

THÈSE

Présentée devant l'École CENTRALE DE LYON
Pour obtenir le titre de **DOCTEUR** Spécialité : **ACOUSTIQUE**

Par

Yann DRUON

ÉTUDE DE LA PROPAGATION GUIDÉE ET DU
RAYONNEMENT ACOUSTIQUES PAR LES CONDUITS
D'ÉJECTION DE TURBORÉACTEUR

Modélisations Analytiques et Numériques

Soutenue le 20 Janvier 2006 devant la Commission d'Examen composée de :

MM.	Y. Aurégan	Chargé de recherche au CNRS, Université du Maine, Le Mans
	M. Ben Tahar (rapporteur)	Professeur, Université Technologique de Compiègne, Compiègne
	V. Gibiat (rapporteur)	Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse
	S. Lidoine	Ingénieur, AIRBUS France, Toulouse
	S. Redonnet	Ingénieur, ONERA, service DSNA/BREC, Chatillon
	M. Roger	Professeur, École Centrale de Lyon, Ecully

Thèse préparée à AIRBUS France, Département Acoustique et Environnement

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique – UMR CNRS 5509
ÉCOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

ALLARD Bruno	maître de conférences	CEGELY	INSA
AIT-EL-HADJ Smaïl	enseignant	GRESTI	ECL
AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BATAILLE Jean	professeur	LMFA	UCBL
BAYADA Guy	professeur	MAPLY	INSA
BENHADID Hamda	professeur	LMFA	UCBL
BERGHEAU Jean-Michel	professeur	LTDS	ENISE
BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS
BUFFAT Marc	professeur	LMFA	UCBL
BURAIIS Noël	maître de conférences	CEGELY	ECL
BUREAU Jean-Claude	professeur	CEGELY	INSA
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS
CHAMBAT Michèle	professeur	MAPLY	UCBL
CHAMPAGNE Jean-Yves	maître de conférences	LMFA	INSA
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur	LMFA	ECL
CHANTE Jean-Pierre	professeur	CEGELY	INSA
CHEN Liming	professeur	ICTT	ECL
CLERC Guy	professeur	CEGELY	UCBL
CLOAREC Jean-Pierre			
COUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
CREPEL Pierre	chargé de recherche	MAPLY	CNRS
DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
ESCODIE Dany	directeur de recherche	LMFA	CNRS
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS
GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	LEOM	ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS
GAY Bernard	professeur	LMFA	UCBL
GENCE Jean-Noël	professeur	LMFA	UCBL
GENDRY Michel	chargé de recherche	LEOM	CNRS
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GODEFERD Fabien			
GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS
GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	IFOS	ECL

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

HAMADICHE Mahmoud	maître de conférences	LMFA	UCBL
HEIBIG Arnaud	professeur	MAPLY	INSA
HELLOUIN Yves	maître de conférences	-	ECL
HENRY Daniel	chargé de recherche	LMFA	CNRS
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LMFA	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS
LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY	INSA
LANCE Michel	professeur	LMFA	UCBL
LANGLADE-BOMBA Cécile	maître de conférences	LTDS	ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS
LE HELLEY Michel	professeur	-	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	MAPLY	ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS
LYONNET Patrick	professeur	LTDS	ENISE
MAITRE Jean-François	professeur émérite	MAPLY	ECL
MARION Martine	professeur	MAPLY	ECL
MARTELET Claude	professeur	CEGELY	ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	LEOM	ECL
MASSON Jean-Pierre	professeur	CEGELY	UCBL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
MIDOL Alain	maître de conférences	LTDS	UCBL
MOREL Hervé	chargé de recherche	CEGELY	CNRS
MOREL Robert	professeur	LMFA	INSA
MOUSSAOUI Mohand	professeur	MAPLY	ECL
MUSY François	maître de conférences	MAPLY	ECL
NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS

ECOLE CENTRALE DE LYON

Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

O'CONNOR Ian	maître de conférences	LEOM	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	maître de conférences	LEOM	ECL
POUSIN Jérôme	professeur	MAPLY	INSA
PONSONNET Laurence	maître de conférences	CEGELY	ECL
PREVOT Patrick	professeur	ICTT	INSA
REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS	ENISE
RETIF Jean-Marie	maître de conférences	CEGELY	INSA
ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
ROJAT Gérard	professeur	CEGELY	UCBL
ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS	ENISE
ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SANDRI Dominique	maître de conférences	MAPLY	UCBL
SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	LEOM	CNRS
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
SUNYACH Michel	professeur	LMFA	UCBL
TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS
THOMAS Gérard	professeur	LAGEP UCBL	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS
VINCENT Léo	professeur	LTDS	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	CEGELY	ECL
VOLPERT Vitaly	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS	ENISE
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	MAPLY	ECL

Ce travail, débuté en janvier 2003, s'est déroulé au département Acoustique et Environnement d'AIRBUS France, à Toulouse.

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Pacull, Hervé Batard et Pierre Lempereur de m'avoir accueilli au sein de leur équipe et de la confiance qu'ils m'ont témoignée au cours de ces trois années de doctorat.

J'exprime également ma profonde gratitude à Stéphane Lidoine, qui a encadré mes activités à AIRBUS et qui m'a soutenu tout au long de la thèse. Par ses compétences scientifiques, sa disponibilité et sa gentillesse, il a grandement contribué au bon déroulement de ce travail.

J'adresse ensuite toute ma reconnaissance à Michel Roger, mon directeur de thèse. Au-delà de la valeur de son encadrement scientifiquement, je tiens à souligner les qualités humaines dont il fait preuve et je le remercie pour les encouragements qu'il m'a adressés au cours de ces trois années.

J'associe à ces remerciements Messieurs Vincent Gibiat et Mabrouk Ben Tahar, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir examiner ce travail, ainsi que Messieurs Yves Aurégan et Stéphane Redonnet, qui ont accepté de participer au jury.

La thèse a été pour moi l'occasion de travailler avec de nombreux interlocuteurs qui doivent être associés au travail présenté dans ce mémoire. Je remercie particulièrement Aurélien Mosson, pour son support sur l'utilisation d'ACTRAN et sa contribution à l'évaluation du code en présence d'une couche de cisaillement ; Alexia Delnevo, pour son implication déterminante dans les études ACTI3S ; et Frédéric Maréchal, pour le suivi des applications du code VOXLAN. Je tiens également à saluer Sophie Troyes, Sébastien Le Saint et les collaborateurs de TRANSICIEL qui ont effectué les maillages, ainsi que Benoit Cazor et Stéphanie Prades pour la réalisation des CAO. Je n'oublie pas le soutien de Bastien Caruelle sur les aspects aérodynamiques, ni la contribution de l'équipe du Centre Commun de Recherche d'EADS pour le développement du code ACTI3S. Enfin, je remercie les membres du laboratoire d'Acoustique, en particulier Stefan Moal, pour la qualité des mesures expérimentales effectuées et les relations sympathiques que nous avons pu entretenir.

Je terminerai en remerciant mes collègues du service Nacelles et du département Acoustique pour leur soutien et l'ambiance détendue qui a accompagnée ces trois années.

Merci enfin à ma famille, mes amis, Tat et Nicolas.

Chapitre 2	Approches numériques et asymptotiques du problème	61
2.1	Introduction	61
2.2	Présentation des différentes méthodes de calcul	65
2.2.1	Formulation intégrale par éléments finis de frontière	65
2.2.2	Formulation par éléments finis de volume et éléments infinis	71
2.2.3	Formulation asymptotique par sommation de faisceaux gaussiens	77
2.2.4	Conclusion sur les différentes méthodes de calcul	82
2.3	Évaluation des méthodes numériques BEM et FEM en configuration canonique	83
2.3.1	Comparaison entre les méthodes numériques BEM et FEM et la méthode analytique	83
2.3.1.1	Cas tests génériques	83
2.3.1.2	Comparaison entre les différentes méthodes : configuration sans écoulement	85
2.3.1.3	Comparaison entre les différentes méthodes : cas de l'écoulement uniforme	98
2.3.1.4	Conclusion sur la comparaison des différentes méthodes de calcul	106
2.3.2	Comparaison entre le calcul numérique FEM et des mesures en chambre sourde	108
2.3.2.1	Dispositif expérimental, configurations pour la mesure et le calcul	109
2.3.2.2	Analyse des résultats	113
2.3.2.3	Conclusion sur la comparaison entre la mesure et le calcul	126
2.4	Évaluation de la méthode asymptotique SFG en configuration canonique	127
2.4.1	Comparaison entre la méthode asymptotique SFG et les modèles analytiques : limitations du code VOXLAN	128
2.4.2	Vérification du modèle de source annulaire dans le code VOXLAN	132
2.4.3	Rayonnement d'une surface modale annulaire avec prolongement d'un corps central	134
2.4.4	Recherche d'éventuels rayons non acoustiques	136
2.4.5	Caractérisation des modes problématiques et diffraction sur le corps central	141
2.4.6	Conclusion sur l'application de la méthode SFG en conduit annulaire	143
2.5	Conclusion générale sur l'application des méthodes numériques et asymptotiques	144
Chapitre 3	Étude phénoménologique des caractéristiques géométriques des conduits d'éjection	147
3.1	Introduction	147
3.2	Modèle analytique de la propagation acoustique dans un conduit de section annulaire avec bifurcations minces	148
3.2.1	Hypothèses et géométrie du modèle analytique BIFIDUCT	148
3.2.2	Modes acoustiques dans un conduit de section annulaire avec bifurcations minces	150
3.2.3	Formulation matricielle de la propagation acoustique en présence de discontinuités de géométrie	152
3.3	Analyse de la propagation et du rayonnement acoustiques associés à un conduit annulaire avec bifurcations minces	158
3.3.1	Comparaison entre les méthodes analytique et intégrale	158
3.3.2	Complément d'analyse en conduit rigide	163

