où ce mode est moins dominant, où le modèle tend à surévaluer la fréquence du pic.

### 3.5 Approximation des fréquences des modes I et II

Le but de la partie qui suit est de proposer une expression simple approximant les fréquences des modes I et II en fonction de la vitesse de l'écoulement et du rapport d'aspect  $D/H$  de la cavité. Les approximations formulées sont valables pour des vitesses comprises entre 50 et 110  $m/s$ , et pour des rapports d'aspect  $D/H$  compris entre 0.67 et 1.

Les cavités considérées étant relativement profondes, on cherche une approximation de la fréquence du mode I à partir de l'expression de la fréquence de résonance naturelle du premier mode de profondeur non corrigée  $f = c_\infty/(4H)$ , que l'on module par un terme correctif dépendant du nombre de Mach et/ou du rapport d'aspect  $D/H$ . Si l'on trace les courbes représentatives de la fonction  $\text{Ma} \mapsto 4Hf_I/c_\infty \text{Ma}$  pour tous les rapports d'aspect  $D/H$  testés, on obtient des droites relativement parallèles. On ajoute donc un nouveau terme  $-0.125(1 - D/H)$ , corrigeant l'ordonnée à l'origine, ce qui permet d'obtenir des droites presque confondues. Une approximation de la fréquence  $f_I$  du mode I peut donc être obtenue en considérant la fonction  $\mathcal{F}_I$  définie par :

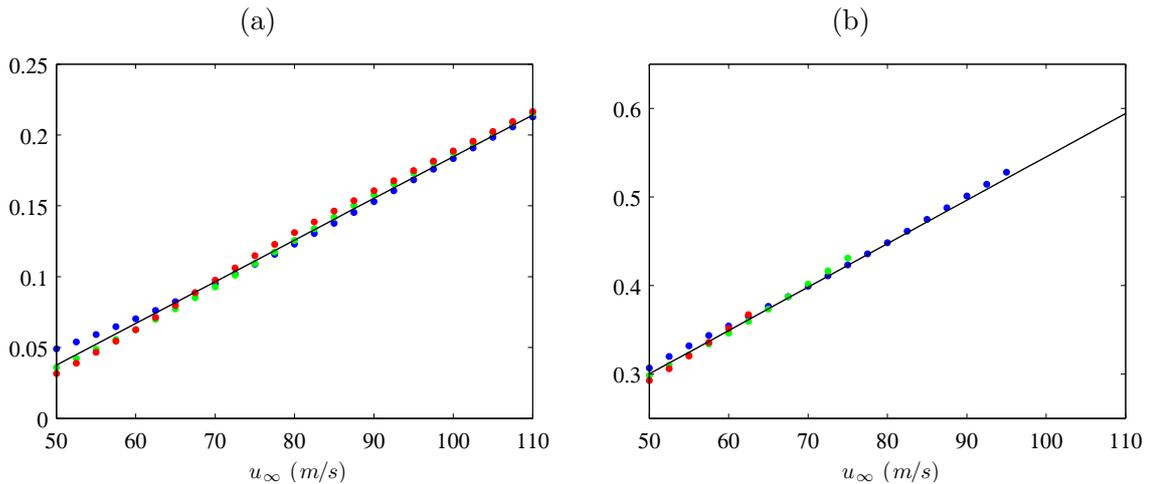
$$\mathcal{F}_I(\text{Ma}, D/H) = \frac{4Hf_I(\text{Ma}, D/H)}{c_\infty} \text{Ma} - 0.1250 \left(1 - \frac{D}{H}\right)$$

La figure 3.5(a) illustre son comportement presque linéaire en fonction du nombre de Mach, et sa faible sensibilité à la valeur du rapport d'aspect  $D/H$ . On choisit d'approximer cette fonction indépendamment de la valeur du rapport d'aspect de la cavité à l'aide d'une régression linéaire, par :

$$\mathcal{F}_I(\text{Ma}, D/H) \simeq 1.0001 \text{Ma} - 0.1095$$

Cette approximation est représentée sur la figure 3.5(a) en noir. On obtient à partir de cette approximation, une approximation de la fréquence  $f_I$  :

$$f_I \simeq \frac{c_\infty}{4H} \frac{1}{\text{Ma}} \left( \text{Ma} + \frac{1 - 8D/H}{64} \right)$$



**Fig. 3.5:** (a) Valeurs de la fonction  $\mathcal{F}_I$  fournies par le modèle d'Elder pour des vitesses comprises entre 50 et 110  $m/s$  par pas de 5  $m/s$ , et pour différents rapports d'aspect de la cavité. La fonction approximante est représentée par — . (b) Valeurs de la fonction  $\mathcal{F}_{II}$  fournies par le modèle d'Elder pour des vitesses comprises entre 50 et 110  $m/s$  par pas de 5  $m/s$ , et pour différents rapports d'aspect de la cavité. La fonction approximante est représentée par — . • :  $D/H = 1$ . • :  $D/H = 0.8$ . • :  $D/H = 0.67$ .

La même technique peut être utilisée pour approximer la fréquence  $f_{II}$  relative au mode II.

Cependant, les courbes obtenues avec une fonction de type  $\mathcal{F}_I$ , en remplaçant la fréquence  $f_I$  dans son expression par celle du mode II, ne sont plus presque linéaires en fonction du nombre de Mach, mais présentent une nette convexité ou concavité, en fonction du rapport d'aspect  $D/H$ . Une approximation précise par une régression linéaire en fonction du nombre de Mach n'est donc plus possible. En revanche, on observe que l'ajout d'une puissance 1/2 à la fonction  $\mathcal{F}_I$  permet de réduire assez fortement cette convexité/concavité. On considère ainsi la fonction  $\mathcal{F}_{II}$  définie par :

$$\mathcal{F}_{II}(\text{Ma}, D/H) = \sqrt{\frac{4H f_{II}(\text{Ma}, D/H)}{c_\infty}} \text{Ma} - 0.1667 \left(1 - \frac{D}{H}\right)$$

La figure 3.5(b) présente sur un graphique la valeurs de cette fonction pour différentes vitesses et pour différentes valeurs du rapport d'aspect  $D/H$ . La fonction  $\mathcal{F}_{II}$  évolue quasi-linéairement en fonction de la vitesse et semble peu dépendante du rapport d'aspect de la cavité, ce qui suggère une approximation linéaire indépendamment de  $D/H$ . On obtient :

$$\mathcal{F}_{II}(\text{Ma}, D/H) \simeq 1.6670 \text{Ma} + 0.0550$$

Comme le montre sa courbe représentative en noir sur la figure 3.5(b), cette approximation sousestime volontairement la fréquence du mode II lorsque celui-ci devient moins prépondérant, afin de compenser la surestimation fournie par le modèle d'Elder dans cette zone par rapports aux résultats expérimentaux. On obtient à partir de cette approximation, une estimation de la fréquence  $f_{II}$  :

$$f_{II} \simeq \frac{c_\infty}{4H} \frac{1}{9 \text{Ma}} \left(5 \text{Ma} + \frac{4 - 3 D/H}{6}\right)^2$$

### 3.6 Conclusion

Le modèle proposé par Elder, adapté ici au cas d'une cavité cylindrique sans fente rectangulaire à son ouverture, est fondé sur l'hypothèse d'un couplage entre un mode de résonance acoustique dans la cavité et la couche de cisaillement, assurant de ce fait la présence de perturbations auto-entretenues dans la couche cisillée. En effet, les ondes stationnaires correspondant à un mode acoustique de profondeur sont supposées perturber à l'amont la couche cisillée qui se déstabilise, et qui entraîne proche du bord aval un flux/reflux de fluide qui excite le mode acoustique de profondeur. On montre, par un formalisme de fonctions de transfert amont et aval, que ce phénomène ne peut exister qu'à des fréquences discrètes, marquant fortement la couche de cisaillement et qui peuvent également marquer le rayonnement acoustique. Une comparaison aux mesures acoustiques en champ lointain montre que les fréquences ainsi estimées par le modèle sont en bon accord avec les fréquences dominant le rayonnement acoustique de la cavité. Le modèle est capable de retrouver fidèlement la présence de deux modes acoustiques, notés I et II, correspondant à la présence d'une ou de deux larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement.

Toutefois, le modèle fait intervenir un certain nombre de paramètres qui nécessitent la donnée du champ de vitesse à l'ouverture de la cavité, pour pouvoir être évalués. Aussi, quelques hypothèses faites en vue d'estimer la fonction de transfert amont (FTF) mériteraient d'être vérifiées en détail, notamment la manière dont est estimé le débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité, ce que ne permet pas les données expérimentales disponibles. Une étude numérique peut donc apporter des éléments de validation du modèle, en donnant accès à des quantités difficilement mesurables expérimentalement, comme la vitesse de convection des perturbations dans la couche de cisaillement ou le flux aérodynamique de fluide à l'ouverture.



## Chapitre 4

# Développement d'un code de simulation avec recouvrement de maillages

---

Le calcul direct du bruit rayonné par un écoulement consiste à calculer le champ acoustique directement à partir de la résolution des équations de la mécanique des fluides instationnaires écrites pour un fluide compressible. On suppose dans toute la suite qu'il n'y a ni sources de chaleur, ni sources de masse et de forces massiques s'exerçant sur le fluide. Après une formulation tensorielle des équations, ce chapitre présente l'approche numérique LES (*Large Eddy Simulation*) retenue dans ce travail. La discrétisation de la cavité cylindrique par recouvrement de maillages structurés est ensuite brièvement présentée. Puis, les équations de Navier–Stokes sont explicitées en 2–D et 3–D sous forme conservative pour des paramétrages cartésien et cylindrique. Enfin, on présente les méthodes numériques utilisées pour le traitement des points intérieurs et pour les points aux frontières, qui nécessitent des algorithmes spécifiques.

### 4.1 Équations de Navier–Stokes pour un fluide compressible

Les équations à résoudre sont l'équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1)$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

l'équation de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e_t \mathbf{u}) = -\operatorname{div}(p \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \quad (4.3)$$

où les inconnues sont  $\mathbf{u}$  la vitesse eulérienne d'une particule fluide,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $p$  la pression, et  $e_t$  l'énergie totale par unité de masse. La quantité  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses, et  $\mathbf{q}$  représente le flux de chaleur. Le système formé par les équations

(4.1), (4.2) et (4.3) sont les équations de Navier–Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e_t \mathbf{u}) = -\operatorname{div}(p \mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

### Fermeture des équations de Navier–Stokes

L'énergie totale peut se décomposer en une énergie interne  $e_i$  et une énergie cinétique :

$$e_t = e_i + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne par unité de masse  $e_i$  est donnée par :

$$\rho e_i = \frac{p}{\gamma - 1}$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma = c_p/c_v$ ), avec  $c_p$  la chaleur massique spécifique à pression constante et  $c_v$  la chaleur massique spécifique à volume constant. Le système d'équations (4.4) est donc fermé, pour un gaz parfait, par l'équation :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 \quad (4.5)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  est donné pour un fluide newtonien sous l'hypothèse de Stokes par :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \operatorname{grad} \mathbf{u} + {}^t \operatorname{grad} \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \quad (4.6)$$

et le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\lambda_{\text{th}} \operatorname{grad} T \quad (4.7)$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique moléculaire,  $T$  la température, et  $\lambda_{\text{th}}$  la conductivité thermique du fluide.  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité. La viscosité dynamique et la conductivité thermique sont fonctions de la température. Pour les problèmes traités, et en considérant l'air comme gaz de référence, on observe usuellement que le nombre de Prandtl  $\operatorname{Pr}$  représentant le rapport entre la diffusivité de mouvement et la diffusivité thermique, reste voisin de 0.72, ce qui permet d'écrire [10] :

$$\lambda_{\text{th}}(T) = \frac{c_p \mu(T)}{\operatorname{Pr}}$$

Une relation explicite entre la conductivité thermique  $\lambda_{\text{th}}$  et la température  $T$  peut être obtenue à l'aide de la loi de Sutherland, qui modélise la dépendance de la viscosité dynamique  $\mu$  à la température  $T$  [228]. On obtient :

$$\lambda_{\text{th}} = \frac{c_p \mu_{\infty}}{\operatorname{Pr}} \left( \frac{T}{T_{\infty}} \right)^{3/2} \frac{T_{\infty} + S_{\text{gaz}}}{T + S_{\text{gaz}}}$$

où  $S_{\text{gaz}}$  est la température de Sutherland du gaz considéré. Les variables indicées par  $\infty$  sont

des variables de référence. Cette relation permet une bonne approximation de la conductivité thermique pour une large plage de température, typiquement  $T \in [50 \text{ K}, 1000 \text{ K}]$  pour l'air. La viscosité dynamique de référence est donnée pour un gaz parfait par :

$$\mu_\infty = \frac{\nu_\infty M_{\text{gaz}} p_\infty}{R_g T_\infty}$$

avec  $R_g = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante des gaz parfaits,  $\nu_\infty$  la viscosité cinématique de référence, et  $M_{\text{gaz}}$  la masse molaire du gaz parfait considéré. Le tableau 4.1 résume les valeurs des différentes variables thermophysiques de référence pour l'air. La masse volumique de référence est estimée grâce à la relation  $\rho_\infty = M_{\text{gaz}} p_\infty / (R_g T_\infty)$ . La vitesse du son est donnée par  $c_\infty = \sqrt{\gamma R_g T_\infty / M_{\text{gaz}}}$ .

$T_\infty$	298.15 K
$p_\infty$	101325 Pa
$\nu_\infty$	$1.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$S_{\text{air}}$	119.40 K
$M_{\text{air}}$	$28.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
$\rho_{\text{air}}$	$1.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\mu_\infty$	$1.77 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
$c_\infty$	$346.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Pr	0.72
$\gamma$	1.4

Tab. 4.1: Valeurs des variables thermophysiques de référence pour l'air.

## 4.2 Approches numériques du calcul direct du bruit

Il existe plusieurs approches pour résoudre numériquement les équations de Navier–Stokes. La partie qui suit explore d'abord les principales stratégies rencontrées en CAA. La résolution des équations de Navier–Stokes par Simulation des Grandes Échelles (LES) est ensuite détaillée.

### 4.2.1 Les différentes approches

Cette partie détaille quatre stratégies de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides compressibles instationnaires.

#### 4.2.1.1 Simulation Numérique Directe (DNS)

Une première stratégie est la Simulation Numérique Directe (DNS – *Direct Numerical Simulation*). La DNS consiste à résoudre les équations de Navier–Stokes avec la plus grande précision possible. On ambitionne donc de calculer toutes les échelles constituant le spectre de l'énergie cinétique turbulente. La plage à couvrir s'étend des plus grandes échelles des tourbillons, typiquement l'échelle intégrale  $L_f$ , porteurs de l'énergie cinétique turbulente, jusqu'aux plus fines structures tourbillonnaires, qui dissipent l'énergie cinétique turbulente, et qui sont de la taille de l'échelle de Kolmogorov  $l_\eta$ . Dans le cadre d'une simulation, le nombre de points de maillage  $N_{1-D}$  dans une direction de l'espace est proportionnel au rapport  $L_f/l_\eta$  :

$$N_{1-D} \propto \frac{L_f}{l_\eta}$$

Pour une turbulence homogène isotrope, on a, d'après [6] :

$$\frac{L_f}{l_\eta} \propto \frac{L_f}{\nu_\infty^{3/4} \epsilon^{-1/4}} \simeq \frac{L_f}{\nu_\infty^{3/4} \left( \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^3 / L_f \right)^{-1/4}} = \text{Re}_{L_f}^{3/4}$$

où  $\epsilon$  est le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, et  $\text{Re}_{L_f}$  le nombre de Reynolds fondé sur l'échelle intégrale, qui a pour expression :  $\text{Re}_{L_f} = \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\| L_f / \nu_\infty$ . Ainsi, le nombre de points  $N_{3-D}$  nécessaire pour une simulation complète en 3-D est typiquement proportionnel à  $N_{1-D}^3$ , et vérifie donc :

$$N_{3-D} \propto \text{Re}_{L_f}^{9/4}$$

On constate que la DNS est envisageable à bas Reynolds car le nombre de points requis reste modéré. Ainsi Mitchell *et al.* ont pu calculer dans [163] et [164] le bruit rayonné par un jet axisymétrique pour un nombre de Reynolds de  $5.0 \times 10^3$ . Freund *et al.* ont simulé des jets 3-D présentant respectivement un Mach de 0.9 et un Reynolds de  $3.6 \times 10^3$  dans [88], et un nombre de Mach de 1.92 et un nombre de Reynolds de  $2.0 \times 10^3$  dans [89]. Plus récemment, Boersma a calculé le champ acoustique rayonné par un jet à faible nombre de Mach et à Reynolds  $5.0 \times 10^3$  [21]. Cependant, même si la puissance informatique ne cesse de croître, il faut garder à l'esprit que la plupart des écoulements industriels sont hors d'atteinte par la DNS, car à haut Reynolds, le calcul devient prohibitif en terme de moyens de calcul (mémoire, temps de calcul), typiquement au-delà d'un Reynolds de  $10^4$ . Les nombres de Reynolds des simulations numériques que l'on projette de faire sont largement supérieurs à cette valeur, et donc la simulation de l'écoulement seul par DNS sera déjà problématique. Cette difficulté est même amplifiée par le fait que l'on doit rajouter un nombre non négligeable de points par la suite pour mailler la partie supérieure de la cavité afin de récupérer le champ acoustique.

#### 4.2.1.2 Simulation des Grandes Échelles (LES)

Pour pouvoir accéder à des nombres de Reynolds plus élevés, la Simulation des Grandes Échelles (LES – *Large Eddy Simulation*) se propose de ne calculer directement que les grandes échelles de l'écoulement. Pour un pas de maillage donné, il existe intrinsèquement une échelle  $\Delta$  (typiquement la moyenne géométrique des discrétisations dans les trois directions de l'espace) en-deçà de laquelle les structures turbulentes ne sont pas discrétisées (structures dites de sous-maille). Les grandes échelles sont donc isolées par le maillage qui agit comme un filtre spatial. L'approche LES nécessite alors la modélisation de l'influence des échelles non résolues (de taille inférieure à  $\Delta$ ). Cela présuppose donc que l'écoulement est essentiellement caractérisé par les grandes échelles et que les plus fines structures ont a priori un comportement se rapprochant de l'isotropie. Un modèle de sous-maille est introduit pour simuler le comportement principalement dissipatif des petites structures tourbillonnaires non-résolues.

En terme de coût de calcul, on montre que si l'on souhaite avoir un modèle de sous-maille purement dissipatif, il convient de mailler jusqu'à l'échelle de Taylor  $\lambda_g$  [22]. le nombre de points de maillage  $N_{1-D}$  dans une direction de l'espace est proportionnel au rapport  $L_f / \lambda_g$ , et on montre que [6] :

$$N_{1-D} \propto \frac{L_f}{\lambda_g} \simeq \text{Re}_{L_f}^{1/2}$$

Ainsi, le nombre de points  $N_{3-D}$  nécessaire pour une simulation complète en 3-D est proportionnel à  $N_{1-D}^3$ , et vérifie :

$$N_{3-D} \propto \text{Re}_{L_f}^{3/2}$$

L'équation précédente montre que la LES est moins coûteuse que la DNS. La limitation imposée au nombre de Reynolds par le nombre de points pouvant être traités informatiquement est aussi moins contraignante, mais reste cependant présente.

#### 4.2.1.3 Équations de Navier–Stokes Moyennées (RANS)

L'approche RANS (*Reynolds Average Navier–Stokes Simulation*) consiste à ne calculer que les valeurs moyennées en temps des différentes variables, de manière analogue à ce que l'on obtient expérimentalement à partir d'une analyse statistique des résultats. Les variables sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante (décomposition de Reynolds). On prend ensuite la moyenne temporelle des équations de Navier–Stokes. Le moyennage des termes non-linéaires fait apparaître des termes supplémentaires qui nécessitent une modélisation, afin de fermer le système d'équations. L'un des modèles le plus employés dans l'industrie reste le modèle  $k - \epsilon$ , qui introduit deux nouvelles équations : une équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une équation pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\epsilon$ . Les simulations RANS sont moins coûteuses numériquement que les simulations LES, mais ce gain se fait au prix d'une réduction des informations disponibles à partir de la simulation, et d'une précision moindre. L'approche RANS reste cependant très pratique pour fournir les champs moyens d'un écoulement, mais elle n'est généralement pas adaptée au calcul direct des fluctuations acoustiques.

#### 4.2.1.4 Approches hybrides (DES)

Ces approches couplent la stratégie RANS et la LES. L'approche hybride type DES (*Detached Eddy Simulation*) permet de calculer la solution près de parois ou lorsque les échelles de la turbulence sont plus petites que la taille maximale de maille via une approche RANS, et utilise l'approche LES dans les autres régions où les échelles de la turbulence sont plus grandes que la taille d'une maille [60]. La résolution par DES ne requiert pas un maillage de résolution aussi fin qu'en LES pure, notamment près de parois, ce qui réduit les coûts de calcul [40]. Cependant le basculement RANS/LES impose un soin particulier dans la construction et la gestion du maillage. L'approche DES suscite actuellement un intérêt certain, et elle est implémentée dans divers codes, comme le code ELSA développé par l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), en collaboration avec le Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS). Grottadaurea & Rona ont par ailleurs publié des résultats numériques obtenus par DES sur le bruit rayonné par des cavités cylindriques de rapport d'aspect 0.713 et 2.5, excitées par un écoulement affleurant à Mach 0.235 [103].

### 4.2.2 Équations de Navier–Stokes filtrées pour la LES

L'approche LES présentée précédemment est la stratégie retenue dans toute la suite pour résoudre numériquement les équations de Navier–Stokes. On détaille ici son fonctionnement.

#### 4.2.2.1 Notion de filtrage LES

Le choix d'un maillage présentant une taille caractéristique de maille  $\Delta$  plus grande que certaines échelles de la turbulence agit comme un filtre spatial passe-bas, qui sépare les échelles que l'on résout explicitement de celles qui doivent être modélisées. En notant  $\mathcal{D}$  le domaine de calcul et  $\mathbf{x}$  un point de ce domaine, une grandeur filtrée  $\bar{f}$  peut s'écrire en fonction de la variable non-filtrée  $f$  par un produit de convolution dans l'espace physique [141] :

$$\bar{f} = G_{\Delta} * f \quad , \quad \text{soit} \quad \bar{f}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} G_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.8)$$

avec  $G_\Delta$  le noyau du filtre normalisé. On remarque que ce filtrage n'est a priori pas idempotent, puisque dans le cas général, on a  $\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}$ . On observe toutefois que les dérivées temporelles et spatiales commutent avec l'opérateur de filtrage, sous réserve que le filtre soit homogène. Le choix du noyau  $G_\Delta$  est une étape importante dans la mise en œuvre de la LES. Divers noyaux sont proposés par Sagaut dans [200] ou Lund dans [149].

On introduit dans toute la suite la notion de filtrage de Favre. Une grandeur  $f$  peut être filtrée au sens de Favre, notée  $\tilde{f}$ , à partir du filtrage précédent par [81] :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

soit :

$$\bar{\rho} \tilde{f} = G_\Delta * (\rho f)$$

Il s'agit donc du même filtrage que précédemment, où les grandeurs sont pondérées par la masse volumique. Il est possible de définir pour une grandeur  $f$  une décomposition au sens de Favre, en une partie filtrée  $\tilde{f}$  et résolue par le calcul, et en une partie non-résolue, notée  $f''$ . On a alors :  $f = \tilde{f} + f''$ .

#### 4.2.2.2 Équations filtrées

On choisit de résoudre numériquement le système (4.4) en variables conservatives (et donc de les filtrer avec le filtre de la LES) : la masse volumique  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{u}$  et l'énergie totale  $\rho e_t$ . On exprime les autres variables à l'aide de ces variables résolues. On définit les variables  $\hat{p}$  et  $\hat{T}$ , respectivement la pression et la température construites à partir des variables résolues, grâce à une formulation analogue à l'équation (4.5) ou à l'équation des gaz parfaits :

$$\hat{p} = (\gamma - 1) \left( \bar{\rho} \tilde{e}_t - \frac{1}{2} \bar{\rho} \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 \right) \quad \text{et} \quad \hat{T} = \frac{M_{\text{air}} \hat{p}}{R \bar{\rho}}$$

- L'équation de conservation de la masse filtrée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0$$

- L'équation de conservation de quantité de mouvement filtrée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\text{grad} \hat{p} + \text{div} \bar{\boldsymbol{\tau}} - \text{grad} (\bar{p} - \hat{p})$$

Le tenseur visqueux filtré vaut :  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\mu(\mathbf{grad} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{grad} \mathbf{u} - 2/3 (\text{div} \mathbf{u}) \mathbf{I})}$ .

Dans toute la suite on note  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  le tenseur visqueux calculé uniquement à partir de grandeurs résolues :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = 2\hat{\mu} \hat{\mathbf{s}} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad} \tilde{\mathbf{u}} + {}^t \mathbf{grad} \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2}{3} (\text{div} \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right) \quad \text{et} \quad \hat{\mu} = \mu(\hat{T})$$

Comme le font remarquer Erlebacher *et al.* dans [75], le vecteur  $\text{div}(\bar{\boldsymbol{\tau}} - \hat{\boldsymbol{\tau}})$  est souvent négligeable. Il devient donc commode d'approximer la divergence des flux visqueux filtrée par la divergence des flux visqueux calculés uniquement à l'aide des grandeurs explicitement résolues.

Le tenseur de Reynolds de l'équation de conservation de la quantité de mouvement filtrée

peut être réécrit à l'aide d'une décomposition de Favre :

$$\widetilde{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{u}} \otimes \widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{T}_{\text{sgs}}$$

où  $\mathbf{T}_{\text{sgs}}$  est le tenseur des échelles de sous-maille. Il contient les effets des échelles non-résolues et ne peut être déduit uniquement des champs résolus. Ce tenseur doit donc être modélisé.

Une approche classique consiste à ne retenir que le terme  $\widetilde{\mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''}$ .

Enfin, le terme en  $\mathbf{grad}(\bar{p} - \hat{p})$  est négligé. En effet, pour des écoulements subsoniques, l'énergie cinétique de sous-maille  $1/2 \bar{\rho} \|\mathbf{u}''\|^2$ , ainsi que les termes croisés sont dominés par l'énergie cinétique filtrée [75]. Finalement, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement filtrée peut s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{div}(\bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}} \otimes \widetilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{grad} \hat{p} - \mathbf{div} \hat{\boldsymbol{\tau}} = -\mathbf{div}(\bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''})$$

- L'équation de conservation de l'énergie totale filtrée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{e}_t}{\partial t} + \mathbf{div}(\bar{\rho} \widetilde{e}_t \widetilde{\mathbf{u}}) = -\mathbf{div}(\widetilde{p} \widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{q}} - \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{div}(\underbrace{-\bar{\rho} \widetilde{e}_t \widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \widetilde{e}_t' \widetilde{\mathbf{u}}}_{\mathbf{V}_a} + \overline{p \mathbf{u}''} - \underbrace{\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}} + \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}}}_{\mathbf{V}_b}) - \mathbf{div}(\widetilde{p} \widetilde{\mathbf{u}} - \hat{p} \widetilde{\mathbf{u}})$$

Le vecteur  $\mathbf{V}_a$  peut être formellement décomposé en trois parties :

$$\mathbf{V}_a = \underbrace{-\bar{\rho} \widetilde{e}_t' \widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \widetilde{e}_t \widetilde{\mathbf{u}}}_{\mathbf{L}_a} - \underbrace{\bar{\rho} \widetilde{e}_t' \widetilde{\mathbf{u}}'' - \bar{\rho} \widetilde{e}_t'' \widetilde{\mathbf{u}}}_{\mathbf{C}_a} - \underbrace{\bar{\rho} \widetilde{e}_t'' \widetilde{\mathbf{u}}''}_{\mathbf{R}_a}$$

On peut montrer que le vecteur de Léonard  $\mathbf{L}_a$  ainsi que le vecteur des termes croisés  $\mathbf{C}_a$  peuvent être négligés. Il ne reste donc plus que le terme  $\mathbf{R}_a$  qu'il convient de modéliser. Le vecteur  $\mathbf{V}_b$  peut être négligé, comme le font remarquer Bailly & Comte-Bellot dans [6]. Finalement, l'équation de conservation de l'énergie totale filtrée peut être réduite à :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{e}_t}{\partial t} + \mathbf{div}(\bar{\rho} \widetilde{e}_t \widetilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{div}(\hat{p} \widetilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{q}} - \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}}) = -\mathbf{div}(\bar{\rho} \widetilde{e}_t'' \widetilde{\mathbf{u}}'' + \overline{p \mathbf{u}''})$$

avec  $\hat{\mathbf{q}}$  le flux de chaleur résolu, défini par :  $\hat{\mathbf{q}} = -\hat{\lambda}_{\text{th}} \mathbf{grad} \hat{T}$ , avec  $\hat{\lambda}_{\text{th}} = \lambda_{\text{th}}(\hat{T})$ , en supposant que l'on puisse négliger le terme en  $\mathbf{div}(\bar{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}})$  et en négligeant le terme de droite  $-\mathbf{div}(\widetilde{p} \widetilde{\mathbf{u}} - \hat{p} \widetilde{\mathbf{u}})$ .

### 4.2.2.3 Modélisation des termes de sous-maille

Il existe de nombreuses modélisations des termes de sous-maille. On ne présente ici que les approches les plus souvent rencontrées.

Une première méthode pour prendre en compte les effets des échelles de sous-maille est d'introduire **une viscosité dynamique turbulente**  $\mu_t$ , construite à partir d'une analyse dimensionnelle faisant intervenir une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement. Il existe une myriade de modèles, qui se différencient dans l'évaluation de la longueur ou la vitesse caractéristique. Ces modèles reposent pour la plupart sur l'hypothèse de Boussinesq, en reliant le tenseur de sous-maille au tenseur des déformations résolues  $\hat{\mathbf{s}}$  à l'aide de la viscosité turbulente. Pour un écoulement subsonique, on pose :

$$-\bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''} = 2\mu_t \hat{\mathbf{s}}$$

L'une des fermetures les plus populaires est celle proposée par Smagorinsky, qui écrit [216] :

$$\mu_t = \bar{\rho} (C_S \Delta)^2 (2\hat{\mathbf{s}} : \hat{\mathbf{s}})^{1/2}$$

où  $C_S$  est la constante de Smagorinsky. Cette constante peut être estimée si l'on suppose que le nombre d'onde de coupure du filtre ( $\pi/\Delta$ ) se situe dans la partie inertielle du spectre de la turbulence. Ainsi, la viscosité turbulente introduite doit dissiper l'énergie transférée du champ résolu (les grosses structures) vers le champ non résolu. Ceci implique que  $C_S = 0.18$  pour une turbulence homogène isotrope et un spectre simplifié. De récents développements à partir de ce modèle et une discussion plus complète sont proposés par Meyers & Sagaut dans [159]. Le modèle de Smagorinsky, dans sa forme présentée ici, a l'avantage d'être très simple à mettre en œuvre, mais présuppose une dissipation turbulente dès que des gradients de vitesse sont non nuls, ce qui n'est pas toujours le cas. L'équation de conservation de la quantité de mouvement filtrée s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{grad} \hat{p} - \mathbf{div} \left( 1 + \frac{\mu_t}{\hat{\mu}} \right) \hat{\boldsymbol{\tau}} = 0$$

Celle-ci a par conséquent la même expression que l'équation de conservation de la quantité de mouvement non-filtrée, avec un fluide présentant une viscosité  $\hat{\mu} + \mu_t$  au lieu d'une viscosité  $\hat{\mu}$ . Ce modèle augmente artificiellement la viscosité réelle du fluide sur toutes les échelles du calcul, ce qui a des conséquences néfastes lors du calcul direct de bruit rayonné par des structures ou un jet [10].

En ce qui concerne la fermeture de l'équation de conservation de l'énergie filtrée, un calcul montre, en réutilisant le modèle de sous-maille, que :

$$-\bar{\rho} \widetilde{e_t'' \mathbf{u}''} - \overline{p \mathbf{u}''} = -\bar{\rho} c_p \widetilde{T'' \mathbf{u}''} - 2 \mu_t \hat{\mathbf{s}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

Une fermeture en gradient est généralement utilisée [6], comme pour les modèles de turbulence :

$$-\bar{\rho} c_p \widetilde{T'' \mathbf{u}''} = \lambda_t \mathbf{grad} \hat{T}$$

où  $\lambda_t$  est la conductivité thermique turbulente. L'équation de la conservation de l'énergie filtrée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}_t}{\partial t} + \mathbf{div}(\bar{\rho} \tilde{e}_t \tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{div} \left( \hat{p} \tilde{\mathbf{u}} + \left( 1 + \frac{\lambda_t}{\hat{\lambda}_{th}} \right) \hat{\mathbf{q}} - \left( 1 + \frac{\mu_t}{\hat{\mu}} \right) \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) = 0$$

Celle-ci est par conséquent la même que l'équation de conservation de l'énergie non-filtrée, avec un fluide présentant une viscosité  $\hat{\mu} + \mu_t$  au lieu d'une viscosité  $\hat{\mu}$ , et une conductivité  $\hat{\lambda}_{th} + \lambda_t$  au lieu d'une viscosité  $\hat{\lambda}_{th}$ . La fermeture de cette équation reste un problème ouvert [6]. Il peut être toutefois possible d'estimer dynamiquement la conductivité turbulente mais ces modèles s'avèrent extrêmement coûteux numériquement [75].

Il existe d'autres méthodes de fermeture, comme la méthode de Bardina *et al.* [9], qui modélisent le tenseur de sous-maille sans avoir recours à une viscosité turbulente, mais plutôt en supposant l'invariance entre les plus grandes échelles de sous-maille et les plus petites échelles résolues. Un panorama plus complet des méthodes de fermeture est proposé par Sagaut dans [200].

Une autre technique pour dissiper l'énergie cinétique turbulente comme le feraient les fines structures non-résolues, consiste à utiliser la dissipation numérique des schémas de discrétisation, ce que l'on appelle de **la LES implicite**. En effet, il est possible d'exploiter le fait que la dissipation issue de modèles de discrétisation puissent agir comme un modèle de sous-maille ou une viscosité numérique, en considérant que cette dissipation artificielle convienne pour modéliser la dissipation due aux échelles non-résolues. La LES implicite ne nécessite donc aucun calcul de tenseur de sous-maille. Il est à noter toutefois que la LES implicite requiert l'utilisation de méthodes de discrétisation spécialement construites, optimisées et validées pour calculer proprement les solutions des équations que l'on se propose de résoudre, sous peine

d'être trop dissipative et d'affecter le nombre de Reynolds effectif de l'écoulement [65].

Il peut être aussi envisagé de reconstruire les grandeurs non filtrées à partir des grandeurs filtrées, en inversant la relation de convolution de l'équation (4.8), ce que l'on appelle **la méthode de déconvolution**. L'opération de déconvolution du filtrage  $G_\Delta^{-1}$  se formule théoriquement par [226] :

$$G_\Delta^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (I - G_\Delta)^j$$

où  $I$  est l'opérateur identité.  $G_\Delta^{-1}$  peut alors être déterminé par approximation polynomiale, comme le rappellent Hickel & Adams dans [112], en ne conservant dans la somme que les 5 ou 6 premiers termes. Cette approche a l'avantage de ne pas introduire de modélisation physique. Le filtrage inverse ne peut cependant pas être réalisé exactement [111], et la déconvolution revient à appliquer un filtre très sélectif, comme le montrent Mathew *et al.* dans [157].

La prise en compte des effets des échelles non-résolues par la LES peut également être assurée par **un filtrage sélectif explicite d'ordre élevé**, comme ceux développés au LMFA par Bogey & Bailly [23, 24, 25]. Ce filtrage passe-bas sert à dissiper le flux d'énergie transféré depuis les grandes échelles vers les petites échelles non-résolues. La dissipation utilisée est très sélective, et par construction, elle ne modifie que marginalement les grandes échelles calculées. Cela permet de préserver le nombre de Reynolds effectif, ce qui est un point clé pour une simulation de qualité du calcul direct du bruit rayonné par une structure. Cette méthode est enfin très avantageuse numériquement puisqu'elle présente un surcoût de calcul tout-à-fait dérisoire. Le recours à un filtrage sélectif paraît donc préférable à celui d'un modèle de fermeture via une viscosité turbulente, ou à une approche implicite, puisqu'il n'est pas tributaire d'une modélisation physique, et que l'on contrôle explicitement la dissipation du filtrage, ainsi que le nombre d'onde de coupure du filtrage. À noter que la LES avec filtrage sélectif explicite est menée avec succès dans de nombreuses configurations, notamment pour le bruit de jet [22, 23, 24], ou pour le bruit rayonné par une cavité rectangulaire placée dans un écoulement [97, 99]. On utilise cette méthode dans ce travail.

Les équations filtrées à résoudre peuvent finalement s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_v = \mathbf{K}_f \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des variables conservatives résolues :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\rho} \tilde{e}_t \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Les quantités  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{K}_v$  sont respectivement les flux eulériens et les flux visqueux, qui ont pour expression :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \text{div}(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) \\ \text{div}(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \text{grad} \hat{p} \\ \text{div}(\bar{\rho} \tilde{e}_t \tilde{\mathbf{u}}) + \text{div}(\hat{p} \tilde{\mathbf{u}}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{div} \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \text{div}(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Le terme  $\mathbf{K}_f$  dans l'équation (4.9) est le terme de filtrage modélisant les effets des échelles non-résolues, qui sera explicité dans la suite. À ce terme de filtrage près, le système d'équations (4.9) est identique aux équations de Navier–Stokes non-filtrées (4.4), où l'on a remplacé les inconnues  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{u}$  et  $\rho e_t$  par les variables filtrées  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\rho} \tilde{e}_t$ . Dans un souci de lisibilité, on ne précisera plus dans la suite que les inconnues sont des variables filtrées. Par conséquent, on allège les notations ne faisant plus apparaître le symbole de filtrage  $\bar{\cdot}$  et  $\tilde{\cdot}$  pour les variables filtrées et le symbole  $\hat{\cdot}$  pour les autres variables construites à partir des variables résolues.

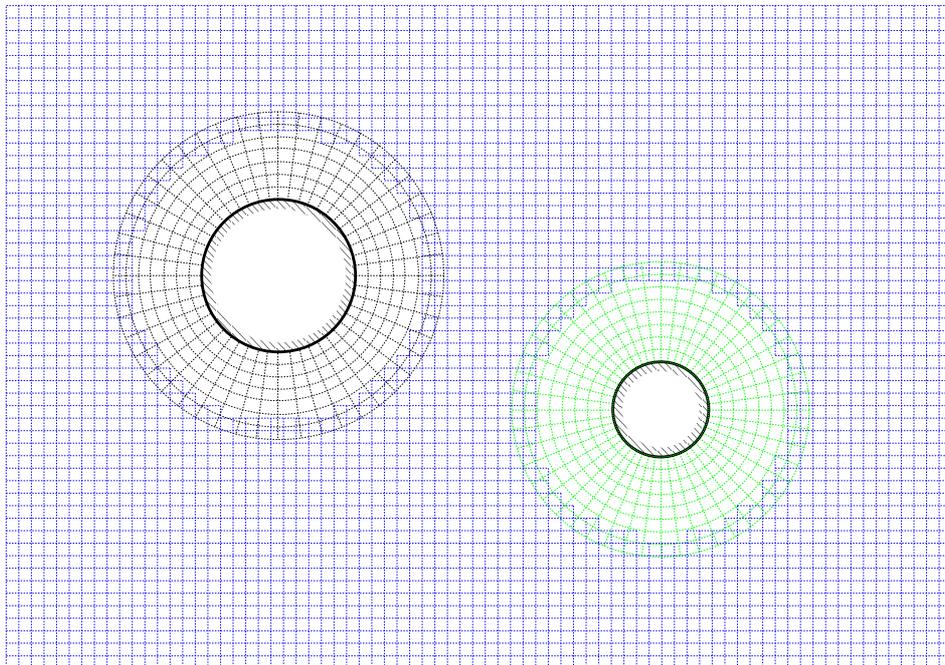
### 4.3 Discrétisation du domaine de calcul par recouvrement de maillages

De nombreux problèmes aéroacoustiques, comme le bruit de bord de fuite, ou le bruit de cavité, impliquent des profils et des géométries souvent complexes. En CFD, ce genre de situation est traité à l'aide de maillages non-structurés sur lesquels les calculs sont menés par des méthodes de type volumes finis. Ces méthodes, qui sont généralement d'ordre un ou deux, s'avèrent d'une précision insuffisante pour une utilisation adaptée à la CAA [229].

Le recours à un unique maillage structuré dont les lignes de maillage ne se superposent pas avec les parois de la géométrie étudiée peut être envisagé pour traiter les géométries complexes. Cette technique nécessite alors la mise en œuvre d'une méthode permettant le traitement numérique aux frontières non-confondues avec des lignes de maillage, comme par exemple les méthodes des frontières immergées (*Immersed boundary methods*) [134, 178]. Cependant, l'opération reste généralement délicate, en raison des instabilités engendrées par les techniques d'extrapolation mises en jeu, et s'avère souvent peu précise.

#### 4.3.1 Méthode de recouvrement de maillages

Une autre technique consiste en la décomposition du domaine de calcul en un système de maillages élémentaires structurés, sur lesquels se feront la résolution des équations, et qui communiquent entre eux dans leurs zones de superposition. C'est la méthode de recouvrement de maillages (*Overlapping grid method*). La décomposition du maillage composite [156] est construite de telle sorte que la paroi de l'objet étudié est représentée par une ligne de maillage d'un ou plusieurs maillages élémentaires, comme le montre la figure 4.1.



**Fig. 4.1:** Exemple de discrétisation d'un espace libre en présence de deux cylindres par recouvrement de trois maillages élémentaires 2-D. Le maillage composite est constitué d'un maillage élémentaire cartésien (en bleu) et deux maillages élémentaires polaires (en noir et en vert). La paroi de chaque cylindre est représentée par une ligne d'un des maillages polaires.

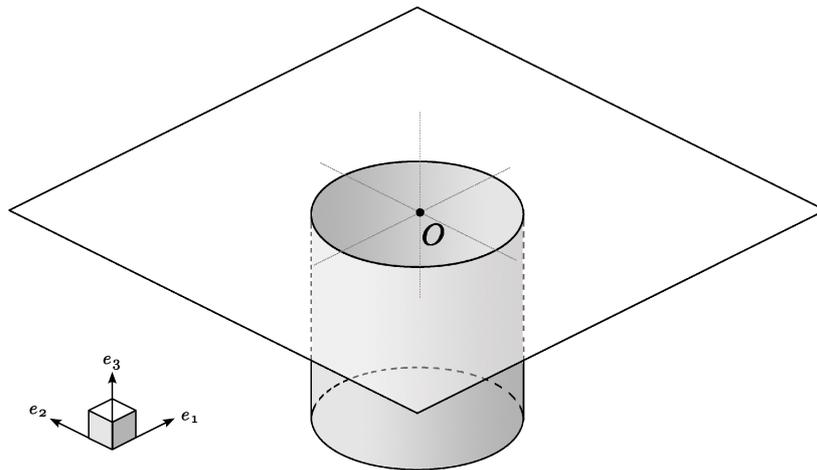
Cette approche, qui rend accessible les géométries complexes à l'aide de maillages structurés, offre certains avantages : le recours à des maillages structurés topologiquement très simples permet l'utilisation de méthodes numériques précises et éprouvées pour les points intérieurs,

ainsi que l'utilisation de conditions aux limites robustes pour les points près des frontières [185]. Cette technique, introduite sous le nom de méthode chimère (*Chimera method*) par Benek *et al.* [11, 12], et parfois reprise sous l'appellation d'approche multi-domaines [73, 74], a suscité un intérêt certain ces trente dernières années dans la littérature [42, 61, 63, 185, 211, 230]. De récents travaux ont montré qu'il était possible de mener des simulations de phénomènes acoustiques sur des recouvrements de maillages avec une grande fidélité aux mesures expérimentales. Marsden *et al.* ont par exemple recours au recouvrement de maillages afin de simuler la diffraction acoustique de deux cylindres de diamètres différents [155]. Citons aussi Lummer *et al.*, qui étudient numériquement, à l'aide d'une méthode chimère, la génération de bruit par des tourbillons s'écoulant le long de bords de fuite de profils d'aile [147].

Il existe divers codes pour construire des recouvrements de maillages et gérer automatiquement les algorithmes de communication entre les maillages élémentaires. Le code le plus répandu est probablement PEGASUS 5, développé par la National Aeronautics and Space Administration (NASA) en `fortran90`, et optimisé pour minimiser le nombre de paramètres que doit définir l'utilisateur. La routine OGEN du code OVERTURE, code développé en `C++` par Henshaw [42] au Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), permet également une construction assistée de recouvrements de maillages et une gestion simplifiée des algorithmes de communication. Le code SUGGAR, développé par Noack [170], explore enfin les possibilités de recouvrements de maillages structurés avec des maillages non-structurés, et montre les efforts actuels au développement de grilles hybrides [207].

### 4.3.2 Maillage composite d'une cavité cylindrique

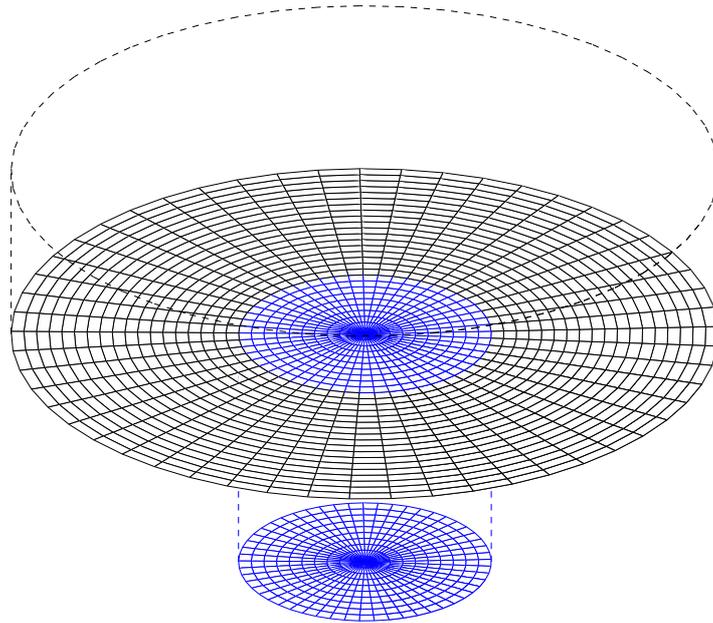
Dans cette partie, on expose succinctement le type de maillage composite retenu pour l'étude numérique du bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité cylindrique. Une vue générale de la cavité cylindrique étudiée est donnée par la figure 4.2. La géométrie se décompose en une cavité ronde aux parois rigides et une plaque supérieure plane et rigide à l'origine des altitudes.



**Fig. 4.2:** Vue générale d'une cavité cylindrique.

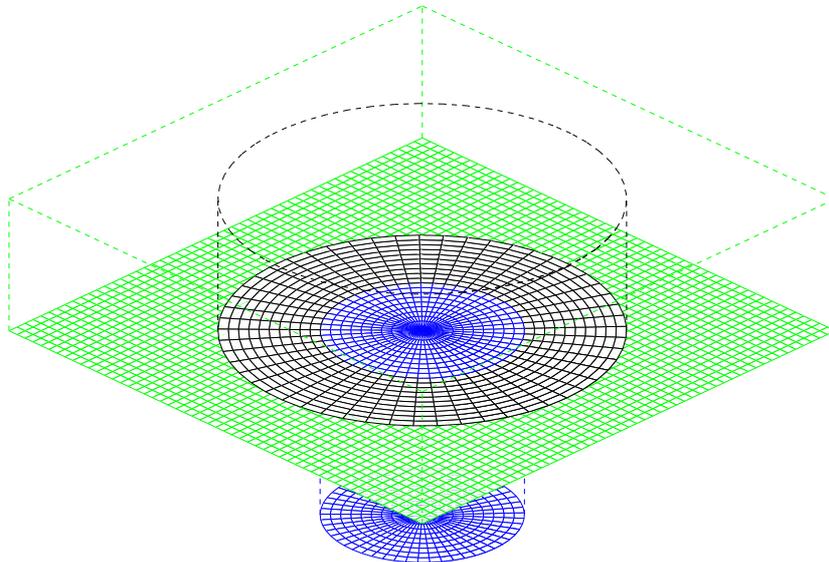
Il est possible de mailler l'ensemble de la géométrie à l'aide d'un unique maillage structuré. Il s'agit par exemple d'un maillage cylindrique qui permet d'avoir des points de maillage exactement sur la paroi de la cavité ronde, dont l'axe coïncide avec celui de la cavité, et qui est extrudé jusqu'au haut de la cavité. Il est alors étendu radialement pour recouvrir la totalité de la plaque plane supérieure, comme le montre la figure 4.3, et extrudé jusqu'à une altitude donnée. Ce choix n'est toutefois pas recommandé. En effet, de manière intrinsèque aux coordonnées cylindriques, les mailles deviennent très grandes loin de l'axe dans la direction azimutale. Cette sousdiscrétisation notamment en amont de la cavité peut être

particulièrement néfaste pour une bonne implémentation de la couche limite incidente.



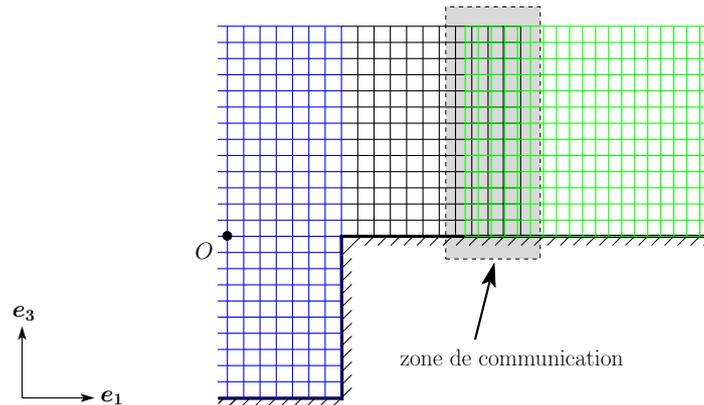
**Fig. 4.3:** Maillage de la cavité cylindrique à l'aide d'un unique maillage cylindrique.

Il est donc à envisager d'avoir recours à un recouvrement de maillage dans les zones où la discrétisation azimutale n'est plus assez fine, en basculant vers un maillage cartésien conservant le degré de raffinement du maillage cylindrique d'origine, comme le montre la figure 4.4. Ce



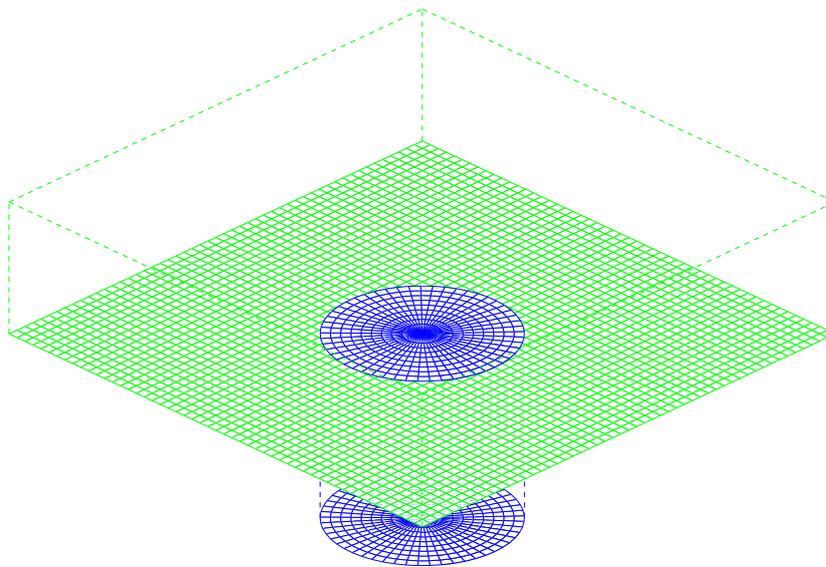
**Fig. 4.4:** Maillage composite de la cavité cylindrique, à l'aide d'un maillage cylindrique dans la cavité (en bleu), et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur (en vert), lorsque la discrétisation azimutale de l'extension du maillage cylindrique de cœur (en noir) n'est plus assez fine. Les zones de superposition ne sont pas représentées pour plus de lisibilité.

recouvrement impose alors une communication entre le maillage cylindrique de la cavité et le maillage cartésien du demi-espace supérieur dans la couche limite, comme le montre la figure 4.5, où les gradients de vitesse peuvent être particulièrement grands. C'est une situation très contraignante en pratique, notamment dans le cas d'une couche limite incidente turbulente, puisque l'algorithme de communication doit alors être capable de supporter un spectre large bande.



**Fig. 4.5:** Vue de coupe dans le plan  $(O, e_1, e_3)$  du maillage composite de la cavité cylindrique, à l'aide d'un maillage cylindrique dans la cavité (en bleu), et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur (en vert), lorsque la discrétisation azimutale de l'extension du maillage cylindrique de cœur (en noir) n'est plus assez fine. : zone de communication (superposition) dans la couche limite de l'écoulement.

Une autre technique consiste à ne pas étendre le maillage cylindrique au haut de la cavité, et de basculer directement vers un maillage cartésien pour l'ensemble du demi-espace supérieur. Le maillage composite résultant peut être visualisée sur la figure 4.6. Cette technique permet

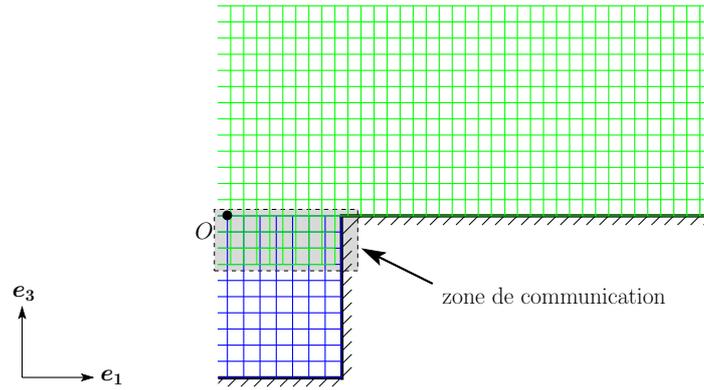


**Fig. 4.6:** Maillage composite de la cavité cylindrique, à l'aide d'un maillage cylindrique dans la cavité, et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur dès la lèvre de la cavité. Les zones de superposition ne sont pas représentées pour plus de lisibilité.

d'éviter une communication entre les deux maillages élémentaires directement dans la couche limite de l'écoulement. Le maillage cartésien supérieur s'enfonce légèrement dans la cavité, ce qui permet d'établir une zone de communication plutôt dans la lèvre<sup>1</sup> de la cavité, qui est une zone où les gradients devraient être plus faibles que dans la couche limite. On choisit ce type de maillage composite dans la suite.

Les maillages élémentaires choisis sont donc restreints dans ce travail à des maillages cartésiens ou cylindriques, même si d'autres types de maillages peuvent être considérés, comme les maillages sphériques ou les maillages curvilignes [154]. La mise en œuvre de la méthode de recouvrement nécessite dès lors une formulation des équations de Navier–Stokes (4.9) en coordonnées cartésiennes et cylindriques 3–D, qui sont détaillées dans la partie suivante. Les

<sup>1</sup>Partie supérieure de la cavité située au niveau l'ouverture vers le demi-espace supérieur.

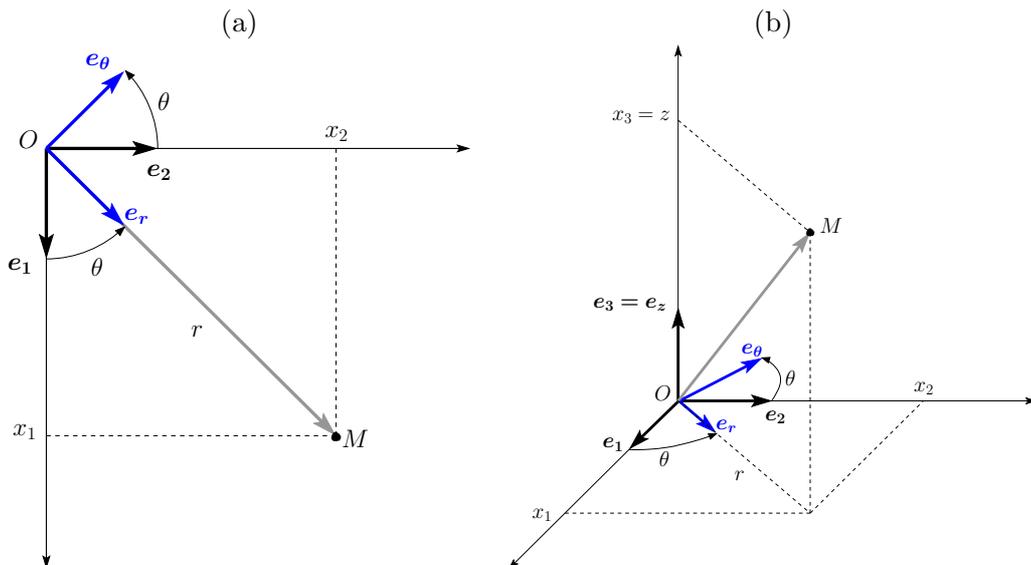


**Fig. 4.7:** Vue de coupe dans la plan  $(O, e_1, e_3)$  du maillage composite de la cavité cylindrique, à l'aide d'un maillage cylindrique dans la cavité (en bleu), et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur dès la lèvre de la cavité (en vert) : zone de communication (superposition) dans la lèvre de la cavité.

algorithmes de communication entre les différentes entités du recouvrement de maillages seront explorés en détail dans le chapitre 5, et seront testées sur des configurations 1-D et 2-D.

#### 4.4 Flux eulériens et visqueux en 2-D et 3-D

Le calcul direct du bruit rayonné par un écoulement sur un recouvrement de maillages nécessite la résolution sur chaque maillage élémentaire des équations de Navier–Stokes. Deux versions du code ont été développées. Une première version 2-D permet essentiellement la mise au point des méthodes numériques, tandis qu'une version 3-D permet une étude tridimensionnelle complète des phénomènes aérodynamiques, turbulents, et acoustiques. Deux versions sont à chaque fois nécessaires pour traiter les maillages élémentaires considérés : une version en coordonnées cartésiennes et une version en coordonnées cylindriques. Les figures 4.8(a) et 4.8(b) rappellent le choix des notations pour ces types de coordonnées, respectivement en 2-D et 3-D.



**Fig. 4.8:** (a) Coordonnées cartésiennes  $M(x_1, x_2)$  et coordonnées polaires  $M(r, \theta)$  en 2-D. (b) Coordonnées cartésiennes  $M(x_1, x_2, x_3)$  et coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$  en 3-D.

#### 4.4.1 Formulation 2-D en coordonnées cartésiennes

Pour une géométrie bidimensionnelle cartésienne, les flux eulériens et visqueux s'expriment comme la projection sur la base orthonormée  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  des vecteurs définis par l'équation (4.11) :

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_2} \quad \mathbf{K}_v = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x_2}$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  des variables conservatives défini par l'équation (4.10) est donné par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho e_t \end{bmatrix}$$

où  $u_1$  et  $u_2$  représentent respectivement les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  suivant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ .

Les flux eulériens  $\mathbf{K}_e$  se décomposent en 2 parties  $\mathbf{E}_e$  et  $\mathbf{F}_e$ , et les flux visqueux  $\mathbf{K}_v$  en  $\mathbf{E}_v$  et  $\mathbf{F}_v$ . Ces flux ont pour expression :

$$\mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ p + \rho u_1^2 \\ \rho u_1 u_2 \\ (\rho e_t + p)u_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ p + \rho u_2^2 \\ (\rho e_t + p)u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ u_1 \tau_{11} + u_2 \tau_{12} - q_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ u_1 \tau_{21} + u_2 \tau_{22} - q_2 \end{bmatrix}$$

Les flux termiques  $q_m$  ont été ajoutés au flux visqueux par souci de simplicité. Les variables  $\tau_{m,n}$  et  $q_m$  représentent les composantes dans la base  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  respectivement du tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  et du vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}$ . Elles ont pour expression, d'après (4.6) :  $\forall (m, n) \in \{1, 2\}^2$ ,

$$\tau_{m,n} = \mu \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \delta_m^n \right)$$

$$q_m = -\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T}{\partial x_m}$$

où  $\delta_m^n$  est le symbole de Kronecker entre les entiers  $m$  et  $n$ .

Le système d'équations (4.9) est fermé par l'équation (4.5), qui peut être explicitée dans ce système de coordonnées :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2)$$

#### 4.4.2 Formulation 2-D en coordonnées polaires

Pour une géométrie bidimensionnelle polaire, les flux eulériens et visqueux s'expriment comme la projection sur la base orthonormée  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  des vecteurs définis par l'équation (4.11). Cette projection est généralement obtenue à partir des équations en coordonnées car-

tésiennes en effectuant les changements de variable :

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{ou réciproquement :} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = 2 \tan^{-1} \left( -x_1/x_2 + \operatorname{sgn}(x_2) \sqrt{1 + (x_1/x_2)^2} \right) \end{cases}$$

Les flux eulériens et visqueux dans ce système de coordonnées s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial (r\mathbf{E}_e)}{r\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{r\partial \theta} + \frac{\mathbf{H}_e}{r} \quad \mathbf{K}_v = \frac{\partial (r\mathbf{E}_v)}{r\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{r\partial \theta} + \frac{\mathbf{H}_v}{r}$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  des variables conservatives est donné par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho e_t \end{bmatrix}$$

où  $u_r$  et  $u_\theta$  représentent respectivement les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  suivant  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$ . Les flux ont pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \begin{bmatrix} \rho u_r \\ p + \rho u_r^2 \\ \rho u_r u_\theta \\ (\rho e_t + p)u_r \end{bmatrix} & \mathbf{F}_e &= \begin{bmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_r u_\theta \\ p + \rho u_\theta^2 \\ (\rho e_t + p)u_\theta \end{bmatrix} & \mathbf{H}_e &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(\rho u_\theta^2 + p) \\ \rho u_r u_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ u_r \tau_{rr} + u_\theta \tau_{r\theta} - q_r \end{bmatrix} & \mathbf{F}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta\theta} \\ u_r \tau_{r\theta} + u_\theta \tau_{\theta\theta} - q_\theta \end{bmatrix} & \mathbf{H}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les variables  $\tau_{rr}$ ,  $\tau_{r\theta}$ , et  $\tau_{\theta\theta}$  sont les composantes du tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$ . Elles ont pour expression en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \mu \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial(ru_r)}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} \right) \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{r\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial(ru_r)}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} \right) \right) \end{aligned}$$

Les variables  $q_r$  et  $q_\theta$  sont les composantes du vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}$  en coordonnées polaires. Elles valent :

$$q_r = -\lambda_{th} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{et} \quad q_\theta = -\lambda_{th} \frac{\partial T}{r\partial \theta}$$

Le système (4.9) est fermé par l'équation (4.5) réécrite en coordonnées polaires :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_r^2 + u_\theta^2)$$

### 4.4.3 Formulation 3-D en coordonnées cartésiennes

Les flux eulériens et visqueux 3-D en coordonnées cartésiennes sont obtenus par projection sur la base orthonormée  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de (4.11). Ils ont pour expression :

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{G}_e}{\partial x_3} \quad \mathbf{K}_v = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial x_3}$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  des variables conservatives vaut :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e_t \end{bmatrix}$$

où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  représentent respectivement les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  suivant  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ . Les flux sont donnés par :

$$\mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} \rho u_1 \\ p + \rho u_1^2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_1 u_3 \\ (\rho e_t + p)u_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ p + \rho u_2^2 \\ \rho u_2 u_3 \\ (\rho e_t + p)u_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_3 \\ p + \rho u_3^2 \\ (\rho e_t + p)u_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ u_1 \tau_{11} + u_2 \tau_{12} + u_3 \tau_{13} - q_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ u_1 \tau_{21} + u_2 \tau_{22} + u_3 \tau_{23} - q_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ u_1 \tau_{31} + u_2 \tau_{32} + u_3 \tau_{33} - q_3 \end{bmatrix}$$

Les variables  $\tau_{m,n}$  et  $q_m$  représentent les composantes dans la base  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  respectivement du tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  et du vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}$ . Elles ont pour expression, d'après (4.6) :  $\forall (m, n) \in \{1, 2, 3\}^2$ ,

$$\tau_{m,n} = \mu \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \delta_m^n \right)$$

$$q_m = -\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T}{\partial x_m}$$

Le système (4.9) est fermé par la définition de l'énergie totale pour un gaz parfait (4.5) :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

#### 4.4.4 Formulation 3-D en coordonnées cylindriques

Les flux eulériens et visqueux 3-D en coordonnées cylindriques sont obtenus par projection sur la base orthonormée  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  du système (4.11). Ils s'écrivent :

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial (r\mathbf{E}_e)}{r\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{r\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{G}_e}{\partial z} + \frac{\mathbf{H}_e}{r} \quad \mathbf{K}_v = \frac{\partial (r\mathbf{E}_v)}{r\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{r\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z} + \frac{\mathbf{H}_v}{r}$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  des variables conservatives est donné par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho u_z \\ \rho e_t \end{bmatrix}$$

où  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  représentent respectivement les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  suivant  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$ . Les flux ont pour expression :

$$\mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ p + \rho u_r^2 \\ \rho u_r u_\theta \\ \rho u_r u_z \\ (\rho e_t + p)u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_r u_\theta \\ p + \rho u_\theta^2 \\ \rho u_\theta u_z \\ (\rho e_t + p)u_\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_r u_z \\ \rho u_\theta u_z \\ p + \rho u_z^2 \\ (\rho e_t + p)u_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\rho u_\theta^2 + p) \\ \rho u_r u_\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ u_r \tau_{rr} + u_\theta \tau_{r\theta} + u_z \tau_{rz} - q_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ u_r \tau_{r\theta} + u_\theta \tau_{\theta\theta} + u_z \tau_{\theta z} - q_\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zz} \\ u_r \tau_{rz} + u_\theta \tau_{\theta z} + u_z \tau_{zz} - q_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les variables  $\tau_{rr}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  et  $\tau_{zz}$  sont les composantes du tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$ . Elles ont pour expression en coordonnées cylindriques :

$$\tau_{rr} = \mu \left( 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)$$

Les variables  $q_r$ ,  $q_\theta$  et  $q_z$  sont les composantes du vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}$  en coordonnées

cylindriques. Elles valent :

$$q_r = -\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T}{\partial r} \quad , \quad q_\theta = -\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T}{r \partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z = -\lambda_{\text{th}} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Le système (4.9) est fermé par l'équation (4.5) réécrite en coordonnées cylindriques :

$$\rho e_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2)$$

## 4.5 Traitement des points intérieurs d'un maillage élémentaire

On considère dans cette partie une grandeur  $f$  fonction du paramètre spatial  $\xi$ . On considère également un maillage uniforme monodirectionnel, avec un pas de discrétisation  $\Delta\xi$ . Ce formalisme permet de traiter dans le même temps les cas cartésiens et cylindriques : on retrouve en effet le cas d'un maillage cartésien en considérant  $\xi = x_1$ ,  $\xi = x_2$  ou  $\xi = x_3$ , tandis que  $\xi = r$ ,  $\xi = \theta$  ou  $\xi = z$  permet de traiter le cas d'un maillage cylindrique.

### 4.5.1 Dérivation spatiale

#### 4.5.1.1 Flux eulériens

Dans les équations introduites précédemment, les flux eulériens jouent un rôle décisif, puisque les termes non-linéaires de vitesse contenus dans ces flux sont responsables de la génération de bruit d'origine aérodynamique. Ils décrivent aussi toutes les interactions entre le champ de vitesse et les fluctuations acoustiques, qui sont de plusieurs ordres de grandeur inférieurs aux grandeurs aérodynamiques. L'estimation des dérivées spatiales des flux eulériens nécessite donc un soin particulier dans le choix de la méthode numérique, car les estimations réalisées doivent être très précises. On choisit une méthode aux différences finies centrée explicite sur  $2N + 1$  points, ce qui permet d'écrire formellement, pour tout point  $\xi$  du maillage :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{j=-N}^N a_j f(\xi + j\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\xi^p) \quad (4.12)$$

où les  $a_j$  sont les coefficients du schéma aux différences finies choisi et  $p$  son ordre formel. Les  $a_j$  sont antisymétriques, vérifiant  $a_{-j} = -a_j$ , afin d'obtenir un schéma non-dissipatif.

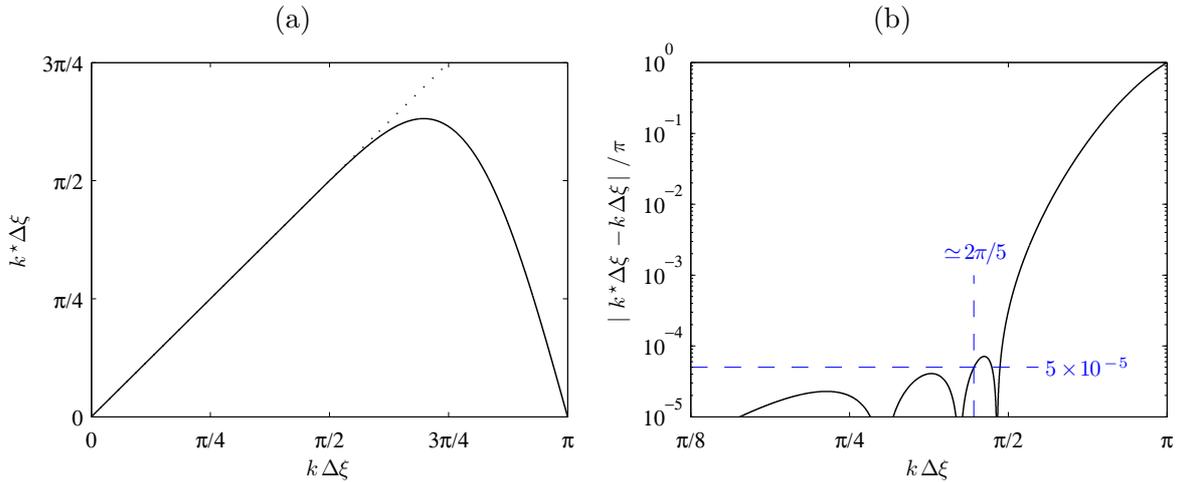
Les schémas standard sont d'ordre maximal, soit  $p = 2N$ . Ils sont obtenus en effectuant des développements de Taylor-Lagrange des  $f(\xi + j\Delta\xi)$  autour du point de maillage  $\xi$  à l'ordre  $2N$ , en les réinjectant dans l'équation (4.12), et en annulant tous les termes d'ordre inférieur à  $2N$ , à l'exception du terme relatif à la dérivée première. Les schémas obtenus pour  $N \geq 3$  s'avèrent suffisamment précis pour les grandes longueurs d'onde, mais ils présentent des erreurs d'approximation élevées pour des longueurs d'onde plus petites, typiquement  $\lambda/\Delta\xi \leq 10$ . De nombreuses méthodes aux différences finies ont été exposées dans la littérature en vue d'une estimation numérique très précise des flux eulériens pour les petites longueurs d'onde. Tam & Webb proposent un schéma DRP (*Dispersion Relation Preserving*) peu dispersif à 7 points d'ordre 4, optimisé dans l'espace des nombres d'onde au prix d'une réduction de l'ordre formel. Le schéma DRP à 7 points offre ainsi une meilleure résolution pour les faibles longueurs d'onde ( $\lambda/\Delta\xi \in [5, 10]$ ) [235] que les différences finies standard sur 7 points qui sont formellement d'ordre 6. Les schémas compacts de Lele [140] sont une autre famille de schémas développés spécifiquement pour la CAA.

Le schéma aux différences finies retenu pour le traitement des flux eulériens est le schéma sur 11 points d'ordre 4 développé par Bogey & Bailly, noté FDo11p [25]. À l'instar de Tam & Webb, le schéma est optimisé dans l'espace des nombres d'onde afin de minimiser sur l'intervalle  $[\pi/16, \pi/2]$  l'erreur de dispersion  $|k^* \Delta\xi - k \Delta\xi|/\pi$  entre le nombre d'onde effectif

$k^*$  et le nombre d'onde réel  $k$ . Le nombre d'onde effectif est obtenu par transformée de Fourier de l'équation (4.12) et s'écrit :

$$k^* \Delta \xi = 2 \sum_{j=1}^N a_j \sin(j k \Delta \xi) \quad (4.13)$$

La courbe représentative du nombre d'onde effectif en fonction du nombre d'onde réel est tracée sur la figure 4.9(a). Le nombre d'onde effectif reste très proche du nombre d'onde



**Fig. 4.9:** (a) Courbe représentative du nombre d'onde effectif  $k^* \Delta \xi$  du schéma aux différences finies FDo11p en fonction du nombre d'onde  $k \Delta \xi$ . La première bissectrice est représentée en pointillés. (b) Erreur de dispersion  $|k^* \Delta \xi - k \Delta \xi| / \pi$  du schéma aux différences finies FDo11p en fonction du nombre d'onde  $k \Delta \xi$  en échelle logarithmique. L'erreur limite de dispersion  $5 \times 10^{-5}$  et la limite de résolution en nombre d'onde  $k \Delta \xi \simeq 2\pi/5$  sont représentés en bleu.

réel pour les faibles nombres d'onde. L'erreur de dispersion augmente avec  $k \Delta \xi$  et n'est plus négligeable pour les hauts nombres d'onde. À noter que le schéma ne permet pas une résolution dans les hauts nombres d'onde  $k \Delta \xi$  voisin de  $\pi$ , puisque le nombre d'onde effectif correspondant est nul. Le schéma assure une erreur de dispersion inférieure à  $5 \times 10^{-5}$  jusqu'à  $k \Delta \xi \simeq 2\pi/5$ , comme le montre la figure 4.9(b). Les coefficients  $a_j$  correspondant à ce schéma sont reportés dans le tableau 4.2.

#### 4.5.1.2 Flux visqueux

Une telle précision n'est pas nécessaire pour l'estimation des flux visqueux [22]. On utilise donc un schéma aux différences finies standard sur 5 points d'ordre 4, noté FDS5p, pour le calcul des flux visqueux. Les coefficients  $a_j$  correspondant à ce schéma sont rappelés dans le tableau 4.2.

#### 4.5.2 Filtrage sélectif

Le filtrage sélectif permet dans un premier temps de prendre en compte des effets des échelles non-résolues par la LES : il sert à dissiper le flux d'énergie transféré depuis les grandes échelles vers les petites échelles non-résolues (voir partie 4.2.2.3). Le filtrage permet également d'éliminer les oscillations hautes fréquences qui peuvent être générées notamment par les effets non-linéaires dans les équations de Navier–Stokes, ou les oscillations maille à maille qui naissent numériquement par les troncatures dans les méthodes d'estimation par différences finies, par le traitement spécifique de parois, ou par un étirement du maillage. La viscosité sélective que l'on introduit supprime ces oscillations parasites, ce qui permet de stabiliser le calcul sans affecter la solution physique sur les échelles résolues.

$j$	FDS5p	FDo11p
0	0	0
1	8/12	0.872756993962667
2	-1/12	-0.286511173973333
3		$9.032000128000002 \times 10^{-2}$
4		$-2.077940582400000 \times 10^{-2}$
5		$2.484594688000000 \times 10^{-3}$

**Tab. 4.2:** Coefficients  $a_j$  correspondant au schéma aux différences finies sur 11 points FDo11p de Bogey & Bailly [25], et au schéma aux différences finies standard sur 5 points FDS5p. Les coefficients vérifient  $a_{-j} = -a_j$ .

Le filtrage sélectif de la quantité  $f$  peut s'écrire au point  $\xi$  de manière centrée sur  $2N + 1$  points dans la direction de l'espace  $e_\xi$  :

$$K_f^\xi(f)(\xi) = -\frac{\sigma}{\Delta t} \sum_{j=-N}^N d_j (f(\xi + j\Delta\xi) - \bar{f}(\xi + j\Delta\xi)) \quad (4.14)$$

où  $\bar{f}$  désigne la moyenne temporelle de la grandeur  $f$ ,  $\Delta t$  le pas de temps, et les  $d_j$  les coefficients du schéma de filtrage. Les  $d_j$  sont symétriques, vérifiant  $d_{-j} = d_j$ , afin d'obtenir un filtrage non-dispersif. La constante  $\sigma$  est la dissipation (ou la force) du filtrage. C'est un réel compris entre 0 et 1.

La fonction d'amortissement du filtre  $G_f$  est obtenue par transformée de Fourier de l'expression (4.14) :

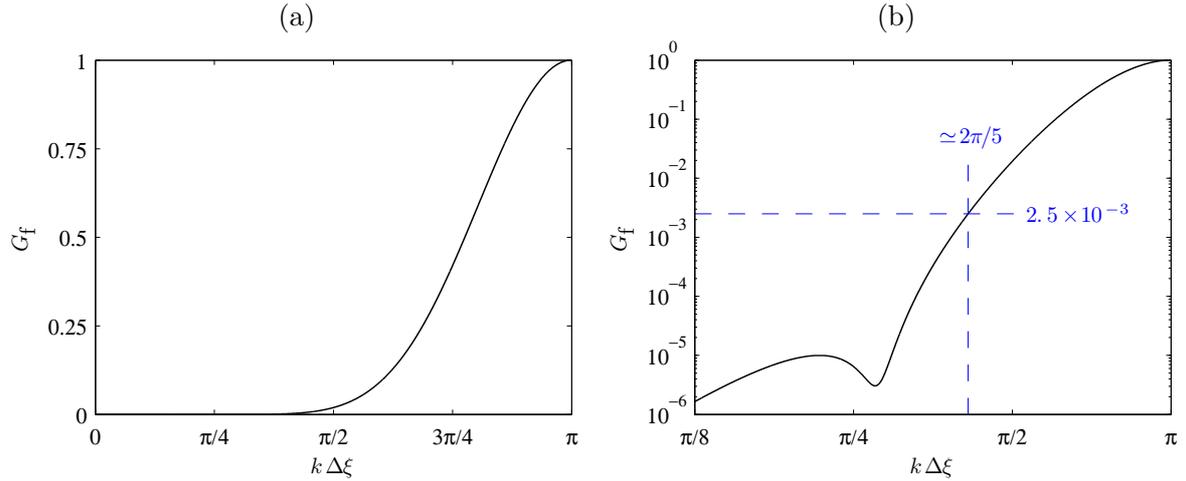
$$G_f(k\Delta\xi) = d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j \cos(j k\Delta\xi)$$

Les coefficients  $d_j$  doivent être construits de telle sorte que l'amortissement du filtrage soit maximal pour les longueurs d'onde mal résolues et minimal (idéalement 0) pour les longueurs d'onde correctement résolues. Le nombre d'onde de coupure du filtrage sélectif est donc fortement corrélé avec la limite de résolution du schéma de dérivation spatiale utilisé. Il existe de nombreux modèles de filtrage, comme le filtrage sur 7 points de Tam & Shen [234] ou les schémas de Tam *et al.* [236]. Bogey *et al.* proposent dans [27] un filtrage sélectif sur 11 points d'ordre 6, noté SFo11p. Ce filtrage est construit en minimisant l'amortissement intégral pour  $k\Delta\xi \in [\pi/16, \pi/2]$ , et en imposant que  $G_f(k\Delta\xi)$  soit positif pour  $k\Delta\xi \in [0, \pi]$ . La figure 4.10(a) montre la fonction d'amortissement associée à ce filtre en échelle linéaire et la figure 4.10(b) en échelle logarithmique. On observe un très faible amortissement du filtrage pour les faibles nombres d'onde, ce que l'on souhaitait. L'amortissement croît ensuite avec  $k\Delta\xi$  et atteint sa valeur maximale 1 pour des oscillations maille à maille, en  $k\Delta\xi = \pi$ .

Le nombre d'onde de coupure peut être défini comme la plus grande valeur de  $k\Delta\xi$  vérifiant  $\sigma G_f(k\Delta\xi) \leq 5 \times 10^{-4}$ . Comme le filtrage sera appliqué à chaque itération, il n'est pas nécessaire de prendre la force du filtrage maximale ( $\sigma = 1$ ) pour stabiliser numériquement le calcul. Bogey & Bailly choisissent  $\sigma = 0.2$  dans [25]. Finalement, le nombre d'onde de coupure est obtenu pour  $G_f(k\Delta\xi) = 2.5 \times 10^{-3}$ . On trouve  $k\Delta\xi \simeq 2\pi/5$ , comme le montre la figure 4.10(b). Ainsi le nombre d'onde de coupure du filtre SFo11p est sensiblement égal à la limite de résolution du schéma de dérivation spatiale FDo11p : il y a donc compatibilité entre les deux méthodes. On utilisera ce filtrage dans toute la suite.

Les coefficients du filtrage SFo11p de Bogey *et al.* sont rappelés dans le tableau 4.3.

En pratique, on filtre successivement dans chaque direction de l'espace. L'expression du terme de filtrage total  $\mathbf{K}_f$  introduit dans l'équation (4.9) est donnée dans le tableau 4.4,



**Fig. 4.10:** (a) Courbe représentative de la fonction d'amortissement  $G_f$  du filtrage sélectif SFo11p en fonction du nombre d'onde  $k\Delta\xi$ . (b) Courbe représentative de la fonction d'amortissement  $G_f$  du filtrage sélectif SFo11p en fonction du nombre d'onde  $k\Delta\xi$  en échelle logarithmique. L'obtention du nombre de coupure est représentée en bleu.

$j$	SFo11p
0	0.234810479761700
1	-0.199250131285813
2	0.120198310245186
3	$-4.930377563602000 \times 10^{-2}$
4	$1.239644987396400 \times 10^{-2}$
5	$-1.446093078167000 \times 10^{-3}$

**Tab. 4.3:** Coefficients  $d_j$  correspondant au filtrage sélectif sur 11 points d'ordre 6 SFo11p de Bogey *et al.* SFo11p [27]. Les coefficients vérifient  $d_{-j} = d_j$ .

suivant la dimension de l'espace et le paramétrage utilisé. Dans la suite, on note  $K_f(f)$  la composante de filtrage du vecteur  $\mathbf{K}_f$  relative à la grandeur  $f$ .

Coord.	2-D	3-D
Cart.	$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} K_f^{x1}(\rho) + K_f^{x2}(\rho) \\ K_f^{x1}(\rho u_1) + K_f^{x2}(\rho u_1) \\ K_f^{x1}(\rho u_2) + K_f^{x2}(\rho u_2) \\ K_f^{x1}(\rho e_t) + K_f^{x2}(\rho e_t) \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} K_f^{x1}(\rho) + K_f^{x2}(\rho) + K_f^{x3}(\rho) \\ K_f^{x1}(\rho u_1) + K_f^{x2}(\rho u_1) + K_f^{x3}(\rho u_1) \\ K_f^{x1}(\rho u_2) + K_f^{x2}(\rho u_2) + K_f^{x3}(\rho u_2) \\ K_f^{x1}(\rho u_3) + K_f^{x2}(\rho u_3) + K_f^{x3}(\rho u_3) \\ K_f^{x1}(\rho e_t) + K_f^{x2}(\rho e_t) + K_f^{x3}(\rho e_t) \end{bmatrix}$
Pol/Cyl.	$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} K_f^r(\rho) + K_f^\theta(\rho) \\ K_f^r(\rho u_r) + K_f^\theta(\rho u_r) \\ K_f^r(\rho u_\theta) + K_f^\theta(\rho u_\theta) \\ K_f^r(\rho e_t) + K_f^\theta(\rho e_t) \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} K_f^r(\rho) + K_f^\theta(\rho) + K_f^z(\rho) \\ K_f^r(\rho u_r) + K_f^\theta(\rho u_r) + K_f^z(\rho u_r) \\ K_f^r(\rho u_\theta) + K_f^\theta(\rho u_\theta) + K_f^z(\rho u_\theta) \\ K_f^r(\rho u_z) + K_f^\theta(\rho u_z) + K_f^z(\rho u_z) \\ K_f^r(\rho e_t) + K_f^\theta(\rho e_t) + K_f^z(\rho e_t) \end{bmatrix}$

**Tab. 4.4:** Expression du terme de filtrage  $\mathbf{K}_f$  introduit dans l'équation (4.9), suivant la dimension de l'espace et le paramétrage utilisé.

### 4.5.3 Intégration temporelle

On rappelle que l'équation à intégrer temporellement s'écrit, d'après (4.9) :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{K}_e(\mathbf{U}) + \mathbf{K}_v(\mathbf{U}) + \mathbf{K}_f(\mathbf{U})$$

On choisit dans toute la suite une méthode de Runge–Kutta explicite à  $p$  étapes. L'avancement en temps du vecteur  $\mathbf{U}^n = \mathbf{U}(n\Delta t)$  au temps  $n\Delta t$ , pour atteindre le vecteur  $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}((n+1)\Delta t)$  au temps  $(n+1)\Delta t$ , peut être décrit de la manière suivante :

- On effectue  $p$  étapes d'intégration temporelle en n'intégrant que les flux eulériens, ce qui peut s'écrire, en posant  $\mathbf{U}^{(j)}$  le vecteur  $\mathbf{U}$  à l'étape  $j$  de l'algorithme :

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^n$$

$$\mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{U}^n - \alpha_j \Delta t \mathbf{K}_e(\mathbf{U}^{(j-1)}) \quad \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, p\}$$

où les  $\alpha_j$  sont les coefficients du schéma d'intégration temporelle.

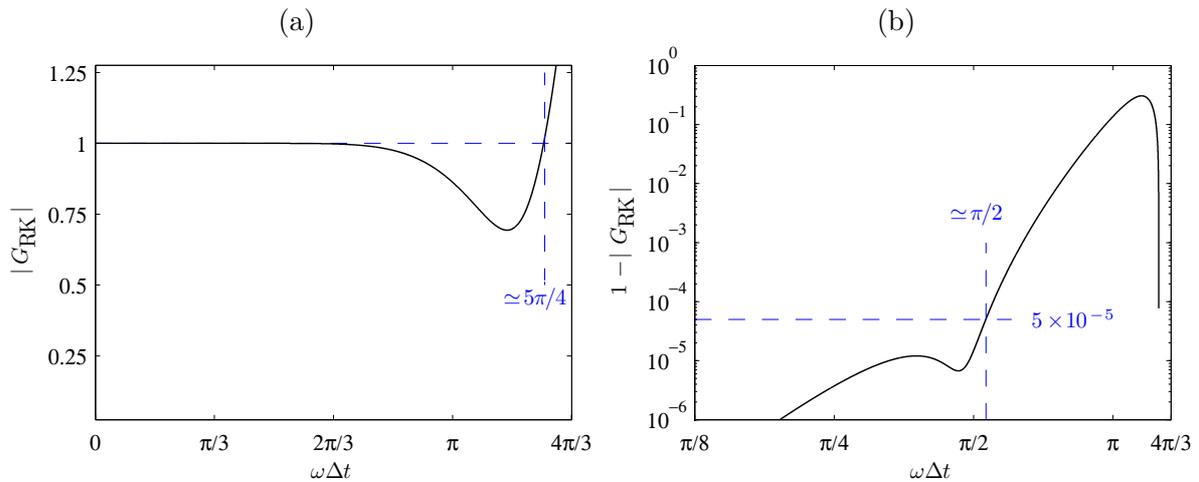
- On effectue à la dernière étape une intégration des flux visqueux et du filtrage sélectif, comme le préconisent Bogey & Bailly dans [26] :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{(p)} + \Delta t (\mathbf{K}_v(\mathbf{U}^n) + \mathbf{K}_f(\mathbf{U}^n))$$

La fonction d'amplification  $G_{\text{RK}}$  de l'algorithme peut être obtenue par transformée de Fourier temporelle dans le cas où  $\mathbf{K}_e$  est linéaire, et en négligeant le traitement des flux visqueux et du filtrage sélectif à l'étape finale :

$$G_{\text{RK}}(\omega \Delta t) = 1 + \sum_{j=1}^p \left( \prod_{m=p-j+1}^p \alpha_m \right) (i \omega \Delta t)^j$$

Dans l'algorithme à 6 étapes d'ordre 2 proposé par Bogey & Bailly dans [25], noté RKo6s, les coefficients  $\alpha_j$  sont déterminés par minimisation de la dispersion et de la dissipation pour des pulsations  $\omega \Delta t$  allant jusqu'à  $\pi/2$ . La figure 4.11(a) montre la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  associée à cet algorithme d'intégration temporelle en échelle linéaire tandis que la figure 4.11(b) montre la dissipation  $1 - |G_{\text{RK}}|$  en échelle logarithmique. L'obtention de la limite de stabilité est représentée en bleu.



**Fig. 4.11:** (a) Courbe représentative de la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  de l'algorithme d'intégration temporelle RKo6s en fonction de la pulsation  $\omega \Delta t$ . L'obtention de la limite de stabilité est représentée en bleu. (b) Courbe représentative de la dissipation  $1 - |G_{\text{RK}}|$  de l'algorithme d'intégration temporelle RKo6s en fonction de la pulsation  $\omega \Delta t$  en échelle logarithmique. L'obtention de la pulsation de coupure est représentée en bleu.

On observe une amplification et une dissipation nulle du signal pour les faibles pulsations. L'algorithme devient très dissipatif, avec  $|G_{\text{RK}}|$  très nettement en-deçà de 1 à partir de  $\omega\Delta t = 2\pi/3$ . Il devient instable pour  $\omega\Delta t > 5\pi/4$ .

La pulsation de coupure est déterminée par la plus grande valeur de  $\omega\Delta t$  assurant une dissipation inférieure à  $5 \times 10^{-5}$ . On trouve  $\omega\Delta t \simeq \pi/2$ , comme le montre la figure 4.11(b). Dans toute la suite, l'intégration temporelle sera menée à l'aide du schéma RKo6s. Le tableau 4.5 donne les coefficients  $\alpha_j$  de ce schéma.

$j$	RKo6s
1	0.117979901628817
2	0.184646966494485
3	0.246623604309588
4	0.331839542735621
5	0.5
6	1.

**Tab. 4.5:** Coefficients  $\alpha_j$  correspondant à l'intégration temporelle de Runge–Kutta à 6 étapes d'ordre 2 RKo6s de Bogey & Bailly [25].

#### 4.5.4 Critère de stabilité

Le recours à un algorithme d'intégration temporelle explicite s'accompagne d'une contrainte de stabilité numérique reliant le pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$  et la taille de maille minimale  $\Delta\xi_{\min}$  du maillage. Cette contrainte, liée aux termes convectifs, impose la distance, rapportée à la taille de maille minimale  $\Delta\xi_{\min}$ , que peut parcourir pendant le temps  $\Delta t$  une perturbation se propageant dans la direction  $\mathbf{e}_\xi$  à la vitesse  $c_\infty + |\bar{u}_\xi|_{\max}$ , où  $c_\infty$  est la vitesse de propagation des ondes acoustiques, et  $|\bar{u}_\xi|_{\max}$  la vitesse moyenne maximale de l'écoulement dans la direction  $\mathbf{e}_\xi$ . Il s'agit du critère de Courant–Friedrichs–Lewy, donné par [54] :

$$\text{CFL} = \frac{(c_\infty + |\bar{u}_\xi|_{\max}) \Delta t}{\Delta\xi_{\min}} \leq \text{CFL}_{\max} \quad (4.15)$$

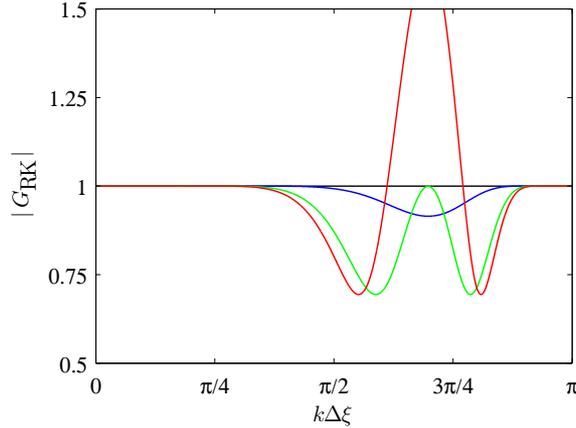
La quantité  $\text{CFL}_{\max}$  est le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy maximal assurant la stabilité du calcul.

##### 4.5.4.1 Sans prise en compte du filtrage

Pour calculer la quantité  $\text{CFL}_{\max}$ , on considère la fonction d'amplification de l'algorithme d'intégration temporelle  $G_{\text{RK}}$ , écrite en fonction de  $k\Delta\xi$  au lieu de  $\omega\Delta t$ , dans le cas d'un milieu convecté à une vitesse  $|\bar{u}_\xi|_{\max} < c_\infty$ . Pour cela, il suffit de considérer la relation d'onde effective  $\omega = (c_\infty + |\bar{u}_\xi|_{\max}) k^*$ , que l'on peut réécrire  $\omega\Delta t = \text{CFL} k^* \Delta\xi$ , puis d'utiliser la relation entre  $k^*$  et  $k$  fournie par l'équation (4.13). On obtient :

$$G_{\text{RK}}(k\Delta\xi) = 1 + \sum_{j=1}^p \left( \prod_{m=p-j+1}^p \alpha_m \right) \left( 2i \text{CFL} \sum_{n=1}^N a_n \sin(n k \Delta\xi) \right)^j$$

L'algorithme d'intégration temporelle est stable si  $|G_{\text{RK}}| \leq 1$  pour  $k\Delta\xi \in [0, \pi]$ . La figure 4.12 montre la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  dans l'espace des nombres d'onde pour différents CFL : 0.7, 1.4, 1.98 et 2.1. On observe que l'amplification vaut 1 à faibles CFL (cas par exemple pour CFL = 0.7). Quand le nombre CFL augmente, une zone de dissipation apparaît dans les hautes nombres d'onde près de  $k\Delta\xi = 3\pi/4$  (cas CFL = 1.4). Il apparaît ensuite avec une augmentation du CFL un maximum local, qu'il convient de conserver inférieur à 1 pour



**Fig. 4.12:** Courbe représentative de la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  en fonction du nombre d'onde  $k\Delta\xi$  pour différents nombres de Courant–Friedrichs–Lewy : — CFL = 0.7, — CFL = 1.4, — CFL = 1.98, — CFL = 2.1

assurer la stabilité de l'algorithme pour tous les nombres d'onde. Ce maximum local vaut 1 pour CFL = 1.98. Pour des valeurs supérieures du nombre CFL, ce maximum local dépasse 1 et l'algorithme devient instable, comme le montre le cas CFL = 2.1. On trouve donc ici  $\text{CFL}_{\text{max}} = 1.98$ , ce qui démontre la très bonne robustesse des algorithmes présentés.

Pour des géométries 2-D ou 3-D, on construit un nombre CFL multidimensionnel, respectivement  $\text{CFL}^{2\text{-D}}$  ou  $\text{CFL}^{3\text{-D}}$ , calculé de la même manière que le nombre CFL en 1-D, mais en considérant la plus grande vitesse dans chacune des directions au lieu de  $|\bar{u}_\xi|_{\text{max}}$ , et en considérant la plus petite longueur de maille au lieu de  $\Delta\xi_{\text{min}}$ . Le tableau 4.6 explicite le nombre CFL multidimensionnel en fonction de la dimension de l'espace, pour les différents systèmes de coordonnées considérés dans ce travail.

Coord.	2-D
Cart.	$\text{CFL}^{2\text{-D}} = \frac{(c_\infty + \max_{i \in \{1,2\}}  \bar{u}_i _{\text{max}}) \Delta t}{\min_{i \in \{1,2\}} \Delta x_{i\text{min}}}$
Pol.	$\text{CFL}^{2\text{-D}} = \frac{(c_\infty + \max\{ \bar{u}_r _{\text{max}},  \bar{u}_\theta _{\text{max}}\}) \Delta t}{\min\{\Delta r_{\text{min}}, (r\Delta\theta)_{\text{min}}\}}$
	3-D
Cart.	$\text{CFL}^{3\text{-D}} = \frac{(c_\infty + \max_{i \in \{1,2,3\}}  \bar{u}_i _{\text{max}}) \Delta t}{\min_{i \in \{1,2,3\}} \Delta x_{i\text{min}}}$
Cyl.	$\text{CFL}^{3\text{-D}} = \frac{(c_\infty + \max\{ \bar{u}_r _{\text{max}},  \bar{u}_\theta _{\text{max}},  \bar{u}_z _{\text{max}}\}) \Delta t}{\min\{\Delta r_{\text{min}}, (r\Delta\theta)_{\text{min}}, \Delta z_{\text{min}}\}}$

**Tab. 4.6:** Expression du CFL multidimensionnel, suivant la configuration étudiée et le paramétrage utilisé.

En se plaçant sur un maillage cartésien dont les pas de discrétisation spatiale sont égaux à  $\Delta\xi$  dans toutes les directions de l'espace, et en l'absence d'écoulement, les nombres d'onde les plus grands sont obtenus en multidimensionnel le long des diagonales des mailles. En

considérant une perturbation ayant un nombre d'onde correctement résolu  $k\Delta\xi$  dans chacune des directions de l'espace, on obtient un nombre d'onde résultant, qui doit également être correctement résolu, de  $k\sqrt{n}\Delta\xi$  dans la direction de la diagonale des mailles pour un espace à  $n$  dimensions ( $n \in \{1, 2, 3\}$ ). La relation  $\omega\Delta t = \text{CFL}_{\max} k^* \Delta\xi$ , obtenue en 1-D dans une direction paramétrée, peut alors être réécrite dans la direction de la diagonale des mailles en dimension  $n$  :  $\omega\Delta t = \text{CFL}_{\max}^{n-D} k^* \sqrt{n}\Delta\xi$ . On obtient alors  $\text{CFL}_{\max}^{n-D} = \text{CFL}_{\max}/\sqrt{n}$ . L'augmentation en dimension du domaine de calcul requiert donc une diminution du nombre  $\text{CFL}_{\max}$  par rapport au cas 1-D d'un facteur  $\sqrt{n}$ , en vue d'assurer la stabilité de la résolution numérique le long des diagonales des mailles. Avec les algorithmes choisis, le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy maximal assurant la stabilité du calcul vaut, en fonction de la dimension de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CFL}_{\max}^{1-D} = 1.98 \\ \text{CFL}_{\max}^{2-D} = 1.40 \\ \text{CFL}_{\max}^{3-D} = 1.14 \end{array} \right.$$

À noter que des critères de stabilité peuvent être formulés pour les termes visqueux et les termes de conduction–diffusion, mais les critères obtenus sont typiquement 100 fois plus grands que le critère CFL formulé par l'équation (4.15) [22, 97].

On remarque enfin que le pas de temps, imposé par la plus petite maille par la relation (4.15), sera toujours très petit en pratique. C'est le principal inconvénient de la méthode explicite utilisée dans ce travail.

#### 4.5.4.2 Avec prise en compte du filtrage

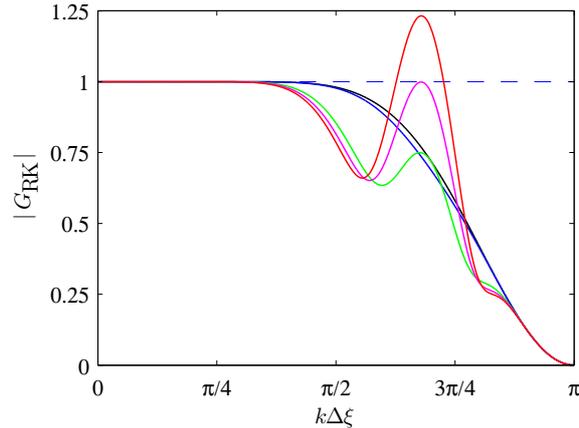
Le filtrage sélectif n'intervenant qu'à la dernière étape de l'algorithme d'intégration temporelle, sa prise en compte nécessite seulement une pondération de la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  par la fonction de transfert du filtre  $1 - \sigma G_f$ . On choisit ici une force de filtrage maximale  $\sigma = 1$ . On obtient :

$$G_{\text{RK}}(k\Delta\xi) = \left( 1 + \sum_{j=1}^p \left( \prod_{m=p-j+1}^p \alpha_m \right) \left( 2i \text{CFL} \sum_{n=1}^N a_n \sin(nk\Delta\xi) \right)^j \right) \left( 1 - d_0 - 2 \sum_{j=1}^N d_j \cos(jk\Delta\xi) \right)$$

La figure 4.13 montre la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  avec prise en compte du filtrage SFo11p dans l'espace des nombres d'onde pour différents CFL : 0.7, 1.4, 1.98, 2.05 et 2.1. La dissipation introduite par le filtrage est clairement visible pour les hauts nombres d'onde, pour lesquels la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  tend vers 0. On observe la présence d'un maximum local près de  $k\Delta\xi = 3\pi/4$  pour des CFL suffisamment élevés. Le cas CFL = 1.98, qui correspondait au cas critique de stabilité sans prise en compte du filtrage, est maintenant stable, et le cas critique de stabilité est obtenu pour  $\text{CFL}_{\max} = 2.05$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CFL}_{\max}^{1-D} = 2.05 \\ \text{CFL}_{\max}^{2-D} = 1.45 \\ \text{CFL}_{\max}^{3-D} = 1.19 \end{array} \right.$$

La prise en compte du filtrage permet ainsi d'étendre légèrement la plage des nombres CFL pour lesquels l'algorithme est stable.



**Fig. 4.13:** Courbe représentative de la fonction d'amplification  $|G_{\text{RK}}|$  avec prise en compte du filtrage, en fonction du nombre d'onde  $k\Delta\xi$  pour différents nombres de Courant–Friedrichs–Lewy : — CFL = 0.7, — CFL = 1.4, — CFL = 1.98, — CFL = 2.05, — CFL = 2.1. La limite de stabilité  $|G_{\text{RK}}| = 1$  est représenté en pointillés bleus.

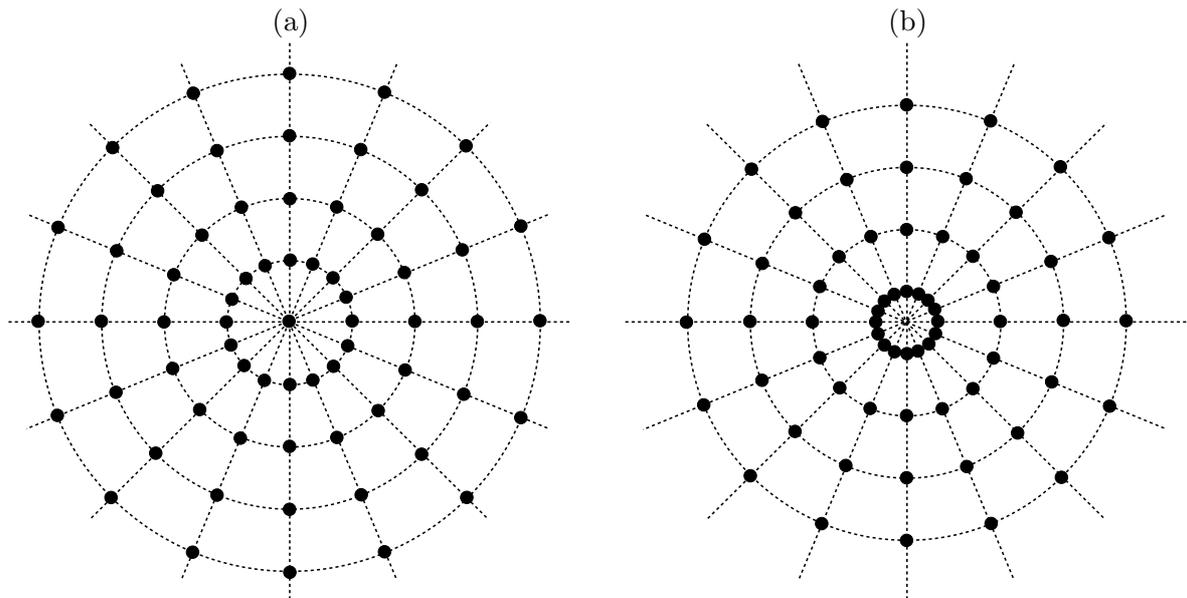
#### 4.5.5 Traitement de l'axe en coordonnées polaires ou cylindriques

Les équations de Navier–Stokes sont singulières en coordonnées polaires ou cylindriques sur l'axe  $r = 0$ , notamment en raison des termes en  $1/r$ , ou de la dégénérescence de la définition des vecteurs  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$ . Un soin spécifique dans le traitement numérique de l'axe est donc nécessaire.

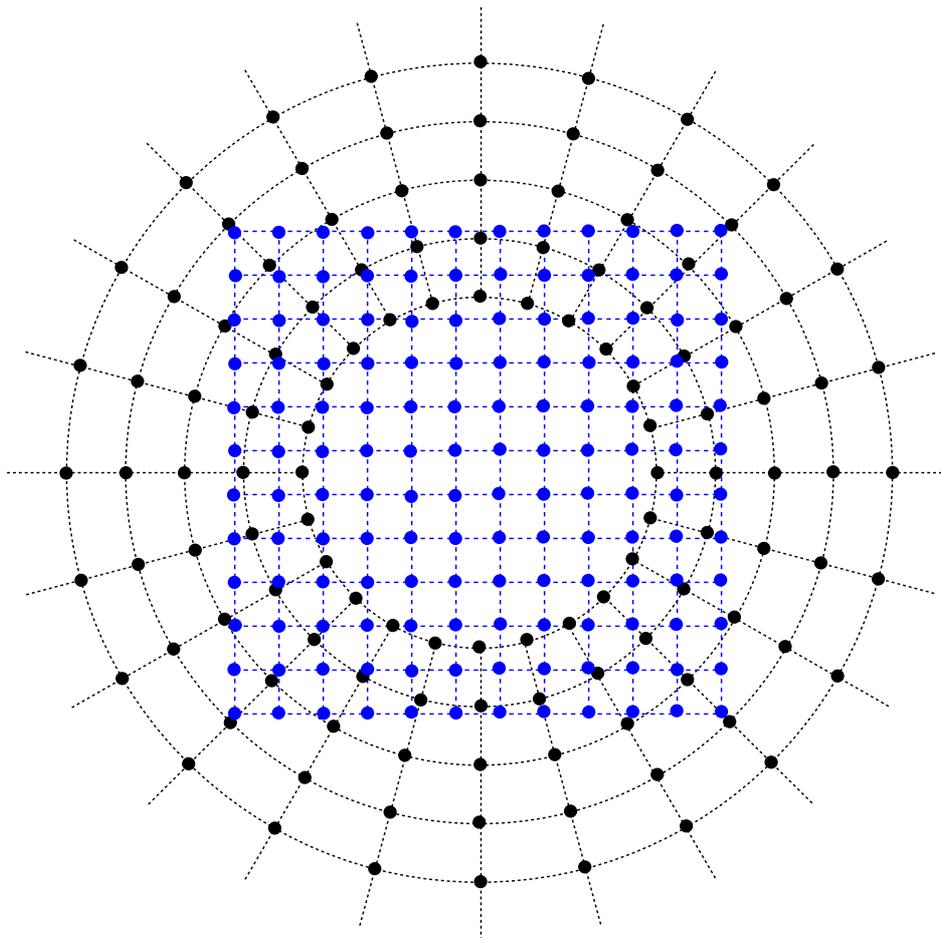
Il existe diverses méthodes pour contourner cette difficulté. Mohseni & Colonius proposent dans [166] de sauter l'axe en commençant la grille de discrétisation à  $r = \Delta r/2$ , comme le montre la figure 4.14(b). L'avantage de cette formulation est que les équations ne sont pas traitées à l'axe, et donc les équations en polaire peuvent être utilisées dans tout le domaine de calcul. Pour le traitement numérique près de l'axe, Mohseni & Colonius proposent de prendre un nombre pair de directions  $\theta$ , afin que chaque point dans la direction  $\theta$  admette un symétrique par rapport à l'axe dans la direction  $\theta + \pi$ . Cette astuce permet l'utilisation des schémas aux différences finies centrées FDo11p et du filtrage sélectif centré SFo11p près de l'axe. La méthode proposée présente le désavantage d'imposer une surdiscrétisation spatiale près de l'axe. En effet, afin d'assurer une précision acceptable loin de l'axe  $r = 0$ , la discrétisation azimutale  $\Delta\theta$  doit être très petite. Ceci a des conséquences néfastes sur le pas de temps, puisque l'utilisateur est contraint, par la condition CFL, de choisir un pas de temps excessivement petit.