3.3.3	Analyse en conduit traité et efficacité des traitements sur bifurcation	166
3.3.4	Rayonnement d'un conduit avec bifurcations et corps central long	170
3.4	Progression vers la prise en compte d'une géométrie réaliste	173
3.4.1	Influence de la forme réelle des bifurcations sur la propagation acoustique	174
3.4.2	Analyse pour une géométrie réaliste sans bifurcation	175
3.4.3	Géométrie réaliste avec bifurcations et mâ-t-réacteur	179
3.5	Conclusion	182
Chapitre 4	Modélisation de la propagation acoustique en présence d'une couche de cisaillement par la méthode FEM	185
4.1	Introduction	185
4.2	Évaluation des résultats de la méthode FEM sur la configuration analytique de Munt ..	186
4.2.1	Le modèle analytique de Munt	186
4.2.2	Modélisation de la couche de cisaillement dans la méthode FEM	187
4.2.3	Détermination des paramètres solides et convergence des deux modèles numériques	189
4.2.4	Matrice de calcul	192
4.2.5	Analyse des résultats en présence d'une discontinuité de vitesse	193
4.2.6	Analyse des résultats en présence d'une discontinuité de célérité du son ou de densité moyenne	197
4.3	Conclusion et perspective	199
Conclusion	203
Références bibliographiques	211
Annexe 1	Calcul des niveaux sonores à la source et en champ lointain	221
Annexe 2	Méthode de décomposition modale et séparation des modes incidents et réfléchis	225

Nomenclature

Afin de limiter les confusions, la signification des principaux symboles et notations utilisés dans le mémoire est rappelée dans la liste qui suit.

Caractères latins

$A(\vec{x})$	Amplitude complexe du potentiel acoustique au sens de la théorie géométrique
A_1, A_2	Premier et deuxième tronçons annulaires dans le modèle de conduit BIFIDUCT
A_{mn}^{\pm}	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident (+) ou réfléchi (-) en conduit annulaire
$A_{mn}^{\pm}(z)$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi en tenant compte de la dépendance axiale (conduit annulaire)
$A_m(z,1)$	Amplitude complexe de la pression relative au mode azimutal m , tenant compte des dépendances axiale (z) et radial ($r=1$, paroi externe) : donnée issue de la mesure par les anneaux de détection modale
$A_{mn}^{\pm\Gamma}$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi dans le premier tronçon annulaire rigide après la section source Γ
$A_{mn}^{\pm f}$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi dans le dernier tronçon annulaire rigide avant la section de sortie
$A_{mn}^{1,2\pm}$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi dans le premier ou deuxième tronçon annulaire du modèle BIFIDUCT
c_0	Célérité locale des ondes acoustiques
c_{ref}	Célérité de référence pour l'adimensionnalisation des différentes grandeurs
c_{Γ}	Valeur moyenne de la célérité locale c_0 sur la section source Γ
c_{∞}	Célérité des ondes acoustiques à l'infini
\vec{c}_g	Vitesse de groupe des ondes acoustiques au sens de la théorie géométrique
\vec{c}_{ϕ}	Vitesse de phase des ondes acoustiques au sens de la théorie géométrique
C	Tronçon avec bifurcations dans le modèle de conduit BIFIDUCT
C_1, C_2	Conduits parallèles du tronçon avec bifurcations dans le modèle BIFIDUCT

C_{mn}^{\pm}	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi en conduit avec bifurcations
$C_{mn}^{\pm}(z)$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi en tenant compte de la dépendance axiale, pour un conduit avec bifurcations
$C_{mn}^{1,2\pm}$	Amplitude complexe de la pression relative au mode (m,n) incident ou réfléchi dans les deux conduits parallèles du tronçon avec bifurcations
d	Période d'un réseau infini dans la théorie de la diffraction de Floquet utilisée comme référence pour le modèle analytique BIFIDUCT
$D_{mn}(\theta_{ec})$	Fonction de directivité du mode (m,n) (voir page 45 pour le modèle de Rienstra, pages 46 et 47 pour le modèle de l'approximation bafflée)
D_s	Discrétisation de la source dans la méthode SFG, exprimée par rapport à la longueur d'onde acoustique
e	Épaisseur relative du bord de fuite pour les modèles numériques de conduit d'éjection
e_{ac}	Densité d'énergie acoustique
\vec{e}_z	Vecteur unitaire dirigé selon l'axe du conduit d'éjection, orienté vers la sortie
f	Fréquence des ondes acoustiques
$F_{mn}^{\pm}(k_{r_{mn}}^{\pm} r)$	Dépendance radiale du mode (m,n) incident ou réfléchi
$G(\vec{x}, \vec{y})$	Fonction de Green harmonique en milieu homogène sans écoulement
$G_0(\vec{x}, \vec{y})$	Fonction de Green harmonique en présence d'un écoulement uniforme
$G_{SFG}(\vec{x}, \vec{y})$	Fonction de Green approchée construite sur la base des faisceaux gaussiens
h	Rapport du rayon interne sur le rayon externe pour une section annulaire
H	Matrice de transfert modale entre les premier et dernier tronçons rigides du conduit
H^i	Matrice de transfert modale entre deux tronçons rigides de part et d'autre du $i^{\text{ème}}$ tronçon traité
I	Matrice identité
I, I_{dB}	Intensité acoustique moyenne et intensité acoustique moyenne en décibel à travers une section de conduit
\vec{I}_{loc}	Vecteur intensité acoustique local
I_{mn}^{\pm}	Intensité acoustique modale moyenne relative au mode (m,n) incident ou réfléchi, à travers une section de conduit
$J_m(z)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre m et d'argument z
k	Nombre d'onde adimensionnel (ou fréquence réduite)
\vec{K}	Vecteur d'onde au sens de la théorie géométrique
$k_{c_{mn}}$	Fréquence de coupure réduite du mode (m,n)
$k_{r_{mn}}^{\pm}, k_{z_{mn}}^{\pm}$	Constantes de propagation radiale et axiale du mode (m,n) incident ou réfléchi
L_a	Distance entre les deux anneaux de détection modale pour l'étude expérimentale

L_{pr}	Longueur du prolongement du corps central au-delà de la section de sortie du conduit
L_{SR}	Distance parcouru par un rayon acoustique (méthode SFG) entre le point source et le point de première réflexion
L^C	Longueur d'un tronçon avec bifurcations
L^E	Longueur du conduit d'éjection
L^T	Longueur relative à un tronçon traité
m	Ordre azimutal du mode (m,n)
(m, n)	Numérotation des modes de conduit (ordre azimutal et ordre radial)
(m_{inc}, n_{inc})	Mode incident défini à la source
M_{ext}	Nombre de Mach associé à l'écoulement externe dans le modèle de Munt
M_{jet}	Nombre de Mach associé au jet dans le modèle de Munt
M_0	Nombre de Mach local
M_Γ	Valeur moyenne du nombre de Mach local M_0 sur la section source Γ
$M(\alpha_{int}, \alpha_{ext})$	Matrice de passage des amplitudes modales à une interface rigide/traité en conduit annulaire
$M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})$	Matrice de passage des amplitudes modales à une interface entre un tronçon annulaire rigide et un tronçon avec bifurcations traité sur les parois interne et externe
n	Ordre radial du mode (m,n)
\vec{n}	Vecteur unitaire normal à la paroi du conduit d'éjection, orienté vers les surfaces solides
$N_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})$	Matrice de passage des amplitudes modales à une interface entre un tronçon annulaire traité et un tronçon avec bifurcations supposé rigide
$N(m)$	Nombre de modes radiaux considérés au sein du mode azimutal m
$N_e(m)$	Nombre de modes radiaux évanescents considérés au sein du mode azimutal m
$N_{passant}(m)$	Nombre de modes radiaux passants au sein du mode azimutal m
N_r	Nombre de rayons lances par radiale, c'est-à-dire pour un azimut donné, dans la méthode SFG
O	Point origine du repère choisi
p	Pression acoustique complexe
p_t	Pression locale de l'écoulement total
p_0	Pression locale de l'écoulement moyen
p_{mn}^\pm	Pression acoustique modale relative au mode (m,n) incident ou réfléchi
p_m	Pression acoustique azimutale relative au mode azimutal m
p^+, p^-	Pression acoustique complexe relative au domaine Ω^+ et Ω^- dans la formulation intégrale
p_{inf}, p_{sup}	Pression acoustique sur les faces inférieure et supérieure de la membrane d'éléments solides utilisée dans ACTRAN pour modéliser le problème de Munt
\wp	Puissance acoustique à travers une section de conduit
q_1, q_2	Potentiels de simple et de double couches dans la méthode intégrale

(r, φ, z)	Coordonnées cylindriques
r_{air}	Constante spécifique de l'air : $r_{air} = \mathfrak{R}/M_{air}$ avec $\mathfrak{R} = 8.314 \text{ JK}^{-1}$, constante des gaz parfait, et $M_{air} = 29.10^{-3} \text{ kg}^{-1}$, masse molaire de l'air
$r_{c_{mn}}$	Rayon caustique du mode (m,n) marquant la frontière entre la zone de propagation forte et la zone de propagation faible
r_{loc}	Rayons locaux utilisés dans la description géométrique des modes de conduit proposée par Chapman (voir pages 31 et 34)
R_{ec}	Distance d'écoute entre l'observateur et le centre de la section de sortie du conduit
R_{int}, R_{ext}	Rayons interne et externe d'une section de conduit annulaire
R_{mpn}	Coefficient de réflexion à l'extrémité du conduit, rapport des amplitudes du mode incident (m,n) sur le mode réfléchi (m,p)
R_{ref}	Longueur caractéristique utilisée pour l'adimensionnalisation des différentes grandeurs
R_0	Rayon du conduit circulaire dans le modèle de Munt
\mathfrak{R}	Matrice de réflexion modale à l'extrémité du conduit
s	Abscisse curviligne le long d'un rayon acoustique
s_t, s_0	Entropie de l'écoulement total (supposée constante dans le temps et dans l'espace)
S_{mnp}^{\pm}	Facteur de couplage (produit scalaire) entre le mode de conduit traité (m,n) incident ou réfléchi et le mode de conduit rigide (m,p) , pour une interface rigide/traitée (voir page 36)
t	Temps
T_t	Température de l'écoulement total
T_0	Température de l'écoulement moyen
$T_{p,i}^A$	Troncature sur les modes de conduit annulaire d'ordre azimutal pair ou impair
T^C	Troncature sur les modes de conduit avec bifurcations
\vec{v}	Vecteur vitesse acoustique complexe
\vec{v}_t	Vecteur vitesse local de l'écoulement total
\vec{v}_0	Vecteur vitesse local de l'écoulement moyen
\vec{v}_{∞}	Vecteur vitesse à l'infini, dirigé selon l'axe z
$v_{z_{mn}}^{\pm}$	Composante axiale de la vitesse acoustique modale relative au mode (m,n) incident ou réfléchi
v_{z_m}	Composante axiale de la vitesse acoustique azimutale relative au mode m
\vec{v}_{Σ}	Vecteur vitesse de la paroi Σ
\vec{x}	Position d'un point dans l'espace
\vec{x}_{Σ}	Position moyenne d'un point de la paroi Σ
$X_{mn,qj}^{\pm}$	Produit scalaire des fonctions radiales $F_{mn}^{\pm T}(k_{r_{mn}}^{\pm T} r)$ et $F_{qj}^R(k_{r_{qj}}^R r)$ d'un mode de conduit traité (m,n) et d'un mode de conduit rigide (q,j) (page 156)
$Y_m(z)$	Fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre m et d'argument z
Y_{mn}	Norme de la fonction radiale du mode (m,n) en conduit rigide (page 35)

z^C	Abscisse du début d'un tronçon avec bifurcations
z^T	Abscisse du début d'un tronçon traité
z_{sortie}	Abscisse de la section de sortie du conduit
Z	Impédance réduite d'un traitement acoustique à réaction localisée
Z_{mpn}	Impédance de rayonnement généralisée : rapport des amplitudes de la pression du mode (m,n) et de la vitesse axiale du mode (m,p) sur la section de sortie (voir page 43)

Caractères grecs

α	Admittance réduite d'un traitement acoustique
$\alpha_{int}, \alpha_{ext}$	Admittances réduites des traitements sur les parois des cylindres interne et externe
α_0, α_π	Admittances réduites des traitements sur les parois des bifurcations
α_{mq}	Intégrale définie page 156
β	Facteur principal de la transformée de Prandtl-Glauert ($=\sqrt{1-M_0^2}$)
γ	Paramètre lié à la condition appliquée au bord de fuite dans le modèle de Rienstra. $\gamma=1$: condition de Kutta, $\gamma=0$: continuité du potentiel acoustique
γ_{GP}	Rapport des capacités calorifiques à pression et volume constant de l'air considéré comme un gaz parfait
Γ	Surface artificielle de définition de la source acoustique
$\delta(\vec{x})$	Distribution de Dirac au point \vec{x}
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
Δ_q	Constante égale à π si $q=0$ et $\pi/2$ si $q \neq 0$ (page 156, q entier naturel)
η_{mn}^\pm	Coefficient de propagation lié à la vitesse acoustique radiale du mode (m,n) incident ou réfléchi
ε	Tenseur des déformations dans la théorie de l'élasticité linéaire
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Paramètres d'un faisceau gaussien, liés à la courbure du front d'onde et à la largeur du faisceau
(s, ζ_1, ζ_2)	Coordonnées locales d'un point par rapport au rayon acoustique utilisées dans la formulation SFG
θ_{ec}	Angle d'écoute entre l'axe du conduit et la droite reliant le centre de la section de sortie au point d'écoute
θ_m	Angle de silence pour le rayonnement des modes d'ordre azimutal m
θ_{mn}	Angle d'incidence du mode (m,n) dans le conduit
(θ_0, φ_0)	Direction du lancer d'un rayon depuis le point source dans la méthode SFG
λ	Longueur d'onde acoustique
λ_L	Premier coefficient de Lamé d'un matériau de type visco-élastique

Λ_{mn}^{\pm}	Coefficient de propagation lié à la vitesse acoustique axiale du mode (m,n) incident ou réfléchi
μ_L	Second coefficient de Lamé d'un matériau de type visco-élastique
μ_{mn}^{\pm}	Coefficient de propagation lié à la vitesse acoustique orthoradiale du mode (m,n) incident ou réfléchi
ρ	Fluctuation de la masse volumique locale, densité acoustique
ρ_0	Masse volumique locale de l'écoulement moyen
ρ_{ref}	Masse volumique de référence pour l'adimensionnalisation des différentes grandeurs
ρ_s	Densité des éléments solides de type visco-élastique
ρ_t	Masse volumique locale de l'écoulement total
ρ_{Γ}	Valeur moyenne de la masse volumique locale sur la section source Γ
ρ_{∞}	Masse volumique de l'écoulement à l'infini
σ	Tenseur des contraintes dans la théorie de l'élasticité linéaire
σ_a	Angle du biseau du bord de fuite dans les modèles numériques
Σ	Frontière, fictive ou associée à une paroi solide, du domaine de propagation
Σ^R, Σ^T	Surface physique associée à une paroi de l'éjection rigide ou traitée
Σ_{∞}	Frontière artificielle entre la zone des éléments finis et la zone des éléments infinis dans la méthode FEM
τ_{mn}^{\pm}	Terme intervenant dans la définition de l'amplitude radiale $F_{mn}^{\pm}(k_{r_{mn}}^{\pm} r)$ associée au mode (m,n) incident ou réfléchi (voir (1.32))
\vec{v}	Direction du vecteur d'onde dans la théorie géométrique
φ	Angle azimutal associé aux coordonnées cylindriques (r, φ, z)
φ_{mn}	Angle d'enroulement du mode (m,n) dans le conduit (voir page 30)
ϕ	Potentiel acoustique
ϕ_t	Potentiel des vitesses local de l'écoulement total
ϕ_0	Potentiel des vitesses local de l'écoulement moyen
ϕ_1, ϕ_2	Potentiels acoustiques dans les domaines Ω_1 et Ω_2 de la méthode FEM
ϕ_{SFG}	Contribution au potentiel acoustique d'un faisceau gaussien dans la méthode SFG
χ_c	Rapport de la célérité acoustique du milieu externe sur la célérité acoustique du jet dans le modèle de Munt
χ_{ρ}	Rapport de la masse volumique du milieu externe sur la masse volumique associée au jet dans le modèle de Munt
χ_v	Rapport de la vitesse de l'écoulement externe sur la vitesse du jet dans le modèle de Munt
Ψ_1, Ψ_2	Fonctions tests utilisées pour les méthodes variationnelles
Ψ_{mn}^{\pm}	Terme intervenant dans la définition de l'amplitude radiale $F_{mn}^{\pm}(k_{r_{mn}}^{\pm} r)$ associée au mode (m,n) incident ou réfléchi (voir (1.31) et (1.32))
ω	Pulsation des ondes acoustiques

Ω^+	Domaine de propagation et de rayonnement acoustiques autour de l'éjection
Ω^-	Domaine intérieur utilise dans la méthode intégrale
Ω_1, Ω_2	Sous-domaines des éléments finis et des éléments infinis dans la méthode FEM
Ω_{mn}^\pm	Terme intervenant dans la définition de l'amplitude radiale $F_{mn}^\pm(k_{r_{mn}}^\pm r)$ associée au mode (m, n) incident ou réfléchi (voir (1.31) et (1.32))

Principales notations

$\langle \rangle$	Opérateur de moyenne temporelle
$f'(a)$	Dérivée de la fonction $f(a)$
\tilde{g}	Grandeur physique dimensionnelle
g	Grandeur physique adimensionnelle
\vec{g}	Grandeur physique vectorielle
\bar{g}	Grandeur physique dilatée par la transformée de Prandtl-Glauert (voir page 42)
g^*	Conjugué de la grandeur complexe g
$ g $	Module de la grandeur complexe g
g_x, g_y, g_z	Composantes cartésiennes de la grandeur vectorielle \vec{g}
g_r, g_φ, g_z	Composantes de la grandeur vectorielle \vec{g} associées au repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$
$\text{Re}(g)$	Partie réelle de la grandeur complexe g
$\text{Im}(g)$	Partie imaginaire de la grandeur complexe g
G_1, G_2, G_3, G_4	Sous-matrices de la matrice G
G^t	Transposée de la matrice G
$\text{tr}(G)$	Trace de la matrice G
$\partial/\partial a$	Dérivée partielle par rapport à la variable a
d/da	Dérivée suivant l'écoulement total (voir page 15)
d_0/da	Dérivée suivant l'écoulement moyen (voir page 17)
$\text{div}(\vec{g})$	Opérateur divergence du vecteur \vec{g}
$\text{rot}(\vec{g})$	Opérateur rotationnel du vecteur \vec{g}
$\vec{\nabla}(g)$	Opérateur gradient du scalaire g
$\vec{g} \cdot \vec{h}$	Produit scalaire de deux vecteurs
$\vec{g} \wedge \vec{h}$	Produit vectoriel de deux vecteurs
i	Nombre complexe
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}_{p,i}$	Ensemble des entiers relatifs pairs ou impairs

Introduction

Contexte

La réduction des nuisances sonores causées par les avions est aujourd'hui une préoccupation majeure de l'industrie aéronautique. En effet, le trafic aérien est en constante augmentation, ce qui conduit les aéroports à accroître leur capacité d'accueil et occasionne une gêne grandissante des populations voisines face aux problèmes de bruit. De ce fait, les normes internationales de certification des avions définies par l'O.A.C.I. (Organisation de l'Aviation Civile Internationale) sont de plus en plus sévères et obligent les constructeurs aéronautiques à travailler de manière soutenue sur les solutions de réduction du bruit, dès la phase d'avant-projet de tout nouvel avion.