Constantinescu & Lele proposent de traiter la difficulté sur une structure de maillage standard, avec un point en  $r = 0$  [53], comme le montre la figure 4.14(a). Les équations sont développées en séries près de l'axe afin de lever les singularités, et traitées séparément. Cette technique, bien que lourde, permet alors d'avoir un pas de temps deux fois plus grand que pour la méthode de Mohseni & Colonius.

Freund *et al.* suggèrent dans [87, 89] de résoudre les équations de Navier–Stokes près de l'axe en coordonnées cartésiennes, les équations étant régulières dans ce paramétrage. Ce basculement de systèmes de coordonnées peut nécessiter la mise en œuvre d'un recouvrement de maillages, comme le montre la figure 4.15. On appliquera cette méthode dans la suite, puisqu'elle s'inscrit parfaitement dans l'approche multidomaine réalisée dans ce travail. Aussi, cette méthode permet d'éviter une surdiscrétisation près de l'axe, rendant ainsi accessibles des pas de temps  $\Delta t$  plus grands, ce que ne permettent pas les 2 méthodes précédentes.



**Fig. 4.14:** (a) Maillage 2-D polaire classique avec un premier point en  $r = 0$ , utilisé par Constantinescu & Lele [53]. (b) Maillage 2-D polaire avec un premier point en  $r = \Delta r/2$ , utilisé par Mohseni & Colonius [166].

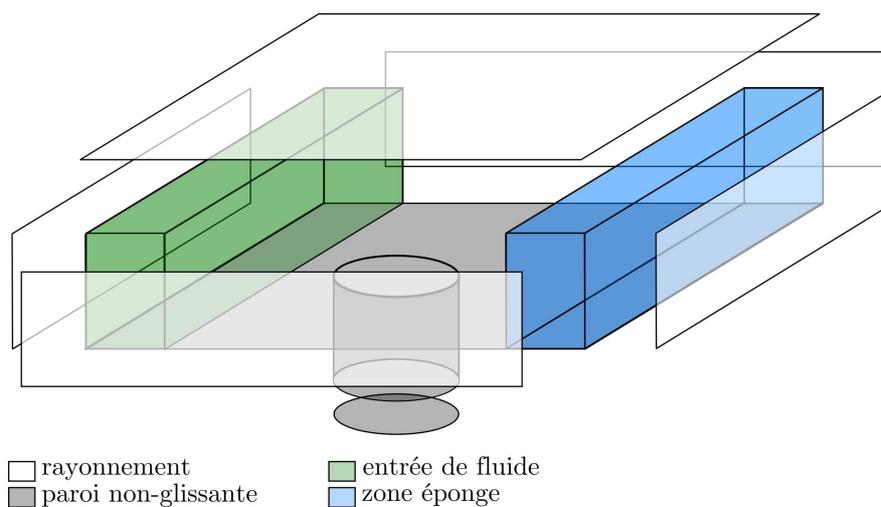


**Fig. 4.15:** Recouvrement de maillages 2-D cartésien au cœur et polaire en périphérie.

## 4.6 Traitement des points de frontière d'un maillage élémentaire

Il existe deux familles de points de frontière pour un maillage élémentaire. Les points, tout d'abord, correspondant à une zone de superposition avec un autre maillage élémentaire du recouvrement de maillages. Le traitement numérique en ces points est détaillé dans le chapitre 5. L'autre famille est les points correspondant à une frontière physique du domaine de calcul. Il peut s'agir par exemple d'une paroi de la géométrie étudiée, ou d'une limite de type espace libre du domaine de calcul (condition de rayonnement). L'implémentation propre de conditions aux limites est un point décisif pour une simulation de qualité. En effet, sans soin particulier, de petites perturbations de pression peuvent être émises par la réflexion d'ondes incidentes dans les zones de rayonnement ou à la sortie du domaine de calcul de structures tourbillonnaires, ce qui peut contaminer complètement le rayonnement acoustique proprement calculé. À titre d'exemple, une réflexion de 1% sur la pression aérodynamique dans une zone de rayonnement génère typiquement sur la pression acoustique une erreur de 100%. Cette erreur se propage ensuite dans tout le domaine de calcul, ce qui ne permet pas de préserver le champ acoustique calculé.

Une autre difficulté est le recours à des schémas de différentiation et de filtrage décentrés sur les premières et dernières rangées de points. En effet, des schémas centrés à 11 points ne peuvent plus être utilisés sur les 5 premières et les 5 dernières rangées de points. Le décentrage introduit de la dispersion et de la dissipation près des frontières, et peut donc générer des instabilités numériques. Enfin, la dernière difficulté est d'assurer la compatibilité entre les différentes conditions aux limites sur l'ensemble du domaine de calcul notamment près des coins. Dans le cas complexe de la cavité cylindrique, il faut coupler des conditions d'entrée de fluide, des conditions de sortie de fluide (zone éponge), des conditions de rayonnement non réfléchissantes pour les parois supérieure, amont et aval, ainsi que pour les parois latérales parallèles à l'écoulement, et des conditions de paroi non-glissantes pour les parois de la cavité et de la plaque plane, comme le montre la figure 4.16.



**Fig. 4.16:** Vue éclatée des conditions aux frontières sur l'ensemble du domaine de calcul 3-D pour l'étude d'une cavité cylindrique. L'écoulement vient de la gauche du domaine de calcul.

## 4.6.1 Décentrage des schémas de dérivation spatiale et du filtrage

### 4.6.1.1 Dérivation spatiale décentrée

Lorsque l'on s'approche des frontières du domaine de calcul, l'utilisation de schémas centrés pour estimer les dérivées spatiales devient impossible, faute de points dans l'une des directions spatiales. On utilise dans ce cas des schémas décentrés, lorsque l'on dispose de  $N - d$  points dans la direction de la frontière :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi) = \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{j=-N+d}^{N+d} a_j f(\xi + j\Delta \xi) + \mathcal{O}(\Delta \xi^p)$$

avec  $d$  l'indice de décentrage. Dans toute la suite, on utilise des schémas décentrés aux différences finies optimisées sur 11 points de Berland *et al.* [14] pour le calcul près des frontières des flux eulériens, notés  $\text{FDo11p}^d$ . Des schémas décentrés aux différences finies standard sur 5 points, notés  $\text{FDs5p}^d$ , permettent l'estimation des flux visqueux. La figure 4.17 rappelle la nomenclature adoptée pour tous les cas de décentrage. Les tableaux A.1 et A.2 en annexe A donnent les coefficients  $a_j$  de ces deux schémas en fonction du décentrage. À noter que les décentrages négatifs sont gérés en observant, pour un schéma sur  $2N + 1$  points, avec  $d \geq 0$  et  $j \in \{-N - d, \dots, N - d\}$ , que :

$$a_j \left( \text{FD}(2N + 1)\text{p}^{-d} \right) = -a_{-j} \left( \text{FD}(2N + 1)\text{p}^d \right)$$

$d$	$\mathbf{K}_e$	$\mathbf{K}_f$
5	$\text{FDo11p}^5$	$\text{SFo11p}^5$
4	$\text{FDo11p}^4$	$\text{SFo11p}^4$
3	$\text{FDo11p}^3$	$\text{SFo11p}^3$
2	$\text{FDo11p}^2$	$\text{SFo11p}^2$
1	$\text{FDo11p}^1$	$\text{SFo11p}^1$
0	$\text{FDo11p}$	$\text{SFo11p}$

$d$	$\mathbf{K}_v$
2	$\text{FDs5p}^2$
1	$\text{FDs5p}^1$
0	$\text{FDs5p}$

**Fig. 4.17:** Nomenclature des schémas de différences finies et de filtrage décentrés, en fonction du décentrage  $d$ , pour évaluer les flux eulériens  $\mathbf{K}_e$ , les flux visqueux  $\mathbf{K}_v$  et le terme de filtrage  $\mathbf{K}_f$ . Pour évaluer une dérivée ou pour filtrer en un point de maillage plein ●, on a recours aux variables évaluées aux points voisins marqués par des symboles vides ○.

### 4.6.1.2 Filtrage sélectif décentré

Concernant le filtrage sélectif, on choisit également de décentrer les schémas utilisés en vue d'une utilisation près des frontières du domaine de calcul. Pour un indice de décentrage

$d$ , le filtrage s'écrit :

$$K_f^\xi(f)(\xi) = -\frac{\sigma}{\Delta t} \sum_{j=-N+d}^{N+d} d_j (f(\xi + j\Delta\xi) - \bar{f}(\xi + j\Delta\xi))$$

Les décentrages négatifs sont traités, pour un schéma sur  $2N + 1$  points, avec  $d \geq 0$  et  $j \in \{-N - d, \dots, N - d\}$ , en remarquant que :

$$d_j \left( \text{SFo}(2N + 1)p^{-d} \right) = d_{-j} \left( \text{SFo}(2N + 1)p^d \right)$$

On utilise dans la suite des schémas décentrés optimisés sur 11 points de Berland *et al.* [14], notés FDo11p<sup>d</sup>, qui dégénèrent en un schéma à 10 points puis 7 points pour les décentrages  $d = 3$  et  $d \geq 4$ , respectivement. La figure 4.17 explicite la nomenclature adoptée pour le filtrage sélectif décentré en fonction du décentrage  $d$ , tandis que le tableau A.3 en annexe A rappellent les coefficients  $d_j$  des schémas de filtrage en fonction du décentrage  $d$ .

## 4.6.2 Condition de rayonnement de Tam & Dong

Le type d'approche retenu dans ce travail présuppose que les frontières où une condition de rayonnement doit être appliquée sont loin des sources de bruit. Les fluctuations acoustiques à ces frontières peuvent alors être écrites comme une solution des équations de Navier–Stokes, ré-écrites dans le cas purement acoustique pour un fluide parfait. Les conditions aux limites non-réfléchissantes s'écrivent donc comme un développement asymptotique des équations d'Euler linéarisées autour des champs moyens. La formulation proposée par Tam & Webb [235] est 2–D et suppose un écoulement uniforme. Tam & Dong ont étendu la formulation dans le cas d'écoulements quelconques [231].

### 4.6.2.1 Formulation 2–D

Les conditions de rayonnement s'écrivent naturellement en coordonnées polaires, du fait de l'hypothèse d'une application de ces conditions loin des sources acoustiques considérées comme ponctuelles. L'origine des coordonnées  $r = 0$  est fixée sur les sources acoustiques. Les conditions non-réfléchissantes de rayonnement ont pour expression :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{bmatrix} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_r - \bar{u}_r \\ u_\theta - \bar{u}_\theta \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_f}{V_g} \quad (4.16)$$

Le terme de filtrage  $\tilde{\mathbf{K}}_f$  correspond ici au terme de filtrage  $\mathbf{K}_f$  défini au tableau 4.4, où l'on a remplacé le terme de filtrage en l'énergie totale  $\rho e_t$  par un terme de filtrage *indirect* en la pression  $p$  construit à partir du filtrage direct en  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{u}$  et en  $\rho e_t$ . L'écriture ici n'est que formelle puisqu'en pratique, on intègre temporellement l'équation (4.16) en  $p$ . On remplace ensuite la pression  $p$  par l'énergie totale  $\rho e_t$  à l'aide de l'équation (4.5), avant de procéder à l'opération de filtrage (dernière étape de l'algorithme de Runge–Kutta).

Dans l'équation (4.16),  $V_g$  est la vitesse de groupe des ondes acoustiques. La vitesse de groupe  $\mathbf{V}_g$  peut être décomposée en la vitesse moyenne du son  $\bar{c}$ , perpendiculaire aux fronts d'onde et dont la norme vaut  $\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ , et la vitesse moyenne de l'écoulement  $\bar{\mathbf{u}}$ . On obtient donc  $\mathbf{V}_g = \bar{c} + \bar{\mathbf{u}}$ . Le vecteur  $\mathbf{V}_g$  étant colinéaire au vecteur  $\mathbf{e}_r$ , sa valeur algébrique est calculée par projection de  $\bar{c} + \bar{\mathbf{u}}$  sur  $\mathbf{e}_r$  comme le montre la figure 4.18. On obtient :

$$V_g = u_r + \sqrt{\bar{c}^2 - u_\theta^2}$$

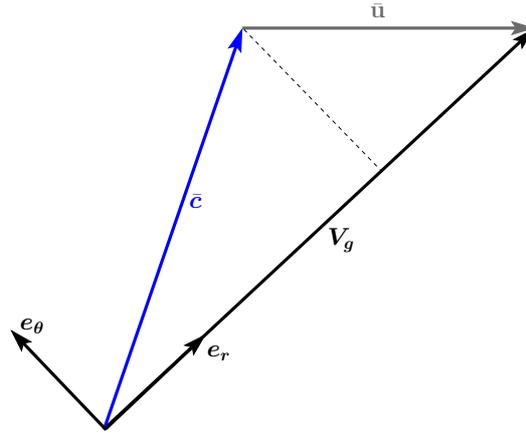


Fig. 4.18: Calcul de la vitesse de groupe  $V_g$  par projection sur  $e_r$  du vecteur  $\bar{c} + \bar{u}$ .

Une formulation en coordonnées cartésiennes est obtenue par linéarité, en considérant que les sources de bruit sont à l'origine ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ). On obtient :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_f}{V_g}$$

La vitesse de groupe  $V_g$  est obtenue par l'équation :

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

#### 4.6.2.2 Formulation 3-D

Les conditions de rayonnement s'écrivent en coordonnées sphériques, en considérant les sources de bruit ponctuelles et placées en  $r = 0$ , et en supposant une application loin des sources de bruit :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \\ p \end{bmatrix} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_r - \bar{u}_r \\ u_\theta - \bar{u}_\theta \\ u_\varphi - \bar{u}_\varphi \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_f}{V_g} \quad (4.17)$$

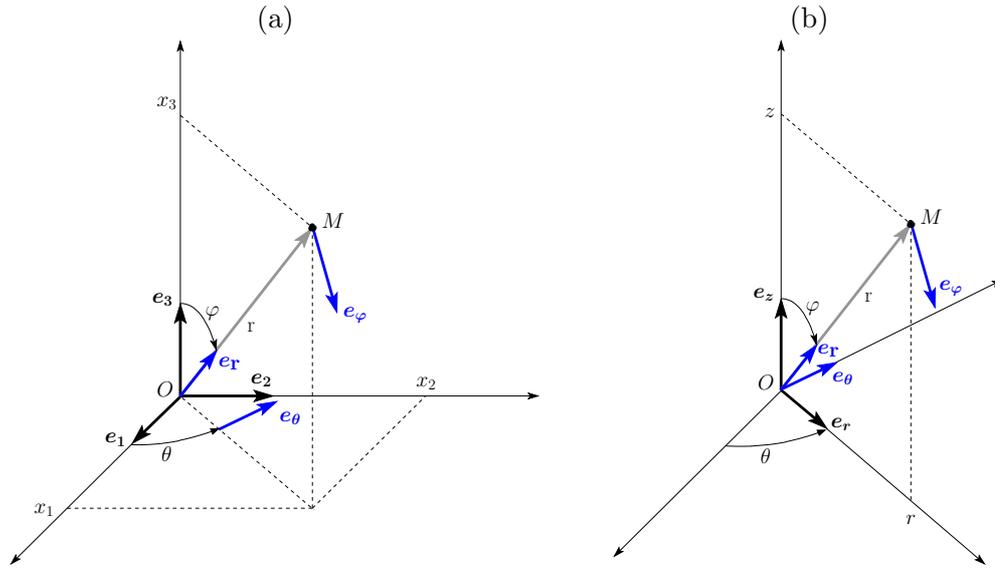
où  $u_\varphi$  est la composante de vitesse dans la direction zénithale, et  $\bar{u}_\varphi$  sa moyenne temporelle.  $V_g$  est portée par le vecteur radial  $\mathbf{e}_r$  et a pour valeur algébrique :

$$V_g = u_r + \sqrt{\bar{c}^2 - u_\theta^2 - u_\varphi^2}$$

Il est possible d'exprimer ces conditions en coordonnées cartésiennes ou cylindriques par changement de variables, comme le proposent respectivement la figure 4.19(a) et 4.19(b).

En coordonnées cartésiennes, on pose le changement de variables :

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \theta = 2 \tan^{-1} \left( -x_1/x_2 + \text{sgn}(x_2) \sqrt{1 + (x_1/x_2)^2} \right) \\ \varphi = \cos^{-1} \left( x_3 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right) \end{cases}$$



**Fig. 4.19:** (a) Coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$  et coordonnées cartésiennes  $M(x_1, x_2, x_3)$ . (b) Coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$  et coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$ .

Les conditions de rayonnement s'écrivent :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 1 \right) \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_1 - \bar{u}_1 \\ u_2 - \bar{u}_2 \\ u_3 - \bar{u}_3 \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{f}}}{V_g}$$

La vitesse de groupe  $V_g$  est donnée par l'équation :

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2} \quad (4.18)$$

avec :

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, le changement de variables est le suivant :

$$\begin{cases} r = r \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} r = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \varphi = 2 \tan^{-1} \left( -z/r + \text{sgn}(r) \sqrt{1 + (z/r)^2} \right) \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_r - \bar{u}_r \\ u_\theta - \bar{u}_\theta \\ u_z - \bar{u}_z \\ p - \bar{p} \end{bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{f}}}{V_g}$$

La vitesse de groupe est donnée par l'équation (4.18), où les vecteurs  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  peuvent

être explicités dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  :

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

### 4.6.3 Condition de sortie et élaboration d'une zone éponge

Les conditions de rayonnement décrites précédemment ne permettent pas la sortie de fluctuations aérodynamiques du domaine de calcul. Outre la génération de fortes réflexions qui peuvent masquer le champ acoustique physique calculé dans le domaine de calcul, on assiste également à une accumulation des fluctuations aérodynamiques près des frontières de sortie, ce qui tend à faire diverger le calcul. On choisit dans ce travail d'ajouter une zone éponge comme le proposent Colonius *et al.* [51] et Bogey [22], qui permet de dissiper l'énergie tourbillonnaire sans générer d'ondes acoustiques.

L'élaboration d'une zone éponge repose sur l'association d'un étirement de maillage et l'ajout d'un terme dissipatif dans les équations résolues. Le fort étirement du maillage dans le sens de l'écoulement, de l'ordre de 5%, permet de dissiper en partie les structures tourbillonnaires. Une dissipation supplémentaire  $\mathbf{K}_\Delta$  est introduite dans l'équation (4.9) pour réduire davantage ces structures tourbillonnaires. Cette dissipation supplémentaire joue même un double rôle, puisqu'elle permet également de dissiper les ondes parasites générées par le fort étirement de maillage. Le terme de filtrage  $\mathbf{K}_f$  dans le membre de droite de l'équation (4.9) est donc remplacé par le terme  $\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_\Delta$ . La réduction des ondes parasites est menée à l'aide d'un filtrage standard sur 3 points FDS3p, dont les coefficients sont donnés dans le tableau 4.7, appliqué dans chacune des directions de l'espace. Dans la direction paramétrée par  $\xi$ , il s'écrit :

$$\mathbf{K}_\Delta^\xi(f)(\xi) = -\frac{\sigma_{\text{ép}}(\xi)}{\Delta t} \sum_{j=-1}^1 d_j (f(\xi + j\Delta\xi) - \bar{f}(\xi + j\Delta\xi))$$

où  $\sigma_{\text{ép}}$  est la dissipation supplémentaire dans la zone éponge. Elle est introduite progressivement :

$$\sigma_{\text{ép}}(\xi) = \sigma_{\text{ép}}^{\max} \left( \frac{\xi - \xi_{\text{ép}}^{\min}}{\xi_{\text{ép}}^{\max} - \xi_{\text{ép}}^{\min}} \right)^2 \mathbf{1}_{\{\xi \in [\xi_{\text{ép}}^{\min}, \xi_{\text{ép}}^{\max}]\}}(\xi)$$

avec  $\sigma_{\text{ép}}^{\max}$  la dissipation maximale dans la zone éponge. En pratique, on choisit la dissipation maximale telle que  $\sigma_{\text{ép}}^{\max}/\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ .

$j$	SFs3p
0	1/2
1	-1/4

**Tab. 4.7:** Coefficients  $d_j$  correspondant au filtrage sélectif standard sur 3 points SFs3p. Les coefficients vérifient  $d_{-j} = d_j$ .

### 4.6.4 Condition d'entrée

Dans ce travail, on utilise à l'entrée du domaine une condition de rayonnement de Tam & Dong. Afin d'imposer proprement le profil de vitesse  $u_{\text{entrée}}$  et d'éviter une dérive des champs moyens de vitesse, on a recours à un terme de rappel sur la vitesse. On ajoute à l'équation de

la vitesse  $u$ , dans (4.16) ou (4.17), le terme  $K_r^u$  dans le membre de droite :

$$K_{\text{rap}}^u = -\frac{\alpha_{\text{rap}}^u}{\Delta t} (\bar{u} - u_{\text{entrée}})$$

où  $\alpha_{\text{rap}}^u$  est la force du rappel sur la vitesse. On prend typiquement  $\alpha_{\text{rap}}^u = 5 \times 10^{-3}$ .

Comme aucune information ne peut provenir de l'extérieur du domaine de calcul, on assiste également à une dérive des champs moyens  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$  en l'absence de traitements spécifiques. L'ajout d'un terme de relaxation sur la pression à l'entrée permet de maintenir le champ moyen de pression près des frontières libres du domaine. On ajoute à l'équation de la pression, dans (4.16) ou (4.17), le terme  $K_r^p$  dans le membre de droite sur les premiers points du domaine :

$$K_{\text{rap}}^p = -\frac{\alpha_{\text{rap}}^p}{\Delta t} (\bar{p} - p_{\infty})$$

où  $\alpha_{\text{rap}}^p$  est la force du rappel sur la pression, qui vaut typiquement  $2 \times 10^{-3}$ .

Un rappel du même type est introduit également sur la masse volumique  $\rho$  :

$$K_{\text{rap}}^{\rho} = -\frac{\alpha_{\text{rap}}^{\rho}}{\Delta t} (\bar{\rho} - \rho_{\text{entrée}})$$

où  $\rho_{\text{entrée}}$  est le profil de masse volumique à l'entrée. La quantité  $\alpha_{\text{rap}}^{\rho}$  est la force du rappel sur la masse volumique, fixée à  $\alpha_{\text{rap}}^{\rho} = 10^{-3}$  dans la suite.

#### 4.6.5 Condition de paroi solide

Les conditions aux parois sont des conditions physiques naturelles imposées aux équations de Navier–Stokes. Pour un fluide visqueux, on impose une condition d'adhérence à la paroi. Le non-glissement du fluide sur la paroi et la non-pénétration de la surface solide s'écrit :

$$\mathbf{u}|_{\text{paroi}} = \mathbf{0}$$

Des hypothèses sur le comportement thermodynamique de la paroi contraignent davantage le système, avec l'ajout d'une équation sur la température à la paroi dans le cas isotherme ou sur le flux de chaleur dans le cas adiabatique.

Comme le précise Berland dans [13], l'introduction des conditions aux limites à la paroi rend hyperstatique le problème aux différences finies. En effet, les points à la paroi doivent à la fois vérifier les équations de Navier–Stokes et aussi satisfaire les conditions d'adhérence et la condition thermodynamique. On se retrouve dès lors avec plus d'équations que d'inconnues. Il existe plusieurs démarches pour s'affranchir du caractère hyperstatique de la formulation du problème par différences finies. Gloorfelt propose dans [97] une description détaillée de ces différentes démarches. Une première méthode, par analogie à la méthode des points images utilisée en optique, consiste à utiliser des points fantômes, ou points fictifs, afin de simuler la réflexion (symétrique pour la pression, les vitesses tangentielles à la paroi et pour la masse volumique, ou antisymétrique pour la composante normale de la vitesse), engendrée par la paroi. Une seconde méthode, proposée par Tam & Dong dans [233], propose de lever l'hyperstatisme du problème en faisant appel au minimum nécessaire de points fantômes, apportant ainsi autant d'inconnues supplémentaires que de conditions additionnelles. Une troisième méthode repose sur l'utilisation des caractéristiques 1–D de Thompson [239], étendues pour un fluide visqueux par Poinsot & Lele [183]. La méthode consiste en le calcul des invariants tourbillonnaire, entropique et acoustiques (progressif et retrograde) dans la direction normale à la paroi. On impose que l'amplitude de l'onde réfléchi est égale à celle de l'onde incidente, en forçant l'égalité des invariants entrant et sortant, et en imposant la nullité des invariants tourbillonnaire et entropique. Une dernière méthode, que l'on utilisera dans la suite, est la réécriture des équations de conservation de la masse et de l'énergie totale en y imposant les

conditions d'adhérence et en estimant les gradients à partir des points intérieurs à l'aide de schémas de différences finies décentrés. Cette méthode permet de calculer la masse volumique et l'énergie totale par unité de masse à la paroi directement, tout en imposant la condition  $\mathbf{u}|_{\text{paroi}} = \mathbf{0}$ .

### Formulation 3-D

En coordonnées cartésiennes, les conditions de paroi, pour une paroi dans le plan  $(x_1, x_2)$  peuvent être réécrites :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \mu \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right) + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{array} \right] = \mathbf{K}_f$$

où le vecteur  $\mathbf{K}_f$  est réduit au filtrage relatif aux variables  $\rho$  et  $\rho e_t$ .

En coordonnées cylindriques, les conditions de paroi, pour une paroi dans le plan  $r$  constant peuvent être réécrites :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{array} \right] = \mathbf{K}_f$$

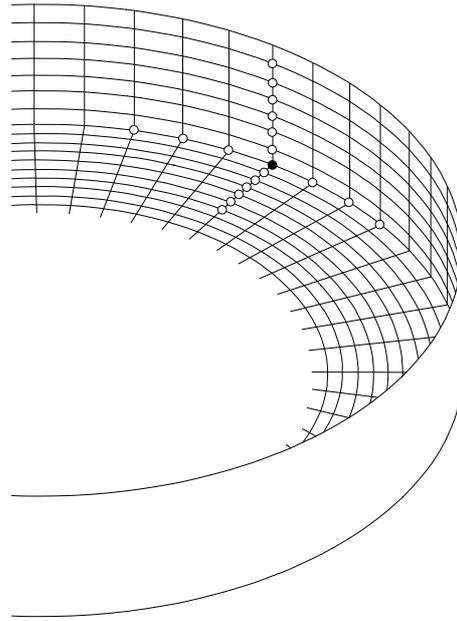
Pour une paroi dans le plan  $(r, \theta)$ , on obtient :

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \mu \left( \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{array} \right] = \mathbf{K}_f$$

Une condition d'adiabaticité est obtenue en imposant un flux de chaleur normal à la paroi nul. L'utilisation de cette méthode peut conduire à des instabilités numériques importantes à la paroi, lorsque les dérivées spatiales sont évaluées à l'aide de schémas décentrés d'ordre élevé. La mise en place du filtrage sélectif  $\mathbf{K}_f$  est donc une étape importante, en vue de dissiper les instabilités hautes fréquences générées numériquement. On utilisera les filtres sélectifs sur 11 points décentrés de Berland [14].

#### 4.6.6 Traitement spécifique des points au coin de fond de cavité

Les points proches du coin de fond de cavité peuvent nécessiter, en fonction des pas de discrétisation choisis, un traitement spécifique lors du régime transitoire. En effet, l'utilisation de schémas numériques complètement décentrés dans les directions  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_z$ , pour traiter le coin de fond de cavité (voir la figure 4.20), peut donner naissance à des instabilités numériques qui compromettent la stabilité du calcul, notamment lors de l'opération de filtrage lorsque les champs moyens n'ont pas encore convergé. Ces instabilités parasites présentent usuellement une longueur d'onde comprises entre 4 et 12 points de maillage. Elles sont réduites à l'aide du filtrage sur 3 points SFs3p, moins sélectif que le filtrage SFo11p, dans les directions  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  sur les derniers points en  $r$  et en  $z$  de coin de cavité. Un filtrage décentré sur 4 points SFo4p<sup>1</sup>, dont les coefficients sont rappelés en annexe A, est utilisé pour le traitement spécifique aux points de paroi. Ce filtrage est fenêtré par la fonction  $w(r, z)$ , ce qui permet de l'introduire progressivement. En notant respectivement  $r_\Delta^{\min}$ ,  $r_\Delta^{\max}$ , et  $z_\Delta^{\max}$  les bornes géométriques inférieure et supérieure du filtrage radial, et la borne géométrique supérieure du



**Fig. 4.20:** Aperçu du décentrage complet dans les directions  $e_r$  et  $e_z$  pour les points au coin de fond de cavité. Pour évaluer une dérivée ou pour filtrer en un point de maillage plein ● au coin de fond de cavité, on a recours aux variables évaluées aux points voisins marqués par des symboles vides ○.

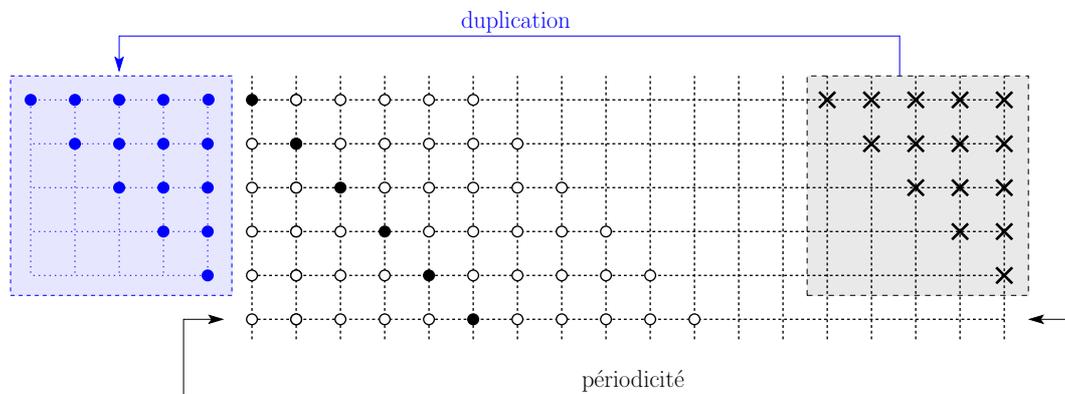
filtrage en  $z$ , on pose :

$$w(r, z) = \left( \frac{r_{\Delta}^{\max} - r}{r_{\Delta}^{\max} - r_{\Delta}^{\min}} \right)^{3/2} \left( \frac{z}{z_{\Delta}^{\max}} \right)^{3/2} \mathbf{1}_{\{r_{\Delta}^{\min} \leq r \leq r_{\Delta}^{\max}\}}(r) \mathbf{1}_{\{0 \leq z \leq z_{\Delta}^{\max}\}}(z)$$

On prend typiquement :  $r_{\Delta}^{\min} = R - 10\Delta r$ ,  $r_{\Delta}^{\max} = R$ , et  $z_{\Delta}^{\max} = 8\Delta z$ , avec  $R$  le rayon de la cavité cylindrique. On choisit enfin une force de filtrage  $\sigma$  de  $5 \times 10^{-4}$ .

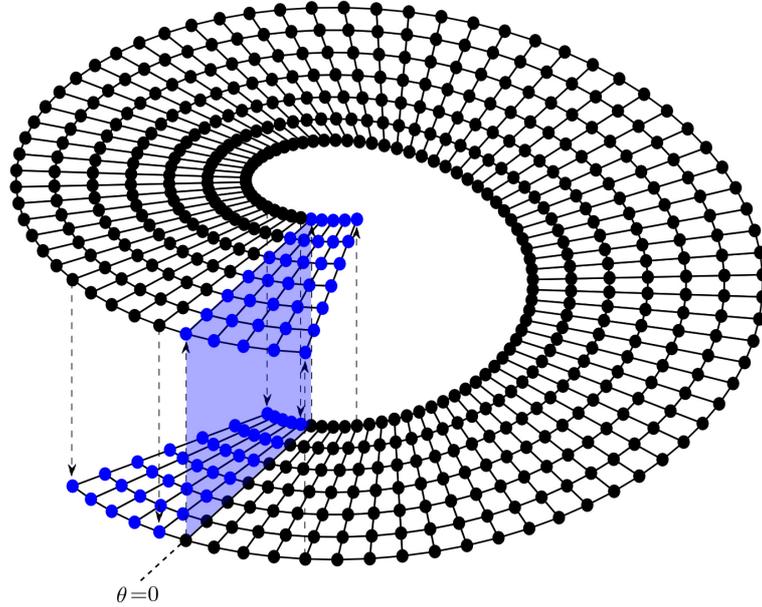
#### 4.6.7 Condition de périodicité

Une condition de périodicité dans une direction consiste à compléter le support de points nécessaire pour une opération numérique (dérivation, filtrage, etc.) près d'une frontière en dupliquant, au-delà de la frontière, les points de maillage nécessaires présents à l'autre extrémité du maillage, comme le montre la figure 4.21. Cette condition de périodicité est appliquée dans



**Fig. 4.21:** Condition de périodicité pour un support à 11 points centrés. Le calcul en un point plein ● se fait à l'aide des points voisins ○ et des points ● obtenus par duplication des points de frontière × de l'autre extrémité du maillage.

le cas d'un maillage polaire ou cylindrique pour la discrétisation azimutale, autour de l'angle de coupure, que l'on choisit à  $\theta = 0$ . La mise en œuvre de la condition de périodicité est en pratique obtenue en dupliquant les 5 rangées de points de part et d'autre de la coupure par congruence modulo  $2\pi$ , comme l'illustre la figure 4.22. Ceci permet de conserver un support centré sur 11 points pour les méthodes numériques autour de la coupure.



**Fig. 4.22:** Vue éclatée de la discrétisation azimutale pour un maillage polaire. L'utilisation du support sur 11 points centré au niveau de la coupure  $\theta = 0$  nécessite le recours aux points de maillage notés  $\bullet$  obtenus par duplication des points de maillage congrus modulo  $2\pi$ .

## 4.7 Calcul des champs moyens

Le modèle de sous-maille (filtrage), ainsi que les conditions de rayonnement de Tam & Dong appliquées aux frontières du domaine de calcul, font intervenir la valeur moyenne  $\bar{f}$  d'une quantité  $f$  (voir les équations (4.14), (4.16) et (4.17)). Or, cette valeur  $\bar{f}$  n'est *a priori* accessible qu'une fois le calcul achevé, en prenant la moyenne arithmétique de la quantité  $f$  en fonction du temps, une fois le régime transitoire écoulé. Cette quantité étant cependant nécessaire à chaque itération de l'algorithme de résolution numérique, on choisit de l'estimer à chaque itération à partir des valeurs de  $f$  aux itérations précédentes. Cette estimation nécessite cependant un soin particulier : une mauvaise estimation de la valeur moyenne peut en effet prolonger "artificiellement" le régime transitoire de l'écoulement simulé, voire nuire à la stabilité même du calcul, notamment dans les régions où un filtrage sélectif décentré est utilisé.

Dans le cadre de nos simulations, on choisit de calculer la quantité moyenne  $\bar{f}$  de manière récurrente, à une fréquence  $n_f \Delta t$ , qui dépend typiquement de la vitesse de l'écoulement et de la taille des plus petites structures tourbillonnaires. En notant  $\bar{f}^n$  la quantité moyenne à l'instant  $n \Delta t$ , la moyenne à l'instant  $(n + n_f) \Delta t$  est estimée à l'aide de la relation :

$$\bar{f}^{n+n_f} = \frac{(n - n_{\text{moy}}) \bar{f}^n + f^{n+n_f}}{n - n_{\text{moy}} + 1}$$

où la quantité  $n_{\text{moy}}$ , qui peut dépendre du temps, permet d'ajuster les pondérations dans la moyenne barycentrique estimant la quantité moyenne  $\bar{f}^{n+n_f}$ , en fonction de l'avancement de la simulation. Elle joue donc directement sur la vitesse de convergence de  $\bar{f}^n$  vers  $\bar{f}$ .





## Chapitre 5

# Outils de communication associés à l'utilisation de recouvrements de maillages

---

On détaille dans ce chapitre le développement de méthodes numériques afin d'effectuer les communications entre les différents maillages élémentaires constituant le maillage composite de la cavité cylindrique. Les communications sont effectuées par produit tensoriel d'interpolations 1-D d'ordre élevé qui garantissent la précision du calcul. Les méthodes d'interpolation utilisées dépendent fortement de la géométrie de la zone de communication, des interpolations décentrées d'ordre élevé sont développées pour réaliser les communications à l'ouverture de la cavité, près des parois (voir la partie 4.3.2). Toute la partie théorique concernant ces interpolations a fait l'objet d'une publication [64]. La dernière partie aborde la mise œuvre du calcul à grande échelle. En effet, la technique de recouvrement de maillages, qui permet de partitionner le domaine de calcul en plusieurs maillages élémentaires sur lesquelles les tâches numériques peuvent être en partie effectuées indépendamment des autres maillages élémentaires, invite à la parallélisation du code de simulation.

## 5.1 Contexte

La bonne gestion des communications entre les maillages élémentaires d'un maillage composite constitue un élément décisif pour mener une simulation de qualité. Plusieurs contraintes conditionnent le développement des méthodes de communication.

### 5.1.1 Contraintes numériques

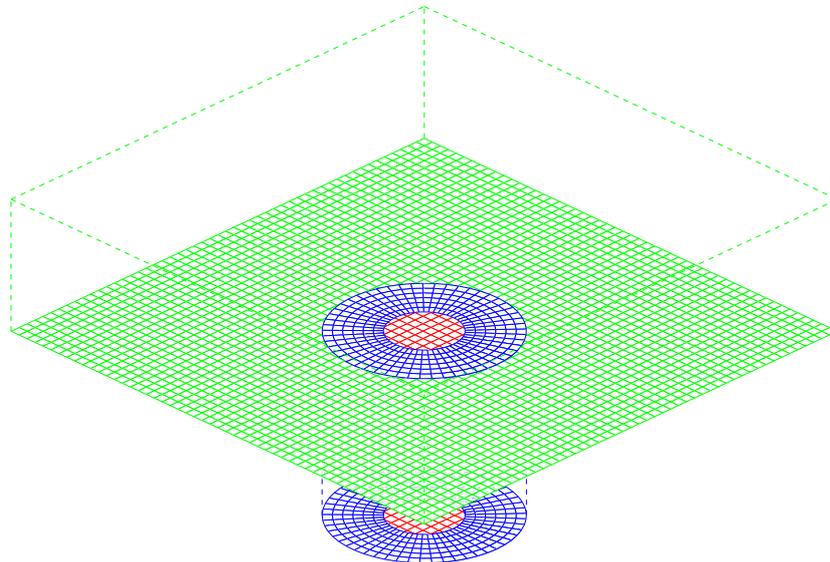
Dans le cadre d'un calcul direct aéroacoustique sur un maillage composite, les algorithmes de communication sont utilisés en association avec un schéma aux différences finies et un filtrage sélectif d'ordre élevé. Ceci implique alors de devoir contrôler l'erreur introduite par les méthodes de communication afin de garantir la même précision que les autres méthodes numériques utilisées dans la simulation. On souhaite ainsi introduire une erreur en-deçà de  $10^{-5}$  sur l'intervalle des nombres d'onde correctement résolus par le schéma aux différences finies utilisé, c'est à dire  $k\Delta\xi \in [0, 2\pi/5]$ .

Comme le font remarquer Tam & Kurbatskii dans [230], cela passe généralement par l'utilisation de supports centrés assez longs de points donneurs, qui envoient de l'information vers un point receveur. Les méthodes de communication à développer peuvent donc dépendre aussi fortement des zones géométriques où elles seront appliquées, en raison de la nécessité d'utiliser de larges supports de communication, afin de garantir une bonne précision du calcul.

En effet, il est tout à fait envisageable d'avoir des régions de communication où pour des raisons géométriques, un large support de points donneurs ne peut être utilisé. Il est donc nécessaire d'identifier précisément les régions du maillage composite qui requièrent la mise en œuvre d'outils de communication.

### 5.1.2 Contraintes géométriques

Le type de maillage composite retenu pour l'étude numérique de la cavité cylindrique a été brièvement introduit à la partie 4.3.2. Cependant, le véritable maillage composite que l'on retient pour l'étude numérique de la cavité cylindrique est légèrement différent de ce dernier, compte tenu de la remarque faite à la partie 4.5.5 pour s'affranchir de la singularité des équations à l'axe du maillage cylindrique. En effet, on choisit de basculer au cœur de la cavité, autour de l'axe du maillage cylindrique, en un paramétrage cartésien. Par conséquent, le maillage composite considéré est constitué de 3 maillages : un maillage cartésien au cœur de la cavité, un maillage cylindrique près des parois latérales de la cavité, et un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur, comme l'illustrent la figure 5.1 et la figure 5.2.

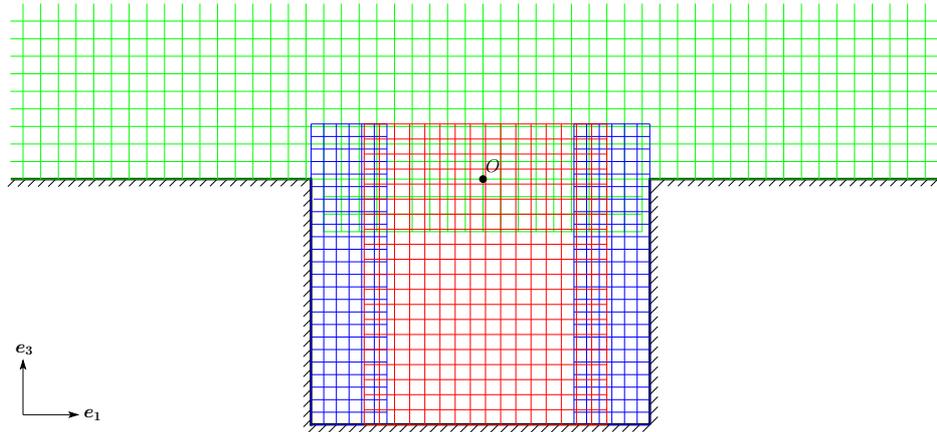


**Fig. 5.1:** Maillage composite de la cavité cylindrique, construit à l'aide d'un maillage cartésien au cœur de la cavité (en rouge), d'un maillage cylindrique près des parois latérales de la cavité (en bleu), et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur dès la lèvre de la cavité (en vert). Les zones de superposition ne sont pas représentées pour plus de lisibilité.

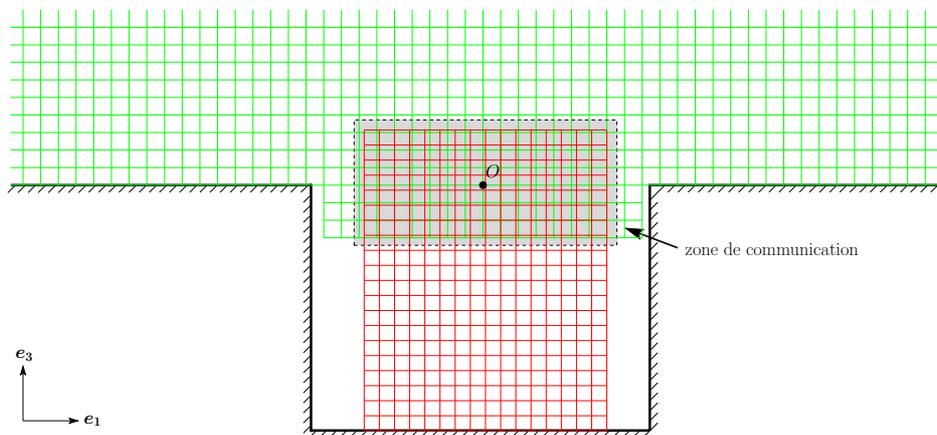
Sur la figure 5.2, qui propose une vue en coupe du maillage composite dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ , on distingue trois zones de superposition qui sont le lieu de communications.

La première zone de superposition concerne le maillage cartésien de cœur (en rouge sur les figures 5.1 et 5.2) et le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert sur les figures 5.1 et 5.2), illustrée par la figure 5.3. Comme ces deux maillages ont le même système de paramétrage, il paraît commode de faire coïncider les points dans la zone de superposition, ce qui permet une communication par **collocation**. C'est en outre le moyen de plus simple et le moins coûteux pour faire communiquer deux maillages. En pratique, on choisit les mêmes pas de discrétisation pour ces deux maillages et l'on place un point de maillage au centre de la cavité  $O$  pour les deux maillages.

La seconde zone de superposition est celle entre le maillage cartésien de cœur (en rouge sur les figures 5.1 et 5.2) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu sur les figures 5.1 et 5.2), comme le montre la figure 5.4. Le type de paramétrage étant différent entre ces deux maillages, on ne peut pas assurer géométriquement une collocation en chacun des points de la zone de superposition. Comme le suggèrent certains auteurs dans la littérature [63,



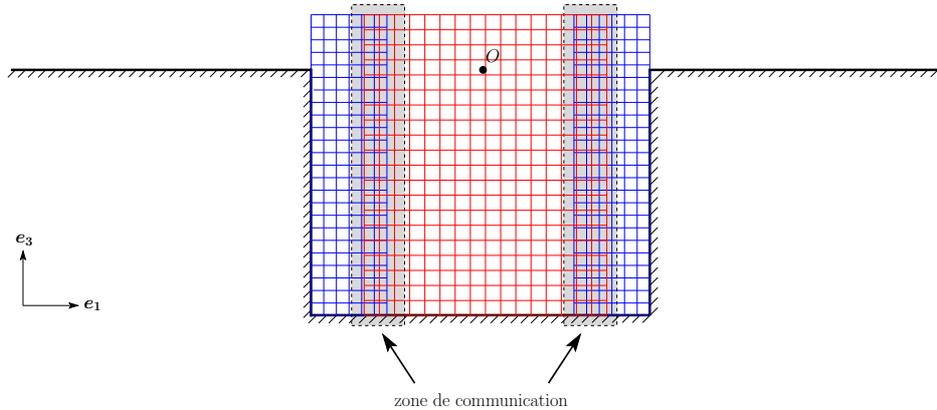
**Fig. 5.2:** Vue de coupe dans la plan  $(O, e_1, e_3)$  du maillage composite de la cavité cylindrique, construit à l'aide d'un maillage cartésien au cœur de la cavité (en rouge), d'un maillage cylindrique près des parois latérales de la cavité (en bleu), et d'un maillage cartésien pour le demi-espace supérieur dès la lèvre de la cavité (en vert)



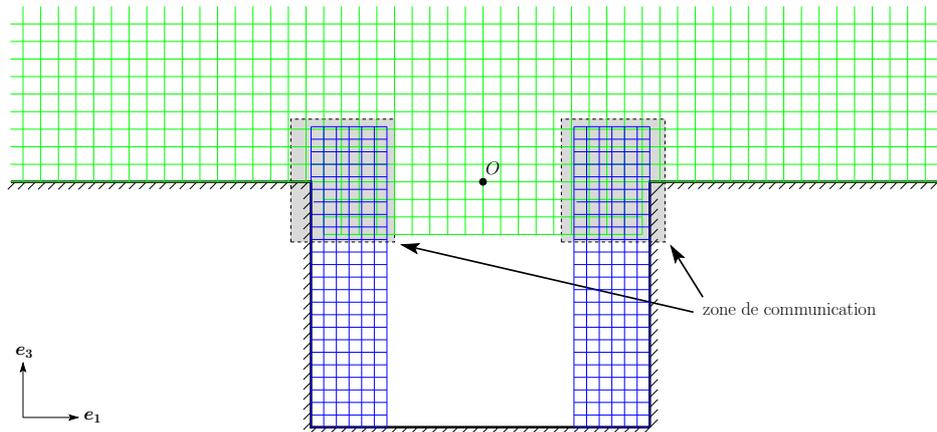
**Fig. 5.3:** Zone de communication n°1 entre le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert) et le maillage cartésien de cœur de cavité (en rouge). Le maillage cylindrique périphérique est masqué pour plus de lisibilité.

229, 230], la communication entre ces deux maillages élémentaires peut alors être effectuée par interpolation multidimensionnelle. Ces interpolations multidimensionnelles peuvent être réalisées par produit tensoriel d'interpolations 1-D, ce qui présente l'avantage de réduire une interpolation multidimensionnelle à une succession d'interpolations 1-D [31, 37, 91, 154]. On choisit une communication par succession d'**interpolations centrées d'ordre élevé**, c'est à dire que l'on dispose d'un nombre important de points donneurs de part et d'autre du point receveur où une interpolation est menée. Afin de faciliter la mise en œuvre numérique des interpolations 1-D successives, on choisit le même pas de discrétisation dans l'axe  $e_3$  du maillage cartésien et l'axe  $e_z$  du maillage cylindrique, rendant coplanaires les points donneurs d'un maillage et les points receveurs de l'autre maillage.

Enfin la troisième zone de superposition concerne le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert sur les figures 5.1 et 5.2) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu sur les figures 5.1 et 5.2), près du bord de la cavité. La zone de superposition est illustrée par la figure 5.5. Là aussi, les paramétrages des deux maillages étant différents, une collocation en chacun des points de la zone de superposition est géométriquement impossible. On a donc recours à une méthode d'interpolation pour réaliser la communication entre les deux maillages. La communication depuis le maillage cartésien du demi-espace supérieur vers le maillage cylindrique de paroi peut être gérée par interpolations centrées 1-D successives d'ordre élevé. Cependant,



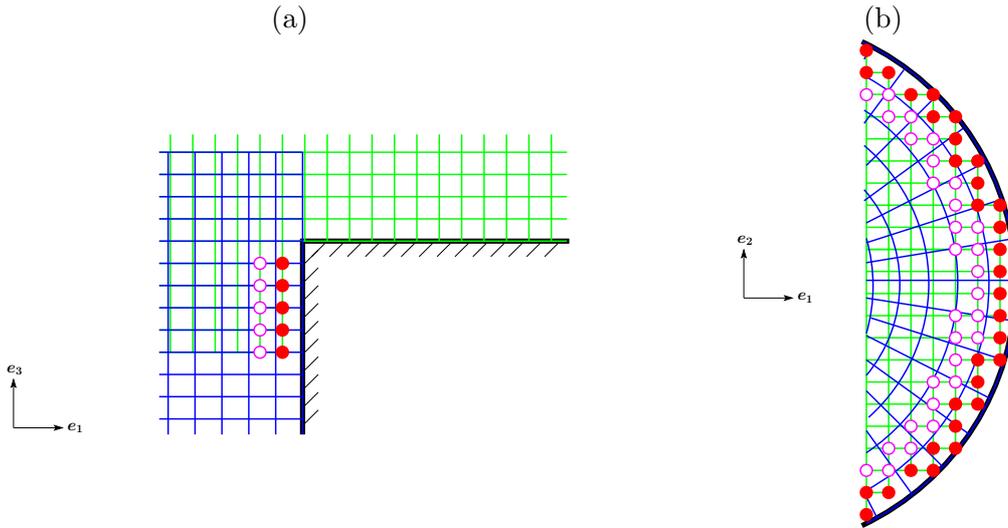
**Fig. 5.4:** Zone de communication n°2 entre le maillage cartésien de cœur (en rouge) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu). Le maillage cartésien du demi-espace supérieur est masqué pour plus de lisibilité.



**Fig. 5.5:** Zone de communication n°3 entre le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu). Le maillage cartésien de cœur est masqué pour plus de lisibilité.

le transfert d'information depuis le maillage cylindrique périphérique vers le maillage cartésien supérieur, qui se fait près de la paroi dans la lèvre de la cavité, ne peut se faire directement par une succession d'interpolations centrées utilisant un large support de points donneurs comme dans le cas précédent. En effet, alors que l'on dispose *a priori* d'autant de points du maillage cylindrique que l'on désire dans la direction du cœur de la cavité, le nombre de points donneurs disponibles est très limité dans la direction de la paroi, comme l'illustre la figure 5.6 : pour les points rouges du maillage cartésien qui reçoivent des données depuis le maillage cylindrique périphérique, un unique point de maillage cylindrique est disponible dans la direction de la paroi. Pour les points magenta du maillage cartésien, seulement deux points dans la direction de la paroi sont disponibles.

Des méthodes numériques faisant appel à des points fantômes ont été développées pour pouvoir utiliser de larges supports de communication même près des parois latérales de la cavité [134, 233], mais le choix des valeurs des différentes variables à assigner aux points fantômes restent un problème majeur, notamment dans le cas de parois non-glissantes. On n'utilisera donc pas cette méthode dans la suite. On choisit finalement pour cette troisième zone de superposition de développer **une méthode d'interpolation spécifique au cas décentré**, pour effectuer la communication depuis le maillage cylindrique périphérique vers

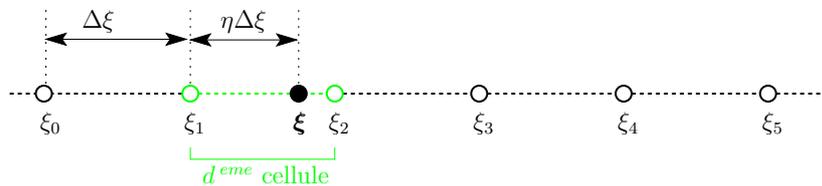


**Fig. 5.6:** (a) Coupe dans le plan  $(O, e_1, e_3)$  de la zone de superposition entre le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu). (b) Coupe dans le plan  $(O, e_1, e_2)$  de la zone de superposition entre le maillage cartésien du demi-espace supérieur (en vert) et le maillage cylindrique périphérique (en bleu). Sur les deux figures, les points receveurs du maillage cartésien n'ayant de disponible dans la direction de la paroi qu'un seul point donneur du maillage cylindrique sont représentés point rouge  $\bullet$ , les points receveurs du maillage cartésien n'ayant de disponibles dans la direction de la paroi que deux points donneurs du maillage cylindrique sont représentés d'un cercle magenta  $\circ$ .

le maillage cartésien du demi-espace supérieur.

### 5.1.3 Environnement mathématique

Cette sous-partie détaille les notations adoptées dans ce chapitre. Soit  $N$  un entier dans  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . On note  $\mathcal{S}_\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}\}$  un ensemble de réels vérifiant  $\xi_j = \xi_0 + j\Delta\xi$  pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  avec  $\Delta\xi$  le pas de discrétisation. Cet ensemble de  $N$  réels définit  $N-1$  intervalles (ou cellules) sur lesquels on peut mener une interpolation à la position  $\xi$ . Dans toute la suite, on suppose que les interpolations sont menées sur la cellule  $d$ . Le cas centré est obtenu en choisissant  $N$  pair et en prenant  $d = N/2$ . Le point receveur  $\xi$  s'écrit  $\xi = \xi_0 + (d-1+\eta)\Delta\xi$ , où  $\eta$  est la partie fractionnaire de  $(\xi - \xi_0)/\Delta\xi$  ( $\eta \in [0, 1[$ ). Ce support d'interpolation 1-D de points donneurs est représenté par la figure 5.7. Le pas de discrétisation  $\Delta\xi$  est supposé



**Fig. 5.7:** Support d'interpolation 1-D dans le cas  $N = 6$  et  $d = 2$ .

constant. Le cas des maillages non-réguliers usuellement rencontrés en pratique ne pose pas de difficultés supplémentaires, puisqu'il est généralement possible de se ramener à un maillage cartésien régulier (le domaine transformé) en effectuant une transformation mathématique du domaine physique [212].

Soit  $f$  une fonction discrète connue de  $\mathcal{S}_\xi$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $f_j = f(\xi_j)$ . La valeur de son interpolation au point receveur  $\xi$  est notée  $f(\xi)$ . Une formulation 1-D explicite non-couplée

peut être écrite, d'après Sherer & Scott par [211] :

$$\forall \xi \in [\xi_0, \xi_{N-1}[ , \quad \tilde{f}(\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} S_j(\xi) f_j \quad (5.1)$$

où  $S_j(\xi)$  sont  $N$  coefficients d'interpolation. On note  $s_j^d(\eta) = S_j(\xi) = S_j(\xi_0 + (d-1+\eta)\Delta\xi)$  et  $\chi = -(d-1+\eta)$ . L'équation (5.1) peut être reformulée :

$$\forall \eta \in [0, 1[ , \quad \tilde{f}(\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) f_j \quad (5.2)$$

Ainsi, une méthode d'interpolation explicite à  $N$  points sur la cellule  $d$  est entièrement déterminée par la construction des  $N$  fonctions d'interpolation  $s_j^d$ , définies de  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ . Aussi, une méthode d'interpolation explicite à  $N$  points sur la cellule  $N-d$  peut être déduite à partir d'une méthode d'interpolation explicite à  $N$  points sur la cellule  $d$  en remarquant que :

$$s_j^{N-d}(\eta) = s_{N-1-j}^d(1-\eta)$$

## 5.2 Techniques d'interpolation 1-D

Il existe dans la littérature une myriade de méthodes d'interpolation 1-D. La principale différence entre ces méthodes est l'espace d'interpolation dans lequel on choisit de construire les fonctions interpolatrices  $s_j^d$ . On peut citer par exemple les splines, les interpolations trigonométriques, les interpolations polynomiales, les interpolations de Tchebychev, les interpolations en sinus cardinaux ou les interpolations par ondelettes [31]. On présente ici deux méthodes d'interpolation 1-D : les interpolations de Lagrange, et les interpolations optimisées dans l'espace des nombres d'onde développées par Tam & Kurbatskii dans [230], que l'on se propose de revisiter pour un décentrage  $d$  quelconque.

### 5.2.1 Interpolations de Lagrange 1-D

Quel que soit le point donneur  $\xi_j$ , un unique polynôme  $\ell_j$  de degré au plus  $N$ , qui vaut 1 au point donneur  $\xi_j$  et 0 aux autres points donneurs, peut être construit [135, 243]. Il s'agit du polynôme défini par,  $\forall \xi \in [\xi_0, \xi_{N-1}[$  :

$$\ell_j(\xi) = \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{N-1} \frac{\xi - \xi_q}{\xi_j - \xi_q}$$

La valeur de l'interpolation de  $f$  au point receveur  $\xi$  situé dans la cellule  $d$  est alors calculée par :

$$\forall \xi \in [\xi_{d-1}, \xi_d[ , \quad \tilde{f}(\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_j(\xi) f_j \quad (5.3)$$

À partir des équations (5.2) et (5.3), une projection sur la base canonique de l'ensemble vectoriel de fonctions  $\mathcal{S}_\xi \mapsto \mathbb{C}$  permet d'expliciter le coefficient d'interpolation  $s_j^d$  :

$$s_j^d(\eta) = \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{N-1} \frac{q + \chi}{q - j}$$

avec  $\chi$  la quantité définie par  $\chi = -(d - 1 + \eta)$ . Dans la suite, cette famille de méthodes d'interpolation est notée  $\text{LINp}^d$ , où  $N$  correspond à la longueur du support de points donneurs, et  $d$  la cellule d'interpolation. L'interpolation est centrée quand  $N$  est pair et  $d$  vaut  $N/2$ . L'interpolation linéaire est obtenue en considérant l'interpolation de Lagrange à 2 points centrée  $\text{LI2p}^1$ .

Il est possible de quantifier les performances de cette famille de méthodes d'interpolation en considérant l'erreur globale, l'amplification et le déphasage d'interpolation.

### 5.2.1.1 Erreur globale d'interpolation

Une erreur locale d'interpolation peut être d'abord construite à partir de la formulation proposée par Tam & Kurbatskii dans [230]. On note  $f_k$  une fonction-test harmonique ayant un nombre d'onde  $k$  et une phase  $\phi$  :

$$f_k : \begin{cases} [\xi_0, \xi_{N-1}] & \mapsto \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto e^{i(k\xi + \phi)} \quad (\phi \in [-\pi, \pi]) \end{cases}$$

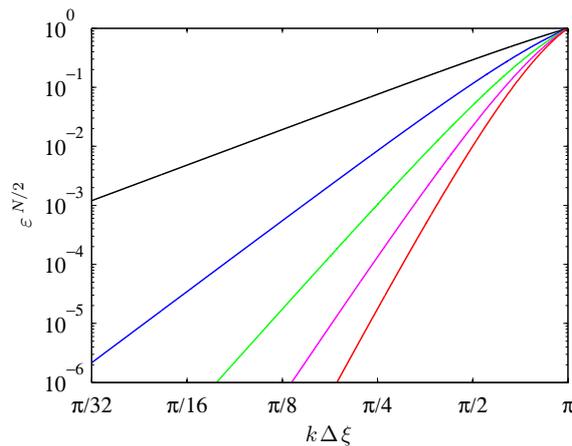
L'erreur locale d'interpolation sur la cellule  $d$ , que l'on note  $\varepsilon_{\text{loc}}^d$  peut être définie par :

$$\varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) = \left| \frac{f_k(\xi) - \tilde{f}_k(\xi)}{f_k(\xi)} \right| = \left| 1 - \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|$$

Une interprétation géométrique de l'erreur locale d'interpolation est représentée sur la figure 5.10. L'erreur globale d'interpolation sur la cellule  $d$ , notée  $\varepsilon^d$ , est construite en prenant la plus grande erreur locale d'interpolation lorsque la position relative d'interpolation  $\eta$  parcourt l'ensemble de la cellule  $d$ . On a donc :

$$\varepsilon^d(k\Delta\xi) = \max_{\eta \in [0, 1[} \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)$$

La figure 5.8 montre l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations de Lagrange centrées à 2, 4, 6, 8 et 10 points. Dans chacun des cas,

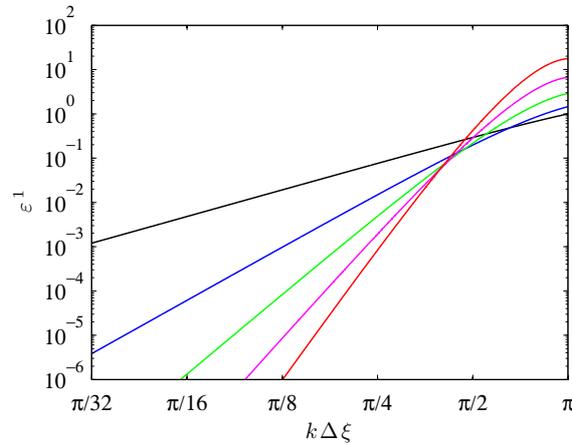


**Fig. 5.8:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^{N/2}$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange centrées à  $N$  points, avec  $N$  pair : — Interpolation de Lagrange à 2 points  $\text{LI2p}^1$ , — Interpolation de Lagrange à 4 points centrée  $\text{LI4p}^2$ , — Interpolation de Lagrange à 6 points centrée  $\text{LI6p}^3$ , — Interpolation de Lagrange à 8 points centrée  $\text{LI8p}^4$ , — Interpolation de Lagrange à 10 points centrée  $\text{LI10p}^5$ .

l'erreur globale d'interpolation décroît quand le nombre d'onde  $k\Delta\xi$  diminue. La décroissance est d'autant plus importante que le nombre de points donneurs est grand. Pour des nombres

d'onde  $k\Delta\xi$  inférieurs à  $\pi/4$ , on remarque que l'erreur est divisée respectivement par 4, 16, 64, 256 et 1024 quand le nombre d'onde  $k\Delta\xi$  est divisé par 2, pour les méthodes à 2, 4, 6, 8 et 10 points, ce qui correspond à des pentes respectives de 2, 4, 6, 8 et 10 octaves par octave. Les méthodes d'interpolation de Lagrange sont donc d'ordre formel maximal, égal au nombre de points donneurs du support d'interpolation. Le maximum d'erreur d'interpolation, qui vaut 100%, est obtenu pour des oscillations maille à maille. On observe qu'aucune des 5 méthodes proposées n'assure la contrainte numérique que l'on s'était fixé dans la partie 5.1.1, à savoir que l'erreur globale d'interpolation sur la cellule centrale  $\varepsilon^{N/2}$  soit inférieure à  $10^{-5}$  pour  $k\Delta\xi \in [0, 2\pi/5]$ .

La figure 5.8 montre l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations de Lagrange à 2, 4, 6, 8 et 10 points, mais décentrées sur la première cellule du support d'interpolation. Pour les bas nombres d'onde, allonger le support d'interpolation



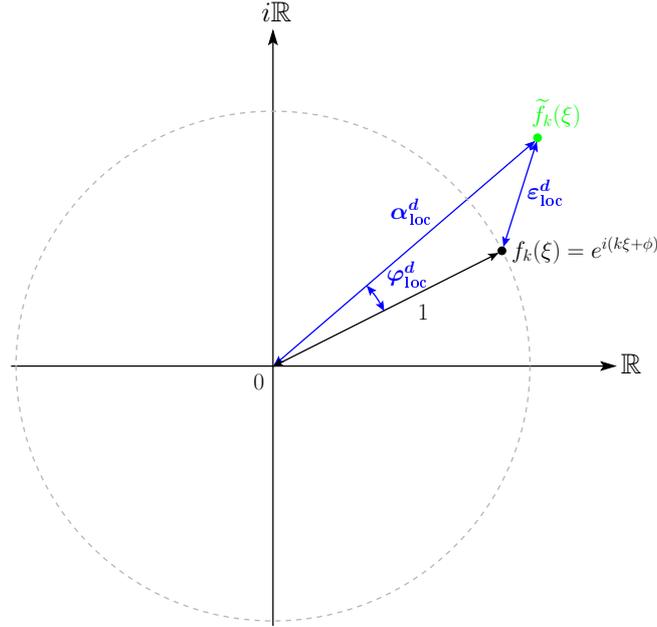
**Fig. 5.9:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange décentrées sur la première cellule : — Interpolation de Lagrange à 2 points LI2p<sup>1</sup> (centrée), — Interpolation de Lagrange à 4 points LI4p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 6 points LI6p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 8 points LI8p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 10 points LI10p<sup>1</sup>.

réduit l'erreur d'interpolation. Dans le même temps, l'erreur d'interpolation pour les hauts nombres d'onde augmente significativement et peut dépasser les 100% d'erreur pour les oscillations maille à maille. Aussi, la contrainte  $\varepsilon^1 \leq 10^{-5}$  paraît inaccessible sur l'intervalle  $[0, 2\pi/5]$  pour le cas décentré. Elle n'est pas requise de toute façon, puisque les méthodes numériques décentrées utilisées introduisent des niveaux d'erreur supérieurs. On choisit d'aligner les contraintes d'erreurs pour les interpolations décentrées sur les erreurs que l'on observe pour les schémas numériques décentrés de Berland *et al.* que l'on utilise dans ce travail [14], soit typiquement une erreur d'interpolation inférieure à  $10^{-4}$  pour  $k\Delta\xi \leq \pi/8$  et inférieure à  $10^{-5}$  pour  $k\Delta\xi \leq \pi/16$ . Les méthodes de Lagrange à 8 et 10 points décentrées sur la première cellule vérifient ces contraintes. L'interpolation linéaire LI2p<sup>1</sup> est enfin trop peu précise pour être utilisée dans les régions de communication impliquant un décentrage complet. En effet, l'erreur d'interpolation est beaucoup trop élevée même pour les bas nombres d'onde, puisqu'elle comprise entre  $10^{-3}$  et  $3 \times 10^{-2}$  sur le domaine  $k\Delta\xi \in [\pi/8, \pi/4]$ . Elle ne vérifie donc pas les limites d'erreur que l'on s'impose.

### 5.2.1.2 Amplification et déphasage d'interpolation

L'amplification locale d'interpolation sur la cellule  $d$ , que l'on note  $\alpha_{\text{loc}}^d$ , peut être définie par :

$$\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) = \left| \frac{\tilde{f}_k(\xi)}{f_k(\xi)} \right| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|$$



**Fig. 5.10:** Représentation dans le plan complexe de  $f_k(\xi)$  (●) et de  $\tilde{f}_k(\xi)$  (●), l'interpolation de  $f_k$  au point  $\xi$  obtenue par une méthode d'interpolation donnée. Le schéma offre une visualisation géométrique de l'erreur locale  $\varepsilon_{\text{loc}}^d$ , de l'amplification locale  $\alpha_{\text{loc}}^d$  et du déphasage local  $\varphi_{\text{loc}}^d$ .

L'amplification globale d'interpolation sur la cellule  $d$ , notée  $\alpha^d$ , est construite en prenant la plus grande amplification locale d'interpolation, lorsque la position relative d'interpolation  $\eta$  parcourt l'ensemble de la cellule  $d$  :

$$\alpha^d(k\Delta\xi) = \max_{\eta \in [0,1[} \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)$$

De la même manière, un déphasage local d'interpolation  $\phi_{\text{loc}}^d$  peut être estimé par :

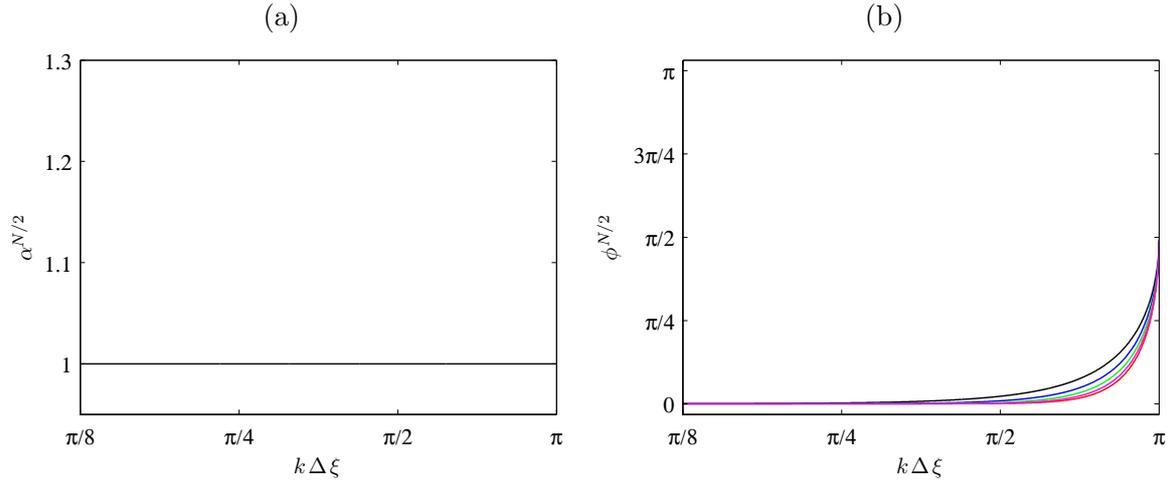
$$\phi_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) = \arg \frac{\tilde{f}_k(\xi)}{f_k(\xi)} = 2 \tan^{-1} \left( -\frac{\Re}{\Im} + \text{sgn}(\Im) \sqrt{1 + \left(\frac{\Re}{\Im}\right)^2} \right)$$

où les quantités  $\Re$  et  $\Im$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe :  $\sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta\xi}$ . Le déphasage global d'interpolation sur la cellule  $d$  vaut :

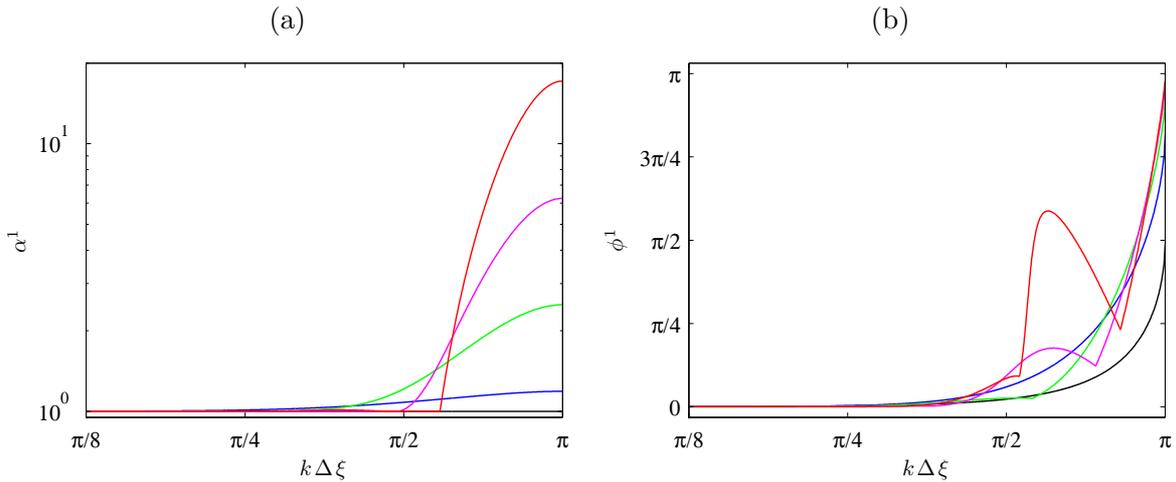
$$\phi^d(k\Delta\xi) = \max_{\eta \in [0,1[} \left| \phi_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right| \quad (5.4)$$

La figure 5.11 montre l'amplification et le déphasage d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange centrées à 2, 4, 6, 8 et 10 points. On observe sur la figure 5.11(a) que l'amplitude est constante égale à 1 quels que soient les nombres d'onde. Les interpolations de Lagrange centrées n'introduisent donc aucune amplification. Pour chacune des méthodes, le déphasage d'interpolation est nul pour les bas nombres d'onde, puis croît vers  $\pi/2$  pour les hauts nombres d'onde. Pour les hauts nombres d'onde, allonger le support d'interpolation réduit aussi le déphasage d'interpolation.

Sur la figure 5.12, on peut observer l'amplification et le déphasage d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange à 2, 4, 6, 8 et 10 points, décentrées sur la première cellule du support d'interpolation. Pour les bas nombres d'onde, l'amplification d'interpolation est très proche de 1, puis elle croît significativement pour les hauts nombres d'onde, et atteint son maximum pour les oscillations maille à maille. Ceci



**Fig. 5.11:** (a) Amplification globale d'interpolation  $\alpha^{N/2}$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange centrées à  $N$  points, avec  $N \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$  : les courbes sont confondues pour toutes les méthodes. (b) Déphasage global d'interpolation  $\phi^{N/2}$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange centrées à  $N$  points, avec  $N$  pair : — Interpolation de Lagrange à 2 points LI2p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 4 points centrée LI4p<sup>2</sup>, — Interpolation de Lagrange à 6 points centrée LI6p<sup>3</sup>, — Interpolation de Lagrange à 8 points centrée LI8p<sup>4</sup>, — Interpolation de Lagrange à 10 points centrée LI10p<sup>5</sup>.



**Fig. 5.12:** (a) Amplification globale d'interpolation  $\alpha^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange à  $N$  points décentrées sur la première cellule ( $N$  pair). (b) Déphasage global d'interpolation  $\phi^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations de Lagrange à  $N$  points décentrées sur la première cellule, avec  $N$  pair. — Interpolation de Lagrange à 2 points LI2p<sup>1</sup> (centrée), — Interpolation de Lagrange à 4 points LI4p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 6 points LI6p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 8 points LI8p<sup>1</sup>, — Interpolation de Lagrange à 10 points LI10p<sup>1</sup>.

est d'autant plus exacerbé que le support de points donneurs est long. Un tel comportement amplificateur tend à exclure cette famille d'interpolations décentrées pour notre calcul. En effet, la dissipation générée par le filtrage sélectif à hauts nombres d'onde peut ne pas être suffisante pour atténuer de forts niveaux d'amplification, ce qui conduirait à une pollution globale de la solution par des instabilités hautes fréquences. Sur la figure 5.12(b), on voit que le déphasage d'interpolation reste faible pour les bas nombres d'onde, mais il croît ensuite rapidement à partir de  $k\Delta\xi = \pi/2$ , avec présence d'un maximum local pour les méthodes de Lagrange à 6, 8 et 10 points. Le maximum de déphasage d'interpolation est atteint pour des oscillations maille à maille, avec une opposition de phase entre le signal original et le signal interpolé ( $\phi^1 = \pi$ ).

En conclusion, les interpolations de Lagrange présentent plusieurs inconvénients, aussi bien dans le cas centré que dans le cas décentré. Dans le cas centré, même avec un large support de points donneurs, elles ne permettent pas d'assurer une erreur d'interpolation suffisamment petite pour être utilisées avec les autres algorithmes numériques (différences finies, filtrage, etc.) sans dégrader la précision du calcul. Dans le cas décentré, les interpolations de Lagrange agissent à hauts nombres d'onde comme des amplificateurs, ce qui peut nuire à la stabilité numérique du calcul.

### 5.2.2 Interpolations optimisées 1-D

Cette partie propose une méthode d'interpolation optimisée dans l'espace des nombres d'onde, introduite par Tam & Kurbatskii dans [230], et revisitée pour un décentrage  $d$  quelconque. Le but de cette méthode est de diminuer l'erreur d'interpolation dans le domaine des nombres d'onde correctement résolus, au moins dans le cas centré.

#### 5.2.2.1 Minimisation de l'erreur intégrale d'interpolation

On introduit l'erreur intégrale d'interpolation  $\varepsilon_{\text{int}}^d$  associée à la cellule d'interpolation  $d$  sur l'intervalle des nombres d'onde  $k\Delta\xi \in [\kappa_l, \kappa_u]$  par :

$$\varepsilon_{\text{int}}^d(\eta) = \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^2 d(k\Delta\xi) \quad (5.5)$$

On se propose de minimiser cette erreur intégrale afin d'augmenter la limite de résolution d'interpolation. Le choix de l'intervalle d'intégration dépend bien sûr fortement du contexte d'utilisation de la méthode d'interpolation. L'utilisation de ces interpolations avec le schéma aux différences finies FDo11p invite à prendre comme intervalle d'intégration son domaine de résolution, c'est à dire l'intervalle  $[0, 2\pi/5]$ .

Dans la suite, on suppose que l'interpolation  $\tilde{f}$  de la fonction discrète  $f$  est  $\mathcal{C}^{N-1}$  sur le support d'interpolation  $]\xi_0, \xi_{N-1}[$ , afin de pouvoir la dériver au plus  $N - 1$  fois.

#### 5.2.2.2 Contraintes d'ordre formel d'interpolation

La méthode de Lagrange assure l'égalité de l'interpolation  $\tilde{f}$  et de la fonction  $f$  en chacun des points donneurs du maillage  $\xi_j$ . On choisit ici une condition plus flexible en chacun des points donneurs, en imposant que :

$$\tilde{f}(\xi_j) = f_j + \mathcal{O}(\Delta\xi^p) \quad (5.6)$$

où  $p$  est l'ordre formel d'interpolation ( $p \in \{1, \dots, N - 1\}$ ). À proprement parler, la méthode résultante n'est donc plus une interpolation mais une approximation. Cette condition peut être exprimée comme des contraintes sur les coefficients d'interpolation  $s_j^d(\eta)$ . Pour cela, on effectue un développement de Taylor de la fonction  $\tilde{f}$  à l'ordre  $p$  dans un voisinage de chaque point donneur :  $\forall j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ ,

$$\tilde{f}(\xi_j) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(j + \chi)^r \Delta\xi^r}{r!} \tilde{f}^{(r)}(\xi_0 - \chi\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\xi^p)$$

que l'on peut réécrire, grâce à l'équation (5.6) :

$$f_j = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(j + \chi)^r \Delta\xi^r}{r!} \tilde{f}^{(r)}(\xi) + \mathcal{O}(\Delta\xi^p) \quad (5.7)$$

Ces  $N$  équations (5.7) sont ensuite réinjectées dans l'équation (5.2). Une analyse de l'ordre des termes fournit les  $p$  équations :  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta)(j + \chi)^r = \delta_0^r \quad (5.8)$$

### 5.2.2.3 Résolution par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'obtention d'une interpolation optimisée passe par la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes. On propose ici une résolution grâce à la méthode des multiplicateurs de Lagrange [15]. On introduit  $p$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_r$  associés aux contraintes d'ordre formel. Le problème d'optimisation sous contraintes précédent peut être traité comme un problème d'optimisation sans contraintes sur le Lagrangien  $\mathcal{L}$ , défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^2 d(k\Delta\xi) \\ &+ \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j + \chi)^r - \delta_0^r \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les coefficients d'interpolation  $s_j^d$  ainsi que les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_r$  sont obtenus par la résolution du système linéaire suivant :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_l^d} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_r} = 0 \quad (5.10)$$

Ce système linéaire peut s'écrire matriciellement de la manière suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ {}^t\mathbf{M}_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} s_0^d(\eta) \\ s_1^d(\eta) \\ \vdots \\ s_{N-1}^d(\eta) \\ \lambda_0(\eta) \\ \lambda_1(\eta) \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice symétrique inversible de taille  $(N+p) \times (N+p)$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall (l, j) \in \{0, \dots, N-1\}^2, \quad \mathbf{M}_1(l+1, j+1) &= \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(j-l) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(j-l) \\ \forall (l, j) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, p-1\}, \quad \mathbf{M}_2(l+1, j+1) &= 1/2 (l + \chi)^j \end{aligned}$$

et le vecteur  $\mathbf{V}$  vaut :

$$\forall l \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \mathbf{V}(l+1) = \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(l + \chi) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(l + \chi)$$

Les détails de calcul sont disponibles en annexe B.

La solution s'exprime de manière explicite grâce à la méthode d'inversion par blocs de Strassen [227] :

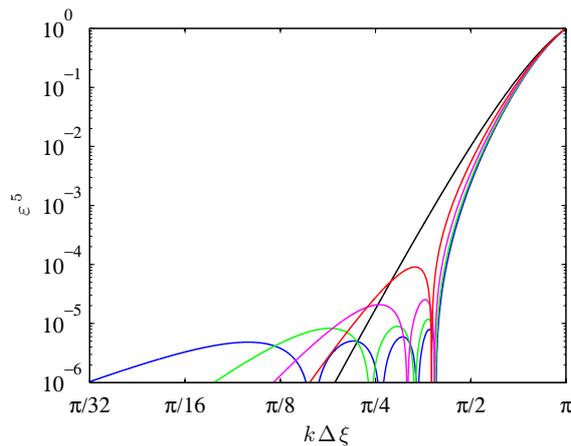
$$\begin{bmatrix} s_0^d(\eta) \\ s_1^d(\eta) \\ \vdots \\ s_{n-1}^d(\eta) \\ \lambda_0(\eta) \\ \lambda_1(\eta) \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}{}^t\mathbf{D} & -\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}{}^t\mathbf{D} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où la matrice  $\mathbf{C}$  est le complément de Schur de la matrice  $\mathbf{M}_1$  que l'on définit par  $\mathbf{C} = -{}^t\mathbf{M}_2\mathbf{D}$ , avec  $\mathbf{D} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2$ .

Dans la suite, cette famille de méthodes d'interpolation est notée  $\text{OINpp}o^d$ , où  $N$  correspond à la longueur du support de points donneurs,  $p$  l'ordre formel d'interpolation et  $d$  la cellule d'interpolation. L'interpolation est centrée quand  $N$  est pair et  $d$  vaut  $N/2$ .

#### 5.2.2.4 Erreur globale d'interpolation

La figure 5.13 présente l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange centrée à 10 points et pour les interpolations optimisées centrées à 10 points d'ordre 2, 4, 6 et 8. Pour les hauts nombres d'onde, l'erreur d'interpolation

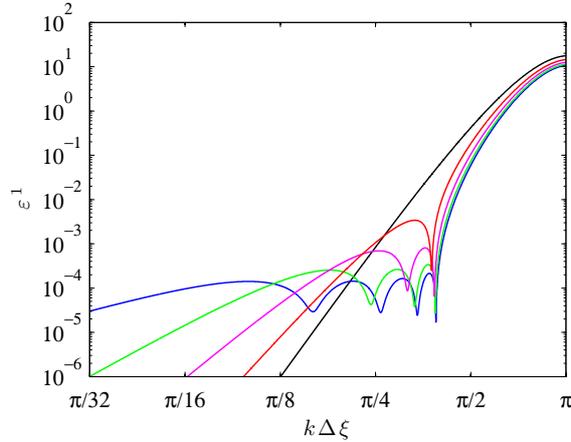


**Fig. 5.13:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^5$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange centrée à 10 points et les interpolations optimisées centrées à 10 points d'ordre 2, 4, 6, et 8 : — Interpolation de Lagrange à 10 points centrée LI10p<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 2 OI10p2o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 4 OI10p4o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 6 OI10p6o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 8 OI10p8o<sup>5</sup>.

obtenue pour des interpolations optimisées à 10 points est inférieure, quel que soit l'ordre formel, à celle obtenue pour une interpolation de Lagrange à 10 points. L'amélioration est notable, car on obtient jusqu'à deux ordres de grandeurs de réduction de l'erreur d'interpolation, notamment dans l'intervalle  $k\Delta\xi \in [\pi/4, \pi/2]$ . Pour les bas nombres d'onde, l'erreur d'interpolation des méthodes optimisées est supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à celle obtenue pour la méthode de Lagrange, mais reste inférieure à  $10^{-5}$  par exemple pour la méthode optimisée d'ordre 2. On observe que la méthode optimisée à 10 points d'ordre 2 permet même d'assurer une erreur d'interpolation inférieure à  $10^{-5}$  sur l'ensemble du domaine correctement résolu. On utilise donc cette méthode pour faire communiquer deux maillages élémentaires, quand une interpolation centrée à 10 points est possible.

La figure 5.14 montre l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange à 10 points et pour les interpolations optimisées à 10 points

d'ordre 2, 4, 6 et 8, décentrées sur la première cellule. Pour chacune des méthodes, l'erreur



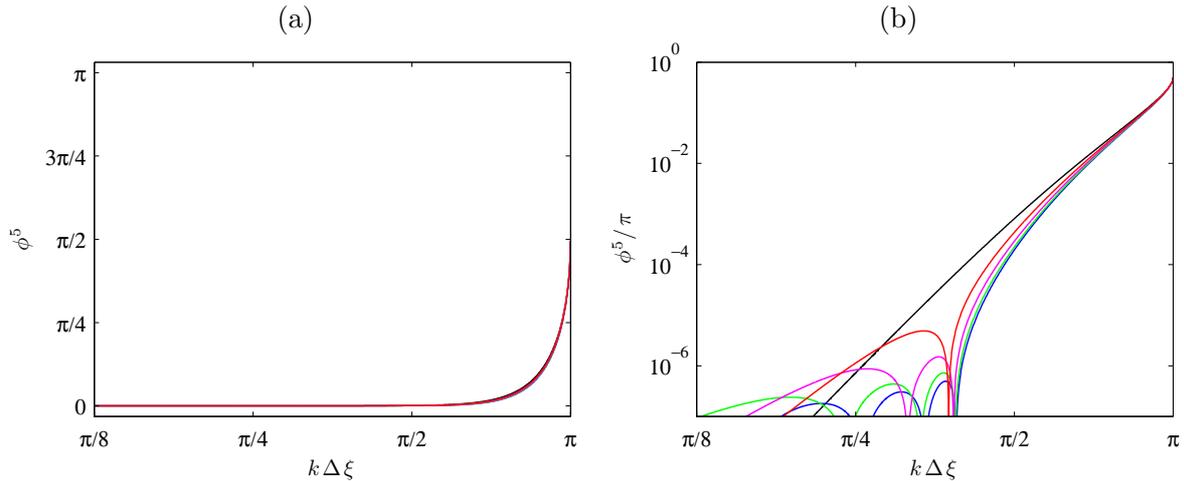
**Fig. 5.14:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange à 10 points et les interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2, 4, 6, et 8, décentrées sur la première cellule : — Interpolation de Lagrange à 10 points LI10p<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 2 OI10p2o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 4 OI10p4o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 6 OI10p6o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 8 OI10p8o<sup>1</sup>.

d'interpolation est globalement dix fois plus élevée que dans le cas centré. Augmenter l'ordre formel d'interpolation tend à diminuer l'erreur d'interpolation pour les bas nombres d'onde. L'erreur d'interpolation est aussi significativement réduite par le procédé d'optimisation pour les hauts nombres d'onde  $k\Delta\xi \in [\pi/4, \pi/2]$ , par rapport à l'interpolation de Lagrange sur le même support de points donneurs. Cependant, la réduction ne reste que marginale pour les oscillations maille à maille. En effet, le maximum d'erreur reste élevé, de l'ordre de 10, quel que soit l'ordre formel d'interpolation.

### 5.2.2.5 Amplification et déphasage d'interpolation

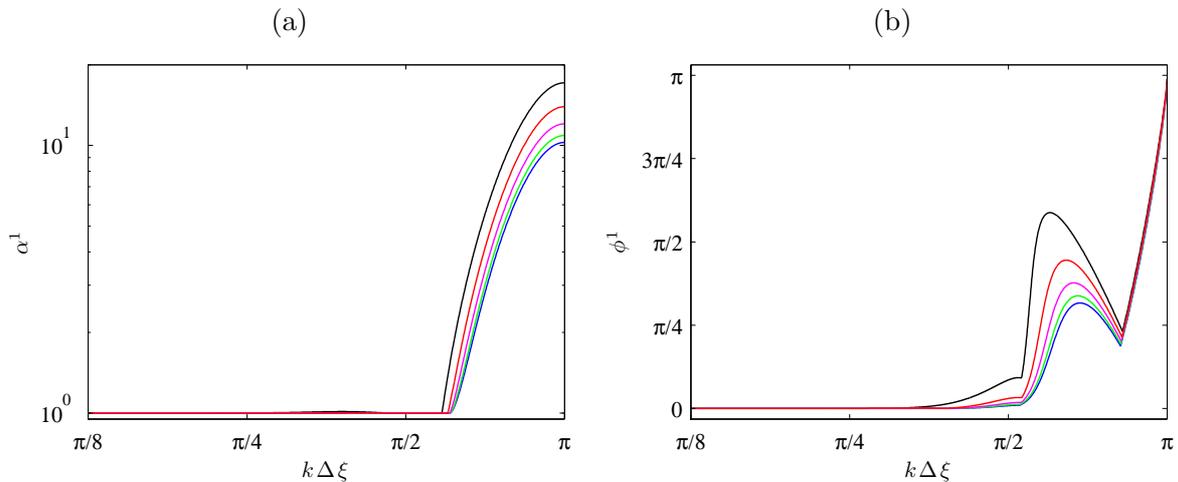
Dans le cas centré, l'amplification globale d'interpolation sur la cellule centrale  $\alpha^{N/2}$  est identiquement égale à 1, quel que soit le nombre de points pair  $N$  du support d'interpolation et l'ordre formel d'interpolation. À longueur de support d'interpolation constante, l'ordre formel d'interpolation n'a que très peu d'influence sur le déphasage d'interpolation, et le procédé d'optimisation n'améliore pas significativement le déphasage d'interpolation, comme le montre la figure 5.15 pour la méthode de Lagrange centrée à 10 points et les méthodes d'interpolation optimisées centrée à 10 points d'ordre 2, 4, 6 et 8. Une diminution marginale du déphasage d'interpolation est observée essentiellement sur l'intervalle  $[\pi/4, \pi/2]$  par rapport à l'interpolation de Lagrange, pour laquelle le déphasage d'interpolation est déjà négligeable, puisqu'inférieur à  $10^{-3}\pi$ .

Dans le cas décentré, l'amplification globale d'interpolation  $\alpha^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange à 10 points et les interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2, 4, 6 et 8, décentrées sur la première cellule est présentée à la figure 5.16(a). On observe qu'une amplification est toujours présente pour les hauts nombres d'onde. Une diminution de l'ordre formel tend à réduire le domaine des hauts nombres d'onde où l'amplification d'interpolation dépasse 1. L'amplification d'interpolation, qui est maximale pour des oscillations maille à maille, augmente enfin significativement avec l'ordre formel d'interpolation. La figure 5.16(b) montre le déphasage d'interpolation associé. On observe pour chaque méthode un déphasage proche de 0 pour les faibles nombres d'onde, et un déphasage important pour les hauts nombres d'onde, avec la présence d'un maximum local pour  $k\Delta\xi \in [\pi/2, \pi]$ , et un déphasage maximal de  $\pi$  pour les oscillations maille à maille. La diminution de l'ordre formel



**Fig. 5.15:** Déphasage global d'interpolation  $\phi^5$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange centrée à 10 points et les interpolations optimisées centrées à 10 points d'ordre 2, 4, 6, et 8 : — Interpolation de Lagrange à 10 points centrée LI10p<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 2 OI10p2o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 4 OI10p4o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 6 OI10p6o<sup>5</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points centrée d'ordre 8 OI10p8o<sup>5</sup>. (a) Échelle linéaire. (b) Échelle logarithmique.

d'interpolation tend à réduire le déphasage, notamment dans la région du maximum local  $k\Delta\xi \in [\pi/2, \pi]$ .



**Fig. 5.16:** (a) Amplification globale d'interpolation  $\alpha^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange à 10 points et les interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2, 4, 6 et 8, décentrées sur la première cellule. (b) Déphasage global d'interpolation  $\phi^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour l'interpolation de Lagrange à 10 points et les interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2, 4, 6 et 8, décentrées sur la première cellule. — Interpolation de Lagrange à 10 points LI10p<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 2 OI10p2o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 4 OI10p4o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 6 OI10p6o<sup>1</sup>, — Interpolation optimisée à 10 points d'ordre 8 OI10p8o<sup>1</sup>.

Cette étude montre que le processus d'optimisation dans l'espace des nombres d'onde permet dans le cas centré d'assurer une précision comparable aux autres méthodes numériques utilisées dans les simulations sur l'ensemble du domaine correctement résolu, quand le support d'interpolation est assez long : c'est le cas par exemple pour la méthode centrée à 10 points d'ordre 2 (OI10p2o<sup>5</sup>). Elle est donc utilisée comme outil de communication, lorsqu'une interpolation centrée est possible. Dans le cas décentré, certaines méthodes permettent d'assurer la précision requise. Même si une réduction de l'ordre formel d'interpolation permet de réduire

l'amplification d'interpolation, la réduction n'est pas suffisante pour assurer une simulation stable. En effet, les niveaux d'amplification pour les oscillations maille à maille restent élevées, entre 10 et 20, pour des méthodes à 10 points. On envisage donc à la partie 5.3 d'ajouter dans le processus d'optimisation un contrôle sur l'amplification afin de limiter au maximum ce phénomène.

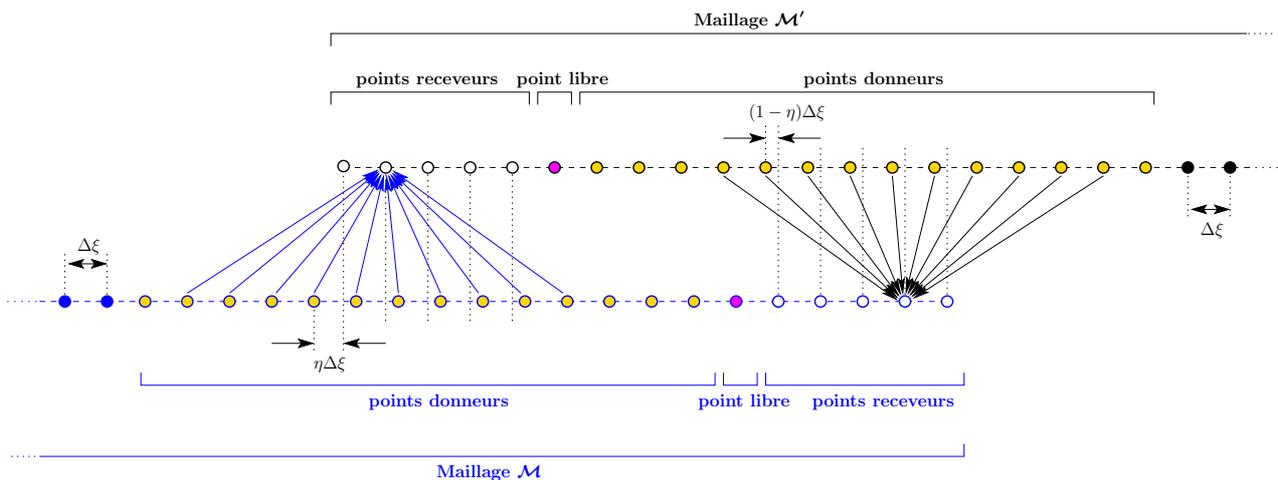
### 5.2.2.6 Bibliothèque LAPACK pour le calcul scientifique

L'utilisation de méthodes d'interpolation optimisées centrées nécessite des inversions matricielles pour obtenir les coefficients d'interpolation  $s_j^d$ . L'inversion matricielle, très coûteuse numériquement, est menée à l'aide de la bibliothèque d'algèbre linéaire LAPACK (*Linear Algebra Package*), qui fournit des fonctions préprogrammées optimisées pour effectuer ce genre d'opérations. Ainsi, la fonction DGESV permet une résolution directe d'un système linéaire de taille quelconque de manière très performante. L'optimisation porte à la fois sur les méthodes numériques d'inversion matricielle (décomposition LU), et sur l'implémentation même des méthodes.

### 5.2.3 Mise en œuvre d'une communication bidirectionnelle

Cette partie détaille la mise en œuvre en pratique d'une zone de communication bidirectionnelle entre deux maillages à l'aide de la méthode OI10p2o<sup>5</sup>, dans le contexte d'une utilisation couplée avec un schéma aux différences finies sur 11 points et un algorithme d'intégration temporelle de Runge–Kutta. On se donne deux maillages  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  ayant un pas de discrétisation identique  $\Delta\xi$  à titre démonstratif. On souhaite établir une communication avec la méthode OI10p2o<sup>5</sup> aussi bien pour la communication depuis  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$  que pour la communication réciproque, depuis  $\mathcal{M}'$  vers  $\mathcal{M}$ . Le maillage  $\mathcal{M}'$  est translaté du maillage  $\mathcal{M}$  de telle manière que les interpolations depuis  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$  sont effectuées à la position  $\eta\Delta\xi$  dans la cellule d'interpolation.

La figure 5.17 donne un aperçu des fonctions de chacun des points dans la zone de superposition. Elle met en évidence des contraintes géométriques à respecter pour assurer la stabilité du calcul. Le nombre de points receveurs dépend de la longueur du support du schéma centré

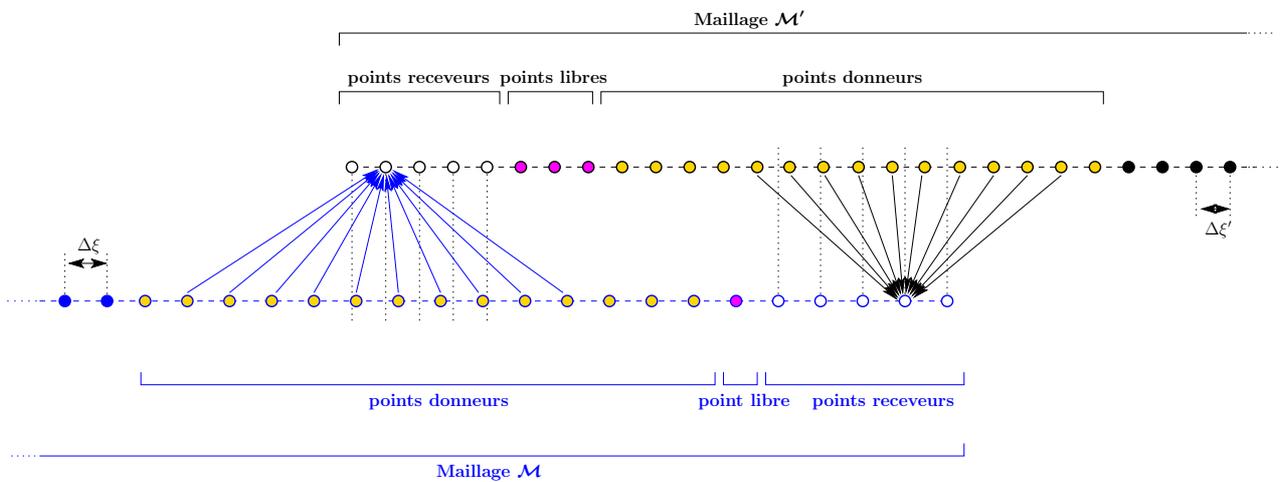


**Fig. 5.17:** Détail des fonctions des points de maillage d'une zone de superposition pour une communication par interpolation centrée optimisée à 10 points d'ordre 2 (OI10p2o<sup>5</sup>), avec des maillages de pas de discrétisation égaux.  $\circ/\circ$  : points receveurs,  $\bullet/\bullet$  : points donneurs,  $\circ/\bullet$  : points libres,  $\bullet/\circ$  : points hors zone de communication.

aux différences finies utilisé. Pour un schéma à 11 points, un support centré n'est utilisable qu'à partir du 6<sup>ème</sup> point jusqu'au 6<sup>ème</sup> dernier point. Ceci implique que les 5 premiers points du maillage  $\mathcal{M}$  soient des points receveurs, ainsi que les 5 derniers points du maillage  $\mathcal{M}'$ .

En chacun de ces points receveurs (points remplis en blanc sur la figure 5.17), l’avancement en temps est mené par interpolation. Ainsi, lorsque le processus d’interpolation est effectué, les points receveurs doivent recevoir des données qui ont déjà été intégrées en temps par l’algorithme de Runge–Kutta. Par conséquent, les zones donneuse et réceptrice de chacun des maillages ne doivent pas se chevaucher, afin d’éviter qu’un point receveur d’un maillage, dont les données n’ont pas été avancées en temps, n’envoie ces mêmes données pour un avancement en temps vers un point receveur du second maillage. On impose donc la présence d’au moins un point libre entre les zones donneuse et réceptrice de chacun des maillages dans la zone de superposition (points remplis en magenta sur la figure 5.17).

En pratique, les maillages  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  ont bien souvent des pas de discrétisation respectifs  $\Delta\xi$  et  $\Delta\xi'$  différents. La zone de superposition ressemble alors à celle exposée par la figure 5.18. Contrairement au cas précédent, les interpolations de communication depuis  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$



**Fig. 5.18:** Détail des fonctions des points de maillage d’une zone de superposition pour une communication par interpolation centrée optimisée à 10 points d’ordre 2 (OI10p2o<sup>5</sup>), avec des maillages de pas de discrétisation différents.  $\circ/\circ$  : points receveurs,  $\bullet/\bullet$  : points donneurs,  $\color{magenta}\bullet/\color{magenta}\bullet$  : points libres,  $\bullet/\bullet$  : points hors zone de communication.

ne sont plus systématiquement menées à la position relative  $\eta$ , mais à une position relative qui dépend de la maille où est menée l’interpolation. Il en est de même pour la communication depuis  $\mathcal{M}'$  vers  $\mathcal{M}$ . La mise en œuvre d’une communication bidirectionnelle ne présente toutefois pas plus de difficulté que dans le cas exposé précédemment : il faut simplement rester vigilant à conserver au moins un point libre sur chacun des maillages dans la zone de superposition afin d’assurer le bon fonctionnement des algorithmes de communication.

### 5.3 Interpolations décentrées optimisées 1–D avec contrôle de l’amplification

Le cas décentré demande une attention particulière car les interpolations décentrées agissent naturellement comme des amplificateurs hautes fréquences. Leur utilisation dans une simulation nécessite donc un contrôle du maximum d’amplification d’interpolation pour assurer la stabilité de la simulation. Ceci constitue une contrainte supplémentaire dans la résolution du problème de minimisation sous contraintes précédent.

### 5.3.1 Contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation

Idéalement, la contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation limiterait l'amplification à 1, quel que soit le nombre d'onde et quelle que soit la position d'interpolation :

$$\forall k\Delta\xi \in [0, \pi], \forall \eta \in [0, 1[, \quad \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \leq 1$$

que l'on peut reformuler en une unique équation, par :

$$\max_{\substack{k\Delta\xi \in [0, \pi] \\ \eta \in [0, 1[}} \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \leq 1$$

Cette contrainte pose une difficulté majeure pour la résolution du problème d'optimisation : elle est globale en la position d'interpolation  $\eta$ , alors que le reste du problème est formulé localement. Elle couple donc un ensemble de problèmes d'optimisation formulés à des positions  $\eta$  fixées dans  $[0, 1[$ . En d'autres termes, le problème d'optimisation à une position d'interpolation  $\eta$  donnée ne peut être résolu indépendamment de la résolution du problème en toutes les autres positions d'interpolation. Nous ne connaissons pas de méthodes pour résoudre un problème d'optimisation avec ce type de contrainte. Aussi, il paraît peu raisonnable d'interdire toute amplification, même minime, car cela risquerait d'éliminer toute solution au problème.

Ce constat invite à préférer une expression locale du contrôle de l'amplification d'interpolation, avec un contrôle portant sur le dépassement d'amplification toléré  $\alpha_{\text{tol}}$ . La contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation s'exprime localement par :

$$\forall k\Delta\xi \in [0, \pi], \quad \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \leq 1 + \alpha_{\text{tol}}$$

L'équation précédente peut être reformulée en une unique équation locale, dépendant de la position relative d'interpolation  $\eta$  :

$$\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{\infty} = \max_{k\Delta\xi \in [0, \pi]} \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \leq 1 + \alpha_{\text{tol}}$$

La contrainte précédente, en tant qu'inégalité, rend le problème difficile à résoudre. Même si des algorithmes existent pour traiter les problèmes de minimisation avec des contraintes inégalités, comme l'algorithme de Karush–Kuhn–Tucker [118, 133], ou l'algorithme du Lagrangien augmenté, on préfère imposer l'égalité  $\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{\infty} = 1 + \alpha_{\text{tol}}$ , qui est plus facile à manipuler. Ce choix a un impact important, puisqu'il impose une amplification, même minime, en chacune des positions d'interpolation, y compris les positions d'interpolation stables avec les méthodes décentrées décrites précédemment, pour lesquelles on a  $\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{\infty} < 1 + \alpha_{\text{tol}}$ .

La dérivabilité de la fonction  $\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{\infty}$  par rapport aux coefficients d'interpolation  $s_j^d$ , nécessaire pour une résolution à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, n'est pas évidente. On choisit donc d'approximer la norme infinie dans la contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation par la norme  $L^{2q}$ , avec  $q$  un entier supérieur à 2, que l'on sait dérivable par rapport aux coefficients  $s_j^d$ . Cette approximation est justifiée par la convergence simple dans l'espace de fonctions  $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R}^+)$  de la norme  $L^{2q}$  vers la norme infinie<sup>1</sup>. La

<sup>1</sup>Pour démontrer ce résultat, on se place à  $\eta$  fixé. Il suffit d'observer que pour tout réel  $m \in [0, \|\alpha_{\text{loc}}^d\|_{\infty}[$ , on a l'encadrement :  $(\int_0^{\pi} \mathbf{1}_{\alpha_{\text{loc}}^d(k\Delta\xi) > m}(k\Delta\xi) d(k\Delta\xi))^{1/2q} m \leq \|\alpha_{\text{loc}}^d\|_{2q} \leq \pi^{1/2q} \|\alpha_{\text{loc}}^d\|_{\infty}$ . Comme  $\alpha_{\text{loc}}^d$  est continue sur  $[0, \pi]$  en la variable  $k\Delta\xi$ , il existe un intervalle non-dégénéré sur lequel  $\alpha_{\text{loc}}^d(k\Delta\xi) > m$  : l'intégrale du membre de gauche dans l'encadrement est donc non-nulle. Il suffit maintenant de prendre la limite quand  $q$  tend vers  $+\infty$ , puis de faire tendre  $m$  vers  $\|\alpha_{\text{loc}}^d\|_{\infty}$  le maximum de la fonction  $\alpha_{\text{loc}}^d$ , pour établir le résultat, par théorème d'encadrement.

contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation s'exprime donc :

$$\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{2q} = \left( \int_0^\pi \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^{2q} d(k\Delta\xi) \right)^{1/2q} = 1 + \alpha_{\text{tol}} \quad (5.12)$$

Le problème de minimisation peut donc maintenant être résolu à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cependant, le choix de l'entier  $q$  reste un problème délicat.