On distingue généralement deux composantes du bruit émis par un avion en vol : le bruit d'origine aérodynamique et le bruit produit par les moteurs. Le premier est dû au déplacement de l'avion dans l'air. Il s'amplifie dans les configurations hypersustentées avec becs, volets et trains d'atterrissage sortis et devient donc conséquent en phase d'approche. Le second, généré par l'ensemble propulsif, est important pour toutes les phases de vol et largement dominant au décollage. Il se compose du bruit de jet, lié aux turbulences issues de l'éjection d'air à l'extérieur des tuyères, et du bruit produit à l'intérieur des nacelles par les machines tournantes (soufflante, compresseurs, turbines) et la combustion des gaz. Les ondes acoustiques émises par ces constituants internes se propagent ensuite dans l'entrée d'air et les conduits d'éjection puis rayonnent vers l'extérieur. La figure 1 propose un schéma en coupe d'une nacelle de turboréacteur et donne un exemple, pour un avion moderne, de l'importance relative des différentes sources au décollage et à l'atterrissage. On distingue ici les bruits de soufflante amont et aval, rayonnés, respectivement, par l'entrée d'air et par les conduits d'éjection.

La technologie employée depuis une trentaine d'années pour réduire le rayonnement des sources internes au moteur consiste à tapisser les parois de conduit par des matériaux absorbants. Les travaux d'optimisation effectués dans ce domaine ont ainsi permis une réduction notable du bruit rayonné par les nacelles. Cependant, la préoccupation constante des industriels à diminuer la consommation en carburant conduit les motoristes à proposer des turboréacteurs à taux de dilution¹ de plus en plus élevés [117], qui se traduisent en terme d'acoustique par une réduction du bruit de jet mais limitent l'efficacité des matériaux absorbants. En effet, ces nouveaux moteurs s'accompagnent généralement d'une augmentation des diamètres et d'un raccourcissement des nacelles associées. Le bruit de soufflante est donc aujourd'hui encore une composante majeure du bruit de l'avion dans toutes les phases de vol (figure 1), ce qui incite AIRBUS et ses partenaires industriels à poursuivre les activités de recherche dans le domaine de l'insonorisation des nacelles [31].

¹ Le taux de dilution d'un réacteur double flux correspond au rapport du volume d'air froid (flux secondaire) sur le volume d'air chaud éjecté par la tuyère (flux primaire).

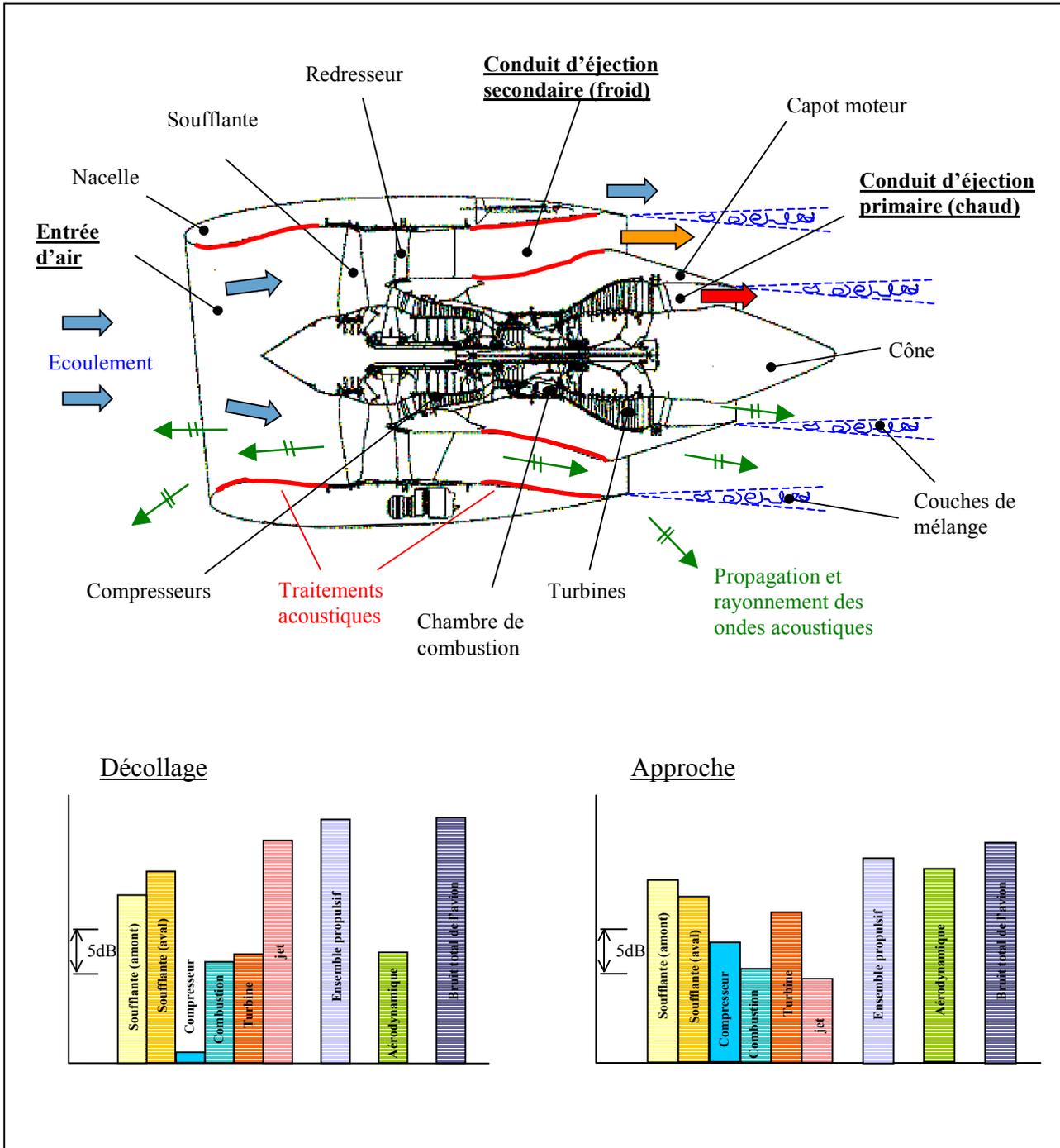


Figure 1 : Schéma en coupe d'une nacelle de turboréacteur et importance relative des différentes sources de bruit en phases de décollage et d'atterrissage.

Les moyens d'étude dont dispose l'industrie aéronautique pour évaluer l'efficacité des technologies à moindre bruit sont au nombre de deux : la voie expérimentale et la modélisation. Si la mesure sur moteur réel est une étape nécessaire à la validation de toute nouvelle configuration, le coût financier des campagnes est trop élevé pour utiliser l'expérience dans un but prospectif. La recherche de solutions anti-bruit innovantes et l'optimisation des techniques actuelles passent donc nécessairement par l'utilisation de

modèles de calcul ou de modèles expérimentaux simplifiés. Dans le domaine de la simulation, on distingue les méthodes analytiques des méthodes numériques. Les premières sont employées depuis longtemps dans l'industrie et offrent l'avantage d'être simples d'utilisation, rapides, et de permettre une bonne compréhension des phénomènes physiques. Leur application, en revanche, est souvent limitée par des hypothèses simplificatrices relativement fortes. C'est pourquoi, encouragés par le développement important des ressources informatiques, les industriels et les centres de recherche se tournent depuis quelques années vers les méthodes de calcul numériques, capables de résoudre des problèmes beaucoup plus réalistes avec la prise en compte de géométries complexes et d'écoulements inhomogènes.

Dans un premier temps, les efforts se sont portés sur la modélisation du bruit de soufflante amont, pour deux raisons : d'une part, celui-ci est une composante majeure du bruit total des turboréacteurs et, d'autre part, la modélisation du rayonnement acoustique des entrées d'air est un problème *a priori* plus abordable que celui associé aux conduits d'éjection. Ainsi, des méthodes de calcul adaptées au problème ont été développées puis utilisées. À AIRBUS, les travaux de Lidoine [65] ont permis de valider, pour les basses fréquences, les formulations par éléments finis de frontière et par éléments finis de volume, et pour les hautes fréquences, la méthode de sommation de faisceaux gaussiens. De nombreux auteurs emploient ces mêmes méthodes, ainsi que des schémas de résolution par différences finies [63] ou des formulations asymptotiques de type équation parabolique ou [56] lancer de rayon [30]. L'utilisation de ces différentes méthodes a permis d'améliorer les connaissances spécifiques sur le rayonnement des entrées d'air et de prédire le bénéfice de nouvelles technologies de réduction du bruit. Citons, à titre d'exemple, la technologie 'zero splice', c'est-à-dire sans jointure rigide entre les traitements acoustiques, intégrée sur l'AIRBUS A380 [6] ; l'inversion de l'angle d'inclinaison de l'entrée d'air (NSI : Negatively Scarfed Inlet) [80] ; ou encore le traitement de la lèvre de l'entrée d'air. Aujourd'hui, les études sur le bruit de soufflante amont se poursuivent mais les avancées réalisées dans ce domaine font ressortir la nécessité de s'intéresser au problème de l'éjection. La figure 2 présente des diagrammes de sensibilité du bruit total d'un avion moderne par rapport à la réduction des différentes sources. Un pourcentage de X% signifie qu'une diminution de la source correspondante de 1 EPNdB² entraînera une réduction du bruit total de 0.X EPNdB. Bien que les chiffres indiqués ici soient dépendants du type d'avion ou des trajectoires considérés, on comprend l'intérêt de travailler désormais sur le bruit de soufflante aval.

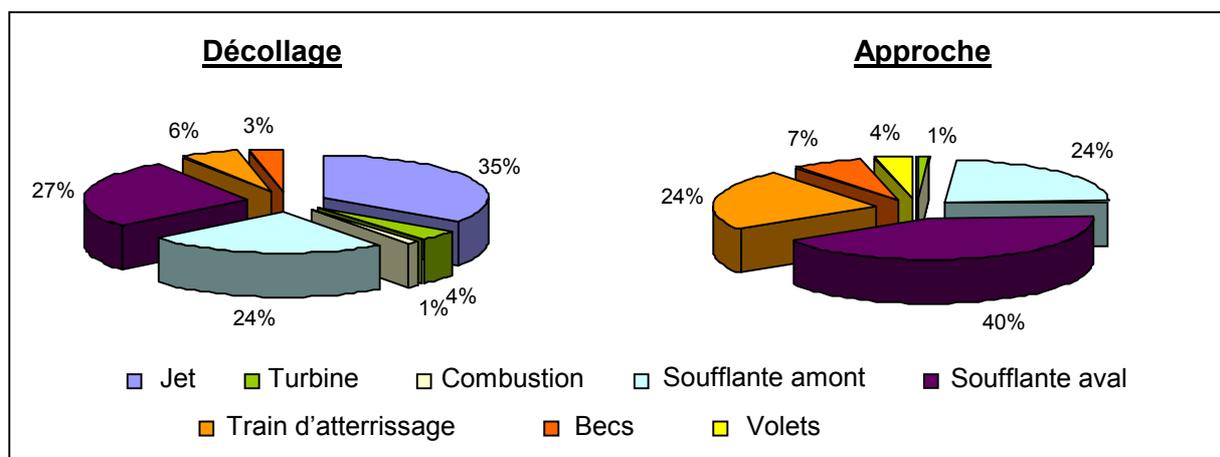


Figure 2 : Sensibilité du bruit d'un avion moderne par rapport aux différentes sources.

² L'EPNdB est un indicateur du bruit de l'avion en un point de certification, intégré dans le temps et filtré par rapport au niveau maximum pour tenir compte de facteurs psychologiques liés à l'oreille humaine.

Le problème acoustique des conduits d'éjection

Comme pour l'entrée d'air, la réduction du rayonnement acoustique des conduits d'éjection repose sur le développement de connaissances spécifiques dans les trois domaines techniques suivants :

- Les mécanismes de génération du bruit par les différents éléments du moteur et la caractérisation des sources correspondantes. Ce domaine d'activité est généralement réservé aux motoristes. Les objectifs sont de réduire le bruit produit à la source mais également d'aboutir à une description suffisante des ondes se propageant dans les conduits pour pouvoir les traiter ensuite de manière efficace.
- Les propriétés acoustiques des traitements insonorisants. Cet aspect technique concerne à la fois le constructeur aéronautique, le nacelliste et le motoriste. Il s'agit notamment de déterminer, à travers la mesure ou le calcul, les propriétés absorbantes des matériaux dans l'environnement particulier des conduits de nacelle.
- La propagation des ondes acoustiques dans les conduits traités et le rayonnement vers l'extérieur. Ce dernier domaine doit permettre d'estimer le bruit rayonné au sol pour différentes configurations de nacelle, en tenant compte de la géométrie des conduits et de la présence d'écoulements inhomogènes complexes. Les différents partenaires aéronautiques travaillent sur ce sujet.

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur le troisième point et plus particulièrement sur la modélisation de la propagation et du rayonnement acoustiques des conduits d'éjection. Les sources et les propriétés des matériaux absorbants seront considérées comme des données d'entrée du problème. Les développements proposés ici s'inscrivent dans le prolongement des travaux effectués à AIRBUS sur le rayonnement des entrées d'air [65] [77]. Par conséquent, nous bénéficierons dans notre étude des connaissances acquises sur ce premier problème mais nous nous intéressons désormais à un sujet de complexité physique plus importante. Pour comprendre les objectifs de la thèse et les différentes étapes de notre travail, nous nous proposons donc de présenter dès à présent les principaux éléments constitutifs du problème des conduits d'éjection : géométrie des conduits, conditions aérodynamiques et thermodynamiques, spectre des sources en fréquence.

La figure 1 offre un premier aperçu de la géométrie du problème. Elle permet de distinguer les conduits primaire et secondaire dans lesquels se propagent, d'une part, les bruits de turbine et de combustion et, d'autre part, le bruit de soufflante. Ce dernier étant prédominant, nous nous intéresserons principalement au rayonnement du conduit secondaire mais les développements effectués dans cette étude pourront être appliqués, généralement, aux deux types de conduit. Par rapport à l'entrée d'air, les conduits d'éjection se caractérisent d'abord par la présence d'un corps central. Les ondes sonores se propagent donc à l'intérieur de conduits approximativement annulaires, et non plus circulaires, ce qui modifie la structure du champ acoustique. De manière générale, toutefois, la forme des conduits est relativement complexe, ce qui rend l'approximation des conduits annulaires moins évidente que l'approximation circulaire utilisée en entrée d'air. Sur le schéma de la figure 1, on peut ainsi noter les fortes variations de section le long du conduit secondaire, ainsi que le prolongement du capot moteur et du cône en dehors de la nacelle. Selon le type de moteur considéré,

cependant, les longueurs respectives des différents conduits varient. Sur la gamme des avions AIRBUS, on distingue ainsi :

- les moteurs à flux séparés, avec cône émergeant (figure 1 et figures 3.a et 3.b) ou immergé (figure 3.c), pour lesquels les gaz issus du conduit primaire sont éjectés en dehors de la nacelle. Ce type de configuration permet de limiter la masse de la nacelle et se rencontre généralement sur les gros moteurs.
- les moteurs à flux mélangés (figure 3.d), pour lesquels la nacelle englobe les conduits primaire et secondaire. Dans ce cas, le mélange des flux d'air chaud (primaire) et froid (secondaire) est amorcé à l'intérieur de la nacelle.



Figure 3 : Illustration des différents types de tuyère, des bifurcations et des inverseurs de poussée. a et b : tuyères à flux séparés avec cône émergeant, c : tuyères à flux séparés avec cône immergé (inverseurs déployés), d : tuyères à flux mélangés.

Au-delà de la forme des conduits, différents éléments structurels et fonctionnels sont susceptibles de perturber la propagation du son à l'intérieur de l'éjection secondaire. Citons, notamment, les raidisseurs, le mécanisme des inverseurs de poussée (figure 3.c) ou encore les entrées et sorties des systèmes de conditionnement d'air. Cependant, le facteur le plus critique correspond à la présence de deux parois verticales, appelées bifurcations, qui débutent en aval des redresseurs et divisent l'éjection froide en deux conduits parallèles (figure 3.b). Dans le cas des moteurs à flux séparés, ces parois s'étendent sur toute la longueur du conduit et la bifurcation supérieure se prolonge en dehors de l'éjection froide sous la forme du mâtréacteur fixant le moteur à la voilure (figures 3.a et 3.b). Pour les tuyères à flux mélangés, en revanche, les deux bifurcations prennent fin à l'intérieur de la nacelle (figure 3.d). Outre son impact sur la propagation du bruit, l'une des conséquences de la présence des bifurcations est la perte de la symétrie de révolution du problème, valable en première approximation dans le cas de l'entrée d'air...

De manière générale, la difficulté principale des problèmes d'aéroacoustique concerne la modélisation des phénomènes d'interaction entre le champ aérodynamique et les fluctuations acoustiques. L'étude de la propagation du bruit dans les conduits d'éjection n'échappe pas à la règle, les conditions aérodynamiques et thermodynamiques associées au problème figurant probablement parmi les plus complexes. La figure 4 présente des cartographies du nombre de Mach et de la température obtenus, au voisinage de l'éjection d'un moteur à flux séparés, par la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées. Les conditions du calcul sont représentatives d'une phase de décollage. Le champ aérodynamique (figure 4.a) se caractérise par la présence de deux jets issus des conduits primaire et secondaire et émergents dans l'air environnant. Entre les différents écoulements, des couches de mélange turbulentes se développent à partir des bords de fuite et s'élargissent peu à peu pour donner naissance à une zone de turbulence pleinement établie quelques diamètres en aval de la nacelle, à l'origine du bruit de jet³. Des gradients de vitesse importants sont observés à travers les couches de mélange, ainsi que le long du conduit secondaire, entre la zone avale des redresseurs et la section de sortie. Les ondes acoustiques générées par les parties tournantes du moteur se propagent donc au sein d'écoulements cisailés fortement inhomogènes. Du fait de l'éjection des gaz brûlés⁴ par le conduit primaire, par ailleurs, le champ de température (figure 4.b) présentent lui aussi des taux de variation importants entre les différents écoulements. L'éjection chaude se caractérise ainsi par des températures de l'ordre de 700 à 800 K, contre 300 K environ dans l'éjection froide... Enfin, si les cartographies de la figure 4 sont obtenues pour des configurations axisymétriques, on notera en réalité le caractère tridimensionnel des écoulements avec le développement, notamment, de couches de cisaillement liées à la présence des bifurcations et du mât-réacteur.