### 5.3.1.1 Choix de l'entier $q$

Le fait d'avoir seulement une convergence simple des normes  $L^{2q}$  vers la norme infinie dans l'espace de fonctions  $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R}^+)$  rend non seulement l'entier  $q$  dépendant de la position relative d'interpolation  $\eta$ , mais rend aussi impossible le contrôle de l'erreur d'approximation  $|\|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{2q} - \|\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi)\|_{+\infty}|$  indépendamment de la fonction  $\alpha_{\text{loc}}^d$ . En d'autres termes, pour une erreur d'approximation donnée, l'entier  $q$  dépend de la position relative d'interpolation  $\eta$ , de la longueur du support d'interpolation  $N$ , du degré de décentrage  $d$  et de l'ordre formel d'interpolation  $p$ . Il a été observé numériquement que poser  $q = 30$  assure un bon compromis entre la précision d'approximation et la convergence de l'algorithme de résolution du problème de minimisation sous contraintes présenté dans la suite.

### 5.3.1.2 Choix de la tolérance $\alpha_{\text{tol}}$

La tolérance  $\alpha_{\text{tol}}$  doit être prise aussi petite que possible, pour réduire au maximum l'amplification d'interpolation à hauts nombre d'onde. Compte tenu des différentes approximations qui sont effectuées dans la formulation de la contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation et de la nature amplificatrice des interpolations décentrées, la tolérance ne peut être prise nulle. En pratique, on observe que  $\alpha_{\text{tol}} = 0.035$  assure de bons résultats. Néanmoins, pour certaines méthodes d'interpolation présentant un support d'interpolation de plus de 5 points ou pour une interpolation sur la première cellule  $d = 1$ , une tolérance relaxée jusqu'à 0.3 a été nécessaire pour assurer la convergence de l'algorithme de résolution du problème de minimisation sous contraintes.

## 5.3.2 Résolution par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

On introduit  $\mu_1$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte sur le contrôle de l'amplification d'interpolation. Le Lagrangien associé à ce problème de minimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}, \mu_1) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^2 d(k\Delta x) \\ &+ \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j + \chi)^r - \delta_0^r \right) \\ &+ \mu_1 \left( \int_0^\pi \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^{2q} d(k\Delta\xi) - (1 + \alpha_{\text{tol}})^{2q} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Les coefficients d'interpolations  $s_j^d$ , ainsi que les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_r$  et  $\mu_1$  sont obtenu en résolvant le système non-linéaire suivant :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_l^d} = 0 \quad (\mathcal{E}_l^1), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_r} = 0 \quad (\mathcal{E}_r^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = 0 \quad (\mathcal{E}^3) \quad (5.14)$$

Les contraintes sur l'ordre formel d'interpolation sont contenues dans les  $p$  équations de type  $(\mathcal{E}^2)$ , tandis que la contrainte sur le contrôle de l'amplification d'interpolation est contenu dans l'équation  $(\mathcal{E}^3)$ . Les  $N$  équations de type  $(\mathcal{E}^1)$  peuvent être explicitées (voir en annexe B) :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,

$$2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) (\kappa_u \operatorname{sinc}(j-l)\kappa_u - \kappa_l \operatorname{sinc}(j-l)\kappa_l) - 2 (\kappa_u \operatorname{sinc}(l+\chi)\kappa_u - \kappa_l \operatorname{sinc}(l+\chi)\kappa_l) \\ + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r(\eta) (l+\chi)^r + 2q\mu_1(\eta) \int_0^\pi \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) \cos(j-l)k\Delta x \right) \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^{2q-2} d(k\Delta\xi) = 0$$

Dans toute la suite, on note  $\mathcal{E} = \mathbf{0}$  le système non-linéaire à résoudre, avec  $\mathcal{E} = {}^t[\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3]$ . Les vecteurs  $\mathcal{E}^1$  et  $\mathcal{E}^2$  sont respectivement le vecteur composé des membres de gauche dans les équations  $\mathcal{E}_l^1$  et  $\mathcal{E}_r^2$ .

### 5.3.2.1 Résolution du système non-linéaire

Il existe une multitude de méthodes plus ou moins élaborées pour résoudre le système non-linéaire  $\mathcal{E} = \mathbf{0}$  [4, 36, 52, 58, 102]. On choisit ici la méthode de Newton–Raphson pour sa simplicité, que l'on décrit dans la suite. On note  $\mathcal{F}$  le vecteur des inconnues :

$$\mathcal{F} = {}^t[s_0^d(\eta), s_1^d(\eta), \dots, s_{N-1}^d(\eta), \lambda_0(\eta), \lambda_1(\eta), \dots, \lambda_{p-1}(\eta), \mu_1(\eta)]$$

On note  $\mathcal{F}^n$  le vecteur des inconnues à l'itération  $n$ . L'algorithme est d'abord initialisé à l'aide d'un vecteur de départ arbitraire à déterminer  $\mathcal{F}^0$ . Le vecteur des inconnues est ensuite calculé à l'itération  $n+1$  à l'aide de sa valeur à l'itération  $n$  précédente par la relation de récurrence :

$$\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}^n - \nabla \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{F}^n) \mathcal{E}(\mathcal{F}^n)$$

La matrice  $\nabla \mathcal{E}$  est la matrice jacobienne du vecteur  $\mathcal{E}$ , symétrique, inversible et de dimension  $(N+p+1) \times (N+p+1)$ . Le calcul de cette matrice est explicité en annexe B. L'algorithme s'arrête quand la norme euclidienne du vecteur  $\mathcal{F}^{n+1} - \mathcal{F}^n$  est en-deçà d'une tolérance  $\varepsilon_{\text{tol}}$ , fixée ici à  $10^{-12}$ . À noter que ce critère d'arrêt est une condition non-suffisante de convergence.

### 5.3.2.2 Choix de l'initialisation $\mathcal{F}^0$

L'élément final pour obtenir une méthode d'interpolation décentrée optimisée avec contrôle de l'amplification d'interpolation est le choix de vecteur initialisant l'algorithme itératif de Newton–Raphson  $\mathcal{F}^0$ . Cependant, il n'est pas aisé de choisir ce vecteur d'initialisation, ce qui en fait l'un des inconvénients de la méthode [168]. Sebah & Gourdon rapportent que l'algorithme de Newton–Raphson converge si l'initialisation est choisie dans un voisinage de la solution, mettant en évidence l'aspect local de la convergence [208]. Dans notre cas, pour une position relative d'interpolation donnée  $\eta$ , la valeur des coefficients  $s_j^d$  et des multiplicateurs de Lagrange sont inconnues *a priori*, ce qui rend l'algorithme vraiment délicat à initialiser. On choisit dans ces conditions d'initialiser l'algorithme de Newton–Raphson indépendamment de la position d'interpolation  $\eta$ . On observe numériquement que les initialisations suivantes permettent d'assurer la convergence de l'algorithme :  $\forall j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  :

$$\mathcal{F}_{\text{init0}}^0 : \begin{cases} s_j^d(\eta) = 0 \\ \lambda_r(\eta) = 0 \\ \mu_1(\eta) = 0 \end{cases} \quad \mathcal{F}_{\text{init1}}^0 : \begin{cases} s_j^d(\eta) = 1/N \\ \lambda_r(\eta) = 0 \\ \mu_1(\eta) = 0 \end{cases}$$

Dans certains cas, une quadruple précision est nécessaire pour gérer les très grandes normes du vecteur  $\mathcal{F}^{m+1} - \mathcal{F}^m$ , surtout pour les premières itérations. Il a été observé que l'initialisation  $\mathcal{F}_{\text{init}0}^0$  convient pour les méthodes décentrées sur un nombre faible ou modéré de points, tandis que l'initialisation  $\mathcal{F}_{\text{init}1}^0$  est appropriée pour les méthodes décentrées à large support d'interpolation, ou d'ordre formel élevé.

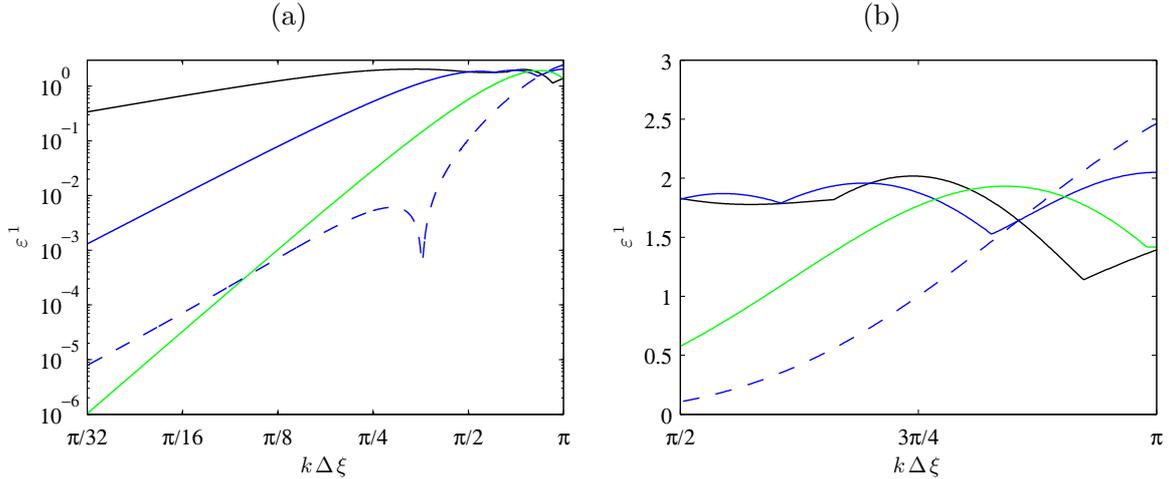
Dans toute la suite, les méthodes d'interpolation optimisée à  $N$  points d'ordre formel  $p$  décentrée sur la cellule  $d$  du support d'interpolation sont notées  $\text{COIN}_{ppo}^d$ .

### 5.3.3 Résultats numériques

On étudie dans un premier temps l'influence de l'ordre formel d'interpolation à longueur de support d'interpolation constante.

#### 5.3.3.1 Influence de l'ordre formel d'interpolation

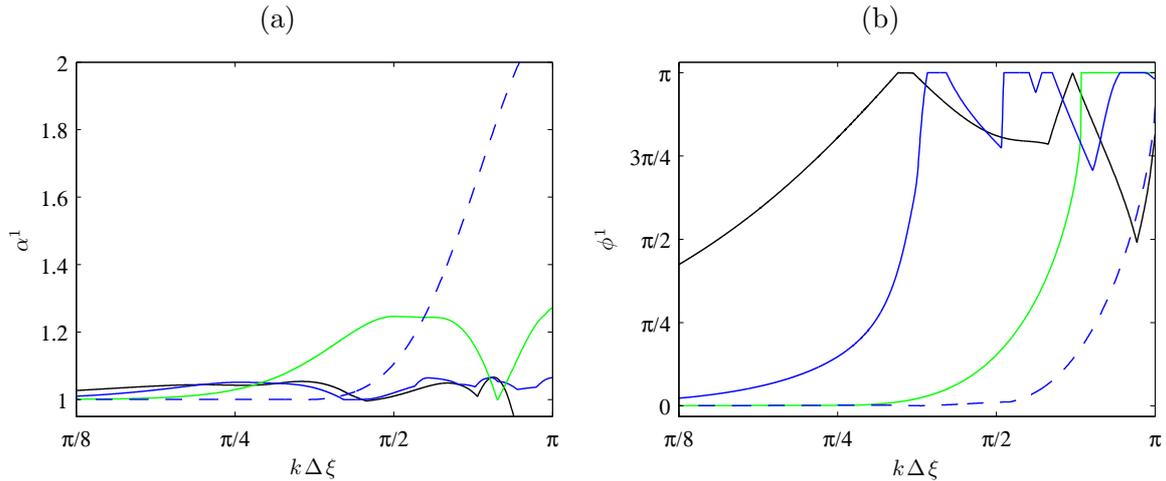
La figure 5.19(a) montre l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde pour des méthodes d'interpolation à 6 points avec contrôle de l'amplification d'interpolation d'ordre 1, 3 et 5, et sans contrôle d'interpolation d'ordre 3 ( $\text{OI6p3o}^1$ ). La figure 5.19(b) présente une vue locale pour les hauts nombres d'onde  $k\Delta\xi \in [\pi/2, \pi]$ . Pour les interpola-



**Fig. 5.19:** (a) Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^{-1}$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 6 points, avec et sans contrôle de l'amplification d'interpolation, d'ordre 1, 3 et 5. (b) Vue locale pour les hauts nombres d'onde  $k\Delta\xi \in [\pi/2, \pi]$ . —  $\text{COI6p1o}^1$ , —  $\text{COI6p3o}^1$ , —  $\text{COI6p5o}^1$ , - -  $\text{OI6p5o}^1$ .

tions avec contrôle de l'amplification d'interpolation, l'erreur est proche de 2 pour les hauts nombres d'onde, puis décroît rapidement pour les bas nombres d'onde. Une augmentation de l'ordre formel permet également une nette diminution de l'erreur d'interpolation à bas nombres d'onde. Enfin, on remarque que l'ajout de la contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation est à l'origine d'une augmentation globale de l'erreur d'interpolation de plusieurs ordres de grandeurs, comparée à celle obtenue pour la méthode associée sans contrôle d'amplification d'interpolation, comme le montre la figure 5.19(a) pour la méthode  $\text{COI6p3o}^1$  et pour  $\text{OI6p3o}^1$ , sauf pour des nombres d'onde  $k\Delta\xi$  proches de  $\pi$  (figure figure 5.19(b)).

Les courbes d'amplification et de déphasage globaux d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde sont données par la figure 5.20 pour des méthodes d'interpolation à 6 points avec contrôle de l'amplification d'interpolation d'ordre 1, 3 et 5, et sans contrôle d'interpolation d'ordre 3. L'amplification d'interpolation pour les méthodes avec contrôle reste faible quels que soient les nombres d'onde, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes sans contrôle. L'amplification est légèrement supérieure pour la méthode avec contrôle d'ordre 5  $\text{COI6p5o}^1$  car on a utilisé une tolérance  $\alpha_{\text{tol}}$  relaxée à 0.2 dans l'équation (5.12) pour assurer la stabilité



**Fig. 5.20:** (a) Amplification globale d'interpolation  $\alpha^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 6 points, avec et sans contrôle de l'amplification d'interpolation, d'ordre 1, 3 et 5. (b) Déphasage global d'interpolation  $\phi^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 6 points, avec et sans contrôle de l'amplification d'interpolation, d'ordre 1, 3 et 5. — COI6p1o<sup>1</sup>, — COI6p3o<sup>1</sup>, — COI6p5o<sup>1</sup>, - - - OI6p5o<sup>1</sup>.

et la convergence de l'algorithme de Newton–Raphson. Le déphasage global d'interpolation, proche de 0 pour les faibles nombres d'onde, devient maximal pour les nombres d'onde  $k\Delta\xi$  supérieurs à  $\pi/4$ , avec plusieurs plateaux de saturation à  $\phi^1 = \pi$ . Cela implique que pour les hauts nombres d'onde, il existe une position relative d'interpolation  $\eta$  pour laquelle on constate une opposition de phase entre le signal original et le signal interpolé, ce qui a été observé en pratique. Le déphasage est enfin nettement réduit, sauf à très hauts nombres d'onde, par une augmentation de l'ordre formel d'interpolation.

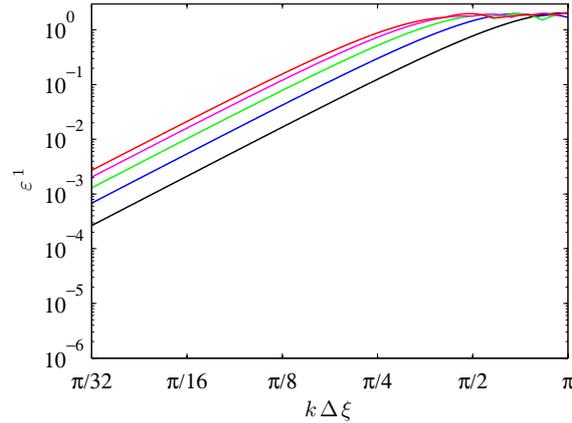
Cette étude montre finalement qu'une méthode avec contrôle de l'amplification d'interpolation ayant l'ordre formel le plus grand, à longueur de support fixé, est susceptible de convenir pour nos simulations. En effet, c'est elle qui assure l'erreur globale d'interpolation la plus faible sur l'ensemble des nombres d'onde correctement résolus.

### 5.3.3.2 Influence de la longueur du support d'interpolation

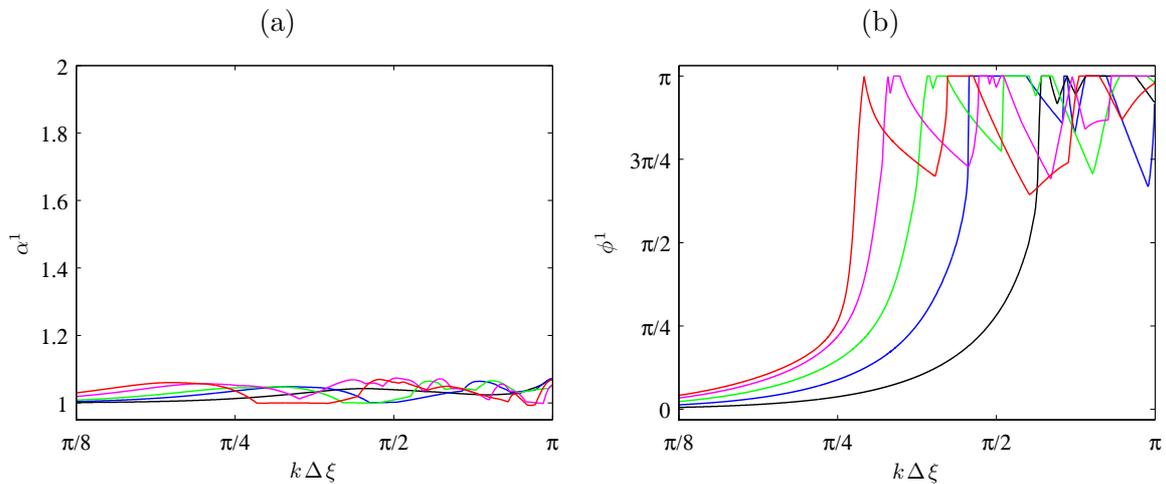
On fixe maintenant l'ordre formel d'interpolation et on fait varier le nombre de points du support de points donneurs.

L'erreur globale d'interpolation est présentée à la figure 5.21 dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 4, 5, 6, 7 et 8 points d'ordre 3, avec contrôle de l'amplification d'interpolation. Quels que soient les nombres d'onde, une augmentation de la longueur du support d'interpolation entraîne une augmentation de l'erreur d'interpolation. Ce comportement est assez intéressant car *a priori* contre-intuitif : on anticiperait plutôt une amélioration des performances d'interpolation en augmentant le nombre de points donneurs. Concernant l'amplification globale d'interpolation, la figure 5.22(a) montre qu'elle reste très modérée pour ces méthodes d'interpolation quelle que soit la longueur du support d'interpolation. La figure 5.22(b) montre le déphasage global d'interpolation pour ces méthodes. L'augmentation du nombre de points donneurs dégrade fortement le déphasage d'interpolation, qui atteint  $\pi$  d'autant plus vite que le nombre de points donneurs est élevé.

On conclut de cette étude d'influence qu'une méthode avec contrôle de l'amplification d'interpolation ayant le support d'interpolation le plus petit, pour un ordre formel donné, est susceptible de convenir pour nos simulations. Les deux études paramétriques montrent finalement qu'il y a un compromis à faire entre un ordre formel d'interpolation élevé, et un support d'interpolation court. On étudie dans la suite spécifiquement les cas d'une interpolation sur la première cellule du support ( $d = 1$ ) et d'une interpolation sur la seconde cellule  $d = 2$ .



**Fig. 5.21:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 4, 5, 6, 7 et 8 points d'ordre 3, avec contrôle de l'amplification d'interpolation. — COI4p3o<sup>1</sup>, — COI5p3o<sup>1</sup>, — COI6p3o<sup>1</sup>, — COI7p3o<sup>1</sup>, — COI8p3o<sup>1</sup>.

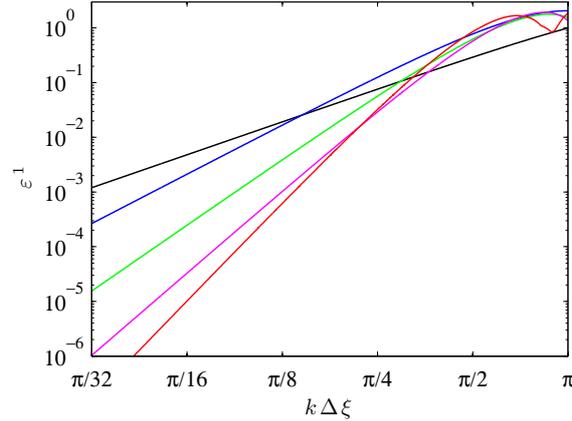


**Fig. 5.22:** (a) Amplification globale d'interpolation  $\alpha^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 4, 5, 6, 7 et 8 points d'ordre 3, avec contrôle de l'amplification d'interpolation. (b) Déphasage global d'interpolation  $\phi^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule à 4, 5, 6, 7 et 8 points d'ordre 3, avec contrôle de l'amplification d'interpolation. — COI4p3o<sup>1</sup>, — COI5p3o<sup>1</sup>, — COI6p3o<sup>1</sup>, — COI7p3o<sup>1</sup>, — COI8p3o<sup>1</sup>.

### 5.3.4 Interpolation sur la première cellule du support : COI6p5o<sup>1</sup>

Le but de cette partie est de trouver la méthode décentrée sur la première cellule qui assure l'erreur globale d'interpolation la plus faible sur le domaine des nombres d'onde résolu. D'après la partie précédente, on sait que cette méthode est à chercher parmi les méthodes optimales : LI2p<sup>1</sup> pour l'ordre 2, COI4p3o<sup>1</sup> pour l'ordre 3, COI5p4o<sup>1</sup> pour l'ordre 4, COI6p5o<sup>1</sup> pour l'ordre 5, COI8p6o<sup>1</sup> pour l'ordre 6 ... À noter que la méthode optimale d'ordre 6 a un support d'interpolation de 8 points et non 7, car nous n'avons pas réussi à faire converger l'algorithme de Newton–Raphson pour cette dernière méthode.

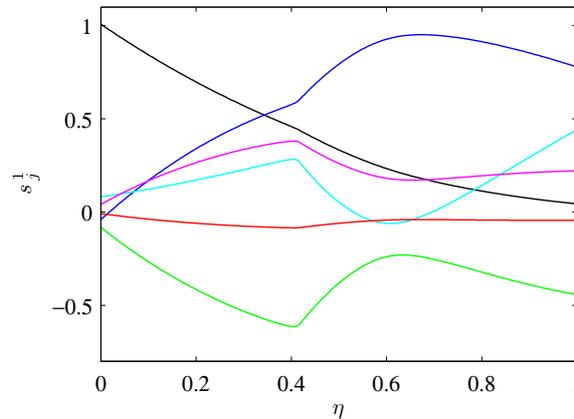
La figure 5.23 permet une comparaison de l'erreur globale d'interpolation des différentes méthodes énumérées précédemment. Il apparaît que sur l'espace des nombres d'onde correctement résolus  $k\Delta\xi \in [0, 2\pi/5]$ , la méthode à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation est la méthode qui assure la plus petite erreur. Elle convient d'autant plus pour nos simulations qu'elle respecte approximativement les contraintes que l'on s'était données au paragraphe 5.2.1.1, à savoir que l'erreur globale d'interpolation soit inférieure à  $10^{-4}$



**Fig. 5.23:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^1$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la première cellule optimales d'ordre 2, 3, 4, 5 et 6. — LI2p<sup>1</sup>, — COI4p3o<sup>1</sup>, — COI5p4o<sup>1</sup>, — COI6p5o<sup>1</sup>, — COI8p6o<sup>1</sup>.

pour  $k\Delta\xi \leq \pi/8$  et inférieure à  $10^{-5}$  pour  $k\Delta\xi \leq \pi/16$ . Le gain en performance par rapport à l'interpolation linéaire est non-négligeable. Il est de plusieurs ordres de grandeurs pour les faibles nombres d'onde, et d'un facteur 10 pour des nombres d'onde modérés  $k\Delta\xi \in [\pi/8, \pi/4]$ .

La figure 5.24 présente les courbes représentatives des coefficients d'interpolation  $s_j^1$  en fonction de la position relative d'interpolation  $\eta$ , pour la méthode décentrée sur la première cellule à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COI6p5o<sup>1</sup>). Les



**Fig. 5.24:** Courbe représentative des coefficients d'interpolation  $s_j^1$  en fonction de la position relative d'interpolation  $\eta$ , pour la méthode décentrée sur la première cellule à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COI6p5o<sup>1</sup>). —  $s_0^1(\eta)$ , —  $s_1^1(\eta)$ , —  $s_2^1(\eta)$ , —  $s_3^1(\eta)$ , —  $s_4^1(\eta)$ , —  $s_5^1(\eta)$ .

coefficients sont des fonctions continues en la variable  $\eta$ , mais leur dérivée présentent de fortes discontinuités. Afin de faciliter l'accès à la méthode, des régressions polynomiales d'ordre élevé par morceaux sont effectuées. À cet effet, l'intervalle  $[0, 1[$  est partitionné en  $N_i$  intervalles  $\mathcal{I}_r$ , avec  $r \in \{0, 1, \dots, N_i - 1\}$ . Sur chacun de ces sous-intervalles  $\mathcal{I}_r$ , le coefficient d'interpolation  $s_j^1$  peut être approximé à l'aide d'un polynôme en  $\eta$ , que l'on note  $\tilde{s}_j^1$ , par :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}, \forall \eta \in \mathcal{I}_r, \tilde{s}_j^1(\eta) = \sum_{q=0}^{Q_r} a_q^r \eta^q$$

Sur chacun des sous-intervalles  $\mathcal{I}_r$ , les coefficients de régression  $a_q^r$  sont calculés par la méthode

des moindres carrés. Aussi, les degrés des polynômes  $Q_r$  sont choisis de telle manière que la norme résiduelle est inférieure à  $5 \times 10^{-3}$  sur l'intervalle  $[0, 1[$  tout entier :

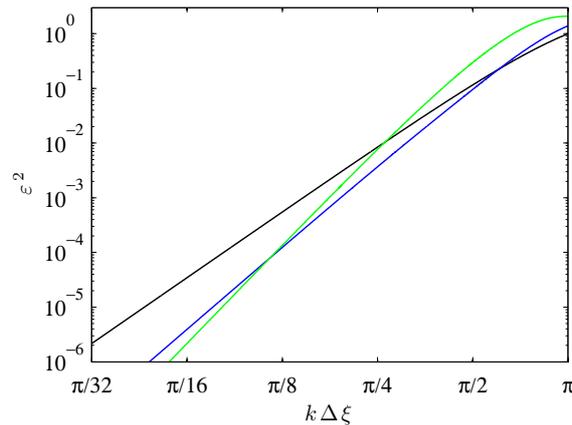
$$\left( \int_0^1 \left( \tilde{s}_j^d(\eta) - s_j^d(\eta) \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \leq 5 \times 10^{-3}$$

Tous les coefficients de régression associés à la méthode COI6p5o<sup>1</sup> sont disponibles en annexe A. À noter qu'un nombre important de décimales sur les coefficients de régression est nécessaire afin d'obtenir l'erreur résiduelle qu'on s'est fixée.

### 5.3.5 Interpolation sur la seconde cellule du support : COI6p5o<sup>2</sup>

On souhaite trouver la méthode décentrée sur la seconde cellule qui assure l'erreur globale d'interpolation la plus faible sur le domaine des nombres d'onde résolu. Cette méthode est à chercher parmi les méthodes optimales : LI4p<sup>2</sup> pour l'ordre 4, COI6p5o<sup>2</sup> pour l'ordre 5, COI7p6o<sup>2</sup> pour l'ordre 6, ...

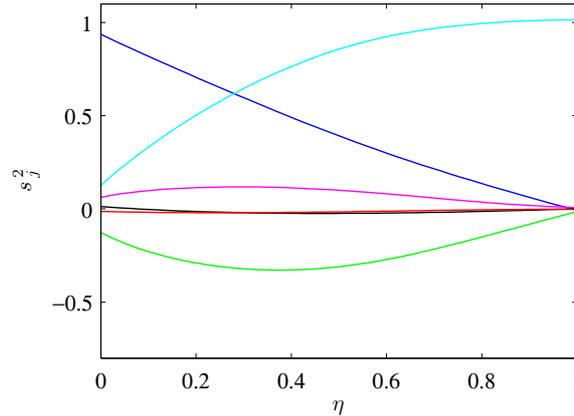
La figure 5.25 permet une comparaison de l'erreur globale d'interpolation des différentes méthodes énumérées précédemment. Sur l'espace des nombres d'onde correctement résolus



**Fig. 5.25:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^2$  dans l'espace des nombres d'onde pour les interpolations décentrées sur la seconde cellule optimales d'ordre 4, 5 et 6. — LI4p<sup>2</sup>, — COI6p5o<sup>2</sup>, — COI7p6o<sup>2</sup>.

$k\Delta\xi \in [0, 2\pi/5]$ , la méthode à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation est la méthode qui assure la plus petite erreur. Le gain par rapport à l'interpolation centrée de Lagrange sur 4 points n'est pas aussi spectaculaire que pour le décentrage sur la première cellule. Cependant, la méthode sélectionnée permet de gagner un ordre de grandeur sur l'erreur globale d'interpolation pour les faibles nombres d'onde, et de maintenir une erreur en-deçà de celle obtenue par une interpolation centrée de Lagrange sur 4 points pour les nombres d'onde modérés  $k\Delta\xi \in [\pi/8, \pi/4]$ .

La figure 5.26 présente, pour la méthode décentrée sur la seconde cellule à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COI6p5o<sup>2</sup>), les courbes représentatives des coefficients d'interpolation  $s_j^2$  en fonction de la position relative d'interpolation  $\eta$ . Les courbes sont beaucoup plus régulières que dans le cas précédent d'un décentrage sur la première cellule. Il paraît donc inutile de devoir partitionner l'intervalle  $[0, 1[$  en plusieurs sous-intervalles pour assurer une erreur résiduelle inférieure à  $5 \times 10^{-3}$ . On choisit donc d'effectuer des régressions polynomiales d'ordre élevé sur l'ensemble de l'intervalle  $[0, 1[$ , afin d'approximer les coefficients d'interpolations  $s_j^2$  par une fonction polynomiale  $\tilde{s}_j^2$ . Les coefficients de régressions polynomiales, obtenus par la méthode des moindres carrés, sont donnés en annexe A.



**Fig. 5.26:** Courbe représentative des coefficients d'interpolation  $s_j^2$  en fonction de la position relative d'interpolation  $\eta$ , pour la méthode décentrée sur la seconde cellule à 6 points d'ordre 5 avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COI6p5o<sup>1</sup>). —  $s_0^1(\eta)$ , —  $s_1^1(\eta)$ , —  $s_2^1(\eta)$ , —  $s_3^1(\eta)$ , —  $s_4^1(\eta)$ , —  $s_5^1(\eta)$ .

### 5.3.6 Stabilité temporelle

La contrainte que l'on a ajoutée à la construction des méthodes d'interpolation optimisées décentrées a rendu possible le contrôle de l'amplification d'interpolation. Cependant, même si l'amplification est très nettement réduite en comparaison à l'amplification obtenue avec des méthodes décentrées de Lagrange ou optimisées sans contrôle de l'amplification d'interpolation, elle n'a pas été complètement retirée. Il est donc pertinent d'étudier en détail la stabilité de l'intégration temporelle de Runge–Kutta couplée à un filtrage sélectif et des interpolations décentrées.

On considère dans cette partie l'équation de convection 1-D :  $\forall x \in \mathcal{I}, \forall t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = f_k(x) = e^{ikx+i\phi} \end{cases} \quad (5.15)$$

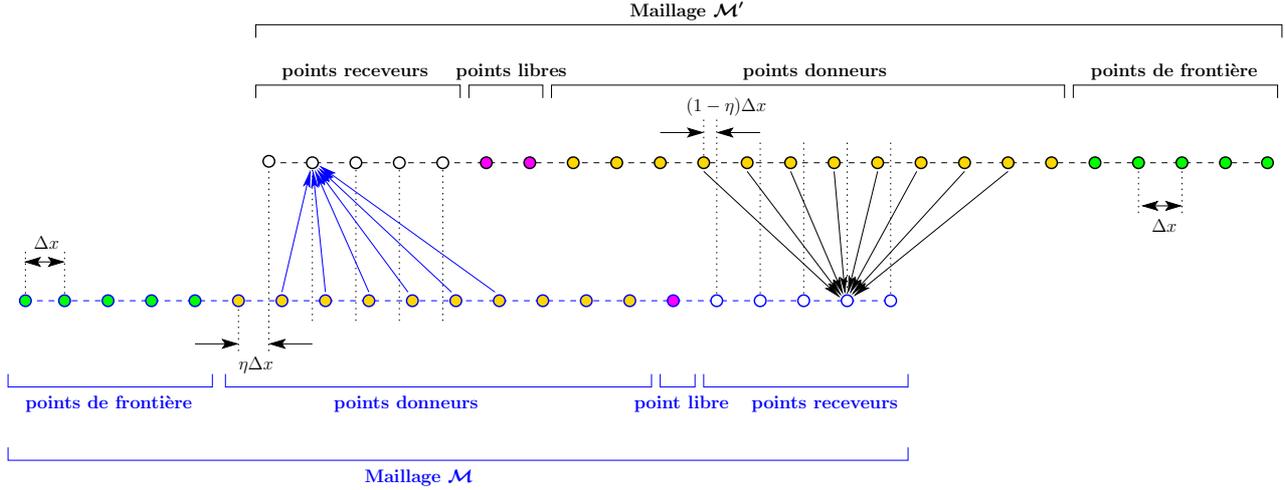
avec  $c_0$  une constante. La perturbation initiale est convectée à la vitesse  $c_0$ . La solution théorique s'écrit donc  $u_{\text{th}}(x, t) = e^{ik(x-c_0t)+i\phi}$ .

On maille l'intervalle  $\mathcal{I}$  à l'aide d'un maillage composite, constitué de deux maillages uniformes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  composés respectivement de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  points, et ayant le même pas d'espace  $\Delta x$ . On note  $x_0$  le premier point de maillage du maillage  $\mathcal{M}$ ,  $u$  la solution numérique sur  $\mathcal{M}$  et  $u'$  la solution sur  $\mathcal{M}'$ . La communication depuis le maillage  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$  est réalisée à l'aide d'une méthode d'interpolation à  $N$  points d'ordre formel  $p$  décentrée sur la cellule  $d$  du support et avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COINppo<sup>d</sup>), alors que la communication réciproque depuis le maillage  $\mathcal{M}'$  vers  $\mathcal{M}$  est réalisée par interpolation optimisée centrée à 8 points d'ordre 2 (OI8p2o<sup>4</sup>). Cette méthode n'étant pas amplificatrice, cela permet d'étudier l'influence seule de la méthode testée (COINppo<sup>d</sup>) sur la stabilité temporelle de la zone de superposition. On translate le maillage  $\mathcal{M}'$  du maillage  $\mathcal{M}$  de telle manière que les interpolations décentrées soient menées à la position  $\eta\Delta x$  dans la cellule d'interpolation. On considère ici une zone de superposition minimale, c'est à dire qu'on réduit au maximum le nombre de points libres sur chacun des maillages (respectivement  $n_f$  et  $n'_f$ ). Le tableau 5.1 donne les paramètres géométriques du maillage composite assurant une zone de superposition minimale. La figure 5.27 donne un aperçu du maillage composite considéré et de la zone de communication, pour le cas  $(N, d) = (6, 1)$ . Les dérivées spatiales sont évaluées à l'aide du schéma aux différences finies à 11 points optimisé FDo11p. L'intégration temporelle est menée

Maillage $\mathcal{M}$		Maillage $\mathcal{M}'$	
$\mathcal{N}$	$N + n_f + 14$	$\mathcal{N}'$	$n'_f + 22$
$n_f$	1 si $N - d \geq 4$ $4 - N + d + n'_f$ si $N - d < 4$	$n'_f$	$N - d - 4 + n_f$ si $N - d \geq 4$ 1 si $N - d < 4$
$x_0$	arbitraire	$x'_0$	$x_0 + (d - 1 + \eta + 5)\Delta x$

**Tab. 5.1:** Paramètres géométriques du maillage géométrique assurant une zone de superposition minimale.

par l'algorithme de Runge–Kutta explicite optimisé à 6 étapes RKo6s. Le filtrage sélectif est réalisé grâce au schéma à 11 points optimisé SFo11p de force  $\sigma$  ( $\sigma \in [0, 1]$ ).



**Fig. 5.27:** Détail des fonctions des points de maillage d'une zone de superposition minimale pour une communication par méthode d'interpolation à 6 points d'ordre sur la première cellule du support.  $\circ/\circ$  : points receveurs,  $\bullet/\bullet$  : points donneurs,  $\bullet/\bullet$  : points libres,  $\bullet/\bullet$  : points de frontière.

Le problème linéaire peut être mis sous forme matricielle. On définit quatre matrices : Une matrice d'interpolation  $\mathcal{M}_{\text{INT}}$ , une matrice de différentiation spatiale  $\mathcal{M}_{\text{FD}}$ , une matrice d'intégration temporelle  $\mathcal{M}_{\text{TI}}$ , et une matrice de filtrage  $\mathcal{M}_{\text{SF}}$ . L'expression de ces matrices est donnée en annexe B. L'algorithme d'intégration temporelle de Runge–Kutta à 6 étapes peut s'écrire dans le cas linéaire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{M}_{\text{TI}} = \mathcal{I}_{\text{TI}} + \sum_{j=1}^6 \gamma_j (-\text{CFL})^j (\mathcal{M}_{\text{FD}} \mathcal{M}_{\text{INT}})^j \quad (5.16)$$

La matrice  $\mathcal{I}_{\text{TI}}$  est la matrice diagonale définie par :

$$\mathcal{I}_{\text{TI},j,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } 6 \leq j \leq N + N' - 5 \\ e^{-i \text{CFL} k \Delta x} & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur théorique de la solution est imposée aux points de frontière pour des raisons pratiques (équation (5.16)), non pas à chaque étapes de Runge–Kutta, mais seulement à chaque pas de temps. Cette simplification tend à générer un faible déphasage entre la solution numérique et la solution théorique. Cependant, son impact est très limité sur la stabilité temporelle des méthodes d'interpolation décentrées testées, si bien qu'on le néglige dans la suite.

Une itération consistant en une intégration temporelle, suivie d'une interpolation et du filtrage, le vecteur des inconnues  ${}^t[u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u'_0, u'_1, \dots, u'_{N'-1}]$ , noté  $\mathcal{U}^m$  à l'instant  $m\Delta t$ , suit une loi de récurrence, donnée par :

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{M}_{\text{iter}} \mathcal{U}^m$$

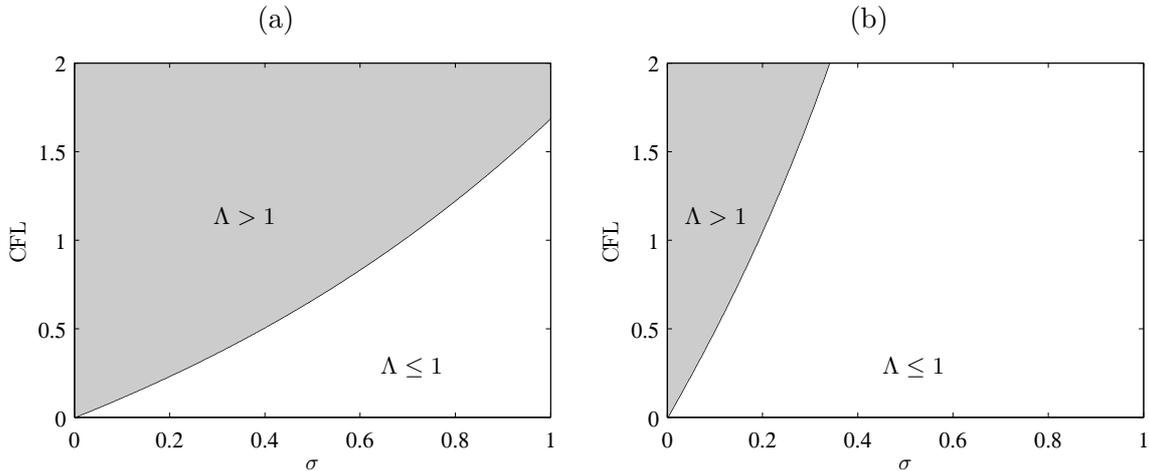
avec  $\mathcal{M}_{\text{iter}} = \mathcal{M}_{\text{SF}} \mathcal{M}_{\text{INT}} \mathcal{M}_{\text{TI}}$ .

La  $\mathcal{M}_{\text{iter}}$  est diagonalisable, car sa matrice des vecteurs propres associée est de rang maximal. Ainsi, la stabilité de la méthode d'interpolation COINppo<sup>d</sup> est régie par les valeurs propres de  $\mathcal{M}_{\text{iter}}$  : la zone de communication est stable si chaque valeur propre de la matrice  $\mathcal{M}_{\text{iter}}$  est de module inférieur à 1, quelle que soit la position relative d'interpolation dans  $[0, 1[$  et quels que soient les nombres d'onde  $k\Delta x$  dans  $[0, \pi]$ . On peut donc établir un critère (noté critère  $\Lambda$ ) renseignant sur la stabilité de la zone de superposition. Il vaut :

$$\Lambda(\sigma, \text{CFL}) = \max_{\substack{\nu \in \text{Spec} \mathcal{M}_{\text{iter}} \\ \eta \in [0, 1[ \\ k\Delta x \in [0, \pi]}} \left| \nu(\eta, k\Delta x, \sigma, \text{CFL}) \right| \leq 1 \quad (5.17)$$

La stabilité dépend donc uniquement du nombre CFL et de la force du filtrage  $\sigma$ .

Les résultats des calculs de stabilité sont présentés sous la forme d'une cartographie du critère  $\Lambda$  dans le plan  $(\sigma, \text{CFL})$  pour les méthodes d'interpolation optimisées à 8 points d'ordre 4 décentrées sur la première cellule sans contrôle de l'amplification d'interpolation (OI8p4o<sup>1</sup>) sur la figure 5.28(a) et avec contrôle de l'amplification d'interpolation (COI8p4o<sup>1</sup>) sur la figure 5.28(b). Les régions stables ( $\Lambda \leq 1$ ) figurent en blanc, tandis que les régions instables ( $\Lambda > 1$ ) sont représentées en gris. La courbe de stabilité neutre sépare les régions stables des régions instables. Sur la figure 5.28(a) on peut définir un nombre CFL critique CFL<sub>critique</sub> pour lequel la stabilité n'est obtenue que dans le cas d'une force de filtrage maximale  $\sigma = 1$ . Pour la méthode OI8p4o<sup>1</sup>, on trouve CFL<sub>critique</sub> = 1.67. Pour des nombres CFL en-deçà de cette valeur critique, il existe un intervalle de dissipation pour lequel la zone de communication est stable, mais cet intervalle est de plus en plus restreint avec l'augmentation du CFL. Pour des nombres CFL supérieurs à la valeur critique CFL<sub>critique</sub>, la zone de superposition est inconditionnellement instable, comme le montre la figure 5.28(a). La figure 5.28(b) montre que cette situation n'est jamais atteinte pour la méthode d'interpolation optimisée décentrée associée avec contrôle de l'amplification d'interpolation. La stabilité de la zone de communication est assurée pour CFL  $\in [0, 2]$  et pour des forces de filtrages modérées ou élevées. Ainsi l'ajout



**Fig. 5.28:** Cartographie de stabilité dans le plan  $(\sigma, \text{CFL})$ , à l'aide du critère  $\Lambda$ . Les régions de stabilité, où  $\Lambda \leq 1$ , sont représentées en blanc. Les régions instables, où  $\Lambda > 1$  sont représentées en gris. (a) : OI8p4o<sup>1</sup>. (b) : COI8p4o<sup>1</sup>. — Courbe de stabilité neutre.

d'une contrainte de contrôle de l'amplification d'interpolation a augmenté la région de stabilité de la méthode d'interpolation décentrée. Par conséquent, le contrôle de l'amplification permet l'accès à des pas de temps plus grands, pour des simulations numériques requérant des interpolations décentrées.

### 5.3.7 Cas-tests de validation

On se propose de vérifier la stabilité de la zone de communication sur quelques cas-tests numériques. L'équation de convection 1-D est résolue numériquement sur le même maillage composite  $\mathcal{I}$  que précédemment étendu en chacune de ses bornes :  $\forall x \in \mathcal{I}, \forall t \in \mathbb{R}^+$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = s(x) & (t > 0) \\ p(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

avec  $c_0 = 340$  la vitesse de propagation, et  $g(x)$  la perturbation initiale. Le terme  $s(x)$  est un terme source. La solution analytique vaut :

$$p_{\text{th}}(x, t) = g(x - c_0 t) + \frac{1}{c_0} \int_{x - c_0 t}^x s(u) du$$

On utilise les mêmes méthodes numériques que dans l'étude de stabilité. On ne teste que les méthodes d'interpolation OI8p4o<sup>1</sup> et COI8p4o<sup>1</sup> pour effectuer la communication depuis  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$ . On choisit une position locale d'interpolation  $\eta_i = 0.3878$ , qui assure le maximum d'amplification d'interpolation pour la méthode OI8p4o<sup>1</sup>, pour des oscillations maille à maille.

On souhaite convecter un paquet d'ondes basses fréquences sur le maillage composite. La perturbation initiale vaut :

$$g : \begin{cases} g(x) = p_0 + \mathcal{A} \cos\left(\frac{2\pi(x - x_c)}{a\Delta x}\right) \exp\left(-\ln 2 \left(\frac{x - x_c}{b\Delta x}\right)^2\right) & \text{sur } \mathcal{M} \\ g(x') = p_0 + \mathcal{A} \cos\left(\frac{2\pi(x' - x_c)}{a\Delta x}\right) \exp\left(-\ln 2 \left(\frac{x' - x_c}{b\Delta x}\right)^2\right) & \text{sur } \mathcal{M}' \end{cases}$$

avec  $p_0$  la perturbation moyenne initiale, que l'on fixe à  $p_0 = 101325$ . La quantité  $\mathcal{A} = 100$  est l'amplitude de la perturbation initiale,  $x_c$  la position initiale du paquet d'ondes, que l'on pose à  $x_c = -600\Delta x$ ,  $a = 30$  est le nombre de points de maillage par longueur d'onde des oscillations, et  $b = 20$  est le nombre de points dans la demi-largeur du paquet d'ondes initial.

#### 5.3.7.1 Terme source

Le terme source  $s$  a pour finalité de simuler le bruit numérique qui apparaît en pratique en raison des conditions aux frontières, des étirements de maillage et des erreurs de troncature des méthodes numériques. Ce bruit numérique a généralement une très faible amplitude et présente des hautes fréquences. On choisit donc le terme source comme un bruit harmonique haute fréquence de faible amplitude :

$$s : \begin{cases} s(x) = \frac{2\pi\mathcal{A}c_0}{\lambda_s\Delta x} \mathcal{A}_s \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_s\Delta x}\right) & \text{sur } \mathcal{M} \\ s(x') = \frac{2\pi\mathcal{A}c_0}{\lambda_s\Delta x} \mathcal{A}_s \sin\left(2\pi \frac{x'}{\lambda_s\Delta x}\right) & \text{sur } \mathcal{M}' \end{cases}$$

avec  $\lambda_s$  le nombre de points par longueur d'onde des oscillations du bruit numérique, et  $\mathcal{A}_s$  le rapport entre l'amplitude de ce bruit et celui du paquet d'ondes. On fixe  $\lambda_s$  à 2, ce qui permet de simuler des oscillations maille à maille de type bruit numérique. On fixe aussi le paramètre  $\mathcal{A}_s$  à  $10^{-5}$  pour obtenir un bruit numérique qui est plus petit de cinq ordres de grandeur que le paquet d'ondes convecté. On choisit enfin une force de filtrage à  $\sigma = 0.8$ .

### 5.3.7.2 Simulation à bas nombre CFL : CFL = 0.67

La figure 5.29 présente la solution analytique du problème et la solution numérique sur le maillage composite à différents instants, et pour les deux méthodes d'interpolation optimisées à 8 points d'ordre 4 décentrées sur la première cellule avec et sans contrôle de l'amplification d'interpolation, avec un nombre CFL de 0.67. Pour ces deux méthodes, le bruit numérique hautes fréquences simulé ne devrait pas être amplifié en temps. Le paquet d'ondes basses fréquences est proprement convecté à travers la zone de superposition, et est correctement récupéré sur le maillage  $\mathcal{M}'$ . Les deux méthodes d'interpolation restent stables.

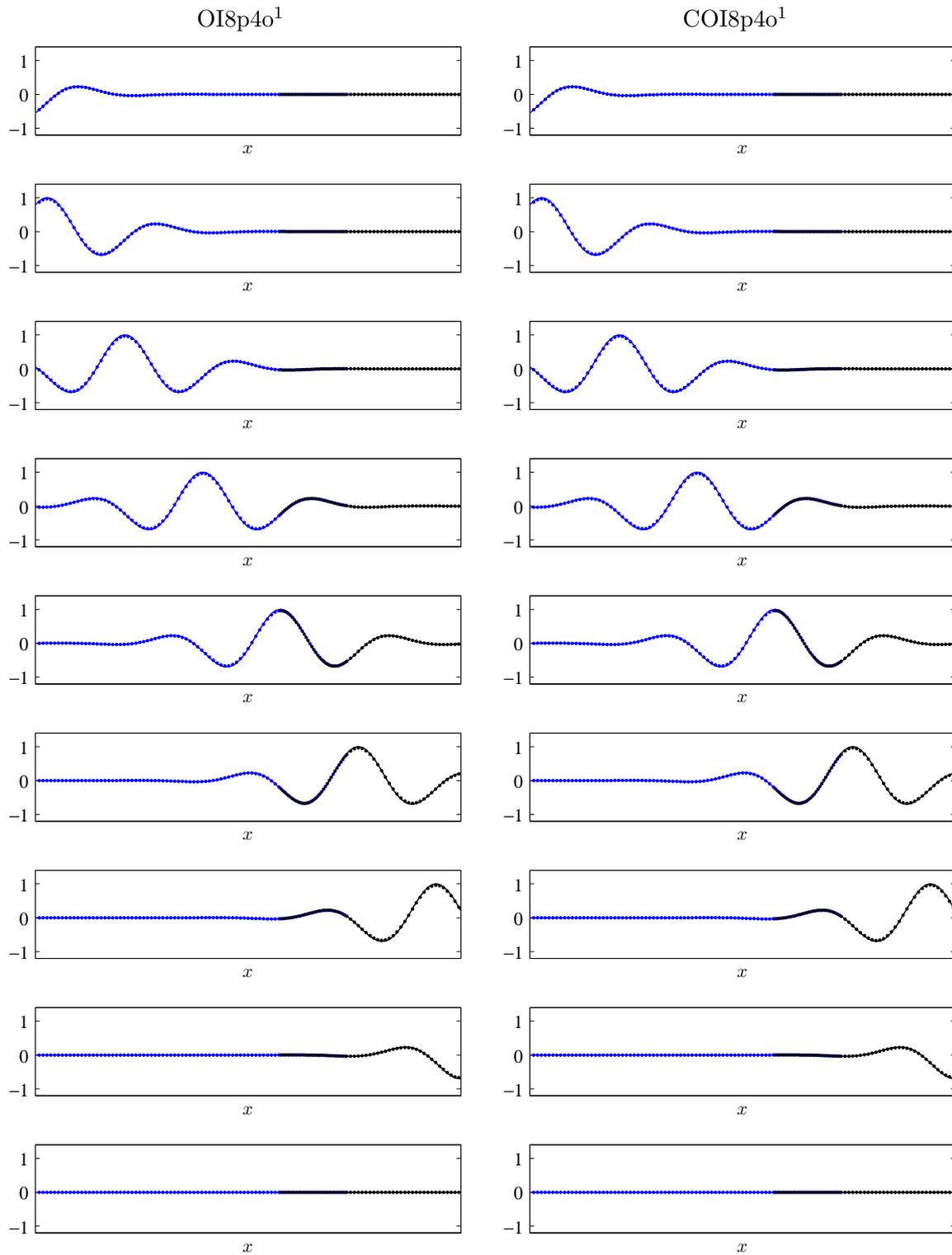
### 5.3.7.3 Simulation à haut nombre CFL : CFL = 1.33

On présente maintenant les résultats de simulation pour un CFL plus élevé : CFL = 1.33. La solution théorique et les solutions numériques sur le maillage composite obtenues pour les deux méthodes d'interpolation optimisées à 8 points d'ordre 4 décentrées sur la première cellule avec et sans contrôle de l'amplification d'interpolation sont comparées à la figure 5.30. La méthode d'interpolation décentrée sans le contrôle de l'amplification d'interpolation OI8p4o<sup>1</sup> n'est pas stable en temps. En effet, les oscillations du terme source, qui présentent une longueur d'onde de deux points de maillage, sont amplifiées à chaque pas de temps au niveau des cellules d'interpolation accueillant des interpolations décentrées (communication depuis  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{M}'$ ). Cette amplification est ensuite convectée vers les cellules où la communication depuis  $\mathcal{M}'$  vers  $\mathcal{M}$  a lieu. Cette amplification est alors rediffusée par cette communication réciproque sur le maillage  $\mathcal{M}$  et retourne vers les points donneurs de  $\mathcal{M}$ , ce qui exacerbe le phénomène d'amplification. Malgré les très faibles amplitudes du terme source, de 5 ordres de grandeur plus faibles que l'amplitude du paquet d'ondes, il ne faut que 750 itérations pour que la méthode OI8p4o<sup>1</sup> n'amplifie ces oscillations à des niveaux comparables au signal convecté. Le critère  $\Lambda$ , qui donne  $\Lambda = 1.0157$ , corrobore cette observation, puisque  $\Lambda^{750} \simeq 10^5 \simeq 1/\mathcal{A}_s$ . Les oscillations maille à maille qui croissent finissent par polluer la convection du paquet d'ondes dans la zone de superposition, si bien que le signal n'est pas correctement récupéré sur le maillage  $\mathcal{M}'$ . Le paquet d'ondes se retrouve après quelques centaines d'itérations supplémentaires complètement noyé dans le bruit numérique provenant de la zone de superposition.

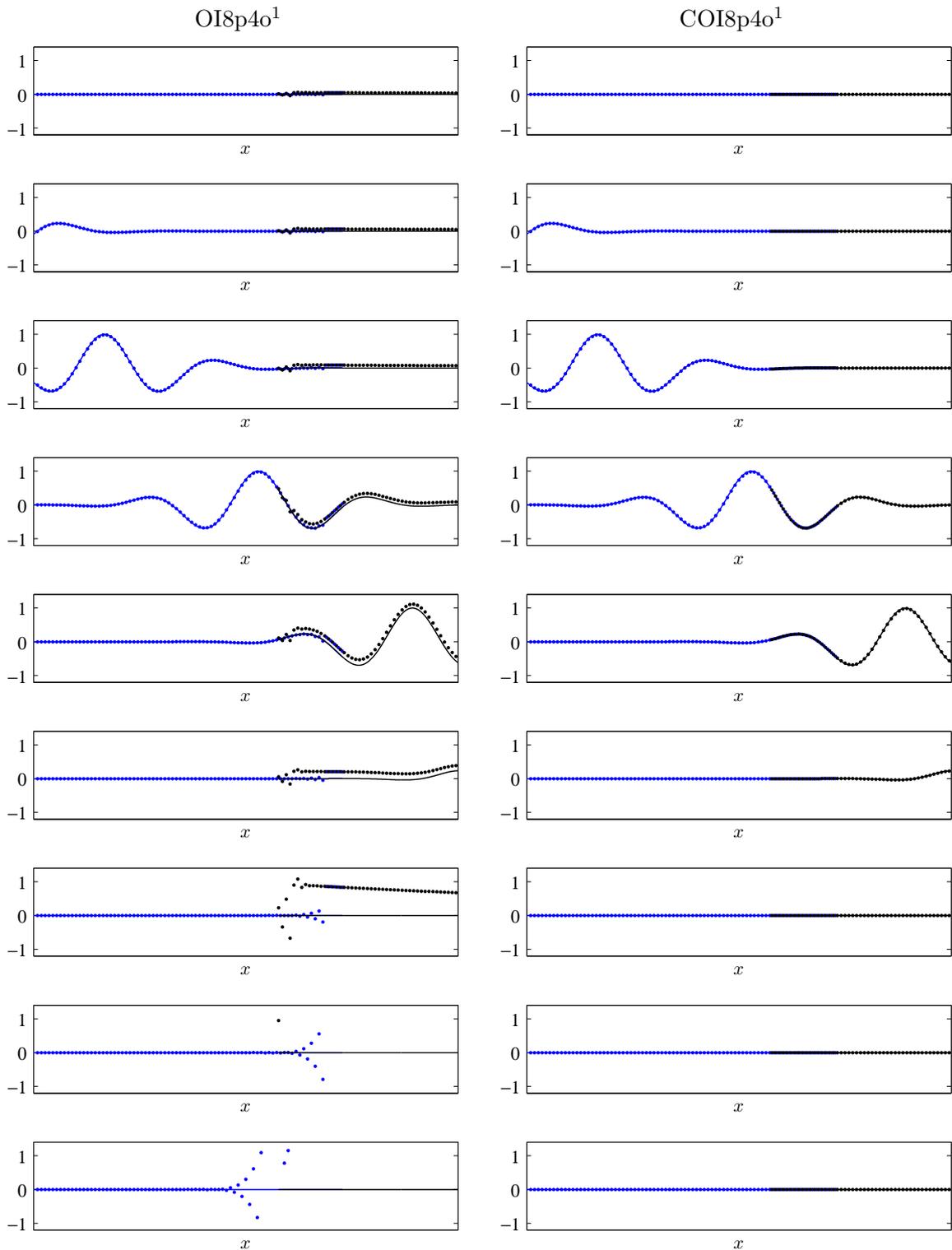
Ce phénomène n'a pas lieu pour la méthode d'interpolation avec contrôle de l'amplification d'interpolation COI8p4o<sup>1</sup>. La zone de superposition reste stable et le signal, parfaitement convecté à travers la zone de communication, est retrouvé avec précision sur le maillage  $\mathcal{M}'$ .

## 5.3.8 Conclusion

Des méthodes d'interpolation optimisées décentrées avec contrôle de l'amplification d'interpolation ont été obtenues par la résolution d'un problème de minimisation avec des contraintes relatives à l'ordre formel d'interpolation et au contrôle de l'amplification. Une étude sur l'erreur d'interpolation de ces méthodes a été réalisée afin d'identifier la méthode assurant l'erreur d'interpolation la plus basse sur le domaine des nombres d'onde correctement résolus, pour un décentrage donné. Un critère fondé sur une étude de valeurs propres a été proposé pour prédire la stabilité des interpolations décentrées couplées à un filtrage sélectif. Ce critère ne dépend que de la force du filtrage et du nombre CFL. L'étude a enfin révélé que les interpolations décentrées sans contrôle de l'amplification nécessitent un nombre CFL plus petit et/ou un filtrage plus fort pour être stable, en comparaison aux méthodes avec contrôle de l'amplification d'interpolation. Ceci est un inconvénient majeur, particulièrement pour une utilisation dans une simulation 3-D, où le nombre CFL doit être pris le plus grand possible afin de réduire les coûts de simulation. Cette limitation du nombre CFL pour des raisons de stabilisation n'existe pas pour les méthodes d'interpolation avec contrôle de l'amplification que l'on vient de construire, sous condition d'être utilisées avec un filtrage sélectif modéré à fort.



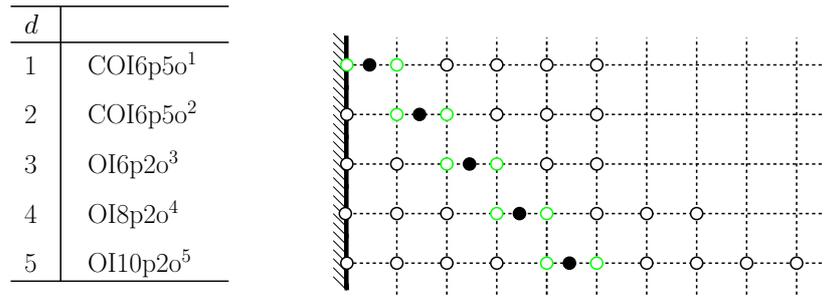
**Fig. 5.29:** Cas-test avec  $\text{CFL}=0.67$ . Amplitude adimensionnée du paquet d'ondes  $(p - p_0)/A$  à différents instants :  $930\Delta t$ ,  $960\Delta t$ ,  $990\Delta t$ ,  $1020\Delta t$ ,  $1050\Delta t$ ,  $1080\Delta t$ ,  $1110\Delta t$ ,  $1140\Delta t$ , et  $3000\Delta t$ . — Solution théorique sur  $\mathcal{M}$ , • Solution numérique sur  $\mathcal{M}$ , — Solution théorique sur  $\mathcal{M}'$ , • Solution numérique sur  $\mathcal{M}'$ .



**Fig. 5.30:** Cas-test avec CFL=1.33. Amplitude adimensionnée du paquet d'ondes  $(p - p_0)/A$  à différents instants :  $450\Delta t$ ,  $480\Delta t$ ,  $510\Delta t$ ,  $540\Delta t$ ,  $570\Delta t$ ,  $600\Delta t$ ,  $750\Delta t$ ,  $900\Delta t$  et  $1500\Delta t$ . — Solution théorique sur  $\mathcal{M}$ , • Solution numérique sur  $\mathcal{M}$ , — Solution théorique sur  $\mathcal{M}'$ , • Solution numérique sur  $\mathcal{M}'$ .

## 5.4 Décentrage progressif

En pratique, les méthodes d'interpolation décentrées avec contrôle de l'amplification d'interpolation ne sont utilisées que dans le cas où seulement un ou deux points sont disponibles dans la direction de la paroi. Dès que l'on dispose de trois points ou plus dans cette direction, une méthode d'interpolation optimisée centrée suffit pour assurer une erreur d'interpolation acceptable sans amplification. La figure 5.31 donne les méthodes d'interpolation que l'on utilise en fonction du nombre de points disponibles dans la direction perpendiculaire à la paroi.



**Fig. 5.31:** Méthodes d'interpolation utilisées dans le cas d'un décentrage progressif. La cellule d'interpolation est représentée par des points verts  $\circ$ . Le point receveur est représenté en noir  $\bullet$ . Les autres points donneurs sont représentés par des points vides  $\circ$ .

## 5.5 Techniques d'interpolation multidimensionnelle

On choisit le même pas de discrétisation dans l'axe  $e_3$  des maillages cartésiens et l'axe  $e_z$  du maillage cylindrique, de manière à rendre coplanaires les points donneurs d'un maillage et les points receveurs de l'autre maillage (voir partie 5.1.2). On n'aborde donc dans cette partie la mise en œuvre d'une interpolation 2-D uniquement.

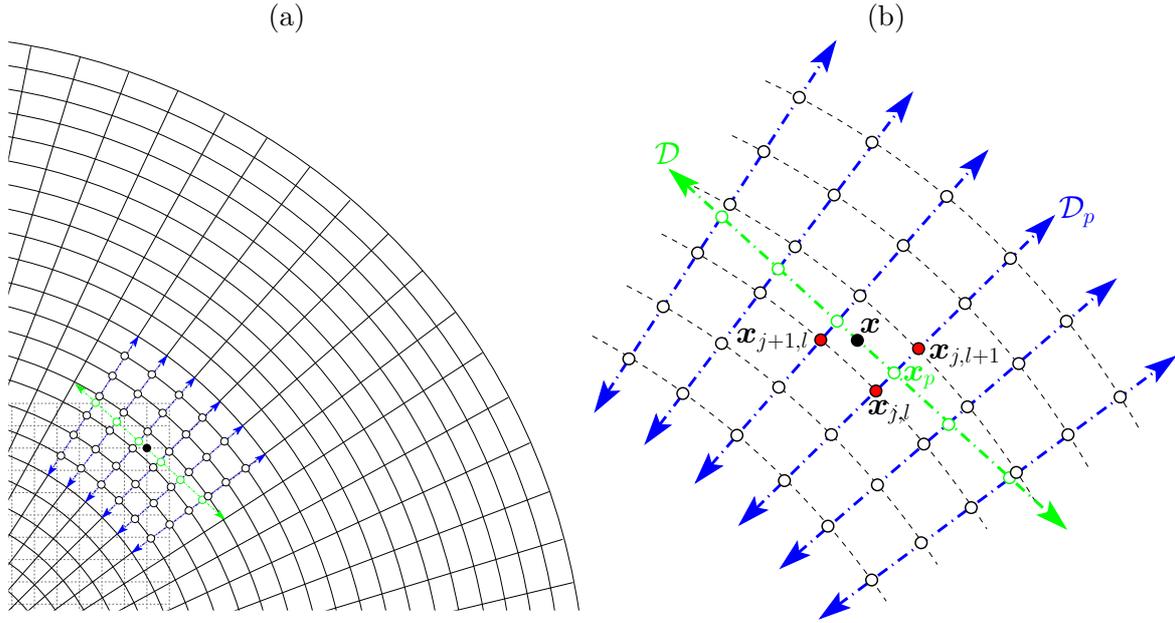
Le problème général consiste à calculer la valeur d'une fonction  $f$  de deux variables en un point receveur  $\mathbf{x} = (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$  dans un repère cartésien de référence à partir des valeurs de  $f$  connues aux autres points du maillage structuré donneur. On présente ici deux méthodes d'interpolation multidimensionnelle : une méthode d'interpolation 2-D par produit tensoriel d'interpolations 1-D, et une méthode d'interpolation 2-D directe.

### 5.5.1 Interpolation par produit tensoriel d'interpolations 1-D

#### 5.5.1.1 Interpolation dans le domaine physique

Le principe général de l'interpolation multidimensionnelle par produit tensoriel d'interpolations 1-D est illustré par la figure 5.32. On recherche d'abord la maille  $[\mathbf{x}_{j,l}, \mathbf{x}_{j+1,l}, \mathbf{x}_{j,l+1}]$  du maillage donneur, supposé localement quasi-orthogonal, contenant le point receveur  $\mathbf{x}$ . Cette étape peut être coûteuse numériquement. On considère ensuite la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point receveur  $\mathbf{x}$  parallèle à l'arête  $[\mathbf{x}_{j,l}, \mathbf{x}_{j+1,l}]$  du maillage donneur. Cette droite coupe les  $N$  lignes  $\mathcal{D}_p$  du maillage donneur aux points  $\mathbf{x}_p$ , où  $N$  est la longueur du support d'interpolation, et  $p$  varie entre  $j-d+1$  et  $j-d+N$ , pour une méthode d'interpolation 1-D à  $N$  points décentrée sur la cellule  $d$ .

Une première série de  $N$  interpolations 1-D préliminaires est effectuée pour estimer la valeur de la fonction  $f$  aux points  $\mathbf{x}_p$  (notés en vert sur la figure 5.32) à partir des points donneurs  $\mathbf{x}_{p,l}$  (le long des lignes bleues sur la figure 5.32(b)). Ce processus d'interpolation peut être complètement explicité, en donnant la position relative d'interpolation  $\eta_p$  dans la



**Fig. 5.32:** Interpolation 2-D en un point receveur  $\mathbf{x}$  noté  $\bullet$ , par produit tensoriel d'interpolations 1-D centrées à  $N$  points : on effectue  $N$  interpolations 1-D préliminaires en chacun des points receveurs  $\mathbf{x}_p$  notés  $\circ$  à partir des points donneurs  $\circ$  suivant les flèches bleues. On effectue une interpolation finale 1-D suivant la flèche verte au point receveur  $\mathbf{x}$  à partir des points donneurs  $\mathbf{x}_p$ . (a) Vue générale. (b) Vue détaillée. La cellule contenant le point receveur  $\mathbf{x}$  est repérée par les trois points  $\mathbf{x}_{j,l}, \mathbf{x}_{j+1,l}$  et  $\mathbf{x}_{j,l+1}$ , notés  $\bullet$ . (schéma pour  $N = 6$  et  $d = 3$ )

cellule d'interpolation le long de la droite  $\mathcal{D}_p$ . En notant  $(\xi_p, \zeta_p)$  les coordonnées du point  $\mathbf{x}_p$  dans le repère de référence, et  $(\xi_j^l, \zeta_j^l)$  les coordonnées du point  $\mathbf{x}_{j,l}$ , on a :

$$\begin{cases} \xi_p = \frac{(\zeta_{j+1}^l - \zeta_j^l) (\xi_p^{l+1} - \xi_p^l) \xi - (\xi_{j+1}^l - \xi_j^l) ((\zeta_p^{l+1} - \zeta_p^l) \xi_p^l + (\xi_p^{l+1} - \xi_p^l) (\zeta - \zeta_p^l))}{(\zeta_{j+1}^l - \zeta_j^l) (\xi_p^{l+1} - \xi_p^l) - (\xi_{j+1}^l - \xi_j^l) (\zeta_p^{l+1} - \zeta_p^l)} \\ \zeta_p = - \frac{(\xi_{j+1}^l - \xi_j^l) (\zeta_p^{l+1} - \zeta_p^l) \zeta - (\zeta_{j+1}^l - \zeta_j^l) ((\xi_p^{l+1} - \xi_p^l) \zeta_p^l + (\zeta_p^{l+1} - \zeta_p^l) (\xi - \xi_p^l))}{(\zeta_{j+1}^l - \zeta_j^l) (\xi_p^{l+1} - \xi_p^l) - (\xi_{j+1}^l - \xi_j^l) (\zeta_p^{l+1} - \zeta_p^l)} \end{cases}$$

La position relative d'interpolation  $\eta_p$  pour une interpolation au point receveur  $\mathbf{x}_p$  vaut :

$$\eta_p = \sqrt{\frac{(\xi_p - \xi_j^l)^2 + (\zeta_p - \zeta_j^l)^2}{(\xi_p^{l+1} - \xi_j^l)^2 + (\zeta_p^{l+1} - \zeta_j^l)^2}}$$

Une interpolation finale 1-D est réalisée pour estimer la valeur de la fonction  $f$  en  $\mathbf{x}$  à partir des valeurs obtenues aux points  $\mathbf{x}_p$  (le long de la ligne verte sur la figure 5.32(b)). La position relative d'interpolation  $\eta$  vaut :

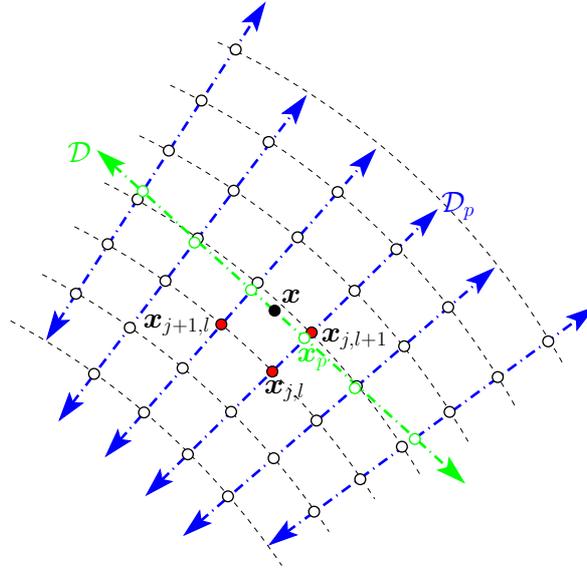
$$\eta = \sqrt{\frac{(\xi - \xi_j)^2 + (\zeta - \zeta_j)^2}{(\xi_{j+1} - \xi_j)^2 + (\zeta_{j+1} - \zeta_j)^2}}$$

Le fait d'avoir un pas de discrétisation non-constant le long de la droite  $\mathcal{D}$  peut entraîner des erreurs d'interpolations supplémentaires, dans le cadre d'une interpolation optimisée qui a été développée en supposant une discrétisation constante.

La méthode présentée n'est pas symétrique vis à vis des deux directions, mais elle permet de

s'appuyer sur les droites préexistantes du maillage. À noter enfin qu'il est évidemment possible de mélanger les différentes méthodes d'interpolation 1-D : les interpolations intermédiaires peuvent, si la géométrie le permet, se faire de manière centrée, tandis que l'interpolation finale (le long de la droite  $\mathcal{D}$ ) peut être menée de manière décentrée, ou réciproquement.

Le recours à des droites d'interpolation est lourd et coûteux d'un point de vue du temps de calcul. Une difficulté apparaît aussi lorsque le point receveur est proche d'une arête du maillage donneur, et que les supports d'interpolation sont longs : il peut en effet arriver que les points  $\mathbf{x}_p$  ne soient pas sur la même couronne de maillage que le point  $\mathbf{x}$ , ce qui rend délicat la recherche des points donneurs pour les  $N$  interpolations préliminaires, comme le montre la figure 5.33.



**Fig. 5.33:** Interpolation 2-D en un point receveur  $\mathbf{x}$  noté  $\bullet$ , par produit tensoriel d'interpolations 1-D centrées à  $N$  points : on effectue  $N$  interpolations 1-D préliminaires en chacun des points receveurs  $\mathbf{x}_p$  notés  $\circ$  à partir des points donneurs  $\circ$  suivant les flèches bleues. On effectue une interpolation finale 1-D suivant la flèche verte au point receveur  $\mathbf{x}$  à partir des points donneurs  $\mathbf{x}_p$ . La cellule contenant le point receveur  $\mathbf{x}$  est repérée par les trois points  $\mathbf{x}_{j,l}, \mathbf{x}_{j+1,l}$  et  $\mathbf{x}_{j,l+1}$ , notés  $\bullet$ . Certains points  $\mathbf{x}_p$  ne sont pas sur la même couronne de maillage que le point  $\mathbf{x}$ . (schéma pour  $N = 6$  et  $d = 3$ )

Il est possible de généraliser la méthode précédente : Au lieu d'effectuer les interpolations successives sur des droites, il est possible de les faire suivant les courbes données par le maillage, ce qui évite le calcul des coordonnées de tous les points d'intersections décrit précédemment, et la recherche fastidieuse des supports d'interpolation lorsque le point receveur  $\mathbf{x}$  est proche d'une arête du maillage donneur.

### 5.5.1.2 Interpolation dans le domaine transformé

Pour une interpolation à partir d'un maillage cylindrique donneur, il paraît intéressant d'interpoler le long d'un arc de cercle plutôt que le long d'une droite. Cette approche présente en effet l'avantage de rendre les interpolations cartésiennes dans le domaine transformé  $(r, \theta)$ . On effectue ainsi une première série de  $N$  interpolations à  $\theta$  constant, puis une interpolation finale à  $r$  constant, comme l'illustre la figure 5.34. Les pas de discrétisation ( $\Delta r$  et  $\Delta \theta$ ) étant constants, on s'affranchit des difficultés liées au pas d'espace non constant le long de la droite  $\mathcal{D}$ . Cette approche permet enfin d'éviter le fait que les points  $\mathbf{x}_p$  ne soient pas sur le même arc de maillage que le point  $\mathbf{x}$ , lorsque ce point est proche d'une arête du maillage donneur, ce qui rendait délicat le calcul des supports d'interpolation. Dans toute la suite, les interpolations 2-D par produit tensoriel d'interpolations 1-D sont effectuées dans le domaine transformé. On adopte la convention de notation suivante : lorsque les interpolations 1-D préliminaires sont

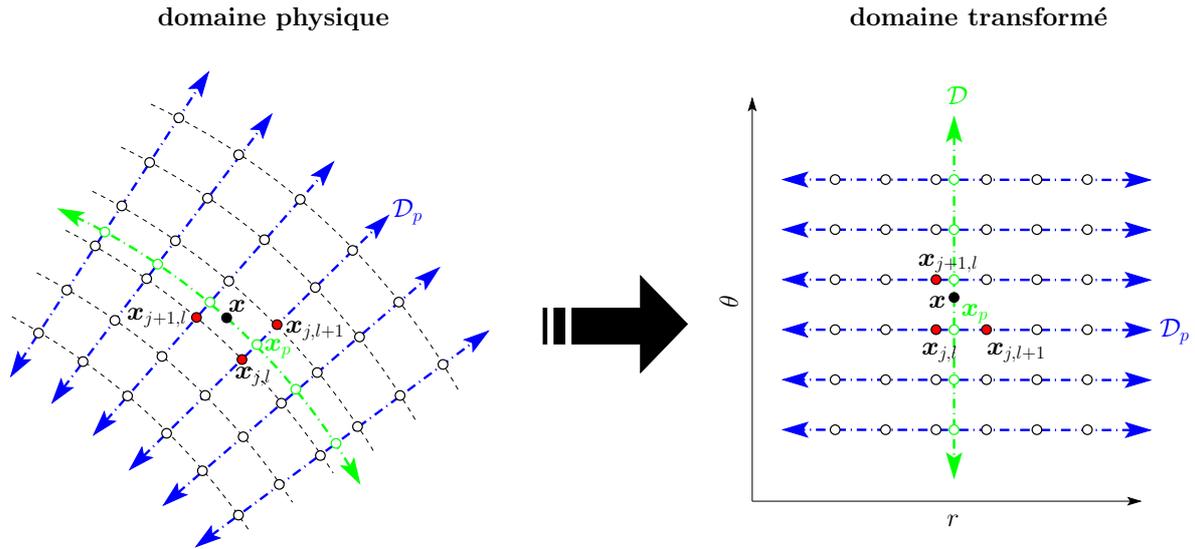


Fig. 5.34: Interpolation dans le domaine physique  $(\xi, \zeta)$  le long d'un arc de cercle et dans le domaine transformé  $(r, \theta)$  le long d'une droite, pour un maillage donneur cylindrique.

menées à l'aide d'une interpolation de Lagrange à  $N$  points sur la maille  $d$  dans la direction  $\mathbf{e}_\xi$  et l'interpolation finale 1-D à l'aide d'une interpolation de Lagrange à  $N'$  points sur la maille  $d'$  dans la direction  $\mathbf{e}_\zeta$ , la méthode globale d'interpolation 2-D est notée  $\text{LIN}p^d \otimes \text{LIN}'p^{d'}$ .

### 5.5.1.3 Erreur d'interpolation

Compte tenu de la remarque précédente, on ne considère dans la suite que des maillages donneurs cartésiens. On suppose que les supports d'interpolation sont rectangulaires. Le point  $\mathbf{x} = (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$  où l'on souhaite interpoler se situe sur la cellule  $(d_\xi, d_\zeta)$  d'un réseau rectangulaire d'interpolation, comme le montre la figure 5.35, avec  $(d_\xi, d_\zeta) \in \{1, 2, \dots, N_\xi\} \times \{1, 2, \dots, N_\zeta\}$ , avec  $N_\xi$  et  $N_\zeta$  respectivement le nombre de points donneurs pour les interpolations dans les directions  $\mathbf{e}_\xi$  et  $\mathbf{e}_\zeta$ . On note  $\eta_\xi$  et  $\eta_\zeta$  respectivement les positions relatives d'interpolation dans la cellule  $(d_\xi, d_\zeta)$  dans les directions  $\mathbf{e}_\xi$  et  $\mathbf{e}_\zeta$ .

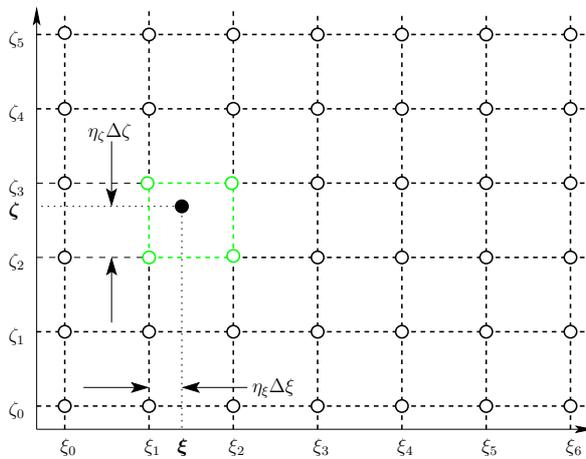


Fig. 5.35: Support d'interpolation carré, avec interpolation sur la cellule (2,3), pour  $(N_\xi, N_\zeta) = (7, 6)$ . Le point receveur  $\mathbf{x} = (\xi, \zeta)$  est représenté par  $\bullet$ , les points donneurs de la cellule d'interpolation (2,3) par  $\circ$  et les autres points donneurs du support par  $\circ$ .

De manière analogue au cas 1-D, on introduit  $f_{k_\xi, k_\zeta}$  une fonction-test harmonique ayant

un nombre d'onde  $k_\xi$  dans la direction  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $k_\zeta$  dans la direction  $\mathbf{e}_\zeta$ , et une phase  $\phi$  :

$$f_{k_\xi, k_\zeta} : \begin{cases} [\xi_0, \xi_{N_\xi-1}] \times [\zeta_0, \zeta_{N_\zeta-1}] & \mapsto \mathbb{C} \\ (\xi, \zeta) & \mapsto e^{i(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta + \phi)} \quad (\phi \in [-\pi, \pi]) \end{cases}$$

L'erreur locale d'interpolation sur la cellule  $(d_\xi, d_\zeta)$ , que l'on note  $\varepsilon_{\text{loc}}^{d_\xi, d_\zeta}$ , vaut :

$$\varepsilon_{\text{loc}}^{d_\xi, d_\zeta}(\eta_\xi, \eta_\zeta, k_\xi \Delta \xi, k_\zeta \Delta \zeta) = \left| \frac{f_{k_\xi, k_\zeta} - \tilde{f}_{k_\xi, k_\zeta}}{f_{k_\xi, k_\zeta}} \right|$$

L'erreur globale d'interpolation sur la cellule  $(d_\xi, d_\zeta)$ , notée  $\varepsilon^{d_\xi, d_\zeta}$ , est construite en prenant la plus grande erreur locale d'interpolation sur l'ensemble de la cellule d'interpolation. On a donc :

$$\varepsilon^{d_\xi, d_\zeta}(k_\xi \Delta \xi, k_\zeta \Delta \zeta) = \max_{(\eta_\xi, \eta_\zeta) \in [0, 1]^2} \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta_\xi, \eta_\zeta, k_\xi \Delta \xi, k_\zeta \Delta \zeta)$$

La figure 5.36 montre l'erreur globale d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde des méthodes d'interpolation 2-D à support carré obtenues par produit tensoriel d'interpolations centrées 1-D de Lagrange à 2, 6, et 10 points ou d'interpolations optimisées, d'ordre 2, à 4, 6 et 10 points. Parmi toutes les méthodes représentées, la méthode  $\text{OI10p2o}^5 \otimes \text{OI10p2o}^5$  est la seule qui assure une erreur d'interpolation inférieure à  $10^{-5}$  sur le domaine  $[0, 2\pi/5] \times [0, 2\pi/5]$ . Enfin, on retrouve bien sûr asymptotiquement les courbes d'erreur 1-D relatives aux méthodes d'interpolation utilisées dans une dimension lorsque l'on fait tendre le nombre d'onde dans l'autre direction vers 0.

### 5.5.2 Interpolation de Lagrange 2-D

À l'exception du livre pionnier de Steffensen [224], très peu de livres d'analyse numérique consacrent une partie sur l'interpolation multivariable [91]. Elle n'est abordée (partiellement ou totalement) que dans la littérature récente, comme par exemple par de Boor dans [29] ou par Gasca dans [94].

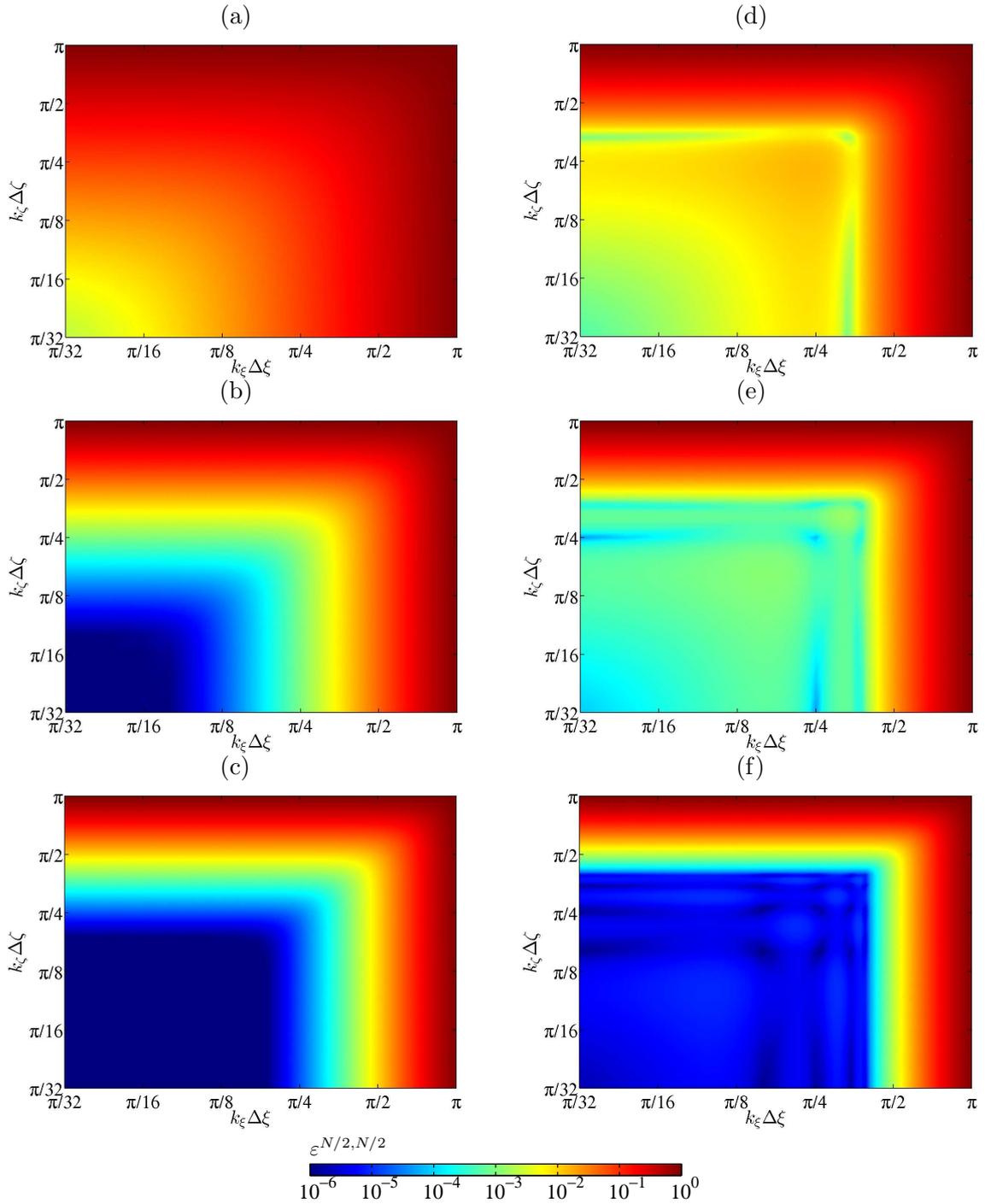
On souhaite dans cette partie construire une méthode d'interpolation multivariable directe sur un support carré de  $N^2$  points. De manière analogue à la construction d'une interpolation 1-D, on note  $\tilde{f}$  l'interpolation au point  $\mathbf{x}$  d'une fonction de 2 variables  $f$  définie de  $\mathcal{S}_\xi \times \mathcal{S}_\zeta$  dans  $\mathbb{C}$ .

Une interpolation 2-D non couplée explicite s'exprime par [229] :

$$\tilde{f}(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} S_{j,l}(\xi, \zeta) f_{j,l} \quad (5.18)$$

où les quantités  $S_{j,l}(\xi, \zeta)$  sont les  $N^2$  coefficients d'interpolation à déterminer. Il ne reste donc qu'à choisir un espace d'interpolation dans lequel on construit les coefficients d'interpolation. À l'instar de la construction des interpolations de Lagrange 1-D, on souhaite choisir un espace d'interpolation de type polynomial.

Cependant, de nombreux auteurs rappellent que le choix de l'espace d'interpolation est une étape délicate [28, 131, 146], particulièrement pour des espaces vectoriels de polynômes. Prenons par exemple l'ensemble des polynômes à 2 variables de degré au plus  $N-1$ , que l'on note  $\mathbb{R}_{N-1}[\xi, \zeta]$ . Cet ensemble offre  $N(N+1)/2$  degrés de liberté, et semble *a priori* ne pas convenir car l'on dispose de  $N^2$  coefficients d'interpolation à déterminer. *A contrario*, si l'on fait le choix d'un nombre de points donneurs égal au nombre de degrés de liberté fourni par  $\mathbb{R}_{N-1}[\xi, \zeta]$ , il n'est plus possible de les placer suivant un carré. On observe alors, en plaçant les  $N(N+1)/2$  points donneurs de manière non-symétrique, que le système d'équations liées



**Fig. 5.36:** Erreur globale d'interpolation  $\varepsilon^{N/2, N/2}$  dans l'espace des nombres d'onde pour des interpolations 2-D à support carré obtenues par produit tensoriel d'interpolation 1-D à  $N$  points centrés ( $N$  pair) : (a)  $\text{LI}2\text{p}^1 \otimes \text{LI}2\text{p}^1$ . (b)  $\text{LI}6\text{p}^3 \otimes \text{LI}6\text{p}^3$ . (c)  $\text{LI}10\text{p}^5 \otimes \text{LI}10\text{p}^5$ . (d)  $\text{OI}4\text{p}2\text{o}^2 \otimes \text{OI}4\text{p}2\text{o}^2$ . (e)  $\text{OI}6\text{p}2\text{o}^3 \otimes \text{OI}6\text{p}2\text{o}^3$ . (f)  $\text{OI}10\text{p}2\text{o}^5 \otimes \text{OI}10\text{p}2\text{o}^5$ . Les erreurs en-deçà de  $10^{-6}$  sont majorées par  $10^{-6}$ .

aux conditions de collocation (le polynôme de Lagrange 2-D associé au point donneur  $(\xi_j, \zeta_l)$  prend la valeur 1 en  $(\xi_j, \zeta_l)$  et 0 aux autres points donneurs) est singulier.

### 5.5.2.1 Espaces de Haar

Le problème du choix de l'espace d'interpolation peut être appréhendé plus formellement à l'aide des travaux de Gasca & Sauer [91].

Le problème d'interpolation de Lagrange consiste formellement à trouver, pour  $\mathcal{N}$  points distincts  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mathcal{N}-1}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour  $\mathcal{N}$  réels  $\{y_0, y_1, \dots, y_{\mathcal{N}-1}\}$ , un polynôme  $P$  dans un sous-espace  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}[\xi, \zeta]$  de dimension supérieure ou égale à  $\mathcal{N}$ , par lequel l'image de  $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{\mathcal{N}-1}\}$  est  $\{y_0, \dots, y_{\mathcal{N}-1}\}$ , c'est à dire que  $P(\mathbf{x}_j) = y_j$ , pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ .

L'ensemble  $\mathcal{H}$  est un espace de Haar d'ordre  $\mathcal{N}$  si quels que soient les  $\mathcal{N}$  points distincts  $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{\mathcal{N}-1}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  donnés, et quels que soient les  $\mathcal{N}$  réels  $\{y_0, \dots, y_{\mathcal{N}-1}\}$ , il existe un polynôme  $P \in \mathcal{H}$  tel que  $P(\mathbf{x}_j) = y_j$ , pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ .

L'utilisation de supports d'interpolation carrés comme celui présenté à la figure 5.35 impose donc le recours à un espace d'interpolation qui est un espace de Haar d'ordre  $N^2$ .

On peut montrer que l'ensemble  $\mathbb{R}_{N-1}[\xi, \zeta]$  introduit précédemment ne convient pas, car il forme un espace de Haar d'ordre  $N$ . En effet, il suffit par exemple d'expliciter un polynôme  $P$  contenu dans  $\mathbb{R}_{N-1}[\xi, \zeta]$  par lequel l'image de  $N$  points distincts  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$  quelconques de  $\mathbb{R}^2$  est les  $N$  réels  $\{y_0, \dots, y_{N-1}\}$  quelconques. On considère pour cela une équation  $H_j(\mathbf{x}) = 0$  d'une droite qui contient le point  $\mathbf{x}_j$  et aucun des autres points  $\mathbf{x}_l$  ( $j \neq l$ ), puis on pose :

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{N-1} y_m \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} \frac{H_n(\mathbf{x})}{H_n(\mathbf{x}_m)}$$

On considère  $\mathcal{P}_{N-1}[\xi, \zeta]$  l'ensemble des polynômes de degré au plus  $(N-1)^2$  défini par :

$$\mathcal{P}_{N-1}[\xi, \zeta] = \left\{ P(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n} \xi^m \zeta^n, a_{m,n} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}_{N-1}[\xi] \otimes \mathbb{R}_{N-1}[\zeta]$$

Cet ensemble est un espace d'interpolation adapté à la structure de support de points donneurs en carré, puisqu'il s'agit d'un espace de Haar d'ordre  $N^2$ . En effet, pour un ensemble  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N^2-1}\}$  de points distincts quelconques de  $\mathbb{R}^2$  et pour  $N^2$  réels  $\{y_0, y_1, \dots, y_{N^2-1}\}$  quelconques, on peut expliciter un polynôme  $P$  de  $\mathcal{P}_{N-1}[\xi, \zeta]$  par lequel l'image des points  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N^2-1}\}$  est l'ensemble  $\{y_0, y_1, \dots, y_{N^2-1}\}$ . Il s'agit du polynôme  $P$  dont les  $a_{m,n}$  correspondants vérifient :

$$\mathbf{M}_p \mathbf{A} = {}^t [ y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_{N^2-1} ]$$

avec  $\mathbf{A}$  la matrice des coefficients, définie par :

$${}^t [ a_{0,0} \quad a_{0,1} \quad \dots \quad a_{0,N-1} \quad a_{1,0} \quad \dots \quad a_{1,N-1} \quad a_{2,0} \quad \dots \quad a_{N-1,N-1} ]$$

et  $\mathbf{M}_p$  la matrice des positions géométriques des points donneurs :

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_0 & \dots & \zeta_0^{N-1} & \xi_0 & \xi_0 \zeta_0 & \dots & \xi_0 \zeta_0^{N-1} & \dots & \xi_0^{N-1} \zeta_0^{N-1} \\ 1 & \zeta_1 & \dots & \zeta_1^{N-1} & \xi_1 & \xi_1 \zeta_1 & \dots & \xi_1 \zeta_1^{N-1} & \dots & \xi_1^{N-1} \zeta_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \zeta_{N^2-1} & \dots & \zeta_{N^2-1}^{N-1} & \xi_{N^2-1} & \xi_{N^2-1} \zeta_{N^2-1} & \dots & \xi_{N^2-1} \zeta_{N^2-1}^{N-1} & \dots & \xi_{N^2-1}^{N-1} \zeta_{N^2-1}^{N-1} \end{bmatrix}$$

Le fait de prendre les points  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N^2-1}\}$  distincts assure que la matrice  $\mathbf{M}_p$  est inversible, ce qui définit de manière unique les coefficients  $a_{m,n}$ , et donc le polynôme  $P$ .

### 5.5.2.2 Polynômes de Lagrange 2-D

Les polynômes de Lagrange 2-D  $\ell_{j,l}$  associés aux points donneurs  $\mathbf{x}_{j,l} = (\xi_j, \zeta_l)$ , qui forment un support d'interpolation carré de  $N^2$  points, sont pris dans l'ensemble  $\mathcal{P}_{N-1}[\xi, \zeta]$ .

On obtient,  $\forall (\xi, \zeta) \in [\xi_0, \xi_{N-1}] \times [\zeta_0, \zeta_{N-1}]$  :

$$\ell_{j,l}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n}^{j,l} \xi^m \zeta^n$$

Les coefficients  $a_{m,n}^{j,l}$  sont déterminés par la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{V}(\{\xi_0, \dots, \xi_{N-1}\}) \odot \mathbf{V}(\{\zeta_0, \dots, \zeta_{N-1}\}) \mathbf{A}^{j,l} = \delta_j \odot \delta_l$$

avec  $\mathbf{A}^{j,l}$  le vecteur des coefficients associés au polynôme de Lagrange  $\ell_{j,l}$  :

$$\mathbf{A}^{j,l} = {}^t \left[ a_{0,0}^{j,l} \quad a_{0,1}^{j,l} \quad \dots \quad a_{0,N-1}^{j,l} \quad a_{1,0}^{j,l} \quad \dots \quad a_{1,N-1}^{j,l} \quad a_{2,0}^{j,l} \quad \dots \quad a_{N-1,N-1}^{j,l} \right]$$

Le symbole  $\odot$  désigne le produit de Kronecker de deux matrices et  $\mathbf{V}$  l'opérateur de Vandermonde, défini par :

$$\mathbf{V}(\{\xi_0, \dots, \xi_{N-1}\}) = \begin{bmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \dots & \xi_0^{N-1} \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{N-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_{N-1} & \xi_{N-1}^2 & \dots & \xi_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}$$

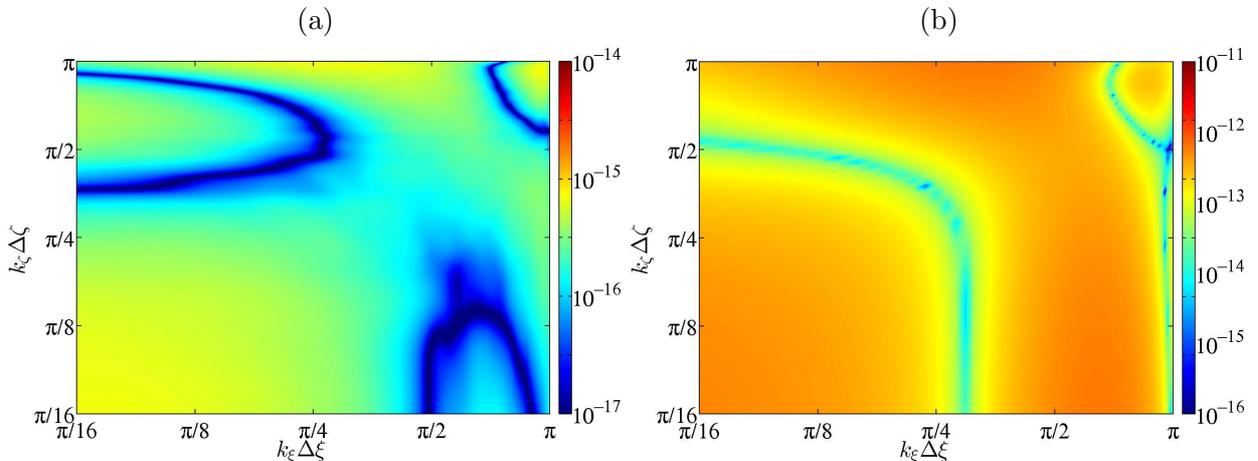
Le vecteur  $\delta_i$  est donné par :

$$\delta_j = {}^t \left[ \delta_0^j \quad \delta_1^j \quad \dots \quad \delta_{N-1}^j \right]$$

Dans la suite, l'interpolation de Lagrange 2-D à  $N \times N$  points sur la cellule d'interpolation  $(d_\xi, d_\zeta)$  est noté  $\text{LINp}^{d_\xi, d_\zeta}$ .

### 5.5.2.3 Comparaison à l'interpolation par produit tensoriel d'interpolations 1-D de Lagrange

Les figures 5.37(a) et 5.37(b) montrent la valeur absolue de la différence entre l'erreur globale d'interpolation 2-D par produit tensoriel d'interpolations centrées respectivement à 4 et 8 points, et l'interpolation de Lagrange 2-D directe à 4 et 8 points. On observe que



**Fig. 5.37:** Valeur absolue de la différence entre l'erreur globale d'interpolation de l'interpolation de Lagrange 2-D par produit tensoriel d'interpolations centrées à  $N$  points  $\text{LINp}^{N/2} \otimes \text{LINp}^{N/2}$ , et l'interpolation de Lagrange 2-D centrée à  $N$  points directe  $\text{LINp}^{N/2, N/2}$ . (a)  $N = 4$ . (b)  $N = 8$ .

dans les deux cas, les méthodes d'interpolation 2-D directes et celles obtenues par produit tensoriel d'interpolations 1-D ont la même erreur globale d'interpolation. En effet, leurs erreurs d'interpolation sont distantes de moins de  $10^{-11}$  sur l'ensemble de l'espace des nombres d'onde, ce qui est négligeable.

Même si les deux méthodes sont équivalentes en terme d'erreur d'interpolation, elles ne le sont pas en terme de coût de calcul. L'inversion matricielle nécessaire pour la méthode 2-D directe pénalise fortement ses performances pour le calcul des coefficients d'interpolation. À titre illustratif, le tableau 5.2 propose les temps moyens de calcul des coefficients d'interpolation pour les méthodes directes et les méthodes par produit tensoriel d'interpolations 1-D, pour  $N$  variant de 2 à 10. Le temps de calcul des coefficients est jusqu'à 100 fois plus long pour la méthode 2-D directe à 10 points, ce qui est handicapant dans le cadre d'un calcul haute performance. Aussi, le temps nécessaire pour effectuer une interpolation 2-D, sans considérer le calcul des coefficients, est plus grand pour une méthode directe que pour une méthode par interpolations 1-D successives. Des tests effectués avec *Matlab 7.7*, exécuté sous *Linux Ubuntu 9.04* sur un CPU Intel Xeon E5320 @ 1.86 GHz, associé à 2 Go de mémoire RAM, donnent un temps d'interpolation de 0.46 ms pour la méthode  $\text{LI10p}^5 \otimes \text{LI10p}^5$ , et plus de 1 ms pour la méthode directe  $\text{LI10p}^{5,5}$ .

$N$	Points donneurs	1-D $\otimes$ 1-D	2-D
2	4	0.83	5.0
4	16	0.84	9.1
6	36	0.86	15.2
8	64	0.88	31.3
10	100	0.92	129.5

**Tab. 5.2:** Temps moyen de calcul (en ms) des coefficients d'interpolation 2-D avec *Matlab 7.7*, exécuté sous *Linux Ubuntu 9.04* sur un CPU Intel Xeon E5320 @ 1.86 GHz, associé à 2 Go de mémoire RAM, en fonction du nombre de points donneurs, pour différentes méthodes de Lagrange.

Compte tenu de ces résultats, on utilise donc dans la suite les interpolations multidimensionnelles obtenues par produit tensoriel d'interpolations 1-D car elles offrent de meilleures performances que les méthodes directes pour une précision d'interpolation équivalente.

## 5.6 Cas tests de validation

On présente ici la simulation 2-D d'un tourbillon bidimensionnel introduit au centre d'un maillage composite de type polaire-cartésien, en présence d'un écoulement de  $u_\infty = 150$  m/s dans la direction  $e_1$ . Le maillage cartésien, au cœur, est composé de  $200 \times 200$  points, tandis que le maillage polaire, en périphérie, est constitué de 175 points radialement et de 500 points azimutalement. Le premier point du maillage polaire est placé à un rayon  $r_{\min}$  du centre du maillage cartésien. Les pas de discrétisation, tous constants, sont choisis de telle sorte que les mailles polaires soient sensiblement de la même taille que les mailles cartésiennes dans la zone de superposition. Les pas de discrétisation du maillage cartésien dans chacune des directions sont pris égaux, soit  $\Delta x_1 = \Delta x_2$ . Parallèlement à ce calcul, le cas test est mené sur un maillage cartésien plus grand, de  $700 \times 700$  points, présentant les mêmes pas de discrétisation que le maillage cartésien de cœur du maillage composite. Ce calcul simule le comportement de zones de communication parfaites et fournit donc une solution de référence, qui est rapportée sur le maillage composite à l'aide d'une méthode d'interpolation  $\text{OI10p2o}^5 \otimes \text{OI10p2o}^5$ . On indicera les variables par  $_{\text{ref}}$  pour cette solution. Le pas de temps est défini en choisissant un nombre CFL de 0.5 :  $\Delta t = 0.5 r_{\min} \Delta \theta / (c_\infty + u_\infty)$ .

## Initialisation

À  $t = 0$ , le tourbillon est introduit au centre du maillage composite grâce à l'initialisation suivante, respectivement sur le maillage cartésien au cœur et le maillage polaire périphérique :

- Maillage cartésien au cœur :

$$\begin{cases} p(x_1, x_2) = p_\infty \\ u_1(x_1, x_2) = u_\infty + \omega_0 x_2 \exp\left(-\ln 2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{l_t^2}\right) \\ u_2(x_1, x_2) = -\omega_0 x_1 \exp\left(-\ln 2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{l_t^2}\right) \\ \rho(x_1, x_2) = \rho_\infty \end{cases}$$

- Maillage polaire en périphérie :

$$\begin{cases} p(r, \theta) = p_\infty \\ u_r(r, \theta) = u_\infty \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -u_\infty \sin \theta - \omega_0 r \exp\left(-\ln 2 \frac{r^2}{l_t^2}\right) \\ \rho(r, \theta) = \rho_\infty \end{cases}$$

avec  $\omega_0$  la vorticité au cœur du tourbillon, et  $l_t$  la demi-largeur du tourbillon. Le rayon du tourbillon est défini comme le rayon pour lequel le maximum de vitesse tangentielle est atteint. Il vaut :

$$r_{\text{tourb}} = \frac{l_t}{\sqrt{2 \ln 2}}$$

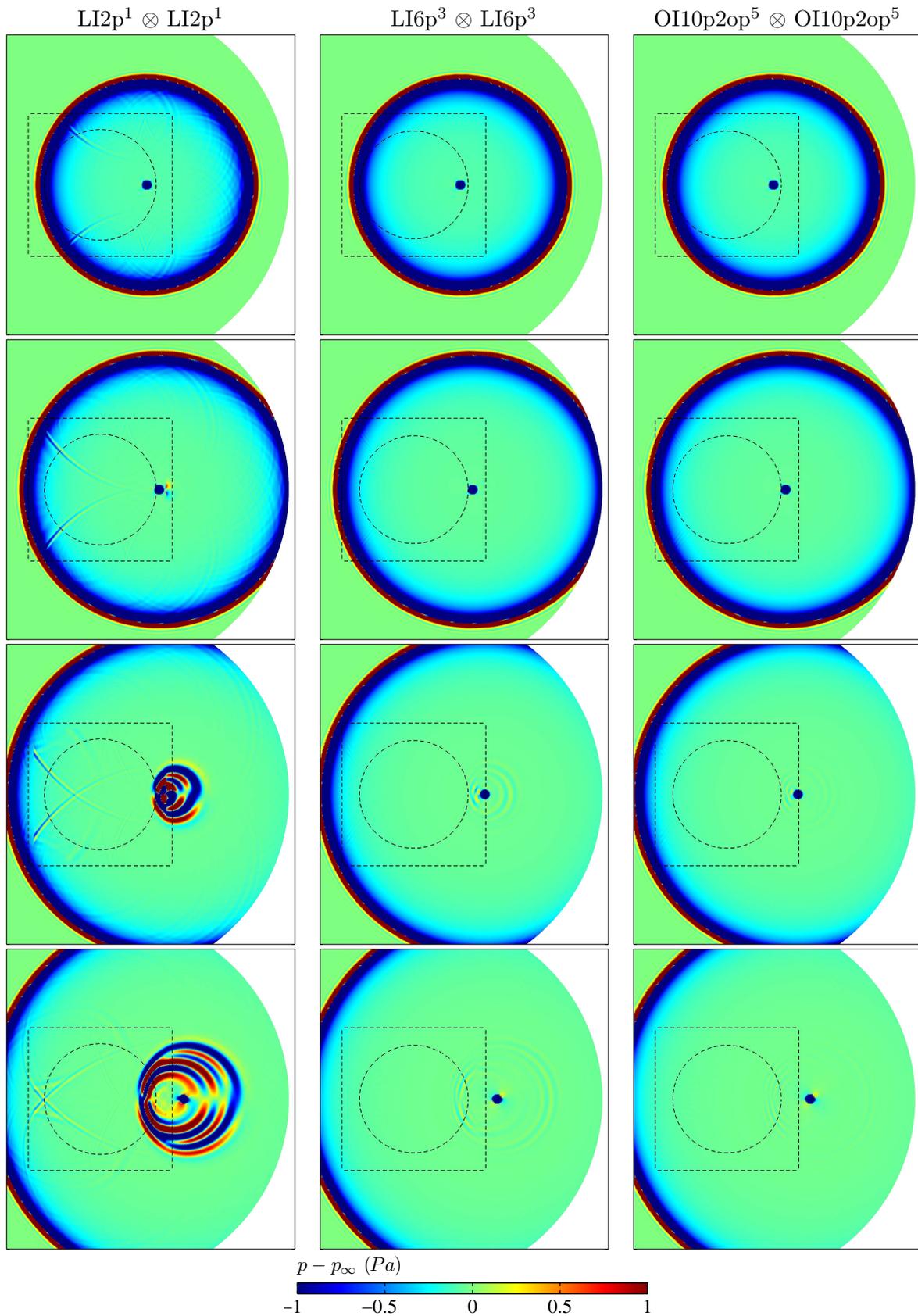
Dans toute la suite, on choisit un tourbillon d'un diamètre de  $5\Delta x_1$ , soit  $l_t = 3.5\Delta x_1$ , et une vitesse maximale tangentielle de  $15 \text{ m/s}$  ( $\omega_0 \simeq 1200 \text{ rad/s}$ ). Ceci permet de tester les différentes méthodes d'interpolation à la longueur minimale correctement résolue par le schéma aux différences finies.

## Résultats

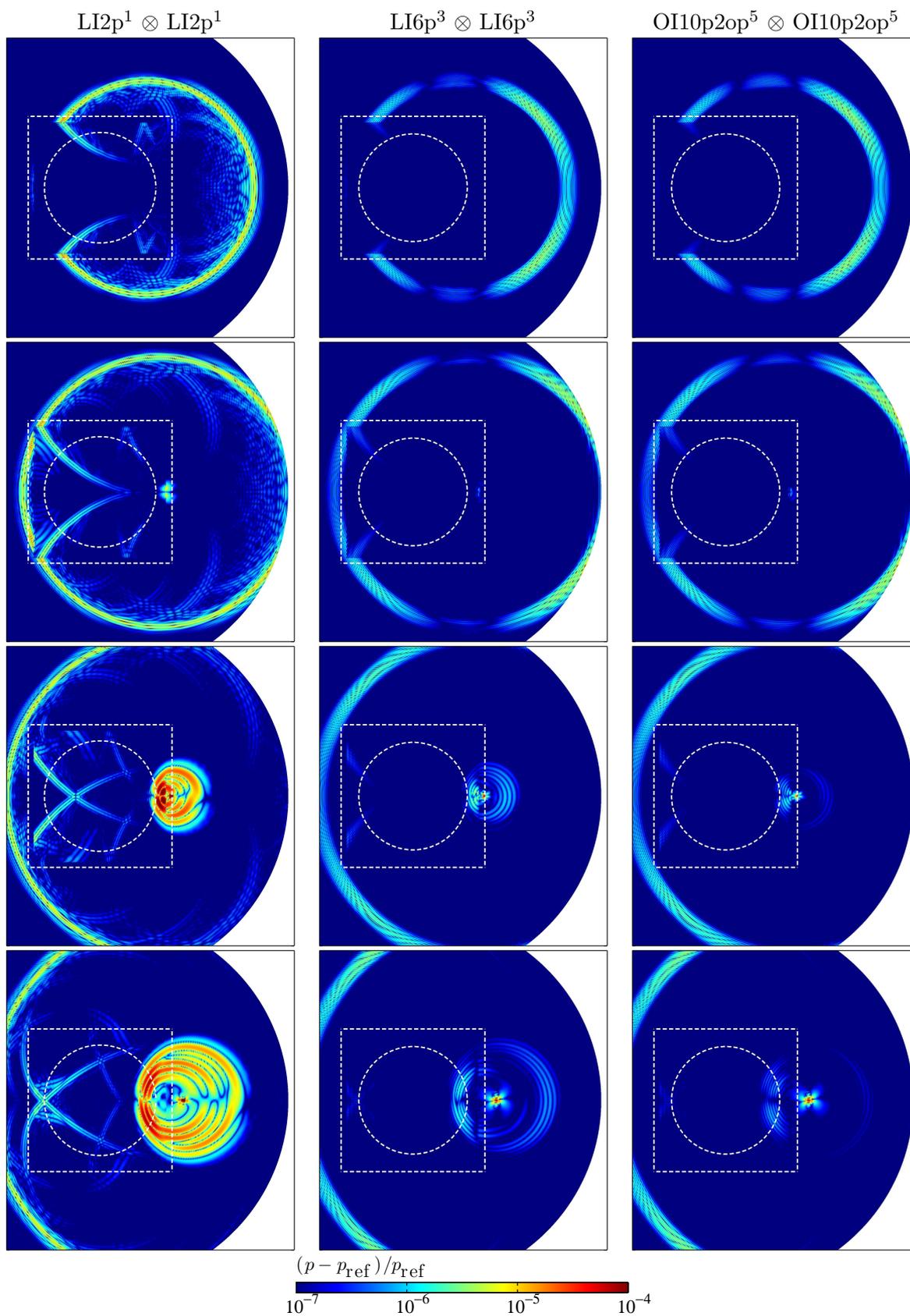
La figure 5.38 présente la pression fluctuante  $p - p_\infty$  à différents pas de temps sur l'ensemble du maillage composite, pour des communications entre le maillage cartésien au cœur et le maillage polaire périphérique effectuées respectivement à l'aide d'interpolations 2-D obtenues par produit tensoriel d'interpolations 1-D centrées de Lagrange à 2 points, de Lagrange à 6 points et optimisées à 10 points d'ordre 2. La figure 5.39 montre l'erreur relative sur la pression par rapport à la solution de référence.

Les fronts d'onde circulaires nettement visibles à la figure 5.38 correspondent au régime transitoire engendré par des conditions initiales hors équilibre. Le petit disque central de dépression correspond au tourbillon que l'on convecte. Les 3 méthodes testées introduisent un rayonnement parasite lors du passage du tourbillon dans la zone de superposition des deux maillages. Ce rayonnement parasite présente une intensité qui dépend de la méthode d'interpolation utilisée. Elle est très intense pour la méthode de Lagrange à 2 points (de l'ordre de  $10^{-5}p_\infty$  à  $10^{-4}p_\infty$ ), alors qu'elle est plus modérée pour la méthode de Lagrange à 6 points (de l'ordre de  $10^{-6}p_\infty$ ) et elle devient négligeable pour la méthode optimisée à 10 points d'ordre 2 (de l'ordre de  $10^{-7}p_\infty$ ). La fréquence du rayonnement dépend également de la méthode d'interpolation utilisée. Alors qu'il est plutôt basse fréquence pour la méthode de Lagrange à 2 points, il devient haute et très haute fréquence respectivement pour les méthodes de Lagrange à 6 points et la méthode d'interpolation optimisée à 10 points d'ordre 2. Il peut être alors davantage affecté par le filtrage sélectif, ce qui réduirait son impact négatif sur la simulation.

On observe également de la réflexion le long des zones de superposition, particulièrement sur le front d'onde transitoire. Cette réflexion parasite est d'autant plus marquée que le support d'interpolation est court. La méthode d'interpolation à 2 points introduit enfin énormément de rayonnement parasite haute fréquence sur le maillage cylindrique au passage du front d'onde transitoire dans la zone de superposition.



**Fig. 5.38:** Pression fluctuante  $p - p_\infty$ , bornée entre  $\pm 1 Pa$  à  $t = 480\Delta t$ ,  $t = 600\Delta t$ ,  $t = 720\Delta t$ , et  $t = 840\Delta t$ . À gauche : interpolations centrées de Lagrange à 2 points. Au centre : interpolations centrées de Lagrange à 6 points. À droite : interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2. Les limites de la zone de communication sont représentées en pointillés noirs.



**Fig. 5.39:** Erreur relative entre la pression  $p$  et la solution de référence  $p_{\text{ref}}$ , bornée entre  $10^{-7}$  et  $10^{-4}$ , à  $t = 480\Delta t$ ,  $t = 600\Delta t$ ,  $t = 720\Delta t$ , et  $t = 840\Delta t$ . À gauche : interpolations centrées de Lagrange à 2 points. Au centre : interpolations centrées de Lagrange à 6 points. À droite : interpolations optimisées à 10 points d'ordre 2. Les limites de la zone de communication sont représentées en pointillés blancs.

Le recours à la méthode optimisée à 10 points est donc doublement bénéfique : il permet une réduction maximale de l'amplitude du rayonnement parasite par rapport aux autres méthodes testées, et le rayonnement parasite généré est très haute fréquence. Il est donc susceptible d'être en partie dissipé par le filtrage sélectif. On se propose d'étudier dans la section suivante le mécanisme de génération du rayonnement parasite.

### Mécanisme de génération du rayonnement parasite

Les méthodes d'interpolation testées étant obtenues par produit tensoriel d'interpolations 1-D, l'étude qui suit peut être réduite au cas 1-D sans perte de généralité. Comme le démontre Desquesnes *et al.* pour une interpolation de Lagrange à 4 points [63], le processus d'interpolation, qui consiste à construire un signal continu à partir d'un signal échantillonné, puis à le rééchantillonner sur un second maillage génère un repliement spectral (*aliasing*) à l'origine du rayonnement parasite.

On considère un échantillonnage régulier infini de  $\mathbb{R}$  de pas  $\Delta\xi$  par le maillage  $\xi_j = j\Delta\xi$ . Pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , on introduit son échantillonnage, que l'on note  $f_{\text{m}}$ , défini par  $f_{\text{m}}(\xi) = f(\xi) \text{III}_{\Delta\xi}(\xi)$ . La fonction  $\text{III}_{\Delta\xi}$  désigne le peigne de Dirac de période  $\Delta\xi$ , donné par  $\text{III}_{\Delta\xi}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - j\Delta\xi)$ , avec  $\delta$  la distribution de Dirac. Une réécriture de l'équation (5.2) donne :

$$\tilde{f}(\xi) = f_{\text{m}}(\xi) * h_s(\xi)$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution, et  $h_s$  le filtre d'interpolation associé à la méthode d'interpolation déterminée par les coefficients  $s_j^d$ . Il est calculé directement à partir des coefficients  $s_j^d$  par :

$$h_s(\xi) = \sum_{j=1-d}^{N-d} \mathbf{1}_{[0,1[} \left( \frac{\xi}{\Delta\xi} + j \right) s_{j+d-1}^d \left( \frac{\xi}{\Delta\xi} + j \right)$$

Dans toute la suite, pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ , pour tout réel  $k$ , on note  $\hat{f}$  la transformée de Fourier de la fonction  $f$ , définie par :

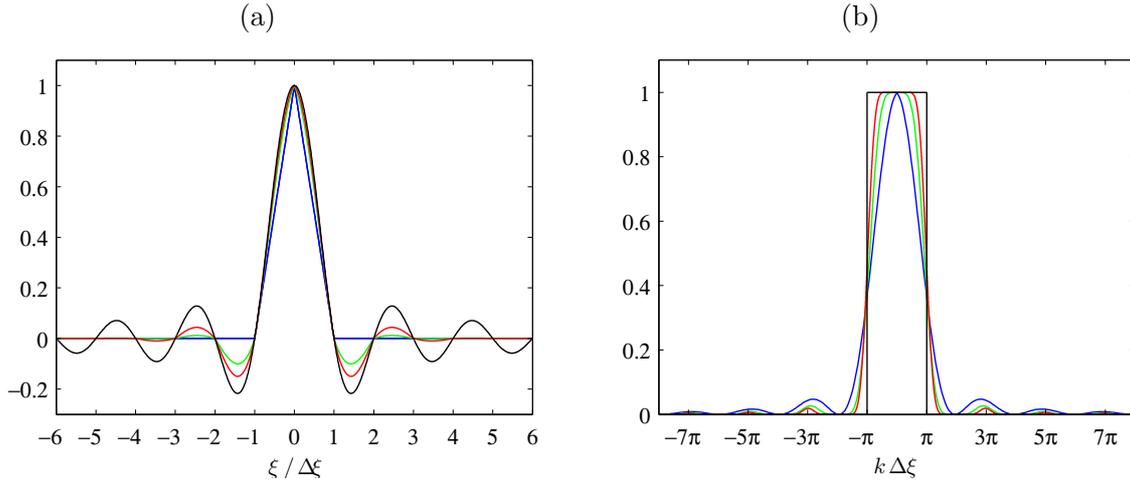
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi$$

La figure 5.40(a) montre les courbes représentatives du filtre d'interpolation  $h_s$  pour les méthodes d'interpolation testées, et la figure 5.40(b) le module normalisé de leur transformée de Fourier. On y a représenté le filtre d'interpolation idéale correspondant à l'interpolation de Whittaker–Shannon, donné par le théorème de Shannon–Nyquist [210] :

$$h_s(\xi) = \text{sinc} \left( \frac{\pi\xi}{\Delta\xi} \right)$$

Les filtres des méthodes à  $N$  points sont à support compact de longueur  $N$  centré en 0, approximant le filtre idéal de Whittaker–Shannon en sinus cardinal à support infini. On constate sur la figure 5.40(b) que contrairement à l'interpolation idéale, les transformées de Fourier des filtres d'interpolation des méthodes testées ne sont pas à support compact inclus dans  $]-\pi/\Delta\xi, \pi/\Delta\xi[$ . En effet, le pic principal s'étale au-delà de cet intervalle, et on observe des pics secondaires au voisinage des nombres d'onde  $k\Delta\xi = \pm 3\pi$ ,  $k\Delta\xi = \pm 5\pi$ ,  $k\Delta\xi = \pm 7\pi$ , etc. La transformée de Fourier de l'interpolation de Whittaker–Shannon est d'autant mieux approximée que le nombre de points donneurs est grand. Les pics secondaires ont une amplitude qui diminue avec le nombre de points donneurs.

La dernière étape du processus est l'échantillonnage de la fonction  $\tilde{f}$  sur un second maillage



**Fig. 5.40:** (a) Courbe représentative du filtre d'interpolation  $h_s$  pour les méthodes d'interpolation testées. (b) Module normalisé de la transformée de Fourier du filtre d'interpolation  $|\widehat{h}_s|$  pour les méthodes d'interpolation testées. — : LI2p<sup>1</sup>, — : LI6p<sup>3</sup>, — : OI10p<sup>5</sup>, — : Interpolation de Whittaker-Shannon.

infini de  $\mathbb{R}$ , de pas de discrétisation  $\Delta\xi'$ , translaté de  $-d'$  par rapport au premier maillage. Il est construit à l'aide des points  $\xi'_j = j\Delta\xi' + d'$ , avec  $d' \in [-\Delta\xi/2, \Delta\xi/2]$ . L'échantillonnage de  $\widetilde{f}$  s'écrit :

$$\widetilde{f}_{\text{in}}(\xi) = \widetilde{f}(\xi) \text{III}_{\Delta\xi'}(\xi - d') \quad (5.19)$$

L'équation (5.19) peut être réécrite dans l'espace des nombres d'onde :

$$\widehat{f}_{\text{in}}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta\xi'} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2i\pi j d'}{\Delta\xi'}\right) \widehat{h}_s\left(k - \frac{2\pi j}{\Delta\xi'}\right) \widehat{f}_{\text{in}}\left(k - \frac{2\pi j}{\Delta\xi'}\right)$$

La transformée de Fourier de la fonction  $\widetilde{f}$  échantillonnée sur le second maillage s'écrit donc comme une somme des translations de  $2\pi/\Delta\xi'$  du produit de la transformée de Fourier du filtre d'interpolation  $h_s$  et de la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée sur le premier maillage  $f_{\text{in}}$ . Dans le cas général, ce produit n'est pas à support compact inclus dans  $]-\pi/\Delta\xi', \pi/\Delta\xi'[$ , en raison des pics secondaires observés pour la transformée de Fourier du filtre d'interpolation  $\widehat{h}_s$ . On assiste donc à un repliement spectral : les niveaux non-nuls observés pour  $k\Delta\xi = 3\pi/\Delta\xi, 5\pi/\Delta\xi$ , etc. peuvent se retrouver par translation dans l'intervalle  $]-\pi/\Delta\xi', \pi/\Delta\xi'[$  dans la signature fréquentielle du signal échantillonné sur le second maillage. La conséquence est alors l'introduction de composantes basses fréquences parasites dans le signal discret sur le second maillage. Le phénomène est d'autant plus marqué que  $\Delta\xi'$  est proche de  $\Delta\xi$ , ce qui était le cas dans les cas-tests précédents, pour lesquels les mailles avaient des tailles identiques dans la zone de superposition.

## 5.7 Parallélisation du code de simulation

Les simulations directes en CAA nécessitent généralement un nombre important de points de maillage, et par conséquent un espace mémoire de grande taille et des temps de calcul considérables. C'est particulièrement le cas dans ce travail, où la présence de parois oblige à une réduction de la discrétisation spatiale à leur voisinage, en vue de simuler correctement le comportement de la couche limite. L'utilisation d'un recouvrement de maillages partitionnant le domaine de calcul en 3 sous-maillages élémentaires traités indépendamment, invite naturellement à la parallélisation du code de simulation afin d'améliorer les performances de

simulation. Celle-ci consiste en la partition de l'application en tâches adaptées et fractionnées entre plusieurs unités de calcul (processeurs (CPU) ou cœurs pour les processeurs multicœurs) opérant simultanément.

### 5.7.1 Plateformes parallèles

De manière générale, les plateformes parallèles sont constituées d'un grand nombre d'unités de calcul, et d'une grande quantité de mémoire vive (RAM), qui peut être soit partagée, soit distribuée.

Les plateformes à mémoire partagée sont des architectures multi-processeurs où toutes les unités de calcul ont accès à une mémoire commune. Si ce type de plateformes permet de s'affranchir des problèmes liés au partitionnement du domaine de calcul et de la répartition des données, il n'en reste pas moins limité par le problème sous-jacent de la vitesse d'accès aux données et des cohérences de cache entre les différents niveaux d'antémémoire que possèdent l'architecture. En effet, lorsqu'une donnée est modifiée et qu'elle est utilisée par différentes unités de calcul, cette mise à jour doit également être effectuée dans tous les caches, sans quoi les unités de calcul travailleraient avec des données incohérentes. L'architecture nécessite donc la mise en place de protocoles de maintien de cohérence, qui peuvent dans certains cas constituer un goulot d'étranglement au traitement de l'information. Elle demande aussi du matériel spécifique permettant à plusieurs processeurs d'accéder à la même mémoire. Des plateformes possédant un grand nombre de processeurs à mémoire partagée sont aujourd'hui disponibles mais cela reste du matériel coûteux.

Une alternative est la mémoire distribuée. Les plateformes à mémoire distribuée sont des architectures multi-processeurs où toutes les unités de calcul, reliées par un réseau de communication, ont une mémoire vive propre. Le traitement des données n'est donc effectué qu'au niveau local, et les unités de calcul doivent utiliser le réseau pour accéder aux données présentes dans la mémoire d'un autre processeur. Une telle structure peut être obtenue facilement en reliant des ordinateurs standard par un réseau de communication, sans contrainte sur le nombre d'unités. Le coût du matériel, qui décroît de manière constante, est l'un des principaux facteurs qui contribuent à la forte tendance actuelle en faveur du calcul parallèle à mémoire distribuée. Cependant, l'utilisation de ce type de plateformes exige un effort de programmation conséquent afin de répartir au mieux les tâches et les données entre les différentes unités de calcul et mémoires propres. Les performances sont également très dépendantes de la rapidité du réseau et de la latence de celui-ci (délai d'établissement de la communication, etc.). Aujourd'hui, un réseau ethernet domestique permet un débit de 100 Mbits/s pour la norme *Fast Ethernet*, soit environ 12 Mo/s. Des technologies plus récentes permettent d'atteindre un débit de 1 000 Mbits/s (*Gigabit Ethernet*), soit environ 125 Mo/s, et de 10 000 Mbits/s (environ 1.2 Go/s), pour la norme *10 Gigabit Ethernet*, à l'aide de connectiques à fibre optique ou en cuivre. Les technologies InfiniBand SDR (*Single Data Rate*), DDR (*Double Data Rate*) et QDR (*Quad Data Rate*) sont aujourd'hui très utilisées dans le monde des superordinateurs (*High Performance Computing*), assurant respectivement des débits maximaux de 10 000, 20 000 et 40 000 Mbits/s pour la norme 4X. Le réseau InfiniBand SDR a une latence extrêmement faible, de l'ordre de 200 ns tandis que celle d'un réseau InfiniBand DDR est de 140 ns. La technologie *100 Gigabit Ethernet* est en cours de développement depuis début 2008. Reposant sur des liaisons filaires à fibre optique, elle promet un débit maximal de 100 000 Mbits/s, soit 12.2 Go/s.

### 5.7.2 Bibliothèque MPI pour le calcul parallèle

De nombreuses bibliothèques de fonctions préprogrammées ont été développées pour faciliter l'envoi et la réception de paquets d'information, ainsi que la synchronisation entre les différents processus. La bibliothèque utilisée dans ce travail est la bibliothèque MPI (*Message Passing Interface*), qui est devenue *de facto* un standard de communication pour le calcul

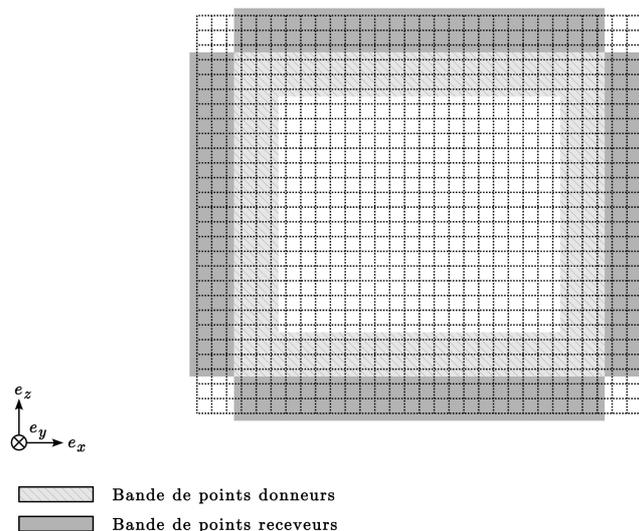
parallèle. Utilisable avec les langages C et `fortran`, cette bibliothèque permet le transfert individuel ou en masse de variables ou de tableaux. Elle permet d'obtenir de bonnes performances aussi bien sur des machines parallèles à mémoire partagée, que sur des clusters d'ordinateurs hétérogènes à mémoire distribuée. La communication entre plusieurs processus s'exécutant sur une même unité de calcul peuvent être gérée avec la bibliothèque MPI, mais les performances sont optimales lorsqu'un processeur (ou cœur pour des machines multicœurs) est assigné à un unique processus. Les communications entre les processus sont menées au sein d'un même communicateur, dans lequel chaque processus à un identifiant unique. Un communicateur initial (MPI\_COMM\_WORLD) permet d'englober tous les processus. Les fonctions simples d'envoi et de réception de messages, respectivement MPI\_SEND et MPI\_RECV sont bloquantes, c'est à dire qu'elles bloquent temporairement l'exécution du programme tant que le transfert de paquets n'est pas achevé et son bon déroulement confirmé. Les processus ne continuent donc pas les tâches numériques pendant la durée d'un transfert, ce qui tend à réduire les performances du calcul mais ce qui assure une entière cohérence entre les différents processus.

Il existe d'autres bibliothèques de communication, comme PVM (*Parallel Virtual Machine*) permettant à un réseau d'ordinateurs d'apparaître comme un unique ordinateur, appelé machine virtuelle. PVM s'occupe du routage de messages, de la conversion de données et la répartition des tâches au sein d'un réseau d'architectures distinctes et normalement incompatibles.

### 5.7.3 Parallélisation du maillage cartésien supérieur

Dans toute la suite, on note indifféremment  $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$ .

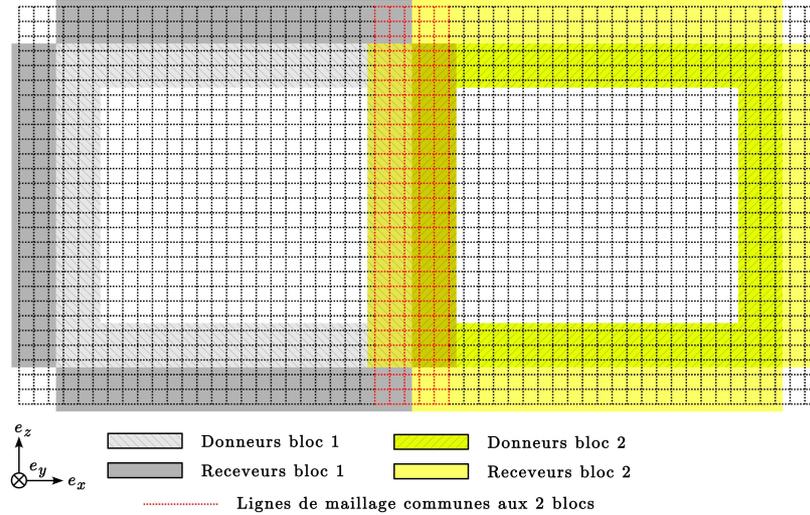
On scinde le maillage cartésien supérieur respectivement en  $M_x^{\text{sup}}$ ,  $M_y^{\text{sup}}$  et  $M_z^{\text{sup}}$  blocs dans chaque direction  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$ . Chaque bloc, alloué à une unité de calcul différente, est maillé cartésienement et comporte  $n_x \times n_y \times n_z$  points. On définit des bandes de  $n_s$  points donneurs et de  $n_s$  points receveurs, chargées respectivement de transférer les variables calculées en ces points aux blocs voisins, et de recevoir des données depuis les blocs voisins, comme le schématise la figure 5.41. Le transfert de données est assuré par collocation, c'est à



**Fig. 5.41:** Détail des fonctions des nœuds du maillage d'un bloc appartenant au maillage cartésien supérieur, dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ , avec  $n_s = 3$ .

dire que les points donneurs d'un bloc coïncident avec les points receveurs d'un bloc voisin,

comme l'illustre la figure 5.42. Une double routine MPI d'envoi et de réception permet donc de gérer complètement la communication entre les blocs appartenant au maillage supérieur. Le choix des schémas aux différences finies et du filtrage sélectif conditionne la valeur de la largeur de bande  $n_s$ . Celle-ci doit être plus grande que la moitié du plus grand support des différentes méthodes numériques considérées, arrondie à l'inférieur. Ainsi, pour des schémas sur 11 points, on choisit  $n_s = 5$ . À noter aussi que les coins des blocs n'ont pas besoin d'être mis à jour car toutes les méthodes 3-D de discrétisation par différences finies et de filtrage sélectif sont réalisées respectivement par discrétisations 1-D successives dans les trois directions ou par filtrage 1-D successif.



**Fig. 5.42:** Détail du transfert de données par collocation entre deux blocs voisins appartenant au maillage cartésien supérieur, dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ , avec  $n_s = 3$ .

Le maillage cartésien supérieur est constitué de  $n_x^{\text{sup}} \times n_y^{\text{sup}} \times n_z^{\text{sup}}$  points de maillage, avec :

$$\begin{cases} n_x^{\text{sup}} = M_x^{\text{sup}} (n_x - 2n_s) + 2n_s \\ n_y^{\text{sup}} = M_y^{\text{sup}} (n_y - 2n_s) + 2n_s \\ n_z^{\text{sup}} = M_z^{\text{sup}} (n_z - 2n_s) + 2n_s \end{cases}$$

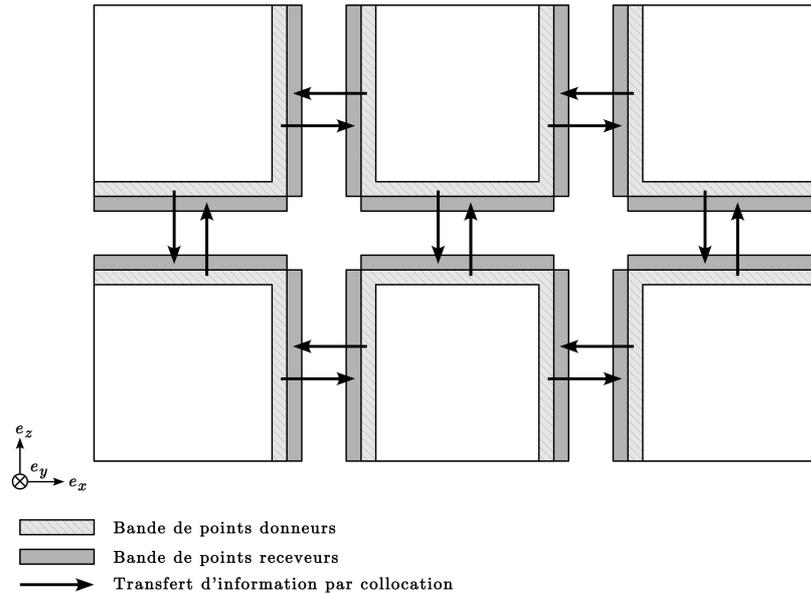
Le nombre de blocs nécessaires à la parallélisation du calcul sur ce maillage, à nombre total de points fixé sur l'ensemble du maillage cartésien supérieur, est calculé simplement à l'aide d'un nombre de points maximal  $n_{\text{max}}$  que l'on s'impose par unité de calcul, typiquement  $n_{\text{max}} = 10^6$ . En supposant que le nombre d'opérations effectuées en chacun des points du maillage est le même, le triplet choisi  $(M_x^{\text{sup}}, M_y^{\text{sup}}, M_z^{\text{sup}})$  doit vérifier :

$$\left( \frac{n_x^{\text{sup}} - 2n_s}{M_x^{\text{sup}}} + 2n_s \right) \left( \frac{n_y^{\text{sup}} - 2n_s}{M_y^{\text{sup}}} + 2n_s \right) \left( \frac{n_z^{\text{sup}} - 2n_s}{M_z^{\text{sup}}} + 2n_s \right) \leq n_{\text{max}}$$

La figure 5.43 propose une vue schématique de la parallélisation du maillage cartésien supérieur, dans le plan de coupe  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ . Elle explicite toutes les régions de chevauchement entre les différents blocs constituant le domaine de calcul supérieur.

#### 5.7.4 Parallélisation de la cavité

Le cœur de la cavité est maillé de manière cartésienne, tandis que la périphérie est maillée cylindriquement. On ne considère dans cette partie qu'une parallélisation dans la direction  $\mathbf{e}_z$ . Ces deux maillages présentent le même pas de discrétisation  $\Delta_z$ . Le maillage de cœur



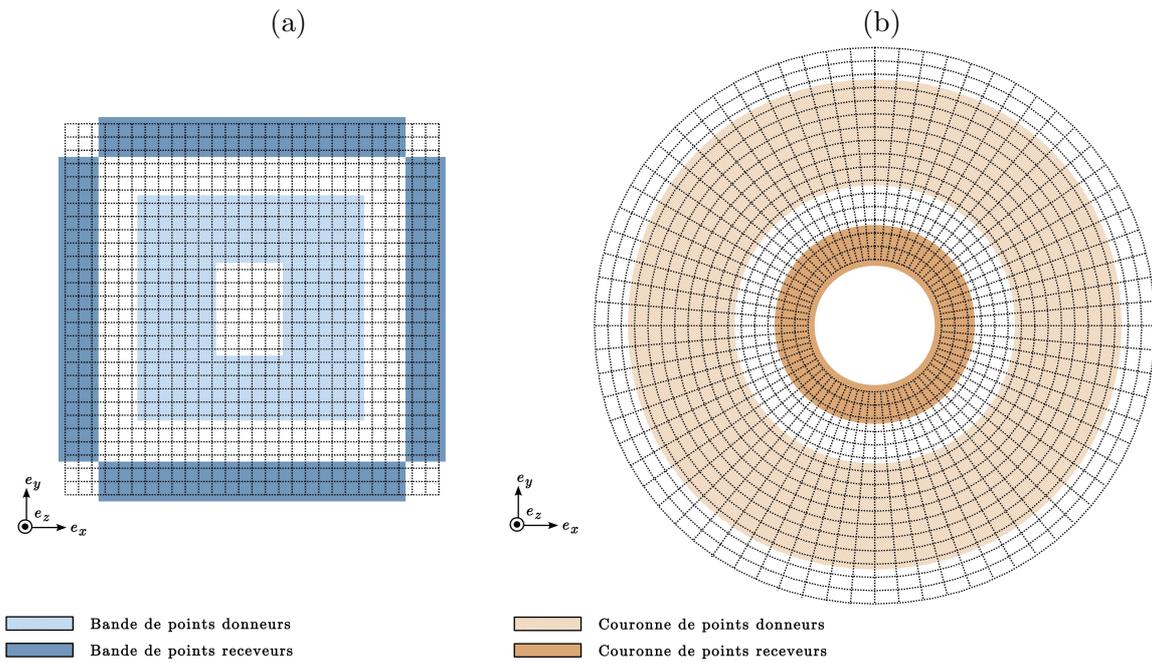
**Fig. 5.43:** Vue schématique de la parallélisation du calcul sur le maillage cartésien supérieur dans le plan  $(e_x, e_z)$ , avec  $M_x^{\text{sup}} = 3$  et  $M_z^{\text{sup}} = 2$ .

et le maillage de périphérie sont chacun partitionnés en  $M_z^{\text{int}}$  blocs de même hauteur. Ces blocs sont alloués chacun à une unité de calcul différente. Les transferts de données dans la direction  $e_z$  sont assurés par collocation aussi bien pour les blocs de cœur que pour les blocs périphériques. Ainsi, une double routine MPI d'émission de données et de réception permet de gérer intégralement la communication suivant  $e_z$  entre les différents blocs.

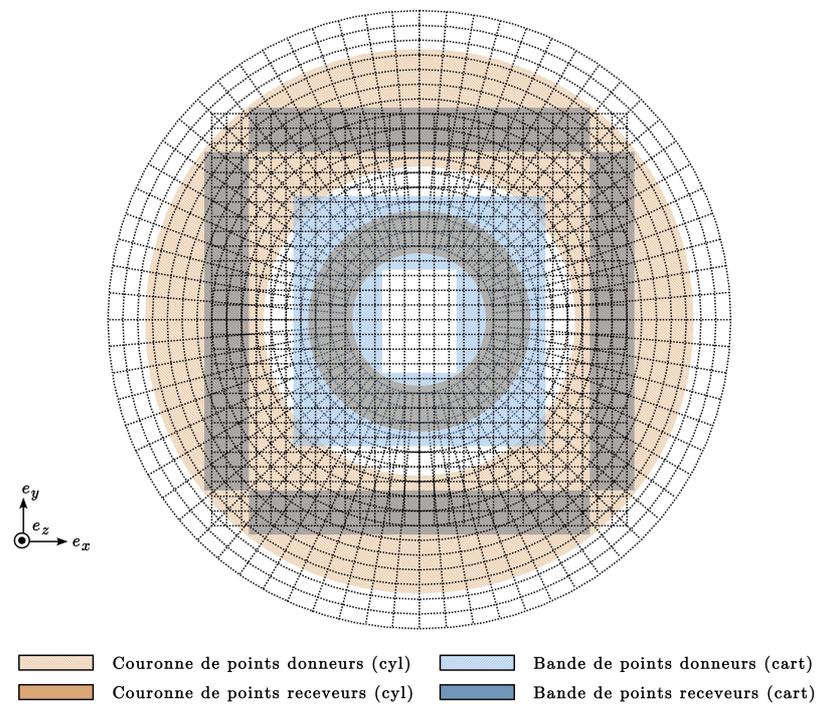
La suite concerne la communication latérale entre le maillage cartésien de cœur et le maillage cylindrique périphérique. La figure 5.44(a) montre les zones de réception et d'émission pour un bloc du maillage cartésien de cœur dans le plan de coupe  $(e_x, e_y)$ . Les bandes périphériques de réception de données font une largeur  $n_s$  pour correspondre à la demi-largeur des supports des différentes méthodes numériques considérées. Les bandes internes d'émission sont beaucoup plus larges que  $n_s$  car il n'y a pas collocation, pour des raisons géométriques, entre le bloc de cœur et le bloc périphérique. Le transfert depuis le bloc de cœur vers le bloc cylindrique est effectué à l'aide d'interpolations centrées optimisées. La largeur des bandes d'émission du bloc de cœur dépend alors de la longueur du support du schéma d'interpolation choisi. Les bandes d'émission contiennent l'ensemble des points constituant les supports d'interpolation et recouvrent intégralement toutes les zones de réception du bloc cylindrique périphérique. Une double routine MPI permet l'envoi de données vers le bloc périphérique, puis la réception de ces données par celui-ci. La figure 5.44(b) explicite les couronnes d'émission et de réception pour un bloc du maillage cylindrique périphérique. On observe une couronne de  $n_s$  points receveurs près de la frontière intérieure du domaine, et une large couronne d'émission vers le bloc cartésien de cœur, contenant tous les points constituant les supports d'interpolation. Une double routine MPI d'envoi vers le bloc de cœur et de réception par celui-ci permet de finaliser le transfert de données depuis le bloc cylindrique périphérique. La figure 5.45 permet une visualisation détaillée dans le plan  $(e_x, e_y)$  du processus complet de transfert bidirectionnel de données entre le bloc de cœur et le bloc périphérique par interpolation.

La figure 5.46 propose un bilan schématique dans le plan  $(e_x, e_z)$  de la parallélisation du calcul dans la cavité : elle rappelle la partition des maillages cartésien au cœur et cylindrique en périphérie en plusieurs blocs communiquant par interpolation dans le plan  $(e_x, e_y)$  et par collocation dans la direction  $e_z$ .

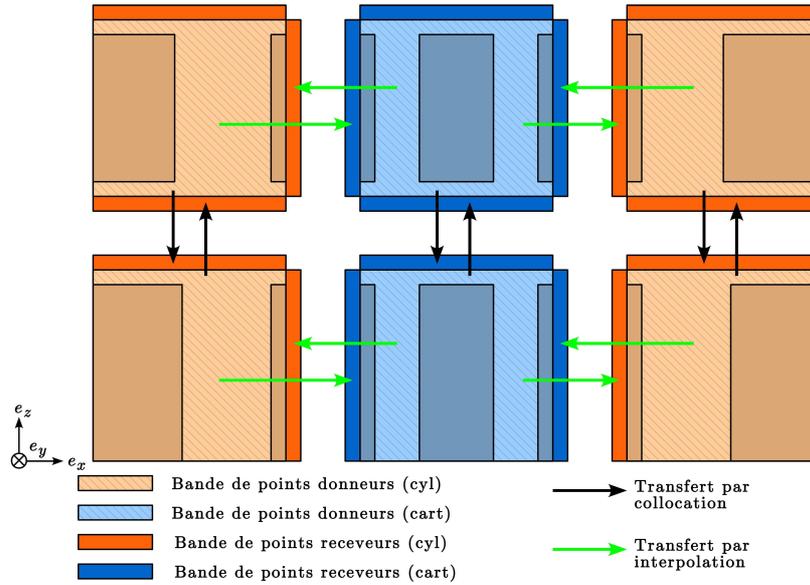
Le nombre d'unités de calcul nécessaires à la parallélisation des 2 maillages constituant la



**Fig. 5.44:** (a) Détail des fonctions des points d'un bloc appartenant au maillage cartésien de cœur, dans le plan  $(e_x, e_y)$ , pour une méthode d'interpolation sur 2 points, avec  $n_s = 3$ . (b) Détail des fonctions des points d'un bloc appartenant au maillage cylindrique périphérique, dans le plan  $(e_x, e_y)$ , pour une méthode d'interpolation sur 2 points, avec  $n_s = 3$ .



**Fig. 5.45:** Bilan détaillé des fonctions des points d'un bloc du maillage de cœur et du maillage cylindrique dans le plan  $(e_x, e_y)$ , pour une méthode d'interpolation sur 2 points et avec  $n_s = 3$ .



**Fig. 5.46:** Vue schématique de la parallélisation du calcul sur maillage cartésien de cœur et du maillage cylindrique périphérique dans le plan  $(e_x, e_z)$ , avec  $M_z^{\text{int}} = 2$

cavité est calculé à partir de la taille du maillage cartésien de cœur et du maillage périphérique. On fixe la taille du maillage cartésien à  $n_x^{\text{int}} \times n_y^{\text{int}} \times n_z^{\text{int}}$ , où  $n_x^{\text{int}}$ ,  $n_y^{\text{int}}$  et  $n_z^{\text{int}}$  sont respectivement le nombre de points dans les directions  $e_x$ ,  $e_y$  et  $e_z$ . La taille du maillage cylindrique est fixée à  $n_r^{\text{int}} \times n_\theta^{\text{int}} \times n_z^{\text{int}}$ , avec  $n_r^{\text{int}}$  et  $n_\theta^{\text{int}}$  respectivement le nombre de points dans les directions radiale et azimutale. Le nombre de blocs  $M_z^{\text{int}}$  doit vérifier :

$$\begin{cases} \frac{n_z^{\text{int}} - 2n_s}{M_z^{\text{int}}} + 2n_s \leq \frac{n_{\text{max}}}{n_x^{\text{int}} n_y^{\text{int}}} \\ \frac{n_z^{\text{int}} - 2n_s}{M_z^{\text{int}}} + 2n_s \leq \frac{n_{\text{max}}}{n_r^{\text{int}} n_\theta^{\text{int}}} \end{cases}$$

avec  $n_{\text{max}}$  le nombre maximal de points qu'on choisit de traiter sur une seule unité de calcul. Finalement,

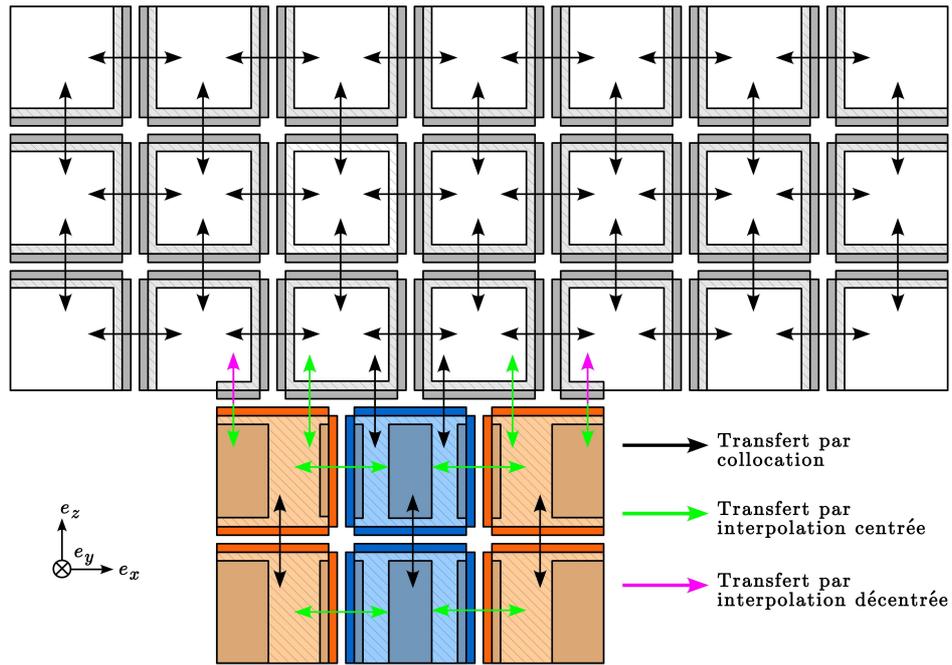
$$M_z^{\text{int}} \geq \max \left( \frac{n_z^{\text{int}} - 2n_s}{\frac{n_{\text{max}}}{n_x^{\text{int}} n_y^{\text{int}}} - 2n_s}, \frac{n_z^{\text{int}} - 2n_s}{\frac{n_{\text{max}}}{n_r^{\text{int}} n_\theta^{\text{int}}} - 2n_s} \right)$$

Un bilan complet de la parallélisation du code de simulation est schématisé par la figure 5.47. On y distingue notamment toutes les bandes de points donneurs et receveurs des différents blocs, ainsi que les différents types de communication mis en œuvre lors de la parallélisation du code de calcul. La figure 5.48 offre une visualisation 3-D élatée du partitionnement du maillage composite de la cavité cylindrique permettant la parallélisation du code de simulation.

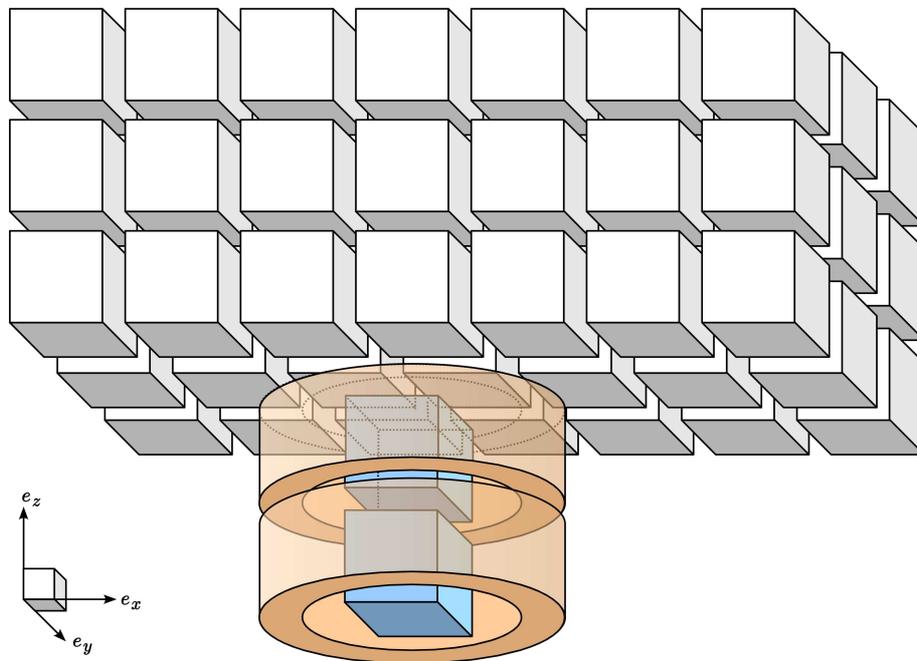
## 5.7.5 Efficacité de la parallélisation

### 5.7.5.1 Loi d'Amdahl

Il existe de nombreux modèles pour décrire l'accélération d'une tâche en fonction du nombre d'unités de calcul qui lui sont allouées. Parmi ces modèles, le plus élémentaire est



**Fig. 5.47:** Bilan de la parallélisation complète du calcul sur le maillage composite, avec  $M_x^{\text{sup}} = 7$ ,  $M_z^{\text{sup}} = 3$  et  $M_z^{\text{int}} = 2$ .

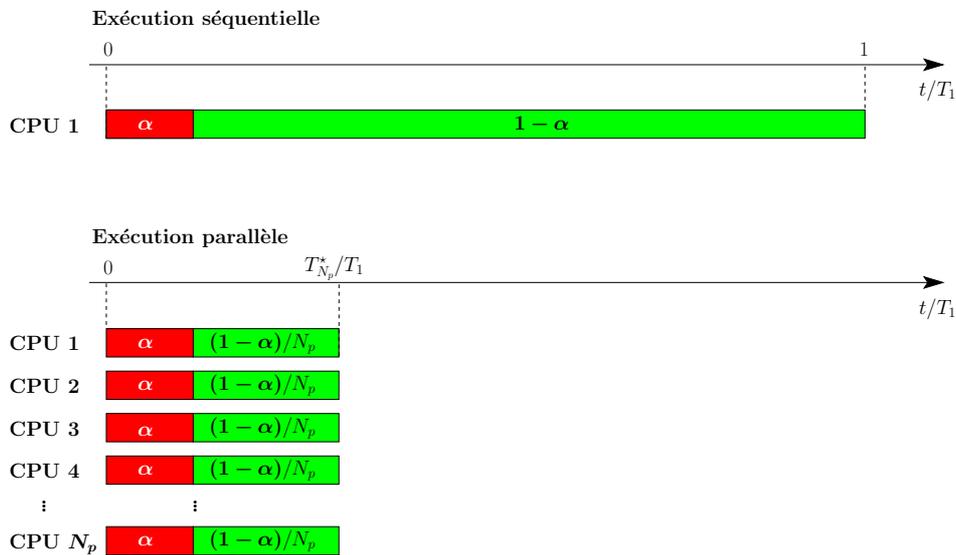


**Fig. 5.48:** Vue schématique 3-D éclatée de la parallélisation complète du code de simulation sur le multidomaine, avec  $M_x^{\text{sup}} = 7$ ,  $M_y^{\text{sup}} = 3$ ,  $M_z^{\text{sup}} = 3$  et  $M_z^{\text{int}} = 2$ .

probablement la loi d'Amdahl, qui permet d'estimer simplement le temps d'exécution d'une tâche parallèle sur une plateforme homogène. Le temps d'exécution  $T_{N_p}^*$  d'une tâche parallélisée idéalement sur  $N_P$  unités de calcul, avec  $\alpha$  la fraction non-parallélisable de la tâche lors d'une exécution séquentielle, est donné par [5] :

$$T_{N_p}^* = \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{N_P} \right) T_1$$

où  $T_1$  le temps d'exécution en séquentiel de la tâche. Cette loi énonce simplement que le temps d'exécution de la partie parallélisable est idéalement inversement proportionnel au nombre d'unités de calcul allouées, tandis que la fraction non-parallélisable de la tâche ne change pas quel que soit le nombre d'unités disponibles. Ces deux parties s'exécutant séquentiellement, le temps d'exécution total de la tâche est la somme de ces deux temps d'exécution. La figure 5.49 propose une comparaison en schémas-blocs des temps de calcul pour une exécution de la tâche en séquentiel ou en parallèle. À noter que cette loi ne tient pas compte des coûts



**Fig. 5.49:** Schématisation de la parallélisation idéale d'Amdahl. La fraction non-parallélisable de la tâche séquentielle est représentée en rouge, et la fraction parallélisable en vert.

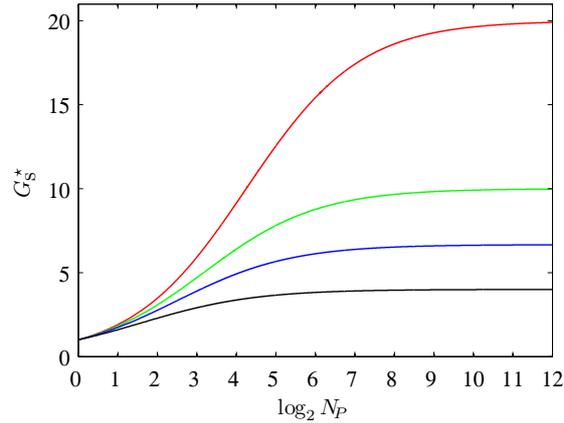
supplémentaires en temps liés à la parallélisation (*processing overheads*), comme le temps de communication entre les processeurs (*interprocessor communications* (IPCs)), les temps de synchronisation ou les temps d'ordonnancement, et qu'elle présuppose que la fraction parallélisable puisse être scindée en  $N_p$  partitions de durée d'exécution égale.

On peut définir l'accélération  $G_S^*$  (*speed-up*) d'une tâche parallélisée idéalement comme étant le rapport entre le temps d'exécution séquentielle de la tâche  $T_1$  et son temps d'exécution sur  $N_P$  unités de calcul. Il vient :

$$G_S^* = \frac{N_P}{\alpha(N_P - 1) + 1}$$

La figure 5.50 montre l'évolution de l'accélération en fonction du nombre d'unité de calcul. L'accélération croît avec le nombre de processeurs mais l'activité non-parallélisable limite le gain de vitesse à  $1/\alpha$ .

On définit enfin l'efficacité d'une parallélisation idéale  $\tau_{\text{eff}}^*$  comme le rapport de l'accéléra-



**Fig. 5.50:** Accélération par parallélisation idéale d'Amdahl  $G_S^*$  en fonction du logarithme binaire du nombre d'unités de calcul  $N_P$ , pour différentes valeurs de la fraction non-parallélisable de la tâche en séquentiel  $\alpha$ . —  $\alpha = 25\%$ , —  $\alpha = 15\%$ , —  $\alpha = 10\%$ , —  $\alpha = 5\%$ .

tion idéale sur l'accélération d'une parallélisation totale (cas où  $\alpha = 0$ ). On obtient :

$$\tau_{\text{eff}}^* = \frac{G_S^*}{N_P} = \frac{1}{\alpha(N_P - 1) + 1}$$

En pratique, de nombreux auteurs observent que la loi d'Amdahl fournit une estimation optimiste de l'accélération par parallélisation. En effet, il est fréquent que la partie parallélisable d'une tâche ne puisse être scindée en plusieurs tâches indépendantes de durée d'exécution équivalente. La partition la plus coûteuse en temps est alors limitante. La figure 5.51 synthétise ce cas réel de parallélisation. On observe que la fraction parallélisable de la tâche est scindée en  $N_P$  partitions de durées d'exécution différentes. Le temps d'exécution en parallèle de l'application est supérieur au temps d'exécution d'Amdahl, car la tâche sur l'un des nœuds, qui nécessite le plus de temps, limite l'activité de tous les autres nœuds de calcul, qui attendent à la synchronisation que ce nœud ait fini de traiter sa tâche.

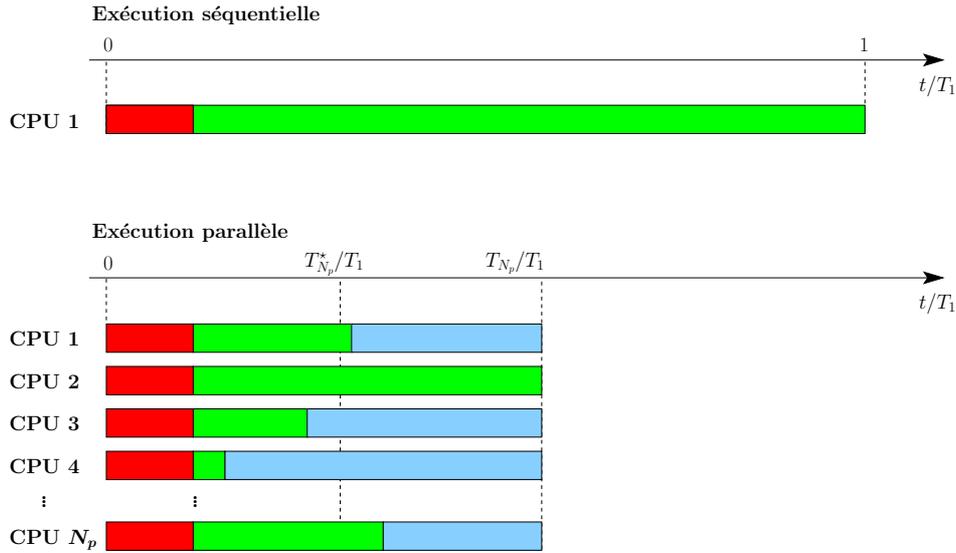
La situation se dégrade encore lorsque les tâches parallèles sont elles-mêmes partitionnées en plusieurs sous-tâches séquentielles, avec une synchronisation parallèle entre chaque sous-tâche. Les temps de synchronisation deviennent alors importants, et le temps total de l'exécution de l'application devient la somme des maxima des temps d'exécution de chacune des sous-tâches.

### 5.7.5.2 Loi d'Amdahl modifiée

De manière générale, en notant  $\tau_o$  le temps dû aux *processing overheads* (temps de synchronisation des processus, temps d'ordonnancement et de communication entre processeurs, etc.) le temps d'exécution réel  $T_{N_p}$  d'une tâche parallélisée peut être estimé par une loi d'Amdahl corrigée :

$$T_{N_p} = \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{N_P} \right) T_1 + \tau_o(N_p)$$

Le terme  $\tau_o$  peut dépendre de plusieurs manières du nombre d'unités de calcul, car il dépend implicitement des caractéristiques de l'architecture sur laquelle la parallélisation est appliquée, du réseau entre les nœuds de calcul, de la manière dont est gérée pour chaque unité de calcul la parallélisation, etc. L'hypothèse la plus simple est de considérer que  $\tau_o$  ne tient compte que des communications interprocesseurs. Le temps de communication entre deux processeurs est supposé constant, et l'on se place dans le cas le plus défavorable où chaque processeur traite



**Fig. 5.51:** Schématisation d'une parallélisation non-idéale. La fraction non-parallélisable de la tâche séquentielle est représentée en rouge, et la fraction parallélisable en vert. La fraction parallélisable de la tâche est scindée en  $N_P$  partitions de durées d'exécution différentes. Le temps d'attente lié à la synchronisation des nœuds de calcul est représenté en bleu.

sequentiellement les transferts de données vers chaque autre processeur [35]. En notant  $\tau_2$  le temps de communication entre deux processeurs, il vient  $\tau_o(N_P) = \tau_2 N_P (N_P - 1)/(2N_P)$ . Le terme  $N_P (N_P - 1)/2$  est le nombre de communications possibles entre tous les processeurs, tandis que la division par  $N_P$  traduit la parallélisation du processus de communication interprocesseurs. Finalement :

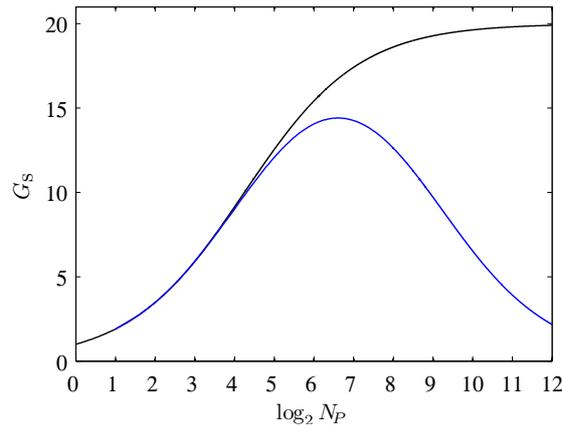
$$T_{N_P} = \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{N_P} + \frac{k_{//}}{2} (N_P - 1) \right) T_1$$

où  $k_{//}$  est le rapport du temps de communication entre deux processeurs et le temps d'exécution séquentielle de l'application. L'accélération modifiée est donnée par :

$$G_S = \frac{N_P}{(N_P - 1) \left( \alpha + \frac{k_{//}}{2} N_P \right) + 1}$$

Il est à noter qu'en pratique le temps de communication entre deux processeurs n'est pas constant en fonction de  $N_P$ , puisque celui dépend fortement de la quantité de données à transférer. Plus le nombre de processeurs croît, plus la quantité de données à transférer entre deux processeurs est a priori petite, et donc plus le temps de communication est court. Cependant, la gestion des requêtes de communication et les accès mémoire nécessite un laps de temps incompressible, et l'hypothèse de  $\tau_2$  constant devient raisonnable pour un nombre de processeurs important.

La figure 5.52 montre l'évolution de l'accélération en fonction du nombre de processeurs, pour une fraction non-parallélisable de la tâche de 5% et pour un rapport  $k_{//}$  de 0.02%. Elle révèle que pour une tâche fixée, il existe un nombre optimal de processeurs à allouer. L'allocation d'un nombre trop important de processeurs nuit aux performances de la parallélisation, ce que montre la décroissance de l'accélération pour un nombre d'unités de calcul élevé. Les temps de communication interprocesseurs deviennent alors importants, et réduisent considérablement l'accélération de l'application.



**Fig. 5.52:** Accélération par parallélisation en fonction du logarithme binaire du nombre de processeurs  $N_P$ , pour  $\alpha = 5\%$  et  $k_{//} = 0.02\%$ . — Loi d’Amdahl modifiée ( $G_S$ ), — Loi d’Amdahl ( $G_S^*$ ).

### 5.7.5.3 Efficacité sur le supercalculateur titane du CCRT

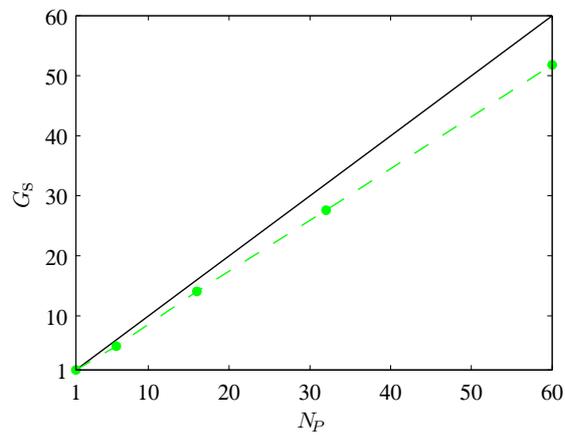
L’accélération du code de simulation sur plusieurs maillages se recouvrant est mesurée sur le supercalculateur **titane** du CCRT au CEA. Ce cluster est constitué de 1068 nœuds, composés chacun de 2 processeurs Intel Nehalem quadricœurs cadencés à 2.93 GHz et de 24 Go de mémoire vive. Ceci donne un total de 8544 unités de calcul (cœurs) et de 25 To de mémoire RAM. Les nœuds de calcul sont interconnectés par un réseau Voltaire très performant, basé sur la technologie InfiniBand DDR, assurant des débits jusqu’à 20 Gbits/s, soit 2.5 Go/s.

La mesure de référence est obtenue pour une exécution du code de simulation en séquentiel sur un unique processeur prenant en charge l’intégralité du maillage composite. Le maillage cartésien supérieur est constitué de  $646 \times 354 \times 172$  points, le maillage cartésien de cœur de  $153 \times 177 \times 220$  points, et le maillage cylindrique périphérique de  $41 \times 286 \times 220$  points. Une montée en nombre de processeurs est menée ensuite pour des exécutions en parallèle. Le tableau 5.3 rappelle la répartition des processeurs pour chaque configuration parallèle testée. Les nombres de blocs ont été choisis afin de garantir sensiblement le même nombre de points à traiter pour chacun des blocs.

$N_P$	$M_x^{\text{sup}}$	$M_y^{\text{sup}}$	$M_z^{\text{sup}}$	$M_z^{\text{int}}$	Nbre points / CPU ( $\times 10^6$ )
6	2	2	1	1	10
16	6	2	1	2	3
32	6	4	1	4	2
60	6	4	2	6	1

**Tab. 5.3:** Nombre de blocs partitionnant le maillage composite lors de la montée en nombre de processeurs pour des exécutions en parallèle.

La figure 5.53 illustre l’accélération obtenue par la parallélisation du code de simulation. L’accélération mesurée est comparée à l’accélération théorique maximale, qui est égale au nombre d’unités de calcul utilisé ( $\alpha = 0$  dans la loi d’Amdahl). L’accélération obtenue sur **titane** peut être approximée par une droite ayant une pente de  $dG_S/dN_P = 0.87$ , contre 1 pour l’accélération maximale : la parallélisation engendre donc un surcoût en temps de communication qui reste tout à fait acceptable.



**Fig. 5.53:** Accélération du calcul  $G_S$  en fonction du nombre d'unités de calcul  $N_P$ . — : accélération théorique maximale. - - - : accélération mesurée sur le supercalculateur **titane** au CCRT. ● : points de mesure.





## Chapitre 6

# Implémentation numérique de la couche limite incidente

---

L'objectif de ce chapitre est de décrire précisément la mise en œuvre numérique d'une couche limite incidente laminaire ou turbulente. Cette étape permet dans la suite d'explorer numériquement l'influence de l'état de la couche limite incidente sur le rayonnement acoustique de la cavité cylindrique dans la configuration de référence ( $D = H = 10 \text{ cm}$ ,  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ ,  $\delta = 15 \text{ mm}$ ). Le nombre de Reynolds  $\text{Re}_\delta$  vaut  $7 \times 10^4$ . Alors que l'implémentation d'une couche limite laminaire est aisée, le cas d'une couche limite turbulente est beaucoup plus délicat à mettre en œuvre, surtout pour un tel nombre de Reynolds, et demeure encore aujourd'hui un problème assez ouvert. On présente ici les méthodes utilisées dans ce travail, et les résultats de cas tests numériques.

## 6.1 Couche limite laminaire

### 6.1.1 Équation de Blasius

On considère dans cette partie une couche limite laminaire 2-D se développant le long d'une plaque plane non-glissante dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . On considère donc un écoulement stationnaire  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_3)$  le long de la plaque, en négligeant le gradient longitudinal de pression, et dont la vitesse d'écoulement libre vaut  $u_\infty$ . Pour un écoulement incompressible, et sous les conditions précédentes, les équations de Navier–Stokes (4.4) peuvent être réécrites, en ne conservant que les termes dominants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = 0 \\ \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = \nu_\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Les conditions aux limites de non-glissement et non-pénétration à la paroi, et d'écoulement libre à l'infini s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1(x_1, 0) = 0 \\ \bar{u}_3(x_1, 0) = 0 \\ \lim_{x_3 \rightarrow +\infty} \bar{u}_1(x_1, x_3) = u_\infty \end{array} \right.$$

Comme le système n'a, *a priori*, pas de longueur caractéristique, on peut supposer que les profils de vitesse à différentes distances de l'arête amont de la plaque sont similaires les uns aux autres, c'est-à-dire que le profil de vitesse  $\bar{u}_1(x_1, x_3)$  à une distance longitudinale  $x_1$  de l'arête amont de la plaque peut être obtenu à partir du profil de vitesse en une autre position longitudinale  $x_0$ , en changeant seulement les facteurs d'échelle pour  $u_1$  et  $x_3$ . Les facteurs d'échelle naturels sont la vitesse d'écoulement libre  $u_\infty$  pour  $u_1$  et l'épaisseur  $\delta$ , qui mesure à un coefficient multiplicatif près l'épaisseur de couche limite, pour  $x_3$ . La grandeur  $\delta$  croît en  $\sqrt{x_1}$  et vérifie [206] :

$$\tilde{\delta}(x) = \sqrt{\frac{\nu_\infty x_1}{u_\infty}}$$

On introduit la variable de similitude  $\eta = x_3/\tilde{\delta}(x_1)$ . L'équation de continuité (première équation du système (6.1)) est intégrée en introduisant la fonction courant  $\psi$  et la fonction courant réduite  $f$ , qui ne dépend que de  $\eta$ , et dont les expressions sont :

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \bar{u}_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases}$$

$$f(\eta) = \frac{\psi(\eta)}{\sqrt{u_\infty \nu_\infty x_1}}$$

On obtient alors en réinjectant l'intégration de l'équation de continuité dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (deuxième équation du système (6.1)) :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (\text{Équation de Blasius}) \quad (6.2)$$

où l'opérateur ' désigne une dérivation par rapport à la variable  $\eta$ . Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1 \end{cases}$$

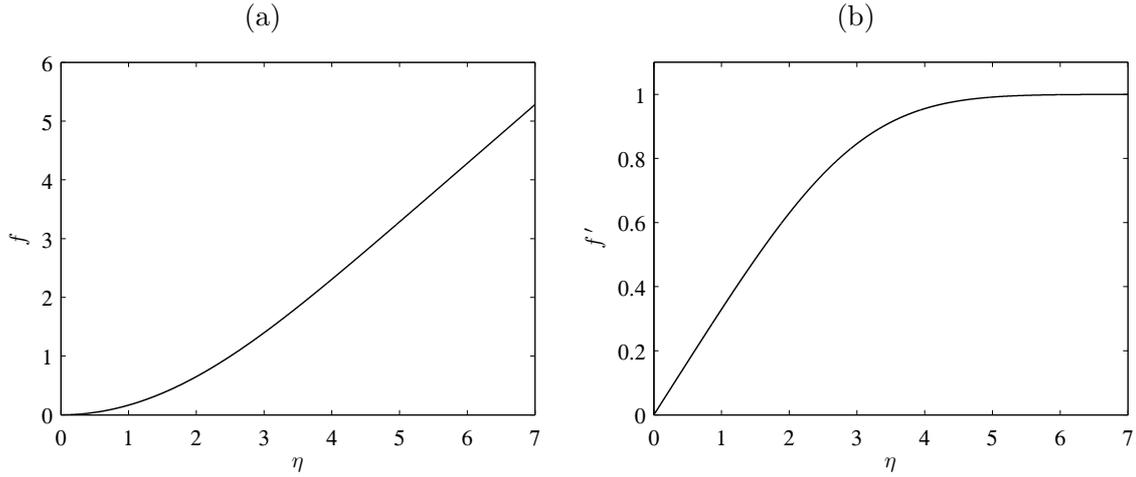
### 6.1.2 Résolution numérique de l'équation de Blasius

L'équation de Blasius (6.2) est résolue numériquement par des schémas aux différences finies explicites d'ordre 4 sur un maillage très raffiné, et à l'aide d'une méthode de tir qui consiste en une dichotomie sur la valeur de  $f''$  en 0. On trouve numériquement  $f''(0) \simeq 0.332 \simeq 1/3$ . La figure 6.1 présente la courbe représentative de  $f$  et de sa dérivée en fonction de la variable de similitude  $\eta$ . On retrouve les composantes de vitesse, appelées solution de Blasius, en fonction de  $f$  par :

$$\begin{cases} \bar{u}_1(x_1, x_3) = u_\infty f'(\eta) \\ \bar{u}_3(x_1, x_3) = \frac{u_\infty}{2} \sqrt{\frac{\nu_\infty}{u_\infty x_1}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \end{cases}$$

### 6.1.3 Approximations de la solution de Blasius

Il existe différentes techniques pour obtenir une approximation de la solution de Blasius. Wazwaz utilise une méthode d'itération variationnelle [244] afin d'obtenir une approximation polynomiale, tandis que Khabibrakhmanov & Summers ont recours aux polynômes de



**Fig. 6.1:** (a) Courbe représentative de  $f$ . (b) Courbe représentative de  $f'$ .

Laguerre généralisés [123]. Plus simplement, il est possible d'obtenir des approximations polynomiales du profil de vitesse  $\bar{u}_1(x_1, x_3)$  dans la couche limite en approchant la fonction  $f'$  par un polynôme  $P$  vérifiant un certain nombre de conditions aux bords. Le degré du polynôme augmente avec le nombre de contraintes aux bords qu'on impose. En remarquant que la vitesse tangentielle à la paroi vaut au moins 99.9% de la vitesse maximale  $u_\infty$  pour  $\eta$  au-delà de  $\eta_{99.9} \simeq 6$ , on peut obtenir un développement à l'ordre 4 en imposant que :

$$\begin{cases} P(0) = f'(0) = 0 \\ P'(0) = f''(0) = 1/3 \\ P''(0)f'''(0) = 0 \\ P(\eta_{99.9}) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1 \\ P'(\eta_{99.9}) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f''(\eta) = 0 \end{cases}$$

En définissant l'épaisseur de couche limite  $\delta$  par  $\delta = \eta_{99.9} \tilde{\delta} = 6 \tilde{\delta}$ , on obtient pour tout  $x_3 \leq \delta$  :

$$\frac{\bar{u}_1}{u_\infty} = 2 \frac{x_3}{\delta} - 2 \left( \frac{x_3}{\delta} \right)^3 + \left( \frac{x_3}{\delta} \right)^4$$

L'approximation polynomiale à l'ordre 4 du profil de vitesse  $u_3$  correspondant est obtenue en approchant la fonction  $\eta \mapsto \eta f'(\eta) - f(\eta)$  par un polynôme  $Q$  vérifiant :

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q'(0) = 0 \\ Q''(0) = f''(0) = 1/3 \\ Q(\eta_{99.9}) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta f'(\eta) - f(\eta) \simeq 1.722 \\ Q'(\eta_{99.9}) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{\bar{u}_3 \sqrt{\text{Re}_x}}{u_\infty} = 3 \left( \frac{x_3}{\delta} \right)^2 - \frac{639}{250} \left( \frac{x_3}{\delta} \right)^3 + \frac{417}{1000} \left( \frac{x_3}{\delta} \right)^4$$

où  $\text{Re}_x$  est le nombre de Reynolds construit sur la longueur de développement de la couche limite, donné par  $\text{Re}_x = u_\infty x_1 / \nu_\infty$ .

On peut également construire un développement à l'ordre 6 en ajoutant aux conditions

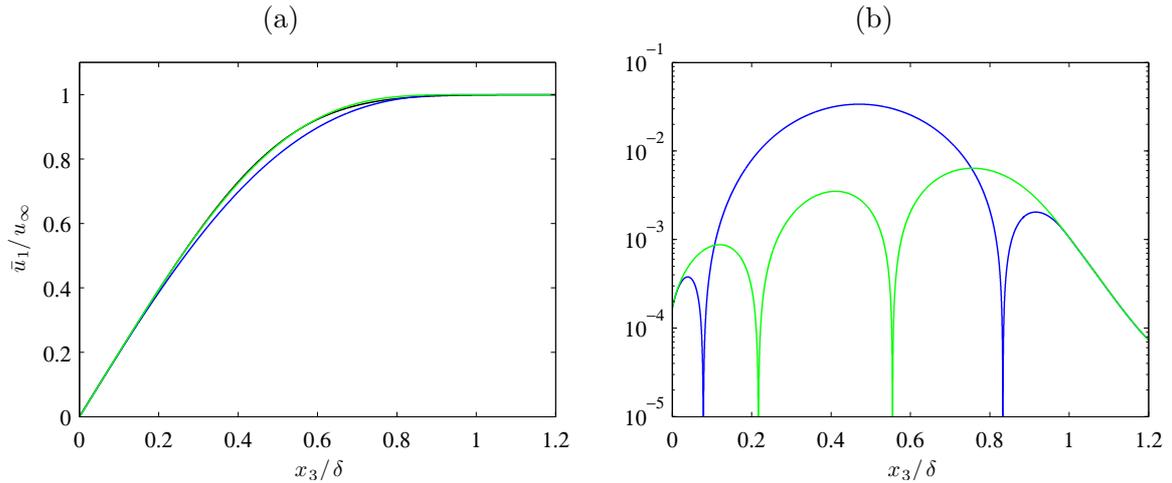
précédentes les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} P'''(0) = f^{(4)}(0) = 0 \\ P''(\eta_{99.9}) = 0 \\ Q'''(0) = 0 \\ Q''(\eta_{99.9}) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_1}{u_\infty} = 2 \frac{x_3}{\delta} - 5 \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^4 + 6 \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^5 - 2 \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^6 \\ \frac{\bar{u}_3 \sqrt{\text{Re}_x}}{u_\infty} = 3 \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^2 - \frac{1017}{200} \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^4 + \frac{417}{125} \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^5 - \frac{39}{100} \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^6 \end{cases}$$

Les figures 6.2 et 6.3 présentent les courbes représentatives de ces approximations par rapport à la solution de Blasius pour  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_3$  respectivement, normalisées par  $u_\infty$  et  $u_\infty/\sqrt{\text{Re}_x}$ . On observe que l'approximation à l'ordre 4 approche la solution de Blasius en  $u_1$  avec une erreur maximale de 5% de la vitesse de l'écoulement  $u_\infty$ , tandis que l'ordre 6 l'approxime à moins de 1% de  $u_\infty$ . Les écarts sont plus importants pour les profils en  $u_3$ , où la solution de Blasius est approchée à plus de 10% de  $w_\infty = 0.861 u_\infty/\sqrt{\text{Re}_x}$  pour l'approximation polynomiale d'ordre 4, tandis que l'erreur est inférieure à 5% de  $w_\infty$  pour l'ordre 6.



**Fig. 6.2:** (a) Profil de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  : — Solution de Blasius. — Approximation d'ordre 4. — Approximation d'ordre 6. (b) Valeur absolue de l'écart par rapport à la solution de Blasius du profil de vitesse  $\bar{u}_1$  : — Approximation d'ordre 4. — Approximation d'ordre 6.

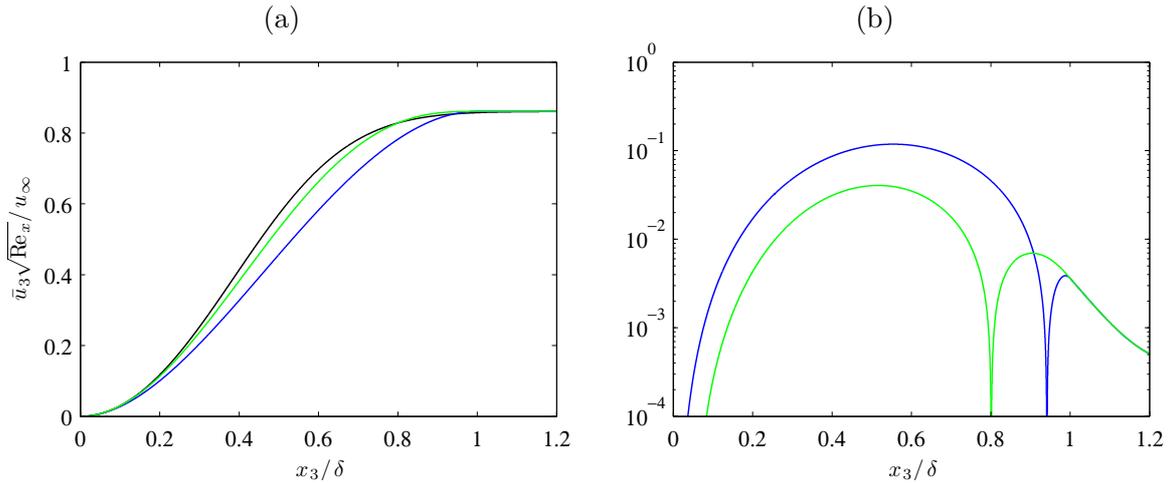
Dans toute la suite, les profils laminaires de vitesse moyenne  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_3$  sont obtenus à l'aide de l'approximation d'ordre 6 de la solution de Blasius. Le nombre de Reynolds construit sur la distance de développement peut être exprimé en fonction de la vitesse d'écoulement libre et de l'épaisseur de couche limite :

$$\sqrt{\text{Re}_x} = \frac{u_\infty \delta}{6 \nu_\infty}$$

## 6.2 Couche limite turbulente

### 6.2.1 Introduction

La formulation d'une condition d'entrée d'écoulement turbulent le long d'une paroi en compressible est quelque chose de complexe à mettre en œuvre [248]. Face à cette difficulté,



**Fig. 6.3:** (a) Profil de vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$  : — Solution de Blasius. — Approximation d'ordre 4. — Approximation d'ordre 6. (b) Valeur absolue de l'écart par rapport à la solution de Blasius du profil de vitesse  $\bar{u}_3$  : — Approximation d'ordre 4. — Approximation d'ordre 6.

certain auteurs choisissent d'implémenter uniquement un profil turbulent moyen sans perturbation à l'entrée du domaine de calcul [43], comme on le ferait dans le cas laminaire. Si l'on souhaite une condition d'entrée avec perturbation, il existe dans la littérature 4 méthodes principales, que l'on présente dans la suite.

### 6.2.1.1 Simulation de la transition laminaire-turbulent

Il s'agit probablement de l'approche la plus directe pour implémenter le développement d'une couche limite turbulente [187]. Un profil laminaire est imposé à l'entrée du domaine de calcul loin en amont de la zone d'intérêt, auquel on a superposé de petites perturbations aléatoires, pour provoquer la transition vers la turbulence. Cette technique a l'avantage de ne pas nécessiter de perturbations turbulentes dépendantes du temps à l'entrée du domaine de calcul. Toutefois, la simulation est très coûteuse, puisque la couche limite laminaire peut nécessiter un long développement spatial avant de transiter vers un régime turbulent, et que cette transition peut prendre un grand nombre d'itérations temporelles avant de s'établir. Aussi, il est très difficile de contrôler avec cette méthode le frottement pariétal et l'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la zone de développement. Cette approche n'est donc généralement pas utilisée pour implémenter une couche limite turbulente, mais elle peut toutefois servir à l'étude même de la transition du régime laminaire vers le régime turbulent [68].

### 6.2.1.2 Perturbation du profil turbulent moyen

En vue de réduire le coût associé à la simulation du processus de transition, il est envisageable de rapprocher significativement de la zone d'intérêt l'entrée du domaine de calcul. Idéalement, il faudrait des conditions d'entrée très précises afin de disposer d'une couche limite turbulente présentant une épaisseur de quantité de mouvement ou un frottement superficiel corrects en amont de la zone d'intérêt. En pratique, ce n'est pas toujours possible et il faut parfois déplacer plus en amont les conditions d'entrée pour disposer d'une zone de relaxation des erreurs faites par les approximations à l'entrée [148].

L'approche la plus simple pour spécifier des conditions d'entrée turbulentes est de superposer des perturbations aléatoires à un profil moyen. Ces fluctuations génèrent cependant du bruit parasite, ce qui peut être très pénalisant pour une simulation en aéroacoustique. Aussi, les relations de phase des fluctuations de vitesse étant générées aléatoirement, une structure réaliste peut être longue à se former [248].

### 6.2.1.3 Simulation auxiliaire d'entrée turbulente

Le contrôle difficile du frottement pariétal et de l'épaisseur de quantité de mouvement à la sortie de la zone de développement pour les méthodes précédentes a motivé le développement d'une méthode où l'on sépare le calcul de la transition laminaire-turbulent du développement de la couche limite dans la simulation que l'on souhaite mener. La simulation auxiliaire permet ainsi de générer un développement de couche limite turbulente et de choisir une position de sortie où la couche limite présente des caractéristiques souhaitées. Les données sont extraites de cette simulation, puis réinjectées de manière synchronisée à l'entrée du domaine de calcul de la simulation principale. Il est cependant généralement difficile d'obtenir simultanément une épaisseur de quantité de mouvement et une vitesse de frottement correctes. Ce procédé présente cependant l'avantage d'être beaucoup moins coûteux que la méthode de simulation de la transition laminaire-turbulent directement dans la simulation principale. En effet, le maillage de la simulation auxiliaire n'a besoin d'avoir les mêmes dimensions transverses et verticales que le maillage de la simulation principale, permettant une économie conséquente du nombre de points à traiter par rapport au cas où l'on simulerait directement la transition laminaire-turbulent dans la simulation principale. Cette technique, initiée par Akselvoll & Moin [3], est utilisée avec succès dans plusieurs cas. Lund & Moin [150] ont par exemple recours à cette approche pour une simulation LES du développement d'une couche limite sur une paroi concave. Les conditions d'entrée du régime turbulent sont générées par une simulation auxiliaire présentant une zone de développement de l'ordre de 10 fois l'épaisseur de couche limite souhaitée. Les résultats obtenus à la sortie de la paroi concave sont en bon accord avec les mesures expérimentales.

Spalart & Watmuff proposent dans [220] d'ajouter un bouclage entre l'entrée et la sortie du domaine de calcul dans la simulation auxiliaire. La méthode proposée, appelée méthode des franges (*fringe method*), consiste, dans la simulation auxiliaire, en l'élaboration d'une première frange qui permet de collecter les données en vue de les injecter dans la simulation principale, et d'une seconde frange près de la sortie du domaine de calcul. Dans cette frange, les variables sont réajustées avant d'être réinjectées à l'entrée du domaine de calcul de la simulation auxiliaire. Ce réajustement est réalisé par l'ajout de termes supplémentaires (*growth terms*) dans les équations de Navier–Stokes. Ils sont issus d'un changement du système de coordonnées. Dans ce nouveau système de coordonnées, le développement de la couche limite est minimal, ce qui permet d'appliquer des conditions périodiques entre l'entrée et la sortie du domaine de calcul. Ces termes supplémentaires présentent généralement une forme complexe. Une analyse des ordres de grandeur permet d'en négliger certains. Les termes restants peuvent toutefois engendrer un gradient suivant  $x_1$  sur les champs moyens qu'il convient de compenser, et dont les valeurs peuvent être déduites des simulations numériques de Spalart dans [221]. Des modifications de la méthode de Spalart sont apportées par d'autres auteurs, comme Lund *et al.* dans [148], afin d'éviter de devoir estimer les gradients sur les champs moyens à l'aide de plusieurs simulations préliminaires. La méthode de Spalart, au-delà de sa complexité, présente l'avantage de pouvoir prendre en compte les gradients de pression dans l'écoulement, ainsi que le développement spatial de la couche limite turbulente dans la condition d'entrée de la simulation principale. Elle permet aussi un contrôle direct de l'épaisseur de quantité de mouvement et du frottement pariétal.

Cette méthode, numériquement coûteuse, présuppose que l'on connaisse cependant à l'avance le développement de la couche limite incidente. Dans le cas de la cavité cylindrique, on ne connaît pas *a priori* l'effet de la cavité sur la couche limite turbulente incidente, ce qui peut nuire au succès de la méthode.

### 6.2.1.4 Bouclage direct entrée-sortie

Cette approche, parfois appelée méthode de redimensionnement (*rescaling method*) [148], s'appuie sur les lois d'échelle des couches limites turbulentes. L'écoulement à l'entrée est

obtenu par la réinjection de l'écoulement de sortie après avoir subi un redimensionnement. En pratique, la taille du domaine de calcul doit être assez longue dans la direction de l'écoulement afin de décorréliser les tourbillons à l'entrée, au milieu et près de la sortie du domaine de calcul. Plusieurs équipes utilisent cette technique, comme Stolz & Adams [225]. Toutefois des difficultés demeurent pour le redimensionnement en compressible, puisqu'il faut aussi redimensionner les variables thermodynamiques de l'écoulement, c'est-à-dire, la pression, la masse volumique et la température. Xu & Martin proposent dans [248] de fonder la démarche sur l'hypothèse de Morkovin [32], en supposant que les échelles de temps liées à la turbulence sont indépendantes du nombre de Mach. Le nombre de Mach affecte ainsi uniquement les variations des propriétés du fluide mais ne modifie pas la dynamique de la couche limite. La vitesse est redimensionnée à l'aide d'un profil moyen de van Driest, en prenant en compte la variation de la masse volumique dans la couche limite. La pression moyenne dans la couche limite est la même que celle dans l'écoulement libre car on suppose une couche limite sans gradient de pression. La température est redimensionnée à l'aide de la relation de Crocco modifiée. La masse volumique moyenne est redimensionnée à l'aide de l'équation des gaz parfaits.

Le redimensionnement des variables thermodynamiques fluctuantes est réalisé à partir du redimensionnement sur le profil des vitesses fluctuantes. Les vitesses fluctuantes sont redimensionnées par une division par la vitesse de frottement  $u_\tau$ . Une différentiation de l'équation des gaz parfaits à pression constante permet d'écrire que :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T'}{\bar{T}}$$

L'analogie forte de Reynolds (SRA) donne une relation entre la fluctuation de la température et la fluctuation de vitesse  $u'$  :

$$\frac{T'}{\bar{T}} = (1 - \gamma)\text{Ma}^2 \frac{u'_1}{\bar{u}_1}$$

ce qui permet d'explicitier complètement le redimensionnement de  $T'$  et de  $\rho'$ .

Parmi toutes ces méthodes proposées, on choisit dans ce travail d'utiliser la méthode de perturbation du profil de vitesse moyenne longitudinale, car elle présente l'énorme avantage d'être simple à implémenter et peu coûteuse en temps de calcul supplémentaire.

## 6.2.2 Modèle de perturbation du profil moyen de Sandham *et al.*

Sandham *et al.* proposent dans [202] une approche déterministe en vue de reproduire numériquement un écoulement de paroi transonique turbulent 3-D, en imposant sur le profil turbulent moyen, à l'entrée du domaine de calcul, des perturbations spécifiques à la couche limite interne et à la zone externe de la couche limite. On se propose de revisiter ce modèle dans la partie qui suit.

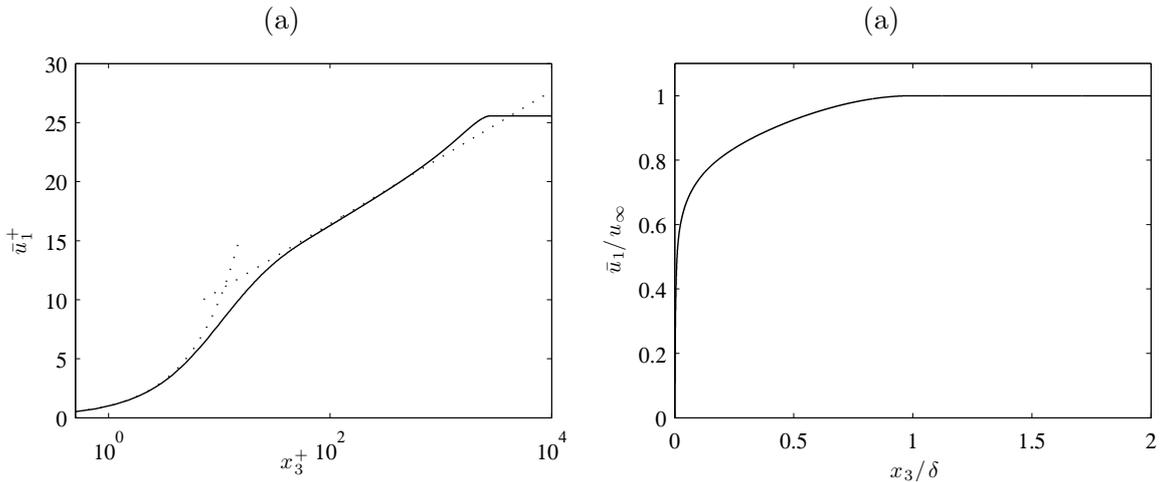
### 6.2.2.1 Profil turbulent de vitesse moyenne longitudinale

Il convient dans un premier temps de modéliser le profil de vitesse moyenne longitudinale à perturber. Contrairement aux écoulements de paroi laminaires, il n'existe pas de loi auto-similaire pour décrire l'ensemble du profil moyen de vitesse dans le cas turbulent. La théorie classique propose alors de décomposer la couche limite turbulente en zones. Elle a recours aux variables de paroi, reposant sur l'estimation de la vitesse de frottement  $u_\tau$ . Une zone interne, la plus proche de la paroi, où le frottement pariétal et les effets visqueux y jouent un rôle prépondérant, est usuellement modélisée par une loi linéaire. La zone externe est dominée par les effets d'inertie, où la vitesse tend vers la vitesse d'écoulement libre par valeurs inférieures. On modélise le déficit en vitesse par une loi de sillage (voir les travaux de Coles [48]). La

zone intermédiaire est le plus souvent modélisée par une loi logarithmique. Il existe dans la littérature diverses approximations [6, 169, 222, 242] pour obtenir en une seule équation un profil fidèle aux modélisations dans chaque zone. On retient celle proposée par Guarini *et al.* dans [104]. Il s'agit de l'expression (2.1), que l'on rappelle ici :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa x_3^+) + C_g \left( 1 - \exp\left(-\frac{x_3^+}{\eta_g}\right) - \frac{x_3^+}{\eta_g} \exp(-b_g x_3^+) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left( (1 + 6\Pi_w) \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^2 - (1 + 4\Pi_w) \left(\frac{x_3}{\delta}\right)^3 \right) \end{aligned}$$

La figure 6.4(a) présente, en échelles de paroi, le profil obtenu par l'équation (2.1) dans le cas que l'on souhaite simuler, à savoir un écoulement de vitesse 70 m/s ayant une épaisseur de couche limite  $\delta$  de 15 mm. On observe parfaitement la sous-couche visqueuse linéaire pour  $x_3^+ \leq 5$ , et la zone logarithmique pour  $x_3 \in [30, 500]$ , avec une zone de transition pour  $x_3^+ \in [5, 30]$ . La modélisation prend également bien en compte le comportement de sillage décrit par Coles [48] en sortie de la zone logarithmique, et observé expérimentalement notamment par Österlund [176], ou numériquement par DNS par Spalart [221]. La figure 6.4(b) donne un aperçu du profil moyen correspondant en variables physiques.



**Fig. 6.4:** (a) Profil turbulent moyen en variables de paroi obtenu par l'équation (2.1), pour  $\delta = 15$  mm et  $u_\infty = 70$  m/s.  $\cdots$  Asymptotes linéaire ( $x_3^+ \leq 10$ ) et logarithmique ( $x_3^+ \geq 30$ ). (b) Profil turbulent moyen en variables physiques obtenu par l'équation (2.1), pour  $\delta = 15$  mm et  $u_\infty = 70$  m/s.

### 6.2.2.2 Perturbations du profil turbulent moyen

La méthode élaborée par Sandham *et al.* consiste à imposer aux premiers points du maillage des perturbations, en distinguant la sous-couche interne et la zone externe de la couche limite, qui ont des comportements assez différents. Les perturbations dans la région interne, que l'on note  $\tilde{\mathbf{u}}_i = (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i)$ , modélisent les stries basses-vitesses (*low-speed streaks*) que l'on trouve pour le champ de vitesse instantané dans la sous-couche visqueuse, tandis que les perturbations dans la zone externe de la couche limite, notées  $\tilde{\mathbf{u}}_o = (\tilde{u}_o, \tilde{v}_o, \tilde{w}_o)$ , représentent les grandes structures tourbillonnaires présentes dans cette région de l'écoulement. Sandham

*et al.* écrivent formellement [202] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{u}_i}{c_\infty} = c_{u,0} x_3^+ \exp\left(-\frac{x_3^+}{x_{3p,0}^+}\right) \sin\left(\omega_0 \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \cos\left(\beta_0 \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_0\right) \\ \frac{\tilde{w}_i}{c_\infty} = c_{w,0} (x_3^+)^2 \exp\left(-\left(\frac{x_3^+}{x_{3p,0}^+}\right)^2\right) \sin\left(\omega_0 \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \cos\left(\beta_0 \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_0\right) \\ \frac{\tilde{u}_o}{c_\infty} = \sum_{j=1}^3 c_{u,j} \frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*} \exp\left(-\frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*}\right) \sin\left(\omega_j \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \cos\left(\beta_j \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_j\right) \\ \frac{\tilde{w}_o}{c_\infty} = \sum_{j=1}^3 c_{w,j} \left(\frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*}\right)^2\right) \sin\left(\omega_j \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \cos\left(\beta_j \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_j\right) \end{array} \right.$$

où les  $c_{i,j}$  sont des constantes. La quantité  $\delta^*$  représente l'épaisseur de déplacement de la couche limite, donnée en fonction du profil turbulent moyen par :

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{u_\infty}\right) dz$$

La sensibilité de  $\delta^*$  à  $\bar{u}$ , notamment dans la zone de sillage, justifie le soin pris concernant le choix du modèle du profil turbulent moyen. Les  $\omega_j$  représentent les fréquences de forçage des différents modes  $j \in \{0, \dots, 3\}$ . Les  $\beta_j$  sont les nombres d'onde adimensionnels associés dans la direction transverse à l'écoulement et  $\varphi_j$  le déphasage correspondant au mode  $j$ . Les positions adimensionnelles  $x_{3p,0}^+$  et  $x_{3p,j}$  correspondent au maximum d'amplitude des modes. Les perturbations sur la vitesse suivant  $\mathbf{e}_2$  sont obtenues en vérifiant l'hypothèse de divergence nulle (écoulement incompressible) sur le champ de vitesse perturbé, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{v}_i}{c_\infty} = -2 \frac{c_{w,0} \delta^{*+}}{\beta_0} x_3^+ \left(1 - \left(\frac{x_3^+}{x_{3p,0}^+}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{x_3^+}{x_{3p,0}^+}\right)^2\right) \sin\left(\omega_0 \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \sin\left(\beta_0 \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_0\right) \\ \frac{\tilde{v}_o}{c_\infty} = -2 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{w,j}}{\beta_j} \frac{1}{x_{3p,j}^2} \frac{x_3}{\delta^*} \left(1 - \left(\frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{x_{3p,j}} \frac{x_3}{\delta^*}\right)^2\right) \sin\left(\omega_j \frac{u_\infty t}{\delta^* \text{Ma}}\right) \\ \quad \sin\left(\beta_j \frac{x_2}{\delta^*} + \varphi_j\right) \end{array} \right.$$

Sandberg & Sandham remarquent dans [201] que plusieurs simulations préliminaires sont parfois nécessaires pour ajuster au mieux les coefficients du modèle. En effet, ces paramètres dépendent du nombre de Reynolds construit sur l'épaisseur de la couche limite et dépendent des pas de discrétisation spatiale, notamment le pas de discrétisation longitudinale  $\Delta x_1$ .

### 6.2.2.3 Cas-test de validation

Cette partie détaille l'implémentation numérique de la méthode de perturbation de Sandham *et al.* pour un écoulement 3-D turbulent de 70 m/s présentant une épaisseur de couche limite  $\delta = 15$  mm. Les équations résolues numériquement sont les équations de Navier–Stokes 3-D en coordonnées cartésiennes, avec une condition de non-glissement et de non-pénétration à la paroi, supposée parfaitement rigide. Le code de calcul reprend intégralement les méthodes numériques exposées au chapitre 4.

### Construction du maillage

On choisit d'implémenter la méthode de Sandham *et al.* sur le domaine de calcul suivant : le maillage considéré est cartésien, constitué de  $890 \times 95 \times 170$  points, soit environ  $6.7 \times 10^6$  points, et il présente des pas de discrétisation spatiale  $\Delta x_1 = 0.400 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_2 = 0.067 \text{ mm}$  et  $\Delta x_3 = 0.050 \text{ mm}$ . Un tel maillage permet d'assurer un premier point de calcul près de la paroi à  $x_3^+ = 9$ , en utilisant la vitesse de frottement obtenue à partir du modèle de Guarini *et al.* La discrétisation dans la direction  $\mathbf{e}_3$  est étirée, et l'on dispose d'environ 100 points dans la couche limite. La longueur de développement de la couche limite vaut approximativement  $12 \delta$ .

Le code de calcul est parallélisé pour améliorer ses performances. Le maillage est alors scindé dans la direction  $\mathbf{e}_1$  en 8 blocs de 120 points longitudinalement, et 4 blocs dans la direction  $\mathbf{e}_3$  de 50 points perpendiculairement à la plaque, ce qui permet de réduire chaque bloc à 570000 points. On choisit le nombre CFL = 0.85, fixant la discrétisation temporelle à  $\Delta t = 1.03 \times 10^{-7} \text{ s}$ .

Les calculs sont menés sur le calculateur `galilee` du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA), cluster composé de 52 processeurs quadricœurs Intel Nehalem E5540 @2.53 GHz et Intel Nehalem X5550 @2.66 GHz, de 84 Go de mémoire RAM, et d'un réseau InfiniBand DDR.

### Choix des paramètres du modèle

Les coefficients donnés par Sandham *et al.* dans [202] sont adaptés pour des simulations en écoulements transoniques, mais ne conviennent pas pour simuler correctement un écoulement de paroi de vitesse  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$  et de  $15 \text{ mm}$  d'épaisseur de couche limite. En effet, une simulation préliminaire non-détaillée ici a montré que les perturbations introduites à l'entrée du domaine de calcul ont des taux de fluctuations de l'ordre de 80%, si bien qu'un rayonnement parasite très intense est généré et dégrade rapidement la qualité de la simulation. Les paramètres du modèle nécessitent donc un réajustement pour le type d'écoulement que l'on souhaite simuler. On choisit dans la suite le jeu de paramètres synthétisé au tableau 6.1. La

	$j$	$c_{u,j}$	$c_{w,j}$	$\omega_j$	$\beta_j$	$\varphi_j$	$x_{3p,0}^+$	$x_{3p,j}$
interne	0	0.01	-0.008	0.1	$\pi$	0.0	12	—
externe	1	0.03	-0.03	0.25	$0.75 \pi$	0.0	—	1.0
	2	0.03	-0.03	0.125	$0.5 \pi$	0.1	—	1.5
	3	0.03	-0.03	0.0625	$0.25 \pi$	0.15	—	2.0

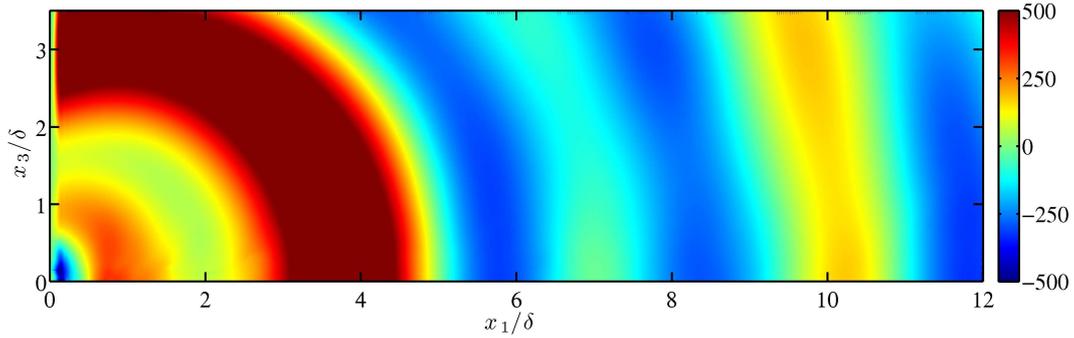
**Tab. 6.1:** Paramètres du modèle de Sandham *et al.* utilisés dans ce cas-test.

simulation est menée sur 300000 itérations, ce qui représente environ 70 périodes du mode d'excitation de fréquence la plus basse.

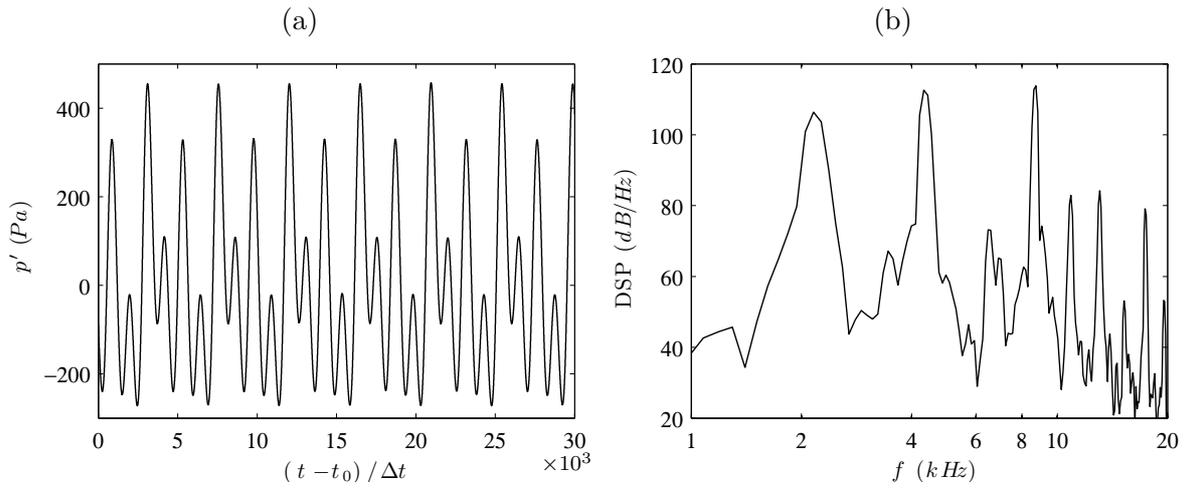
### Résultats

La figure 6.5 propose une visualisation instantanée dans le plan  $x_2 = 0$  de la pression fluctuante. Elle met en évidence un rayonnement acoustique intense provenant de la zone d'excitation.

Un tracé du signal de pression au point de coordonnées  $(12 \delta, 0, 3 \delta)$ , en sortie du domaine de développement, permet de rendre compte de la périodicité très prononcée du rayonnement acoustique parasite (figure 6.6(a)). Une analyse spectrale met en évidence l'émergence de trois pics principaux. Un premier pic à  $107 \text{ dB}$  et centré autour de la fréquence  $f = 2180 \text{ Hz}$  correspond au mode 3 d'excitation de la zone externe de la couche limite. Le spectre est également très marqué par les modes 1 et 2 d'excitation, respectivement aux fréquences  $f = 8700 \text{ Hz}$



**Fig. 6.5:** Pression fluctuante instantanée (en  $Pa$ ), bornée entre  $\pm 500 Pa$ , dans le plan  $x_2 = 0$ .



**Fig. 6.6:** (a) Évolution temporelle de la pression fluctuante au point de coordonnées  $(12\delta, 0, 3\delta)$  en fonction du nombre d'itération à partir de l'instant  $t_0 = 120000 \Delta t$  :  $(t - t_0)/\Delta t$ . (b) Densité spectrale de puissance acoustique associée.

et  $f = 4360 Hz$ , avec des niveaux acoustiques qui atteignent  $112 dB$  et  $114 dB$  respectivement. Ce rayonnement acoustique parasite intense peut avoir deux origines. Il peut provenir de la frontière amont, où l'on choisit de perturber l'écoulement alors que des conditions non-réfléchissantes de Tam & Dong sont appliquées. En effet, ces conditions permettant aux fluctuations acoustiques de sortir du domaine de calcul, ne sont pas adaptées aux perturbations aérodynamiques que l'on impose dans la zone de perturbation, ce qui peut donner naissance à un rayonnement parasite. Aussi, le fait d'écraser dans la zone de perturbation toute fluctuation par des excitations imposées entraîne nécessairement des discontinuités dans les champs de vitesse, à l'origine d'un rayonnement acoustique d'autant plus intense que les excitations forcées de vitesse sont fortes.

## Conclusion

L'utilisation du modèle de Sandham *et al.*, ajusté ici au cas d'un écoulement de paroi faiblement subsonique n'apporte pas de résultats vraiment concluants. En effet, l'imposition de perturbations à l'entrée du domaine de calcul génère, dans l'implémentation réalisée et pour la configuration testée, un rayonnement parasite très intense, qui contamine l'ensemble de la simulation. Ceci n'est toutefois pas surprenant, puisque ce modèle est conçu pour simuler des phénomènes extrêmement bruyants, avec des niveaux bien supérieurs à ceux du rayonnement parasite. C'est notamment le cas en présence d'écoulements supersoniques.

On propose dans la suite d'élaborer un autre modèle de perturbation plus adapté à l'écou-

lement de paroi faiblement subsonique que l'on souhaite simuler.

### 6.2.3 Développement d'un modèle de perturbation

#### 6.2.3.1 Finalité du modèle

On présente dans cette partie un modèle de perturbation du profil turbulent moyen. Son développement a été principalement conditionné par la finalité que l'on désire lui donner. Dans notre cas, on ne souhaite pas synthétiser à l'amont de la cavité cylindrique une couche limite turbulente incidente réaliste, ce qui paraît de toute façon peu envisageable aujourd'hui pour une couche limite ayant un nombre de Reynolds  $Re_\delta$  de 70000. On aimerait simplement disposer d'une couche limite incidente contenant des fluctuations ayant des amplitudes raisonnables, sur un maillage adapté à la mise en place d'une stratégie LES pour le calcul direct du bruit rayonné par la cavité cylindrique.