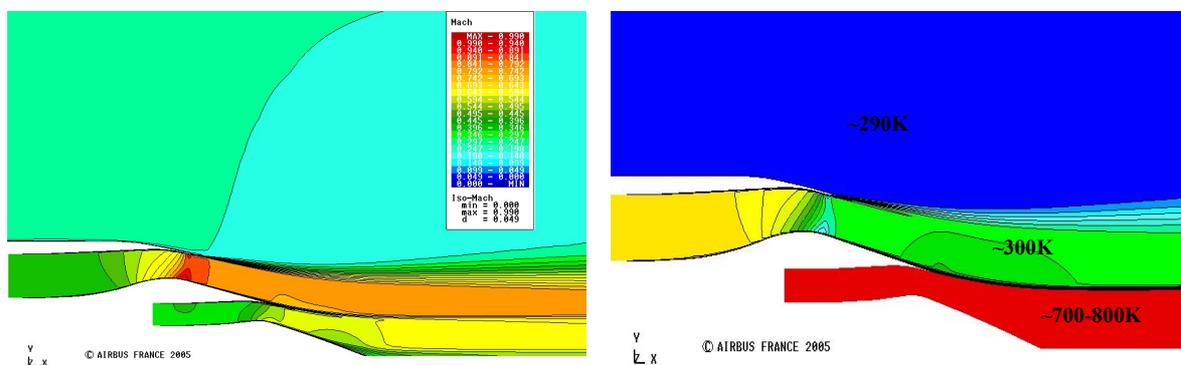


Figure 4 : Visualisation des champs de nombre de Mach et de température au voisinage de l'éjection, pour un régime moteur donné.

Pour conclure avec la présentation générale du problème, la figure 5 propose des spectres de fréquence du bruit rayonné par l'éjection d'un turboréacteur, pour deux régimes de fonctionnement correspondant à des conditions de décollage et d'approche. Au décollage, le spectre est dominé par le bruit de soufflante et l'on observe, au-dessus d'un bruit à large bande, une succession de raies à la fréquence de passage des pales (BPF : Blade Passage

³ Il est important de noter que le bruit de jet n'entre pas dans le cadre de notre étude. Pour simplifier le problème, par ailleurs, nous ne chercherons pas à modéliser l'interaction du champ acoustique incident avec les structures turbulentes aléatoires : nous nous limiterons à la prise en compte d'écoulements stationnaires moyennés.

⁴ Ces gaz correspondent principalement à des oxydes de carbone (CO_x). Notons dès à présent que ceux-ci ne seront pas pris en compte dans notre étude, le milieu de propagation étant assimilé à de l'air.

Frequency) et à ses harmoniques. En condition d'approche, le bruit de turbine apparaît également sur les spectres, très souvent sous la forme de raies élargies. Ce phénomène, connu sous le nom de 'haystacking' (effet 'meule de foin'), est lié à la diffusion de la fréquence de passage des aubes de turbine par les structures turbulentes du jet. Il apparaît également parfois au décollage, à des fréquences plus élevées... La gamme de fréquence d'intérêt s'étend de 0 à 7000 Hz environ, ce qui correspond en terme de nombre d'onde adimensionnel k à : $0 < k < 140$ (cette grandeur est définie au paragraphe 1.3).

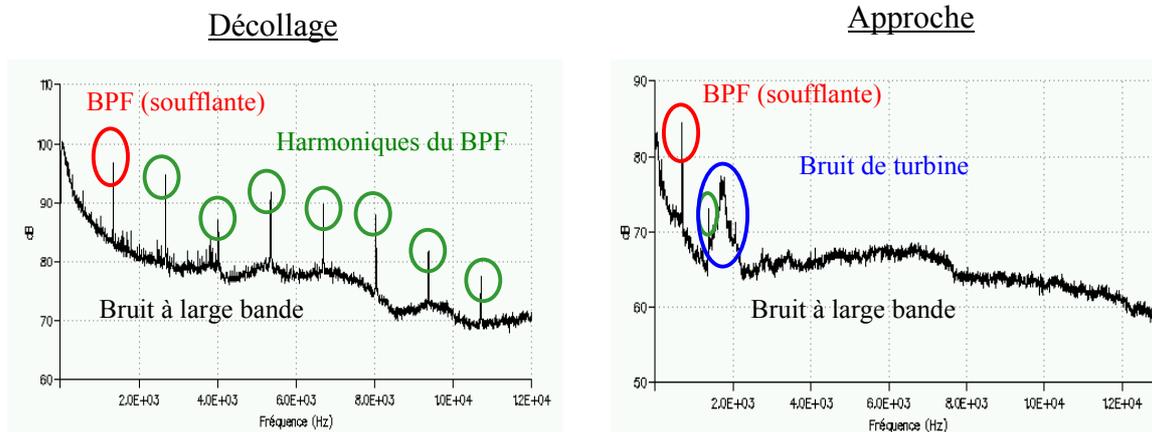


Figure 5 : Spectres de fréquence du bruit rayonné par l'éjection, pour deux régimes caractéristiques du décollage et de l'approche.

Objectifs de l'étude et organisation du mémoire

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé autour de trois objectifs principaux :

- Développer des méthodes de calcul analytiques adaptées au problème de l'éjection et permettant d'évaluer, de façon souple et rapide, l'efficacité de différentes configurations de traitement acoustique.
- Évaluer la pertinence et les limitations des méthodes de calcul numériques et asymptotiques utilisées jusqu'ici sur le problème de l'entrée d'air [65] : pour les basses et moyennes fréquences ($k < 50$), les méthodes par éléments finis de frontière et par éléments finis de volume, et pour les hautes fréquences ($k > 30$), la méthode de sommation de faisceaux gaussiens. Ces différentes approches ont été choisies initialement pour couvrir le spectre en fréquence du bruit rayonné par les nacelles et pour modéliser les principaux éléments constitutifs du problème de l'entrée d'air. Comme nous venons de le voir, cependant, la géométrie, les écoulements et les conditions thermodynamiques associés aux conduits d'éjection sont plus complexes : la pertinence des différentes méthodes demande donc à être évaluée de manière indépendante en conduit d'éjection.
- Utiliser les différentes approches pour analyser les phénomènes physiques gouvernant la propagation et le rayonnement acoustiques des conduits d'éjection et isoler l'influence des différents paramètres du problème (traitements acoustiques, géométrie, écoulement plus ou moins complexe...).

Pour remplir ces objectifs, nous nous inscrirons dans une démarche d'analyse progressive en n'hésitant pas à partir de configurations particulièrement simples pour intégrer les éléments de complexité physique les uns après les autres. Au fur et à mesure de notre progression, les résultats des méthodes analytiques et numériques seront confrontés afin de vérifier la cohérence des différentes approches ou de mettre en évidence leurs éventuelles limitations...

Nous débutons au chapitre 1 par la présentation d'une méthode analytique modélisant la propagation acoustique en conduit annulaire en présence de matériaux absorbants et d'un écoulement uniforme. La méthode est fondée sur la théorie modale et prend en compte les phénomènes de diffraction aux ruptures d'impédance et de géométrie. Deux modules de rayonnement sont considérés. Le premier est basé sur la technique de Wiener-Hopf et permet d'aboutir à une solution exacte du problème pour une géométrie avec corps central infini. Le second correspond à l'approximation de la membrane bafflée et fournit une solution approchée dans le cas d'un corps central tronqué sur la section de sortie. Tout au long de ce mémoire, les résultats de la méthode analytique en conduit annulaire seront utilisés en tant que référence pour évaluer la validité des méthodes numériques et mettre en évidence l'influence des différents paramètres du problème (géométrie, écoulement non uniforme).

Le chapitre 2 constitue la partie centrale de notre étude. Il est dédié à l'analyse des résultats des méthodes de calcul numériques et asymptotiques sur des configurations canoniques de conduits d'éjection, supposant un écoulement nul ou uniforme. On débute par un rappel de la formulation théorique et des hypothèses fondamentales associées à chacune des approches. Les résultats des méthodes par éléments finis de frontière et par éléments finis de volume sont ensuite comparés aux prédictions de la méthode analytique, ainsi qu'à des mesures en chambre sourde effectuées au laboratoire d'Acoustique d'AIRBUS France. Cette dernière comparaison, notamment, est indispensable pour s'assurer de la validité de nos outils de prédiction. La méthode de sommation de faisceaux gaussiens est enfin évaluée sur les configurations analytiques, faisant ressortir les insuffisances de la formulation sous sa forme actuelle.

Le chapitre 3 marque une première étape vers la prise en compte des différents éléments de complexité physique du problème. On s'intéresse ici à l'influence des caractéristiques géométriques des conduits d'éjection sur la propagation et le rayonnement acoustiques. Conformément à notre démarche d'analyse progressive, l'écoulement est de nouveau supposé nul ou uniforme. Dans un premier temps, nous présentons une méthode de calcul analytique modélisant l'influence des bifurcations (figure 3.b) sur la propagation en conduit. Les résultats de ce modèle sont comparés aux prédictions de la méthode numérique par éléments finis de frontière et une description détaillée des phénomènes de propagation en présence des bifurcations est proposée. La méthode par éléments finis de frontière est ensuite utilisée pour analyser les phénomènes de propagation et de rayonnement acoustiques associés à des configurations plus réalistes, dérivées de la géométrie réelle d'un moteur à flux séparés avec cône émergeant (figure 3.a).