On choisit de ne pas imposer de perturbations de vitesse, en vue de limiter au maximum le rayonnement acoustique parasite. On préfère plutôt introduire de faibles perturbations sur les variables conservatives totales  $(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$ . Si les fréquences d'excitation sont bien choisies, ces perturbations devraient se développer naturellement. Cette technique offre l'avantage de ne pas "écraser" les fluctuations acoustiques susceptibles d'exister dans la zone d'excitation. On déplace également cette zone d'excitation d'une trentaine de points vers l'intérieur du domaine de calcul, afin de ne pas contaminer les conditions aux frontières non-réfléchissantes de Tam & Dong, avec la sommation de perturbations aérodynamiques dans cette région adaptée à la sortie d'ondes acoustiques uniquement. Les perturbations acoustiques peuvent dès lors sortir nettement plus facilement du domaine de calcul que dans le cas de notre implémentation du modèle de Sandham *et al.*, ce qui limite la formation d'un rayonnement parasite à la frontière amont.

#### 6.2.3.2 Perturbation optimale de Tollmien–Schlichting

À l'instar de Schlichting & Gersten, qui établissent pour un écoulement laminaire la fréquence d'excitation modale longitudinale la plus instable temporellement [206], on souhaite obtenir cette fréquence d'excitation optimale pour un profil turbulent. L'idée sous-jacente est qu'en perturbant le profil turbulent moyen à cette fréquence, on minimise *a priori* la distance de développement de la couche limite turbulente.

#### Équation de stabilité d'Orr–Sommerfeld généralisée au cas turbulent

On considère un écoulement turbulent moyen  $\bar{\mathbf{u}}$  supposé bidimensionnel (pas de variations dans la direction  $x_2$ ) et incompressible. Le champ de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  ne dépend que de l'altitude  $x_3$  tandis que le champ de vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$  vaut 0. On introduit la fonction courant associée à une perturbation de vitesse, définie par  $u'_1 = \partial\psi/\partial x_3$  et  $u'_3 = -\partial\psi/\partial x_1$ . On réduit  $\psi$  à une forme modale dans la direction longitudinale, en s'inspirant du travail réalisé par Schlichting & Gersten dans pour l'étude de stabilité d'un écoulement de paroi laminaire [206] :

$$\psi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_3) \exp\left(i k_r (x_1 - \xi u_\infty t)\right)$$

où  $k_r$  est le nombre d'onde de la perturbation modale dans la direction longitudinale, et  $\xi$  un nombre complexe. La partie réelle de  $\xi u_\infty$  représente la vitesse de phase de l'onde se propageant dans la direction  $x_1$  et la partie imaginaire de  $\xi$  renseigne si l'onde est amortie ( $\text{Im}(\xi) < 0$ ) ou au contraire amplifiée ( $\text{Im}(\xi) > 0$ ). La fonction d'amplitude  $\varphi$  ne dépend quant à elle que de  $x_3$  car l'écoulement plan considéré ne dépend également que de  $x_3$ . On introduit ces termes dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement 2-D, réécrite dans le cas de perturbations bidimensionnelles de vitesse, et en ignorant tous les termes quadratiques

de perturbations, on obtient l'équation de Orr–Sommerfeld pour un profil turbulent moyen [186] :

$$\begin{aligned}
(U - \xi) \left( \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - (k_r \delta)^2 \varphi \right) - \frac{d^2 U}{d\zeta^2} \varphi &= - \frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \left[ \frac{1}{\nu_T} \frac{d^2 \nu_T}{d\zeta^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + (k_r \delta)^2 \varphi \right) \right. \\
&+ \frac{2}{\nu_T} \frac{d \nu_T}{d\zeta} \left( \frac{d^3 \varphi}{d\zeta^3} - (k_r \delta)^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) \\
&\left. + \frac{d^4 \varphi}{d\zeta^4} - 2 (k_r \delta)^2 \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + (k_r \delta)^4 \varphi \right] \quad (6.3)
\end{aligned}$$

où  $\zeta = x_3/\delta$  est l'altitude adimensionnelle,  $U = \bar{u}_1/u_\infty$  le profil de vitesse moyenne longitudinale adimensionnelle, et  $\text{Re}_\delta^T = u_\infty \delta / \nu_T$  le nombre de Reynolds total construit sur l'épaisseur de couche limite. À noter que la viscosité cinématique totale  $\nu_T = \nu_\infty + \nu_t$  nécessite la modélisation de la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  utilisée pour modéliser les termes turbulents dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On choisit un modèle classique, de type longueur de mélange (hypothèse de Prandtl) :

$$\nu_t = \ell_m^2 \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$$

avec  $\ell_m$  la longueur de mélange à modéliser. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que la longueur de mélange varie linéairement avec la distance à la paroi :  $\ell_m^+ = \kappa x_3^+$ , avec  $\kappa \simeq 0.41$  la constante de von Kármán [104]. D'autres modèles de longueur de mélange peuvent être considérés, comme le modèle d'Escudier [76] :

$$l_m^+ = \kappa x_3^+ \mathbf{1}_{\{x_3^+/\delta^+ \leq \kappa_0/\kappa\}} + \kappa \delta^+ \mathbf{1}_{\{x_3^+/\delta^+ \geq \kappa_0/\kappa\}}$$

avec  $\kappa_0 = 0.09$ , ou le modèle de van Driest [242] :

$$l_m^+ = \kappa x_3^+ (1 - \exp(-x_3^+/A_0^+))$$

avec  $A_0^+ = 26$ . Finalement on a :

$$\frac{\nu_t}{\kappa^2 \delta u_\infty} = \zeta^2 \frac{dU}{d\zeta} \quad (6.4)$$

Enfin, le nombre de Reynolds total peut être exprimé en fonction du nombre de Reynolds  $\text{Re}_\delta$  construit sur l'épaisseur de couche limite par :

$$\text{Re}_\delta^T = \frac{1}{\frac{1}{\text{Re}_\delta} + \frac{1}{\text{Re}_\delta^t}}$$

où  $\text{Re}_\delta^t$  est le nombre de Reynolds turbulent construit sur l'épaisseur de couche limite :  $\text{Re}_\delta^t = u_\infty \delta / \nu_t$ . L'établissement de l'équation de Orr–Sommerfeld généralisée au cas turbulent est détaillée en annexe C. Cette équation diffère de la version classique de l'équation de Orr–Sommerfeld par la dépendance suivant  $x_3$  du nombre de Reynolds, via la viscosité cinématique turbulente, et par le terme relatif au gradient de viscosité  $d\nu_T/d\zeta$  et au laplacien de viscosité  $d^2\nu_T/d\zeta^2$  dans la direction  $x_3$ .

Les conditions aux limites associées à l'équation (6.3) sont l'adhérence à la paroi en  $x_3 = 0$ , et une décroissance au loin. On a donc :

$$\bullet \varphi(0) = 0 \quad \bullet \frac{d\varphi}{d\zeta}(0) = 0$$

$$\bullet \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \varphi(\zeta) = 0 \quad \bullet \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{d\varphi}{d\zeta} = 0$$

### Résolution numérique

La résolution de l'équation de Orr-Sommerfeld consiste à résoudre un problème aux valeurs propres généralisées, puisque l'on cherche essentiellement la valeur de  $\xi$ , en fonction du nombre adimensionnel  $k_r \delta$ . La résolution est menée numériquement à l'aide d'un code `fortran90`. La fonction propre associée  $\varphi$  est recherchée sous forme d'un développement en polynômes de Tchebychev, comme le propose Orszag dans le cadre d'une étude de stabilité en laminaire [175], et le système d'équations est relaxé à l'aide de la méthode  $-\tau$  de Lanczos [136]. La recherche de valeurs propres est réalisée grâce à l'algorithme QZ de Moler & Stewart [167]. La résolution numérique est détaillée en annexe C. L'algorithme de résolution converge très rapidement, puisqu'il suffit d'un nombre relativement restreint de polynômes de Tchebychev pour assurer une bonne précision sur la valeur fonction propre propre (et donc aussi sur  $\xi$ ). En pratique on choisit les 260 premiers polynômes de Tchebychev. Cependant l'algorithme introduit un nombre conséquent de valeurs propres parasites, en raison de la troncature liée à la décomposition de la fonction propre  $\varphi$  sur une base polynomiale de dimension finie. Il convient d'ignorer ces valeurs propres parasites. Elles peuvent être détectées aisément, en observant que la fonction propre associée est nulle ou oscillante maille à maille.

### Résultats

La résolution numérique révèle que le profil turbulent est stable quel que soit le nombre d'onde adimensionnel  $k_r \delta$  dans la direction longitudinale. Ce résultat provient vraisemblablement de la nature 2-D de l'excitation, modale dans la direction  $e_1$ , et qui s'avère inadéquate pour perturber de manière instable le profil turbulent moyen. À noter aussi que d'autres modèles de longueur de mélange (van Driest, etc.) ont été testés, et ont abouti au même résultat. L'obtention de fréquences instables passe donc nécessairement par la prise en compte de perturbations 2-D modales dans d'autres directions de l'espace, ou 3-D, ce qui n'a pas été effectué dans ce travail. La thèse de Pujals [186], soutenue postérieurement à la réalisation de cette étude de stabilité, confirme d'ailleurs cela. Il envisage dans ces travaux des perturbations 3-D, et montre qu'un écoulement de paroi turbulent est instable pour des perturbations très allongées longitudinalement ( $k_r \simeq 0$ ), ce qui revient finalement à fortement privilégier les perturbations modales dans la direction  $x_3$ .

Dans la suite, on présente une autre méthode pour perturber le profil turbulent moyen de vitesse.

#### 6.2.3.3 Modèle d'excitation par zone

Les perturbations sont introduites en distinguant une zone de type sous-couche interne de la zone externe de la couche limite, qui ont des comportements différents. L'excitation du profil de vitesse moyenne longitudinale se formule par l'addition de termes supplémentaires dans l'intégration temporelle des variables conservatives ( $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3$ ).

#### Zone de type sous-couche interne

Le fait de distinguer la sous-couche interne dans la couche limite permet de prendre en compte plus ou moins fidèlement l'existence de stries basses-vitesses dans cette zone. Selon le maillage LES considéré, cette distinction peut être omise, notamment dans le cas où l'on ne dispose que d'un très faible nombre de points dans la sous-couche visqueuse, ce qui est le plus souvent le cas. Ces perturbations sont introduites en ajoutant le terme suivant dans

l'intégration temporelle des variables conservatives  $(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} \right|_{\text{int}} = \frac{4\pi\kappa_u\rho_\infty u_\infty f_{\text{int}}}{3} \sin(2\pi f_{\text{int}}t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_z} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \left( \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y1}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y2}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) \right) \\ \left. \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} \right|_{\text{int}} = \frac{4\pi\kappa_v\rho_\infty u_\infty f_{\text{int}}}{3} \sin(2\pi f_{\text{int}}t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_z} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \left( \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y1}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y2}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) \right) \\ \left. \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial t} \right|_{\text{int}} = -\frac{4\pi\kappa_w\rho_\infty u_\infty f_{\text{int}}}{3} \sin(2\pi f_{\text{int}}t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_z} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \left( \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y1}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y2}} \frac{x_2}{\Delta x_2}\right) \right) \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Les constantes du modèle sont données dans le tableau 6.2. La fréquence d'excitation  $f_{\text{int}}$  est estimée en se donnant une longueur caractéristique des stries. La zone d'excitation, centrée sur la position  $x_e$  et de longueur  $4L_e$ , s'étend généralement sur une dizaine de points longitudinalement. Elle est fenêtrée dans la direction  $\mathbf{e}_1$  par une fenêtre de Tukey  $w_T(x_1)$  de paramètre 1/2, afin d'éviter une forte discontinuité aux premiers et derniers points d'excitation :

$$w_T(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi|x - x_e|}{L_e} \right) & \text{si } L_e \leq |x_1 - x_e| \leq 2L_e \\ 1 & \text{si } 0 \leq |x_1 - x_e| \leq L_e \end{cases}$$

$\kappa_u$	$\kappa_v$	$\kappa_w$	$n_{y1}$	$n_{y2}$	$n_z$	$f_{\text{int}}\Delta t$
$10^{-3}$	$3 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	10	5	10	1/1150

Tab. 6.2: Constantes empiriques du modèle pour l'excitation de la sous-couche interne.

### Zone externe de la couche limite

L'excitation en zone externe de la couche limite permet d'y introduire de larges fluctuations. On ne prend en compte que 3 modes dans la modélisation, comme le suggèrent Sandham *et al.* [202]. Les perturbations relatives au mode  $n$  dans la zone externe de la couche limite sont introduites par l'addition du terme supplémentaire suivant dans l'intégration temporelle des variables conservatives  $(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} \right|_n = 2\pi\kappa_{u_n}\rho_\infty u_\infty f_n \sin(2\pi f_n t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_{z_n}} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y_n}} \frac{x_2}{\Delta x_2} + \varphi_n\right) \\ \left. \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} \right|_n = 2\pi\kappa_{v_n}\rho_\infty u_\infty f_n \sin(2\pi f_n t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_{z_n}} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y_n}} \frac{x_2}{\Delta x_2} + \varphi_n\right) \\ \left. \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial t} \right|_n = 2\pi\kappa_{w_n}\rho_\infty u_\infty f_n \sin(2\pi f_n t) \sin^3\left(\frac{2\pi}{n_{z_n}} \frac{x_3}{\Delta x_3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n_{y_n}} \frac{x_2}{\Delta x_2} + \varphi_n\right) \end{array} \right.$$

Les constantes du modèle correspondant à chacun des modes  $n$  sont données dans le tableau 6.3.

$n$	$\kappa_{u_n}$	$\kappa_{v_n}$	$\kappa_{w_n}$	$n_{y_n}$	$n_{z_n}$	$\varphi_n$	$f_n \Delta t$
1	0.015	0.015	0.015	5	15	0.04	1/2800
2	-0.015	-0.015	0.010	8	35	0.16	1/1700
3	-0.030	-0.025	-0.040	12	45	0.23	1/2100

Tab. 6.3: Constantes empiriques du modèle pour l'excitation des modes  $n$ .

### 6.2.3.4 Cas-tests de validation

#### Construction du maillage

On se limite dans la suite à un maillage 3-D cartésien. On propose ici quatre simulations sur des maillages différents afin de mesurer l'influence de la discrétisation longitudinale. Dans les quatre simulations, la longueur de développement est fixée à  $25\delta$ , ce qui correspond à la longueur de développement que l'on se donne pour la simulation LES de l'écoulement affleurant la cavité cylindrique. Les pas de discrétisation transversale et verticale sont identiques pour toutes les simulations : on fixe  $\Delta x_2 = 0.7\text{ mm}$ , et  $\Delta x_3 = 0.2\text{ mm}$ . Le maillage est constitué de 80 points transversalement et de 150 points dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . Un étirement de maillage est effectué dans la direction normale à la plaque. On dispose d'une cinquantaine de points dans la couche limite. En échelles de paroi, le premier point de maillage dans la direction verticale est placé à  $x_3^+ = 30$ , en estimant la vitesse de frottement  $u_\tau$  à partir du modèle de Guarini *et al.* On ne dispose donc pas de point de maillage dans la sous-couche visqueuse. La constante CFL est fixée à 0.85. Le pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$ , fixé à  $4.1 \times 10^{-7}\text{ s}$ , est le même dans les quatre simulations. Le code de simulation est enfin parallélisé en décomposant le domaine de calcul en 10 blocs longitudinalement, et en 3 blocs dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . Une zone éponge est placée à l'aval de la zone de développement afin de permettre la sortie de la turbulence. La quatrième simulation est effectuée en présence d'une source compacte monopolaire, simulant le rayonnement tonal de la cavité, et permet de quantifier les effets de ce rayonnement sur le développement de la couche limite incidente.

#### Cas test avec $\Delta x_1 = 1\text{ mm}$

Avec un pas de discrétisation longitudinale de  $\Delta x_1 = 1\text{ mm}$ , la longueur de développement de la couche limite est constituée d'environ 375 points de maillage. La zone d'excitation est centrée autour du 35<sup>e</sup> point de maillage longitudinalement, soit à une position  $x_1 \simeq 2.3\delta$ . La simulation est menée sur 400000 itérations, correspondant à environ 140 périodes aérodynamiques du mode 1, qui est le mode présentant la fréquence d'excitation la plus petite :  $f_1 = 1/(2800 \Delta t) \simeq 900\text{ Hz}$ . Les calculs sont effectués sur le ordinateur galilée et ont nécessité 7000 heures.

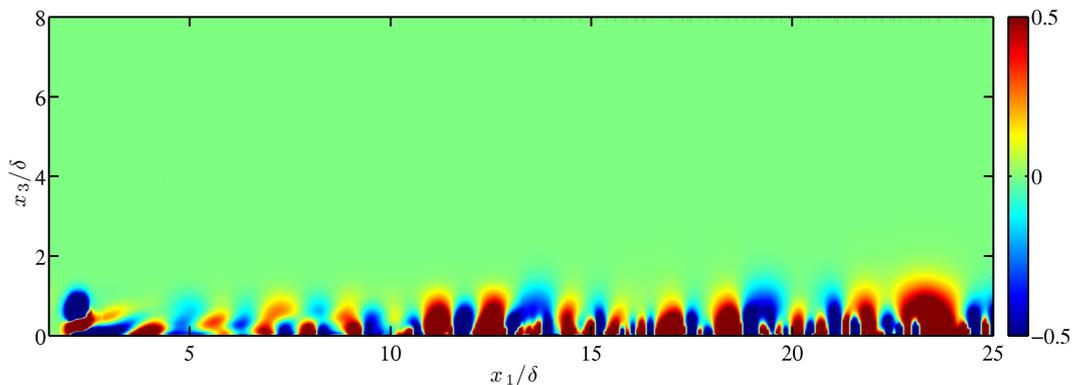
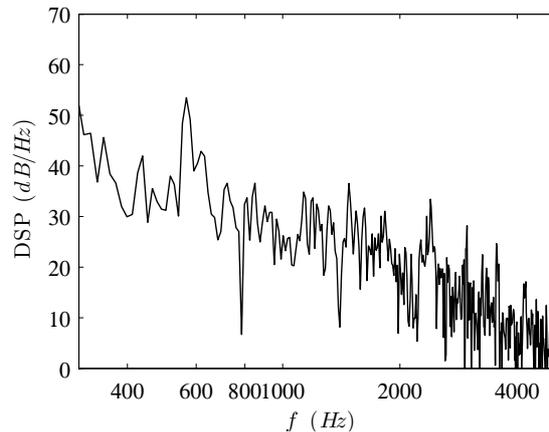


Fig. 6.7: Pression fluctuante instantanée (en  $Pa$ ), bornée entre  $\pm 0.5\text{ Pa}$ , dans le plan  $x_2 = 0$ .

La figure 6.7 présente le champ instantané de pression fluctuante, bornée entre  $\pm 0.5 Pa$  dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$ . La zone d'excitation est parfaitement détectable grâce aux deux lobes intenses de surpression/dépression aux environs de  $x_1 = 2\delta$ . Aucun rayonnement parasite notable n'est visible en provenance de cette zone, ce qui est numériquement parlant remarquable. Une analyse spectrale est réalisée hors de la couche limite au point de coordonnées  $(25\delta, 0, 6\delta)$  pour confirmer ce résultat plus finement. La figure 6.8 montre la densité spectrale de puissance acoustique obtenue grâce à un enregistrement du signal de pression fluctuante sur 105 périodes aérodynamiques en sortie de la zone de développement.



**Fig. 6.8:** Densité spectrale de puissance acoustique mesurée au point de coordonnées  $(25\delta, 0, 6\delta)$ .

On observe l'émergence d'un certain nombre de pics, principalement aux alentours de 590, 1450 et 2200 Hz. Ces deux dernières fréquences correspondent respectivement aux fréquences d'excitation du mode 2 de la zone externe de la couche limite et de la sous-couche interne. Les niveaux de ces pics, de l'ordre de 60 dB pour le pic à 590 Hz et inférieurs à 50 dB pour les pics secondaires, montrent que ce rayonnement acoustique parasite généré par la zone d'excitation est admissible en vue d'une utilisation dans une simulation LES du bruit rayonné par la cavité cylindrique dans la configuration de référence et avec une couche limite incidente présentant des fluctuations. En effet, ces niveaux sont inférieurs de plus de 20 dB aux niveaux correspondants au rayonnement acoustique de la cavité mesuré en champ lointain, comme le rappelle la figure 2.7.

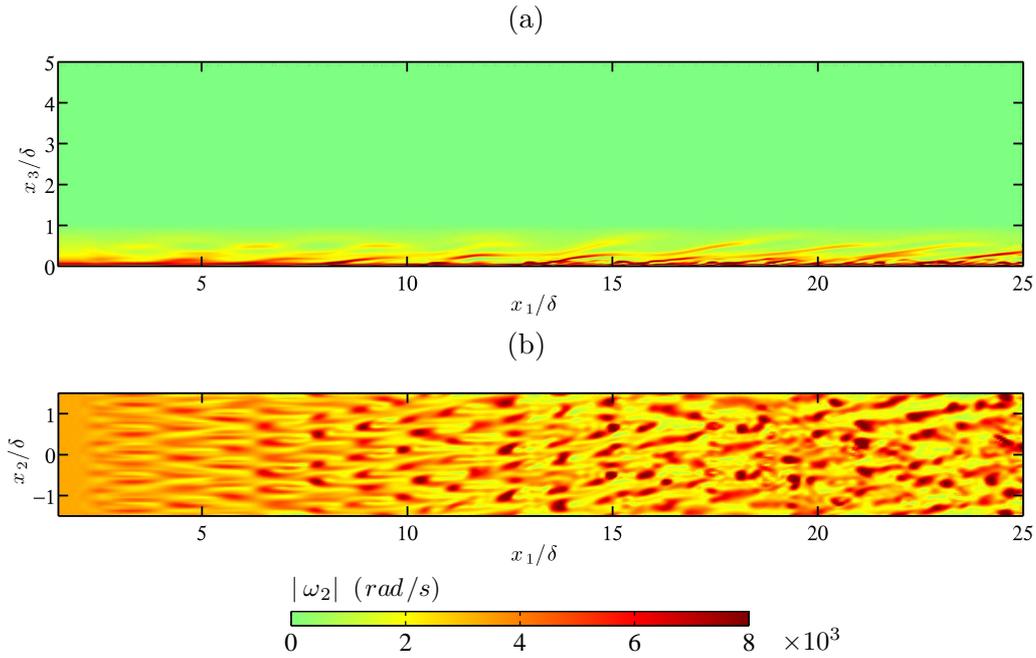
Les figures 6.9(a) et 6.9(b) présentent la valeur absolue de la composante de vorticité dans la direction  $e_2$  respectivement dans les plans  $x_2 = 0$  et  $x_3 = \delta/8$ . La vorticité  $\omega$  est calculée par la relation :

$$\omega = \text{rot } \mathbf{u}$$

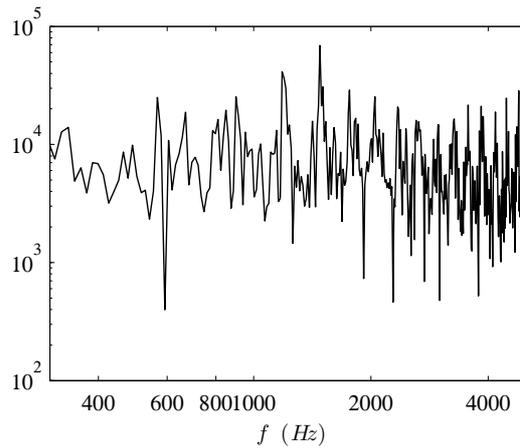
Les perturbations déterministes injectées sont nettement visibles par le caractère "structuré" et "organisé" du champ de vorticité jusqu'à la position  $x_1 = 18\delta$ . La figure 6.9(b) révèle une amplification spontanée des perturbations de vitesse au cours du développement de la couche limite, et un renforcement progressif du caractère aléatoire des perturbations. Même si les perturbations ne semblent pas tout-à-fait aléatoires à la sortie de la zone de développement, elles ont perdu en cohérence au cours de leur convection et leur amplification.

La figure 6.10, montrant le contenu spectral des fluctuations de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de développement à l'altitude  $x_3 = \delta/8$ , confirme cette appréciation. Même si les fluctuations de vitesse restent à la sortie assez marquées par les fréquences d'excitation, comme le révèle le pic intense observé à  $f = 1450 Hz$ , les effets non-linéaires ont permis un remplissage progressif du spectre sur un large éventail de fréquences.

La figure 6.11 présente le développement du taux de fluctuations longitudinales dans le plan  $x_2 = 0$ , tandis que la figure 6.12 montre le profil du taux de fluctuations longitudinales

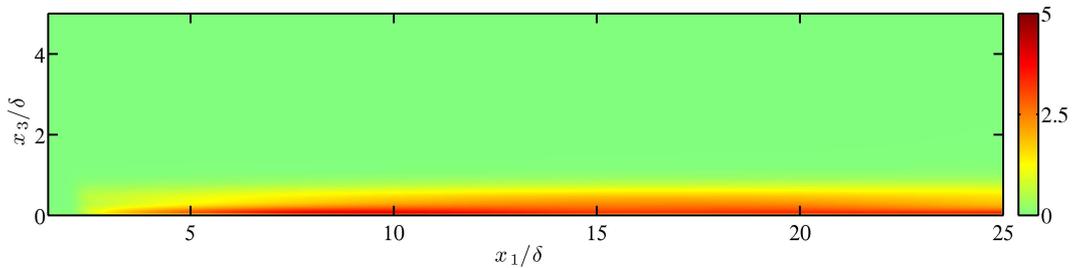


**Fig. 6.9:** Valeur absolue de la composante de vorticité dans la direction  $e_2$   $|\omega_2|$  (a) dans le plan  $x_2 = 0$ . (b) dans le plan  $x_3 = \delta/8$ .



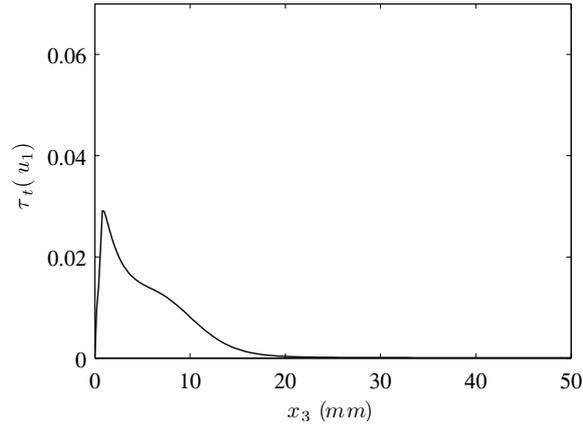
**Fig. 6.10:** Module de la transformée de Fourier des fluctuations de vitesse longitudinale au point de coordonnées  $(25\delta, 0, \delta/8)$ .

à la sortie de la zone de développement.



**Fig. 6.11:** Taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  (en %) dans le plan  $x_2 = 0$ .

Le profil obtenu reproduit qualitativement assez fidèlement la forme du profil que l'on a obtenu expérimentalement à l'amont de la cavité, (voir la figure 2.9(b)) avec notamment



**Fig. 6.12:** Profil vertical du taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  à la sortie de la zone de développement ( $x_1 = 25 \delta$ ), en fonction de  $x_3$ .

la présence d'un maximum du taux de fluctuations très proche de la paroi, calculé ici à environ 3%. Quantitativement, les niveaux de turbulence sont environ 50% plus faibles par rapport aux données expérimentales (voir la figure 2.9(b)) à l'amont de la cavité. Ce déficit en énergie cinétique turbulente à la sortie de la zone de développement peut avoir plusieurs origines, qu'on se propose d'étudier dans la suite. Ce déficit est vraisemblablement le fait d'une discrétisation verticale trop grossière ( $x_3^+ = 30$ ), avec notamment l'absence de points de maillage dans la sous-couche visqueuse. Seulement, pour synthétiser une couche limite turbulente incidente réaliste, il conviendrait de prendre une discrétisation proche de la paroi de l'ordre de  $x_3^+ = 1$  [68, 97]. Ceci représente globalement un ordre de grandeur sur le pas de discrétisation verticale, ce qui n'est pas envisageable, pour des raisons de coûts de calcul, pour le calcul LES que l'on souhaite effectuer. Aussi, on peut anticiper le fait qu'une division par 2 ou 3 du pas de discrétisation verticale ne permet pas d'améliorer significativement le comportement de la couche limite avec fluctuations que l'on a produit, puisque l'on aura encore trop peu de points dans la sous-couche interne.

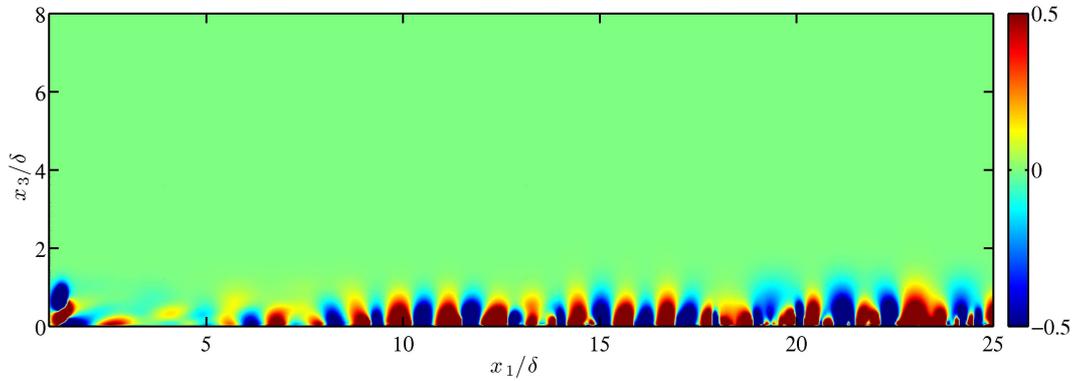
Le déficit en énergie cinétique turbulente peut également être une conséquence du choix d'une discrétisation longitudinale vraisemblablement trop grossière, pour l'écoulement turbulent que l'on souhaite synthétiser. En effet, des structures turbulentes, suffisamment larges pour être porteuses d'une quantité non-négligeable d'énergie cinétique turbulente, semblent d'une part trop petites pour être supportées par le maillage. D'autre part, le rôle des petites structures proches de la paroi influe sur le comportement global de la couche limite. Ainsi, l'absence de ces petites structures peut avoir une conséquence directe sur l'état global de la couche limite synthétisée. Une simulation avec une discrétisation longitudinale plus petite pourrait donc réduire l'impact négatif de la sous-discrétisation longitudinale sur la qualité de la couche limite obtenue. Le déficit en énergie cinétique turbulente peut également provenir de la non-prise en compte d'interactions entre la couche limite et le rayonnement acoustique intense généré par la cavité, présente dans le cadre des mesures et absence de la simulation présentée. Enfin, le gradient de pression engendré par la cavité dans son voisinage amont, et non pris en compte dans la simulation présentée, peut également avoir un effet sur le niveau des fluctuations dans la couche limite. On se propose dans la suite d'étudier l'effet de la discrétisation dans la direction longitudinale.

### Cas test avec $\Delta x_1 = 0.6 \text{ mm}$

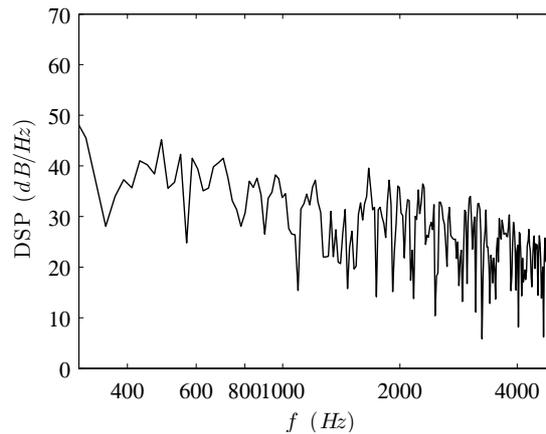
On présente ici les résultats de la simulation avec une discrétisation spatiale de  $\Delta x_1 = 0.6 \text{ mm}$ . La longueur de développement de la couche limite est constituée de 710 points de maillage. La zone d'excitation, centrée autour du 35<sup>e</sup> point de maillage longitudinalement,

correspondant à une position  $x_1 \simeq 1.4\delta$ . La simulation est effectuée sur 300000 itérations. Le calcul, mené sur le calculateur *galilee* a nécessité environ 5000 heures.

La figure 6.13 présente une visualisation de la pression fluctuante instantanée bornée entre  $\pm 0.5 Pa$ , dans le plan  $x_2 = 0$ . Aucun rayonnement acoustique majeur provenant de la zone d'excitation n'est détecté, ce que confirme le spectre acoustique en sortie de la zone de développement, à l'altitude  $6\delta$  (figure 6.14). Aucun pic ne ressort dans le spectre acoustique,



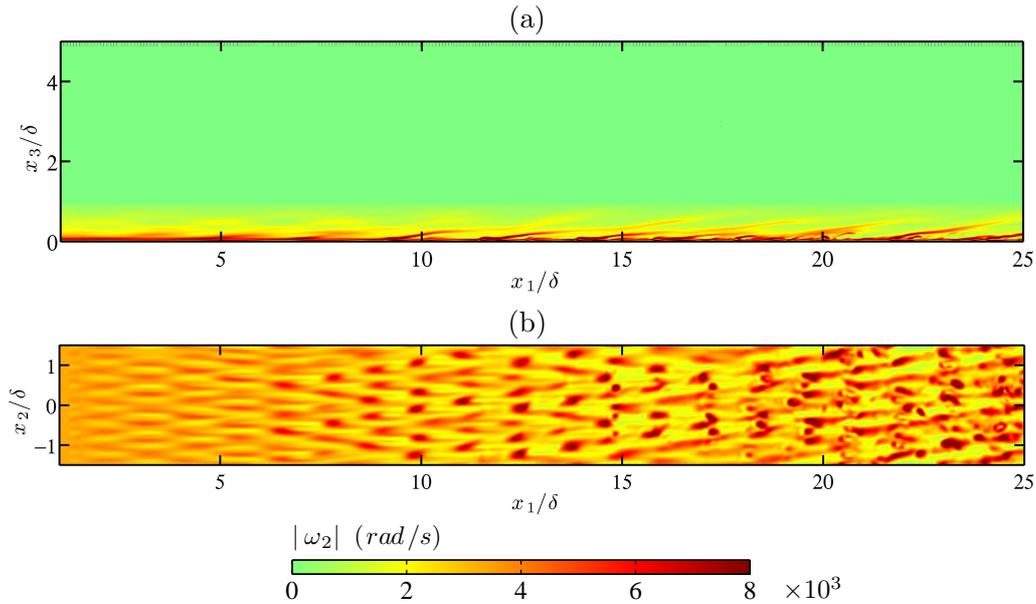
**Fig. 6.13:** Pression fluctuante instantanée (en  $Pa$ ), bornée entre  $\pm 0.5 Pa$  dans le plan  $x_2 = 0$ .



**Fig. 6.14:** Densité spectrale de puissance acoustique mesurée au point de coordonnées  $(25\delta, 0, 6\delta)$ .

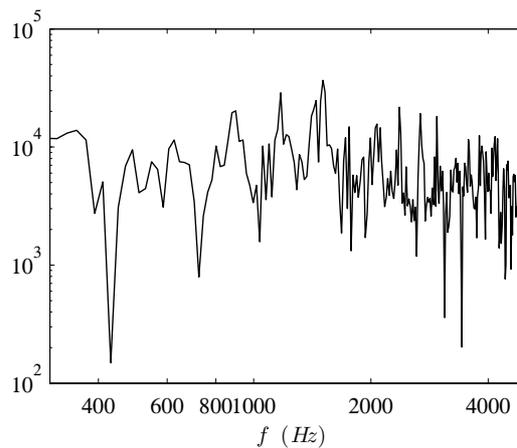
ce qui n'était pas le cas pour une discrétisation longitudinale plus grande. Le niveau sonore ambiant reste aussi tout-à-fait acceptable, puisqu'il est compris entre 20 et 40  $dB$ , pour les hautes fréquences, et vaut environ 50  $dB$  pour les basses fréquences.

Une visualisation de la composante transversale de la vorticité dans les plans  $x_2 = 0$  et  $x_3 = \delta/8$  est proposée aux figures 6.15(a) et (b). On observe que la déstabilisation de la couche limite est plus longue spatialement que dans le cas d'une discrétisation longitudinale plus grossière. En effet, le champ de vorticité semble beaucoup plus organisé, même proche de la sortie de la zone de développement, que dans la simulation précédente. Cependant on remarque la présence plus importante de fines structures près de la sortie de la zone de développement, ce qui laisse penser que le spectre des fluctuations de vitesse y est un peu plus riche, comme le confirme la figure 6.16. Cette figure présente le contenu spectral des fluctuations de vitesse à la sortie de la zone de développement, à la position  $x_3 = \delta/8$ . Une comparaison avec les résultats obtenus pour une discrétisation spatiale plus grossière (figure 6.10) montre que le spectre est moins marqué par les fréquences d'excitation. Combiné à une légère augmentation des composantes hautes fréquences dans le spectre des fluctuations de vitesse, ceci a pour effet de renforcer considérablement le niveau relatif des fluctuations hautes



**Fig. 6.15:** Valeur absolue de la composante de vorticité dans la direction  $\mathbf{e}_2$   $|\omega_2|$  (a) dans le plan  $x_2 = 0$ . (b) dans le plan  $x_3 = \delta/8$ .

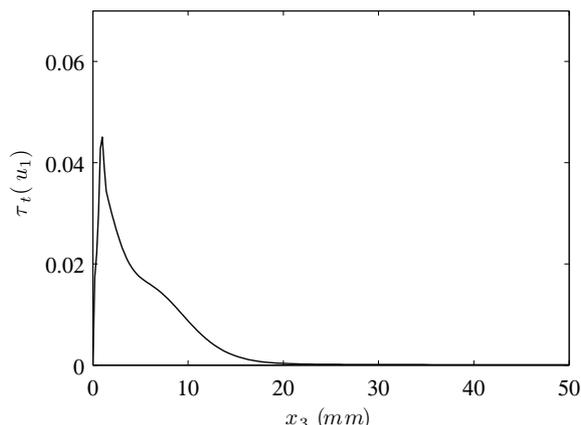
fréquences par rapport aux fluctuations issues de l'excitation.



**Fig. 6.16:** Module de la transformée de Fourier des fluctuations de vitesse longitudinale au point de coordonnées  $(25\delta, 0, \delta/8)$ .

La figure 6.17 présente le profil vertical du taux de fluctuations longitudinales à la sortie de la zone de développement. Le profil obtenu s'accorde qualitativement avec ceux obtenus expérimentalement. Quantitativement, les niveaux des fluctuations sont plus faibles que ceux obtenus expérimentalement, mais on observe un gain de 30% environ par rapport aux niveaux obtenus pour une discrétisation longitudinale plus longue.

En conclusion, un raffinement de la discrétisation longitudinale apporte une amélioration sensible dans l'implémentation de la couche limite turbulente. Cette amélioration provient de la prise en compte d'échelles de turbulence plus petites, qui permet une meilleure estimation des niveaux des fluctuations de vitesse longitudinale dans la couche limite. Elle provient également du filtrage sélectif qui n'amortit pas les mêmes perturbations, comparativement à la simulation avec une discrétisation longitudinale plus grande. Cependant, la déstabilisation de la couche limite est plus lente sur le maillage raffiné, et requiert donc une zone de développement plus longue. À longueur de zone de développement égale, le champ de vorticité est en effet beaucoup moins décorrélé sur le maillage raffiné que dans le cas du maillage plus grossier.



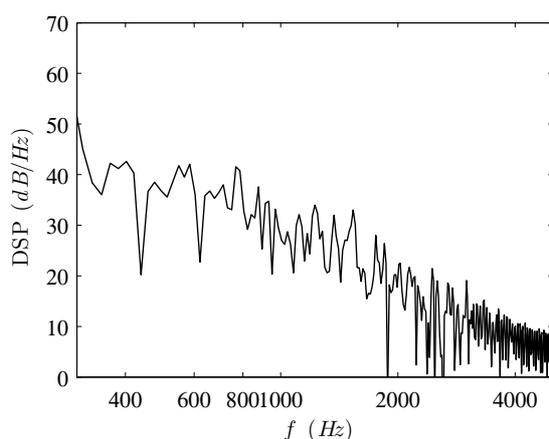
**Fig. 6.17:** Profil vertical du taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  à la sortie de la zone de développement ( $x_1 = 25 \delta$ ), en fonction de  $x_3$ .

La cas test suivant propose une étude sur un maillage présentant une discrétisation longitudinale non-constante. C'est en général ce que l'on a en pratique, où le maillage est relativement grossier près des frontières du domaine de calcul, et beaucoup plus raffiné dans les zones d'intérêt, afin de capturer au mieux les effets aérodynamiques et acoustiques mis en jeu.

#### Cas test avec $\Delta x_1$ décroissant de 2 mm à 0.6 mm

On envisage dans cette partie le cas d'une discrétisation longitudinale décroissante. Le pas de discrétisation vaut 2 mm à l'entrée du domaine de calcul, et 0.6 mm à la sortie de la zone de développement. La zone d'excitation est centrée à la position  $x_1 = 4.5 \delta$ , et sa longueur de développement s'étend sur 410 points. La zone de décroissance de la discrétisation longitudinale s'étend de  $x_1 = 12 \delta$  à  $x_1 = 22 \delta$ , avec un facteur de compression géométrique fixé à 1.5%. La simulation, effectuée sur 280000 itérations, a nécessité 4500 heures sur le calculateur galilee.

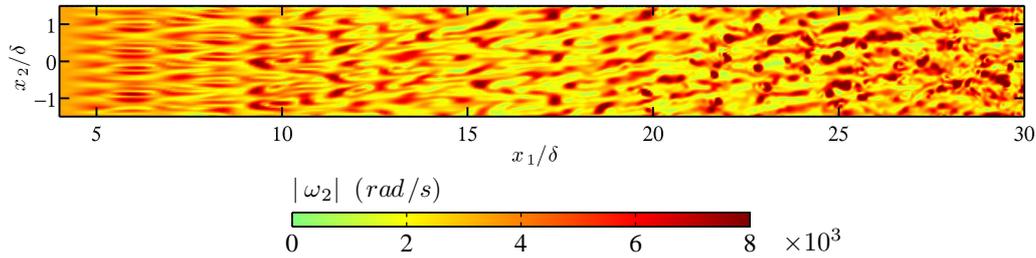
La figure 6.18 présente la densité spectrale de puissance acoustique obtenue à la sortie de la zone de développement, à  $x_3 = 6 \delta$  de la paroi. Le spectre acoustique n'est absolument



**Fig. 6.18:** Densité spectrale de puissance acoustique mesurée au point de coordonnées  $(30 \delta, 0, 6 \delta)$ .

pas marqué aux fréquences d'excitation des perturbations que l'on injecte au début de la zone de développement. Le niveau sonore ambiant reste aussi inférieur à 50 dB, ce qui est numériquement admissible en vue de l'utilisation de la méthode d'excitation pour la cavité cylindrique.

Le développement de la couche de cisaillement peut être visualisé à la figure 6.19, où l'on a représenté dans le plan  $x_3 = \delta/8$  la composante transversale de la vorticité. On remarque que

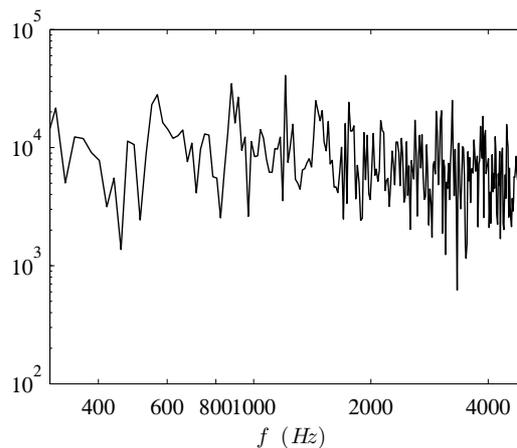


**Fig. 6.19:** Valeur absolue de la composante de vorticité dans la direction  $\mathbf{e}_2$   $|\omega_2|$  dans le plan  $x_3 = \delta/8$ .

l'amplification des perturbations est assez prononcée au début de la zone de développement, où le pas de discrétisation spatiale est le plus grand. La zone de décroissance de la discrétisation longitudinale, comprise entre  $x_1 = 12\delta$  et  $x_1 = 22\delta$ , semble avoir un effet de déstabilisation de la couche limite. On observe également l'apparition de fines structures tourbillonnaires dans la zone de développement où le pas de maillage est minimal ( $x_1 \geq 22\delta$ ). À la sortie de la zone de développement, le champ de vorticité n'est plus aussi organisé que dans les simulations à pas de maillage constant. Il met ainsi en évidence la présence de structures tourbillonnaires présentant une grande variété d'échelles.

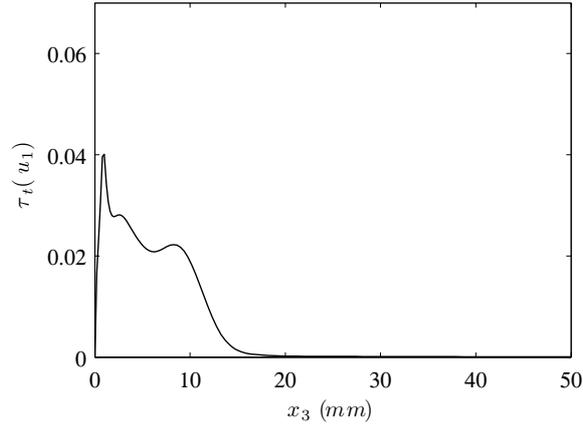
La zone de décroissance de la discrétisation longitudinale est caractérisée par la présence d'une dispersion engendrée par les méthodes numériques, développées pour une utilisation sur des maillages réguliers. Cette dispersion pourrait avoir un effet déstabilisateur sur la couche limite.

Les précédentes remarques concernant les échelles de turbulence présentes dans la couche limite sont confirmées par la figure 6.20, présentant le contenu fréquentiel des fluctuations de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de développement, à une altitude  $x_3 = \delta/8$  dans la couche limite. Une comparaison aux résultats obtenus pour une discrétisation longitudinale constante de  $\Delta x_1 = 0.6 \text{ mm}$  met en évidence, pour le cas de la discrétisation spatiale non-constante, un renforcement des composantes basses et hautes fréquences des fluctuations de vitesse dans le spectre des fluctuations de vitesse.



**Fig. 6.20:** Module de la transformée de Fourier des fluctuations de vitesse longitudinale au point de coordonnées  $(30\delta, 0, \delta/8)$ .

La figure 6.21 montre le profil vertical du taux de fluctuations longitudinales à la sortie de la zone de développement. Le profil présente un maximum de 4% très proche de la paroi ( $x_3 \simeq 2 \text{ mm}$ ), ce qui est qualitativement en accord avec les données expérimentales. On observe aussi que comparativement aux résultats issus des simulations à discrétisation longitudinale



**Fig. 6.21:** Profil vertical du taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  à la sortie de la zone de développement ( $x_1 = 30 \delta$ ), en fonction de  $x_3$ .

constante, le taux de fluctuations s'est assez nettement renforcé dans la zone externe de la couche limite ( $x_3 \in [5, 15]$  mm). Quantitativement, les niveaux de turbulence obtenus numériquement restent en-deçà des niveaux mesurés expérimentalement à l'amont de la cavité.

Ce cas test montre en conclusion l'importance du caractère non-constant de la discrétisation longitudinale sur le contenu spectral des perturbations en sortie de zone de développement. Un pas de discrétisation grand à l'entrée de la zone de développement permet une amplification rapide des perturbations déterministes que l'on injecte. Dans le cas simulé, on observe une nette déstabilisation de la couche limite dans la zone de maillage irrégulière. Le maillage plus raffiné, proche de la sortie de la zone de développement, permet alors à de plus petites structures turbulentes d'émerger. On dispose ainsi d'un spectre des fluctuations de vitesse plus riche en sortie, et donc d'une couche limite dont l'aspect aléatoire a été renforcé. Il serait intéressant d'étudier plus en détail l'influence de la partie irrégulière du maillage sur la couche limite, notamment de déterminer si l'effet déstabilisateur observé est systématique ou seulement présent sous certaines conditions, et d'isoler l'origine exacte de la déstabilisation.

### Cas test avec un terme source compact monopolaire

Ce cas test anticipe un peu sur des observations faites au chapitre suivant. Ce chapitre présente en effet les résultats des simulations numériques en présence de la cavité cylindrique. La figure 7.20(b) révèle que les des niveaux de fluctuations obtenus numériquement sont supérieurs à ceux mesurés expérimentalement dans la couche limite incidente. Pourtant, le maillage considéré présente les mêmes pas de discrétisation spatiale que le maillage irrégulier utilisé dans le cas test précédent, et le même facteur de compression dans la zone de développement de la couche limite. La présence de la cavité semble donc jouer un rôle sur l'amplitude des fluctuations présentes dans la couche limite amont. Parmi toutes les conséquences qu'entraîne la présence de la cavité dans l'écoulement (rayonnement acoustique, gradient de pression à son voisinage, etc.), on choisit d'étudier l'influence du rayonnement acoustique intense produit par la cavité sur la couche limite incidente. La nature du rayonnement acoustique de la cavité, très tonal et relativement peu directif (voir le chapitre 2), invite à le simuler à l'aide d'une source acoustiquement compacte et monopolaire pulsant à la fréquence  $\tilde{f} = 656$  Hz. La source monopolaire est implémentée en ajoutant le terme  $p_{\text{source}}(t)/(\gamma - 1)$  à l'équation de conservation de l'énergie totale  $\rho e_t$ . Ce terme source peut être explicité :

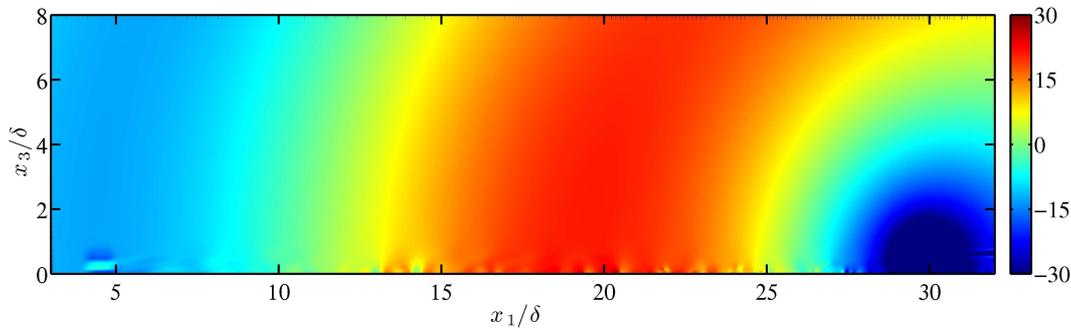
$$p_{\text{source}}(t) = p_s 2\pi \tilde{f} \sin(2\pi \tilde{f} t)$$

Il est spatialement fenêtré par une gaussienne afin d'éviter l'introduction de discontinuités dans l'équation d'énergie. La source acoustique est placée en sortie de zone de développement ( $x_1 = 30 \delta$ ), et légèrement au-dessus de la plaque plane ( $x_3 = 0.1 \delta$ ), afin d'éviter tout problème d'ordre numérique que l'on pourrait rencontrer si celle-ci était placée exactement à la paroi. On suppose que cette source est sphérique de rayon  $4\Delta x_1$ . En considérant son intensité acoustique sur la sphère de rayon  $4\Delta x_1$  et celle sur la demi-sphère supérieure de rayon  $r_0 > 4\Delta x_1$ , où l'on connaît l'amplitude  $p_a$  des fluctuations de pression, on peut écrire :

$$p_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0}{4\Delta x_1} p_a$$

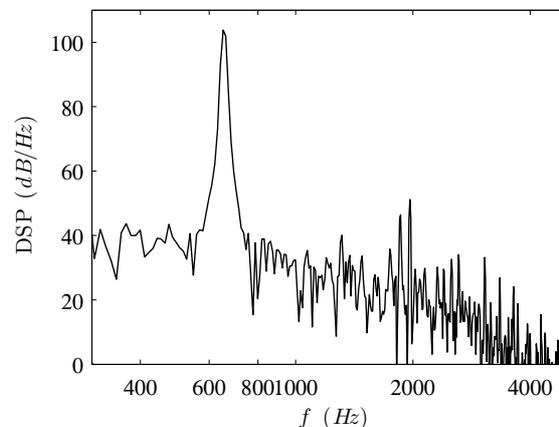
Les observations expérimentales sur la cavité de référence permettent d'estimer l'amplitude des fluctuations de pression à une distance  $r_0 = 50 \text{ mm}$  de son centre, à  $p_a \simeq 50 \text{ Pa}$ . Ceci permet de déterminer complètement l'amplitude des fluctuations de pression à la source  $p_s$ . La simulation est réalisée sur le calculateur *galilee*, et menée sur 400000 itérations.

La figure 6.22 permet d'avoir un aperçu du champ de pression fluctuant instantané dans le plan  $x_2 = 0$ . On peut notamment y apercevoir la source acoustique, aux environs du point



**Fig. 6.22:** Pression fluctuante instantanée (en  $Pa$ ), bornée entre  $\pm 30 \text{ Pa}$ , dans le plan  $x_2 = 0$ .

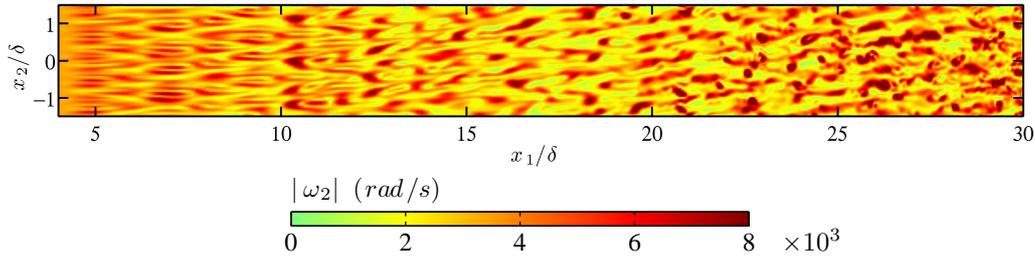
$(30 \delta, 0, 0.1 \delta)$ , le rayonnement acoustique monopolaire qu'elle engendre, ainsi que la couche limite implémentée, caractérisée par la zone d'excitation centrée sur la position  $x_1 = 4.5 \delta$ , et l'allée de surpressions et dépressions le long de la paroi. La densité spectrale de puissance acoustique en sortie de zone de développement, à une altitude de  $x_3 = 6 \delta$ , est évidemment largement dominée par le rayonnement acoustique tonal de la source à  $f = 656 \text{ Hz}$ , comme le montre la figure 6.23. Hormis ce pic très intense, le niveau sonore ambiant est faible aux



**Fig. 6.23:** Densité spectrale de puissance acoustique mesurée au point de coordonnées  $(30 \delta, 0, 6 \delta)$ .

autres fréquences, de l'ordre de 40 à 50  $dB$ .

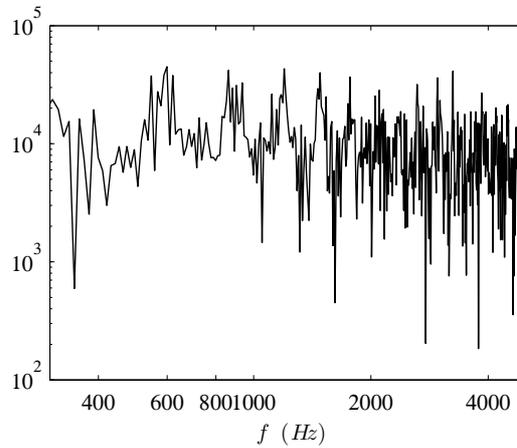
La figure 6.24 présente le champ de vorticité transversale dans le plan  $x_3 = \delta/8$ . La prise en



**Fig. 6.24:** Valeur absolue de la composante de vorticité dans la direction  $\mathbf{e}_2$   $|\omega_2|$  dans le plan  $x_3 = \delta/8$ .

compte d'interactions aéroacoustiques éventuelles entre la couche limite et la rayonnement de la source semble avoir peu d'effets sur le développement de la couche limite. En effet, le champ obtenu est relativement similaire à celui obtenu sur le même maillage sans la source acoustique monopolaire (figure 6.19), à savoir une zone de forte croissance où la discrétisation longitudinale est grande, une zone de destruction de la cohérence des perturbations, correspondant à la partie où le pas de discrétisation longitudinale diminue géométriquement, puis une zone avec un maillage assez raffiné pour supporter la présence de fines structures tourbillonnaires dans la couche limite. La figure 6.25, qui présente le contenu spectral des perturbations de vitesse longitudinale, en sortie de zone de développement à la position  $x_3 = \delta/8$ , confirme ces observations. Les perturbations de vitesse restent relativement marquées par les fréquences d'excitation, mais présentent des composantes basses et hautes fréquences assez intenses, dont les niveaux relatifs sont parfois supérieurs à 10% des niveaux obtenus aux fréquences d'excitation.

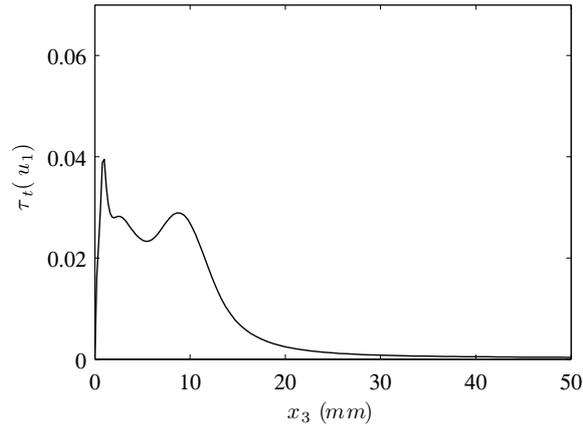
La figure 6.25 montre le profil vertical du taux de fluctuations longitudinales. Le profil



**Fig. 6.25:** Module de la transformée de Fourier des fluctuations de vitesse longitudinale au point de coordonnées  $(30\delta, 0, \delta/8)$ .

obtenu ressemble énormément à celui obtenu sans la source acoustique dans la couche limite (figure 6.21). La prise en compte du rayonnement engendré par la source acoustique a surtout un effet hors de la couche limite. En effet, le niveau des fluctuations y est non-nul, en raison du passage successif des fronts d'onde acoustiques générés par la source.

En conclusion, l'étude montre que les interactions entre le rayonnement acoustique de la cavité, modélisé par une source compacte monopolaire, et la couche limite incidente sont faibles, puisque leur prise en compte n'apporte pas de modifications notables par rapport à la simulation réalisée sans source acoustique.



**Fig. 6.26:** Profil vertical du taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  à la sortie de la zone de développement ( $x_1 = 30 \delta$ ), en fonction de  $x_3$ .

### 6.2.3.5 Conclusion

L'étude bibliographique a mis en évidence toute la complexité de l'implémentation numérique d'une couche limite turbulente pour le calcul direct. Parmi les différentes méthodes développées dans la littérature, l'approche retenue dans ce travail est une méthode de perturbation du profil turbulent moyen. Un modèle empirique est développé en s'inspirant de la méthode proposée par Sandham *et al.* dans [202]. Il consiste en une excitation de l'écoulement moyen dans une zone de type sous-couche interne, même si l'on dispose *a priori* que de très peu de points dans cette région, et une série d'excitations modales dans la zone externe de la couche limite. Ces perturbations sont déterministes, puisqu'aucune variable aléatoire n'est introduite dans le modèle. Une attention particulière est portée sur la maîtrise du bruit rayonné par le processus d'excitation. Le modèle permet de synthétiser des fluctuations dans la couche limite ayant une amplitude raisonnable en produisant un rayonnement acoustique parasite minime.

Le pas de discrétisation verticale, fixé à  $x_3^+ = 30$  pour le maillage que l'on se donne en vue des simulations LES de l'écoulement affleurant la cavité cylindrique, est trop grand pour envisager la production d'une couche limite turbulente réaliste. Sa réduction d'un ordre de grandeur permettrait de synthétiser une couche limite turbulente plus fidèle à la réalité, mais elle n'est pas concevable tant les coûts de calcul engendrés seraient prohibitifs. L'un des seuls degrés de liberté restant pour tenter d'améliorer l'état de la couche limite incidente produite est le pas de discrétisation longitudinale du maillage. Une étude numérique met en évidence que le modèle présenté est sensible aux pas de discrétisation pour les maillages considérés. Le pas de discrétisation longitudinale influence directement la distance de développement du profil turbulent moyen. L'amplification naturelle des perturbations injectées est plus forte sur un maillage grossier que sur un maillage plus fin. Un cas test mené sur un maillage présentant une contraction progressive semble indiquer que les perturbations injectées perdent en cohérence dans la zone où le pas de discrétisation n'est pas constant. Aussi, le spectre des fluctuations de vitesse en sortie de zone de développement est plus riche dans ce cas, comparativement aux résultats obtenus sur des maillages réguliers. En effet, les niveaux relatifs des composantes basses et hautes fréquences y sont nettement plus importants. Une analyse mathématique de l'influence de la discrétisation non-constante sur les performances des schémas numériques utilisés et sur le spectre de la turbulence à la sortie de la zone de développement aurait évidemment été intéressante mais elle dépasse le cadre de cette thèse.

Les interactions possibles entre la couche limite incidente et le rayonnement acoustique tonal de la cavité sont envisagées dans une dernière simulation, où une source compacte monopolaire simulant le rayonnement de la cavité est ajoutée en sortie de zone de dévelop-

pement. Le rayonnement acoustique de la cavité semble avoir peu d'influence sur la couche limite incidente. Le profil vertical du taux de fluctuations longitudinales obtenu dans cette dernière simulation est qualitativement satisfaisant, même si quantitativement, les niveaux de turbulence semblent en-deçà de ce que l'on obtient expérimentalement ou numériquement en présence de la cavité.

L'influence d'autres paramètres sur le développement de la couche limite turbulente serait à étudier. Il s'agit par exemple de l'influence du gradient de pression qu'engendre la cavité dans son voisinage et qui pourrait jouer un rôle important dans la déstabilisation de la couche limite incidente, ou de l'influence de la discrétisation spatiale non-constante verticalement, qui n'a pas été examinée en détail dans ce travail.





## Chapitre 7

# Calcul direct du bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité cylindrique

---

Ce chapitre a pour objectif de présenter deux simulations numériques d'un écoulement à Mach 0.2 ( $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ ) affleurant une cavité cylindrique, qui présente un diamètre et une hauteur de  $D = H = 100 \text{ mm}$ . Ces simulations sont réalisées par la résolution numérique directe des équations de la mécanique des fluides instationnaires sous forme compressible, qui contiennent à la fois les caractéristiques aérodynamiques et acoustiques de l'écoulement. Le domaine de calcul considéré est suffisamment grand pour inclure une partie du champ acoustique rayonné par la cavité. Les outils numériques mis en œuvre pour effectuer ces simulations sont décrits dans les chapitres 4 et 5.

Les deux simulations diffèrent simplement par la nature de l'écoulement incident : il est laminaire dans la première simulation, et turbulent dans la seconde. Cette dernière configuration est étudiée numériquement par Chicheportiche & Gloerfelt dans [43], mais aucune perturbation n'est appliquée dans leur simulation sur le profil turbulent moyen incident. Dans le calcul complémentaire présenté ici, le profil turbulent moyen incident est excité par l'ajout de perturbations, comme le détaille le chapitre 6. Les deux calculs présentés permettent d'évaluer l'influence de la couche limite incidente sur l'aérodynamique qui se développe et sur le rayonnement acoustique.

Les résultats de ces deux simulations sont également comparés aux mesures effectuées dans la configuration de référence présentées au chapitre 2. Une dernière partie est enfin consacrée à l'étude de quelques hypothèses du modèle semi-empirique d'Elder, permettant de prédire les fréquences du rayonnement acoustique tonal de la cavité.

L'originalité des calculs présentés réside dans l'approche multidomaine mise en œuvre pour discrétiser le domaine de calcul, et dans la prise en compte de fluctuations dans la couche limite incidente, pour le cas turbulent.

## 7.1 Construction du maillage composite

### 7.1.1 Pas de discrétisation des maillages élémentaires

La construction du maillage demande un soin particulier. En effet, le maillage doit être capable de capturer des phénomènes complexes très localisés, comme près des parois ou dans les zones de fort cisaillement. Il est donc fortement raffiné près de ces régions. Cependant, un fort raffinement du maillage ne peut être assuré sur tout le domaine de calcul, car cela entraînerait un coût de calcul considérable. Un nombre conséquent de points est économisé

en augmentant les pas de maillage dans les zones où l'écoulement est moins complexe, comme dans les régions où l'on a que de l'acoustique par exemple.

Le maillage n'est donc *a priori* pas régulier, ce qui peut être un problème pour une utilisation adéquate des schémas aux différences finies utilisés, optimisés dans l'espace des nombres d'onde pour un maillage régulier. On évite toute discontinuité ou tout changement brusque dans le maillage en basculant d'une zone raffinée vers une zone plus grossière du maillage par une progression géométrique du pas de discrétisation inférieure à 5%. On s'assure que les mailles les plus grandes restent néanmoins suffisamment petites pour que les méthodes numériques mis en œuvre ait une fréquence de coupure supérieure à la fréquence maximale de propagation.

On souhaite utiliser le même maillage composite pour les deux simulations. Le cas turbulent est le plus restrictif, puisqu'il demande une discrétisation près des parois la plus fine possible dans l'optique d'estimer convenablement les gradients de vitesse dans la couche limite. Dans toute la suite, on choisit des pas de discrétisations  $\Delta x_1 = 0.6 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_2 = 0.7 \text{ mm}$  et  $\Delta x_3 = 0.2 \text{ mm}$ , ce qui permet d'avoir un premier point de maillage en  $x_3^+ \simeq 30$  pour le cas turbulent, en estimant la vitesse de frottement  $u_\tau$  à partir du profil de Guarini *et al.* Afin d'assurer des mailles cylindriques approximativement carrées dans la zone de superposition avec le maillage cartésien supérieur, et présentant une même surface que les mailles cartésiennes, on choisit les pas de discrétisation  $\Delta r = 0.4 \text{ mm}$  et  $\Delta \theta = 1.3^\circ$ .

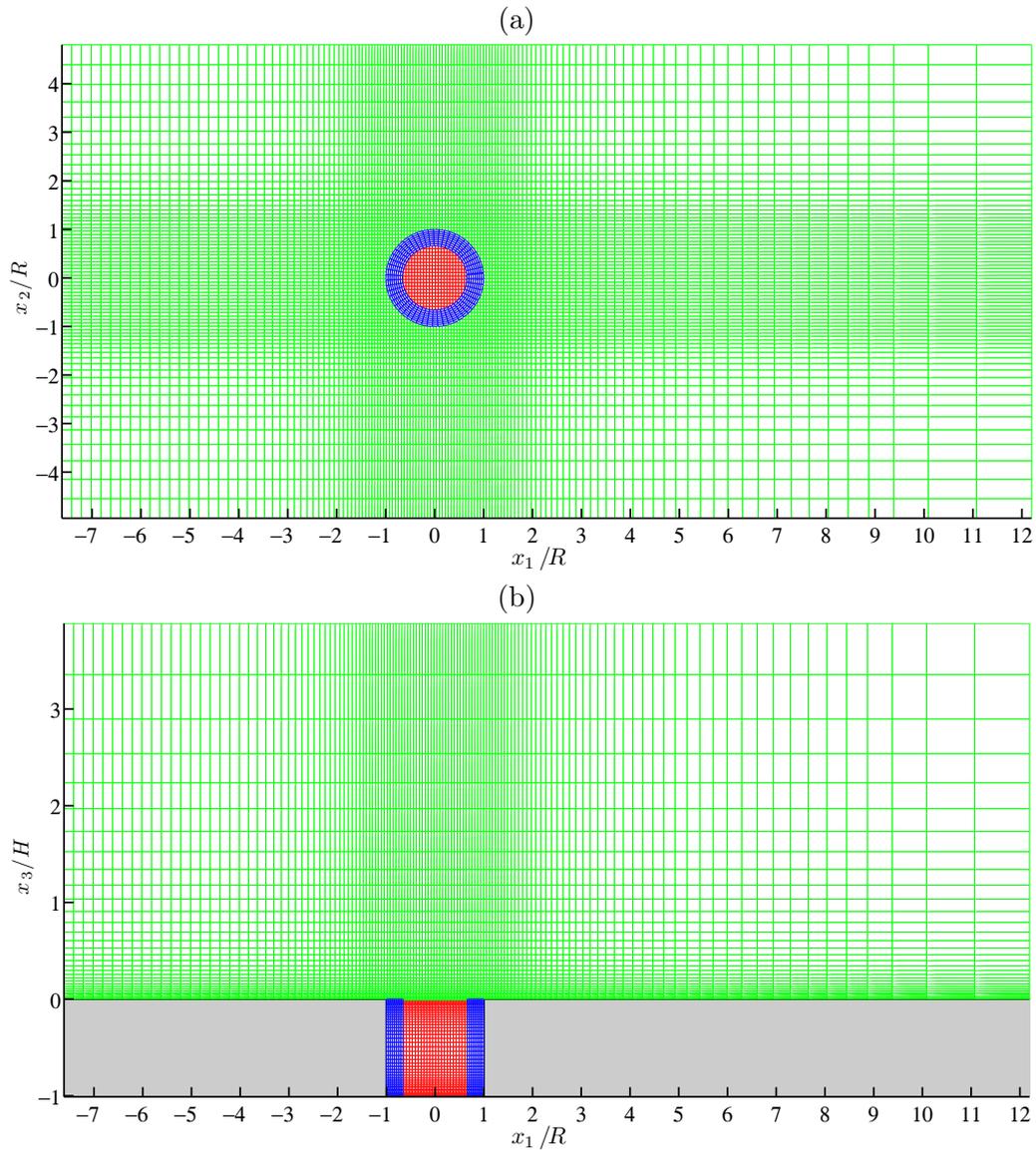
Les figures 7.1(a) et (b) permettent de visualiser le maillage composite utilisé pour ces simulations, respectivement dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . Le maillage cartésien supérieur comporte  $646 \times 354 \times 172$  points. Le maillage cylindrique périphérique est constitué de  $41 \times 286 \times 220$  points, et le maillage cartésien de cœur de  $153 \times 177 \times 220$  points. Le maillage composite est ainsi constitué d'environ 48 millions de points. Le maillage supérieur s'étend approximativement de  $-4D$  à  $6D$  dans la direction longitudinale  $\mathbf{e}_1$ , de  $-2.25D$  à  $2.25D$  dans la direction transverse  $\mathbf{e}_2$ , et de  $-H$  à  $4H$  dans la direction verticale à la plaque  $\mathbf{e}_3$ , afin d'inclure une petite portion du champ acoustique rayonné et d'éloigner les conditions aux frontières de rayonnement de Tam & Dong loin de la région d'intérêt. Finalement, le domaine de calcul a une longueur de 2 longueurs d'onde acoustique et une hauteur de 0.8 longueur d'onde acoustique, ce qui est peu par rapport aux calculs directs plus typiques comme pour les jets.

La figure 7.2 présente les pas de discrétisation locaux dans les trois directions de l'espace. Un raffinement de maillage est effectué à l'amont de la cavité au fur et à mesure que l'on se rapproche de la cavité. Un fort étirement de maillage est réalisé en sortie, correspondant à l'élaboration d'une zone éponge dissipant les tourbillons générés par la destabilisation de la couche de cisaillement dans la cavité et convectés vers l'aval. Les étirements de maillage, dans les directions  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ , loin de la zone d'intérêt, permettent d'accéder à un grand domaine de calcul tout en limitant le nombre de points à traiter. La fréquence de coupure du maillage composite ainsi construit est d'environ  $10 \text{ kHz}$ , correspondant à un nombre de Strouhal construit sur le diamètre de la cavité de  $St \simeq 14.3$ .

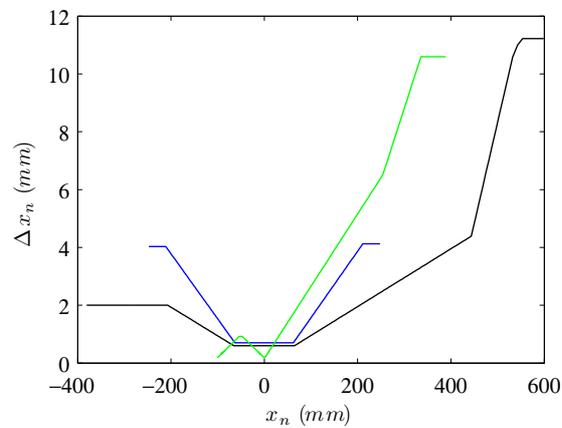
Enfin, la constante CFL est fixée à 0.85, fixant le pas de temps, fortement contraint par la discrétisation verticale, à  $\Delta t = 4.1 \times 10^{-7} \text{ s}$ .

### 7.1.2 Parallélisation et partitionnement des maillages élémentaires

Le maillage cartésien supérieur est scindé en  $6 \times 4 \times 2$  blocs en vue de la parallélisation du code de simulation, tandis que les maillages cylindrique et cartésien sont chacun scindés en 6 blocs dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . La parallélisation s'effectue donc sur un total de 60 blocs, chaque bloc étant constitué d'environ 1 million de points. Les tests effectués à la partie 5.7.5.3 montre que ce partitionnement permet d'accélérer 53 fois le calcul par rapport à une exécution séquentielle sur un unique processeur. Les calculs sont effectués pour le cas laminaire sur le supercalculateur *titane* du CCRT, et sur le supercalculateur *vargas* à l'IDRIS pour le cas turbulent. Les simulations sont menées sur 125 périodes acoustiques et ont nécessité chacune



**Fig. 7.1:** (a) Vue du maillage composite dans le plan  $(O, e_1, e_2)$ . (b) Vue du maillage composite dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ . En vert : maillage cartésien supérieur, en rouge : maillage cartésien de cœur, en bleu : maillage cylindrique périphérique. Seul un point sur cinq est représenté pour une meilleure lisibilité.



**Fig. 7.2:** Pas de discrétisation local dans la direction  $e_n$ . — : direction longitudinale ( $n = 1$ ). — : direction transverse ( $n = 2$ ). — : direction verticale ( $n = 3$ ).

environ 75000 heures de calcul, et 19 Go de mémoire RAM.

## 7.2 Conditions initiales

### 7.2.1 Initialisation de l'écoulement incident

Le chapitre 6 détaille l'implémentation numérique d'une couche limite incidente laminaire ou turbulente. La simulation est initialisée en imposant le profil de vitesse moyenne longitudinale désiré sur tout le maillage cartésien supérieur : une approximation d'ordre 6 de la solution de Blasius pour le cas laminaire, ou un profil de Guarini *et al.* avec fluctuations pour le cas turbulent. Dans le cas laminaire, la vitesse verticale  $\bar{u}_3$  est initialisée à l'aide de son approximation à l'ordre 6 de Blasius, et par une vitesse nulle dans le cas turbulent. On suppose enfin une vitesse initialement nulle dans la cavité  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ .

### 7.2.2 Initialisation des variables thermophysiques

La pression est initialisée à  $\bar{p} = p_\infty$  dans tout le domaine de calcul. La température moyenne  $\bar{T}$  est initialisée à l'aide de la relation de Crocco modifiée [206] :

$$\bar{T} = T_0 \left( 1 + \left( \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \right) \frac{T_\infty}{T_0} - 1 \right) \frac{\bar{u}_1}{u_\infty} - \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \frac{T_\infty}{T_0} \left( \frac{\bar{u}_1}{u_\infty} \right)^2 \right)$$

avec  $T_0$  la température totale de l'air, qui vaut :

$$T_0 = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2c_p}$$

avec  $c_p$  la chaleur massique spécifique à pression constante. Enfin, la masse volumique est initialisée à l'aide de la relation des gaz parfaits  $\bar{\rho} = M_{\text{air}} \bar{p} / R_g \bar{T}$ , avec  $M_{\text{air}}$  la masse molaire de l'air et  $R_g$  la constante des gaz parfaits. Le tableau 4.1 rappelle les valeurs des variables thermophysiques de référence pour l'air.

### 7.2.3 Régime transitoire

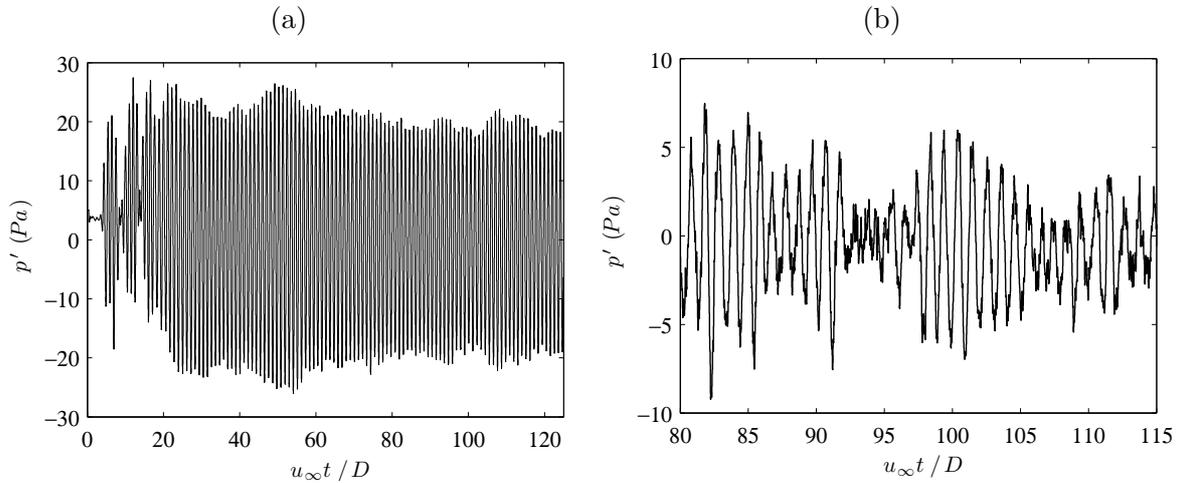
L'initialisation proposée ne satisfait pas les équations de la mécanique des fluides. Le début de la simulation est donc marquée par la présence d'un régime transitoire qui n'a pas de réelle signification physique. Il existe plusieurs initialisations envisageables pour nos simulations. On a choisi d'initialiser l'écoulement sur tout le domaine de calcul, mais à l'instar de Kestens dans [122], on aurait pu envisager d'initialiser l'écoulement uniquement sur la frontière amont du domaine de calcul. Le régime transitoire est alors très différent, mais Kestens observe que la solution finale est identique, indiquant ainsi qu'elle ne semble pas dépendre des conditions initiales, si celles-ci sont équivalentes physiquement [122]. Le choix d'une initialisation plutôt qu'une autre joue seulement sur la durée du régime transitoire. Une initialisation sur tout le domaine de calcul, et relativement proche de la solution finale, tend à minimiser sa durée.

## 7.3 Description de l'acoustique rayonnée

### 7.3.1 Signaux temporels de pression fluctuante

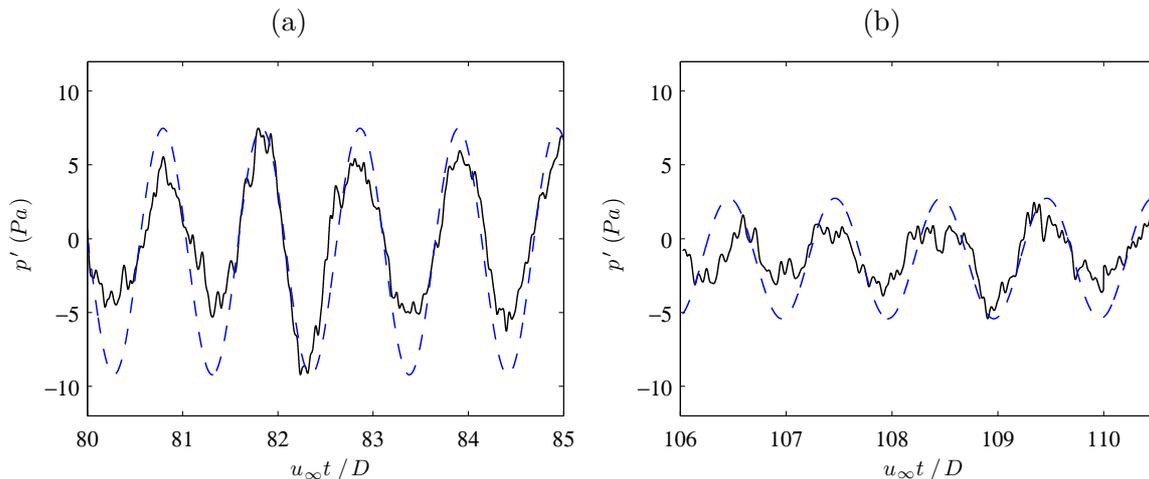
La figure 7.3(a) présente l'évolution temporelle de la pression fluctuante obtenue dans le cas laminaire à 200 mm au-dessus du centre de la cavité. Elle indique une durée du régime transitoire de l'ordre de 25 temps de traversée aérodynamique sur la distance  $D$ . Cette durée correspond approximativement au temps que met la recirculation pour s'établir dans la

cavité. Le signal de pression obtenu est fortement périodique, dont la période  $\tilde{T}$  est mesurée à  $u_\infty \tilde{T}/D \simeq 1.07$ . L'amplitude de ces oscillations, de l'ordre de  $20 Pa$ , présente une légère dépendance temporelle.



**Fig. 7.3:** Évolution temporelle de la pression fluctuante au point de coordonnées  $(0, 0, 0.2) m$  (a) dans le cas laminaire. (b) dans le cas turbulent.

La figure 7.3(b) montre un extrait du signal de pression fluctuante que l'on a obtenu pour le cas turbulent à  $200 mm$  au-dessus du centre de la cavité. On obtient un signal pseudo-périodique, moins harmonique que dans le cas laminaire, et assez marqué par un phénomène de type battement, que l'on observait aussi dans l'expérience. En effet, une succession de bouffées et de zones où les amplitudes des oscillations sont moindres, est clairement mise en évidence sur la figure. On note également que la fréquence d'oscillation des perturbations n'est pas la même dans une zone de bouffée par rapport à une zone plus calme. Pour illustrer ceci, on a représenté sur la figure 7.4(a) une vue détaillée du signal de pression fluctuante correspondant à une zone de bouffée. Ce signal fortement périodique est approximé au sens des



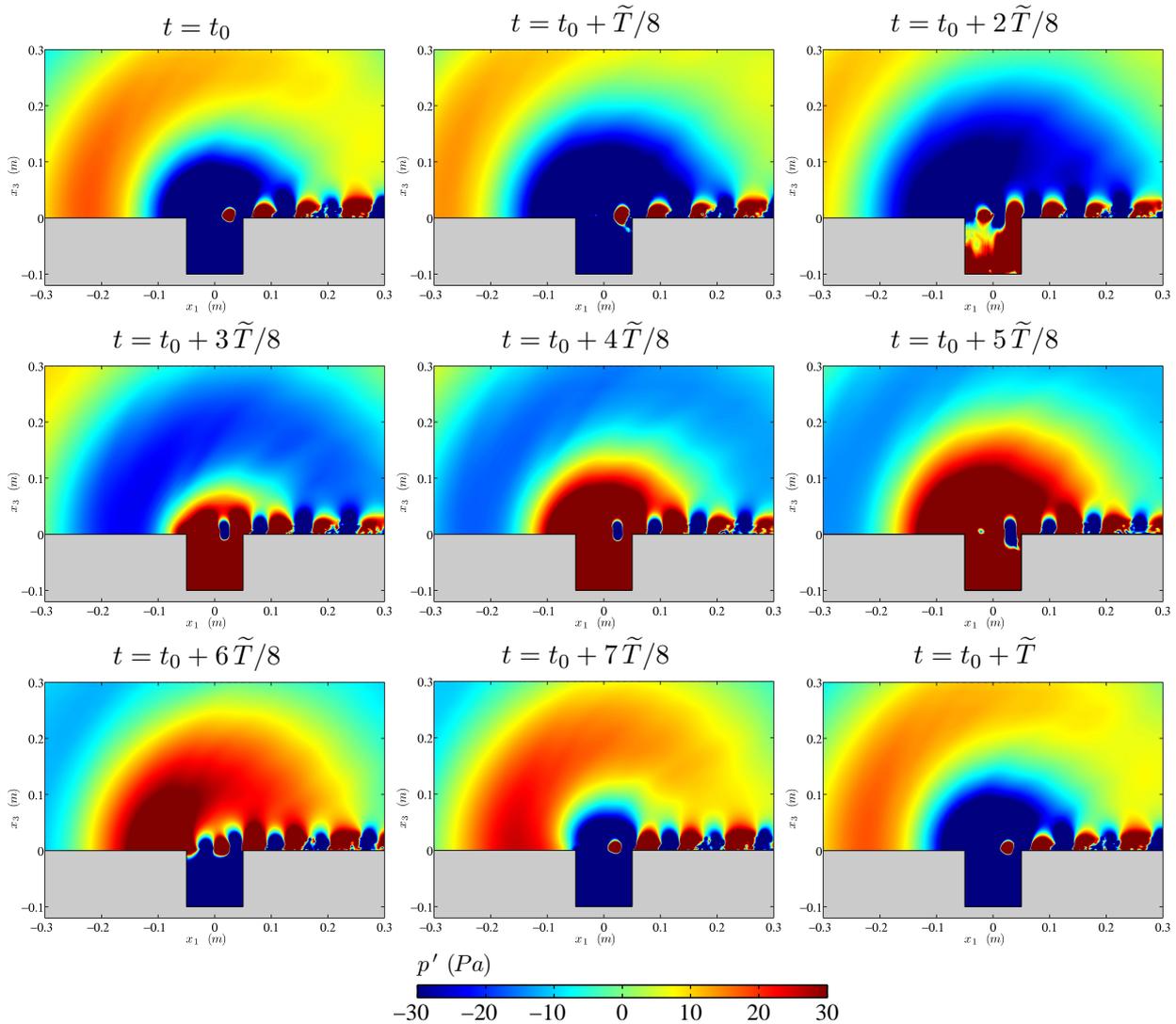
**Fig. 7.4:** Signal de pression fluctuante au point de coordonnées  $(0, 0, 0.2) m$  (—) et approximation sinusoïdale (---) au sens des moindres carrés pour le cas turbulent. (a) zone de bouffée. (b) zone de perturbations à faibles amplitudes.

moindres carrés par une fonction sinusoïdale. Cette fonction harmonique porteuse présente une fréquence de  $\tilde{f} = 661 Hz$ . La même démarche est menée pour une zone de faibles amplitudes des oscillations, illustrée par la figure 7.4(b), et l'on montre que la fréquence de la fonction harmonique porteuse vaut  $\tilde{f} = 695 Hz$ . On observe donc une dépendance temporelle de la

fréquence porteuse des oscillations, comme dans le cas des mesures.

### 7.3.2 Visualisation du champ de pression fluctuante

La figure 7.5 propose une visualisation du champ de pression fluctuante dans le plan de l'écoulement  $x_2 = 0$  pour un cycle d'oscillation de période  $\tilde{T}$  dans le cas laminaire. Le temps  $t_0$  correspond à l'obtention d'un maximum de pression fluctuante à 300 mm au-dessus du centre de la cavité. Le rayonnement acoustique observé est de nature fortement tonale et monopolaire. Il semble également fortement corrélé avec les variations de pression à l'intérieur de la cavité.

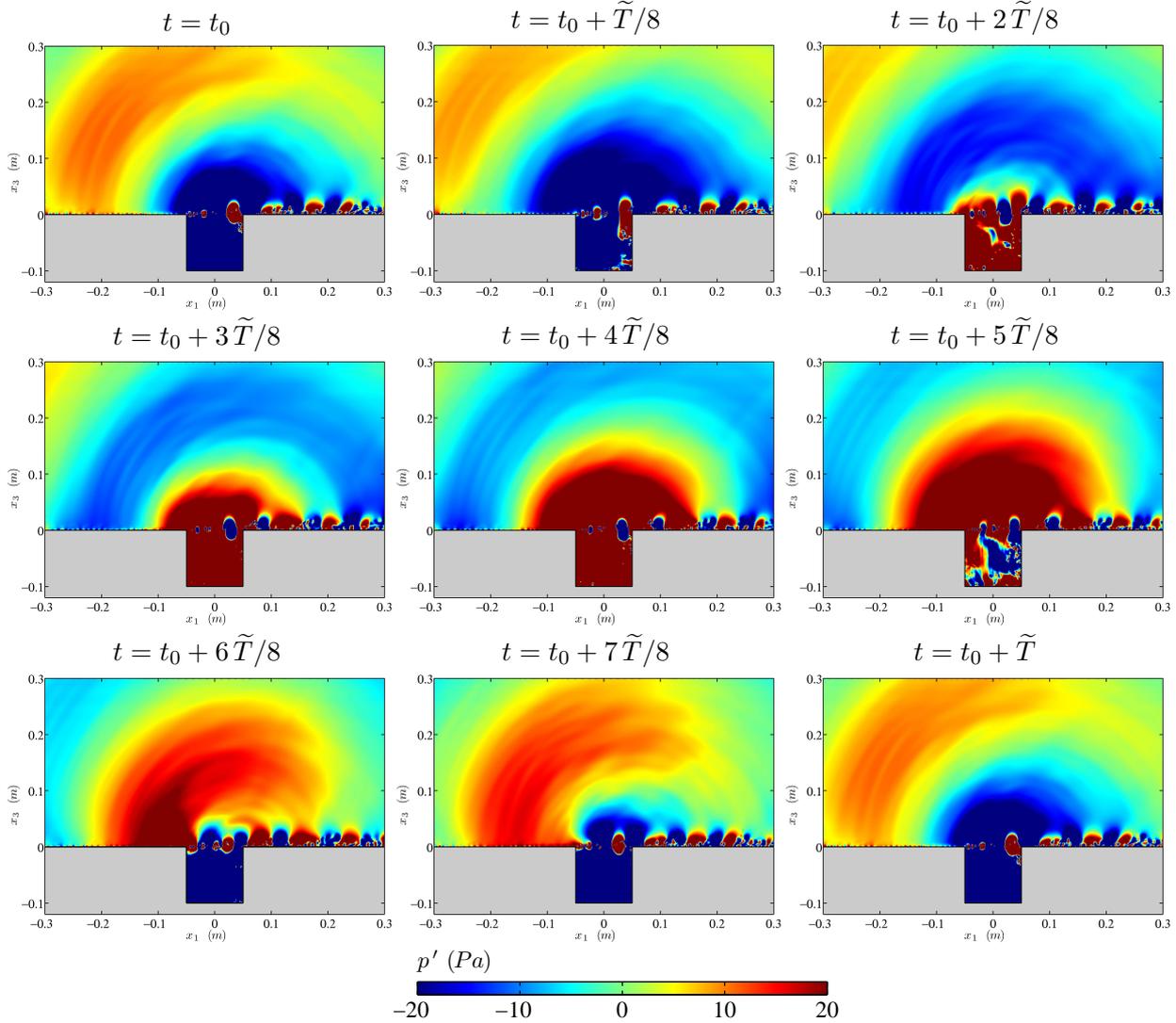


**Fig. 7.5:** Fluctuations de pression  $p'$  dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ , bornées entre  $\pm 30 Pa$  pendant un cycle d'oscillation. Cas laminaire.

Le champ de pression fluctuante permet également de donner des indications sur la présence de larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement et leur influence sur le rayonnement acoustique. Le concept de tourbillon est quelque chose de commun en aérodynamique, mais il lui manque une définition rigoureuse, fournissant *de facto* une condition suffisante en vue de la détection de vortex dans un écoulement. On se satisfait donc de conditions nécessaires, comme la présence d'un minimum local intense de pression. Les larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de cisaillement sont donc perceptibles d'après ce critère par les zones de forte dépression à l'ouverture de la cavité. Le chronogramme tend à montrer que l'établissement d'une dépression dans la cavité est synchronisée

avec l'impact d'un tourbillon au coin aval (voir les figures à  $t_0 + 5\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 6\tilde{T}/8$ ), tandis que l'élévation de la pression semble être assez corrélée avec la présence d'une zone de suppression à l'approche du bord aval (voir les figures à  $t_0 + \tilde{T}/8$  et  $t_0 + 2\tilde{T}/8$ ).

Un même chronogramme, représenté à la figure 7.6, est réalisé pour la simulation avec un écoulement incident turbulent, en repérant par  $t_0$  l'instant où un maximum de pression fluctuante est observé à 300 mm au-dessus du centre de la cavité. Les séquences présentées,



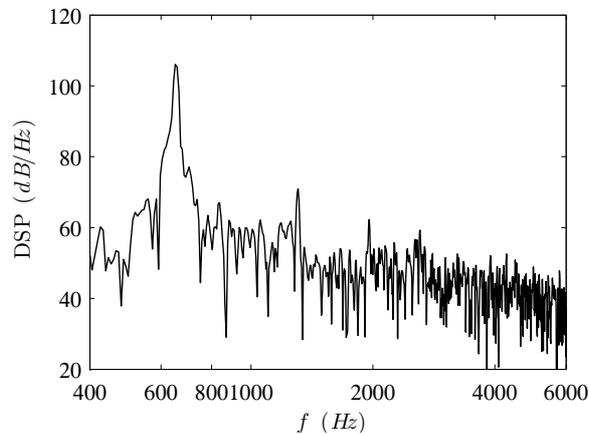
**Fig. 7.6:** Fluctuations de pression  $p'$  dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ , bornées entre  $\pm 20$  Pa pendant un cycle d'oscillation. Cas turbulent.

en laminaire et en turbulent, sont donc synchronisées sur le rayonnement acoustique de la cavité. Celui-ci est monopolaire et fortement tonal aussi dans le cas turbulent, avec cependant une présence renforcée de composantes hautes fréquences par rapport au cas laminaire. On note également que l'établissement d'une dépression à l'intérieur de la cavité est synchronisé avec l'impact au coin aval d'un tourbillon, caractérisé par la présence d'une forte dépression locale dans la couche de cisaillement (voir les figures à  $t_0 + 4\tilde{T}/8$ ,  $t_0 + 5\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 6\tilde{T}/8$ ). Cependant, le moment où le tourbillon semble impacter le bord aval de la cavité n'intervient pas au même instant dans le cycle d'oscillation acoustique que dans le cas laminaire. On observe, sur les images obtenues à  $t_0 + 4\tilde{T}/8$ , que la tâche de dépression dans la couche de cisaillement correspondant à la présence d'une large structure tourbillonnaire semble plutôt en retard dans le cas laminaire, par rapport au cas turbulent, où celle-ci s'apprête déjà à entrer en collision avec le coin aval de la cavité. Une autre manière d'appréhender ce déphasage et de

comparer les instants où la pression fluctuante bascule vers des valeurs négatives à l'intérieur de la cavité dans les deux simulations. Ce basculement a lieu à l'instant  $t = t_0 + 5\tilde{T}/8$  dans le cas turbulent, alors qu'il semble intervenir entre les moments  $t = t_0 + 5\tilde{T}/8$  et  $t = t_0 + 6\tilde{T}/8$  dans le cas laminaire. Ce déphasage entre l'impact d'une large structure tourbillonnaire et l'émission d'une onde acoustique pourrait également être observé expérimentalement sur les enregistrements synchronisés de la pression en champ lointain et du champ de vitesse dans la couche de cisaillement obtenu par PIV. Il est étudié plus en détail dans la suite.

### 7.3.3 Spectre acoustique

La figure 7.7 montre le spectre acoustique associé au cas laminaire, calculé au point de coordonnées  $(0, 0, 0.2)$  par l'algorithme de Welch avec un taux de recouvrement de 33% et un moyennage sur 2 séquences, à partir du temps  $u_\infty t/D = 30$ . Elle fait ressortir un pic principal à la fréquence  $\tilde{f} = 654 \text{ Hz}$ , atteignant un niveau de  $107 \text{ dB}$ . Le niveau sonore pour les hautes fréquences se situe entre  $40$  et  $50 \text{ dB}$ , avec l'émergence de la première harmonique de  $15 \text{ dB}$  à la fréquence de  $f = 2\tilde{f}$ , et de la seconde harmonique d'environ  $7 \text{ dB}$  à la fréquence  $f = 3\tilde{f}$ .

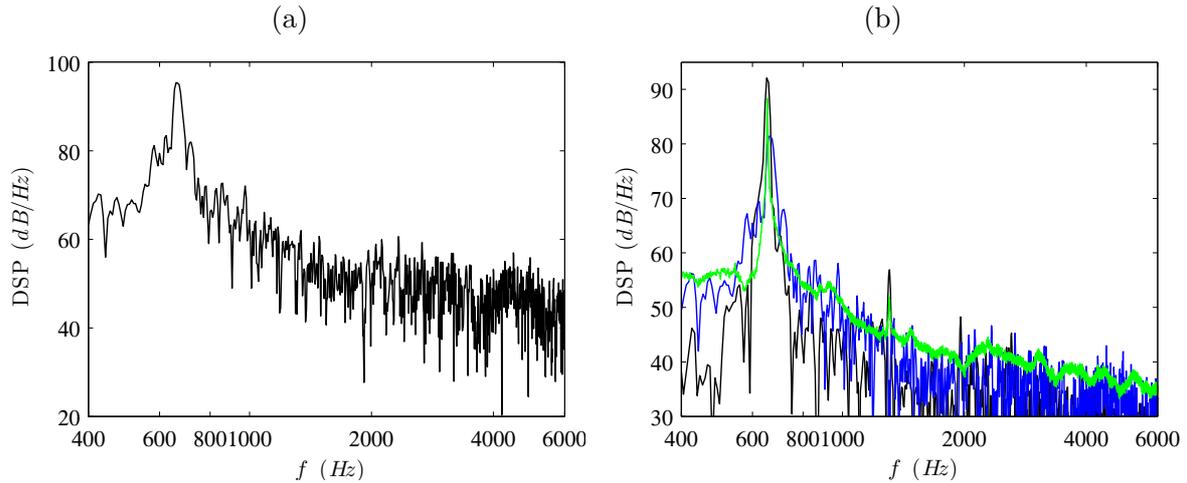


**Fig. 7.7:** Densité spectrale de puissance acoustique calculé au point de coordonnées  $(0, 0, 0.2)$ , dans le cas laminaire.

La figure 7.8(a) présente le spectre acoustique obtenu à  $200 \text{ mm}$  au-dessus du centre de la cavité dans le cas turbulent. Il présente un pic principal autour de  $\tilde{f} = 660 \text{ Hz}$ . Le niveau de ce pic est nettement plus faible que dans le cas laminaire, puisqu'il n'atteint que  $95.5 \text{ dB}$ . Cette diminution du niveau du pic principal, pour le cas turbulent, s'explique par le fait que la turbulence tend à détruire partiellement la cohérence entre les larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de mélange. Le niveau sonore pour les hautes fréquences est en revanche plus bruyant que dans le cas laminaire, et se situe entre  $50$  et  $60 \text{ dB}$ . Cette augmentation de  $10 \text{ dB}$  sur le large bande provient en effet du bruit généré par la turbulence.

Le capteur numérique de pression fluctuante, situé à  $200 \text{ mm}$  au-dessus de la cavité, est situé en champ acoustique proche. Par conséquent, en vue d'obtenir proprement le rayonnement acoustique en champ lointain, il conviendrait de capturer en champ proche les perturbations et de les réinjecter dans un code de propagation. Cependant, on observe que la source acoustique est relativement localisée, et que son rayonnement acoustique est presque sphérique dans le cas présent, ce qui invite à considérer une loi de décroissance sphérique en  $1/r$  caractéristique des sources monopolaires en champ lointain. Des tests de propagation indiquent, à la hauteur  $x_3 = 1 \text{ m}$ , un écart de moins de  $1 \text{ dB}$  sur le pic principal avec l'estimation issue de la loi de décroissance sphérique calculée à partir de la position  $x_3 = 200 \text{ mm}$ . L'écart est inférieur aux oscillations du spectre en hautes fréquences.

La figure 7.8(b) montre les spectres acoustiques estimés numériquement en appliquant une



**Fig. 7.8:** (a) Densité spectrale de puissance acoustique associée aux fluctuations de pression au point de coordonnées  $(0, 0, 0.2)$  dans le cas turbulent. (b) Densité spectrale de puissance acoustique à  $1\text{ m}$  au-dessus de la cavité. — : mesures. — : cas laminaire. — : cas turbulent. Dans les deux simulations, le spectre est obtenu au point  $(0, 0, 1)$  par extrapolation du spectre en  $(0, 0, 0.2)$  suivant une loi d'échelle en  $1/r$ .

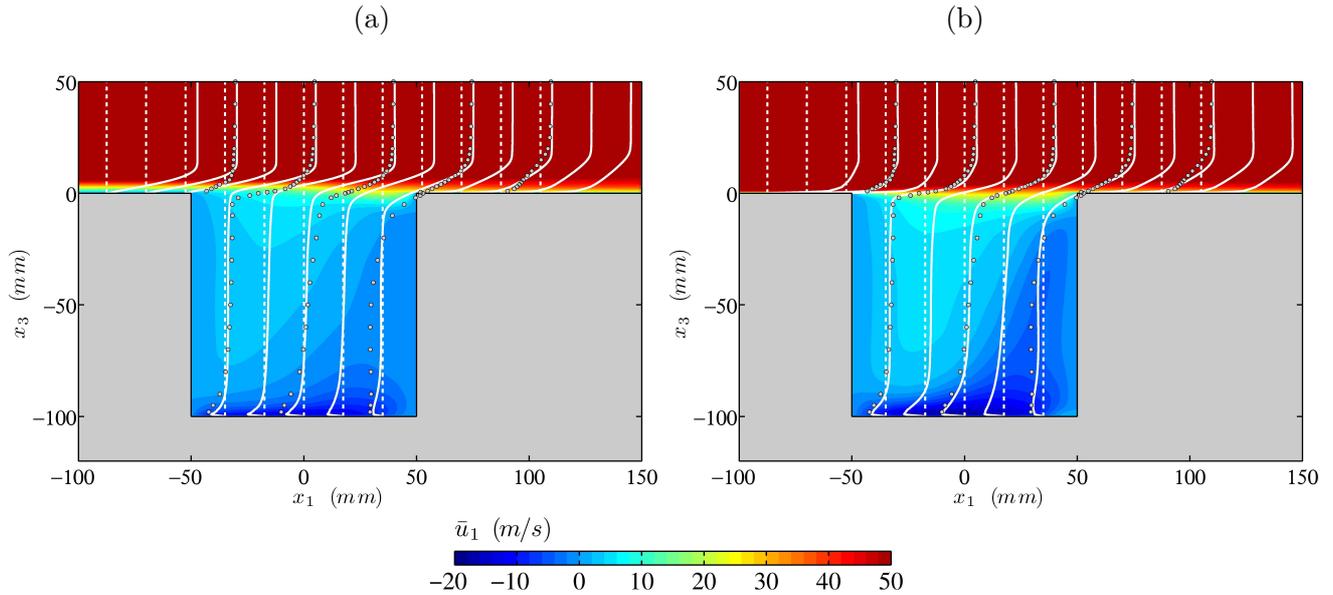
loi de décroissance sphérique calculée à partir de hauteur  $x_3 = 200\text{ mm}$ . Elle rappelle également le spectre acoustique obtenu expérimentalement à  $1\text{ m}$  au-dessus de la cavité. Une comparaison aux mesures révèle une surestimation de  $3\text{ dB}$  du pic principal dans le cas laminaire, et une sous-estimation d'environ  $5\text{ dB}$  pour le cas turbulent. Ces écarts sont raisonnables. En effet, les signaux de fluctuations temporelles de pression obtenus numériquement sont relativement courts, en raison des coûts de calcul prohibitifs qu'engendreraient des simulations numériques beaucoup plus longues. Ainsi, l'estimation du spectre acoustique numérique par l'algorithme de Welch ne peut se faire sur le même nombre de séquences utilisé expérimentalement, ce qui a un impact direct sur le niveau des pics. La simulation avec un écoulement incident turbulent permet enfin de retrouver les niveaux acoustiques observés expérimentalement sur le large bande, de même que les niveaux pour les basses fréquences. Dans le cas laminaire, l'absence de petites perturbations dans l'écoulement incident peut expliquer l'écart de  $10\text{ dB}$  observé sur le large bande. Les écarts sont enfin assez significatifs pour les basses fréquences.

## 7.4 Description de l'écoulement

### 7.4.1 Champ de vitesse

#### 7.4.1.1 Vitesse moyenne longitudinale

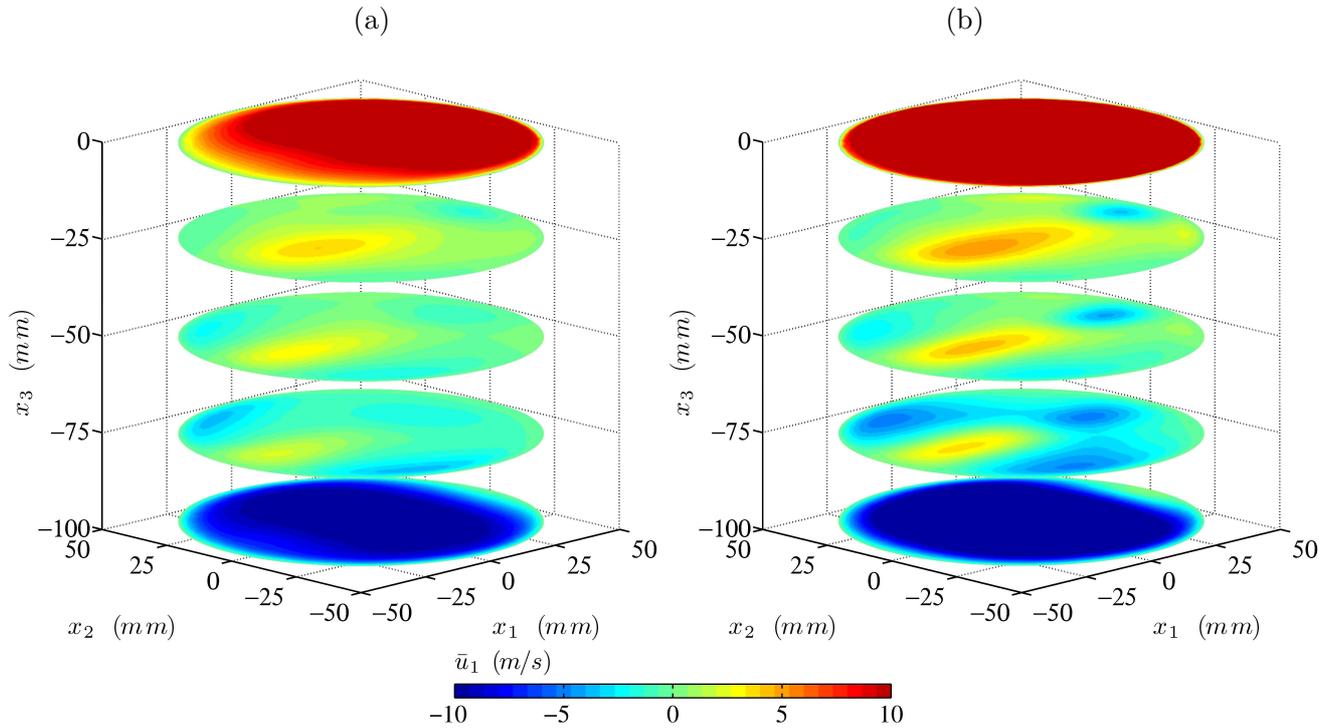
Une visualisation de l'écoulement moyen longitudinal est proposé aux figures 7.9(a) et (b), respectivement pour le cas laminaire et le cas turbulent. Ces deux figures mettent en évidence la présence d'une recirculation principale assez marquée proche de la paroi de fond de la cavité. Son intensité, de  $\bar{u}_1 = -13.5\text{ m/s}$  dans le cas laminaire, est plus élevée dans le cas turbulent, où elle atteint  $\bar{u}_1 = -17.5\text{ m/s}$ . On propose une comparaison de la composante longitudinale de la vitesse moyenne aux données expérimentales. Les profils de vitesse moyenne sont représentés en blanc aux positions  $x_1 = -35, 0$  et  $35\text{ mm}$ , et en points gris pour les profils expérimentaux correspondants. Les résultats numériques obtenus dans le cas turbulent se comparent très favorablement aux mesures, comme le montre la figure 7.9(b), notamment à l'intérieur de la cavité et proche de la paroi de fond, ainsi que dans la couche de cisaillement, pour laquelle l'épaississement semble assez bien reproduit. La recirculation étant moins marquée dans le cas laminaire, des écarts significatifs sont observés dans ce cas avec les données expérimentales à



**Fig. 7.9:** Champ de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  dans le plan  $x_2 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ , et borné entre  $-20$  et  $50 \text{ m/s}$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent. Des profils sont représentés en blanc aux positions  $x_1 = -35$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 35 \text{ mm}$ , et comparés aux données expérimentales obtenues par LDA, représentées par le symbole  $\circ$ . On a également représenté le profil incident et le profil à l’aval de la cavité.

l’intérieur de la cavité. L’épaississement de la couche de cisaillement paraît enfin très différent, en raison notamment de gradients de vitesse beaucoup plus faibles que dans le cas turbulent.

Les figures 7.10(a) et (b) proposent des cartographies du champ moyen de vitesse longitudinale dans la cavité aux plans de coupe  $x_3 = 0, -25, -50, -75$  et  $-98 \text{ mm}$ , respectivement pour les cas laminaire et turbulent. Elles montrent que l’écoulement longitudinal est symé-

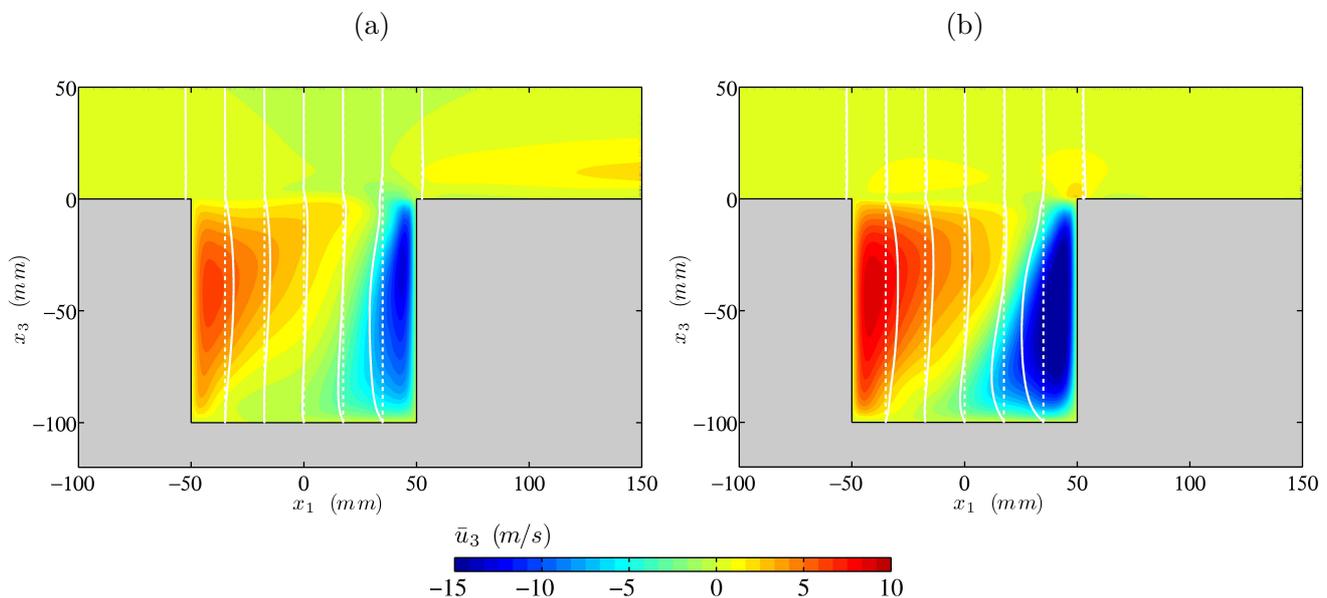


**Fig. 7.10:** Champ de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  dans les plans de coupe  $x_3 = 0, x_3 = -25, x_3 = -50, x_3 = -75$  et  $x_3 = -98 \text{ mm}$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

trique par rapport au plan  $x_2 = 0$ , aussi bien pour le cas laminaire que pour le cas turbulent. Les patrons de recirculation sont relativement identiques entre ces deux cas. Seules changent les amplitudes, qui sont plus grandes dans le cas turbulent que pour le cas laminaire. Ces figures confirment également que la recirculation s'effectue principalement près de la paroi de fond de la cavité, comme le montre la cartographie dans le plan de coupe  $x_3 = -98 \text{ mm}$ . Elles indiquent également des zones de recirculation moins intenses pour des profondeurs comprises entre la mi-cavité et la paroi de fond (demi-cavité inférieure), notamment dans le voisinage du bord aval, et proche du bord amont pour les secteurs angulaires  $\beta \in \pm[90^\circ, 150^\circ]$ , avec une recirculation longitudinale de l'ordre de  $-2 \text{ m/s}$  dans le cas laminaire, et de  $-5 \text{ m/s}$  pour le cas turbulent. Le coin amont est enfin caractérisé par une zone relativement restainte dans la dimension transverse où le fluide va longitudinalement dans le sens de l'écoulement principal.

#### 7.4.1.2 Vitesse moyenne verticale

L'écoulement moyen vertical est représenté à la figure 7.11(a) pour le cas laminaire, et 7.11(b) pour le cas turbulent. Dans les deux cas, l'écoulement est fortement entraîné vers



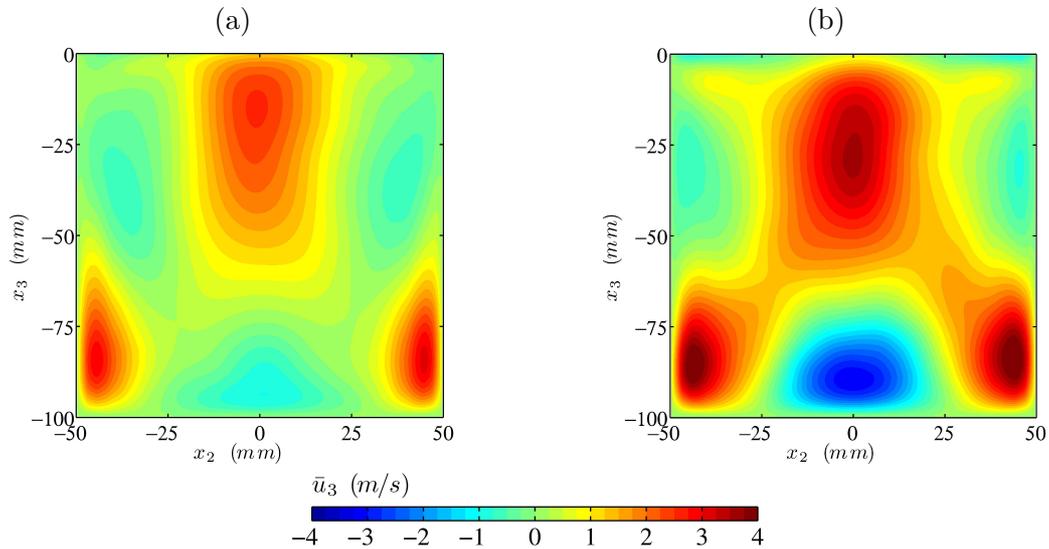
**Fig. 7.11:** Champ de vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$  dans le plan  $x_2 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ , et borné entre  $-15$  et  $10 \text{ m/s}$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent. Des profils sont représentés en blanc aux positions  $x_1 = -55$ ,  $x_1 = -35$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = 35 \text{ mm}$  et  $x_1 = 55 \text{ mm}$ .

le fond de la cavité le long de sa paroi aval, avant d'amorcer la recirculation principale. La vitesse verticale d'entrée dans la cavité est intense : elle atteint  $-13.5 \text{ m/s}$  dans le cas laminaire, et  $-17.5 \text{ m/s}$  dans le cas turbulent, ce qui correspond précisément aux vitesses moyennes longitudinales maximales de recirculation dans ce même plan. Une vaste zone, qui s'étend du bord amont jusqu'au deux tiers de la cavité longitudinalement, est le lieu d'une remontée lente du fluide vers l'ouverture de la cavité, de l'ordre de  $2$  à  $5 \text{ m/s}$ . La remontée est un peu plus prononcée dans le voisinage du bord amont, où la vitesse verticale atteint  $6.5 \text{ m/s}$  dans le cas laminaire, et  $10 \text{ m/s}$  dans le cas turbulent. La recirculation principale, mise en évidence par ces cartographies et celles des champs de vitesse moyenne longitudinale dans le plan  $x_2 = 0$ , est finalement assez ressemblante à ce que l'on peut observer plus classiquement sur des cavités rectangulaires, comme le montre par exemple les visualisations de Faure *et al.* effectuées dans le plan  $x_2 = 0$  sur une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $L/D = 1$  à faible Reynolds [80].

On a enfin représenté en blanc sur les figures 7.11(a) et (b) des profils de vitesse moyenne verticale à différentes positions longitudinales. On se propose dans la suite de visualiser le

champ de vitesse moyenne verticale dans le plan  $x_1 = 0$ .

On présente une cartographie du champ de vitesse moyenne verticale dans le plan transverse  $x_1 = 0$  aux figures 7.12(a) et (b), respectivement dans les cas laminaire et turbulent. La trace dans ce plan du champ de vitesse moyenne verticale est relativement symétrique et



**Fig. 7.12:** Champ de vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$  dans le plan  $x_1 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70$  m/s. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

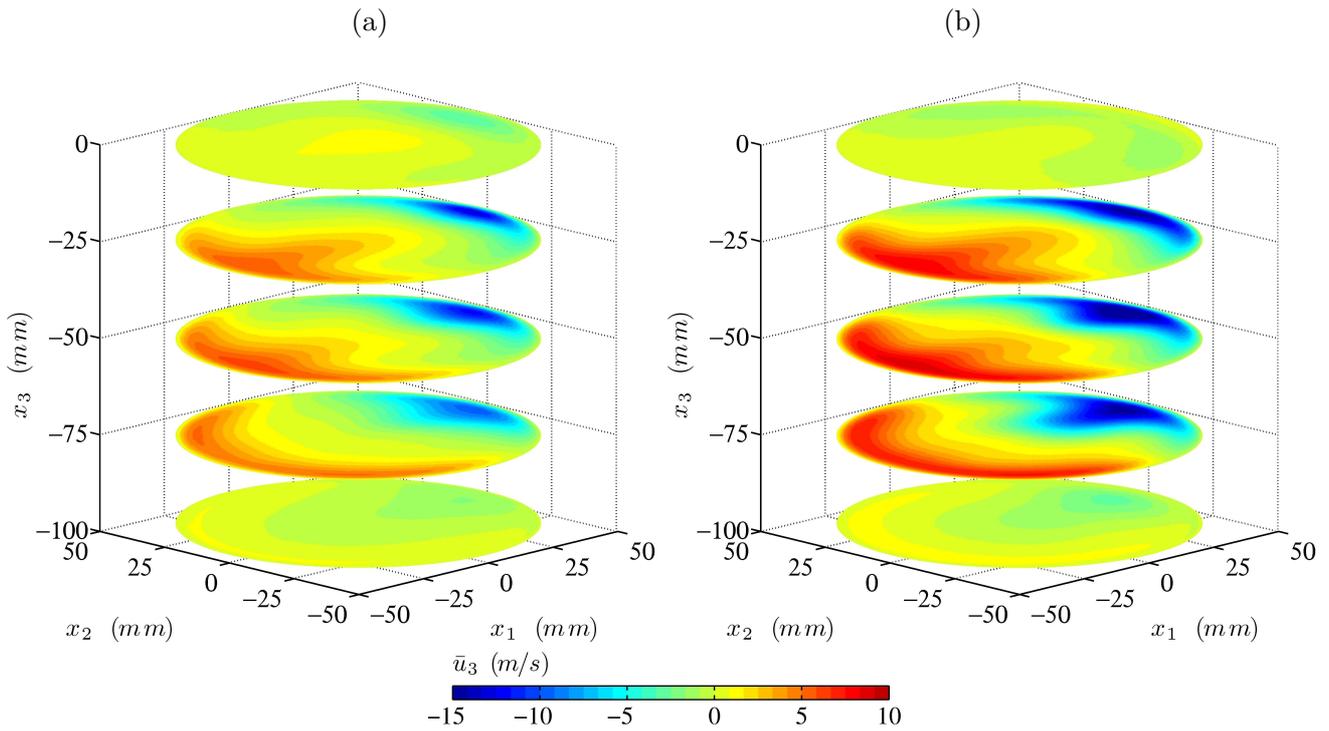
sensiblement identique entre ces deux cas. La principale différence réside en fait dans l'amplitude des variations de vitesse, qui sont plus grandes dans le cas turbulent. Ces deux figures révèlent des cisaillements verticaux relativement nets, et localisés près des axes  $x_2 = \pm 25$  mm au voisinage des profondeurs  $x_3 = -25$  mm et  $x_3 = -85$  mm. Enfin, on remarque que la remontée lente du fluide dans ce plan se fait préférentiellement près de la paroi latérale de la cavité pour la demi-cavité inférieure, et au centre pour la demi-cavité supérieure.

Les mouvements verticaux moyens du fluide dans la cavité peuvent être visualisés en détail aux figures 7.13(a) et (b). Ces figures présentent des cartographies du champ de vitesse moyenne verticale à profondeur constante, pour différentes profondeurs dans la cavité. Les cartographies sont presque symétriques. La zone d'entrée de fluide dans la cavité, correspondant à la région où la vitesse moyenne verticale est négative, est fine et nettement localisée au voisinage du coin aval, à l'ouverture de la cavité. Cette région tend ensuite à s'élargir et à gagner l'intérieur de la cavité au fur et à mesure que le fluide est convecté vers le fond de la cavité. La remontée du fluide, depuis le fond de la cavité, se fait uniquement proche de la paroi amont, pour la demi-cavité inférieure. Une remontée plus lente s'établit au cœur de la cavité pour la demi-cavité supérieure. Les maxima de plongée et de remontée du fluide dans la cavité sont atteints sur l'axe de symétrie  $x_2 = 0$ .

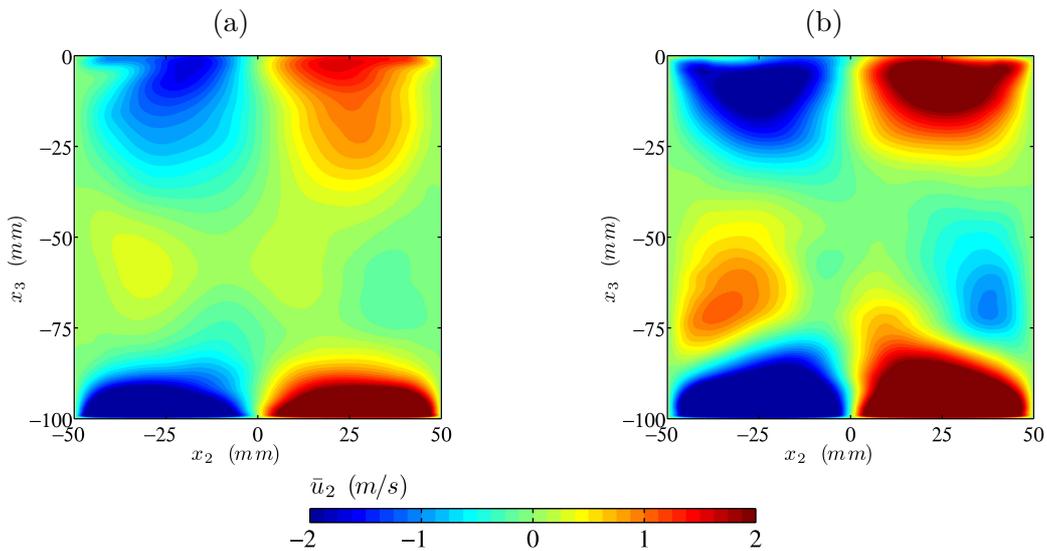
#### 7.4.1.3 Vitesse moyenne transverse

La composante de vitesse moyenne transverse est représentée dans le plan  $x_1 = 0$  respectivement aux figures 7.14(a) et (b) pour les cas laminaire et turbulent. Hormis à l'ouverture et au fond de la cavité, les variations de vitesse moyenne transverse sont de faibles amplitudes. La trace du champ de vitesse transverse dans ce plan est faiblement asymétrique, aussi bien dans le cas laminaire que pour le cas turbulent, essentiellement dans les régions où les amplitudes des variations de vitesse sont petites. Ces figures mettent en évidence la présence d'un cisaillement transverse proche de la paroi ( $x_2 \in \pm[30, 50]$  mm) aux profondeurs  $x_3 = -80$  et  $x_3 = -35$  mm. Ce cisaillement est plus intense dans le cas turbulent que dans le cas laminaire.

Les figures 7.15(a) et (b) permettent de visualiser l'écoulement transverse à l'intérieur de la cavité cylindrique, dans les cas laminaire et turbulent. Son amplitude est élevée surtout à

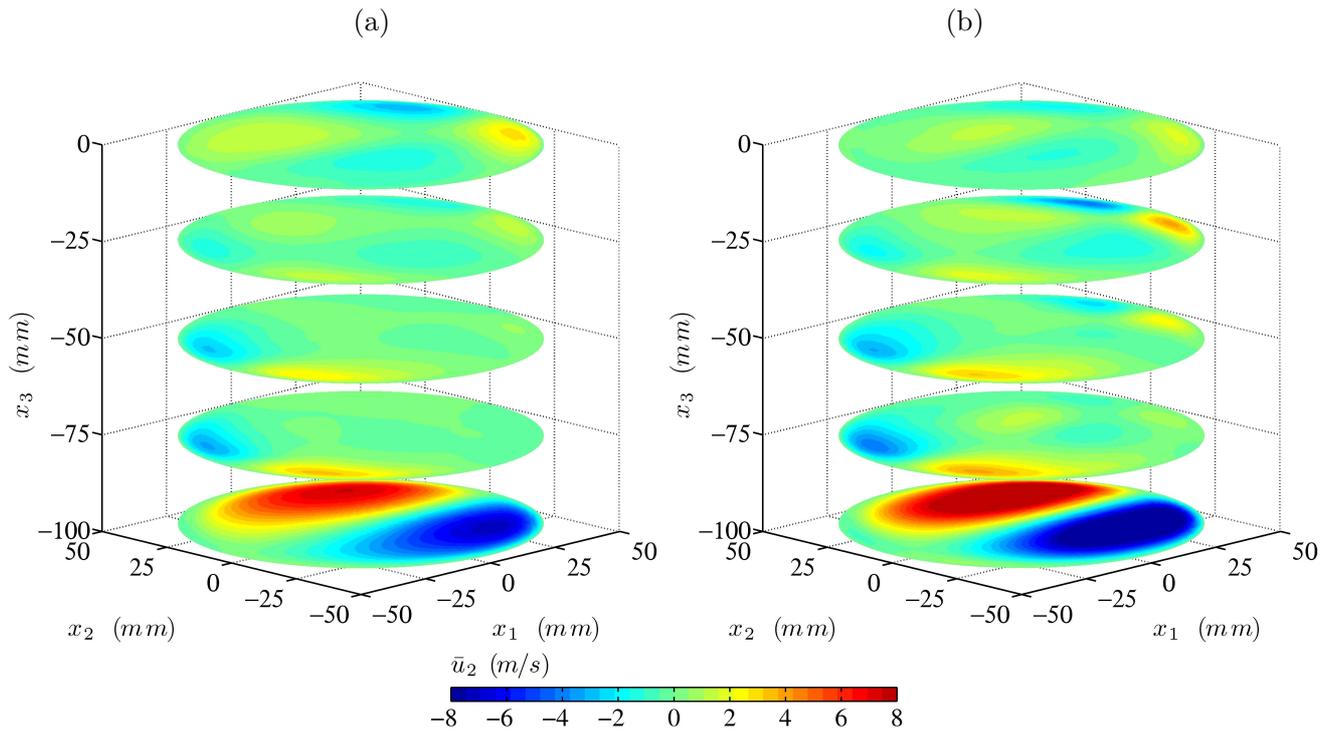


**Fig. 7.13:** Champ de vitesse moyenne verticale  $\bar{u}_3$  dans les plans de coupe  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = -25$ ,  $x_3 = -50$ ,  $x_3 = -75$  et  $x_3 = -98$  mm. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.



**Fig. 7.14:** Champ de vitesse moyenne transverse  $\bar{u}_2$  dans le plan  $x_1 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70$  m/s. (a) cas laminaire. (b) cas turbulent.

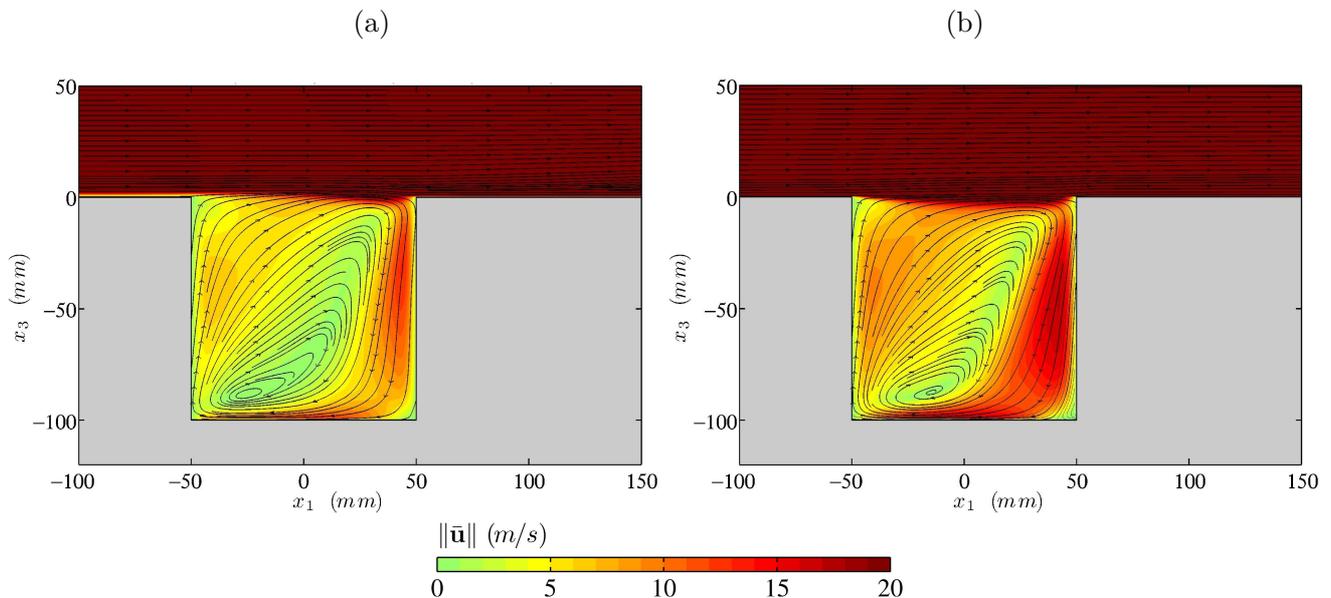
proximité du coin entre la paroi de fond et la paroi latérale aval, qui correspond à la région où le fluide plongeant dans la cavité rencontre l'obstacle que constitue le fond, modifiant ainsi l'orientation de son écoulement. La zone de remontée, qui est la plus intense au voisinage de la paroi latérale amont de la cavité, est également assez nettement perceptible. Les plans de coupe aux profondeurs  $x_3 = 0$  et  $x_3 = -25$  mm renseignent enfin sur la manière dont le fluide pénètre et sort de la cavité transversalement. L'entrée du fluide est relativement intense et très localisée proche du bord aval sur le secteur angulaire  $\beta \in [-55^\circ, 55^\circ]$ , tandis que la sortie transversale du fluide, plus lente, se fait essentiellement au niveau de la première moitié longitudinale de la cavité.



**Fig. 7.15:** Champ de vitesse moyenne transverse  $\bar{u}_2$  dans les plans de coupe  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = -25$ ,  $x_3 = -50$ ,  $x_3 = -75$  et  $x_3 = -98$  mm. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

#### 7.4.1.4 Vecteur vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$

Cette partie propose une analyse vectorielle du champ de vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$ . Elle permet une synthèse de différents résultats obtenus précédemment sur chacune des composantes de vitesse moyenne.

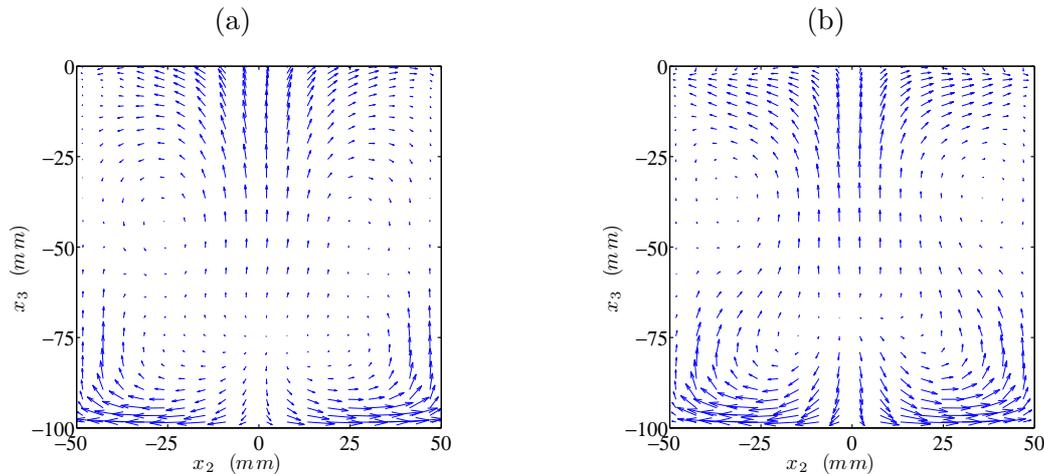


**Fig. 7.16:** Norme du champ de vitesse moyenne  $\|\bar{\mathbf{u}}\|$  dans le plan  $x_2 = 0$ . Des lignes de courant de l'écoulement au-dessus et dans la cavité sont représentées en noir. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

La recirculation principale peut être mise en évidence en traçant des lignes de courant dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$ , représentées aux figures 7.16(a) et (b) dans les cas laminaire et turbulent. Les flèches superposées aux lignes de courant permettent de représenter leur

sens de parcours. Les figures montrent la présence d'un centre moyen de recirculation. Il se situe à  $87 \text{ mm}$  de profondeur aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. Sa position longitudinale est sensiblement différente selon les cas : dans le cas laminaire, il est situé à  $x_1 = -24 \text{ mm}$ , tandis qu'il est un peu plus proche du centre dans le cas turbulent, à  $x_1 = -14 \text{ mm}$ . Dans les deux cas, sa position s'avère extrêmement sensible à la précision du calcul du champ de vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$ . En effet, il se situe dans une vaste zone de la cavité où la norme du champ de vitesse moyenne est très petite, comme le montre les figures 7.16(a) et (b) où l'on a représenté une cartographie de la norme de la vitesse moyenne  $\|\bar{\mathbf{u}}\|$ . Ainsi, une faible erreur sur l'estimation de l'une des composantes moyennes de vitesse peut engendrer un écart relativement significatif sur la position du centre moyen de recirculation.

Un tracé du vecteur vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  dans le plan transverse  $x_1 = 0$  est présenté aux figures 7.17(a) et (b). Il met en évidence des enroulements complets de l'écoulement du fluide autour

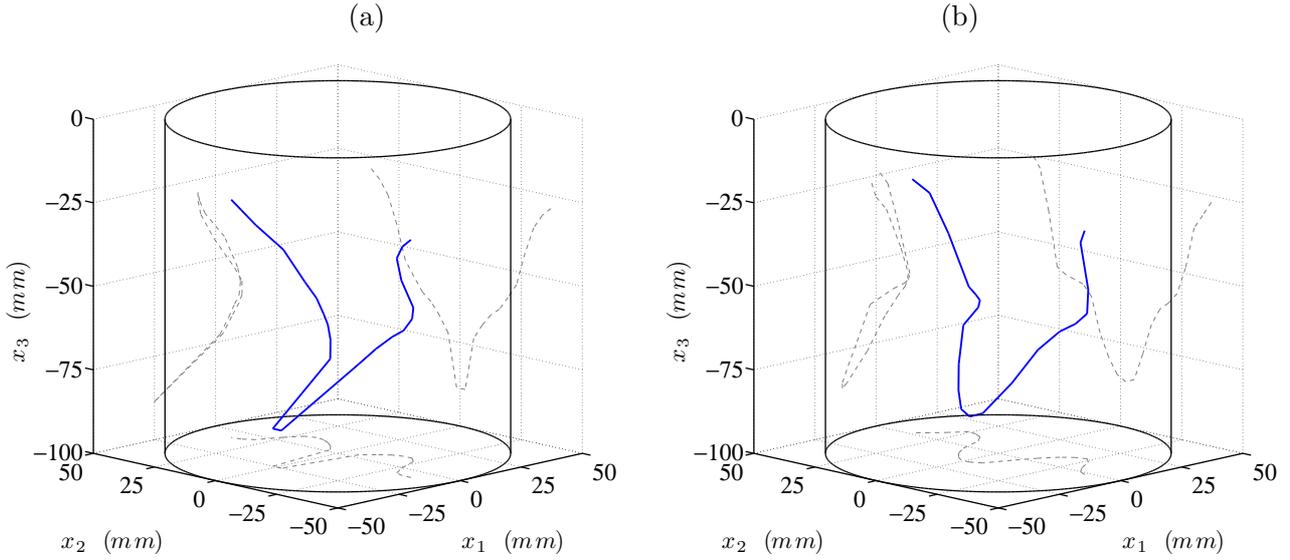


**Fig. 7.17:** Visualisation du vecteur vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  dans la cavité, dans le plan  $x_1 = 0$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

des positions  $(0, \pm 30, -45) \text{ mm}$  dans le cas laminaire et des positions  $(0, \pm 35, -35) \text{ mm}$  dans le cas turbulent. Ces recirculations secondaires sont relativement peu intenses. Leur centre se situe dans une zone plutôt vaste où la norme du champ de vitesse moyenne est faible, ce qui tend à rendre leur détermination particulièrement sensible à la précision du calcul du vecteur vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$ . Deux enroulements partiels de l'écoulement ont lieu plus profondément dans la cavité. Ils se situent autour des positions  $(0, \pm 15, -78) \text{ mm}$ , et semblent plus intenses que les deux recirculations secondaires.

#### 7.4.1.5 Positionnement du centre moyen de recirculation

Les représentations précédentes du vecteur vitesse moyenne ont été répétées pour un grand nombre de plans du maillage correspondant à position longitudinale constante ou à position transverse constante. Ce procédé ne permet pas d'accéder aux axes locaux de recirculation, mais permet néanmoins de visualiser en 3-D la position locale du centre moyen de recirculation dans la cavité. Ces résultats sont synthétisés aux figures 7.18(a) et (b), respectivement pour les cas laminaire et turbulent. La courbe décrite par la position du centre moyen de recirculation n'est pas une droite, contrairement à ce que l'on pourrait généralement obtenir, suffisamment loin des bords latéraux, pour des cavités rectangulaires. La courbe décrite est relativement symétrique par rapport au plan  $x_2 = 0$ , et présente une forme complexe. Le centre moyen de recirculation est situé en profondeur et plutôt vers la paroi latérale amont dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$ . Il correspond alors au centre de la recirculation principale. Il tend ensuite à remonter vers l'ouverture, et à se positionner autour du plan médian  $x_1 = 0$  au voisinage des bords latéraux de la cavité, coïncidant alors avec les centres des recirculations secondaires que



**Fig. 7.18:** Position du centre moyen de recirculation (—), et ses projections dans les plans  $(e_1, e_2)$ ,  $(e_1, e_3)$ , et  $(e_2, e_3)$  (---). (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

l'on a identifiées précédemment. Ces figures mettent finalement en évidence toute la complexité de l'écoulement qui s'établit dans la cavité et sa nature pleinement tridimensionnelle.

## 7.4.2 Champs turbulents

### 7.4.2.1 Fluctuations de la vitesse longitudinale

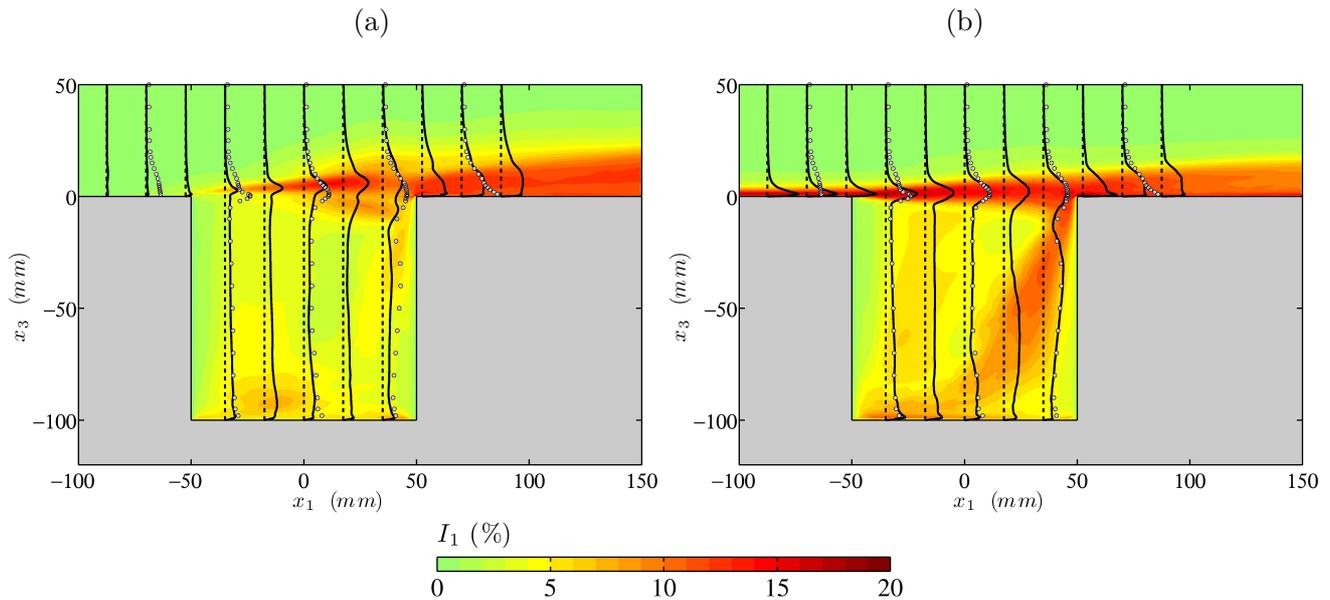
Les figures 7.19(a) et (b) montrent une cartographie de l'intensité turbulente  $I_1$  dans le plan  $x_2 = 0$  pour les cas laminaire et turbulent. Cette intensité vaut par définition :

$$I_1 = \frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_\infty}$$

Les résultats sont assez différents entre ces deux cas. Dans le cas laminaire, le taux de fluctuations longitudinales est nul par définition au point de séparation. Des fluctuations se développent ensuite à l'ouverture de la cavité, avec une intensité de l'ordre de  $I_1 = 15\%$ . L'épaississement de la couche de cisaillement est relativement faible, et la courbe des maxima du taux de fluctuations longitudinales est fortement bombée vers l'extérieur de la cavité. Au voisinage de la paroi latérale aval de la cavité, où la couche de cisaillement impacte le bord et où le fluide est entraîné vers le fond de la cavité, l'intensité du taux de fluctuations est comprise entre 2%, en fond de cavité, et 6% à l'ouverture. Le tracé du profil vertical expérimental du taux de fluctuations longitudinales à proximité de la paroi latérale aval ( $x_1 = 35$  mm), représenté par des points gris sur la figure 7.19(a), révèle un taux expérimental bien plus élevé, de l'ordre de 6% au fond de la cavité, et de 14% à l'ouverture.

Dans le cas turbulent, le taux de fluctuations longitudinales est non-nul à l'amont de la cavité, en raison de la zone d'excitation du profil turbulent moyen, décrite au chapitre 6, placée à proximité de l'entrée du domaine de calcul, qui permet d'avoir des perturbations dans l'écoulement incident. Une comparaison aux mesures menées à l'amont de la cavité indique que les niveaux obtenus numériquement sont supérieurs de 40% aux niveaux expérimentaux. Le phénomène à l'origine de cette surestimation numérique n'a pas été déterminé. À l'exception de ce point, la simulation est en très bon accord avec les taux de fluctuations longitudinales obtenus expérimentalement par LDA. Les profils verticaux expérimentaux aux positions lon-

gitudinales  $x_1 = -35, 0$  et  $35 \text{ mm}$ , représentés par des points gris sur la figure 7.19(b), sont fidèlement reproduits par la simulation, aussi bien dans la couche de cisaillement qu'à l'intérieur de la cavité. C'est vraisemblablement la présence de fluctuations dans la couche limite incidente qui permet d'obtenir numériquement des niveaux de fluctuations corrects dans la cavité. En effet, une simulation numérique LES, menée par Chicheportiche & Gloerfelt dans [43] pour la même configuration physique et sur un maillage sensiblement équivalent, mais en l'absence de perturbations du profil turbulent moyen incident, révèle un déficit en fluctuations de vitesse longitudinale de l'ordre de 30 à 50% dans la cavité. Enfin, la courbe des maxima de taux de fluctuations longitudinales est également bombée vers l'extérieur de la cavité, ce que montrent les faibles écarts sur la position verticale de ces maxima avec les mesures, mais de manière bien moins spectaculaire que dans le cas laminaire.



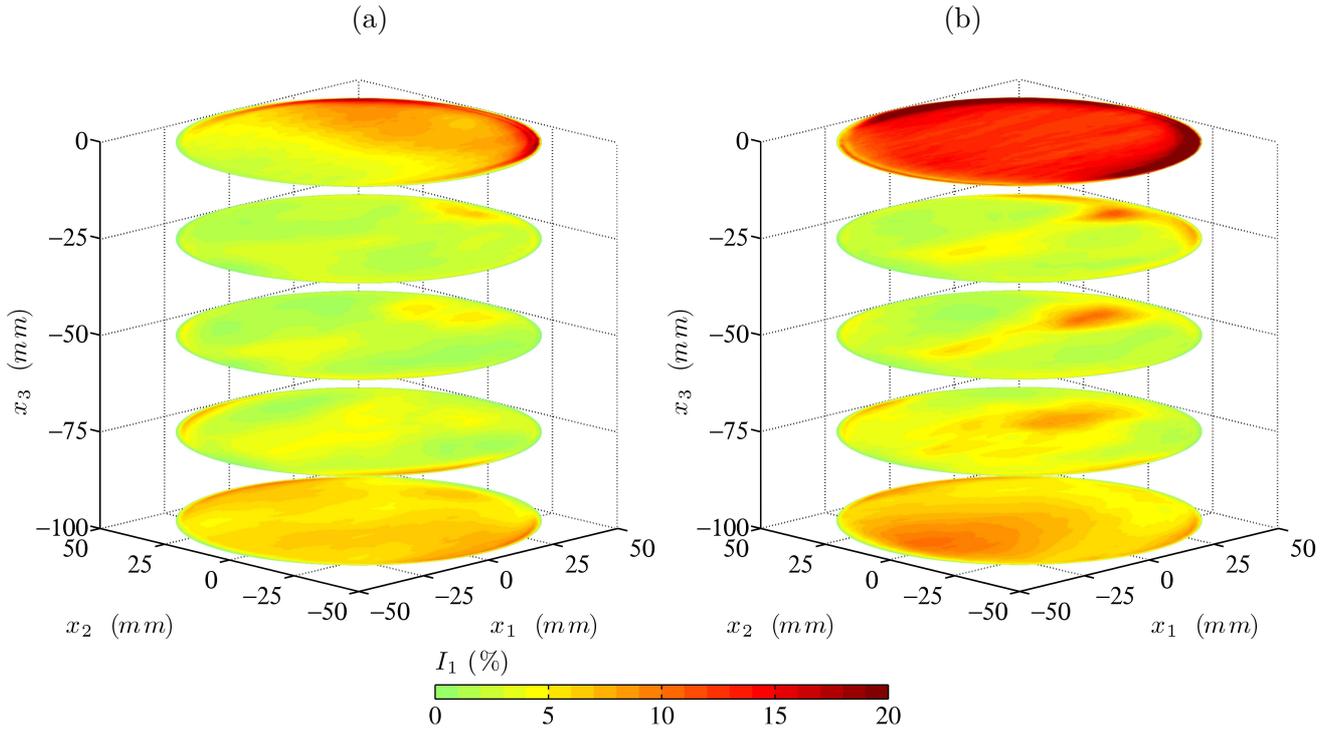
**Fig. 7.19:** Taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  (en %) dans le plan  $x_2 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ . (a) cas laminaire. (b) cas turbulent. Des profils sont représentés en noir aux positions  $x_1 = -35, x_1 = 0$  et  $x_1 = 35 \text{ mm}$ , et comparés aux mesures expérimentales obtenues par LDA, représentées par le symbole  $\circ$ . On a également représenté le profil incident et le profil à l'aval de la cavité.

Les figures 7.20 offrent des cartographies du taux de fluctuations longitudinales à différentes profondeurs dans la cavité pour les cas laminaire et turbulent. Le taux de fluctuations  $I_1$  est élevé à la lèvre de la cavité au bord de la paroi latérale aval, correspondant à la zone d'impact de la couche de cisaillement. Les fluctuations sont plus intenses dans le cas turbulent, où  $I_1$  atteint 20%, que dans le cas laminaire, où le taux de fluctuations est de l'ordre de  $I_1 = 15\%$ . Les fluctuations longitudinales ont une amplitude assez élevée dans le cas turbulent dans la région où le fluide est entraîné vers le fond de la cavité, montrant ainsi que celui-ci contient de fortes perturbations lorsqu'il amorce la recirculation principale dans la cavité ( $I_1$  est compris entre 10% et 15%). Contrairement au cas laminaire, on observe aussi dans le cas turbulent que l'écoulement est encore assez perturbé ( $I_1$  est de l'ordre de 8%) au fond de la cavité près de la paroi latérale amont, lorsqu'il amorce sa remontée vers l'ouverture.

#### 7.4.2.2 Taux de fluctuations verticales

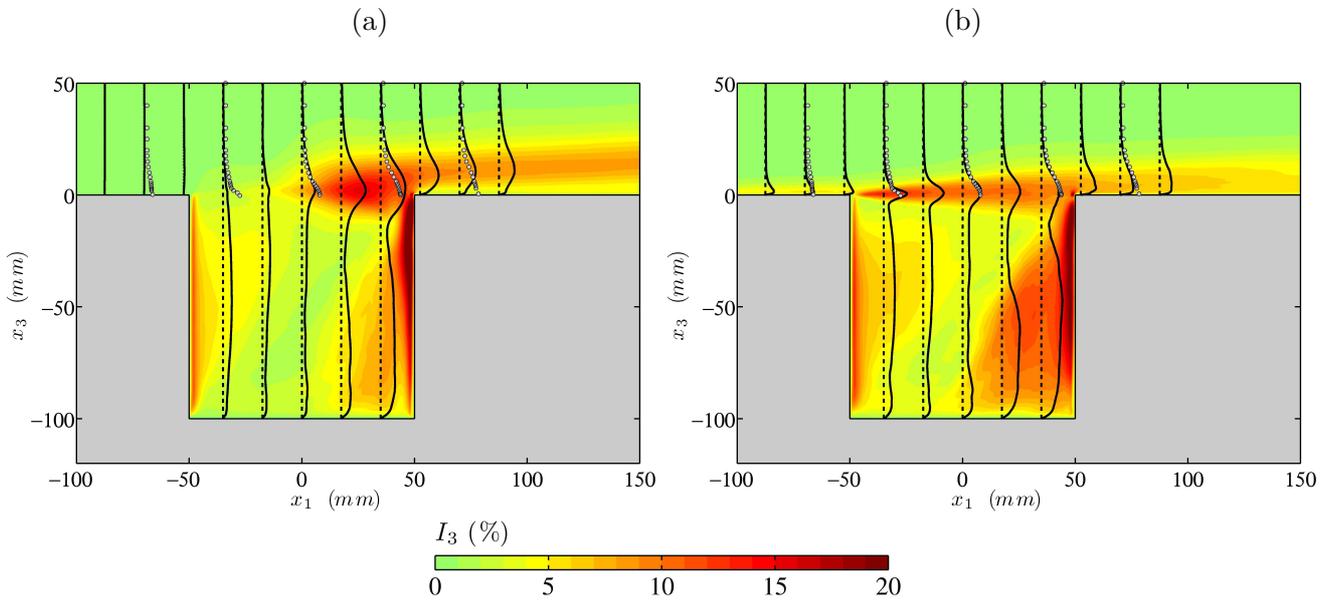
Le taux de fluctuations verticales peut être visualisé dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$  pour les cas laminaire et turbulent respectivement aux figures 7.21(a) et (b).

Dans le cas laminaire, le niveau de fluctuations est naturellement nul au point de séparation. Il reste très faible sur la première moitié longitudinale de la cavité, puis croît rapidement pour atteindre un niveau de  $I_3 = 17\%$  au bord aval. Le niveau de fluctuations verticales est



**Fig. 7.20:** Taux de fluctuations longitudinales  $I_1$  (en %) dans les plans de coupe  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = -25$ ,  $x_3 = -50$ ,  $x_3 = -75$  et  $x_3 = -98$  mm. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

très élevé le long de la paroi latérale aval de la cavité, de l'ordre de  $I_3 = 20\%$ , mais également à proximité de la paroi latérale amont ( $I_3 = 7\%$ ).

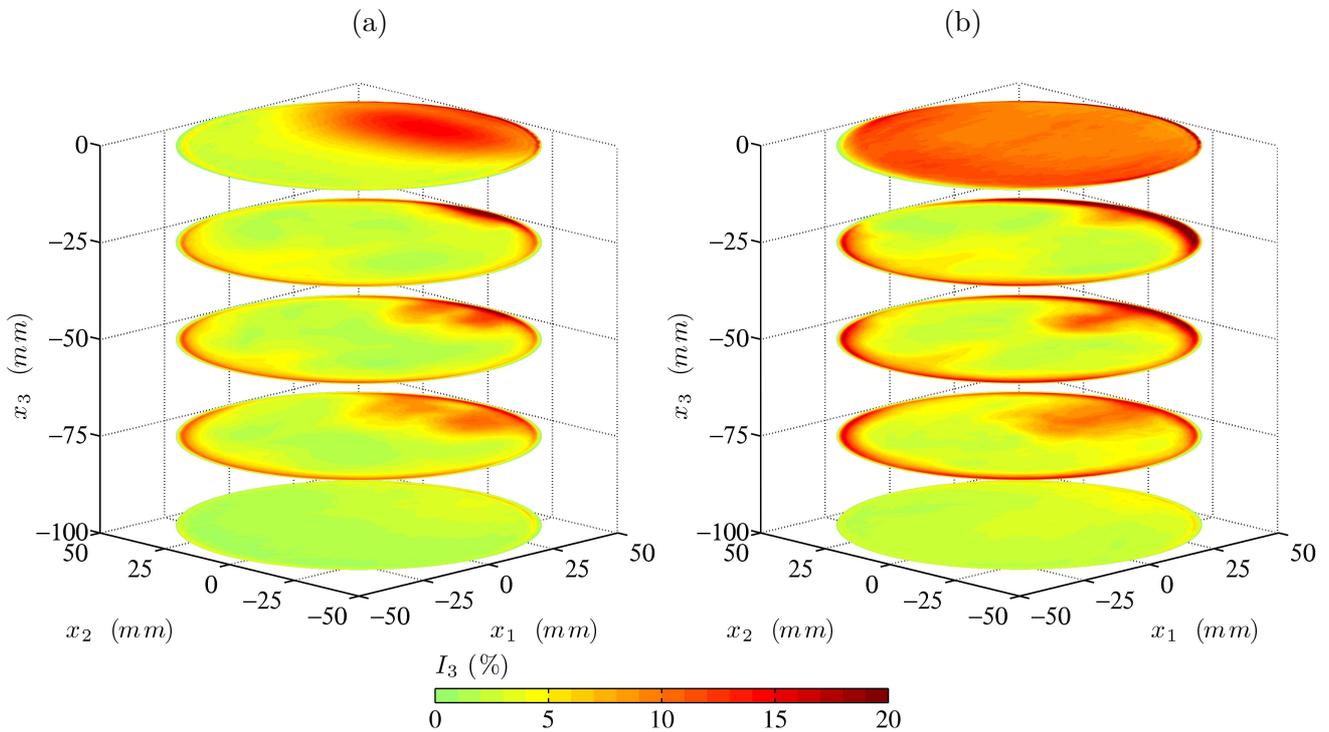


**Fig. 7.21:** Taux de fluctuations verticales  $I_3$  (en %) dans le plan  $x_2 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70$  m/s. (a) cas laminaire. (b) cas turbulent. Des profils sont représentés en noir aux positions  $x_1 = -35$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 35$  mm, et comparés aux mesures expérimentales obtenues par LDA pour la partie supérieure, représentées par le symbole  $\circ$ . On a également représenté le profil incident et le profil à l'aval de la cavité.

Dans le cas turbulent, le taux de fluctuations verticales est de l'ordre de 6% au point de séparation, ce qui correspond environ au niveau mesuré expérimentalement à l'amont de la cavité. Les profils expérimentaux du taux de fluctuations verticales ne sont disponibles

que pour le demi-plan supérieur de la cavité, et sont représentés par des points gris. Les fluctuations verticales sont très intenses dans la couche de cisaillement à proximité du point de séparation, puis décroissent légèrement, pour atteindre un taux  $I_3$  de l'ordre de 9% à proximité du coin aval de la cavité. Les demi-profil obtenus numériquement aux positions  $x_1 = -35, 0$  et  $35$  mm se comparent très favorablement à ceux mesurés expérimentalement. Dans la cavité, les fluctuations verticales sont plus intenses dans un large voisinage de la paroi latérale que dans le cas laminaire. Leur intensité dépasse 20% à la paroi aval, et est de l'ordre de  $I_3 = 13\%$  à la paroi amont.

Les figures 7.22(a) et (b) donnent un aperçu de l'intensité des fluctuations verticales à l'intérieur de la cavité. Aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent, celles-ci sont très intenses à proximité de la paroi latérale de la cavité, surtout dans la lèvre de la cavité. Ces figures montrent aussi que l'écoulement contient de fortes perturbations verticales lorsque celui-ci est entraîné vers le fond de la cavité, ou qu'il remonte vers l'ouverture.

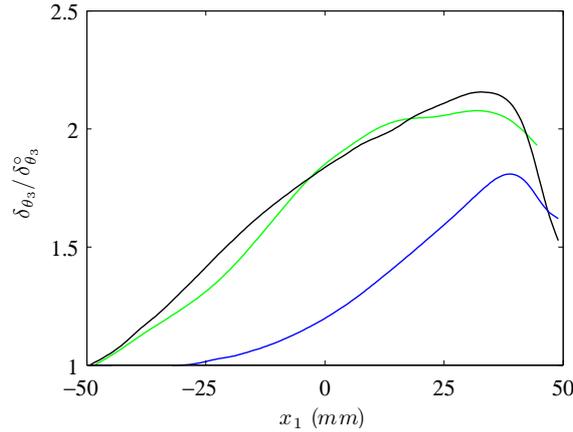


**Fig. 7.22:** Taux de fluctuations verticales  $I_3$  (en %) dans les plans de coupe  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = -25$ ,  $x_3 = -50$ ,  $x_3 = -75$  et  $x_3 = -98$  mm. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

### 7.4.3 Épaississement de la couche de cisaillement

L'épaississement de la couche de cisaillement à l'ouverture de la cavité peut être obtenue en étudiant l'évolution longitudinale de l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_\theta$ . On choisit dans la suite de ne considérer que le critère  $\delta_{\theta_3}$  défini par l'expression 2.2. La figure 7.23 présente l'évolution longitudinale de la quantité de mouvement  $\delta_{\theta_3}$  pour les cas laminaire et turbulent, respectivement en bleu et en noir. L'estimation expérimentale de ce critère à partir des mesures PIV est rappelée sur la figure par la courbe verte.

L'évolution longitudinale de l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_{\theta_3}$  obtenue numériquement dans le cas turbulent se compare très favorablement à celle estimée à partir des mesures PIV. Le maximum, calculé numériquement à  $\delta_{\theta_3}/\delta_{\theta_3}^0 \simeq 2.12$ , est fidèlement retrouvé à la position  $x_1 \simeq 33$  mm. La croissance moyenne de l'épaisseur de la quantité de mouvement entre le bord amont et cette position est de l'ordre de  $d\delta_{\theta_3}/dx_1 \simeq 0.0210$ , en accord avec les mesures. Localement, la croissance de la quantité de mouvement obtenue numériquement



**Fig. 7.23:** Épaisseur de la quantité de mouvement  $\delta_{\theta_3}$  en fonction de la position longitudinale. — : Mesures. — : Cas laminaire. — : Cas turbulent.

peut présenter de faibles écarts avec les données expérimentales. L'épaisseur de la quantité de mouvement décroît enfin fortement à proximité du coin aval en raison du rattachement de l'écoulement en ce point.

Le cas laminaire présente une évolution de l'épaisseur de la quantité de mouvement assez différente du cas turbulent. En effet, l'épaississement est nul sur le premier quart longitudinal de la cavité. Le second quart est caractérisé par une croissance faible de l'épaisseur de la quantité de mouvement. La croissance est ensuite linéaire, de l'ordre de  $d\delta_{\theta_3}/dx_1 \simeq 0.0205$ , jusqu'à la position  $x_1 \simeq 39 \text{ mm}$ , où l'épaisseur de la quantité de mouvement atteint son maximum. Ce maximum, obtenu plus près longitudinalement du bord aval que dans le cas turbulent, est inférieur de 15% à celui obtenu avec un écoulement incident turbulent.

## 7.5 Pression statique

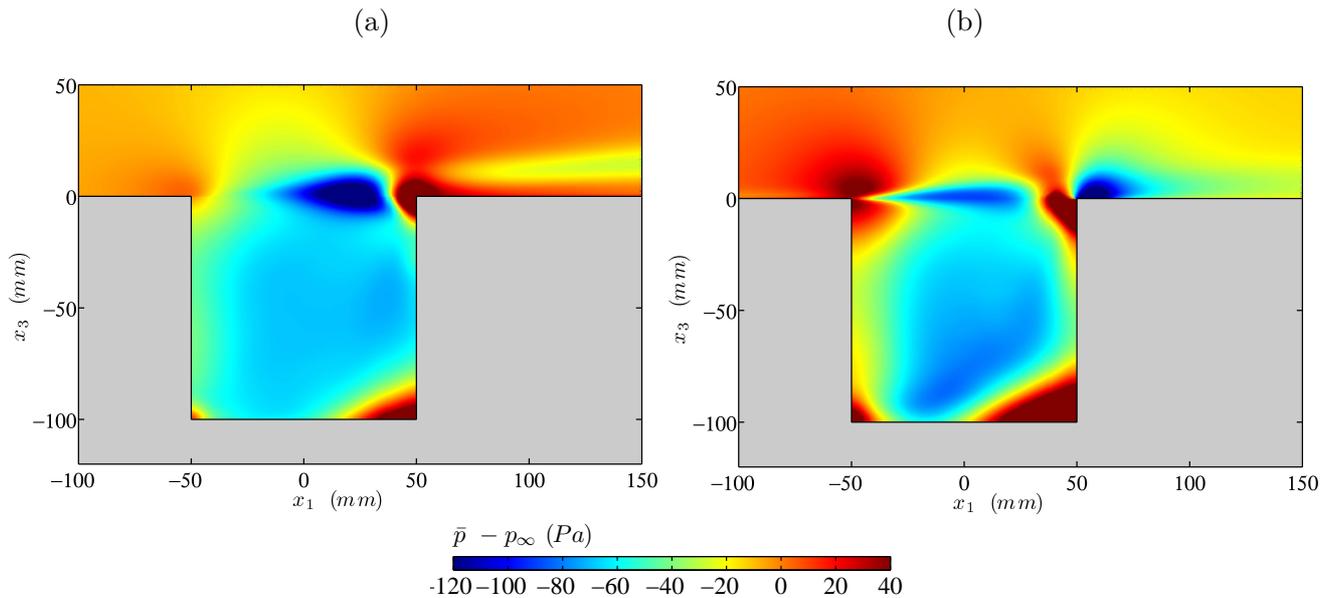
Cette partie propose une étude de la pression statique dans les plans médians  $x_2 = 0$  et  $x_1 = 0$ , ainsi qu'aux différentes parois de la cavité.

### 7.5.1 Pression statique dans les plans $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$

Le champ de pression statique est représenté dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$  aux figures 7.24(a) et (b) pour les cas laminaire et turbulent. La pression statique du fluide est moins élevée que la pression ambiante à l'intérieur de la cavité, en raison notamment de la recirculation principale qui s'y établit. L'écart est de l'ordre de  $70 \text{ Pa}$  et  $80 \text{ Pa}$  respectivement dans les cas laminaire et turbulent. Les figures mettent en évidence la présence d'un minimum local de pression statique à l'intérieur de la cavité. Il est plutôt situé à mi-profondeur et proche du bord aval dans le cas laminaire. Il est situé en profondeur, et légèrement décentré vers la paroi latérale amont de la cavité dans le cas turbulent. Cette position coïncide avec la position du centre moyen de la recirculation principale. La position du minimum de pression est relativement sensible à la précision du calcul de la pression moyenne, puisqu'il est situé dans une région de la cavité où les gradients de pression sont très faibles.

La pression moyenne est supérieure à la pression ambiante au voisinage des coins de fond de la cavité, ainsi qu'au bord aval de la cavité, et au bord amont dans le cas turbulent. Ces zones correspondent en effet aux régions d'impact et de rotation de l'écoulement autour des parois de la cavité.

La cartographie de la pression statique est assez différente au voisinage coin aval de la cavité entre les configurations laminaire et turbulente. En effet, dans le cas turbulent, la pression statique y présente de très forts gradients, avec une zone de surpression à la lèvre de



**Fig. 7.24:** Champ de pression statique  $\bar{p}$  dans le plan  $x_2 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

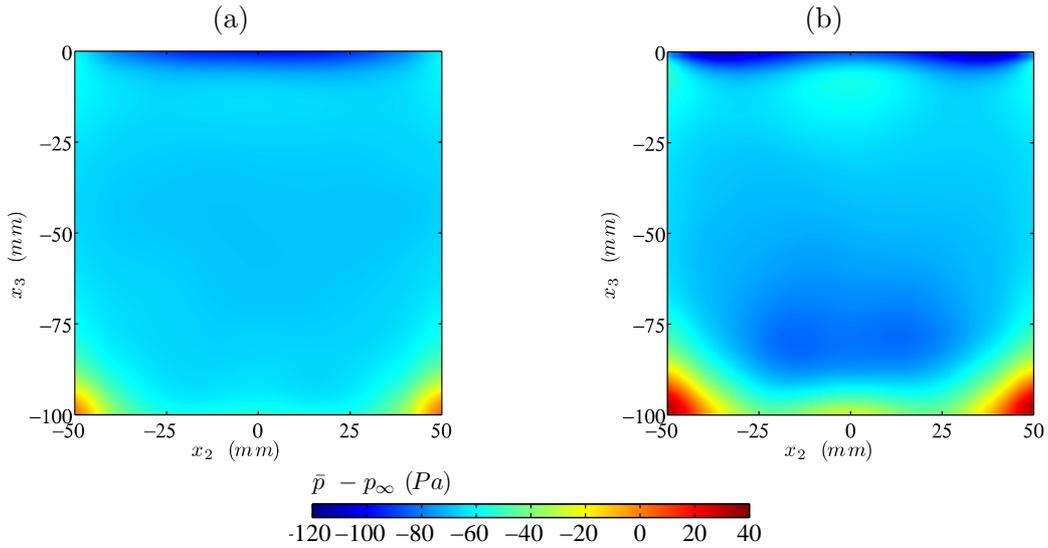
la cavité et une zone de dépression au niveau de la plaque plane. Dans le cas laminaire, les gradients de pression y sont nettement plus modérés, et le coin aval est le lieu intégralement d'une surpression par rapport à la pression ambiante, même le long de la plaque plane aval. La figure 7.24(b) permet enfin de visualiser la pression statique au voisinage du coin amont de la cavité dans le cas turbulent. Le gradient de pression défavorable engendré localement par la présence de la cavité pourrait avoir une influence directe sur l'amplitude des fluctuations dans la couche limite incidente. Il pourrait éventuellement être à l'origine des écarts que l'on observe entre les taux de fluctuations obtenus lors des cas tests de couche limite effectués au chapitre 6 sans la cavité, et le taux de fluctuations obtenu dans la présente simulation (voir la figure 7.19(b)).

Les figures 7.25(a) et (b) montre la pression moyenne dans le plan médian  $x_1 = 0$  dans les cas laminaire et turbulent. Le cas turbulent révèle le présence de deux minima de pression moyenne aux positions correspondantes aux enroulements partiels intenses du fluide observés à la figure 7.17(b). Ces minima de pression ne sont pas observés dans le cas laminaire.

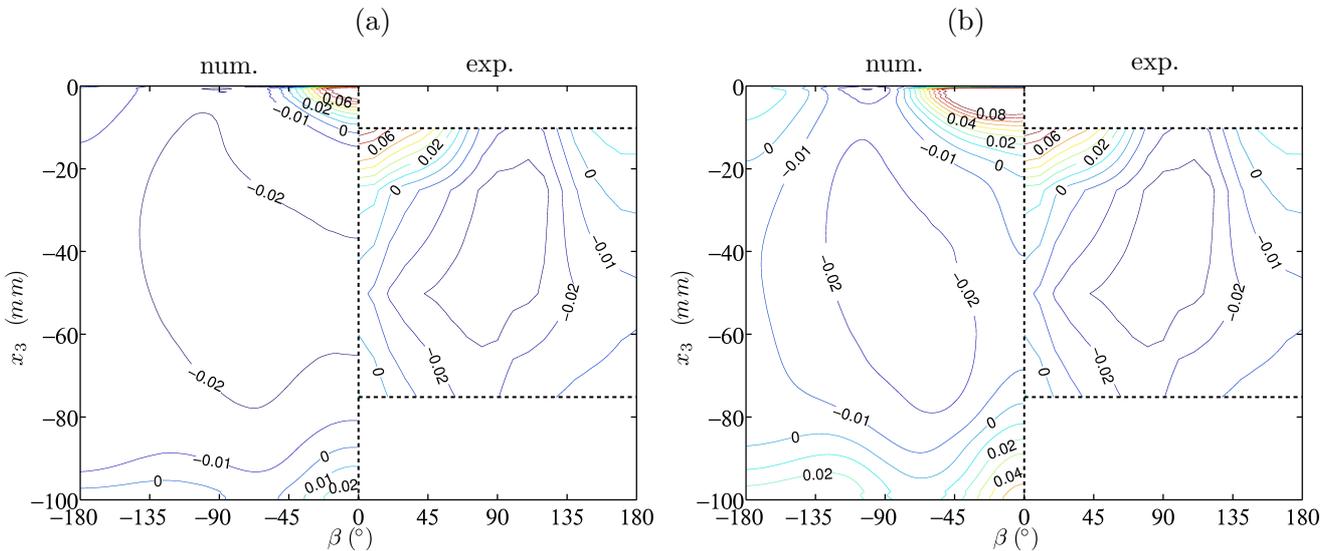
### 7.5.2 Coefficient de pression aux parois

La distribution du coefficient de pression  $C_p$  sur la paroi latérale de la cavité est représentée aux figures 7.26(a) et (b) pour les cas laminaire et turbulent. On a rappelé sur ces figures la trace du coefficient de pression obtenu expérimentalement. Qualitativement, les résultats obtenus numériquement dans le cas turbulent se comparent favorablement aux mesures : on retrouve la trace de forte positivité au bord aval due à l'impact de l'écoulement, et en fond de cavité. On retrouve également la forme ovoïdale des isocontours négatifs du coefficient de pression au voisinage des positions angulaires  $\beta = \pm 90^\circ$ , qui confirme le caractère 3-D de la recirculation du fluide dans la cavité. Quantitativement, les niveaux ont tendance à être légèrement sous-estimés dans la simulation numérique.

Le cas laminaire offre une cartographie du coefficient de pression à la paroi latérale de la cavité qualitativement identique à celle obtenue dans le cas turbulent. Quantitativement, les différences se font surtout au niveau du bord aval de la cavité ( $\beta \simeq 0^\circ$ ), où les niveaux de pression statique sont très inférieurs à ceux obtenus dans le cas turbulent. Ceci se voit également sur la position de l'isocontour nul, qui coupe l'axe  $\beta = 0^\circ$  très haut dans la cavité, au niveau de la lèvres ( $x_3 = 8 \text{ mm}$ ) dans le cas laminaire, et à un quart de la profondeur



**Fig. 7.25:** Champ de pression moyenne  $\bar{p}$  dans le plan  $x_1 = 0$ , pour un écoulement de  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.



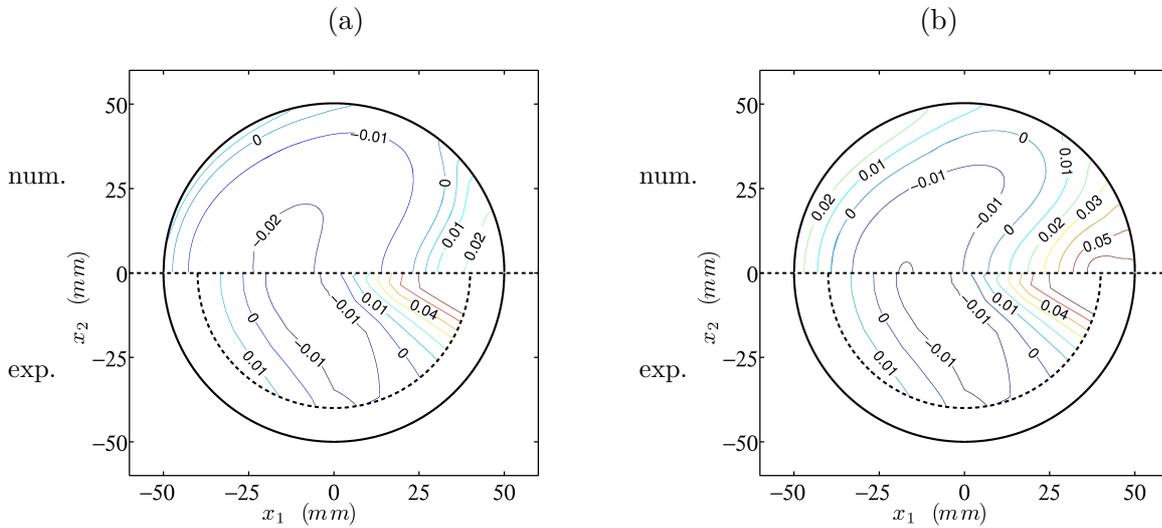
**Fig. 7.26:** Coefficient de pression  $C_p$  à la paroi latérale de la cavité. À gauche sont représentés les résultats issus de la simulation, et à droite les résultats expérimentaux. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

( $x_3 = 25 \text{ mm}$ ) pour le cas turbulent. En fond de cavité, les niveaux sont également moins élevés que dans le cas turbulent.

Les figures 7.27(a) et (b) présentent des isocontours du coefficient de pression à la paroi de fond de la cavité. Les résultats issus des mesures sont également rappelés sur les figures. Les résultats numériques dans le cas turbulent s'accordent qualitativement aux résultats expérimentaux. On retrouve bien la région de forte positivité à proximité de la paroi aval, qui correspond à la pression exercée par le fluide lorsque celui-ci rencontre la paroi de fond dans sa recirculation. On retrouve aussi la forme en "fer à cheval" des isocontours, qui confirme le caractère pleinement 3-D de l'écoulement à proximité de la paroi de fond de la cavité. Une zone de positivité du coefficient de pression au voisinage de la paroi amont est également bien présente dans la simulation. Quantitativement, les niveaux obtenus numériquement sont légèrement plus faibles que ceux constatés expérimentalement.

Le cas laminaire offre une cartographie du coefficient de pression qualitativement équi-

valente à celle obtenue dans le cas turbulent. Quantitativement, la zone de négativité du coefficient de pression est plus vaste que dans le cas turbulent, et les zones de positivité sont moins intenses.



**Fig. 7.27:** Coefficient de pression  $C_p$  à la paroi de fond de la cavité. Au-dessus sont représentés les résultats issus de la simulation, et en-bas les résultats expérimentaux. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

## 7.6 Couche cisailée et larges structures tourbillonnaires

On s'intéresse dans cette partie aux larges structures tourbillonnaires se développant dans la couche de cisaillement à l'aide de plusieurs critères d'identification de tourbillons. On traite séparément les cas laminaire et turbulent pour plus de clarté.

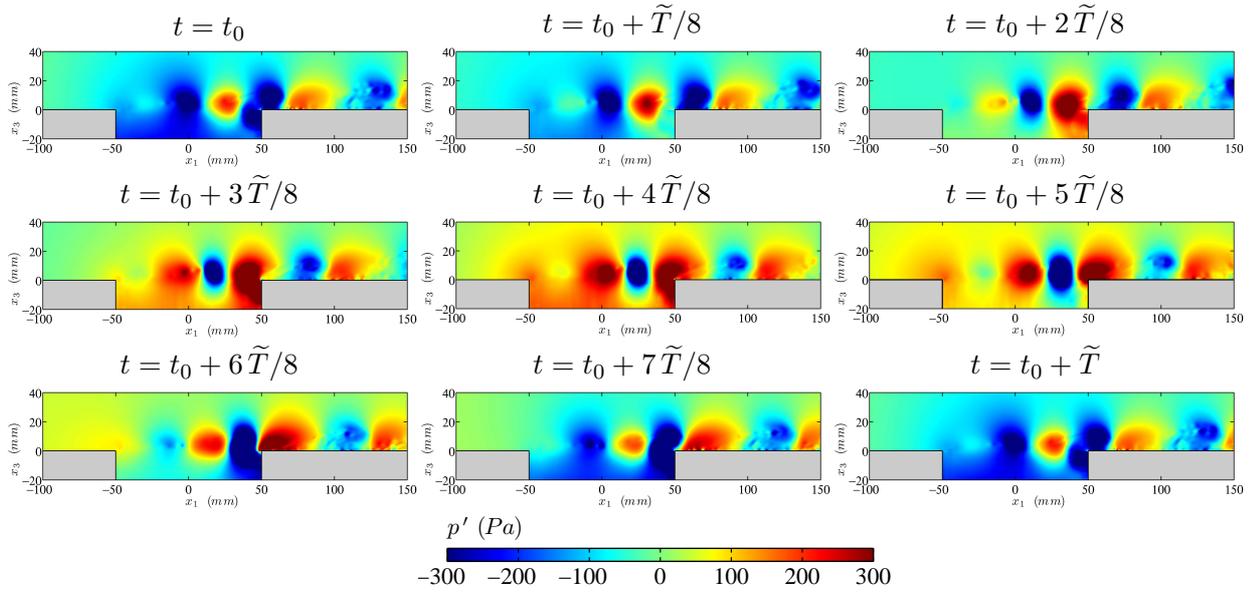
### 7.6.1 Cas laminaire

#### 7.6.1.1 Minimum local de pression fluctuante

Bien qu'il s'agisse d'une condition faible, il est possible de tenter d'identifier les larges structures tourbillonnaires se développant dans la couche de cisaillement en considérant les fluctuations de pression à l'ouverture de la cavité, en y repérant les minima locaux, et en ne conservant que ceux qui sont "suffisamment" intenses, exactement comme dans la partie 7.3.2. Ces minima intenses de pression fluctuante permet de localiser le centre des structures tourbillonnaires.

La figure 7.28 présente un chronogramme de la pression fluctuante à l'ouverture de la cavité dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$  pendant un cycle d'oscillation acoustique. Ce chronogramme met en évidence le caractère très organisé de la couche de cisaillement et la forte cohérence des structures tourbillonnaires.

On y observe très distinctement la présence de plusieurs minima intenses de pression fluctuante. L'image à l'instant  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  indique le début de l'impact d'une large structure tourbillonnaire au coin aval. L'image à l'instant  $t_0 + \tilde{T}$  illustre le phénomène de scission partielle associé à l'impact du tourbillon sur la paroi de la cavité. La large structure tourbillonnaire de l'image précédente a donné naissance à deux tourbillons, identifiable par la présence de deux minima de pression, l'un à la lèvre de la cavité, l'autre au-dessus de la plaque plane, à l'aval de la cavité. Le tourbillon à la lèvre de la cavité est convecté vers l'intérieur de la cavité *via* la recirculation qui s'y est établie, tandis que l'autre tourbillon s'échappe au-dessus du coin aval. On observe sur les autres images la présence de deux larges structures tourbillonnaires.



**Fig. 7.28:** Fluctuations de pression  $p'$  dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , bornées entre  $\pm 300$  Pa pendant un cycle d'oscillation. Cas laminaire.

La distance  $\lambda_v$  séparant ces deux minima de pression fluctuante est constante pendant le cycle d'oscillation, et vaut  $\lambda_v = 43$  mm.

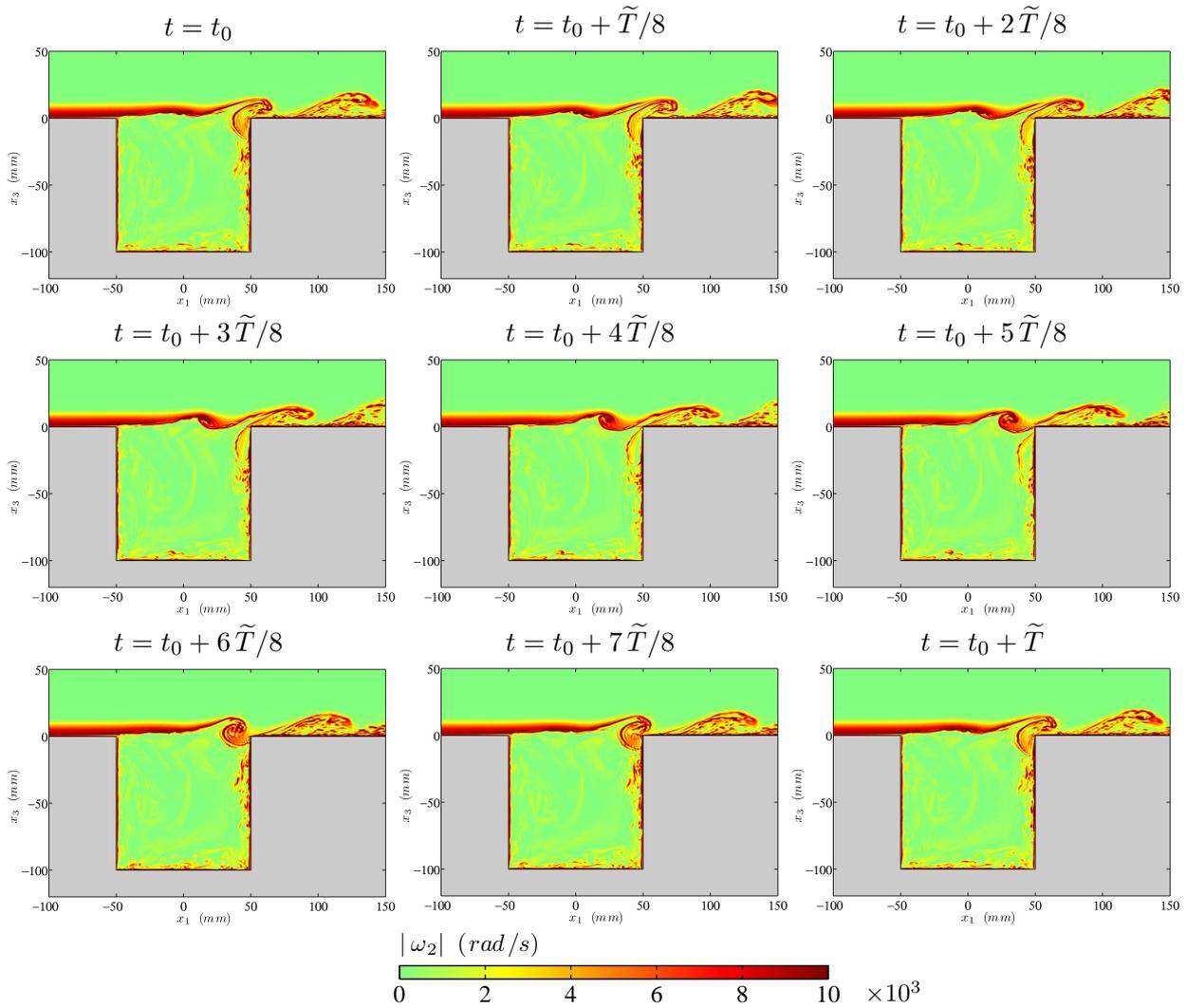
### 7.6.1.2 Vorticité instantanée

Jeong & Hussain rappellent dans [117] qu'un tourbillon doit avoir une vorticité non-nulle. Lesieur complète cette exigence dans [142], en faisant remarquer que la concentration de vorticité  $\|\boldsymbol{\omega}\|$  doit être suffisamment importante pour qu'un enroulement local du fluide environnant soit possible, et que les structures tourbillonnaires doivent garder leur forme un certain temps. On envisage ainsi dans cette partie d'observer les larges structures tourbillonnaires qui se développent à l'ouverture de la cavité par un tracé du champ instantané de vorticité transverse.

La figure 7.29 propose un chronogramme de la composante transverse de la vorticité dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$ , pour un cycle d'oscillation acoustique. Cette quantité est calculée par définition par :

$$\omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

Le gradient vertical de vitesse longitudinale présent dans la couche limite est à l'origine de la nappe de vorticité d'épaisseur 15 mm que l'on observe à l'amont de la cavité. Le chronogramme permet de suivre l'amplification d'une perturbation de la couche de cisaillement au cours de sa convection à l'ouverture de la cavité. C'est le cas de la fluctuation située environ à la position  $x_1 = -15$  mm à l'instant  $t_0$ , qui croît de manière assez nette entre les instants  $t_0 + \tilde{T}/8$  et  $t_0 + 5\tilde{T}/8$ , évoluant ainsi vers une structure tourbillonnaire d'une taille relativement conséquente, juste avant son impact sur le coin aval de la cavité (figure à l'instant  $t_0 + 6\tilde{T}/8$ ). On peut également suivre sur le chronogramme le processus de scission partielle de la structure tourbillonnaire lors de son impact sur le coin aval de la cavité. Ce processus est à l'origine de la présence de vorticité instationnaire à l'intérieur de la cavité. En effet, l'éclatement de la large structure tourbillonnaire au coin aval donne naissance à plusieurs petites structures qui sont convectées vers l'intérieur de la cavité par la recirculation principale qui s'y est établie. La figure montre enfin la présence en moyenne de deux larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement, ce qui confirme les résultats issus de l'identification de tourbillons

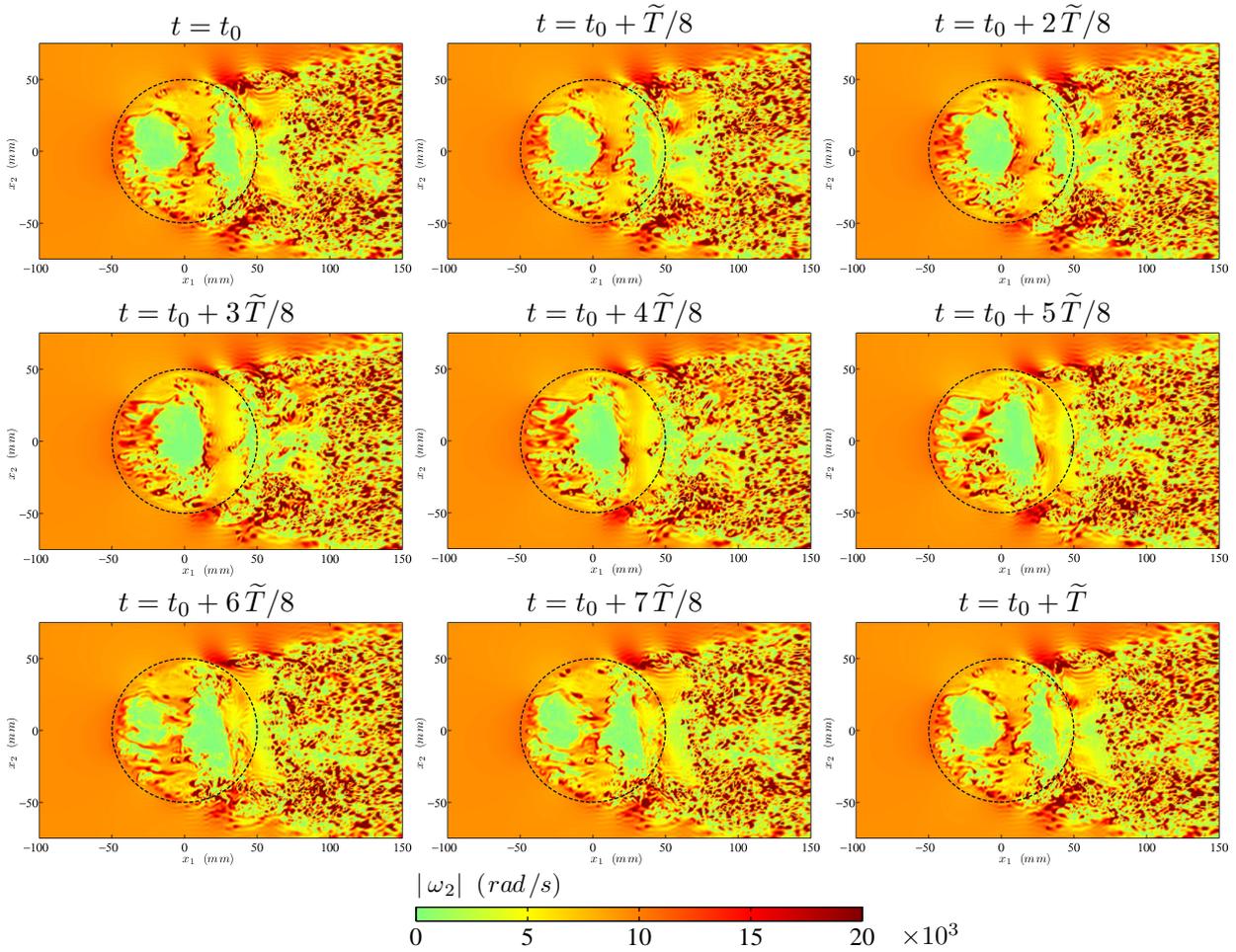


**Fig. 7.29:** Norme de la vorticité instantanée dans la direction  $\mathbf{e}_2$   $|\omega_2|$  dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , pendant un cycle d'oscillation. Cas laminaire.

en considérant les minima locaux intenses de pression fluctuante.

La figure 7.30 présente un chronogramme de la vorticité transverse dans le plan  $x_3 = \delta/8$ . La partie orange à l'amont de la cavité est la conséquence d'un gradient vertical de vitesse longitudinale non-nul à cette altitude. L'altitude du plan de coupe est suffisamment petite devant l'amplitude des déviations de la couche de cisaillement pour que le chronogramme rende possible le suivi de la convection des larges structures tourbillonnaires à la surface d'ouverture de la cavité. Lorsque la nappe de vorticité incidente est significativement déviée au-dessus de la cavité (l'amplitude de la déviation est supérieure à  $\delta/8$ ), sa trace dans le plan  $x_3 = \delta/8$  est donc nécessairement très faible. C'est ce que traduit les régions vertes sur la figure 7.30. Le chronogramme confirme la présence de deux perturbations significatives dans la couche de cisaillement.

À noter que de nombreuses perturbations, fines et peu cohérentes transversalement, sont générées au bord amont de la cavité. Cela se traduit par les "filaments" longitudinaux de vorticité provenant du coin amont, comme le montre la figure à l'instant  $t_0 + 4\tilde{T}/8$ . Ce type de comportement est également présents pour des cavités rectangulaires, comme le montre les visualisations de critère  $Q$  proposées par Gloerfelt *et al.* dans [98].



**Fig. 7.30:** Norme de la vorticité instantanée dans le plan  $x_3 = \delta/8$ , pendant un cycle d'oscillation. La position de la cavité est représentée par le cercle en pointillés. Cas laminaire.

### 7.6.1.3 Critère $Q$ instantané

Afin d'identifier et d'isoler au mieux les larges structures tourbillonnaires se développant à l'ouverture de la cavité, on considère le critère  $Q$ , qui est l'un des critères les plus utilisés dans la littérature [44, 115]. Il s'agit du deuxième invariant du gradient de vitesse instantanée, que l'on calcule par définition par :

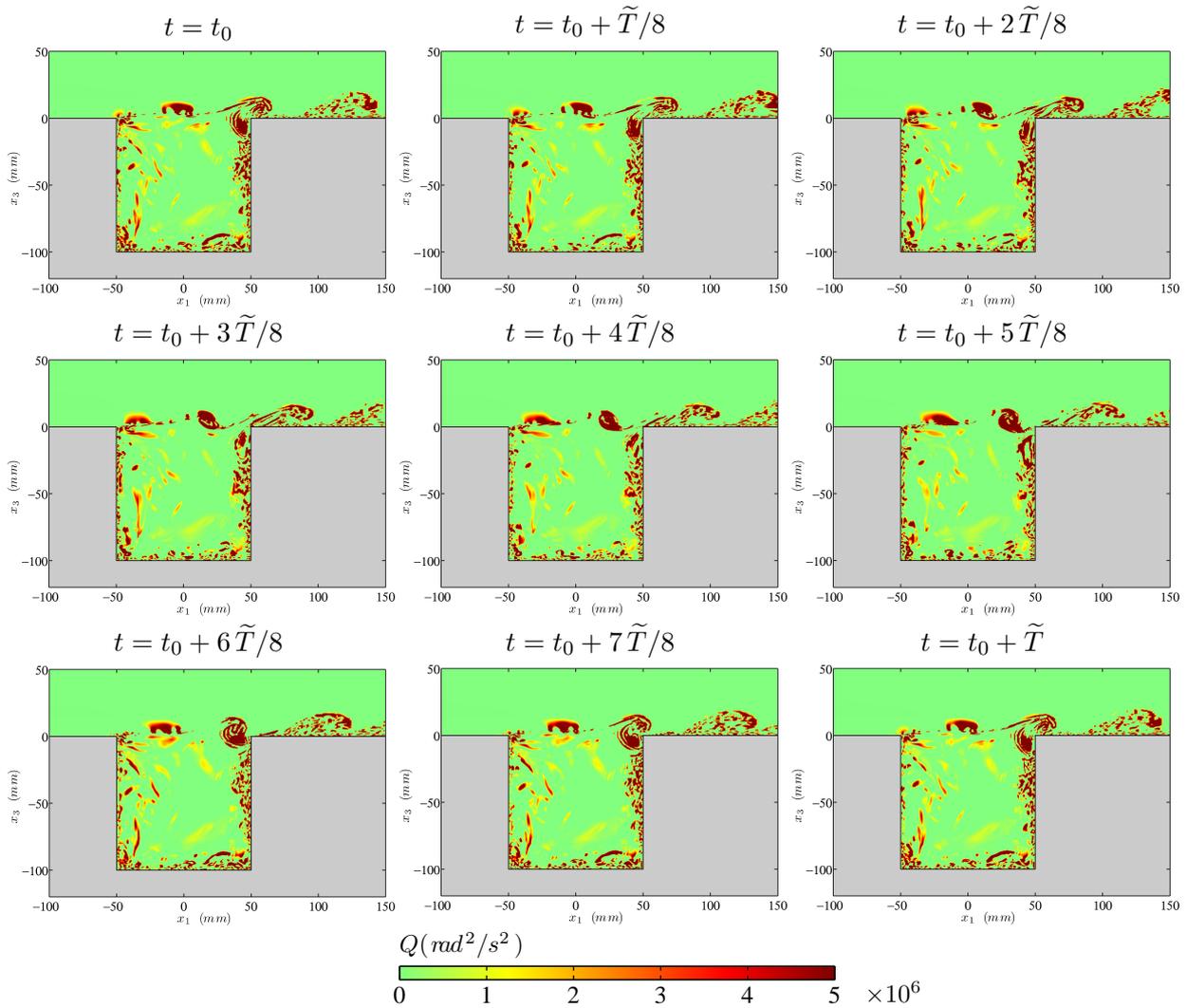
$$Q = \frac{1}{2} (\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2)$$

où la matrice  $\mathbf{\Omega}$  représente le tenseur antisymétrique des déformations, et  $\mathbf{S}$  le tenseur symétrique des déformations. Ces tenseurs ont pour définition, pour tout  $(m, n) \in \{1, 2, 3\}^2$  :

$$\begin{cases} \Omega_{m,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ S_{m,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \end{cases}$$

Les normes sont évaluées par la relation  $\|\mathbf{\Omega}\|^2 = \text{tr}({}^t\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega})$ . Chong *et al.* définissent l'intérieur d'un tourbillon par la condition nécessaire :  $Q > 0$  [44].

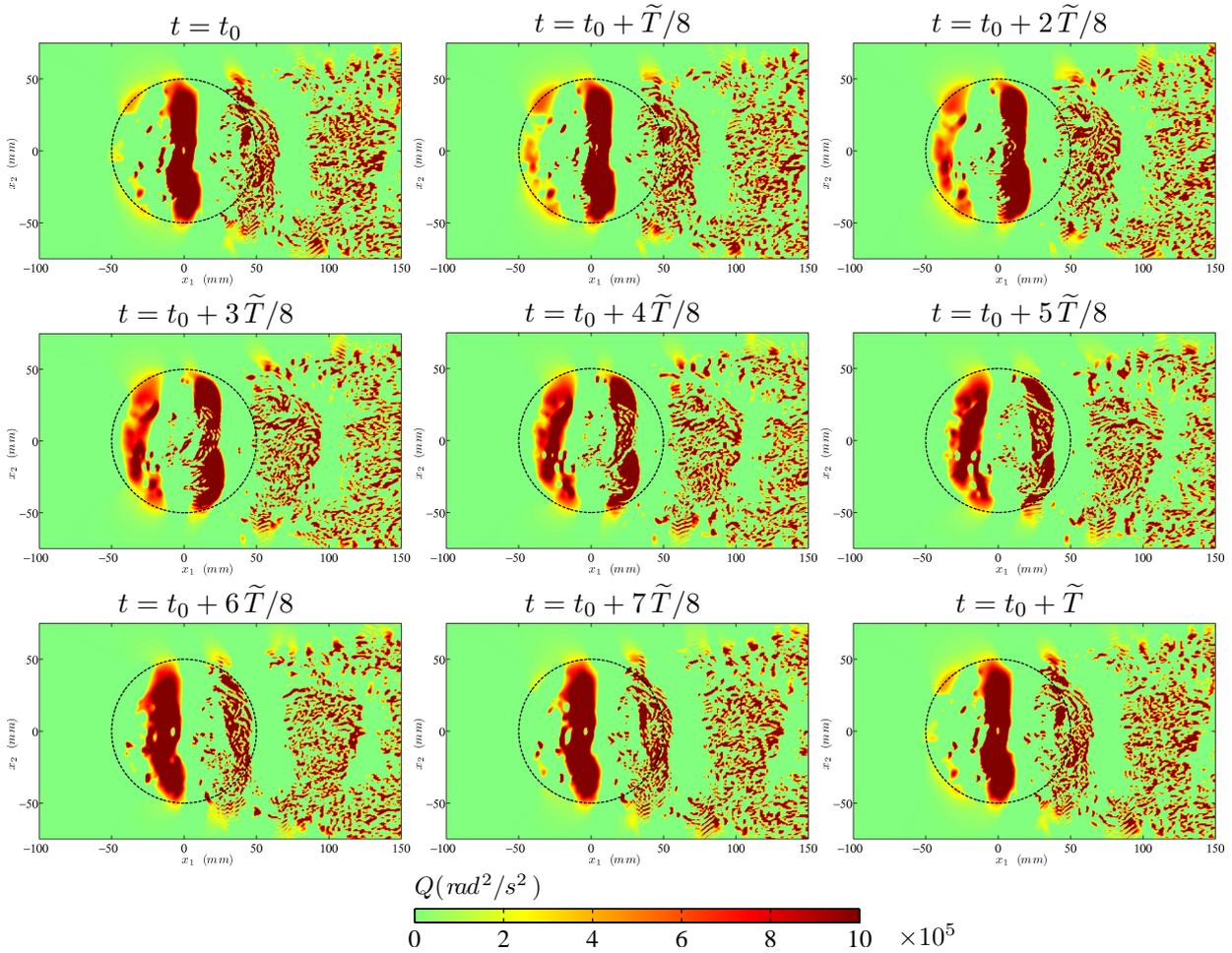
La figure 7.31 permet de visualiser la positivité du critère  $Q$  dans le plan  $x_2 = 0$  pendant une période acoustique. Les deux larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de



**Fig. 7.31:** Critère  $Q$  instantané dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ , pendant un cycle d'oscillation. Les zones où  $Q < 0$  sont représentées en vert. Cas laminaire.

cisaillement sont parfaitement isolées et mises en évidence sur cette figure. Le critère  $Q$  permet également d'identifier l'instant où une structure intense est générée au point de séparation, ce qui semblait difficile à réaliser sur les visualisations de la vorticité. On observe en effet assez nettement la génération d'une structure tourbillonnaire au voisinage du coin amont à l'instant  $t_0$ . La figure révèle également que la vitesse de convection paraît faible à proximité du bord amont, puisque la perturbation générée au point de séparation ne semble pas s'être beaucoup déplacée entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + 2\tilde{T}/8$ . On remarque enfin la présence de fines structures turbulentes qui remontent vers l'ouverture de la cavité le long sa paroi latérale amont, et qui sont susceptibles de perturber la couche de cisaillement à proximité du coin amont.

La figure 7.32 propose un chronogramme du critère  $Q$  dans le plan de coupe situé verticalement à un tiers de l'épaisseur de couche limite incidente. Elle met en évidence la forte cohérence transverse des 2 larges structures tourbillonnaires présentes à l'ouverture de la cavité. Les figures aux instants  $t_0$ ,  $t_0 + \tilde{T}/8$  et  $t_0 + 2\tilde{T}/8$  illustrent le processus de génération d'une large structure turbulente au coin amont de la cavité. Celle-ci est relativement courb e. Ceci est probablement le fait de la forme en arc de cercle du coin amont, combinée au forçage acoustique vertical en phase issu de la résonance acoustique dans la cavité, que l'on détaillé plus tard à la partie 7.9. Les figures aux instants  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 7\tilde{T}/8$  révèlent que la large structure perd progressivement sa courbure, et devient relativement droite dans la direction transverse. Ceci laisse supposer que la vitesse de convection au niveau de l'axe  $x_2 = 0$  est



**Fig. 7.32:** Critère  $Q$  instantané dans le plan  $x_3 = \delta/3$ , pendant un cycle d'oscillation. La position de la cavité est représentée par le cercle en pointillés. Les zones où  $Q < 0$  sont représentées en vert. Cas laminaire.

supérieure à la vitesse de convection près des bords latéraux de la cavité. L'espace moyen entre les deux larges structures tourbillonnaires semblent relativement constant. C'est ce que confirme les figures aux instants  $t_0 + 4\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 5\tilde{T}/8$ , où la distance  $\lambda_v$  sur l'axe  $x_2 = 0$  entre les centres des structures vaut  $\lambda_v = 43 \text{ mm}$ .

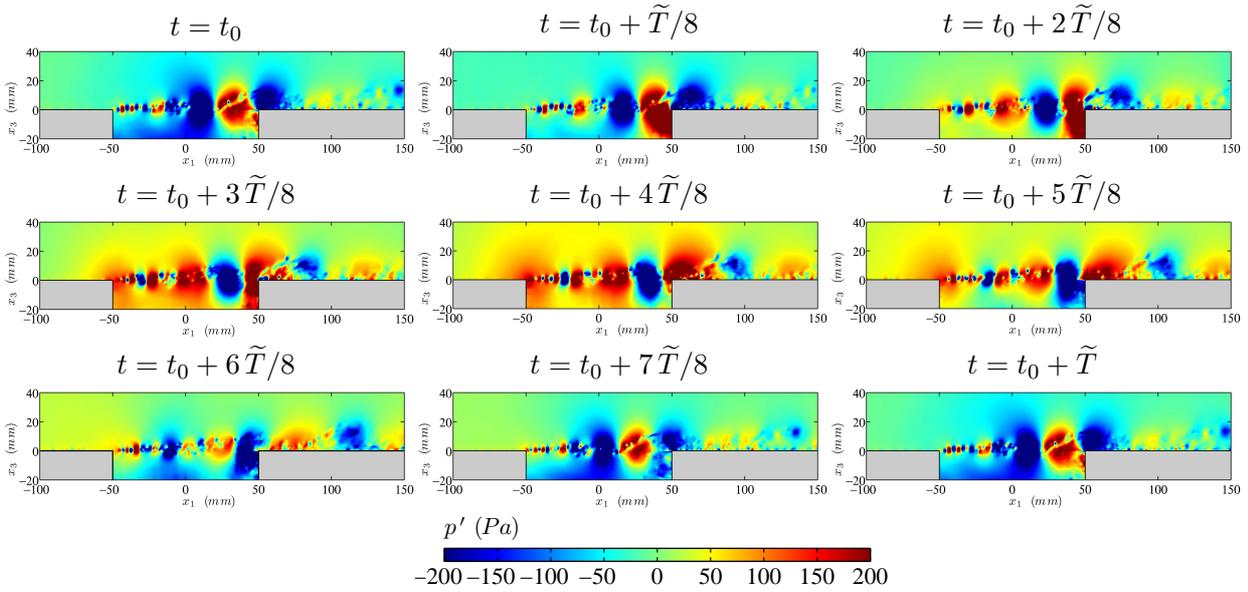
Ce chronogramme montre également le processus de génération de fines structures turbulentes lors de l'impact des larges structures au coin aval de la cavité. Les figures aux instants  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  à  $t_0 + \tilde{T}$  indiquent en effet la présence d'une multitude de petites structures provenant de l'éclatement progressif de la large structure tourbillonnaire.

## 7.6.2 Cas turbulent

On présente dans cette partie les résultats concernant l'étude de la couche de cisaillement dans le cas d'un écoulement incident turbulent.

### 7.6.2.1 Minimum local de pression fluctuante

La figure 7.33 présente un chronogramme de la pression fluctuante à l'ouverture de la cavité pendant un cycle d'oscillation acoustique. Une des différences les plus marquantes avec le cas laminaire (figure 7.28) est la présence d'une multitude de petites structures dans la couche de cisaillement. Les structures tourbillonnaires plus grosses semblent également beaucoup moins cohérentes. On distingue assez distinctement la présence de deux minima intenses de pression fluctuante (sur la figure à l'instant  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  par exemple), que l'on fait correspondre aux



**Fig. 7.33:** Fluctuations de pression  $p'$  dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , bornées entre  $\pm 200$  Pa pendant un cycle d'oscillation. Cas turbulent.

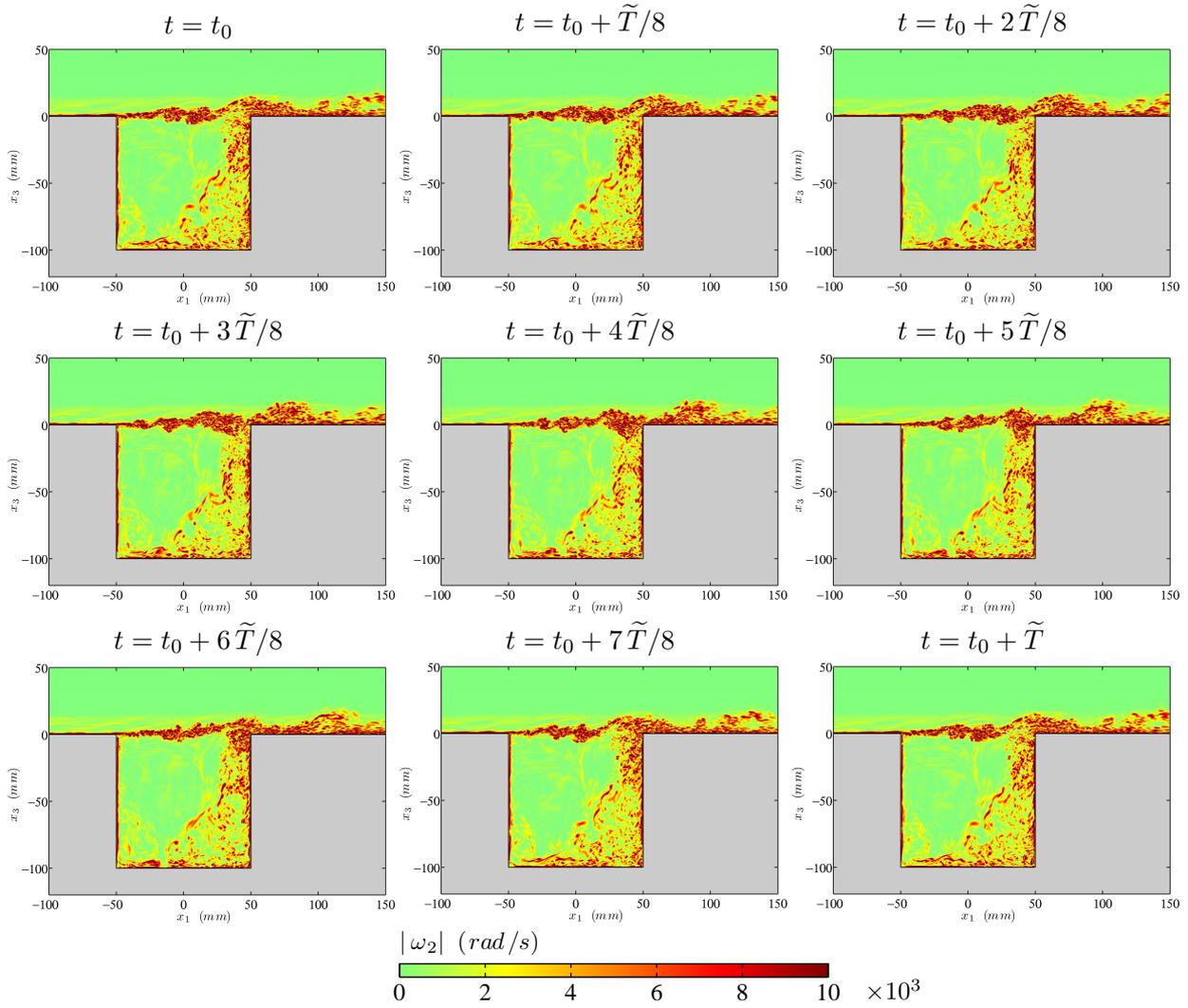
centres de larges structures tourbillonnaires. Les figures aux instants  $t_0 + 4\tilde{T}/8$ ,  $t_0 + 5\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  indiquent une distance moyenne entre ces deux larges structures de  $\lambda_v = 54$  mm. La longueur d'onde aérodynamique est donc sensiblement plus longue dans le cas turbulent que dans le cas laminaire. Cette distance intertourbillonnaire est constante aux instants  $t_0 + 4\tilde{T}/8$  à  $t_0 + 6\tilde{T}/8$ , indiquant que la vitesse de convection semble peu varier sur les trois derniers quarts longitudinaux de la cavité.

Si l'on identifie les minima intenses de pression comme des centres de structures tourbillonnaires, on assiste également à ce qui semble être des appariements de tourbillons. Le plus net est probablement celui qui intervient à la position  $x_1 \simeq 15$  mm à l'instant  $t_0 + \tilde{T}/8$  : une petite structure tourbillonnaire, correspondant au minimum de pression à la position  $x_1 \simeq -10$  mm à l'instant  $t_0$  semble rattraper une structure plus grosse et plus intense, repérée à la position  $x_1 \simeq 10$  mm à l'instant  $t_0$ . Un autre appariement de très fines structures tourbillonnaires est visible à l'instant  $t_0 + 2\tilde{T}/8$  à proximité de la position  $x_1 \simeq -35$  mm. Un troisième appariement a lieu à l'instant  $t_0 + 6\tilde{T}/8$  à la position  $x_1 = -25$  mm. Des visualisations de la couche de cisaillement sur d'autres cycles acoustiques ont été effectuées, mais ne sont pas montrées ici. Elles révèlent que ces appariements de tourbillons semblent relativement fréquents, mais dont la fréquence d'apparition paraît relativement arbitraire et irrégulière. Ils ont lieu essentiellement sur la première partie longitudinale de la cavité ( $x_1 \in [-50, 0]$  mm), et concernent surtout des petites structures. Cependant, la figure 7.33 à l'instant  $t_0 + \tilde{T}/8$  montre que ces appariements peuvent impliquer des structures plus grosses, et avoir lieu dans la seconde partie longitudinale de la cavité, relativement peu de temps avant l'impact au coin aval.

La figure à l'instant  $t_0 + 7\tilde{T}/8$  tend enfin à montrer une scission partielle des larges structures lors de leur impact au coin aval. Elle indique nettement la présence de deux minima locaux de pression : l'un est situé à la lèvre de la cavité, l'autre au-dessus du coin aval.

### 7.6.2.2 Vorticité instantanée

La vorticité transverse  $\omega_2$  est représentée en norme à la figure 7.34 dans le plan longitudinal  $x_2 = 0$  pendant une période acoustique. Le chronogramme indique la présence d'une multitude d'échelles de la turbulence dans la couche de cisaillement. L'identification des larges structures tourbillonnaires présentes à l'ouverture de la cavité paraît plus délicate que dans le cas laminaire, en raison de la forte concentration de fines structures. Cependant, ces larges perturbations induisent une forte déviation de la nappe de vorticité incidente, si bien qu'il est



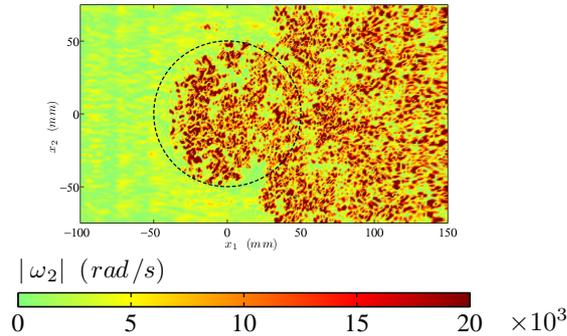
**Fig. 7.34:** Norme de la vorticité instantanée dans la direction  $\mathbf{e}_2$   $|\omega_2|$  dans le plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , pendant un cycle d'oscillation. Cas turbulent.

possible de repérer leur position en observant l'ondulation moyenne fréquence de la couche de cisaillement, qui indique assez nettement la présence d'un mode II. Ce procédé de localisation reste cependant relativement approximatif, en raison de la superposition sur cette ondulation de déviations locales hautes fréquences. Il n'offre donc pas la précision de localisation que la méthode par identification des minima locaux de pression fluctuante propose.