Le chapitre 4, enfin, aborde le problème d'un écoulement non uniforme en considérant le rayonnement d'un conduit circulaire en présence d'une couche de cisaillement infiniment fine séparant deux écoulements uniformes. Les résultats de la méthode numérique par éléments finis de volume sont confrontés aux prédictions du modèle analytique de Munt [86] et l'influence des phénomènes de réfraction sur le champ de pression rayonné est analysée. Notre démarche d'analyse progressive s'arrête à ce niveau de complexité physique, la prise en compte d'écoulements plus réalistes tels que celui représenté sur la figure 4.a faisant l'objet

d'études ultérieures à la thèse. Il est à noter que la méthode par éléments finis de volume utilisée dans ce mémoire est basée sur une hypothèse d'écoulement potentiel incompatible *a priori* avec les couches de mélange se développant à partir des bords de fuite de l'éjection. Nous présentons donc pour finir l'approche envisagée à AIRBUS pour modéliser à court terme le rayonnement des conduits d'éjection en présence d'un écoulement réaliste.

Chapitre 1

Modèle analytique de la propagation et du rayonnement acoustiques d'un conduit annulaire

1.1 Introduction

Bien que basées sur des modèles géométriques et des écoulements relativement simples, les méthodes de calcul analytiques constituent un moyen de prédiction souvent privilégié dans l'industrie. Ces méthodes, en effet, présentent deux avantages majeurs. D'une part, elles permettent d'effectuer des études paramétriques souples et rapides, indispensables pour les applications industrielles, et d'autre part, elles apportent un éclairage immédiat sur les phénomènes physiques modélisés. Les méthodes analytiques, par ailleurs, offrent des solutions de référence essentielles à la validation et l'évaluation des méthodes de calcul numériques.

1.1.1 Propagation en conduit

La modélisation analytique de la propagation acoustique à l'intérieur des guides d'ondes a fait l'objet de nombreuses études portant sur des configurations géométriques diverses. Citons, à titre d'exemple, des études en conduit bidimensionnel (deux plans parallèles) [16], rectangulaire [73] et cylindrique de section circulaire ou annulaire. Dans la plupart des cas, en présence d'un écoulement nul ou uniforme, les modèles reposent sur la théorie modale en conduit infini : à l'intérieur d'un guide d'ondes, la résolution des équations de propagation fait apparaître une infinité de solutions dénombrables appelées *modes*, la solution générale du problème s'écrivant alors comme une combinaison linéaire de ces modes. Rienstra et Hirschberg [112] [114] rappellent les principaux éléments de la théorie modale en conduit cylindrique de section annulaire, repris dans notre étude.

Pour étendre les capacités de modélisation à la prise en compte de conduits de section lentement variable, Rienstra [113] a proposé une méthode de propagation modale baptisée 'méthode des échelles multiples'. L'écoulement est alors considéré comme potentiel et sa composante axiale est supposée uniforme sur une section de conduit. Le modèle est valable aussi bien en conduit circulaire qu'en conduit annulaire mais sa mise en oeuvre est *a priori* plus délicate que celle des modèles classiques en conduit de section constante, notamment en présence de discontinuités d'impédance (voir le paragraphe suivant). Afin de progresser par

étape, nous avons donc choisi de privilégier, dans un premier temps, un modèle de propagation en conduit annulaire de section constante¹.

Rice [106] puis Harel et Perulli [44] sont parmi les premiers à s'être intéressés à la propagation des modes dans un conduit cylindrique en présence de matériaux absorbants. Eversman [32], également, est à l'origine d'une méthode de résolution de l'équation aux valeurs propres en conduit traité, reprise à AIRBUS par Montétagaud [77] [78]. Cependant, pour modéliser la propagation du son en présence de traitements acoustiques, il convient de tenir compte des phénomènes de diffraction aux ruptures d'impédance entre une partie de conduit rigide et une partie de conduit traité. Zorumski *et al.* [135] [58] proposent de résoudre le problème à l'aide d'une méthode de raccordement modal (*mode-matching method* en anglais). Celle-ci consiste à établir une relation de passage matricielle entre les modes de conduit rigide et les modes de conduit traité. La prise en compte de cette technique dans l'étude du rayonnement des entrées d'air [65] [79] a montré l'influence capitale des redistributions modales sur le champ de pression rayonné. La méthode de raccordement modal, toutefois, repose sur les propriétés d'orthogonalité des modes de conduit rigide, valables uniquement en écoulement uniforme. Aussi, malgré les travaux de différents auteurs considérant des écoulements cisailés (Joshi *et al.* [51], Ko [55]) ou animés d'une vitesse de rotation (Golubev et Atassi [40]), nous nous limiterons dans notre modèle à la prise en compte d'un écoulement uniforme. Enfin, notons que le problème des discontinuités d'impédance en conduit circulaire et en présence d'un écoulement uniforme a été traité, récemment, par la méthode de Wiener-Hopf [94] : au-delà des redistributions modales, Rienstra et Peake [115] montrent ainsi que des ondes d'instabilités hydrodynamiques sont susceptibles d'être excitées au niveau des discontinuités.

1.1.2 Rayonnement vers l'extérieur

Afin d'évaluer le champ de pression rayonné en champ lointain, il est nécessaire de coupler le modèle de propagation modale dans le guide d'ondes à un modèle de diffraction à l'extrémité du conduit. Deux types de méthode ont été proposés dans la littérature pour aborder le problème.

Levine et Schwinger [60] ont été les premiers à utiliser la méthode de résolution de Wiener-Hopf [94] pour déterminer le champ diffracté à l'extrémité d'un conduit semi-infini, d'épaisseur nulle. Leurs travaux sont basés sur un conduit de section circulaire, sans écoulement, et portent sur le rayonnement du mode plan uniquement. La méthode de Wiener-Hopf a ensuite été reprise par de nombreux auteurs. Carrier [20] a étendu l'étude de Levine et Schwinger à la prise en compte d'un écoulement uniforme, dirigé vers l'intérieur du conduit (configuration d'entrée d'air), ou vers l'extérieur du conduit (configuration d'éjection). En l'absence d'écoulement, Lansing [57] puis Homicz et Lordi [48] ont présenté des formulations du rayonnement vers l'extérieur et de la réflexion en extrémité de conduit, valables pour tous les modes passants. Homicz et Lordi, en particulier, ont proposé des développements pour la prise en compte d'un écoulement uniforme, repris à AIRBUS par Lidoine [65] pour évaluer le rayonnement d'une entrée d'air. Toujours dans le cas d'un conduit circulaire, Munt [85] a été le premier à développer une solution pour tous les modes passants en présence d'un écoulement uniforme sortant. Ses travaux, notamment, ont mis en

¹ Le couplage de la méthode des échelles multiples avec une méthode de raccordement modal aux discontinuités d'impédance a été réalisée à AIRBUS, dans le même temps que notre étude (code RIDIWHAX). Le modèle est aujourd'hui validé en conduit circulaire (de section variable) et demande à l'être en conduit annulaire...

évidence l'influence d'un échappement tourbillonnaire², depuis le bord de fuite du conduit, sur le rayonnement en champ lointain. Enfin, Rienstra [111] a étendu la formulation de Munt au cas d'un conduit annulaire présentant un corps central de longueur infinie. Cette solution constitue l'un des deux modèles de rayonnement considéré dans notre étude.

Parallèlement aux modèles de calcul basés sur l'utilisation de la technique de Wiener-Hopf, différents auteurs ont proposé une approche simplifiée du problème en considérant le rayonnement d'un conduit enserré dans un baffle infini représenté par un plan rigide perpendiculaire à l'axe du conduit. La solution obtenue est alors une solution approchée, qui fournit habituellement une bonne approximation du rayonnement pour les angles situés en dessous de 70° environ par rapport à l'axe de l'éjection (voir par exemple Hocter [46]). Les premières études sur ce type de modèle correspondent aux travaux de Tyler et Sofrin [126], qui évaluent le rayonnement des modes de conduit circulaire, en l'absence d'écoulement. Morfey, ensuite, a proposé une adaptation de la méthode au cas d'un conduit annulaire caractérisé par un corps central tronqué sur la section de sortie du conduit. Il s'est limité tout d'abord à des conduits de faible hauteur de canal (largeur du conduit entre le corps central et le cylindre externe) [81], puis a étendu le calcul à des configurations annulaires quelconques [82]. Zorumski [134], enfin, a présenté une méthode de calcul pour déterminer la réflexion des modes à l'extrémité d'un conduit annulaire bafflé. Les formulations de Morfey et Zorumski sont reprises dans notre étude et adaptées à la prise en compte d'un écoulement uniforme sortant, comme l'ont proposé Rice et Saule [107] dans le cas d'un conduit circulaire.

Pour finir, il est à noter que plusieurs modèles basés sur la méthode de Wiener-Hopf ont été proposés pour tenir compte des différences d'écoulement entre un jet issu d'un conduit circulaire ou annulaire et le milieu environnant. Ce type de configuration fait l'objet du chapitre 4 de la thèse et nous aurons l'occasion de discuter alors de ces différents modèles.