On peut néanmoins apercevoir une structure tourbillonnaire de grande taille dans la couche de cisaillement sur le point d'impacter le bord aval de la cavité à l'instant  $t_0 + 6\tilde{T}/8$ . Cet impact génère énormément de vorticité dans la recirculation principale dans la cavité, notamment au niveau de la lèvre aval. La recirculation principale qui a lieu dans la cavité est caractérisée par un contenu turbulent plutôt hautes fréquences. Ces fines structures turbulentes proviennent de l'impact des tourbillons contenus dans la couche de cisaillement au coin aval de la cavité. Une comparaison avec la figure 7.29 indique que la recirculation est bien plus turbulente que dans le cas d'un écoulement incident laminaire, ce que montraient également les cartographies des intensités des fluctuations longitudinales et verticales, à la partie 7.4.2.

Le champ de vorticité transverse  $\omega_2$  peut être visualisé dans le plan de coupe  $x_3 = \delta/8$  à la figure 7.35. On n'a représenté ce champ uniquement à l'instant  $t_0 + 5\tilde{T}/8$ , c'est-à-dire très peu de temps avant l'impact d'une large structure tourbillonnaire au coin aval, d'après la figure 7.34. La forte concentration de fines structures turbulentes ne permet pas d'identifier clairement sur cette cartographie la large structure tourbillonnaire. La vorticité non-nulle à

l'amont de la cavité est la conséquence d'un gradient vertical de vitesse moyenne longitudinale non-nul, associée à la présence de perturbations dans l'écoulement moyen incident.



**Fig. 7.35:** Norme de la vorticité instantanée dans le plan  $x_3 = \delta/8$ , à l'instant  $t = t_0 + 5\tilde{T}/8$ . La position de la cavité est représentée par le cercle en pointillés. Cas turbulent.

### 7.6.2.3 Critère $Q$ instantané

La figure 7.36 présente un chronogramme du critère  $Q$  dans le plan  $x_2 = 0$  pendant une période acoustique. Le premier constat est que l'identification et l'isolation précises des larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement sont rendues complexes en raison de la forte concentration de petites échelles de la turbulence. L'isolation des tourbillons de grandes tailles nécessiteraient la mise en place d'un filtre passe bas sur la vitesse instantanée ou sur le critère  $Q$ . Plusieurs filtres ont été testés à l'aide du module *Filter Design 6.10* de *Matlab 7.7* mais aucun n'a donné de résultats satisfaisants. En effet, ces larges structures semblent être constituées en fait d'une multitude de fines structures [43], qui sont alors intégralement filtrées par le filtre passe bas. Les larges structures sont toutefois approximativement identifiables grâce notamment à l'ondulation de la couche de cisaillement qu'elles engendrent. La surconcentration à des endroits de fines structures tourbillonnaires tend enfin à suggérer la présence d'une structure de plus grande taille.

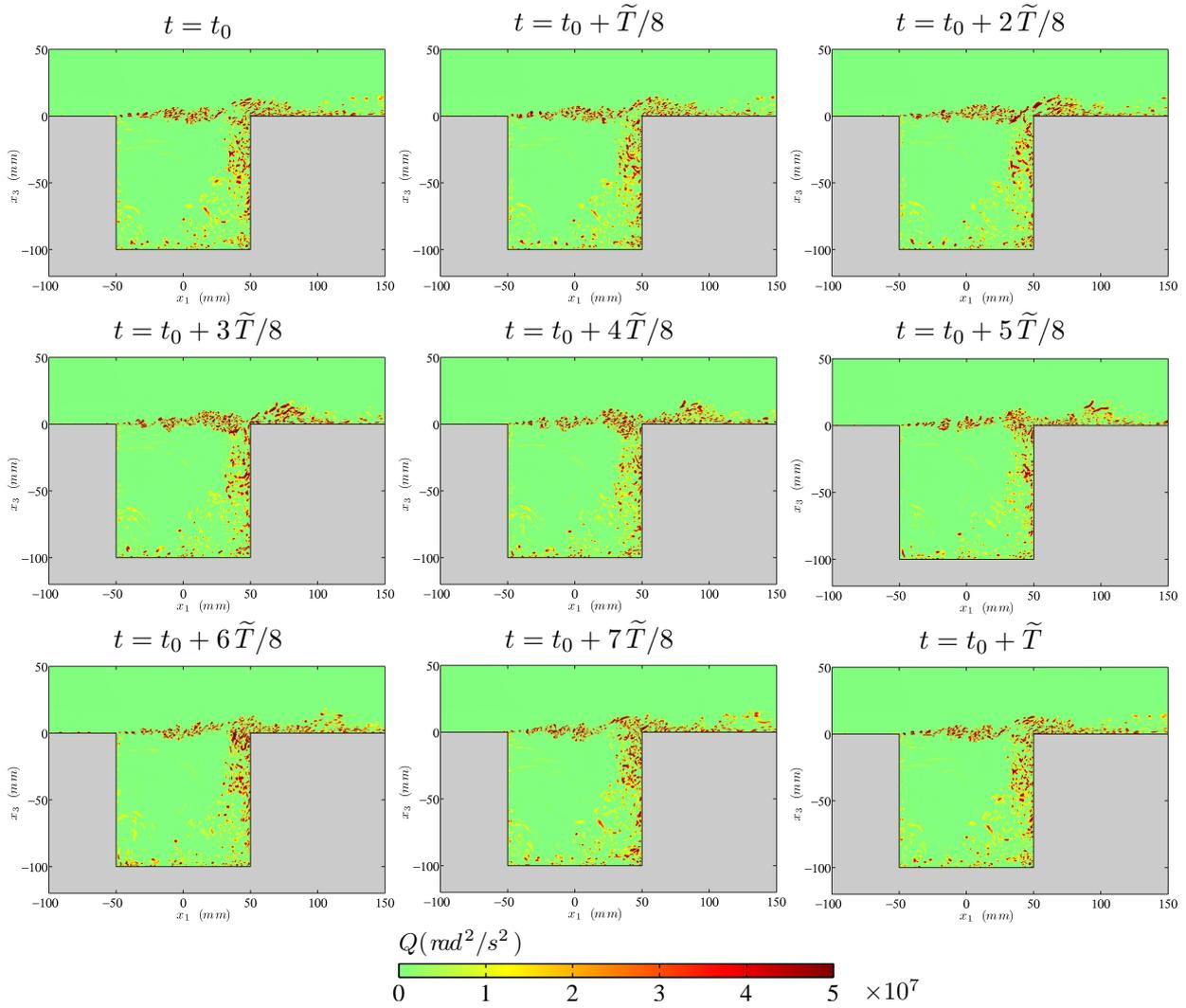
Le chronogramme du critère  $Q$  confirme également le phénomène d'appariement de tourbillons dans la couche de cisaillement que suggérait les visualisations de la pression fluctuante à l'ouverture de la cavité. Les figures aux instants  $t_0 + 7\tilde{T}/8$     $t_0 + 2\tilde{T}/8$ , en répétant le cycle, mettent très nettement en évidence l'appariement de deux structures de taille moyenne à la position  $x_1 = 15 \text{ mm}$ .

## 7.7 Déphasage pression–vitesse au coin aval

### 7.7.1 Opérateur de moyennage en phase

Les quantités observées en temps sont fortement périodiques, de période  $\tilde{T}$ . L'opérateur de moyennage en phase permet d'obtenir un signal moyen sur un cycle d'oscillation. En suivant Reynolds & Hussain [188], il est possible de décomposer un signal temporel  $u(t)$  presque périodique en une valeur moyenne  $\bar{u}$ , une fluctuation périodique  $\tilde{u}$  de période  $\tilde{T}$ , et une fluctuation aléatoire  $u''$ . On a donc :  $u = \bar{u} + \tilde{u} + u''$ . La moyenne en phase  $\bar{u}^\phi$  de la quantité  $u$  est définie sur  $[0, \tilde{T}[$  et s'écrit :

$$\bar{u}^\phi(t) = \bar{u} + \tilde{u}$$



**Fig. 7.36:** Critère  $Q$  instantané dans le plan  $(O, e_1, e_3)$ , pendant un cycle d'oscillation. Les zones où  $Q < 0$  sont représentées en vert. Cas turbulent.

Elle peut être évaluée par l'expression suivante, si la période  $\tilde{T}$  est stable en temps :  $\forall t \in [0, \tilde{T}[$ ,

$$\bar{u}^\phi(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(t + n\tilde{T}) \quad (7.1)$$

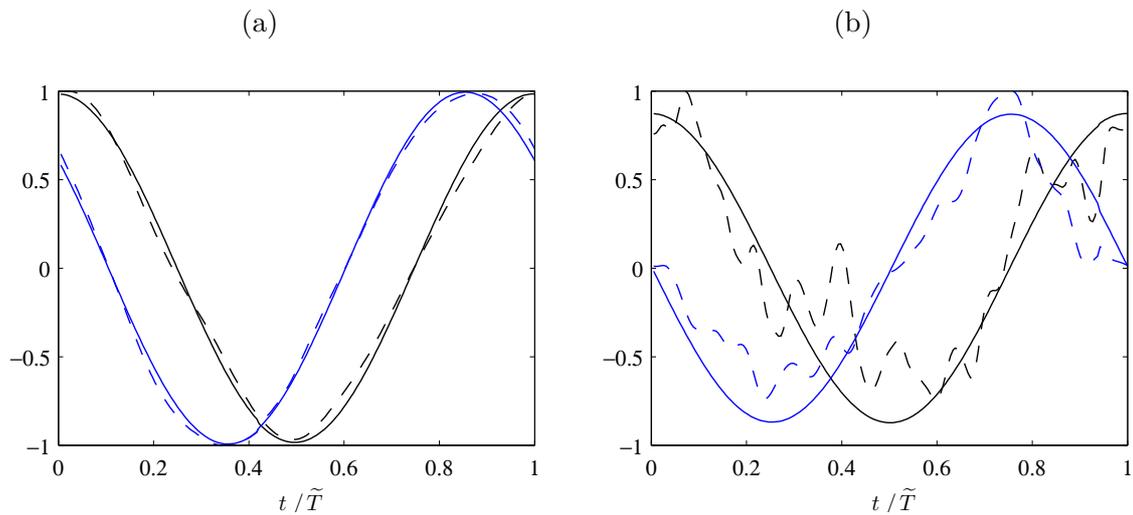
où  $N$  est le nombre de périodes disponible dans l'enregistrement du signal  $u(t)$ . Bien entendu, plus le nombre de période dans l'enregistrement temporel de la quantité  $u$  est grand, meilleure est cette estimation.

Dans le cas de la simulation avec un écoulement turbulent, on observe des variations de la période  $\tilde{T}$  en fonction du temps, comme l'indique la figure 7.4. Un déphasage progressif peut donc être introduit dans l'expression (7.1), qui n'est alors plus adéquate pour calculer une moyenne en phase. La moyenne en phase est alors estimée à partir du signal pseudo-périodique de pression acoustique dans la zone d'écoulement libre, que l'on approxime au sens des moindres carrés par une fonction harmonique, sur chaque pseudo-période. Cette approximation permet d'obtenir la phase locale du signal de pression. La phase locale du signal  $u$  est obtenue simplement en considérant un déphasage constant entre cette quantité et le signal de pression au point d'observation. La moyenne en phase  $\bar{u}^\phi$  est enfin réalisée en effectuant une moyenne arithmétique des termes  $u(t)$  aux instants  $t$  correspondant à une phase égale sur le signal de pression. Ceci permet de réduire considérablement les erreurs que

l'on obtiendrait en employant directement l'expression (7.1).

### 7.7.2 Résultats

On a représenté sur les figures 7.37(a) et (b) par des traits en pointillés les moyennes en phase des signaux de pression et de vitesse verticale à proximité du coin aval, pour les cas laminaire et turbulent respectivement. La porteuse, de fréquence égale à la fréquence tonale du rayonnement acoustique généré par la cavité, est représentée par un trait plein. La succession d'impacts de larges structures tourbillonnaires contenues dans la couche de cisaillement au bord aval conduit à des oscillations de vitesse verticale à son voisinage, représentées en bleu sur la figure. De même l'interaction de la vorticité avec la paroi aval induit de fortes oscillations de pression, représentées en noir sur la figure. Dans le cas laminaire, la figure 7.37(a) indique que le signal de vitesse est en avance de phase de  $0.29\pi$  par rapport au signal de pression. On remarque enfin que les moyennes en phase de ces signaux ne sont que très faiblement bruitées en raison de la très bonne cohérence entre les larges structures turbulentes successives impactant le coin aval de la cavité.



**Fig. 7.37:** Moyenne en phase normalisée de la pression fluctuante  $\bar{p}^{\phi}$  (---) et de la vitesse verticale fluctuante  $\bar{u}_3^{\phi}$  (---) au point d'observation (48.5, 0, 0) mm. On a représenté en trait plein la composante de fréquence  $\tilde{f} = 1/\tilde{T}$  de ces signaux. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

Ce n'est pas tout-à-fait le cas pour la simulation en turbulent. La moyenne en phase des signaux présentent en effet des variations plutôt basses et moyennes fréquences. Cela est le fait d'une cohérence moindre entre deux larges structures tourbillonnaires successives impactant le coin aval, et de signaux en temps relativement courts. Ainsi le nombre de pseudo-périodes  $N$ , de l'ordre de la centaine comme dans le cas laminaire, est finalement modeste et ne permet pas de s'affranchir complètement de ces variations basses et moyennes fréquences. La figure 7.37(b) indique que le signal de pression et le signal de vitesse sont presque en quadrature.

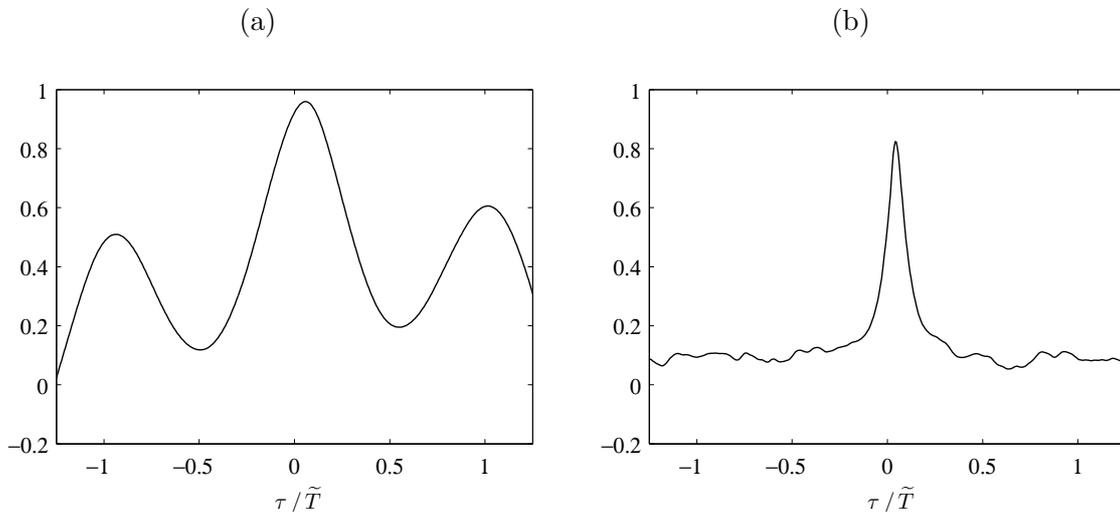
La différence de déphasage entre le cas turbulent et le cas laminaire est donc d'environ  $\pi/10$ . Ceci correspond à une avance en temps de  $\tilde{T}/20$ , soit approximativement une demi-image sur les chronogrammes représentés précédemment. Ceci corrobore le déphasage observé sur l'état de la couche de cisaillement entre les figures 7.5(a) pour le cas laminaire et 7.5(b) pour le cas turbulent, en ayant synchronisé les oscillations de pression acoustique.

## 7.8 Vitesse de convection à l'ouverture de la cavité

### 7.8.1 Vitesse locale de convection

L'accès à la vitesse locale de convection des tourbillons  $\mathbf{u}_c$  à l'ouverture de la cavité nécessite le calcul de la fonction de corrélation temporelle  $\mathcal{R}^t$ , définie par l'expression (2.3), entre un point de référence  $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, 0)$  et plusieurs points contenus dans un voisinage  $\mathcal{V}$  du point de référence. La composante verticale du point de référence est toujours nulle car on ne considère ici uniquement l'ouverture de la cavité. Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à la composante longitudinale de la vitesse de convection. Les points environnants le point de référence vérifient donc simplement :  $\mathbf{x} = (x_1^\circ + j\Delta x_1, x_2^\circ, 0)$ , avec  $j \in \{-4, -3, \dots, 4\}$ .

La figure 7.38 propose une représentation de la fonction de corrélation temporelle entre le point de référence  $(0, 0, 0)$  et le point de calcul  $(4\Delta x_1, 0, 0)$ . Cette fonction présente un maximum global. Le décalage temporel  $\tau$  réalisant le maximum de corrélation permet d'accéder au temps de convection entre les deux positions considérées. En réalisant ce processus en

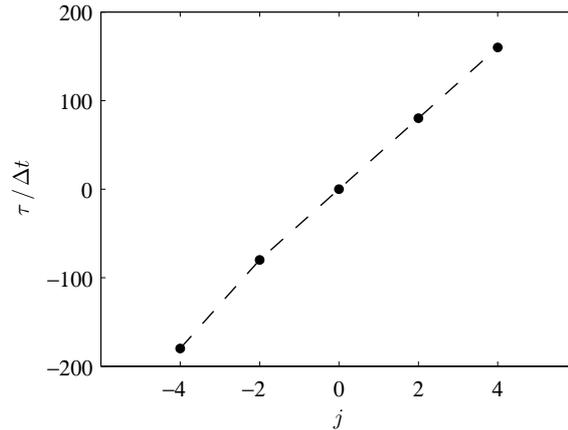


**Fig. 7.38:** Courbe représentative de la fonction de corrélation temporelle  $\mathcal{R}^t$  entre la position de référence  $(0, 0, 0)$  et le point de calcul  $(4\Delta x_1, 0, 0)$ , en fonction du décalage temporel  $\tau$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

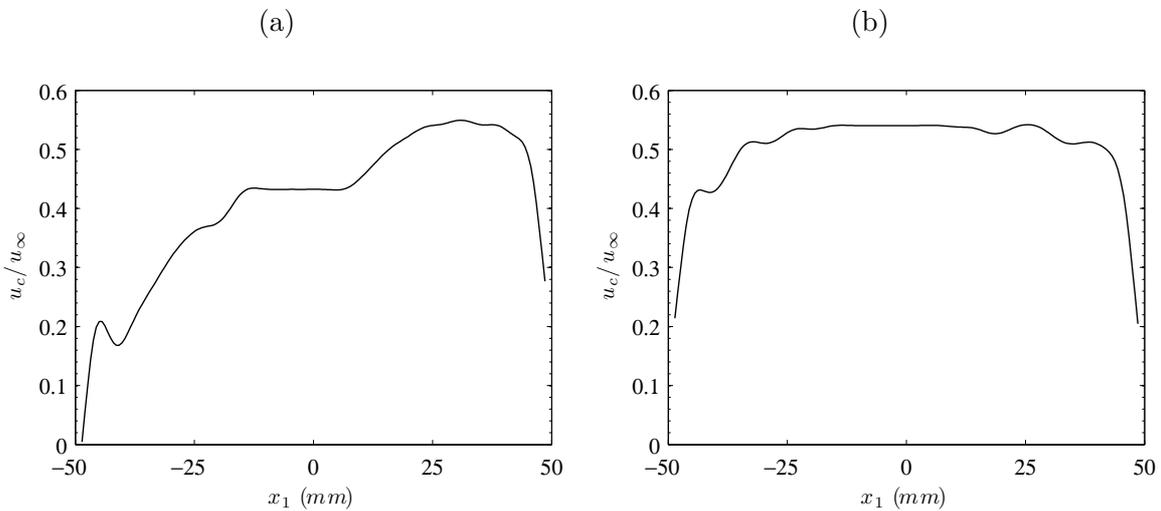
chacun des points du voisinage  $\mathcal{V}$ , on obtient une courbe indiquant le temps de convection, en fonction de la distance de convection par rapport à la position du point de référence, comme l'illustre la figure 7.39. Une régression linéaire de la fonction  $j\Delta x_1 \mapsto \tau(j\Delta x_1)$  fournit enfin une estimation de la vitesse locale de convection  $u_c(x_1^\circ)$ .

Ce processus est réalisé sur l'axe  $x_2 = 0$  en chacun des points longitudinaux du maillage à l'ouverture de la cavité. Les résultats sont synthétisés à la figure 7.40 pour les deux cas d'écoulement incident traités. Cette figure montre la courbe représentative de la vitesse locale de convection des tourbillons à l'ouverture de la cavité. Le profil longitudinal de la vitesse de convection est significativement différent entre les deux cas considérés. Dans le cas turbulent, la vitesse de convection croît de manière rapide sur le premier quart de la cavité, pour atteindre la valeur de  $u_c/u_\infty = 0.54$ . La vitesse de convection est ensuite relativement constante sur les trois derniers quarts de la cavité, à l'exception du voisinage du coin aval, où elle décroît assez nettement en raison de l'impact des tourbillons sur le bord. Dans le cas laminaire, la vitesse de convection croît plus lentement sur le premier quart de la cavité. Elle marque un long palier à  $u_c/u_\infty = 0.43$  aux environs de  $x_1 = 0$ , puis croît à nouveau. Elle atteint un maximum de  $u_c/u_\infty = 0.55$  vers  $x_1 = 25 \text{ mm}$ , puis décroît fortement à proximité du bord aval de la cavité.

Le calcul de la vitesse locale de convection est également réalisé en reproduisant le processus décrit pour l'axe  $x_2 = 0$  en chacune des positions transverses du maillage à l'ouverture



**Fig. 7.39:** Décalage temporel  $\tau$  assurant le maximum de corrélation  $\mathcal{R}^t$  entre la position d'observation  $(0, 0, 0)$  et les points  $(x_1^o + j\Delta x_1, 0, 0)$ , avec  $j \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ . Cas turbulent. Les points de calcul sont représentés par le symbole  $\bullet$ .



**Fig. 7.40:** Vitesse de convection  $u_c$  à la position  $(x_1, 0, 0)$  (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

de cavité. On obtient les cartographies présentées à la figure 7.41. La cartographie issue de la simulation en laminaire corrobore ce que suggérait le chronogramme de critère  $Q$  dans le plan de coupe  $x_3 = \delta/3$  (figure 7.31). Elle indique en effet que la vitesse locale de convection des tourbillons est plus élevée sur la première moitié longitudinale de la cavité au niveau de son axe médian  $x_2 = 0$  que proche des bords latéraux. Ceci tend à expliquer pourquoi les larges structures tourbillonnaires que l'on observe sur le chronogramme représenté à la figure 7.31 sont en phase transversalement à partir de la mi-cavité, alors qu'elle sont nettement déformées en forme de croissant lorsqu'elles apparaissent au coin amont, en raison principalement de sa courbure. La cartographie obtenue pour le cas turbulent indique que la vitesse de convection est environ constante sur l'ensemble de l'ouverture de la cavité, à l'exception du bord aval et à proximité du bord amont. Les bords latéraux de la cavité sont caractérisés par une vitesse de convection plus élevée ( $u_c/u_\infty \geq 0.6$ ), ce qui n'est pas le cas dans le cas laminaire.

## 7.8.2 Temps moyen de traversée de l'ouverture de la cavité

La donnée de la vitesse locale de convection des tourbillons permet de calculer pour une position transverse  $x_2$  donnée, le temps moyen que mettent les larges structures tourbillonnaires pour traverser l'ouverture de la cavité. Le temps moyen de traversée  $t_t$  est calculé à la

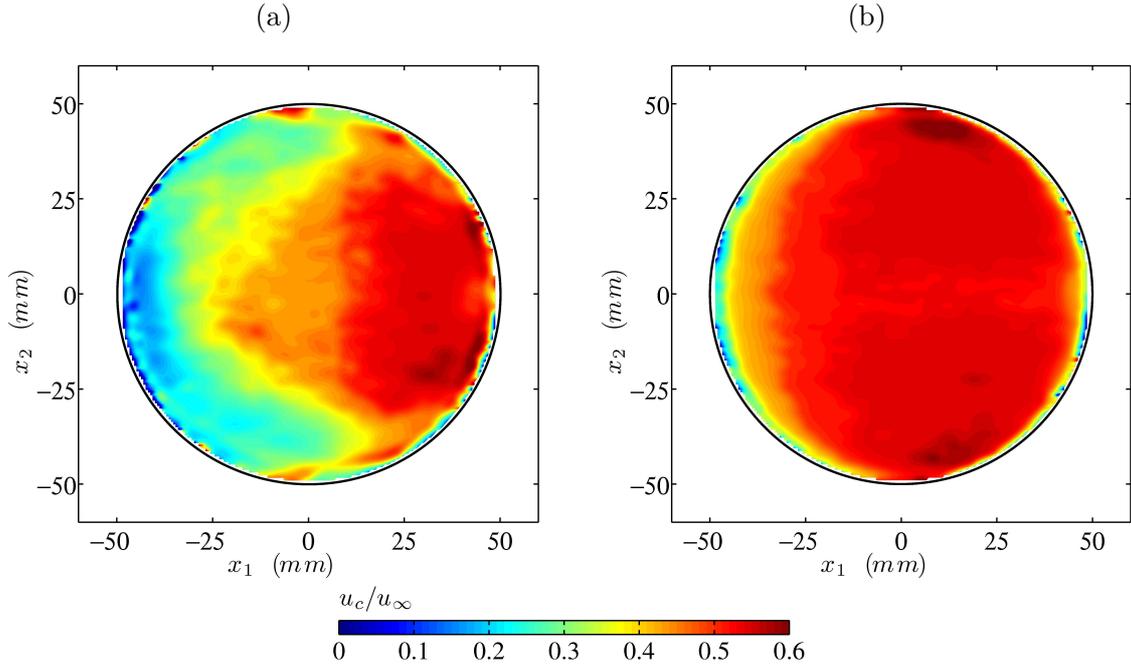


Fig. 7.41: Vitesse de convection  $u_c$  dans le plan  $x_3 = 0$ . (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

position transverse  $x_2$  par l'expression :

$$t_t(x_2) = \int_{-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_2^2}} \frac{dx_1}{u_c(x_1, x_2, 0)}$$

En pratique, on n'intègre longitudinalement qu'à partir du second point de maillage à l'intérieur de la cavité, jusqu'à l'avant dernier point de maillage interne, afin d'éviter le cercle  $r = R$  où la vitesse de convection n'est pas définie ou nulle.

La figure 7.42 présente l'évolution du temps moyen de traversée en fonction de la position transverse  $x_2$ . La traversée de l'ouverture de la cavité est plus longue dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. Sur l'axe médian  $x_2 = 0$ , le temps moyen de traversée est de  $t_t(0) = 2.72 \text{ ms}$  dans le cas turbulent, et  $t_t(0) = 3.51 \text{ ms}$  dans le cas laminaire.

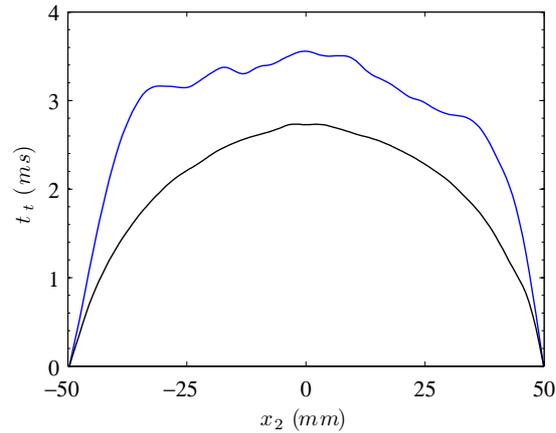
On peut dès lors étudier si l'hypothèse du modèle d'Elder qui consiste à supposer que le temps moyen de convection d'une perturbation à l'ouverture de la cavité est un multiple de la période acoustique<sup>1</sup>, est vérifiée ou non dans les cas simulés. La quantité  $t_t(0)\tilde{f}$  vaut 1.81 dans le cas turbulent, et 2.29 dans le cas laminaire. Ces valeurs sont relativement éloignées de la valeur théorique de 2, associée au mode II dominant la couche de cisaillement. Elles indiquent que dans les deux cas testés, le déplacement acoustique peut être non-nul lorsque la déviation convectée arrive à proximité du coin aval de la cavité. Des écarts peuvent donc être observés entre le déplacement total de l'interface obtenus numériquement et le déplacement total estimé à partir de l'expression (3.2).

### 7.8.3 Vitesse moyenne de convection

Une vitesse moyenne de convection  $U_c$  peut être estimée à partir du temps de traversée moyen de l'ouverture de la cavité par :

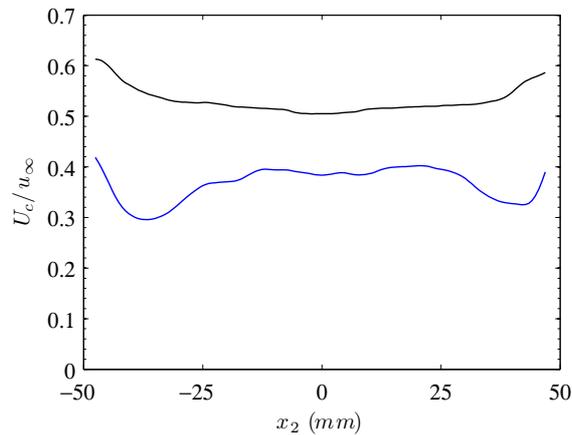
$$U_c(x_2) = \frac{2\sqrt{R^2-x_2^2}}{t_t(x_2)}$$

<sup>1</sup>afin de négliger le terme acoustique dans l'expression du déplacement total de l'interface à proximité du coin aval de la cavité (voir l'expression (3.2))



**Fig. 7.42:** Temps moyen de traversée  $t_t$  de l'ouverture de la cavité dans le plan  $x_3 = 0$  en fonction de la position transverse. — : Cas laminaire. — : Cas turbulent.

La figure 7.43 propose une visualisation de la courbe représentative de vitesse moyenne de convection en fonction de la position transverse. Dans le cas turbulent, celle-ci varie très peu



**Fig. 7.43:** Vitesse moyenne de convection  $U_c$  en fonction de la position transverse  $x_2$ . — : Cas laminaire. — : Cas turbulent.

sur l'intervalle  $x_2 \in [-30, 30]$  mm, valant environ  $U_c/u_\infty \simeq 0.51$ , et tend à augmenter près des bords latéraux. Dans le cas laminaire, la vitesse moyenne de convection présente davantage de variations transversales. Elle vaut  $U_c/u_\infty \simeq 0.40$  à la position  $x_2 = 0$ . Les bords latéraux de la cavité sont caractérisés par une vitesse moyenne de convection relativement faible, de l'ordre de  $U_c/u_\infty \simeq 0.31$ .

La donnée de la vitesse moyenne de convection à l'axe permet de retrouver la fréquence aérodynamique des perturbations par la relation  $f = U_c/\lambda_v$ , où  $\lambda_v$  est la longueur d'onde aérodynamique que l'on a estimé précédemment lors de l'étude des larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de cisaillement. Dans le cas laminaire, on obtient  $f = 651$  Hz, et  $f = 662$  Hz dans le cas turbulent. Ces fréquences correspondent tout-à-fait aux fréquences dominant le spectre acoustique rayonné par la cavité dans ces deux cas respectifs.

## 7.9 Résonance acoustique dans la cavité

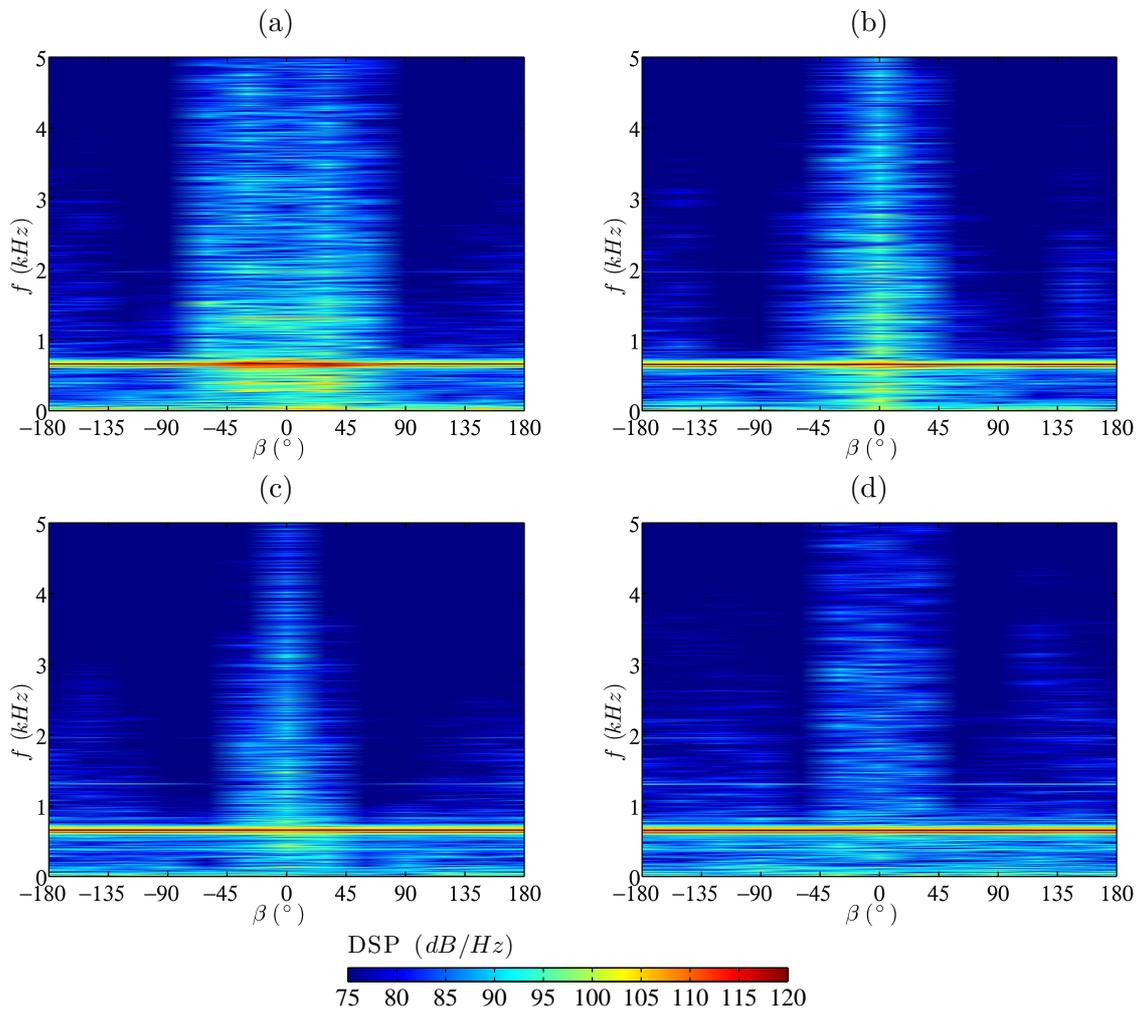
Cette partie est consacrée à l'étude de la pression fluctuante aux parois de la cavité. Les spectres présentés sont obtenus par la méthode de Welch sur 2 séquences, avec un taux de recouvrement de 33%, et à l'aide d'un fenêtrage de Hanning. La durée d'acquisition est

relativement courte ; une durée d'acquisition de l'ordre de celle des expériences décrites au chapitre 2 aurait un coût numérique prohibitif. La résolution fréquentielle des spectres est donc nécessairement basse, de l'ordre de  $\Delta f = 6 \text{ Hz}$  dans les spectres présentés. Ceci s'accompagne également d'un rapport signal sur bruit relativement faible.

Pour plus de clarté, on examine séparément les cas laminaire et turbulent.

### 7.9.1 Cas laminaire

Les figures 7.44(a), (b), (c) et (d) présentent les spectres des fluctuations de pression à la paroi latérale de la cavité en fonction de la position azimutale  $\beta$ , pour des profondeurs respectives de  $x_3 = -10, -25, -50$  et  $-75 \text{ mm}$ . La zone d'impact de la couche de cisaillement est mise en évidence par la frange large bande intense s'étirant sur le secteur angulaire  $\beta \in [-60^\circ, 60^\circ]$  centré sur le coin aval  $\beta = 0^\circ$  à la profondeur  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . La largeur de cette



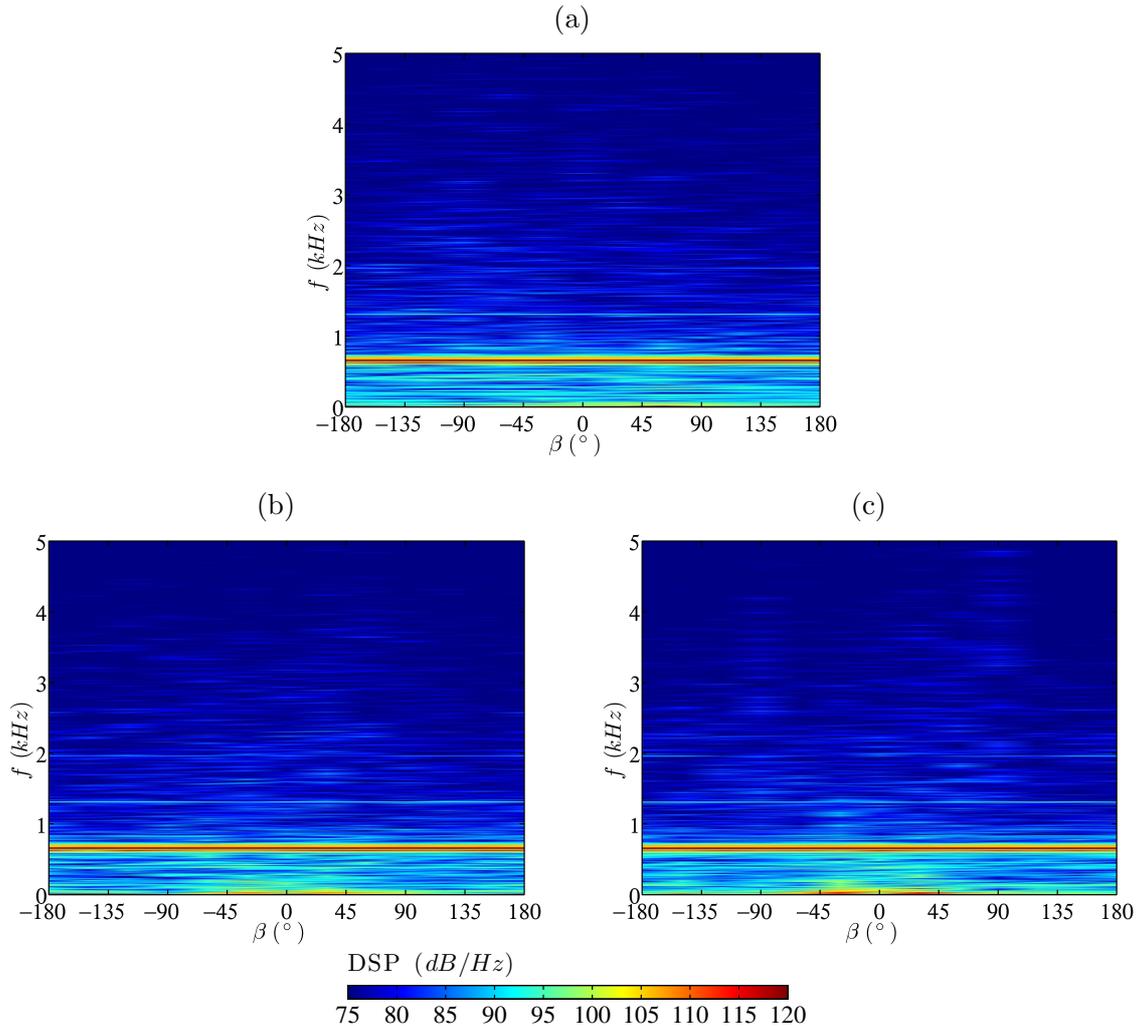
**Fig. 7.44:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi latérale de la cavité, en fonction des positions angulaires  $\beta$  et de profondeur  $x_3$ . (a)  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . (b)  $x_3 = -25 \text{ mm}$ . (c)  $x_3 = -50 \text{ mm}$ . (d)  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Cas laminaire.

frange tend à se réduire en fonction de la profondeur, comme l'indiquent les figures 7.44(b) à (d), ce qui n'était pas observé expérimentalement (voir la figure 2.20). Pour des positions angulaires au-delà de  $\pm 65^\circ$ , le spectre n'est pas affecté par l'impact de la couche cisailée et les pics restants sont donc de nature acoustique.

Quelle que soit la profondeur, la fréquence  $f = 654 \text{ Hz}$  marque très fortement les spectres des fluctuations de pression, aussi bien dans la zone d'impact de la couche de cisaillement que pour les autres positions angulaires non affectées par l'impact. Cette fréquence, proche de la

fréquence de résonance du premier mode de profondeur de la cavité cylindrique considérée (voir le tableau 2.1), tend à indiquer un phénomène de résonance forcée, pilotée vraisemblablement par le mode II de la couche cisailée. Les figures 7.44(c) et (d) indiquent aussi la présence de la première harmonique, de fréquence  $f \simeq 1310 \text{ Hz}$  dans la demi-cavité inférieure.

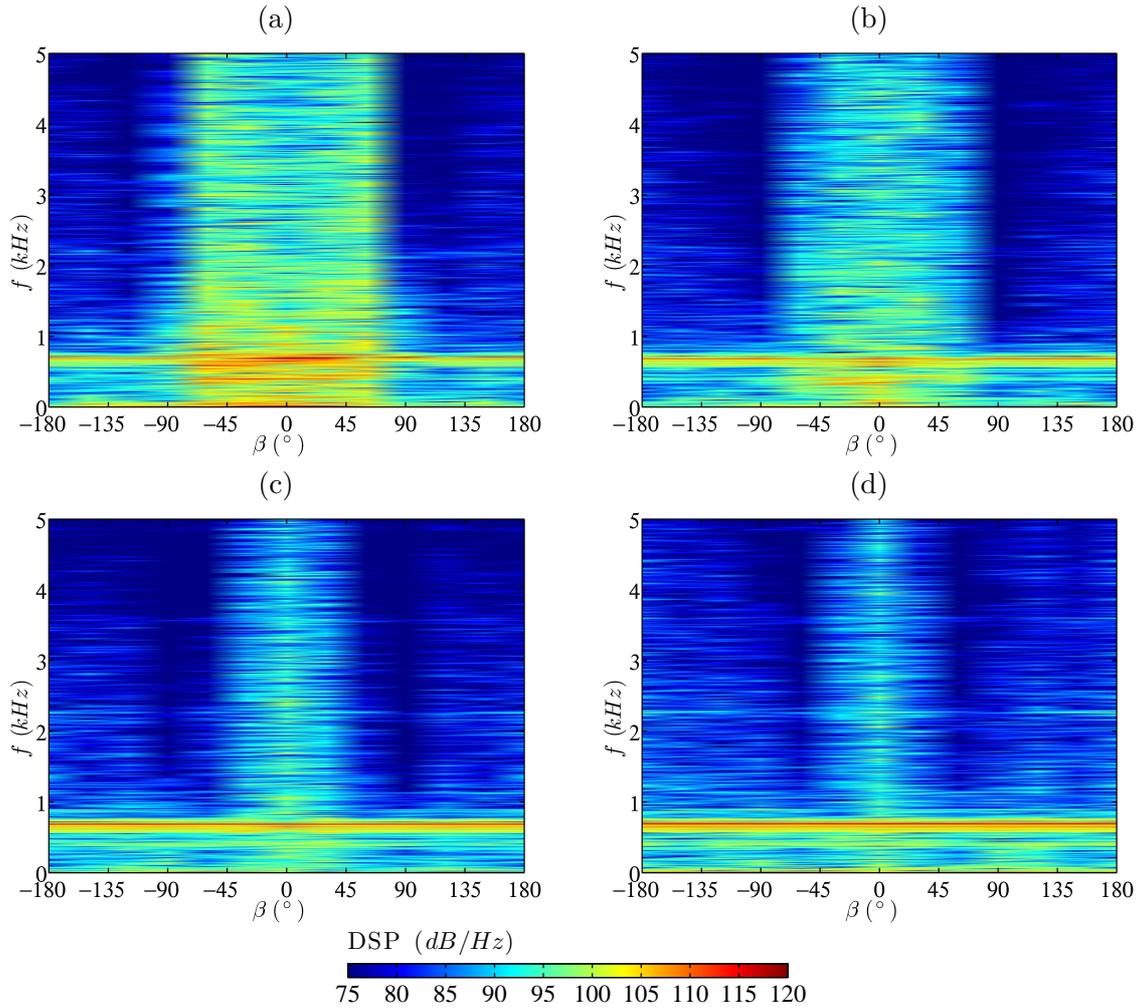
Ces résultats sont confirmés par les figures 7.45(a), (b) et (c), qui montrent les spectres des fluctuations de pression à la paroi de fond en fonction de la position azimutale, pour différentes positions radiales, respectivement  $r = 12.5$ ,  $25$  et  $37.5 \text{ mm}$ . En effet, ces spectres sont aussi très fortement marqués à la fréquence  $f = 654 \text{ Hz}$ , quelle que soit la position radiale. On remarque également l'émergence de la première harmonique, voire également de la seconde harmonique à  $f \simeq 1960 \text{ Hz}$ .



**Fig. 7.45:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi de fond de la cavité, en fonction des positions angulaires  $\beta$  et radiale  $r$ . (a)  $r = 12.5 \text{ mm}$ . (b)  $r = 25 \text{ mm}$ . (c)  $r = 37.5 \text{ mm}$ . Cas Laminaire.

### 7.9.2 Cas turbulent

Les spectres des fluctuations de pression à la paroi latérale de la cavité, obtenus numériquement dans le cas turbulent, sont présentés aux figures 7.46(a), (b), (c) et (d), pour différentes profondeurs dans la cavité. Une frange large bande correspondant au secteur angulaire  $\beta \in [-60^\circ, 60^\circ]$  et présentant des niveaux intenses se démarque très nettement. Elle correspond à la zone d'impact des structures tourbillonnaires d'échelles multiples présentes dans la couche cisailée au coin aval. La largeur de cette frange tend à diminuer en fonction de la cavité. On remarque également que des composantes basses fréquences intenses (autour des

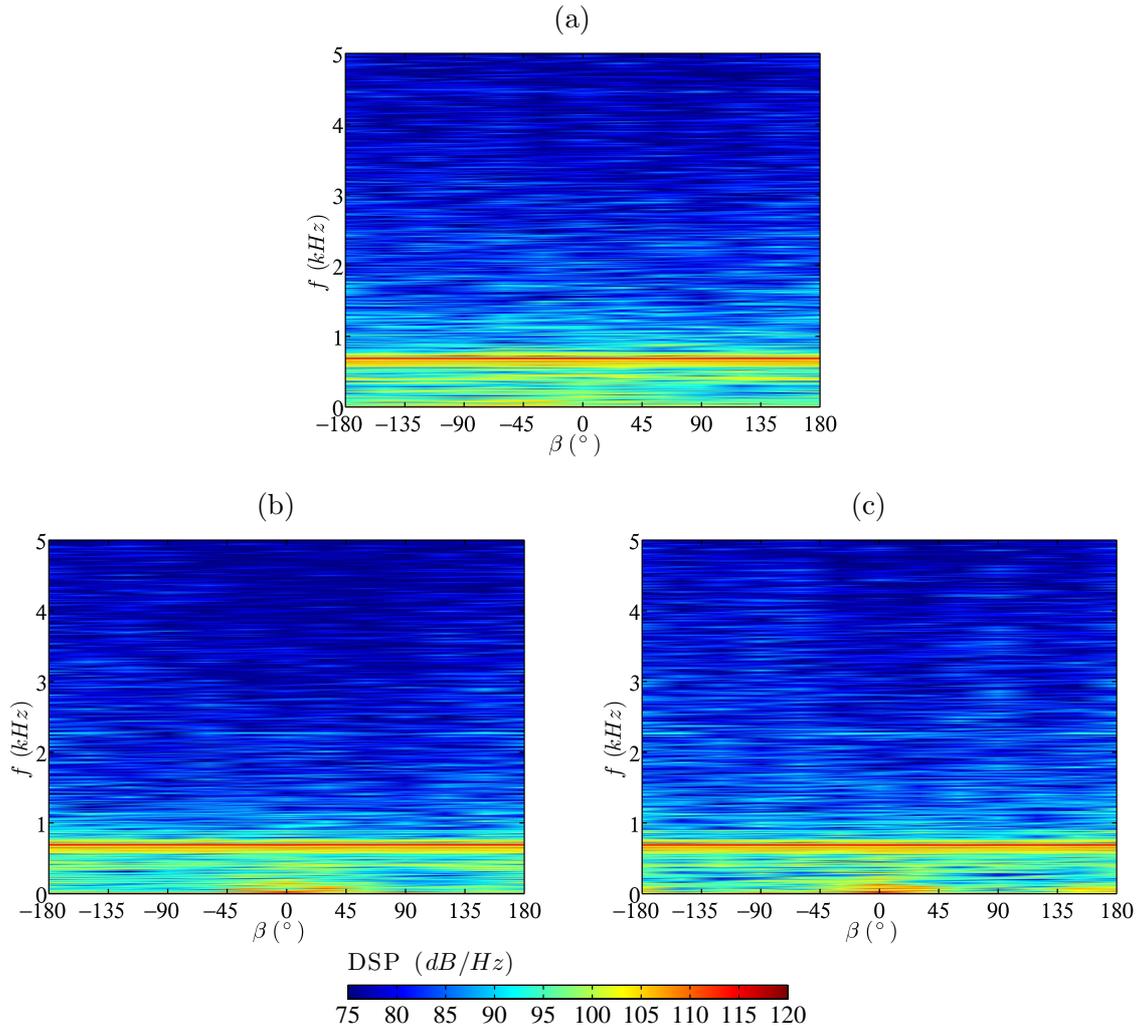


**Fig. 7.46:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi latérale de la cavité, en fonction des positions angulaires  $\beta$  et de profondeur  $x_3$ . (a)  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . (b)  $x_3 = -25 \text{ mm}$ . (c)  $x_3 = -50 \text{ mm}$ . (d)  $x_3 = -75 \text{ mm}$ . Cas turbulent.

400 Hz) sont présentes dans la région d'impact sur le coin aval. Elles sont visibles uniquement sur le spectre correspondant à une profondeur de  $x_3 = -10 \text{ mm}$ . Pour des positions angulaires au-delà de  $\pm 65^\circ$ , le spectre n'est visiblement pas affecté par l'impact de la couche cisailée et les pics restants sont donc acoustiques. Deux fréquences se démarquent assez nettement. Il s'agit de la fréquence  $f = 660 \text{ Hz}$ , qui domine très largement les spectres présentés quelle que soit la profondeur d'étude, et de la fréquence  $f \simeq 2.25 \text{ kHz}$ . D'après le tableau 2.1, cette fréquence indique la présence du premier mode azimutal de résonance, combiné au premier de profondeur. Les spectres obtenus numériquement se comparent enfin assez favorablement à ceux de l'expérience présentés précédemment aux figures 2.20(a) à (d), aussi bien en terme de niveaux que de fréquences se démarquant, malgré une différence assez significative de la résolution fréquentielle des spectres<sup>2</sup>.

Les figures 7.47(a), (b) et (c) présentent les spectres des fluctuations de pression à la paroi de fond de la cavité en fonction de la position azimutale, pour différentes positions radiales. Outre le pic intense à  $f = 660 \text{ Hz}$ , ces spectres mettent en évidence l'émergence d'autres fréquences. Il s'agit de la fréquence  $f = 2.25 \text{ kHz}$  correspondant au premier mode azimutal de résonance, combiné au premier de profondeur (nettement visible sur les figures 7.47 (b) et (c)), mais également de la fréquence  $f = 4.4 \text{ kHz}$ , que l'on distingue nettement sur la figure 7.47(a). Une comparaison aux résultats expérimentaux, exposés à la figure 2.21, indique que

<sup>2</sup>La résolution fréquentielle est de  $1.5 \text{ Hz}$  expérimentalement, et de  $7 \text{ Hz}$  numériquement



**Fig. 7.47:** Densité spectrale de puissance au niveau de la paroi de fond de la cavité, en fonction des positions angulaires  $\beta$  et radiale  $r$ . (a)  $r = 12.5$  mm. (b)  $r = 25$  mm. (c)  $r = 37.5$  mm. Cas Turbulent.

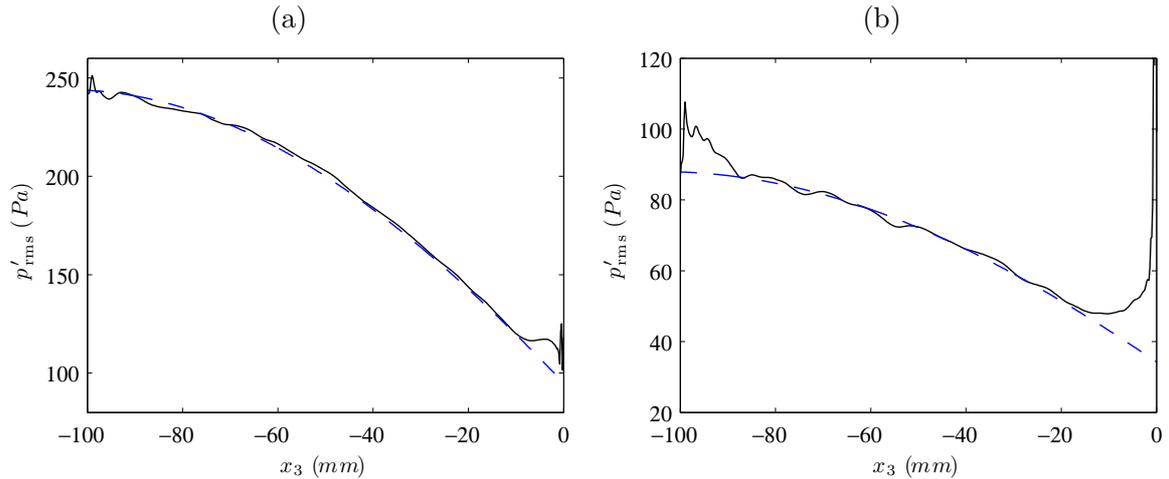
la simulation numérique permet de retrouver fidèlement les spectres obtenus par l'expérience. La qualité de la comparaison concerne aussi bien les niveaux que les fréquences émergentes des spectres acoustiques.

On peut noter enfin que la présence de plusieurs modes acoustiques dans la cavité permet de discriminer assez nettement le comportement acoustique de la cavité dans le cas turbulent du cas laminaire, pour lequel n'émergent que des harmoniques du premier mode de profondeur dans les spectres de pression aux parois.

### 7.9.3 Moyenne quadratique des fluctuations de pression à la paroi latérale

Les figures 7.48(a) et (b) présentent les variations des fluctuations RMS de pression avec la position verticale  $x_3$  dans la cavité, à la paroi amont de la cavité ( $\beta = 180^\circ$ ), respectivement dans les cas laminaire et turbulent. Cette variation peut être comparée à la variation verticale de la moyenne quadratique des fluctuations de pression dans le cas purement acoustique d'une résonance dans le premier mode de profondeur, représentée en tirets bleus sur les figures 7.48(a) et (b). Il s'agit du mode quart d'onde, donné par :

$$p'_{\text{rms}} \propto \sin\left(\frac{2\pi x_3}{4(H + H')}\right)$$



**Fig. 7.48:** Moyenne quadratique des fluctuations de pression à la paroi amont de la cavité ( $\beta = 180^\circ$ ) en fonction de la position verticale  $x_3$  dans la cavité. (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent. --- : Moyenne quadratique des fluctuations de pression dans le cas purement acoustique d'une résonance dans le premier mode (quart d'onde) de profondeur.

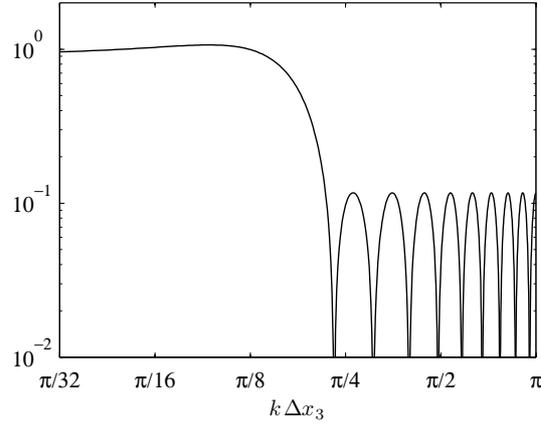
Aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent, on observe un très bon accord entre la variation verticale issue du calcul et la variation verticale du cas de résonance acoustique seule à l'intérieur de la cavité. Les écarts observés, proche de la paroi de fond de cavité, s'expliquent par la présence de perturbations dans la recirculation en fond de cavité. Les écarts que l'on note à l'ouverture de la cavité proviennent de la destabilisation de la couche limite amont au niveau du point de séparation, alors qu'aucun écoulement n'est considéré dans le cas purement acoustique de résonance. Ces résultats confirment donc, en présence de l'écoulement, l'existence à l'intérieur de la cavité d'un mode de résonance acoustique dans le premier mode de profondeur.

## 7.10 Déplacement de l'interface

On souhaite observer au cours d'un cycle d'oscillation le déplacement de l'interface, séparant aérodynamiquement l'intérieur de l'extérieur de la cavité, et définie au sens d'Elder, comme l'ensemble des points où le profil de vitesse longitudinale  $u_1$  présente un point d'inflexion. Son obtention à partir des simulations demande cependant un traitement numérique visant à minimiser l'influence des petites perturbations hautes fréquences présentes dans la couche de cisaillement, notamment pour le cas turbulent.

### 7.10.1 Méthode de détermination de l'interface

La première étape consiste à effectuer un moyennage en phase du champ de vitesse longitudinale  $u_1$ . Ce champ est ensuite filtré plusieurs fois à l'aide d'un filtrage sélectif passe-bas pour retirer les fluctuations hautes fréquences encore présentes dans le champ moyenné en phase. On fixe la fréquence de coupure à  $k\Delta x_3 = \pi/5$ , ce qui permet de retirer la majorité des oscillations de longueur d'onde inférieure à 10 points de maillage. Le filtre, de type *equiripple*, est construit à l'aide du module *Filter Design 6.10* de *Matlab 7.7*. On a représenté son amplitude dans l'espace de Fourier sur la figure 7.49. On recherche ensuite les points d'inflexion du champ de vitesse longitudinale moyenné en phase et filtré, que l'on note  $\tilde{u}$ . En ces points d'inflexion, la dérivée seconde de  $\tilde{u}$  par rapport à la position verticale  $x_3$  s'annule. On estime la dérivée seconde du champ  $\tilde{u}$  à l'aide d'un schéma aux différences finies standard centré, construit de la manière suivante. On souhaite approximer la dérivée seconde de  $\tilde{u}$  à la position



**Fig. 7.49:** Amplitude du filtre passe-bas construit à l'aide du module *Filter Design 6.10* de *Matlab 7.7*, en fonction du nombre d'onde adimensionnel  $k\Delta x_3$ . La fréquence de coupure est fixée à  $k\Delta x_3 = \pi/5$ .

verticale  $z_0$  par :

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} \right|_{z_0} = \frac{1}{(\Delta x_3)^2} \sum_{j=-N}^N a_j \tilde{u}(z_0 + j\Delta x_3) + \mathcal{O}\left((\Delta x_3)^{2N+1}\right) \quad (7.2)$$

où  $2N + 1$  est le nombre de points nécessaire à l'estimation. Ce schéma est d'ordre  $2N + 1$ , soit l'ordre maximal pour un support de points de longueur  $2N + 1$ . On effectue ensuite un développement de Taylor de  $\tilde{u}$  en  $z_0 + j\Delta x_3$  autour de la position  $z_0$ . Il vient :

$$\forall j \in \{-N, \dots, N\}, \tilde{u}(z_0 + j\Delta x_3) = \sum_{r=0}^{2N} \frac{(j\Delta x_3)^r}{r!} \left. \frac{\partial^r \tilde{u}}{\partial x_3^r} \right|_{z_0} + \mathcal{O}\left((\Delta x_3)^{2N+1}\right) \quad (7.3)$$

En réinjectant les  $2N + 1$  équations (7.3) dans l'équation (7.2) et en annulant tous les termes à l'exception du terme relatif à la dérivée seconde, les coefficients  $a_j$  sont déterminés en résolvant le système linéaire :

$$\forall r \in \{0, 1, \dots, 2N\}, \sum_{j=-N}^N a_j j^r = 2\delta_2^r$$

On choisit dans la suite le schéma standard à 9 points, que l'on note  $\text{FD}^2\text{s9p}$  et dont les coefficients  $a_j$  sont donnés dans le tableau 7.1.

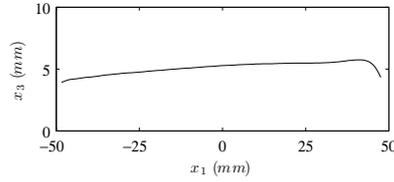
$j$	$\text{FD}^2\text{s9p}$
0	$-205/72$
1	$8/5$
2	$-1/5$
3	$8/315$
4	$-1/560$

**Tab. 7.1:** Coefficients  $a_j$  correspondant au schéma aux différences finies sur 9 points  $\text{FD}^2\text{s9p}$ . Les coefficients vérifient  $a_{-j} = a_j$ .

## 7.10.2 Résultats

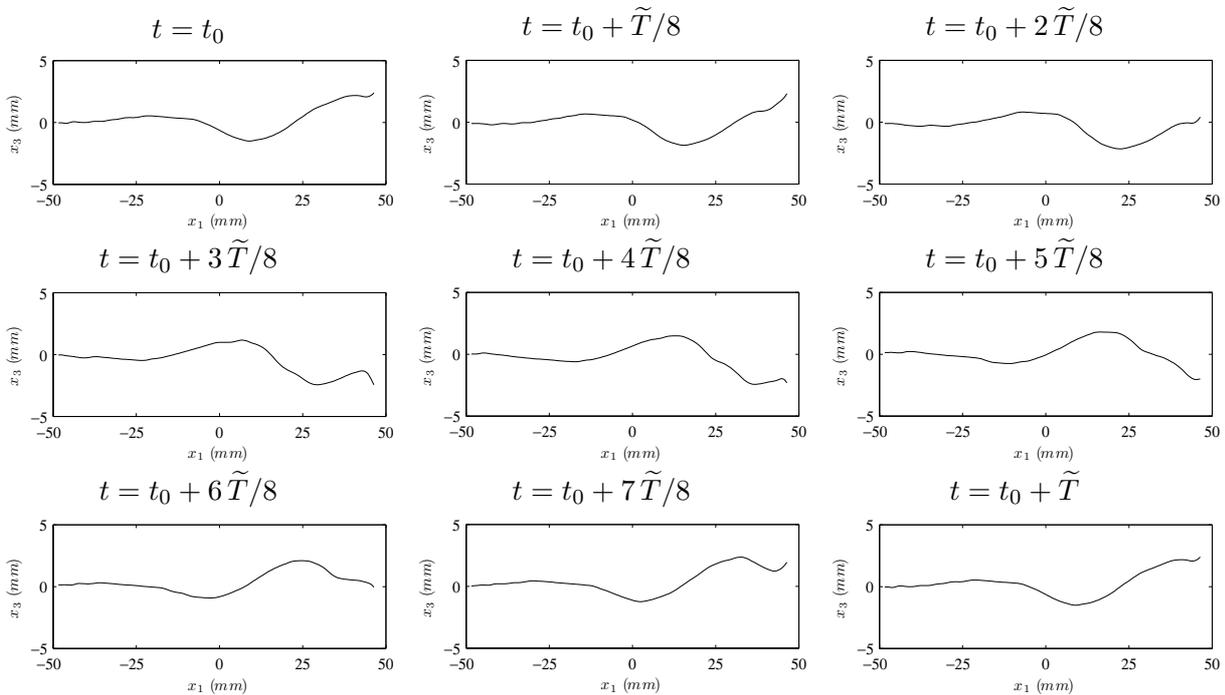
### 7.10.2.1 Cas laminaire

La figure 7.50 présente l'interface moyenne pour le cas laminaire. Elle se situe à la position verticale  $x_3 \simeq 4.2 \text{ mm}$  à proximité du bord amont. La figure 7.51 propose un chronogramme



**Fig. 7.50:** Interface moyenne dans le plan  $x_2 = 0$ . Cas laminaire.

de l'interface autour de sa position moyenne pendant un cycle d'oscillation acoustique. Le



**Fig. 7.51:** Déplacement relatif de l'interface dans le plan  $x_2 = 0$ , pendant un cycle d'oscillation. Cas laminaire.

mode II de la couche de cisaillement est nettement mis en évidence. L'interface au coin aval a un mouvement oscillant régulier. La fermeture de l'interface est obtenue entre les instants  $t_0 + 2\tilde{T}/8$  et  $t_0 + 3\tilde{T}/8$ . Un examen précis montre que l'interface intervient environ à l'instant  $t_0 + 3\tilde{T}/16$ . La courbe représentative de l'interface à cet instant (non présentée ici) permet d'évaluer numériquement le maximum de déplacement  $\xi_M$ , ainsi que sa position longitudinale  $x_M$ . On trouve  $x_M = 23.8 \text{ mm}$  et  $\xi_M = 2.19 \text{ mm}$ .

### 7.10.2.2 Cas turbulent

La figure 7.52 montre l'interface moyenne pour le cas turbulent. Elle se situe à proximité du bord amont approximativement à la position verticale nulle. On remarque aussi une forte croissance longitudinale, bien plus prononcée que dans le cas laminaire. La figure 7.53 présente un chronogramme de l'interface autour de sa position moyenne pendant un cycle d'oscillation acoustique.

Le mode II dominant la couche de cisaillement est nettement mis en évidence sur le chronogramme. L'amplitude du déplacement de l'interface est cependant beaucoup plus faible que

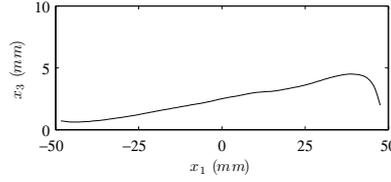


Fig. 7.52: Interface moyenne dans le plan  $x_2 = 0$ . Cas turbulent.

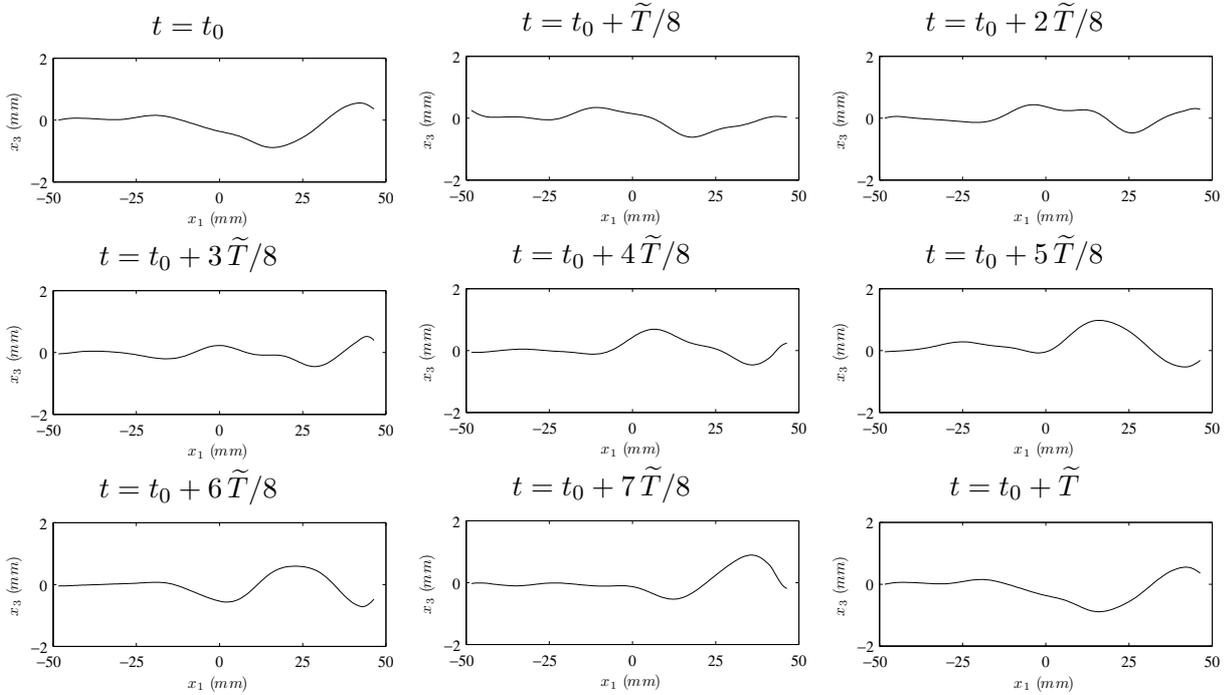


Fig. 7.53: Interface dans le plan  $x_2 = 0$ , pendant un cycle d'oscillation. Cas turbulent.

dans le cas laminaire. L'instant de fermeture est aussi nettement moins évident à déterminer. En effet, le mouvement de l'interface est certes oscillant, mais de manière nettement moins régulière que dans le cas laminaire. Étant donné l'avance en phase de la couche de cisaillement de  $\pi/10$  entre le cas turbulent et au cas laminaire, on peut estimer que la fermeture au coin aval intervient approximativement à l'instant  $t_0 + 2\tilde{T}/8$ . L'évaluation numérique du maximum de déplacement de l'interface  $\xi_M$  et de sa position longitudinale  $x_M$  donne  $\xi_M = 0.48 \text{ mm}$  et  $x_M = 26.0 \text{ mm}$ . Cette dernière valeur présente un écart assez important avec l'estimation issue de l'expression (3.5) du modèle d'Elder  $x_M = R - \lambda_v/4 \simeq 39.3 \text{ mm}$ . Cet écart peut avoir plusieurs origines. Il peut être dû au déplacement d'origine acoustique de l'interface, qui est négligé dans le modèle. Il peut provenir également de l'algorithme de moyennage en phase du champ de vitesse longitudinale, qui est effectué sur un nombre relativement modeste de périodes (une centaine), et qui ne permet probablement pas de s'affranchir complètement des variations basses et moyennes fréquences engendrées par les perturbations turbulentes présentes dans la couche de cisaillement.

## 7.11 Entrée/Sortie de fluide à l'ouverture de la cavité

En reprenant les hypothèses d'Elder dans le modèle présenté au chapitre 3, le flux volumique  $q_J$  de fluide à l'ouverture de la cavité est estimé par la relation :

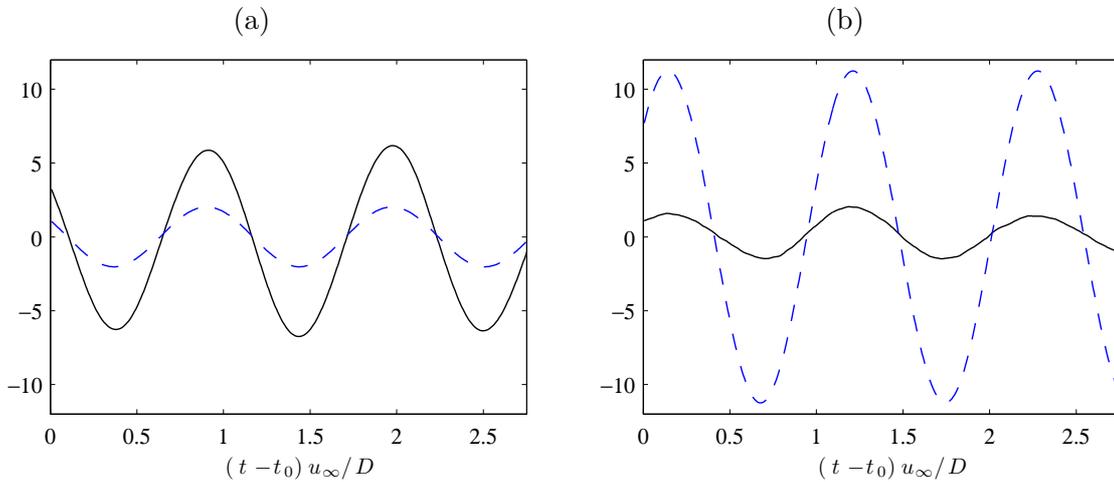
$$q_J = -2u_0 \sqrt{R^2 - \left( R - \frac{\pi U_c(0)}{2\omega} \right)^2} \frac{u_M}{\omega} \exp \left( \int_{-R}^R k_i(x) dx \right) \cos(\omega t - k_r D)$$

Dans l'expression précédente, la vitesse de convection moyenne sur l'axe longitudinal est estimée d'après les résultats des simulations présentés à la figure 7.43. On obtient  $U_c(0)/u_\infty = 0.40$  dans le cas laminaire, et  $U_c/u_\infty = 0.51$  dans le cas turbulent. La vitesse  $u_0$  est estimée par un moyennage de la vitesse  $\bar{u}_1$  sur l'axe longitudinal. On trouve  $u_0 \simeq 21 \text{ m/s}$  dans le cas laminaire et  $u_0 \simeq 26 \text{ m/s}$  pour le cas turbulent. La vitesse acoustique des particules  $u_M$  est estimée à partir du maximum de pression au fond de la cavité par la relation  $u_M = p'/(\rho_\infty c_\infty)$ . Elle vaut  $2.8 \text{ m/s}$  dans le cas laminaire, et  $2.3 \text{ m/s}$  dans le cas turbulent. Enfin, le facteur d'amplification est évalué à partir du champ de vitesse moyenne longitudinale par la théorie de stabilité linéaire de Michalke [160], et l'on trouve  $\exp\left(\int_{-R}^R k_i(x) dx\right) \simeq 1.70$  dans le cas laminaire, et  $11.3$  dans le cas turbulent.

L'estimation fournie par le modèle d'Elder est comparée au débit  $q_J$  calculé directement à partir de l'intégration du champ de vitesse verticale sur la surface de l'ouverture de la cavité par :

$$q_J = - \int_{x_1^2+x_2^2 \leq R^2} u_3(x_1, x_2, 0, t) dx_1 dx_2$$

Les figures 7.54(a) et (b) présentent les variations temporelles du débit aérodynamique obtenu numériquement à partir de l'intégration du champ de vitesse verticale à l'ouverture de la cavité, respectivement dans les cas laminaire et turbulent. Le débit obtenu à partir de l'estimation du modèle d'Elder est représenté en pointillés. Dans les deux cas, on observe des variations fortement sinusoïdales, d'amplitude  $5.07 \text{ L/s}$  dans le cas laminaire, et  $2.04 \text{ L/s}$  dans le cas turbulent. La fréquence d'oscillation estimée à partir du modèle d'Elder se compare très favorablement à la fréquence obtenue numériquement. En revanche on observe des écarts relativement importants entre l'amplitude des variations du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité obtenu par la simulation et l'estimation du modèle d'Elder.



**Fig. 7.54:** Débit aérodynamique  $q_J$  (en  $L/s$ ) à l'ouverture de la cavité en fonction du temps, obtenu à partir des simulations numériques (—), et estimé à partir du modèle d'Elder (---). (a) Cas laminaire. (b) Cas turbulent.

Les écarts observés peuvent avoir plusieurs origines. Ils peuvent provenir de l'estimation de la dimension transverse  $L_2^M$  sur laquelle on suppose que les larges structures sont en phase, et qui dépend directement de la position du maximum de déplacement de l'interface  $x_M$  à l'instant de fermeture. Or, des écarts significatifs sont observés sur cette position entre l'estimation proposée par le modèle et la position obtenue numériquement.

Ils peuvent également provenir de la méthode d'estimation du facteur d'amplification. En effet, il est évalué à l'aide de la théorie linéaire de Michalke, qui peut être inadaptée pour décrire le développement des larges structures tourbillonnaires notamment dans la seconde

partie de la cavité, où des effets non-linéaires ont lieu comme l'appariement de tourbillons dans le cas turbulent qui ont lieu de temps en temps dans la seconde moitié de la cavité. Le facteur d'amplification semble vraiment faible pour le cas laminaire, et surévalué pour le cas turbulent.

## 7.12 Conclusion

Ce chapitre montre que le rayonnement acoustique d'un écoulement subsonique affleurant une cavité cylindrique peut être fidèlement reproduit numériquement par la résolution des équations de Navier–Stokes 3–D instationnaires pour un fluide compressible à l'aide d'une approche multidomaine d'ordre élevé. On valide en particulier la robustesse des méthodes décentrées d'interpolation permettant le transfert d'information depuis la couronne proche de la paroi latérale de la cavité vers le demi-espace supérieur. Elles sont en effet appliquées ici dans le cas assez défavorable où l'écoulement vient impacter la zone de communication, au niveau de la lèvre de la cavité. On valide également le modèle de perturbations de l'écoulement moyen à l'amont de la cavité dans le cas turbulent. Il permet notamment de retrouver correctement les moyennes quadratiques des fluctuations de vitesse dans la cavité.

Les simulations sur une cavité de rapport d'aspect géométrique  $D/H = 1$  avec un écoulement incident laminaire ou turbulent de vitesse  $u_\infty = 70 \text{ m/s}$  indiquent l'établissement d'une recirculation principale pleinement 3–D à l'intérieur de la cavité. La couche de cisaillement est caractérisée dans les deux cas par la présence de larges structures tourbillonnaires s'amplifiant lors de leur convection vers le coin aval. Ces instabilités impactent le coin aval via un processus de scission partielle : plusieurs tourbillons naissent de l'impact de ces larges structures tourbillonnaires sur le coin aval. Certains sont convectés le long de la paroi latérale aval vers le fond de la cavité par la recirculation, tandis que d'autres s'échappent au-dessus du coin aval. La présence de ces instabilités convectives dans la couche cisailée s'accompagne de fortes fluctuations de vitesse, notamment verticalement, à l'origine d'un flux et reflux volumique de fluide à l'ouverture de la cavité. Ce flux de fluide excite acoustiquement la cavité, proche de son premier mode naturel de profondeur. La résonance forcée de la cavité interagit, à proximité du point de séparation, avec la couche de cisaillement et tend à la destabiliser. Ainsi, l'établissement d'un couplage auto-entretenu impose la fréquence des oscillations, et par conséquent le nombre de larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement. On observe effectivement la présence de deux larges structures à l'ouverture de la cavité. La très forte résonance dans la cavité induit un transfert d'énergie depuis l'intérieur de la cavité vers le champ acoustique expliquant le rayonnement acoustique intense et fortement tonal de la cavité.

Le rayonnement acoustique obtenu numériquement dans le cas turbulent est tout-à-fait en accord avec le rayonnement acoustique mesuré expérimentalement. On y retrouve notamment le phénomène de battement, qui correspond à une alternance assez irrégulière de fluctuations intenses à la fréquence principale du rayonnement et de fluctuations ayant une plus faible amplitude et une fréquence porteuse différente. Le rayonnement acoustique obtenu numériquement avec un écoulement incident laminaire est plus intense que dans le cas turbulent, ce qui est conforme aux observations de Sarohia [203], notamment parce que les structures tourbillonnaires se développant dans la couche de cisaillement sont plus cohérentes. Le rayonnement acoustique généré dans le cas laminaire, également de nature fortement tonale, présente une fréquence principale très proche de celle obtenue dans le cas turbulent, alors que l'écoulement qui s'établit dans la cavité est sensiblement différent. La recirculation principale y est moins intense. La vitesse moyenne de convection des tourbillons à l'ouverture de la cavité est plus faible que dans le cas turbulent, mais ceci est compensé par la longueur d'onde aérodynamique moyenne entre les deux larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de cisaillement qui est différente. Ceci tend à indiquer que la cavité cylindrique considérée semble suffisamment résonante pour “imposer” une fréquence au couplage acoustique.

Le modèle d'Elder, qui exprime analytiquement le couplage entre la couche de cisaillement et les modes de profondeur associés à la résonance forcée de la cavité, repose sur un certain nombre d'hypothèses. Les simulations numériques effectuées permettent de vérifier pour les configurations étudiées la validité de ces hypothèses. On vérifie par exemple si le temps de parcours moyen au-dessus de la cavité est bien multiple de la période acoustique, en vue de négliger dans le modèle le déplacement acoustique de l'interface. Une étude précise de cette interface pendant un cycle d'oscillation acoustique montre des écarts relativement importants concernant la position du maximum de déplacement de l'interface à l'instant de fermeture au coin aval. Le modèle prédit correctement la fréquence du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité, mais une comparaison avec une estimation numérique de cette quantité indique des écarts conséquents sur les amplitudes. Finalement, le modèle fournit une bonne approximation de la fréquence dominant la couche de cisaillement. Cependant, l'estimation de l'amplitude de la fonction de transfert amont FTF à l'aide du modèle peut être relativement erronée, ce qui explique la difficulté de vérifier la condition d'auto-entretien des perturbations à la pulsation dominant la couche cisailée dans le système (3.6).





# Conclusion générale

## Synthèse

Ce document présente dans une première partie introductive une étude bibliographique portant sur l'aéroacoustique des cavités rectangulaires ou cylindriques. Elle fait ressortir plusieurs types d'interactions entre l'écoulement affleurant et la cavité. Il peut s'agir d'un couplage aérodynamique caractéristique des couches cisillées impactant un obstacle, d'un couplage élastique entre le fluide et les modes vibratoires de la structure de la cavité, ou d'un couplage acoustique avec l'un des modes de résonance de la cavité. Alors que le cas des cavités rectangulaires est abondamment détaillé dans la littérature, peu d'études expérimentales ou numériques font référence aux cavités cylindriques. Celles-ci présentent aussi parfois des résultats incomplets.

Dans le cadre du projet AEROC AV, des campagnes de mesures ont été menées afin de disposer de données fiables pour une multitude de configurations. Une analyse des données expérimentales est effectuée au second chapitre. Cette analyse met en évidence la présence de pics fortement marqués dans la signature acoustique de la cavité en champ lointain. Le cas d'une cavité cylindrique de 10 *cm* de diamètre et de hauteur, soumise à un écoulement affleurant de 70 *m/s* est choisi comme le cas de référence. L'étude expérimentale indique dans cette configuration la présence d'une unique pic dans le spectre acoustique. À l'aide de mesures PIV, la présence en moyenne de deux larges structures tourbillonnaires dans la couche de cisaillement est également mise en évidence. Ces fluctuations périodiques de la couche cisillée s'accompagne d'une résonance acoustique dans le premier mode de profondeur fortement marquée à l'intérieur de la cavité. Ce couplage acoustique est modélisé à l'aide d'une approche semi-empirique construite à partir du modèle d'Elder (1978). Un formalisme faisant appel aux fonctions de transfert permet de décrire la manière dont la cavité cylindrique convertit le flux de fluide à l'ouverture de la cavité en acoustique. La conversion du flux volumique acoustique en flux volumique de fluide est modélisée à l'aide d'une seconde fonction de transfert. Le comportement du système couche cisillée–cavité est finalement modélisé par une fonction de transfert globale, qui permet d'estimer les oscillations harmoniques susceptibles d'être auto-entretenues par ce système. Les estimations fournies par le modèle sont en accord avec les données expérimentales. Cependant, ce modèle ne permet d'estimer que les fréquences susceptibles de dominer la couche de cisaillement, mais ne renseigne *a priori* pas sur celles qui sont effectivement fortement présentes dans le rayonnement acoustique de la cavité.

Un code de simulation a été développé à partir d'ALESIA une vue de réaliser une étude numérique de la configuration de référence. Ce code, construit autour de schémas optimisés d'ordre élevé, permet de résoudre de manière précise les équations tridimensionnelles de la mécanique des fluides instationnaires pour un fluide compressible. Il permet d'obtenir simultanément les caractéristiques de l'écoulement ainsi que l'acoustique rayonnée par la cavité. Les méthodes numériques étant développées pour une utilisation sur des maillages structurés, la spécificité de la géométrie étudiée est prise en compte à l'aide d'un recouvrement de maillage.

L'approche multidomaine nécessite l'utilisation d'algorithmes d'interpolation assurant une communication bidirectionnelle entre les différents maillages. Ces interpolations doivent préserver la précision du calcul, ce qui constitue une contrainte numérique forte. Des interpo-

lations décentrées sont spécifiquement développées dans ce travail pour permettre une communication à proximité des parois. La robustesse de ces méthodes d'interpolations décentrées est évaluée analytiquement, et vérifiée numériquement sur des cas tests de propagation et de convection. On propose enfin à la fin du cinquième chapitre quelques éléments associés à la parallélisation du code de simulation, dans l'optique d'un calcul à grande échelle.

Une difficulté majeure rencontrée pour la mise en œuvre de l'étude numérique du cas de référence est l'implémentation de la couche limite incidente, à l'amont de la cavité. Celle-ci est pleinement turbulente dans les conditions expérimentales. On a donc souhaité reproduire numériquement une couche limite incidente contenant un niveau raisonnable de fluctuations. Un modèle empirique d'excitation du profil moyen turbulent est développé dans ce travail. Il s'agit d'un modèle d'excitation par zone, caractérisé par l'ajout de fluctuations dans une zone de type sous-couche visqueuse, et d'une série d'excitations modales dans la zone externe de la couche limite. Un soin particulier est porté sur la maîtrise du rayonnement acoustique parasite généré par le processus d'excitation. Des cas tests montrent que le modèle permet de synthétiser des fluctuations dans la couche limite incidente ayant une amplitude raisonnable tout en assurant un rayonnement acoustique parasite minime.

Deux simulations numériques d'écoulement affleurant la cavité cylindrique de référence sont présentées dans le dernier chapitre. La première simulation concerne un écoulement laminaire. Elle permet d'établir un cas numérique de référence. La seconde simulation implique un écoulement turbulent moyen perturbé à l'aide du processus d'excitation décrit précédemment. Celle-ci met en évidence le caractère pleinement tridimensionnel de la recirculation qui s'établit dans la cavité. Les données aérodynamiques obtenues numériquement se comparent aussi très favorablement aux résultats expérimentaux issus des campagnes de mesures. On retrouve en particulier les deux larges structures tourbillonnaires présentes dans la couche de cisaillement, ainsi que les bons niveaux de fluctuations dans la couche cisailée et dans la recirculation. Les résultats acoustiques de la simulation sont aussi tout-à-fait corrects, puisque la fréquence du pic tonal dominant le rayonnement acoustique est bien estimée numériquement. Un écart est observé sur le niveau de ce pic en raison notamment de signaux numériques relativement courts. La simulation numérique apporte finalement une multitude d'éléments confirmant l'établissement d'un couplage acoustique dans la cavité. Celle-ci permet aussi d'évaluer des grandeurs difficilement accessibles expérimentalement, comme la vitesse de convection sur l'intégralité de l'ouverture de la cavité. La connaissance de ces variables permet l'investigation de quelques hypothèses du modèle semi-empirique d'Elder. Des écarts importants sur l'évaluation par le modèle du débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité sont observés. Le modèle fournit toutefois une estimation fréquentielle de qualité du couplage acoustique.

L'étude permet enfin d'entrevoir des moyens de réduction de bruit pour la configuration étudiée. L'objectif serait de limiter l'établissement du couplage acoustique, en modifiant par exemple la géométrie de la cavité. L'insertion dans la cavité cylindrique d'un séparateur cruciforme (*splitter*), qui aurait pour conséquence une modification considérable des fréquences de résonance de la cavité, pourrait être une solution envisageable.

## Quelques perspectives

D'un point de vue numérique, la condition de stabilité CFL est une contrainte fortement limitante pour le calcul direct de bruit faisant intervenir un écoulement de paroi. Le pas de temps est nécessairement très petit en raison d'une discrétisation normale à la paroi qui est aussi fine que possible. L'utilisation de méthodes à pas de temps multiples (*multi-time stepping methods*) devrait probablement réduire les coûts de calcul.

Sur le plan de l'excitation du profil turbulent moyen à l'amont de la cavité, les résultats numériques obtenus appellent une étude mathématique approfondie de l'influence des discrétisations non-constantes sur les algorithmes numériques utilisés et de leur impact sur

le spectre de la turbulence à la sortie de la zone de développement. La recherche d'une fréquence optimale d'excitation pourrait aussi être obtenue à l'aide de la résolution de l'équation d'Orr–Sommerfeld formulée pour une excitation modale dans la direction verticale.

En ce qui concerne l'étude numérique de la cavité de référence, le phénomène de battement basse-fréquence que l'on observe sur les signaux temporels de pression fluctuante invite à un examen détaillé de l'aérodynamique de la couche cisailée et dans la cavité. En particulier, parvenir à isoler aérodynamiquement les instants de bouffées des instants où les fluctuations ont des amplitudes plus faibles pourrait rendre possible l'identification des mécanismes responsables de ces instationnarités basse fréquence sur le champ de pression acoustique. Cela permettraient également d'apporter des éléments de compréhension concernant les variations de la fréquence porteuse des fluctuations entre ces différents instants. L'exploration numérique d'autres configurations, en fonction du rapport d'aspect de la cavité ou des caractéristique de l'écoulement, permettraient enfin d'étudier en détail des situations où plusieurs modes acoustiques coexistent simultanément, ou des situations plus originales où l'aérodynamique s'avère fortement asymétrique [113, 152].



## Annexe A

# Coefficients des méthodes numériques décentrées

### A.1 Dérivation spatiale décentrée

Le calcul des flux eulériens  $\mathbf{K}_e$  près du bord du domaine nécessite la mise en œuvre de schémas aux différences finies sur 11 points décentrés, dont le tableau A.1 rappelle les coefficients.

$j$	FDo11p <sup>1</sup>	FDo11p <sup>2</sup>	FDo11p <sup>3</sup>	FDo11p <sup>4</sup>	FDo11p <sup>5</sup>
-4	0.016756572302				
-3	-0.117478455238	-0.013277273809			
-2	0.411034935097	0.115976072920	0.057982271137		
-1	-1.130286765151	-0.617479187930	-0.536135360382	-0.18002205422	
0	0.341435872099	-0.274113948206	-0.264089548966	-1.23755058304	-2.39160221953
1	0.556396830542	1.086208764654	0.917445877605	2.48473169298	5.83249032229
2	-0.082525734207	-0.402951626981	-0.169688364841	-1.81032081406	-7.65021800118
3	0.003565834658	0.131066986242	-0.029716326170	1.11299004844	7.90781056357
4	0.001173034776	-0.028154858354	0.029681617640	-0.48108691651	-5.92259905262
5	-0.000071772607	0.002596328315	-0.005222483773	0.12659869022	3.07103701544
6	-0.000000352272	0.000128743150	-0.000118806259	-0.01551073016	-1.01495676972
7		0.	-0.000118806259	0.00002160905	0.17002225651
8			-0.000020069729	0.00015644757	0.00281995837
9				-0.00000739027	-0.00479100970
10					-0.00001306342

**Tab. A.1:** Coefficients  $a_j$  correspondant aux schémas aux différences finies sur 11 points FDo11p de Berland *et al.* [14] décentrés.

Pour le calcul des flux visqueux  $\mathbf{K}_v$  près du bord du domaine, un schéma aux différences finies sur 5 points décentrés est nécessaire. Les coefficients de ce schéma sont disponibles dans le tableau A.2.

### A.2 Filtrage sélectif décentré

Le terme de filtrage  $\mathbf{K}_f$  près du bord du domaine peut être calculé grâce à des schémas optimisés sur 11 points décentrés, dont le tableau A.3 rappelle les coefficients.

$j$	FDs5p <sup>1</sup>	FDs5p <sup>2</sup>
-1	-3/12	
0	-10/12	-25/12
1	18/12	48/12
2	-6/12	-36/12
3	1/12	16/12
4		-3/12

**Tab. A.2:** Coefficients  $a_j$  correspondant aux schémas aux différences finies sur 5 points FDo5p standard décentrés.

$j$	SFo11p <sup>1</sup>	SFo11p <sup>2</sup>	SFo11p <sup>3</sup>	SFo11p <sup>4</sup>	SFo11p <sup>5</sup>
-4	0.008391235145				
-3	-0.047402506444	-0.000054596010			
-2	0.121438547725	0.042124772446	0.030715985599		
-1	-0.200063042812	-0.173103107841	-0.148395705486	-0.085777408969	
0	0.240069047836	0.299615871352	0.312055385963	0.277628171524	-0.085777408971
1	-0.207269200139	-0.276543612935	-0.363202245195	-0.356848072173	0.277628171524
2	0.122263107843	0.131223506571	0.230145457063	0.223119093071	-0.356848072173
3	-0.047121062819	-0.023424966418	-0.041231656460	-0.057347064864	0.223119093072
4	0.009014891495	0.013937561779	-0.053102470080	-0.000747264596	-0.057347064865
5	0.001855812216	-0.024565095706	0.049434326117	-0.000027453992	-0.000747264596
6	-0.001176830044	0.013098287852	-0.019814358545	0.	-0.000027453993
7		-0.002308621090	0.003395281024	0.	0.
8			0.	0.	0.
9				0.	0.
10					0.

**Tab. A.3:** Coefficients  $d_j$  correspondant aux schémas de filtrage optimisés sur 11 points FDo11p de Berland *et al.* [14] décentrés.

Le tableau A.4 donne les coefficients du filtrage décentré optimisé à 4 points SFo4p<sup>1</sup> utilisé pour stabiliser lors des phases transitoires le coin de fond de cavité.

$j$	SFo4p <sup>1</sup>
0	0.32088235294118
1	-0.46500000000000
2	0.17911764705882
3	-0.03500000000000

**Tab. A.4:** Coefficients  $d_j$  correspondant aux schémas de filtrage optimisés sur 4 points FDo4p de Berland *et al.* [14] décentrés.

### A.3 Interpolations décentrées

On donne ici les coefficients des régressions polynomiales par morceaux d'ordre élevé des méthodes d'interpolations optimisées décentrées avec contrôle de l'amplification d'interpolation que l'on a retenues.

A.3.1 COI6p5o<sup>1</sup>

L'intervalle de variation de  $\eta$   $[0, 1[$  est partitionné en  $N_i = 4$  sous-intervalles  $\mathcal{I}_r$  définis par :  $\mathcal{I}_0 = [0, \ell_1[$ ,  $\mathcal{I}_1 = [\ell_1, \ell_2[$ ,  $\mathcal{I}_2 = [\ell_2, \ell_3[$  and  $\mathcal{I}_3 = [\ell_3, 1[$ , où  $\ell_1 = 0.4113$ ,  $\ell_2 = 0.4279$  et

		$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$s_{\mathcal{I}_0}^1$	$a_0^r$	1.00862697955555	-0.27020537609112	1.24821066747851	3.11048900577393
	$a_1^r$	-1.74605782314864	4.53663828255703	-2.42460153299612	-13.85570842916752
	$a_2^r$	1.07244372290761	-6.79127228116428	1.06786026359128	28.10309862851732
	$a_3^r$	-0.73323175280584	-	0.27291758666731	-30.45862899241656
	$a_4^r$	1.89635085848184	-	-	16.96258279853443
	$a_5^r$	-2.38058309311138	-	-	-3.81683557094936
$s_{\mathcal{I}_1}^1$	$a_0^r$	-0.04274527229	-84.12842233689	26.52893763861	-24.339688469955
	$a_1^r$	2.26907724837	617.83887992015	-315.39442482956	165.720547552538
	$a_2^r$	-1.03968958084	-1504.86660841143	1539.57068080152	-455.881862122109
	$a_3^r$	-16.64615276921	1224.13159195469	-3937.95673126612	674.809326329952
	$a_4^r$	154.75635883076	-	5632.58544732633	-566.187510201081
	$a_5^r$	-818.71560092582	-	-4284.28183106005	254.358828590791
	$a_6^r$	2493.15788764139	-	1353.17697728287	-47.704733599092
	$a_7^r$	-4036.94621090143	-	-	-
$s_{\mathcal{I}_2}^1$	$a_0^r$	0.0856788879	168.25942804625	-25315.9047514	48.67937693980
	$a_1^r$	0.4204151743	-1230.70238855824	427590.2323062	-326.44109510429
	$a_2^r$	0.3823261806	3005.90459486869	-3202629.5563575	907.84705757517
	$a_3^r$	-16.1104826798	-2447.40306456714	13962359.5352392	-1348.61865265606
	$a_4^r$	288.0050638403	-	-39047451.2940583	1132.29168706536
	$a_5^r$	-2431.4275273476	-	72645330.6600455	-508.71765717992
	$a_6^r$	11502.1176663545	-	-89909897.1414153	95.40946719785
	$a_7^r$	-31195.5176636935	-	71383985.3009916	-
	$a_8^r$	45328.6010643753	-	-32990738.3325973	-
$a_9^r$	-27399.9446721963	-	6762125.5959478	-	
$s_{\mathcal{I}_3}^1$	$a_0^r$	-0.0856788879	-168.26201141860	25315.9047514	-48.67937693977
	$a_1^r$	-2.0870818409	1229.06035060871	-427591.8989727	324.77442843735
	$a_2^r$	2.0343404861	-3003.57597291257	3202631.9730230	-905.43039090766
	$a_3^r$	15.2771493466	2446.70961189004	-13962360.3685677	1347.78531932136
	$a_4^r$	-287.9217305079	-	39047451.3773780	-1132.20835373078
	$a_5^r$	2431.4275273544	-	-72645330.6600198	508.71765717931
	$a_6^r$	-11502.1176663828	-	89909897.1413830	-95.40946719773
	$a_7^r$	31195.5176637629	-	-71383985.3009652	-
	$a_8^r$	-45328.6010644672	-	32990738.3325846	-
$a_9^r$	27399.9446722471	-	-6762125.5959450	-	
$s_{\mathcal{I}_4}^1$	$a_0$	0.04274527229	84.13229739544	-26.52893763853	24.339688469874
	$a_1^r$	1.48092275163	-614.12582299604	319.14442482861	-161.970547551945
	$a_2^r$	-2.83531041916	1501.12367547773	-1543.44568079712	452.006862120304
	$a_3^r$	17.89615276918	-1223.09141293941	3939.20673125528	-673.559326327034
	$a_4^r$	-154.88135883049	-	-5632.71044731136	566.062510198441
	$a_5^r$	818.71560092445	-	4284.28183104907	-254.358828589521
	$a_6^r$	-2493.15788763731	-	-1353.17697727953	47.704733598838
	$a_7^r$	4036.94621089501	-	-	-
$s_{\mathcal{I}_5}^1$	$a_0^r$	-0.00862697955555	1.24329715560303	-0.25152951487045	-2.11048900577165
	$a_1^r$	-0.33727551018475	-6.42449688600345	0.36648044226314	11.77237509582031
	$a_2^r$	0.38588961042651	7.76908049397958	0.3190777431298	-26.64476529515033
	$a_3^r$	0.31656508613477	-	-0.60025865410704	30.04196232570929
	$a_4^r$	-1.85468419180568	-	-	-16.92091613184341
$a_5^r$	2.38058309310489	-	-	3.81683557094355	

Tab. A.5: Coefficients de régression  $a_q^r$  pour les régressions polynomiales  $s_j^1(\eta)$  des coefficients d'interpolation  $s_j^1(\eta)$  de la méthode COI6p5o<sup>1</sup>.

$\ell_3 = 0.6439$ . Les coefficients des régressions polynomiales sont synthétisés dans le tableau A.5.

### A.3.2 COI6p5o<sup>2</sup>

On pose  $\mathcal{I}_1 = [0, 1[$ . On effectue des régressions polynomiales sur l'ensemble de l'intervalle  $\mathcal{I}_1$ . Les coefficients de régression sont donnés dans le tableau A.6.

$\tilde{s}_0^2$	$a_0^1$	0.01267209009992	$\tilde{s}_1^2$	$a_0^1$	0.936964693062
	$a_1^1$	-0.17068457340145		$a_1^1$	-1.259307866391
	$a_2^1$	0.15104114173173		$a_2^1$	1.346170123030
	$a_3^1$	0.38008352519153		$a_3^1$	-8.254813620145
	$a_4^1$	-0.91108893260404		$a_4^1$	33.163008592779
	$a_5^1$	0.78178521680509		$a_5^1$	-82.748918037865
	$a_6^1$	-0.24238143637078		$a_6^1$	130.677134106488
	$a_7^1$	-		$a_7^1$	-124.958259741914
	$a_8^1$	-		$a_8^1$	65.426155975770
	$a_9^1$	-		$a_9^1$	-14.335452481196
$\tilde{s}_2^2$	$a_0^1$	0.126070613876	$\tilde{s}_3^2$	$a_0^1$	-0.126070613876
	$a_1^1$	2.351949066116		$a_1^1$	-1.351949066116
	$a_2^1$	-4.109006912726		$a_2^1$	4.525673579392
	$a_3^1$	17.176293906942		$a_3^1$	-17.676293906941
	$a_4^1$	-66.409350518852		$a_4^1$	66.492683852171
	$a_5^1$	165.497836075735		$a_5^1$	-165.497836075671
	$a_6^1$	-261.354268213205		$a_6^1$	261.354268213065
	$a_7^1$	249.916519484272		$a_7^1$	-249.916519484106
	$a_8^1$	-130.852311951889		$a_8^1$	130.852311951788
	$a_9^1$	28.670904962494		$a_9^1$	-28.670904962469
$\tilde{s}_4^2$	$a_0^1$	0.063035306938	$\tilde{s}_5^2$	$a_0^1$	-0.01267209009992
	$a_1^1$	0.509307866391		$a_1^1$	-0.07931542659855
	$a_2^1$	-2.221170123029		$a_2^1$	0.30729219160160
	$a_3^1$	9.004813620136		$a_3^1$	-0.63008352519156
	$a_4^1$	-33.288008592746		$a_4^1$	0.95275559927079
	$a_5^1$	82.748918037817		$a_5^1$	-0.78178521680517
	$a_6^1$	-130.677134106500		$a_6^1$	0.24238143637081
	$a_7^1$	124.958259742020		$a_7^1$	-
	$a_8^1$	-65.426155975875		$a_8^1$	-
	$a_9^1$	14.335452481230		$a_9^1$	-

**Tab. A.6:** Coefficients de régression  $a_q^r$  pour les régressions polynomiales  $\tilde{s}_j^1(\eta)$  des coefficients d'interpolation  $s_j^2(\eta)$  de la méthode COI6p5o<sup>2</sup>.





## Annexe B

# Détails de développement des méthodes d'interpolation

---

### B.1 Interpolation optimisée

Cette partie explicite les calculs concernant le développement de la méthode d'interpolation optimisée dans l'espace des nombres d'onde. On rappelle que le problème d'optimisation à résoudre a conduit au système linéaire suivant :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_l^d} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_r} = 0$$

avec  $\mathcal{L}$  le Lagrangien associé au problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^2 d(k\Delta\xi) \\ &+ \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j + \chi)^r - \delta_0^r \right) \end{aligned}$$

Le Lagrangien peut être exprimé de manière explicite par :

$$\mathcal{L}(s_0^d, \dots, \lambda_{p-1}) = \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left| 1 - \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|^2 d(k\Delta\xi) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j + \chi)^r - \delta_0^r \right)$$

• Les équations de type  $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda_r = 0$  ne posent aucun problème de calcul, puisqu'il s'agit en fait des équations de contraintes relatives à l'ordre formel d'interpolation :

$$\sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta)(j + \chi)^r = \delta_0^r$$

- Les équations de type  $\partial\mathcal{L}/\partial s_l^d = 0$  demandent davantage de calculs. On a formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} &= \frac{\partial}{\partial s_l^d} \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \left( 1 - \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j + \chi)k\Delta\xi \right)^2 + \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \sin(j + \chi)k\Delta\xi \right)^2 \right) d(k\Delta\xi) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r \end{aligned}$$

Le développement des sommes au carré donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} &= -2 \frac{\partial}{\partial s_l^d} \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s_l^d} \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} s_j^d s_{j'}^d \cos(j + \chi)k\Delta\xi \cos(j' + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s_l^d} \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} s_j^d s_{j'}^d \sin(j + \chi)k\Delta\xi \sin(j' + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r \end{aligned}$$

On applique la règle de Leibniz de dérivation sous le signe d'intégration, car toutes les fonctions de  $N + 1$  variables  $(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, k\Delta\xi)$  sous les intégrales sont clairement  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^N \times [\kappa_l, \kappa_u]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} &= -2 \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \cos(l + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) + 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \cos(j + \chi)k\Delta\xi \cos(l + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \sin(j + \chi)k\Delta\xi \sin(l + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} &= -2 \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \cos(l + \chi)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) + 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \cos(j - l)k\Delta\xi d(k\Delta\xi) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r \end{aligned}$$

L'intégration donne :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} = -2 \left[ \frac{\sin(l + \chi)k\Delta\xi}{l + \chi} \right]_{\kappa_l}^{\kappa_u} + 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \left[ \frac{\sin(j - l)k\Delta\xi}{j - l} \right]_{\kappa_l}^{\kappa_u} + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r$$

En notant sinc la fonction sinus cardinal définie par :

$$\text{sinc} : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto \text{sinc } x = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s_l^d} &= -2 \left( \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(l + \chi) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(l + \chi) \right) + 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \left( \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(j - l) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(j - l) \right) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r (l + \chi)^r \end{aligned}$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) (\kappa_u \text{sinc } \kappa_u(j-l) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(j-l)) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r(\eta) (l+\chi)^r = \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(l+\chi) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(l+\chi) \\ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) (j+\chi)^r = \frac{\delta_0^r}{2} \end{cases}$$

Ce système linéaire peut se mettre matriciellement sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ {}^t\mathbf{M}_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} s_0^d(\eta) \\ s_1^d(\eta) \\ \vdots \\ s_{N-1}^d(\eta) \\ \lambda_0(\eta) \\ \lambda_1(\eta) \\ \vdots \\ \lambda_{p-1}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice symétrique inversible de taille  $(N+p) \times (N+p)$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall (l, j) \in \{0, \dots, N-1\}^2, \quad \mathbf{M}_1(l+1, j+1) &= \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(j-l) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(j-l) \\ \forall (l, j) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, p-1\}, \quad \mathbf{M}_2(l+1, j+1) &= 1/2 (l+\chi)^j \end{aligned}$$

et le vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrit :

$$\forall l \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \mathbf{V}(l+1) = \kappa_u \text{sinc } \kappa_u(l+\chi) - \kappa_l \text{sinc } \kappa_l(l+\chi)$$

## B.2 Interpolation optimisée avec contrôle de l'amplification d'interpolation

### B.2.1 Dérivation du Lagrangien

On rappelle que le problème d'optimisation à résoudre à conduit au système non-linéaire suivant :  $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  et  $\forall r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_l^d} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_r} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = 0$$

avec  $\mathcal{L}$  le Lagrangien associé au problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}, \mu_1) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left( \varepsilon_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^2 d(k\Delta x) \\ &+ \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j+\chi)^r - \delta_0^r \right) \\ &+ \mu_1 \left( \int_0^\pi \left( \alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi) \right)^{2q} d(k\Delta\xi) - (1 + \alpha_{\text{tol}})^{2q} \right) \end{aligned}$$

Le Lagrangien peut être exprimé de manière explicite par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_0^d, \dots, \lambda_{p-1}) &= \int_{\kappa_l}^{\kappa_u} \left| 1 - \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|^2 d(k\Delta\xi) + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d (j+\chi)^r - \delta_0^r \right) \\ &+ \mu_1 \left( \int_0^\pi \left| \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|^{2q} d(k\Delta\xi) - (1 + \alpha_{\text{tol}})^{2q} \right) \end{aligned}$$

On explicite ici le calcul de  $\partial\mathcal{L}/\partial s_l^d$ . En fait, la dérivation des deux premiers termes du Lagrangien a déjà été explicitée dans la partie précédente. Il ne reste donc plus qu'à expliciter la dérivation du terme relatif à la contrainte sur le contrôle de l'amplification d'interpolation. On pose :  $\mathcal{I} = \int_0^\pi (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^{2q} d(k\Delta\xi)$ . Formellement, on a :

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial s_l^d} = \frac{\partial}{\partial s_l^d} \int_0^\pi (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^{2q} d(k\Delta\xi)$$

On applique la règle de Leibniz de dérivation sous le signe d'intégration, puisque la fonction  $\alpha_{\text{loc}}^d$  de  $N+1$  variables  $(s_0^d, s_1^d, \dots, s_{N-1}^d, k\Delta\xi)$  sous l'intégrale est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^N \times [0, \pi]$ . On obtient :

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial s_l^d} = q \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s_l^d} \left( (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^2 \right) (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^{2q-2} d(k\Delta\xi)$$

Un calcul donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_l^d} \left( (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial s_l^d} \left( \left| \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d(\eta) e^{i(j+\chi)k\Delta\xi} \right|^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s_l^d} \left( \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j+\chi)k\Delta\xi \right)^2 + \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \sin(j+\chi)k\Delta\xi \right)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j-l)k\Delta\xi \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial s_l^d} = 2q \int_0^\pi \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j-l)k\Delta\xi \right) (\alpha_{\text{loc}}^d(\eta, k\Delta\xi))^{2q-2} d(k\Delta\xi)$$

### B.2.2 Méthode de Newton–Raphson et matrice jacobienne

On note  $\nabla \mathcal{E}$  matrice jacobienne du vecteur  $\mathcal{E}$  des membres de gauche du système d'équations (5.14). Cette matrice s'écrit :

$$\nabla \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial s_{n-1}^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial \lambda_{p-1}} & \frac{\partial \mathcal{E}_0^1}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial s_{n-1}^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial \lambda_{p-1}} & \frac{\partial \mathcal{E}_1^1}{\partial \mu_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial s_{n-1}^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial \lambda_{p-1}} & \frac{\partial \mathcal{E}_{n-1}^1}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_0^2}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_0^2}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_0^2}{\partial s_{n-1}^d} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1^2}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_1^2}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_1^2}{\partial s_{n-1}^d} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{p-1}^2}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}_{p-1}^2}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}_{p-1}^2}{\partial s_{n-1}^d} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}^3}{\partial s_0^d} & \frac{\partial \mathcal{E}^3}{\partial s_1^d} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{E}^3}{\partial s_{n-1}^d} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est symétrique. Les dérivées partielles peuvent être explicitées :

- $\forall l \in \{0, \dots, N-1\}, \forall a \in \{0, \dots, N-1\},$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_l^1}{\partial s_a^d} &= 2(\kappa_u \operatorname{sinc}(a-l)\kappa_u - \kappa_l \operatorname{sinc}(a-l)\kappa_l) + 2q\mu_1 \int_0^\pi \cos((a-l)k\Delta\xi) (\alpha_{\text{loc}}^d)^{2q-2} d(k\Delta\xi) \\ &+ 4q(q-1)\mu_1 \int_0^\pi \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j-l)k\Delta\xi \right) \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j-a)k\Delta\xi \right) (\alpha_{\text{loc}}^d)^{2q-4} d(k\Delta\xi) \end{aligned}$$

- $\forall l \in \{0, \dots, N-1\}, \forall a \in \{0, \dots, p-1\},$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_l^1}{\partial \lambda_a} = (l + \chi)^a$$

- $\forall l \in \{0, \dots, N-1\},$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_l^1}{\partial \mu_1} = 2q \int_0^\pi \left( \sum_{j=0}^{N-1} s_j^d \cos(j-l)k\Delta\xi \right) (\alpha_{\text{loc}}^d)^{2q-2} d(k\Delta\xi)$$

### B.2.3 Étude de stabilité et matrices des opérateurs numériques

Cette partie explicite les matrices introduites à la partie 5.3.6.

La matrice d'interpolation  $\mathcal{M}_{\text{INT}}$  est une matrice par blocs, définie par :

$$\mathcal{M}_{\text{INT}} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{I}_{N-5} & 0_{(N-5) \times 5} & & 0_{(N-5) \times \mathcal{N}'} & & \\ & 0_{5 \times \mathcal{N}} & & 0_{5 \times (5+n_f')} & \mathcal{A}_{\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}} & 0_{5 \times 5} \\ \hline 0_{5 \times 5} & \mathcal{A}_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'} & 0_{5 \times (5+n_f)} & & 0_{5 \times \mathcal{N}'} & \\ & 0_{(N'-5) \times \mathcal{N}} & & \mathcal{I}_{N'-5} & & 0_{(N'-5) \times 5} \end{array} \right]$$

où  $0_{a \times b}$  est la matrice nulle de dimension  $a \times b$ , et  $\mathcal{I}_a$  est la matrice carrée identité de taille  $a \times a$ . La matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'}$  est la matrice de taille  $5 \times (N + 4)$  des coefficients d'interpolation pour la communication depuis le maillage  $\mathcal{M}$  vers le maille  $\mathcal{M}'$  :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'} = \begin{bmatrix} s_0^d & s_1^d & s_2^d & \cdots & s_{N-1}^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0^d & s_1^d & s_2^d & \cdots & s_{N-1}^d & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_0^d & s_1^d & s_2^d & \cdots & s_{N-1}^d \end{bmatrix}$$

et  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}}$  la matrice de dimension  $5 \times 12$  des coefficients d'interpolation permettant la communication (réalisée à l'aide d'une interpolation optimisée centrée à 8 points du second ordre OI8p2o<sup>4</sup>) depuis le maillage  $\mathcal{M}'$  vers le maille  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}} = \begin{bmatrix} s_0^{\text{OI}} & s_1^{\text{OI}} & s_2^{\text{OI}} & \cdots & s_7^{\text{OI}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0^{\text{OI}} & s_1^{\text{OI}} & s_2^{\text{OI}} & \cdots & s_7^{\text{OI}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_0^{\text{OI}} & s_1^{\text{OI}} & s_2^{\text{OI}} & \cdots & s_7^{\text{OI}} \end{bmatrix}$$

$(s_j^d)_{j=0,\dots,N-1}$  sont les coefficients d'interpolation de la méthode décentrée testée et  $(s_j^{\text{OI}})_{j=0,\dots,7}$  les coefficients d'interpolation de OI8p2o<sup>4</sup>.

Une matrice par blocs de dérivation spatiale  $\mathcal{M}_{\text{FD}}$  de taille  $(\mathcal{N} + \mathcal{N}') \times (\mathcal{N} + \mathcal{N}')$  est construite :

$$\mathcal{M}_{\text{FD}} = \left[ \begin{array}{c|c} 0_{5 \times \mathcal{N}} & 0_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}'} \\ \mathcal{A}_{\text{FD}} & \\ \hline 0_{5 \times \mathcal{N}} & 0_{5 \times \mathcal{N}'} \\ 0_{\mathcal{N}' \times \mathcal{N}} & \mathcal{A}'_{\text{FD}} \\ & 0_{5 \times \mathcal{N}'} \end{array} \right]$$

La matrice  $\mathcal{A}_{\text{FD}}$  est la matrice de taille  $(\mathcal{N} - 10) \times \mathcal{N}$  de différentiation sur le maillage  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{A}_{\text{FD}} = \begin{bmatrix} -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathcal{A}'_{\text{FD}}$  est la matrice de taille  $(\mathcal{N}' - 10) \times \mathcal{N}'$  de différentiation sur le maillage  $\mathcal{M}'$  :

$$\mathcal{A}'_{\text{FD}} = \begin{bmatrix} -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}$$

L'intégration à 6 étapes de Runge–Kutta peut s'écrire dans le cas linéaire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{M}_{\text{TI}} = \mathcal{I}_{\text{TI}} + \sum_{j=0}^6 \gamma_j (-\text{CFL})^j (\mathcal{M}_{\text{FD}} \mathcal{M}_{\text{INT}})^j$$

La matrice  $\mathcal{I}_{\text{TI}}$  est la matrice diagonale de taille  $(\mathcal{N} + \mathcal{N}') \times (\mathcal{N} + \mathcal{N}')$  définie par :

$$\mathcal{I}_{\text{TI}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} e^{-i \text{CFL } k \Delta x} \mathcal{I}_5 & 0_{5, \mathcal{N}-5} & & \\ 0_{\mathcal{N}-5, 5} & \mathcal{I}_{\mathcal{N}-5} & & \\ \hline & & 0_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}'} & \\ 0_{\mathcal{N}' \times \mathcal{N}} & & \mathcal{I}_{\mathcal{N}'-5} & 0_{\mathcal{N}'-5, 5} \\ & & 0_{5, \mathcal{N}'-5} & e^{-i \text{CFL } k \Delta x} \mathcal{I}_5 \end{array} \right]$$

avec CFL le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy  $\text{CFL} = c_0 \Delta t / \Delta x$ .

Enfin, la matrice de filtrage  $\mathcal{M}_{\text{SF}}$  s'écrit sous la forme d'une matrice de taille  $(\mathcal{N} + \mathcal{N}') \times (\mathcal{N} + \mathcal{N}')$  :

$$\mathcal{M}_{\text{SF}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathcal{I}_5 & 0_{5 \times (\mathcal{N}-5)} & & \\ & \mathcal{A}_{\text{SF}} & & 0_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}'} \\ 0_{5 \times (\mathcal{N}-5)} & \mathcal{I}_5 & & \\ \hline & & \mathcal{I}_5 & 0_{5 \times (\mathcal{N}'-5)} \\ 0_{\mathcal{N}' \times \mathcal{N}} & & & \mathcal{A}'_{\text{SF}} \\ & & 0_{5 \times (\mathcal{N}'-5)} & \mathcal{I}_5 \end{array} \right]$$

La matrice  $\mathcal{A}_{\text{SF}}$  est la matrice de taille  $(\mathcal{N} - 10) \times \mathcal{N}$  du filtrage sélectif sur le maillage  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{A}_{\text{SF}} = \Delta_{(\mathcal{N}-10) \times \mathcal{N}} - \sigma \mathcal{D}_{\text{SF}}$$

avec  $\Delta_{(\mathcal{N}-10) \times \mathcal{N}}$  la matrice rectangulaire de taille  $(\mathcal{N} - 10) \times \mathcal{N}$  vérifiant :

$$\Delta_{(\mathcal{N}-10) \times \mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathcal{D}_{\text{SF}}$  est la matrice de taille  $(\mathcal{N} - 10) \times \mathcal{N}$  définie par :

$$\mathcal{D}_{\text{SF}} = \begin{bmatrix} d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix}$$

La quantité  $\sigma$  est la force du filtrage. La matrice  $\mathcal{A}'_{\text{SF}}$  est la matrice de taille  $(\mathcal{N}' - 10) \times \mathcal{N}'$  de filtrage sur le maillage  $\mathcal{M}'$  :

$$\mathcal{A}'_{\text{SF}} = \Delta_{(\mathcal{N}'-10) \times \mathcal{N}'} - \sigma \mathcal{D}'_{\text{SF}}$$

avec  $\Delta_{(\mathcal{N}'-10) \times \mathcal{N}'}$  la matrice de taille  $(\mathcal{N}' - 10) \times \mathcal{N}'$  :

$$\Delta_{(\mathcal{N}'-10) \times \mathcal{N}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\mathcal{D}'_{\text{SF}}$  :

$$\mathcal{D}'_{\text{SF}} = \begin{bmatrix} d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix}$$





## Annexe C

# Équation d'Orr-Sommerfeld généralisée pour un profil turbulent moyen

---

### C.1 Établissement de l'équation

Le but de cette partie est de détailler la formulation d'une équation de stabilité de type Orr-Sommerfeld [206] généralisée au cas turbulent.

À l'instar de l'étude de stabilité d'un profil de paroi laminaire menée par Schlichting & Gersten dans [206], on considère un écoulement turbulent moyen  $\bar{\mathbf{u}}$  supposé bidimensionnel (pas de variations dans la direction  $x_2$ ) et incompressible. Le champ de vitesse moyenne longitudinale  $\bar{u}_1$  ne dépend que de l'altitude  $x_3$  tandis que le champ de vitesse moyenne normale  $\bar{u}_3$  vaut 0. L'équation de la conservation de la masse s'écrit pour le champ moyen :

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{C-1})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit pour le champ moyen :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{C-2})$$

où  $\mathbf{u}_t$  désigne les perturbations turbulentes de vitesse. Pour un écoulement laminaire, le terme  $\overline{\mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t}$  vaut  $\mathbf{0}$ . Pour un écoulement turbulent, ce terme est classiquement modélisé par une approche de type Boussinesq, par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  [6] :

$$-\overline{\mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t} = \nu_t \left( {}^t \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} + \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} \right) - \left( \frac{2}{3} \bar{k} \right) \mathbf{I}$$

avec  $\bar{k}$  l'énergie cinétique turbulente moyenne, et  $\nu_t$  est la viscosité cinématique turbulente, que l'on peut modéliser pour un écoulement de paroi bidimensionnel, par :

$$\nu_t = \ell_m^2 \frac{d\bar{u}_1}{dx_3}$$

avec  $\ell_m$  la longueur de mélange. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que la longueur de mélange varie linéairement avec la distance à la paroi :  $\ell_m^+ = \kappa z^+$ , avec  $\kappa \simeq 0.41$  la constante de von Kármán [181]. Dans toute la suite, on introduit la viscosité totale  $\nu_T = \nu_\infty + \nu_t$ .

On choisit de perturber temporellement les champs moyens. En introduisant les variables  $u'_1$ ,  $u'_3$  et  $p'$  les perturbations respectives des champs moyens turbulents de vitesse dans la

direction  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_3$  et du champ de pression, il vient, à partir des équations (C-1) et (C-2), en négligeant les termes quadratiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + u'_3 \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \nu_T \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_3^2} \right) + \frac{d\nu_T}{dx_3} \left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_3}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_3} + \nu_T \left( \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x_3^2} \right) + 2 \frac{d\nu_T}{dx_3} \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (3)$$

(C-3)

En considérant la combinaison linéaire  $\partial(C-3-2)/\partial x_3 - \partial(C-3-3)/\partial x_1$  afin de faire disparaître le terme relatif à la pression, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_3 \partial t} - \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x_1 \partial t} + \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1 \partial x_3} + u'_3 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_3^2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} - \bar{u}_1 \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x_1^2} = \frac{d^2 \nu_T}{dx_3^2} \left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \right) \\ + \frac{d\nu_T}{dx_3} \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \nu_T \left( \frac{\partial^3 u'_1}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u'_1}{\partial x_3^3} - \frac{\partial^3 u'_3}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^3 u'_3}{\partial x_1 \partial x_3^2} \right) \end{array} \right. \quad (C-4)$$

On introduit la fonction de courant associée à une perturbation de vitesse, définie par  $u'_1 = \partial\psi/\partial x_3$  et  $u'_3 = -\partial\psi/\partial x_1$ . Une perturbation arbitraire plane pouvant être décomposée en modes normaux de Fourier, on peut réduire  $\psi$  à une forme modale :

$$\psi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_3) \exp\left(i k_r (x_1 - \xi u_\infty t)\right)$$

où  $k_r$  est le nombre d'onde de la perturbation modale, et  $\xi$  un nombre complexe. L'équation (C-3-1) est par construction toujours vérifiée. On obtient pour la deuxième équation du système (C-4) :

$$i k_r \left( (\bar{u}_1 - u_\infty \xi) \left( \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} - k_r^2 \varphi \right) - \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_3^2} \varphi \right) = \frac{d^2 \nu_T}{dx_3^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} + k_r^2 \varphi \right) + 2 \frac{d\nu_T}{dx_3} \left( \frac{d^3 \varphi}{dx_3^3} - k_r^2 \frac{d\varphi}{dx_3} \right) + \nu_T \left( \frac{d^4 \varphi}{dx_3^4} - 2 k_r^2 \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} + k_r^4 \varphi \right)$$

En introduisant  $\zeta = x_3/\delta$  l'altitude adimensionnelle,  $U = \bar{u}_1/u_\infty$  le profil de vitesse moyenne adimensionnelle et  $\text{Re}_\delta^T = u_\infty \delta / \nu_T$  le nombre de Reynolds total fondé sur l'épaisseur de couche limite  $\delta$ , on obtient l'équation de Orr-Sommerfeld généralisée [186] :

$$\begin{aligned} (U - \xi) \left( \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - (k_r \delta)^2 \varphi \right) - \frac{d^2 U}{d\zeta^2} \varphi &= -\frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \left( \frac{1}{\nu_T} \frac{d^2 \nu_T}{d\zeta^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + (k_r \delta)^2 \varphi \right) \right. \\ &+ \frac{2}{\nu_T} \frac{d\nu_T}{d\zeta} \left( \frac{d^3 \varphi}{d\zeta^3} - (k_r \delta)^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) \\ &\left. + \frac{d^4 \varphi}{d\zeta^4} - 2 (k_r \delta)^2 \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + (k_r \delta)^4 \varphi \right) \end{aligned} \quad (C-5)$$

Les conditions aux frontières, correspondant à un non-glissement à la paroi et à une dé-

croissance vers 0 à l'infini peuvent être formulées :

$$\begin{aligned} \bullet \varphi(0) = 0 & & \bullet \frac{d\varphi}{d\zeta}(0) = 0 \\ \bullet \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \varphi(\zeta) = 0 & & \bullet \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{d\varphi}{d\zeta} = 0 \end{aligned}$$

## C.2 Résolution numérique

On choisit de limiter dans toute la suite l'intervalle de variation de  $\zeta$  à l'intervalle  $[0, \zeta_M]$ . On considère le changement de variable suivant :

$$\zeta = \zeta_M \frac{\chi + 1}{2}$$

la variable  $\chi$  appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$ . On pose également :

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \varphi\left(\zeta_M \frac{\chi + 1}{2}\right) = \phi(\chi) \\ U(\zeta) = U\left(\zeta_M \frac{\chi + 1}{2}\right) = \mathfrak{U}(\chi) \\ \nu_T(\zeta) = \nu_T\left(\zeta_M \frac{\chi + 1}{2}\right) = \mathfrak{N}_T(\chi) \end{cases}$$

On a pour tout entier  $k$  :

$$\frac{d^k \varphi}{d\zeta^k} = \left(\frac{2}{\zeta_M}\right)^k \frac{d^k \phi}{d\chi^k}$$

L'équation (C-5) peut être réécrite à l'aide de ce changement de variable :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^2 \left[ (\mathfrak{U} - \xi) \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} - (k_r \delta)^2 \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^2 \phi \right) - \frac{d^2 \mathfrak{U}}{d\chi^2} \phi \right] + \frac{i}{k_r \delta \operatorname{Re} \epsilon_\delta^T} \left[ \frac{1}{\mathfrak{N}_T} \frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^2 \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^2 \phi \right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{\mathfrak{N}_T} \frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \left( \frac{d^3 \phi}{d\chi^3} - (k_r \delta)^2 \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^2 \frac{d\phi}{d\chi} \right) + \frac{d^4 \phi}{d\chi^4} - 2(k_r \delta)^2 \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^2 \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^4 \left(\frac{\zeta_M}{2}\right)^4 \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C-6})$$

Les conditions aux frontières deviennent :

$$\begin{aligned} \bullet \phi(-1) = 0 & & \bullet \frac{d\phi}{d\chi}(-1) = 0 \\ \bullet \phi(1) = 0 & & \bullet \frac{d\phi}{d\chi}(1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

La résolution numérique consiste à considérer la solution  $\phi$  dans  $\mathbb{R}[X][[-1, 1]]$  et à décomposer  $\phi$  sur une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X][[-1, 1]]$ , comme le suggère Orszag dans [175]. On munit

l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]([-1, 1])$  du produit scalaire :  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X]([-1, 1]))^2$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(\chi)Q(\chi)}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi$$

On considère la base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]([-1, 1])$  constituée des polynômes de Tchebychev.

### C.2.1 Décomposition orthogonale de Tchebychev

On note dans toute la suite  $T_n$  le  $n$ -ème polynôme de Tchebychev de première espèce, défini sur  $[-1, 1]$  par :

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi[ \quad (\text{C-8})$$

Une décomposition de  $\phi$  dans  $\mathbb{R}_N[X]([-1, 1])$  sur une base orthogonale constituée des  $N + 1$  premiers polynômes de Tchebychev de première espèce s'écrit :

$$\phi(\chi) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\chi) \quad (\text{C-9})$$

où  $a_n$  est la projection de  $\phi$  sur le  $n$ -ème polynôme de Tchebychev :

$$c_n a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\chi) T_n(\chi)}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi$$

avec  $c_0 = 2$  et  $c_n = 1$  pour  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

#### C.2.1.1 Décomposition de Tchebychev de la vitesse $\mathfrak{U}$

On décompose le profil de vitesse moyenne longitudinale  $\mathfrak{U}$  sur la base de polynômes de Tchebychev :

$$\mathfrak{U}(\chi) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(\chi)$$

où les  $b_n$  peuvent être approximés par [175] :

$$\bar{c}_n b_n = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^N \frac{1}{\bar{c}_m} \mathfrak{U} \left( \cos \frac{\pi m}{N} \right) \cos \frac{\pi n m}{N}$$

avec  $\bar{c}_0 = \bar{c}_N = 2$  et  $\bar{c}_j = 1$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ .

#### C.2.1.2 Décomposition de Tchebychev des dérivées successives

On souhaite décomposer la dérivée  $k$ -ème de  $\phi$  sur la base de polynômes  $(T_n)_{n=0, \dots, N}$ . Il vient :

$$\frac{d^k \phi}{d\chi^k} = \sum_{n=0}^N a_n^{(k)} T_n(\chi)$$

Pour pouvoir calculer les coefficients  $a_n^{(k)}$  en fonction des coefficients  $a_n$ , on remarque qu'à partir de la définition (C-8), on a pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  :

$$\frac{c_n}{n+1} \frac{dT_{n+1}}{d\chi} - \frac{d_{n-2}}{n-1} \frac{dT_{n-1}}{d\chi} = 2T_n$$

avec  $d_{-1} = 0$ ,  $d_n = 1$  pour  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Ainsi,

$$\frac{d}{d\chi} \left( \sum_{n=0}^N a_n^{(k-1)} T_n \right) = \sum_{n=0}^N a_n^{(k)} T_n = \frac{d}{d\chi} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^{(k)} \left( \frac{d_{N-n-1} c_n}{n+1} T_{n+1} - \frac{d_{n-2}}{n-1} T_{n-1} \right) \right)$$

On obtient, par projection orthogonale sur le polynôme de Tchébychev  $T_n$ , pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$c_{n-1} a_{n-1}^{(k)} = 2n a_n^{(k-1)} + a_{n+1}^{(k)}$$

avec  $a_n^{(k)} = 0$  si  $n > N$ . L'équation précédente peut être réécrite, par substitution récursive des  $a_{n+1}^{(k)}$ , pour tout entier  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 [2]}}^N p a_p$$

Un calcul par récurrence donne, pour tout entier  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_n a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n [2]}}^N p(p^2 - n^2) a_p \\ c_n a_n^{(3)} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{p=n+3 \\ p+n \equiv 1 [2]}}^N p((p^2 - n^2)^2 - 2(p^2 + n^2) + 1) a_p \\ c_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n [2]}}^N p(p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^4 + 3n^4 p^2 - n^2(n^2 - 4)^2) a_p \end{array} \right.$$

### C.2.1.3 Décomposition de Tchebychev d'un produit de fonctions

On définit pour  $n \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$  la fonction  $\tilde{T}_n$  sur  $[-1, 1]$  par  $\tilde{T}_n(\chi) = \exp(in \cos^{-1} \chi)$ , il vient  $2T_n = \tilde{T}_n + \tilde{T}_{-n}$ . On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\phi(\chi) = \sum_{n=-N}^N c_{|n|} a_{|n|} \tilde{T}_n(\chi) \\ 2\mathcal{U}(\chi) = \sum_{n=-N}^N c_{|n|} b_{|n|} \tilde{T}_n(\chi) \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\mathfrak{U}\phi = \frac{1}{4} \left( \sum_{n=-N}^N c_{|n|} b_{|n|} \tilde{T}_n \right) \left( \sum_{n=-N}^N c_{|n|} a_{|n|} \tilde{T}_n \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_{|n|} b_{|n|} c_{|m|} a_{|m|} \tilde{T}_{n+m}$$

Ce qui donne, en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $N$  :

$$\mathfrak{U}\phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \left( \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} b_{|n-p|} c_{|p|} a_{|p|} \right) T_n$$

#### C.2.1.4 Décomposition de Tchebychev de la viscosité cinématique totale $\mathfrak{N}_T$

Une décomposition de la viscosité cinématique totale dans la base de polynômes de Tchebychev donne :

$$\mathfrak{N}(\chi) = \sum_{n=0}^N \nu_n T_n(\chi)$$

Par définition, on a :

$$\mathfrak{N}_T = \nu_\infty + \kappa^2 \delta u_\infty \frac{2}{\zeta_M} \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 (\chi + 1)^2 \frac{d\mathfrak{U}}{d\chi}$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\chi + 1)^2 = \sum_{n=0}^N s_n T_n(\chi) \\ \frac{d\mathfrak{U}}{d\chi} = \sum_{n=0}^N \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 [2]}}^N p b_p T_n(\chi) \end{array} \right.$$

avec  $s_0 = 3/2$ ,  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = 1/2$  et  $s_n = 0$  pour  $n \geq 3$ . D'après la décomposition de Tchebychev d'un produit et d'une dérivée :

$$(1 + \chi)^2 \frac{d\mathfrak{U}}{d\chi} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \left( \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} s_{|n-p|} \sum_{\substack{m=|p|+1 \\ m+|p| \equiv 1 [2]}}^N m b_m \right) T_n$$

On obtient finalement :

$$c_n \nu_n = c_n \nu_\infty \mathbf{1}_{n=0} + \kappa^2 \delta u_\infty \frac{2}{\zeta_M} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} s_{|n-p|} \sum_{\substack{m=|p|+1 \\ m+p \equiv 1 [2]}}^N m b_m$$

### C.2.1.5 Décomposition de Tchebychev de l'équation de Orr-Sommerfeld généralisée

L'équation de Orr-Sommerfeld généralisée (C-6) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \left[ \frac{1}{\mathfrak{N}_T} \frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right) + \frac{2}{\mathfrak{N}_T} \frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \left( \frac{d^3 \phi}{d\chi^3} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d\phi}{d\chi} \right) + \right. \\
& \left. \frac{d^4 \phi}{d\chi^4} - 2 (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^4 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^4 \phi \right] + \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \left[ \mathfrak{U} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right) - \frac{d^2 \mathfrak{U}}{d\chi^2} \phi \right] \\
& = \xi \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right)
\end{aligned} \tag{C-10}$$

Afin d'expliciter la projection de Tchebychev de l'équation (C-10), il convient de détailler la décomposition de Tchebychev d'un certain nombre de termes.

- Le terme :  $\mathcal{T}_0 = \frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \frac{1}{\mathfrak{N}_T} \frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right)$

Une réécriture de ce terme donne :

$$\mathcal{T}_0 = \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right)$$

D'après la décomposition de Tchebychev de dérivées, il vient :

$$\frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \left( \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n[2]}}^N p(p^2 - n^2) \nu_p \right] T_n \right) \left( \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n[2]}}^N p(p^2 - n^2) a_p \right] T_n \right)$$

D'après la décomposition de Tchebychev d'un produit :

$$\frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{q=|n-p|+2 \\ q+n \equiv p[2]}}^N \sum_{\substack{m=|p|+2 \\ m \equiv p[2]}}^N q (q^2 - (n-p)^2) m (m^2 - p^2) \nu_q a_m \right] T_n$$

soit, après un réordonnement :

$$\frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p[2]}} \sum_{\substack{q=|n-m|+2 \\ q+n \equiv m[2]}}^N q (q^2 - (n-m)^2) \nu_q p (p^2 - m^2) \right) a_p \right] T_n$$

De la même manière, on a :

$$\frac{d^2 \mathfrak{N}_T}{d\chi^2} \phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{m = |n-p|+2 \\ m+n \equiv p[2]}}^N m(m^2 - (n-p)^2) \nu_m c_{|p||a_{|p|}} \right] T_n$$

- Le terme :  $\mathcal{T}_1 = \frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \frac{2}{\mathfrak{N}_T} \frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \left( \frac{d^3 \phi}{d\chi^3} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d\phi}{d\chi} \right)$

Une réécriture de ce terme donne :

$$\mathcal{T}_1 = \frac{2i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \left( \frac{d^3 \phi}{d\chi^3} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d\phi}{d\chi} \right)$$

D'après la décomposition de Tchebychev de dérivées, il vient :

$$\frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \frac{d\phi}{d\chi} = \left( \sum_{n=0}^N \left[ \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p = n+1 \\ p+n \equiv 1[2]}}^N p \nu_p \right] T_n \right) \left( \sum_{n=0}^N \left[ \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p = n+1 \\ p+n \equiv 1[2]}}^N p a_p \right] T_n \right)$$

D'après la décomposition de Tchebychev d'un produit :

$$\frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \frac{d\phi}{d\chi} = 2 \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{q = |n-p|+1 \\ q+n-p \equiv 1[2]}}^N \sum_{\substack{m = |p|+1 \\ m+p \equiv 1[2]}}^N q \nu_q m a_m \right] T_n$$

soit, après un réordonnement :

$$\frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \frac{d\phi}{d\chi} = 2 \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=1}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-1 \\ |n-m| \leq N \\ m+p \equiv 1[2]}} \sum_{\substack{q = |n-m|+1 \\ q+n-m \equiv 1[2]}}^N q \nu_q p \right) a_p \right] T_n$$

De la même manière, on a :

$$\frac{d\mathfrak{N}_T}{d\chi} \frac{d^3 \phi}{d\chi^3} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=3}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-3 \\ |n-m| \leq N \\ m+p \equiv 1[2]}} \sum_{\substack{q = |n-m|+1 \\ q+n-m \equiv 1[2]}}^N q \nu_q p ((p^2 - m^2)^2 - 2(p^2 + m^2) + 1) \right) a_p \right] T_n$$

- Le terme :  $\mathcal{T}_2 = \frac{i}{k_r \delta \text{Re}_\delta^T} \left( \frac{d^4 \phi}{d\chi^4} - 2(k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^4 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^4 \phi \right)$

Une réécriture de ce terme donne :

$$\mathcal{T}_2 = \frac{i \mathfrak{N}_T}{k_r \delta^2 u_\infty} \left( \frac{d^4 \phi}{d\chi^4} - 2 (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + (k_r \delta)^4 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^4 \phi \right)$$

D'après les développements de Tchebychev d'un produit et de dérivées, on a :

$$\mathfrak{N}_T \phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} \nu_{|n-p|} c_{|p|} a_{|p|} \right] T_n$$

$$\mathfrak{N}_T \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p [2]}} c_{|n-m|} \nu_{|n-m|} p(p^2 - m^2) \right) a_p \right] T_n$$

et

$$\mathfrak{N}_T \frac{d^4 \phi}{d\chi^4} = \frac{1}{48} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=4}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-4 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p [2]}} c_{|n-m|} \nu_{|n-m|} p(p^2(p^2 - 4)^2 - 3m^2 p^4 + 3m^4 p^2 - m^2(m^2 - 4)^2) \right) a_p \right] T_n$$

- Le terme :  $\mathcal{T}_3 = \mathfrak{U} \left( \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \phi \right) - \frac{d^2 \mathfrak{U}}{d\chi^2} \phi$

D'après les développements de Tchebychev d'un produit et de dérivées, on a :

$$\mathfrak{U} \phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \left( \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} b_{|n-p|} c_{|p|} a_{|p|} \right) T_n$$

$$\mathfrak{U} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p [2]}} p(p^2 - m^2) c_{|n-m|} b_{|n-m|} \right) a_p \right] T_n$$

et

$$\frac{d^2 \mathfrak{U}}{d\chi^2} \phi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left[ \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{m = |n-p|+2 \\ m+n \equiv p [2]}}^N m(m^2 - (n-p)^2) b_m c_{|p|} a_{|p|} \right] T_n$$

Finalement la projection sur le polynôme  $T_n$  de l'équation de Orr-Sommerfeld généralisée

donne pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$\tilde{\mathcal{L}}(a_0, a_1, \dots, a_N) = \xi \tilde{\mathcal{R}}(a_0, a_1, \dots, a_N) \quad (\text{C-11})$$

où  $\tilde{\mathcal{L}}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont des opérateurs linéaires des coefficients de décomposition de Tchebychev de  $\phi$ , donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(a_0, a_1, \dots, a_N) = & \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{1}{2} \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p[2]}} \sum_{\substack{q = |n-m|+2 \\ q+n \equiv m[2]}}^N q (q^2 - (n-m)^2) \nu_q p (p^2 - m^2) \right) a_p \\ & + \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{1}{2} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{m = |n-p|+2 \\ m+n \equiv p[2]}}^N m (m^2 - (n-p)^2) \nu_m c_{|p|} a_{|p|} \\ & + \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{1}{2} \sum_{p=3}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-3 \\ |n-m| \leq N \\ m+p \equiv 1[2]}} \sum_{\substack{q = |n-m|+1 \\ q+n-m \equiv 1[2]}}^N q \nu_q p ((p^2 - m^2)^2 - 2(p^2 + m^2) + 1) \right) a_p \\ & \dots - \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 4 \sum_{p=1}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-1 \\ |n-m| \leq N \\ m+p \equiv 1[2]}} \sum_{\substack{q = |n-m|+1 \\ q+n-m \equiv 1[2]}}^N q \nu_q p \right) a_p \\ & + \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} \frac{1}{48} \sum_{p=4}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-4 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p[2]}} c_{|n-m|} \nu_{|n-m|} p (p^2 (p^2 - 4)^2 - 3m^2 p^4 + 3m^4 p^2 - m^2 (m^2 - 4)^2) \right) a_p \\ & - \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p[2]}} c_{|n-m|} \nu_{|n-m|} p (p^2 - m^2) \right) a_p \\ & + \frac{i}{k_r \delta^2 u_\infty} (k_r \delta)^4 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^4 \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} \nu_{|n-p|} c_{|p|} a_{|p|} - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^4 \frac{1}{2} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} c_{|n-p|} b_{|n-p|} c_{|p|} a_{|p|} \\ & + \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{p=2}^N \left( \sum_{\substack{|m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N \\ m \equiv p[2]}} p (p^2 - m^2) c_{|n-m|} b_{|n-m|} \right) a_p \\ & - \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \sum_{\substack{m = |n-p|+2 \\ m+n \equiv p[2]}}^N m (m^2 - (n-p)^2) b_m c_{|p|} a_{|p|} \end{aligned}$$

et

$$\tilde{\mathcal{R}}(a_0, a_1, \dots, a_N) = \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 \left( \begin{array}{c} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n[2]}}^N p(p^2 - n^2) a_p - (k_r \delta)^2 \left( \frac{\zeta_M}{2} \right)^2 c_n a_n \end{array} \right)$$

Les conditions aux frontières (C-7) deviennent, sachant que  $T_n(1) = 1$ ,  $T_n(-1) = (-1)^n$ ,  $dT_n/d\chi(1) = n^2$  et  $dT_n/d\chi(-1) = (-1)^{n+1}n^2$  :

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = 0 & \quad \bullet \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} n^2 a_n = 0 \\ \bullet \sum_{n=0}^N a_n = 0 & \quad \bullet \sum_{n=0}^N n^2 a_n = 0 \end{aligned} \tag{C-12}$$

On obtient  $N+5$  équations pour  $N+1$  inconnues, dont l'unique solution est la solution triviale nulle, quelles que soient les valeurs de  $k_r$ ,  $\delta$ ,  $u_\infty$  et  $\xi$ . Comme le fait remarquer Orszag dans [175], la relation (C-9) n'est pas exacte, si bien que les  $N+1$  équations (C-11) ne peuvent pas être vérifiées pour tous les  $n$ , principalement pour les composantes hautes fréquences  $N-3$ ,  $N-2$ ,  $N-1$  et  $N$ , qui sont régies par les conditions aux frontières, plutôt que par l'équation dynamique [175]. L'idée est donc de reprendre la méthode  $-\tau$  de Lanczos [136] et de remplacer le 0 du membre de droite dans (C-11) par un coefficient  $\tau_n$  mesurant l'erreur d'approximation, pour les hautes composantes  $n = N-3$ ,  $n = N-2$ ,  $n = N-1$  et  $n = N$ . L'introduction de ces nouvelles variables permet de résoudre exactement le système d'équations.

### C.2.2 Formulation matricielle

Le système d'équations à résoudre (C-11) + (C-12) peut être réécrit matriciellement sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisées :

$$\mathcal{L} \mathbf{A} = \xi \mathcal{R} \mathbf{A} \tag{C-13}$$

avec  $\mathbf{A}$  le vecteur des inconnues,  $\mathcal{L}$  la matrice du membre de gauche et  $\mathcal{R}$  la matrice du membre de droite, donnés par :

$$\mathbf{A} = {}^t [ a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N \quad \tau_{N-3} \quad \tau_{N-2} \quad \tau_{N-1} \quad \tau_N ]$$

$$\mathcal{L} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \dots & (-1)^{N+1}N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \mathfrak{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{R} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

où,  $\mathcal{L}$  est la matrice de l'opérateur linéaire  $\tilde{\mathcal{L}}$  et  $\mathfrak{R}$  la matrice de l'opérateur linéaire  $\tilde{\mathcal{R}}$  (cf. équation (C-11)).

Les valeurs propres  $\xi$  sont obtenues à l'aide de la routine ZGGEV de la librairie Lapack. Cette routine repose sur l'algorithme QZ de Moler & Stewart [167].

La méthode de projection sur des polynômes de Tchebychev offre un algorithme de résolution qui converge rapidement, puisque l'erreur décroît plus vite que n'importe quelle puissance de  $1/N$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . À titre de comparaison, une discrétisation par différences finies d'ordre  $p$ , avec un pas de discrétisation spatiale constant de  $\Delta\chi$ , n'assurerait qu'une erreur en  $(\Delta\chi)^p$ , et nécessiterait donc un nombre très important de nœuds de maillage pour approximer convenablement les solutions.

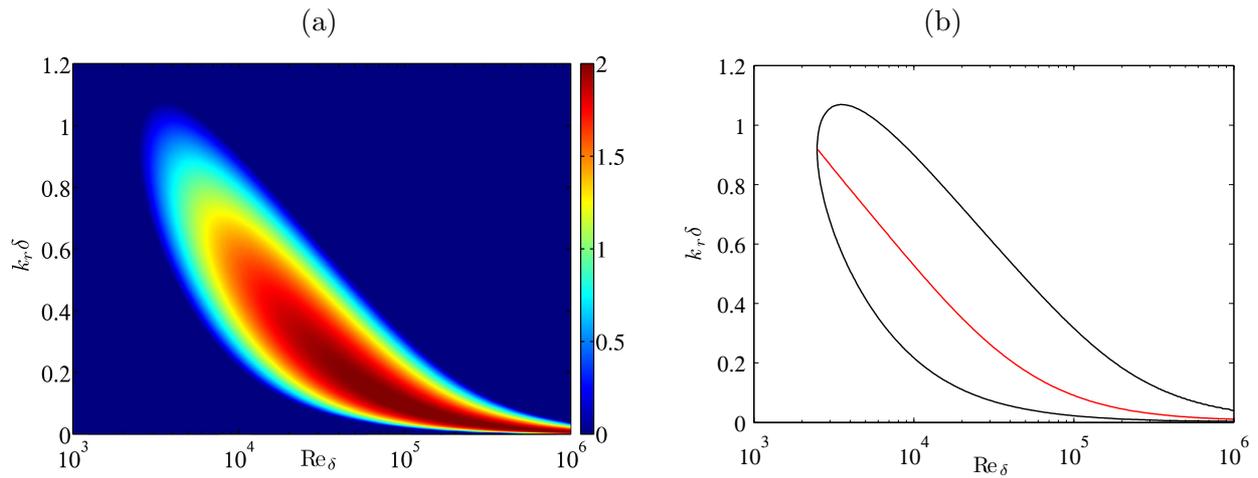
Cependant, elle présente deux inconvénients, comme le remarquent Dongarra *et al.* dans [66]. Les termes de la matrice  $\mathcal{L}$  grandissent en  $\mathcal{O}(N^7)$ , ce qui peut conduire à des erreurs considérables d'arrondi lors du calcul des valeurs propres, quand  $N$  devient grand ( $N \geq 10^3$ ). Aussi, l'algorithme introduit un nombre important de valeurs propres artefactuelles qu'il convient d'ignorer, et qui correspondent soit à  $\phi = 0$ , soit à des fonctions propres  $\phi$  parasites oscillant de maille à maille. Ces valeurs propres parasites proviennent de la troncature dans la décomposition de la solution  $\phi$  de  $\mathbb{R}[X]([-1, 1])$  en polynômes de Tchebychev dans  $\mathbb{R}_N[X]([-1, 1])$ . À noter aussi que la singularité de la matrice  $\mathcal{R}$  entraîne l'existence d'un certain nombre de valeurs propres infinies qu'on ignorera dans la suite.

En pratique, on choisit  $\zeta_M$  entier compris entre 2 et 6, et  $N$  compris entre 128 et 320, selon les applications.

### C.2.3 Résultats

La figure C.1 présente les résultats de stabilité obtenus dans le cas d'un profil de vitesse moyenne longitudinale laminaire. L'équation d'Orr-Sommerfeld résolue est donc l'équation (C-5) en prenant une viscosité turbulente  $\nu_t$  nulle. La figure C.1(a) montre la valeur de l'amplitude de la partie imaginaire de la valeur propre  $\xi$ . Lorsque cette partie imaginaire est positive, la perturbation est instable temporellement. Il existe des nombres d'onde adimensionnels  $k_r\delta$  assurant une excitation instable pour des nombres de Reynolds  $Re_\delta$  supérieurs à 2490, en accord avec les résultats obtenus par Schlichting & Gersten [206]. L'amplitude du domaine des nombres d'onde instables croît rapidement lorsque le nombre de Reynolds augmente, puis décroît à partir de  $Re_\delta \simeq 10^4$ . Pour les hauts nombres de Reynolds, le domaine des nombres d'onde instables est très étroit et proche de  $k_r\delta = 0$ . La figure C.1(b) permet de visualiser la courbe de stabilité neutre, correspondant à la frontière entre la zone stable et la zone instable, obtenue pour  $\text{Im}(\xi) = 0$ . On a également représenté la courbe des maxima d'instabilité dans la partie instable. Ainsi, à un nombre de Reynolds donné supérieur à 2490, le nombre d'onde optimal permettant d'obtenir une excitation la plus instable temporellement est donné par la valeur de cette courbe.

La bonne concordance de ces résultats pour un profil de vitesse moyenne longitudinale laminaire permet de valider la méthode dans un cas déjà étudié académiquement. L'étude de



**Fig. C.1:** (a)  $100 \times \max_{\xi \in \Xi} (\text{Im}(\xi), 0)$  dans le plan  $(\text{Re}_\delta, k_r \delta)$ . (b) — courbe de stabilité neutre. — courbe des maxima d'instabilité dans la région instable du plan  $(\text{Re}_\delta, k_r \delta)$ .

stabilité est mené sur un profil moyen turbulent, à l'aide du modèle à une équation de Guarini *et al.* [104].

L'étude révèle qu'il n'existe aucune valeur propre à partie imaginaire positive, quel que soit le nombre d'onde adimensionnel  $k_r \delta$ , et quel que soit le nombre de Reynolds. Ainsi pour une excitation 2-D temporelle, le profil turbulent moyen est toujours stable. Des tests avec d'autres longueurs de mélange ont également abouti à ce même résultat.



# Notations

Les notations utilisées dans ce document sont rappelées ici. Afin de différencier clairement les scalaires des vecteurs (ou tenseurs), ces derniers sont notés en gras. À droite figurent les pages d'introduction des notations.

## Caractères grecs

$\alpha$	Fraction non-parallélisable d'une tâche.....	184
$\alpha^d$	Amplification globale d'interpolation sur la cellule $d$ .....	139
$\alpha_{loc}^d$	Amplification locale d'interpolation sur la cellule $d$ .....	138
$\alpha_j$	$j^{\text{ème}}$ coefficient du schéma d'intégration temporelle.....	113
$\alpha_{rap}^f$	Force du rappel sur la variable $f$ .....	125
$\alpha_{tol}$	Tolérance sur le dépassement d'amplification d'interpolation (cas décentré).....	148
$\beta$	Position angulaire prise à partir du coin aval, dans le sens trigonométrique.....	39
$\chi$	Paramètre de position relative.....	136
$\Delta\xi$	Pas de discrétisation du maillage dans la direction de l'espace paramétrée par $\xi$ .....	109
$\Delta t$	Pas de discrétisation temporelle.....	111
$\delta$	Épaisseur de la couche limite incidente.....	21
$\delta^*$	Épaisseur de déplacement de la couche limite.....	199
$\delta_\theta$	Épaisseur de quantité de mouvement.....	24
$\epsilon$	Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.....	94
$\eta$	Position relative dans la cellule d'interpolation du point receveur.....	136
$\eta$	Variable de similitude.....	192
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques.....	30
$\gamma_v$	Facteur de retard entre le passage d'un tourbillon au bord aval et l'émission d'une onde acoustique.....	28
$\kappa$	Constante de von Kármán.....	56
$\kappa_l$	Borne inférieure d'intégration de l'erreur intégrale d'interpolation.....	141
$\kappa_u$	Borne supérieure d'intégration de l'erreur intégrale d'interpolation.....	141
$\kappa_v$	Rapport de la vitesse de convection des perturbations sur la vitesse de l'écoulement $u_\infty$ .....	28
$\Lambda$	Critère de stabilité d'une interpolation décentrée.....	158
$\lambda$	Longueur d'onde.....	109
$\lambda_a$	Longueur d'onde aérodynamique.....	63
$\lambda_g$	Échelle de Taylor.....	94
$\lambda_r$	Multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte d'ordre formel.....	142
$\lambda_t$	Conductivité thermique turbulente.....	98
$\lambda_v$	Longueur d'onde aérodynamique.....	28
$\lambda_{th}$	Conductivité thermique du fluide.....	92
$\mu$	Viscosité dynamique moléculaire.....	92
$\mu_1$	Multiplicateur de Lagrange associé au contrôle de l'amplification d'interpolation.....	149
$\mu_t$	Viscosité dynamique turbulente.....	97
$\mu_\infty$	Viscosité dynamique moléculaire de référence.....	93
$\nu_t$	Viscosité cinématique turbulente.....	203
$\nu_\infty$	Viscosité cinématique de référence.....	56
$\omega$	Pulsation.....	113

$\omega_0$	Vorticité au centre du tourbillon	172
$\Phi$	Résidu de détermination de la vitesse de frottement	57
$\phi^d$	Déphasage global d'interpolation sur la cellule $d$	139
$\phi_{\text{loc}}^d$	Déphasage local d'interpolation sur la cellule $d$	139
$\Pi_w$	Coefficient de sillage	58
$\psi$	Fonction courant	192
$\rho$	Masse volumique du fluide	21
$\rho_\infty$	Masse volumique de référence du fluide	24
$\sigma$	Dissipation (ou la force) du filtrage sélectif	111
$\sigma_{\text{ép}}$	Dissipation dans la zone éponge	124
$\sigma_{\text{ép}}^{\text{max}}$	Dissipation maximale dans la zone éponge	124
$\tau$	Décalage temporel	63
$\tau_2$	Temps de communication entre 2 unités de calcul	186
$\tau_{\text{eff}}^*$	Efficacité d'une tâche parallélisée idéalement	185
$\tau_{m,n}$	Composante cartésienne $(m, n)$ du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ , avec $(m, n) \in \{1, 2, 3\}^2$	105
$\tau_{r\theta}$	Composante polaire ou cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	106
$\tau_{rr}$	Composante polaire ou cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	106
$\tau_{rz}$	Composante cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	108
$\tau_{zz}$	Composante cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	108
$\tau_{\theta z}$	Composante cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	108
$\tau_{\theta\theta}$	Composante polaire ou cylindrique du tenseur $\boldsymbol{\tau}$	106
$\theta$	Azimut, en coordonnées polaires (2-D) ou cylindriques (3-D)	104
$\varepsilon^d$	Erreur globale d'interpolation sur la cellule $d$	137
$\varepsilon_{\text{loc}}^d$	Erreur locale d'interpolation sur la cellule $d$	137
$\varepsilon_{\text{int}}^d$	Erreur intégrale d'interpolation sur la cellule $d$	141
$\varphi$	Angle zénithal, en coordonnées sphériques	123
$\xi$	Déplacement total de l'interface	80
$\xi$	Paramétrage d'une direction de l'espace $(x_1, x_2, x_3, r, \theta, \text{ ou } z)$	109
$\xi_a$	Déplacement acoustique de l'interface	80
$\xi_v$	Déplacement de l'interface par convection de la déviation	80
$\xi_M$	Maximum de déplacement de l'interface	81
$\xi_{\text{ép}}^{\text{max}}$	Position $\xi$ finale de la zone éponge	124
$\xi_{\text{ép}}^{\text{min}}$	Position $\xi$ initiale de la zone éponge	124
$\xi_{a,\text{eff}}$	Déplacement acoustique effectif de l'interface (Lagrange)	82

### Caractères latins

$\bar{u}_-$	Vitesse d'un écoulement cisailé, dans la direction $-\mathbf{e}_1$	60
$\bar{u}_1^+$	Vitesse moyenne longitudinale, en échelles de paroi	57
$\bar{u}_1^{\text{th}}$	Vitesse moyenne longitudinale estimée par la loi logarithmique	56
$l_e$	Longueur d'échelle de la couche cisailée	25
$l_m$	Longueur de mélange	203
$\eta_g$	Constante dans le profil de Guarini <i>et al.</i>	58
$K_f^\xi$	Terme de filtrage dans la direction de l'espace paramétrée par $\xi$	111
$r$	Rayon, en coordonnées sphériques	123
$\tilde{s}_j^d(\eta)$	Approximation par régression polynomiale du coefficient d'interpolation $s_j^d(\eta)$	154
$a_q^r$	Coefficient de régression polynomial du monôme de degré $q$ sur l'intervalle $\mathcal{I}_r$	154
$a_j$	$j^{\text{ème}}$ coefficient du schéma aux différences finies	109
$b_g$	Constante dans la loi de Guarini <i>et al.</i>	58
$C$	Constante dans la loi logarithmique	56
$c_a$	Vitesse du son dans la cavité	28
$C_g$	Constante dans la loi de Guarini <i>et al.</i>	58
$C_p$	Coefficient de pression	64

$c_p$	Chaleur massique spécifique à pression constante.....	92
$c_v$	Chaleur massique spécifique à volume constant.....	92
$c_\infty$	Vitesse du son de référence (au-dessus de la cavité).....	29
$D$	Diamètre d'une cavité cylindrique.....	39
$D$	Profondeur d'une cavité rectangulaire.....	21
$d$	Indice de décentrage, numéro de cellule d'interpolation.....	120
$d_j$	$j^{\text{ème}}$ coefficient du filtrage sélectif.....	111
$e_i$	Énergie interne par unité de masse.....	92
$e_t$	Énergie totale par unité de masse.....	91
$f$	Fréquence.....	27
$f_k$	Fonction harmonique de nombre d'onde $k$ .....	137
$f_I$	Fréquence du mode I.....	88
$f_{II}$	Fréquence du mode II.....	89
$G_f$	Fonction d'amortissement du filtrage sélectif.....	111
$G_{\text{RK}}$	Fonction d'amplification de l'algorithme d'intégration temporelle.....	113
$G_S$	Accélération d'une tâche parallélisée.....	186
$G_S^*$	Accélération d'une tâche parallélisée idéalement.....	184
$H$	Profondeur d'une cavité cylindrique.....	39
$H'$	Correction de profondeur acoustique d'une cavité bafflée.....	34
$h_s$	Filtre d'interpolation.....	175
$i$	Nombre imaginaire pur : $i^2 = -1$ .....	113
$I_1$	Intensité turbulente longitudinale.....	55
$I_1^M$	Maximum du taux de fluctuations longitudinales de la couche limite incidente.....	56
$I_3$	Intensité turbulente verticale.....	55
$k$	Nombre d'onde.....	110
$k$	Énergie cinétique turbulente.....	95
$k^*$	Nombre d'onde effectif du schéma aux différences finies.....	110
$k_i$	Partie imaginaire du nombre d'onde complexe $k$ , facteur d'amplification.....	25
$k_r$	Partie réelle du nombre d'onde complexe $k$ .....	25
$k_{//}$	Rapport entre $\tau_2$ et $T_1$ .....	186
$L$	Longueur d'une cavité rectangulaire.....	21
$L_2^M$	Dimension transverse au maximum de déplacement de l'interface.....	81
$L_f$	Échelle intégrale.....	93
$l_t$	Demi-largeur du tourbillon.....	172
$l_\eta$	Échelle de Kolmogorov.....	93
$M_z^{\text{int}}$	Nombre de blocs suivant $e_z$ des maillages internes de la cavité pour la parallélisation.....	180
$M_x^{\text{sup}}$	Nombre de blocs suivant $e_x$ du maillage cartésien supérieur pour la parallélisation.....	178
$M_y^{\text{sup}}$	Nombre de blocs suivant $e_y$ du maillage cartésien supérieur pour la parallélisation.....	178
$M_z^{\text{sup}}$	Nombre de blocs suivant $e_z$ du maillage cartésien supérieur pour la parallélisation.....	178
$M_{\text{gaz}}$	Masse molaire du gaz parfait considéré.....	93
$N$	Nombre de points de la méthode numérique (différences finies, filtrage, interpolations, etc.).....	109
$N_p$	Nombre d'unités de calcul allouées pour une tâche.....	184
$n_r^{\text{int}}$	Nombre de points de maillage radialement du maillage cylindrique périphérique.....	182
$n_s$	Largeur de bande de points donneurs/receveurs pour la parallélisation.....	178
$n_x$	Nombre de points de maillage suivant $e_x$ par bloc du maillage cartésien supérieur.....	178
$n_x^{\text{int}}$	Nombre de points de maillage suivant $e_x$ du maillage cartésien interne.....	182
$n_x^{\text{sup}}$	Nombre de points de maillage suivant $e_x$ du maillage cartésien supérieur.....	179
$n_y$	Nombre de points de maillage suivant $e_y$ par bloc du maillage cartésien supérieur.....	178
$n_y^{\text{int}}$	Nombre de points de maillage suivant $e_y$ du maillage cartésien interne.....	182
$n_y^{\text{sup}}$	Nombre de points de maillage suivant $e_y$ du maillage cartésien supérieur.....	179
$n_z$	Nombre de points de maillage suivant $e_z$ par bloc du maillage cartésien supérieur.....	178
$n_z^{\text{int}}$	Nombre de points de maillage suivant $e_z$ du maillage cartésien interne.....	182

$n_z^{\text{sup}}$	Nombre de points de maillage suivant $\mathbf{e}_z$ du maillage cartésien supérieur . . . . .	179
$n_\theta^{\text{int}}$	Nombre de points de maillage azimuthalement du maillage cylindrique périphérique . . . . .	182
$p$	Ordre formel de la méthode numérique (différences finies, filtrage, interpolations, etc.) . . .	109
$p$	Pression statique . . . . .	21
$p'$	Pression fluctuante . . . . .	21
$p_\infty$	Pression de référence . . . . .	47
$P_{\text{ref}}$	Pression au carré de référence . . . . .	54
$Q$	Critère $Q$ . . . . .	246
$q_J$	Débit aérodynamique de fluide à l'ouverture de la cavité . . . . .	81
$q_M$	Débit acoustique à l'ouverture de la cavité . . . . .	83
$q_m$	Composante cartésienne du vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ , avec $m \in \{1, 2, 3\}$ . . . . .	105
$Q_r$	Degré du polynôme approximant le coefficient d'interpolation $s_j^d$ sur l'intervalle $\mathcal{I}_r$ . . . . .	154
$q_r$	Composante radiale polaire ou cylindrique du vecteur $\mathbf{q}$ . . . . .	106
$q_z$	Composante cylindrique suivant $\mathbf{e}_z$ du vecteur $\mathbf{q}$ . . . . .	108
$q_\theta$	Composante azimuthale polaire ou cylindrique du vecteur $\mathbf{q}$ . . . . .	106
$R$	Rayon de la cavité cylindrique . . . . .	127
$r$	Rayon, en coordonnées polaires (2-D) ou cylindriques (3-D) . . . . .	104
$R_g$	Constante des gaz parfaits . . . . .	93
$s_j^d(\eta)$	Coefficient d'interpolation $j$ pour un décentrage $d$ , à la position relative $\eta$ . . . . .	136
$S_{\text{gaz}}$	Température de Sutherland du gaz considéré . . . . .	92
$T$	Température . . . . .	92
$t$	Temps . . . . .	91
$T_0$	Température totale . . . . .	224
$T_1$	Temps d'exécution séquentielle d'une tâche . . . . .	184
$t_t$	Temps de traversée moyen de l'ouverture de la cavité . . . . .	256
$T_\infty$	Température de référence . . . . .	47
$t_M$	Instant où le maximum de déplacement de l'interface est atteint . . . . .	83
$T_{N_p}$	Temps d'exécution d'une tâche parallélisée sur $N_p$ unités de calcul . . . . .	186
$T_{N_p}^*$	Temps d'exécution d'une tâche parallélisée idéalement sur $N_p$ unités de calcul . . . . .	184
$u'_{1\text{rms}}$	Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse longitudinale $u'_1$ . . . . .	55
$u'_{3\text{rms}}$	Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse verticale $u'_3$ . . . . .	55
$u_0$	Vitesse moyenne longitudinale à l'altitude $x_3 = 0$ dans la cavité . . . . .	81
$U_c$	Vitesse moyenne longitudinale de convection . . . . .	256
$u_c$	Vitesse de convection des perturbations . . . . .	27
$u_M$	Vitesse acoustique d'une particule fluide normale à l'ouverture de la cavité . . . . .	80
$u_m$	Composante cartésienne du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ suivant $\mathbf{e}_m$ , avec $m \in \{1, 2, 3\}$ . . . . .	21
$u_r$	Composante radiale polaire ou cylindrique du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ . . . . .	106
$u_z$	Composante cylindrique suivant $\mathbf{e}_z$ du vecteur $\mathbf{u}$ . . . . .	108
$u_\infty$	Vitesse de l'écoulement . . . . .	21
$u_\tau$	Vitesse de frottement à la paroi . . . . .	56
$u_\theta$	Composante azimuthale polaire ou cylindrique du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ . . . . .	106
$u_\varphi$	Composante zénithale sphérique du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ . . . . .	122
$u_\xi$	Composante de la vitesse dans la direction $\mathbf{e}_\xi$ . . . . .	114
$V_g$	Vitesse de groupe des ondes acoustiques . . . . .	121
$W$	Largeur d'une cavité rectangulaire . . . . .	21
$x_3^+$	Altitude, en échelles de paroi . . . . .	57
$x_m$	Coordonnée cartésienne du point $M$ suivant $\mathbf{e}_m$ , avec $m \in \{1, 2, 3\}$ . . . . .	21
$x_M$	Position longitudinale du maximum de déplacement de l'interface . . . . .	81
$z$	Altitude, en coordonnées polaires (2-D) ou cylindriques (3-D) . . . . .	104
$Z_C$	Impédance acoustique de la cavité . . . . .	84
$Z_M$	Impédance acoustique de l'ouverture de la cavité . . . . .	84
$z_{l,m}$	$m^{\text{ème}}$ zéro de la dérivée de la $l^{\text{ème}}$ fonction de Bessel de première espèce . . . . .	41

DSP Densité spectrale de puissance ..... 54  
 SPL Niveau de pression acoustique ..... 72

**Matrices, tenseurs & vecteurs**

$\omega$  Vorticité..... 207  
 $\tau$  Tenseur des contraintes visqueuses ..... 91  
 $e_1$  Vecteur unitaire de base cartésienne ..... 21  
 $e_2$  Vecteur unitaire de base cartésienne ..... 21  
 $e_3$  Vecteur unitaire de base cartésienne ..... 21  
 $e_r$  Vecteur unitaire de base polaire ou cylindrique..... 104  
 $e_z$  Vecteur unitaire de base cylindrique ..... 104  
 $e_r$  Vecteur unitaire de base sphérique..... 123  
 $e_\theta$  Vecteur unitaire de base polaire ou cylindrique..... 104  
 $e_\varphi$  Vecteur unitaire de base sphérique..... 123  
 $s$  Tenseur des déformations ..... 96  
 $\mathbf{E}_e$  Décomposition des flux eulériens..... 105  
 $\mathbf{E}_v$  Décomposition des flux visqueux..... 105  
 $\mathbf{F}_e$  Décomposition des flux eulériens..... 105  
 $\mathbf{F}_v$  Décomposition des flux visqueux..... 105  
 $\mathbf{G}_e$  Décomposition des flux eulériens..... 107  
 $\mathbf{G}_v$  Décomposition des flux visqueux..... 107  
 $\mathbf{H}_e$  Décomposition des flux eulériens..... 106  
 $\mathbf{H}_v$  Décomposition des flux visqueux..... 106  
 $\mathbf{I}$  Tenseur identité ..... 92  
 $\mathbf{K}_e$  Flux eulériens ..... 99  
 $\mathbf{K}_f$  Terme de filtrage ..... 99  
 $\mathbf{K}_v$  Flux visqueux ..... 99  
 $\mathbf{q}$  Flux de chaleur ..... 91  
 $\mathbf{U}$  Vecteur des variables conservatives..... 99  
 $\mathbf{u}$  Vitesse eulérienne d’une particule fluide..... 21  
 $\mathbf{u}'$  Vitesse fluctuante d’une particule fluide..... 21  
 $\tilde{\mathbf{u}}_i$  Perturbations de vitesse dans la sous-couche interne ..... 199  
 $\tilde{\mathbf{u}}_o$  Perturbations de vitesse dans la zone externe de la couche limite..... 199

**Nombres adimensionnels**

CFL Nombre de Courant–Friedrichs–Lewy :  $\text{CFL} = \frac{(c_\infty + |\bar{u}_\xi|_{\max}) \Delta t_{\max}}{\Delta \xi_{\min}}$  ..... 114  
 Ma Nombre de Mach :  $\text{Ma} = \frac{u_\infty}{c_\infty}$  ..... 19  
 Pr Nombre de Prandtl :  $\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda_{th}}$  ..... 92  
 $\text{Re}_x$  Nombre de Reynolds construit sur la longueur de développement de la couche limite :  
 $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x_1}{\nu_\infty}$  ..... 193  
 $\text{Re}_\delta$  Nombre de Reynolds construit sur l’épaisseur de couche limite :  $\text{Re}_\delta = \frac{u_\infty \delta}{\nu}$  ..... 203  
 $\text{Re}_{L_f}$  Nombre de Reynolds fondé sur l’échelle intégrale :  $\text{Re}_{L_f} = \frac{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\| L_f}{\nu_\infty}$  ..... 94  
 St Nombre de Strouhal :  $\text{St} = \frac{fL}{u_\infty}$  ..... 27

**Opérateurs et fonctions**

: Double produit contracté (tenseur, tenseur) ..... 97  
 \* Produit de convolution ..... 95

$-$	Opérateur de moyennage temporel . . . . .	21
$-\phi$	Opérateur de moyennage en phase d'un signal pseudo-périodique . . . . .	251
$\mathcal{V}$	Opérateur de Vandermonde d'un vecteur . . . . .	170
$\cdot$	Produit contracté (tenseur, vecteur), produit scalaire (vecteur, vecteur) . . . . .	91
$\delta$	Distribution de Dirac . . . . .	175
$\delta_m^n$	Symbole de Kronecker entre les entiers $m$ et $n$ . . . . .	105
$\mathbf{1}_{\{\mathcal{E}\}}$	Fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{E}$ . . . . .	124
<b>div</b>	Divergence d'un tenseur . . . . .	91
<b>grad</b>	Gradient d'un scalaire ou d'un vecteur . . . . .	91
$\mathcal{C}^2$	Fonction de cohérence entre deux signaux . . . . .	69
$\mathcal{L}$	Lagrangien associé à un problème d'optimisation . . . . .	142
$\mathcal{R}_{u'_m, u'_n}$	Coefficient de corrélation spatiale entre les vitesses fluctuantes $u'_m$ et $u'_n$ . . . . .	62
$\odot$	Produit de Kronecker de deux matrices . . . . .	170
$\otimes$	Produit tensoriel de deux vecteurs . . . . .	91
<b>rot</b>	Rotationnel d'un vecteur . . . . .	207
$\text{III}_{\Delta\xi}$	Peigne de Dirac de période $\Delta\xi$ . . . . .	175
<b>div</b>	Divergence d'un vecteur . . . . .	91
<b>sgn</b>	Fonction signe d'un réel . . . . .	106
<b>sinc</b>	Fonction sinus cardinal d'un réel . . . . .	142
$\widehat{f}$	Opérateur de transformée de Fourier de $f$ . . . . .	175
$\sim$	Opérateur d'interpolation . . . . .	135
$t$	Opérateur de transposition d'un vecteur ou d'un tenseur . . . . .	92
$*$	Opérateur de conjugaison complexe . . . . .	69
$f_{\text{III}}$	Opérateur d'échantillonnage de $f$ . . . . .	175
$H_l^{(1)}$	$l^{\text{ème}}$ fonction de Hankel de première espèce . . . . .	33
$I$	Opérateur identité . . . . .	99
$J_l$	$l^{\text{ème}}$ fonction de Bessel de première espèce . . . . .	41
$P$	Périodogramme . . . . .	53
$P_W$	Périodogramme lissé de Welch . . . . .	54
$w$	Fenêtre de pondération . . . . .	53
<b>arg</b>	Fonction argument d'un nombre complexe . . . . .	139
<b>BTF</b>	Fonction de transfert aval . . . . .	85
<b>E</b>	Fonction partie entière . . . . .	54
<b>FTF</b>	Fonction de transfert amont . . . . .	84

# Bibliographie

- [1] AFANASYEV, V.N., CHUDNOVSKY, Y.P., LEONTIEV, A.I. & ROGANOV, P.S. *Turbulent flow friction and heat transfer characteristics for spherical cavities on a flat plate*. Exp. Th. Fluid Sc., **7** (1993), p. 1–8.
- [2] AHUJA, K.K. & MENDOZA, J. *Effects of cavity dimensions, boundary layer and temperature in cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes*. NASA Contractor Report 4653 (1996).
- [3] AKSELVOLL, K & MOIN, P. *Application of the dynamic localization model to large eddy simulation of turbulent flow over a backward-facing step*. Engineering Applications to Large Eddy Simulation, Ed. U. Piomelli & S. Rabag. ASME, 1993.
- [4] ALLGOWER, E.L., & GEORG, K. *Simplicial and continuation methods for approximations, fixed points and solutions to systems of equations*. SIAM Review, **22** (1980), p. 28–85.
- [5] AMDAHL, G. *Validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities*. AFIPS Conference Proceedings, **30** (1967), p. 483-485.
- [6] BAILLY, C. & COMTE-BELLOT, G. *Turbulence*. Sciences et techniques de l'ingénieur, CNRS Editions, Paris 2003.
- [7] BALDWIN, B.S. & LOMAX, H. *Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows*. AIAA Paper 78-257 (1978).
- [8] BANKS, H.T., RUBIO, D. & SMITH, R. *Modeling of acoustic fields generated by flow past an open cavity*. AIAA Paper 99-1913 (1999).
- [9] BARDINA, J., FERZIGER, J.H. & REYNOLDS, W.C. *Improved subgrid scale models for Large Eddy Simulation*. AIAA Paper 1980-1357 (1980).
- [10] BARRÉ, S. *Etude numérique et expérimentale du bruit aérodynamique avec application au jets ronds subsoniques*. PhD Thesis. École Centrale de Lyon, France (2006).
- [11] BENEK, J.A., STEGER, J.L. & DOUGHERTY F.C. *A flexible grid embedding technique with applications to the Euler equations*. AIAA paper, 83-1944 (1983).
- [12] BENEK, J.A., STEGER, J.L., DOUGHERTY, F.C. & BUNING, P.G. *Chimera : A grid-embedding technique*. AEDC Technical Report 85-64 (1986).
- [13] BERLAND, J. *Modélisation des erreurs numériques dans une simulations des grandes échelles et étude du screech dans un jet rectangulaire supersonique*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2006).
- [14] BERLAND, J., BOGEY, C., MARSDEN, O. & BAILLY, C. *High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems*. J. Comput. Phys. **224**, p. 637–662.
- [15] BERTSEKAS, D.P. *Constrained optimization and Lagrange multipliers methods*. Athena Scientific (1982).
- [16] BILANIN, A.J. & COVERT, E.E. *Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities*. AIAA J., **11** (1973), p. 347–351.
- [17] BLAKE, W.K. & POWELL A. *The development of contemporary views of flow-tone generation*. Recent advances in aeroacoustics, Springer-Verlag (1986), p. 247–345.

- [18] BLEVINS R.D. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger Pub. Co. 2001.
- [19] BLOCK, P.J.W. *Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds*. Technical Note D-8351, NASA (1976).
- [20] BLOKHINTSEV, D.I. *Excitation of resonance by air flow*. (Traduit de Возбуждение резонаторов потоком воздуха, Журнал Технической Физики, **15** (1945), p. 63–70.) SLA Translation Pool 270 (ONR).
- [21] BOERSMA, B.J. *Numerical simulation of the noise generated by a low Mach number, low Reynolds number jet*. Fluid Dyn. Res., **35** (2004), p. 425–447.
- [22] BOGEY, C. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2000).
- [23] BOGEY, C. & BAILLY, C. *LES of High Reynolds, high subsonic jet : effects of the subgrid scale modeling on flow and noise*. AIAA paper 2003-3557 (2003).
- [24] BOGEY, C. & BAILLY, C. *Noise investigation of high subsonic, moderate Reynolds number jet using compressible LES*. Th. Comput. Fluid Dyn., **16** (2003), p. 273–297.
- [25] BOGEY, C. & BAILLY, C. *A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*. J. Comput. Phys., **194** (2004), p. 194–214.
- [26] BOGEY, C. & BAILLY, C. *On the application of explicit spatial filtering to the variables or fluxes of linear equations*. J. Comput. Phys., **225** (2007), p. 1211–1217.
- [27] BOGEY, C., DE CACQUERAY, N. & BAILLY, C. *A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations*. J. Comput. Phys., **228** (2009), p. 1447–1465.
- [28] BOJANOV, B. & XU, Y. *On polynomial interpolation of two variables*. J. Approx. Theory, **120** (2003), p. 267–282.
- [29] DE BOOR, C. *Polynomial interpolation in several variables*. R. de Millo and J. R. Rice editors, Studies Comput. Sc., Plenum Press (1994), p. 87–119.
- [30] BORLAND, C.J. *Numerical prediction of the unsteady flow field in an open cavity*. AIAA Paper 77-673 (1977).
- [31] BOYD, J.P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Springer-Verlag, New York, USA (1989).
- [32] BRADSHAW, P. *Compressible turbulent shear layers*. Annual Review of Fluid Mechanics, **9** (1977).
- [33] BRAZIER, J.G. *The hydrodynamic channel and A3D-1 bomb bay buffeting tests*. Douglas Aircraft Co. Report No. ES17825 (1954).
- [34] BRÈS, G. & COLONIUS, T. *Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities*. J. Fluid Mech., **599** (2008), p. 309–339.
- [35] BROWN, R.G. *Maximizing Beowulf Performance*. Duke University Physics Department, Durham, NC, USA. Online at [http://www.phy.duke.edu/~rgb/brama/brama\\_old/als/als/als.html](http://www.phy.duke.edu/~rgb/brama/brama_old/als/als/als.html)
- [36] BROYDEN, C.G. *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*. Math. Comput., **19** (1965), p. 577–593.
- [37] CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T.A. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, New York, USA (1987).
- [38] CATTAFESTA, L, WILLIAMS, D, ROWLEY, C. & ALVI, F. *Review of active control of flow-induced cavity resonance*. 33<sup>rd</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference (2003).
- [39] CHARWAT, A.F., ROOS, J.N., DEWEY, F.C. & HITZ, J.A. *An investigation of separate flows. Part I. The pressure field*. J. Aero. Sc., **28** (1961), p. 457–470.
- [40] CHAUVET, N., DECK, S. & JACQUIN, L. *Zonal detached eddy simulation of a controlled propulsive jet*. AIAA Journal, **45** (2007), p. 2458-2473

- [41] CHEN, C.J., NASERI-NESHAT, H. & HO, K.S. *Finite-analytic numerical solution of heat transfer in two-dimensional cavity flow*. Num. Heat Transfer, **4** (1981), p. 179–197.
- [42] CHESSIRRE, G. & HENSHAW W.D. *Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations*. J. Comput. Phys., **90** (1990), p. 1–64.
- [43] CHICHEPORTICHE, J. & GLOERFELT, X. *Direct noise computation of the flow over cylindrical cavities*. AIAA paper 2010-3775 (2010).
- [44] CHONG, M.S., PERRY, A.E. & CANTWELL, B.J. *A general classification of three-dimensional flow field*. Phys. Fluids, **A2** (1990), p. 765.
- [45] CHUNG, K.M. *Characteristics of transonic rectangular cavity flows*. J. Aircraft, **37** (2000), p. 463–438.
- [46] CHUNG, K.M. *Geometric effect on compressible rectangular cavity flows*. Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sc., **45** (2002), p. 28–34.
- [47] CLAUSER, F.H. *The turbulent boundary layer*. Adv. Appl. Mech., **1** (1956), p. 1–51.
- [48] COLES, D. *The law of the wake in the turbulent boundary layer*. J. Fluid Mech., **1** (1956), p. 191–226.
- [49] COLONIUS, T. *An overview of simulation, modeling, and active control of flow/acoustic resonance in open cavities*. AIAA Paper 2001-0076 (2001).
- [50] COLONIUS, T., BASU, A.J., ROWLEY, C.W. *Numerical investigation of the flow past a cavity*. AIAA Paper 99-1912 (1999).
- [51] COLONIUS, T., LELE, S.K. & MOIN, P. *Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation*. AIAA J., **31** (1994), p. 1574–1582.
- [52] CONN, A.R., GOULD, N.I.M. & TOINT, P.L. *Trust-Region methods*. MPS-SIAM Series on Optimization, SIAM, Philadelphia (2000).
- [53] CONSTANTINESCU, G.S. & LELE, S.K. *A highly accurate technique for the treatment of flow equations at the polar axis in cylindrical coordinates using series expansions*. J. Comput. Phys., **183** (2002), p. 165–186.
- [54] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. & LEWY, H. *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*. Mathematische Annalen, **100** (1928), p. 32–74.
- [55] CREMER, L. & ISING, H. *Die selbsterregten Schwingungen von Orgelpfeifen*. Acustica, **19** (1967), p.143–153.
- [56] CURLE, N. *The mechanics of edge tones*. Proceedings of the Physical Society. Series A. London, United Kingdom, **216** (1953), p. 245.
- [57] CURLE, N. *The Influence of Solid Boundaries upon Aerodynamic Sound*. Proceedings of the Royal Society. Series A. London, United Kingdom, **231** (1955), p. 505–514.
- [58] CUYT, A. & VAN DER CRUYSSSE, P. *Abstract Pade approximants for the solution of a system of nonlinear equations*. Comput. Math. Appl., **9** (1983), p. 139–149.
- [59] CZECH, M.J., CROUCH, J.D., STOKER, R.W., STRELETS, M.K. & GARBARUK, A. *Cavity noise generation for circular and rectangular vent holes*. AIAA Paper 2006-2508 (2006).
- [60] DECK, S. *Numerical Simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil*. AIAA Journal, **43** (2005), p. 1556–1566.
- [61] DELFS, J. W. *An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries*. AIAA paper 2001-2199 (2001).
- [62] DEMETZ, F.C. & FARABEE, T.M. *Laminar and turbulent shear flow induced cavity resonances*. AIAA Paper 77-1293 (1977).
- [63] DESQUESNES, G., TERRACOL, M., MANOHA, E. & SAGAUT, P. *On the use of high order overlapping grid method for coupling in CFD/CAA*. J. Comput. Phys., **220** (2006), p. 355–382.

- [64] DESVIGNE, D., MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C. *Development of noncentered wavenumber-based optimized interpolation schemes with amplification control for overlapping grids*. SIAM J. Sci. Comput., **32** (2010), p. 2074–2098.
- [65] DOMARADZKI, J.A. & RADHAKRISHNAN, S. *Eddy viscosities in implicit large eddy simulations of decaying high Reynolds number turbulence with and without rotation*. Fluid Dyn., **36**, p. 385–406.
- [66] DONGARRA, J.J., STRAUGHAM, B. & WALKER, D.W. *Chebyshev  $\tau$ -QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems*. Appl. Num. Math., **22** (1996), p. 399–434.
- [67] DOWLING, A. & HYNES, T. *Towards a silent aircraft*. Aero. J., **110** (2006), p. 487–494.
- [68] DUCROS, F., COMTE, P. & LESIEUR, M. *Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate*. J. Fluid Mech., **326** (1996), p. 1–36.
- [69] DYBENKO, J. & SAVORY, E. *An experimental investigation of turbulent boundary layer flow over surface-mounted circular cavities*. Prof. Eng. Publ., **222** (2008), p. 109–125.
- [70] EAST, L.F. *Aerodynamic induced resonance in rectangular cavities*. J. Sound Vibr., **3** (1966), p. 227–287.
- [71] ELDER, S.A. *Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow*. J. Acoust. Soc. Am., **64** (1978), p. 877–890.
- [72] ELDER, S.A. *On the mechanisms of sound production in organ pipes*. J. Acoust. Soc. Am., **54** (1973), p. 1554–1564.
- [73] EMMERT, T. *Development of a multidomain high-order algorithm for computational aeroacoustics : application to subsonic and transonic confined flows*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2007).
- [74] EMMERT, T., LAFON, P. & BAILLY, C. *Numerical study of self-induced transonic flow oscillations behind a sudden duct enlargement*. Phys. Fluids, **21** (2009), p. 1–15.
- [75] ERLEBACHER, G., HUSSAINI, M.Y., SPEZIALE C.G. & ZANG, T.A. *Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows*. J. Fluid Mech., **238** (2002), p. 155–185.
- [76] ESCUDIER M.P. *The distribution of mixing length in turbulent flow near walls*. Heat transfer section Report TWF/TN/1, Imperial College (1966)
- [77] EUROSTAT *Transport aérien de passagers - [ttr00012]*  
Online at <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>
- [78] EUROSTAT *Transport aérien de marchandises - [ttr00011]*  
Online at <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>
- [79] FAHY, F. & GARDIONO, P. *Sound and Structural Vibration : Radiation, Transmission and Response*. 2<sup>nd</sup> edition (2007), Academic Press.
- [80] FAURE, M.T., ADRIANOS, P., LUSSEYRAN, F. & PASTUR, L. *Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers*. Exp. Fluids, **42** (2007), p. 169–184.
- [81] FAVRE, A. *Équations des gaz turbulents compressibles*. Journal de Mécanique, **4** (1965), p. 361–389.
- [82] FLOWERS WILLIAMS, J.E. & HALL, L.H. *Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane*. J. Fluid Mech., **40** (1970), p. 657–670.
- [83] FLETCHER, N.H. *Sound production by organ flue pipes*. J. Acous. Soc. Am., **80** (1976), p. 926–936.
- [84] FLEURY, V. *Superdirectivité, bruit d'appariement et autres contributions au bruit de jet subsonique*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2006).
- [85] FORESTIER, N. *Étude expérimentale d'une couche cisailée au-dessus d'une cavité en régime transonique*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2001).

- [86] FORESTIER, N., JACQUIN, L. & GOEFFROY, P. *the mixing layer over a deep cavity at high-subsonic speed*. J. Fluid Mech., **475** (2003), p. 101–145.
- [87] FREUND, J.B., LELE, S.K. & MOIN, P. *Direct simulation of a Mach 1.92 jet and its sound field*. AIAA paper 1998-2291 (1998).
- [88] FREUND, J.B. *Acoustic sources in a turbulent jet : a direct numerical study*. AIAA paper 1999-1858 (1999).
- [89] FREUND, J.B., LELE, S.K. & MOIN P. *Direct simulation of a Mach 1.92 jet and its sound field*. AIAA J., **38** (2000), p. 2023–2031.
- [90] FREYMUTH, P. *On transition in a separated laminar boundary layer*. J. Fluid Mech., **25** (1966), p. 683–704.
- [91] GASCA, M. & SAUER, T. *Polynomial Interpolation in Several Variables*. Adv. Comput. Math., **12** (2000), p. 377–410.
- [92] GHARIB, M. & ROSHKO, A. *The effect of flow oscillations on cavity drag*. J. Fluid Mech., **177** (1987), p. 501–530.
- [93] GALANTI, B. & TSINOBER, A. *Is turbulence ergodic ?* Physics Letters A, **330** (2004), p. 173–180.
- [94] GASCA, M. *Multivariate polynomial interpolation*. W. Dahmen, M. Gasca, and C. A. Micchelli editors, Comput. Curves Surf., Kluwer Academic Publishers (1990), p. 215–236.
- [95] GIBSON, J.S. *Non-engine aerodynamic noise investigation of a large aircraft*. NASA Contractor Report 2378 (1974).
- [96] GOLLIARD, J. *Noise of Helmholtz-resonator like cavities excited by a low Mach-number turbulent flow*. PhD Thesis, Université de Poitiers, France (2002).
- [97] GLOERFELT, X. *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité ; simulations aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon (2001).
- [98] GLOERFELT, X., BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D. *Aerodynamic noise induced by laminar and turbulent boundary layers over rectangular cavities*. AIAA Paper 2002–2476 (2002).
- [99] GLOERFELT, X., BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D. *Numerical evidence of mode switching in the flow-induced oscillations by a cavity*. Int. J. Aeroac., **2** (2003), p. 193–217.
- [100] GLOERFELT, X., BAILLY, C. & JUVÉ, D. *Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods*. J. Sound Vibr., **266** (2003), p. 119–146.
- [101] GLOERFELT, X., BOGEY, C. & BAILLY, C. *Influence de la largeur transversale d'une cavité sur le bruit rayonné par un écoulement affleurant*. 16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 2003.
- [102] GRAGG, W. & STEWART, G. *A stable variant of the secant method for solving nonlinear equations*. SIAM Journal of Numerical Analysis, **13** (1976), p. 889–903.
- [103] GROTTADAUREA, M. & RONA, A. *The radiating pressure field of a turbulent cylindrical cavity flow*. AIAA paper 2008-2852 (2008).
- [104] GUARINI, S.E., MOSER, R.D., SHARIFF, K. & WRAY, A. *Direct numerical simulation of a supersonic boundary layer at Mach 2.5*. J. Fluid Mech., **414** (2000), p. 1–33.
- [105] HAIGERMOSER, C., SCARANO, F. & ONORATO, M. *Investigation of the flow in a circular cavity using stereo and tomographic particle image velocimetry*. Exp. Fluids, **46** (2009), p. 517–526.
- [106] HANKEY, W.L. & SHANG, J.S. *Analyses of pressure oscillations in an open cavity*. AIAA J., **18** (1980), p. 892–898.
- [107] HELLER, H.H. & DOBRZYNSKI, W.M. *Sound radiation from aircraft wheel-well/landing-gear configurations*. J. Aircraft, **14** (1977), p. 768–774.
- [108] HELLER, H.H. & BLISS, D.B. *The physical mechanism of flow-induced pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression*. AIAA paper No 75-491 (1975).

- [109] HELLER, H.H., HOLMES, D.G. & COVERT, E.E. *Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities*. J. Sound Vibr., **18** (1971), p. 545–553.
- [110] HERING, T., DYBENKO, J. & SAVORY, E. *Experimental verification of CFD modeling of turbulent flow over circular cavities using Fluent*. CSME forum (2006).
- [111] HICKEL, S., ADAMS, N.A. & DOMARADZKI, J.A. *An adaptive local deconvolution method for implicit LES*. J. Comput. Phys., **213** (2006), p. 413–436.
- [112] HICKEL, S. & ADAMS, N.A. *Implicit LES applied to zero-pressure-gradient and adverse-pressure-gradient boundary-layer flow*. Int. J. Heat Fluid Flow, **29** (2008), p. 626–639.
- [113] HIWADA, M., KAWAMURA, T., MABUCHI, I. & KUMADA, M. *Some characteristics of flow pattern and heat transfer past a circular cylindrical cavity*. Jap. Soc. Mech. Eng., **26** (1983), p. 1744–1752.
- [114] HOWE, M.S. *Theory of Vortex Sound*. Cambridge University Press.
- [115] HUNT, J.C.R., WRAY, A.A. & MOIN, P. *Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows*. Center for Turbulent Research Report, NASA, CTR-S88 (1998), p. 193.
- [116] JACOB, C. *Rapport fait au nom de la commission des affaires économiques, de l'environnement et du territoire sur le projet de loi relatif à la mise en œuvre du Grenelle de l'environnement*. Online at <http://www.assemblee-nationale.fr/13/rapports/r1133.asp>
- [117] JEONG, J. & HUSSAIN, F. *On the identification of vortex*. J. Fluid Mech., **285** (1995), p. 69–94.
- [118] KARUSH, W. *Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints*. M.Sc. Dissertation. Univ. of Chicago, USA (1939).
- [119] KAUFMAN, L.G.II, MACIULAITIS, A. & CLARK, R.L. *Mach 0.6 to 3.0 flows over rectangular cavities*. Air Force Wright Aeronautical Laboratory Technical Report 82-3112 (1983).
- [120] KENDALL, A. & KOCHESFAHANI, M. *A method for estimating wall friction in turbulent boundary layer*. AIAA Paper 2006-3834 (2006).
- [121] KERSCHEN, E.J. & TUMIN, A. *A theoretical model of cavity acoustic resonances based on edge scattering processes*. AIAA Paper 2003-0175 (2003).
- [122] KESTENS, T. *Étude numérique du contrôle adaptatif multivoies des instabilités aéroacoustiques des cavités*. PhD Thesis, CERFACS (Toulouse), France, (1999).
- [123] KHABIBRAKHMANOV, I.K. & SUMMERS, D. *The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for nonlinear differential equations*. Comput. Math. Appl., **36** (1998), p. 65–70.
- [124] KISTLER, A.L. & TAN, F.C. *Some properties of turbulent separated flows*. The Physics of Fluids Supplement, Boundary Layers and turbulences, S165-S173, 1967.
- [125] KNISELY, C. & ROCKWELL, D. *Self-sustained low frequency components in an impinging shear layer*. J. Fluid Mech., **116** (1982), p. 157-186.
- [126] KOMERATH, N.M., AHUJA, K.K. & CHAMBERS, F.W. *Prediction and measurement of flows over cavities – A Survey*. AIAA Paper 1987-0166 (1987).
- [127] KOOK, H., MONGEAU, L., BROWN, D.V. & ZOREA, S. *Analysis of the interior pressure oscillations induced by flow over vehicle openings*. Noise Cont. Eng. J., **45** (1997), p. 223–234.
- [128] KRIESEL, P.C., PETERS, M.C.A.M., HIRSCHBERG, A., WIJNANDS, P.J., IAFRATI, A., RICCARDI, G., PIVA, R. & BRUGGEMAN, J.C. *High amplitude vortex-induced pulsations in a gas transport system*. J. Sound Vibr., **184** (1995), p. 343–368.
- [129] KRISHNAMURTY, K. *Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces*. NACA, Technical Note 3487 (1955).
- [130] KRISHNAMURTY, K. *Sound radiation from surface cutouts in high speed flow*. PhD Thesis, California Institute of Technology (1956).

- [131] KRONECKER, L. *Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrerer Variablen*. H. Hensel editor, L. Kroneckers Werke, Chelsea Publishing Company, **1** (1865), p. 133–141.
- [132] KRYLOV, V.V. *Noise and vibration from high-speed trains*. Thomas Telford Editions (2001).
- [133] KUHN, H.W. & TUCKER, A.W. *Nonlinear programming*. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. University of California Press (1951), p. 481–492.
- [134] KURBATSKII, K.A. & TAM, C.K.W. *Cartesian boundary treatment of curved walls for high-order computational aeroacoustics schemes*. AIAA J., **35** (1997), p. 133–140.
- [135] LAGRANGE, J.L. *Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École Normale en 1795*. Œuvres VII, ed. Gauthier-Villars, Paris (France) (1877), p. 183–287.
- [136] LANZOS, C. *Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions*. J. Math. Phys., **17** (1938), p. 123–199.
- [137] LARCHEVÊQUE, L., SAGAUT, P. & LÊ, T.H. *Large-Eddy simulation of flows in weapon bays*. AIAA Paper 2003-0778 (2003).
- [138] LARCHEVÊQUE, L., SAGAUT, P., LÊ, T.H. & COMTE, P. *Large-Eddy simulation of compressible flow in a three-dimensional flow at high Reynolds number*. J. Fluid Mech., **516** (2004), p. 265–301.
- [139] LASAGNA, P.L., MACKHALL, K.G., BURCHAM JR., E.W. & PUTNAM, T.W. *Landing approach airframe noise measurements and analysis*. NASA Technical Paper 1602 (1980).
- [140] LELE, S.K. *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*. J. Comput. Phys., **103** (1992), p. 16–42.
- [141] LEONARD, A. *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*. Adv. Geophys., **18A** (1974), p. 237–248.
- [142] LESIEUR, M. *Turbulence in fluids*. 3<sup>rd</sup> edition. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1997).
- [143] Lighthill, M.J. *On sound generated aerodynamically. I. General theory*. Proc. of the Royal Society of London, **A 211** (1952), p. 564–587.
- [144] LILJENCRAFTS, J. *End correction at a flue pipe mouth*. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. Online at <http://www.fonema.se/mouthcorr/mouthcorr.htm>
- [145] LIN, J.C. & ROCKWELL, D. *Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity*. AIAA J., **39** (2001), p. 1139–1151.
- [146] LORENTZ, R.A. *Multivariate Hermite interpolation by algebraic polynomials : A survey*. J. Comput. Applied Math, **122** (2000), p. 167–207.
- [147] LUMMER, M., DELFS, J.W. & LAUKE, T. *Simulation of sound generation by vortices passing the trailing edge of airfoils* AIAA paper 2002-2578 (2002).
- [148] LUND, T.S., WU, X. & SQUIRES, K.D. *Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations*. J. Comput. Phys., **140** (1998), p. 233–258.
- [149] LUND, T.S. *The use of explicit filters in large eddy Simulation*. Comput. Math. Appl., **46** (2003), p. 603–616.
- [150] LUND, T.S. & MOIN, P. *Large eddy simulations of a concave wall boundary layer*. Int. J. Heat Fluid Flow, **17** (1996), p. 290–295.
- [151] MAULL, D.J. & EAST, L.F. *Three-dimensional flow in cavities*. J. Fluid Mech., **16** (1963), p. 620–632.
- [152] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C. *Numerical investigation of flow features and acoustic radiation around a round cavity*. AIAA Paper 2010-3988 (2010).
- [153] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C. *Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil*. AIAA J., **46** (2008), p. 874–883.

- [154] MARSDEN, O. *Calcul direct du rayonnement acoustique de profils par une approche curviligne d'ordre élevé*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon, France (2005).
- [155] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C. *High-order curvilinear simulations of flows around non-cartesian bodies*. J. Comput. Ac., **13** (2005), p. 731–748.
- [156] MASTIN, C.W. *Overlapping grids for flow field calculations*. NASA/ASEE Summer faculty fellowship program, N89-14896 06-80 (1988), p. 84–85.
- [157] MATHEW, J., LECHNER, R., SESTERHENN, J. & FRIEDRICH, R. *An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flow*. Phys. Fluids, **15** (2003), p. 2279–2289.
- [158] MCCORMACK, R.W. *The Effect of viscosity in hypervelocity impact cratering*. AIAA Paper 69-354 (1969).
- [159] MEYERS, J. & SAGAUT, P. *On the model coefficients for the standard and the variational multi-scale Smagorinsky model*. J. Fluid. Mech., **569** (2006), p. 287–319.
- [160] MICHALKE, A. *On spatially growing disturbances in an invicid shear layer*. J. Fluid Mech., **25** (1965), p. 521–544.
- [161] MIKSAD, R.W. *Experiments on the nonlinear stages of free-shear-layer transition*. J. Fluid Mech., **56** (1972), p. 695–719.
- [162] MINCU, C., MARY, I., REDONNET, S., LARCHEVÊQUE, L. & DUSSAUGE, J.P. *Numerical simulations of the unsteady flow and radiated noise over a cylindrical cavity*. AIAA Paper 2008-2917 (2008).
- [163] MITCHELL, B.E., LELE S.K. & MOIN P. *Direct computation of Mach wave radiation in an axisymmetric supersonic jet*. AIAA J., **35** (1997), p. 1574–1580.
- [164] MITCHELL, B.E., LELE S.K. & MOIN P. *Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet*. J. Fluid Mech., **383** (1999), p. 113–142.
- [165] MIZUSHIMA, F., TAKAKURA, H., KURITA, T., KATO, C. & IIDA, A. *Experimental investigation of aerodynamic noise generated by a train-car gap*. J. Fluid Sc. Tech., **2** (2007), p. 464–479.
- [166] MOHSENI, K. & COLONIUS, T. *Numerical treatment of polar coordinate singularities*. J. Comput. Phys., **157** (2000), p. 787–795.
- [167] MOLER, C.B. & STEWART, G.W. *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*. SIAM Journal of Numerical Analysis, **10** (1973), p. 241–256.
- [168] MOURRAILLE, J.R. *Traité de la résolution des équations en général*. Jean Mossy éditeur, Marseille, France (1768).
- [169] MUSKER, A.J. *Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in a turbulent boundary layer*. AIAA J., **17** (1979), p. 655–657.
- [170] NOACK, R.W. *SUGGAR : a general capability for moving body overset grid assembly*. AIAA paper 2005-5117 (2005).
- [171] NOGER, C., LAZURE, H. & PATRAT, J.C. *Étude aéroacoustique d'une cavité peu profonde soumise à un écoulement affleurant*. Congrès Français de Mécanique (1999).
- [172] NOGER, C., PATRAT, J.C., PEUBE, J. & PEUBE, J.L. *Aeroacoustical study of the TGV pantograph recess*. J. Sound Vibr., **231** (2000), p. 563–575.
- [173] NOMURA Y., YAMAMURA, I & INAWASHIRO, S. *On the acoustic radiation from a flanged circular pipe*. J. Phys. Soc. Jap., **15** (1960), p. 510–517.
- [174] NORTON, D.A. *Investigation of Boeing B-47 bomb bay buffet*. Boeing Airplane Co. Document No. D12675 (1952).
- [175] ORSZAG, S.A. *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*. J. Fluid Mech., **50** (1971), p. 689–703.

- [176] ÖSTERLUND, J.M. *Experimental studies of zero pressure-gradient turbulent boundary-layer flow*. PhD Thesis, Royal Institute of Technology, Sweden (1999).
- [177] PARTHASARATHY, S.P., CHO, Y.I. & BACK, L.H. *Sound generation by flow over relatively deep cylindrical cavities*. J. Acous. Soc. Am., **78** (1985), p. 1785–1795.
- [178] PELLER, N., LE DUC, A., TREMBLAY, F. & MANHART, M. *High-order stable interpolations for immersed boundary methods*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **52** (2006), p. 1175–1193.
- [179] PEREIRA, J.C.F. & SOUSA, J.M.M. *Influence of impingement edge geometry on cavity flow oscillations*. AIAA J., **32** (1994), p. 1737–1740.
- [180] PIERCE, A.D. *Acoustics, an introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, 1989.
- [181] PIROZZOLI, S., BERNARDINI, M. & GRASSO, F. *Characterization of coherent vortical structures in a supersonic turbulent boundary layer*. J. Fluid Mech., **613** (2008), p. 205–231.
- [182] PLUMBLEE, H.E., GIBSON, J.S. & LASSITER L.W. *A theoretical and experimental investigation of the acoustic response of cavities in an aerodynamic flow*. U.S. Air Force, WADD-TR-61-75 (1962).
- [183] POINSOT, T. & LELE, S.K. *Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows*. J. Comput. Phys., **101** (1992), p. 104–129.
- [184] POWELL, A. *On the edgetone*. J. Acous. Soc. Am., **33** (1961), p. 395–409.
- [185] PREWITT, N.C., BELK, M.D. & SHYY, W. *Parallel computing of overset grids for aerodynamic problems with moving objects*. Prog. Aero. Sci., **36** (2000), p. 117–172.
- [186] PUJALS, G. *Perturbations optimales dans les écoulements de paroi turbulents et application au contrôle de décollement*. PhD Thesis, École Polytechnique, France (2009).
- [187] RAI, M.M. & MOIN, P. *Direct numerical simulations of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer*. J. Comput. Phys., **109** (1993), p. 169–192.
- [188] REYNOLDS, W. C. & HUSSAIN A. K. M. F. *The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments*. J. Fluid. Mech., **54** (1972), p. 263–288.
- [189] RICOT, D. *Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par une méthode Boltzmann sur réseau, et application au toit ouvrant de véhicules automobiles*. PhD Thesis, École Centrale de Lyon (2002).
- [190] RICOT, D., MAILLARD, V. & BAILLY, C. *Numerical simulation of the unsteady flow past a cavity and application to the sunroof buffeting*. AIAA Paper 2001-2112 (2001).
- [191] RIZZETTA, D.P. *Numerical simulation of supersonic flow over a three-dimensional cavity*. AIAA J., **26** (1988), p. 799–807.
- [195] ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, J. *Review : self-sustaining oscillations of flow past cavities*. J. Fluid Eng., **100** (1978), p. 152–165.
- [193] ROCKWELL, D. *Oscillations of impinging shear layers*. AIAA J., **25** (1983), p. 645–664.
- [194] ROCKWELL, D. & KNISELY, C. *The organized nature of flow impingement upon a corner*. J. Fluid Mech., **93** (1979), p. 413–432.
- [195] ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, J. *Review : self-sustaining oscillations of flow past cavities*. J. Fluid Eng., **100** (1978), p. 152–165.
- [196] ROCKWELL, D. *Prediction of oscillation frequencies for unstable flow past cavities*. J. Fluid Eng., **99** (1977), p. 294–300.
- [197] ROSHKO, A. *Some measurements of flow in a rectangular cutout*. NACA, Technical Note 3488 (1955).

- [198] ROSSITER, J.E. & KURN, A.G. *Wind tunnel measurement of unsteady pressures in and behind a bomb bay*. A.R.C. C.P 728 (1962).
- [199] ROSSITER, J.E. *Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, Technical Report 3438 (1964).
- [200] SAGAUT, P. *Large Eddy Simulation for incompressible flows : an introduction* Scientific computation, 2<sup>nd</sup> édition (2006), Springer-Verlag.
- [201] SANDBERG, R.D. & SANDHAM, N.D. *Direct numerical simulation of turbulent flow past a trailing edge and the associated noise generation*. J. Fluid Mech., **596** (2008), p. 353–385.
- [202] SANDHAM, N.D., YAO, Y.F. & LAWAL A.A. *Large-eddy simulation of transonic turbulent flow over a bump*. Int. J. Heat Fluid Flow, **24** (2003), p. 584–595.
- [203] SAROHIA, V. *Experimental and analytical investigation of oscillations in flows over cavities*. PhD Thesis, California Institute of Technology (1975).
- [204] SAROHIA, V. *Experimental oscillations in flows over shallow cavities*. AIAA J., **15** (1977), p. 984–991.
- [205] SAROHIA, V. & MASSIER, P.F. *Control of Cavity Noise*. J. Aircraft, **14** (1977), p. 833–837.
- [206] SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. *Boundary Layer Theory*. 8<sup>th</sup> Edn. Springer (2000).
- [207] SCHWARTZKOPFF, T., DUMBSER, M. & MUNZ, C.D. *CAA using domain decomposition and high-order on structured meshes and unstructured meshes*. AIAA paper 2004-2964 (2004).
- [208] SEBAH, P. & GOURDON, X. *Newton's method and high order iterations*. Technical report, (2001). <http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html>
- [209] SENGISSEN, A. *AEROCAV - Noise induced by grazing flow over cavities*. Airbus EEA6, Ref. PR0613451, Issue 1 (2006).
- [210] SHANNON, C.E. *Communications in the presence of noise*. Proceedings of the Institute of the Radio Engineers, **37** (1949), p. 10–21.
- [211] SHERER, S.E. & SCOTT, J.N. *Comparison of highly accurate interpolation methods*. AIAA paper 2001-0282 (2001).
- [212] SHERER, S.E. & SCOTT, J.N. *High-order compact finite-difference methods on general overset grids*. J. Comput. Phys., **210** (2005), p. 459–496.
- [213] SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J. *Parallel computational aeroacoustic simulation of turbulent subsonic cavity flow*. AIAA Paper 2000-1914 (2000).
- [214] SHIH, S.H., HAMED, A. & YEUAN, J.J. *Unsteady supersonic cavity flow simulations using coupled ke and Navier-Stokes equations*. AIAA J., **32** (1996), p. 2015–2021.
- [215] SINHA, N., DASH, S.M., CHIDAMBARAM, N. & FINDLAY, D. *A perspective on the simulation of cavity aeroacoustics*. AIAA Paper 98-0286 (1998).
- [216] SMAGORINSKY, J.S. *General circulation experiments with the primitive equation : I. the basic experiment*. Monthly Weather Review, **91** (1963), p. 99–163.
- [217] SMITH, A.M.O. & CEBECI, T. *Numerical solution of the turbulent boundary layer equations*. Douglas Aircraft division report 33735 (1967).
- [218] SOLOFF, S.M., ADRIAN, R.J. & LIU, Z.C. *Distorsion compensation for generalized stereoscopic particle image velocimetry*. Meas. Sci. Technol., **8** (1997), p. 1441–1454.
- [219] SONDHAUS, C. *Über die beim Ausströmen der Luft entstehenden Töne*. Ann. Phys., **91** (1854), p. 128.
- [220] SPALART, P.R. & WATMUFF, J.H. *Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients*. J. Fluid Mech., **249** (1993), p. 337.

- [221] SPALART, P.R. *Direct simulation of turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$* . J. Fluid Mech., **187** (1988), p. 61.
- [222] SPALDING, D.B. *A single formula for the law of the Wall*. J. App. Mech., **83** (1961), p. 455–458.
- [223] STALLINGS, R.L. & WILCOX, F. *Experimental cavity pressure distributions at supersonic speed*. NASA Technical paper No 2683 (1987).
- [224] STEFFENSEN, I.F. *Interpolation*. Chelsea, New York (1927).
- [225] STOLZ, S. & ADAMS, N.A. *Large-eddy simulation of high-Reynolds-number supersonic boundary layers using the approximate deconvolution model and a rescaling and recycling technique*. Phys. Fluids, **15** (2003), p. 2398–2412.
- [226] STOLZ, S. & ADAMS, N.A. *An approximation deconvolution procedure for large-eddy simulation*. Phys. Fluids, **11** (1999), p. 1699–1701.
- [227] STRASSEN, V. *Gaussian elimination is not optimal*. Numerische Mathematik, **13** (1969), p. 354–356.
- [228] SUTHERLAND, W. *The viscosity of gases and molecular force*. Phil. Mag., **36** (1893), p. 507–531.
- [229] TAM, C.K.W. & HU, F.G. *An optimized multi-dimensional interpolation scheme for computational aeroacoustics applications using overset grids*. AIAA paper 2004-2812 (2004).
- [230] TAM, C.K.W. & KURBATSKII, K.A. *A wavenumber based extrapolation and interpolation method for use in conjunction with high-order finite difference schemes*. J. Comput. Phys., **157** (2000), p. 588–617.
- [231] TAM, C.K.W. & DONG Z. *Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow*. J. Comput. Ac., **4** (1996), p. 175–201.
- [232] TAM, C.K.W. *Computational aeroacoustics : issues and methods* AIAA Journal, **33** (1995), p. 1788–1796.
- [233] TAM, C.K.W. & DONG Z. *Wall boundary conditions for high-order finite difference schemes in computational aeroacoustics*. Theoretic. Comput. Fluid. Dyn., **6** (1994), p. 303–322.
- [234] TAM, C.K.W. & SHEN, H. *Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high order finite difference schemes* AIAA paper 93-4325 (1993).
- [235] TAM, C.K.W. & WEBB, J.C. *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. J. Comput. Phys., **107** (1993), p. 262–281.
- [236] TAM, C.K.W., WEBB, J.C. & DONG, Z. *A study of the short wave components in computational acoustics*. J. Comput. Ac., **1** (1993), p. 1–30.
- [237] TAM, C.K.W. & BLOCK, P.J. *On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities*. J. Fluid. Mech., **89** (1978), p. 373–399.
- [238] TANG, Y.P. & ROCKWELL, D. *Instantaneous pressure fields at a corner associated with vortex impingement*. J. Fluid Mech., **126** (1983), p. 187–204.
- [239] THOMPSON, K.W. *Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems*. J. Comput. Phys., **68** (1987), p. 1–24.
- [240] TILLMANN, W. *Neue Widerstandsmessungen an Oberflächenstörungen in der turbulenten Reibungsschicht*. Untersuchungen und Mitteilungen, Nr. 6619, Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, 1944.
- [241] TRACY, M.B. & PLENTOVICH, E.B. *Cavity unsteady-pressure measurements are subsonic and transonic speeds*. NASA Technical paper No 3669 (1997).
- [242] VAN DRIEST, E.R. *On turbulent flow near wall*. J. Aero. Sc., **23** (1956), p. 1007–1011.
- [243] WARING, E. *Problems concerning interpolations*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **69** (1779), p. 59–67.

- [244] WAZWAZ, A.M. *The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain*, Appl. Math. Comput., **188** (2007), p. 485–491.
- [245] WELCH, P.D. *The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms*. IEEE Trans. Audio Electroacoustics, **AU 15** (1967), p. 70–73.
- [246] WIEGHARDT, K. *Erhöhung des turbulenten Reibungswiderstandes durch Oberflächenstörungen*. Forschungsbericht 1563, Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, 1942.
- [247] WOLFE, J. *Introduction to flute acoustics*. Music Acoustics. University of New South Wales (2006).
- [248] XU, S. & MARTIN, M.P. *Assessment of inflow boundary conditions for compressible turbulent boundary layers*. Phys. Fluids, **16** (2004), p. 2623–2639.
- [249] ЗНАК, В.Д., МУХИН, В.А. & НАКОРЯКОВ, В.Е. *Three-dimensional vortex structures in cavities*. (Traduit de Журнал Прикладной Механики и Технической Физики, **2** (1980), p. 54–59.) J. Appl. Mech. Tech. Phys., **22** (1981), p. 186–189.

## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. BAILLY

et les rapports de

Monsieur P. SAGAUT

Professeur - Institut Jean Le Rond d'Alembert - UMR CNRS 7190

Université Pierre et Marie Curie Paris 6 - 4, place Jussieu case 162 - 75252 Paris cedex 5

Monsieur T. POINSOT

Directeur de Recherche - CERFACS - 42, avenue G. Coriolis - 31057 Toulouse cedex

**Monsieur DESVIGNE Damien**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 29 novembre 2010

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
La Directrice des Etudes