1.1.3 Le code MADIWHAX

Ce chapitre se propose d'exposer les principaux éléments théoriques de la méthode analytique en conduit annulaire. Le code de calcul MADIWHAX est la combinaison de trois modules principaux : MACCY (Modélisation Acoustique en Conduit CYlindrique) qui a pour objet de déterminer les valeurs propres du problème en conduit rigide ou traité ; DICCY (Discontinuité d'Impédance en Conduit CYlindrique) qui correspond à l'implémentation de la méthode de raccordement modal aux ruptures d'impédance ; et enfin, WHAXI (Wiener-Hopf AXIsymétrique) qui permet de calculer le rayonnement en champ lointain (par la méthode de Wiener-Hopf ou l'approximation bafflée). Les deux derniers modules ont été développés au cours de la thèse en reprenant les travaux de Bechet [10] et Arguillat [4] débutés dans le cadre de stages de DEA. MACCY a fait l'objet de premiers développements lors de la thèse de Montétagaud [77] et a été repris récemment par la société MATAP [11] afin de programmer une nouvelle méthode de résolution de l'équation aux valeurs propres, plus adaptée au problème de l'éjection.

Il est à noter qu'un code de calcul équivalent en conduit circulaire a été mis au point précédemment à AIRBUS, dans le cadre des travaux sur l'entrée d'air [65].

² La signification et les conséquences d'un échappement tourbillonnaire sont présentées de manière relativement détaillée au paragraphe 1.6.3.

1.2 Configurations géométriques et écoulement moyen

La théorie analytique programmée dans le code de calcul MADIWHAX est basée sur une géométrie très simplifiée du problème, assimilant l'éjection à un conduit cylindrique de section annulaire. Afin d'étudier l'influence de la longueur du corps central sur le rayonnement acoustique, deux configurations ont été choisies (figure 1.1). La première (figure 1.1.a) correspond à un conduit sans épaisseur avec un corps central infini se prolongeant à l'extérieur du conduit, conformément au modèle de Rienstra [111]. Dans la seconde (figure 1.1.b), l'extrémité du conduit est enserrée dans un baffle infini et rigide et le corps central est tronqué sur la section de sortie. Les deux géométries sont à symétrie de révolution, rapportées au système de coordonnées cylindriques $(\tilde{r}, \varphi, \tilde{z})$.

Les rayons \tilde{R}_{int} et \tilde{R}_{ext} des cylindres interne et externe sont constants sur toute la longueur du conduit, qui se compose d'une alternance de parties rigides (Σ^R) et de parties traitées (Σ^T). Les parois traitées sont caractérisées par les admittances réduites des matériaux absorbants α_{int} et α_{ext} (voir paragraphe 1.3.5), supposées connues. L'excitation acoustique est traduite par la présence d'une surface source Γ située dans une portion de conduit rigide. Pour les besoins du couplage avec le modèle de rayonnement, le dernier tronçon de conduit est également supposé rigide.

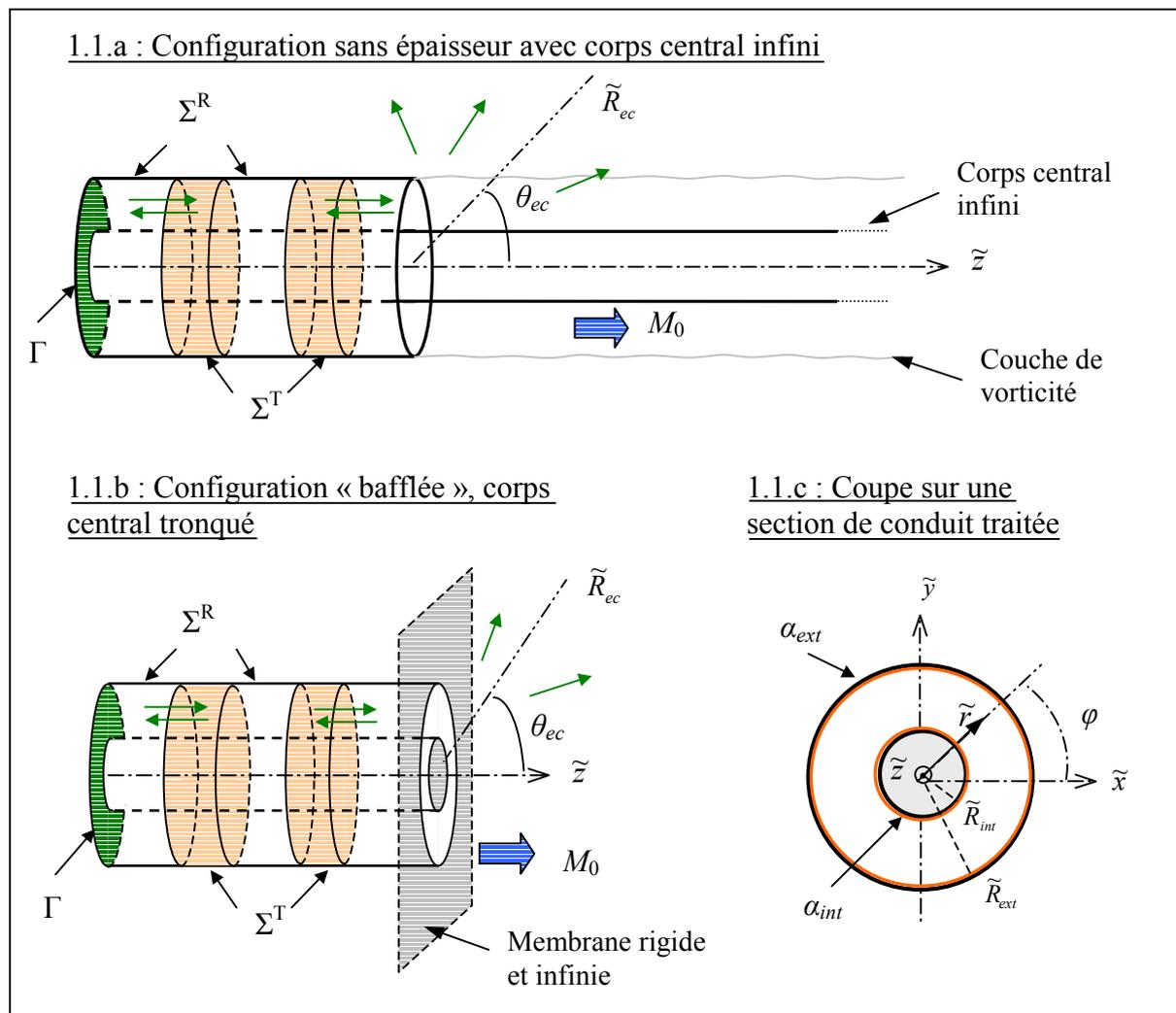


Figure 1.1 : Modèles analytiques de conduit d'éjection.

Pour chacune des deux configurations, on suppose que le milieu de propagation est animé d'un écoulement moyen uniforme et subsonique dirigé vers l'extérieur du conduit, parallèlement à l'axe \vec{e}_z . Une telle hypothèse pose *a priori* un problème de cohérence dans la configuration bafflée puisque les conditions aux limites sur la membrane infinie sont alors impropres. Cependant, l'intégrale de rayonnement considérée ensuite porte uniquement sur la section ouverte du conduit et nous verrons que le modèle permet de retrouver les effets de convection liés à l'écoulement.

Enfin, dans le cas du conduit sans épaisseur (figure 1.1.a), il est possible de modéliser l'influence d'une couche de vorticité infiniment fine, prenant naissance au bord de fuite du conduit et convectée par l'écoulement porteur. Nous reviendrons sur ce point en détail au paragraphe 1.6.3.

1.3 Formulation du problème

Avant de présenter les différentes étapes de résolution spécifiques au problème considéré ici, nous effectuons un bref rappel des équations de base de l'acoustique linéaire en milieu homogène avec écoulement uniforme. De manière classique [15] [112], la formulation du problème découle des équations fondamentales de la mécanique des fluides.

1.3.1  quations sur l'écoulement total

Le milieu de propagation considéré est de l'air, que l'on supposera non visqueux et non-conducteur de la chaleur. Sous ces hypothèses, l'entropie d'une particule fluide est constante au cours du temps et l'écoulement est qualifié d'isentropique. Nous introduisons tout d'abord les grandeurs locales dimensionnelles de l'écoulement total : \tilde{p}_t représente la pression, $\tilde{\vec{v}}_t$ le vecteur vitesse, $\tilde{\rho}_t$ la masse volumique et \tilde{s}_t l'entropie. En négligeant les forces extérieures telle que la pesanteur, les équations de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de l'entropie (dérivée de la conservation de l'énergie interne) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_t}{\partial \tilde{t}} + \text{div}(\tilde{\rho}_t \tilde{\vec{v}}_t) &= 0, \\ \tilde{\rho}_t \frac{d\tilde{\vec{v}}_t}{d\tilde{t}} + \vec{\nabla}(\tilde{p}_t) &= \vec{0}, \\ \frac{d\tilde{s}_t}{d\tilde{t}} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où nous avons noté $\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\vec{v}}_t \cdot \vec{\nabla}$, la dérivée particulaire suivant l'écoulement total.

Afin de fermer le système (1.1), il est nécessaire de considérer une équation supplémentaire, généralement choisie en acoustique sous la forme de l'équation d'état $\tilde{p}_t = \tilde{p}_t(\tilde{\rho}_t, \tilde{s}_t)$. Compte tenu de l'hypothèse de l'écoulement isentropique, celle-ci s'écrit :

$$d\tilde{p}_t = \left(\frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial \tilde{\rho}_t} \right)_{\tilde{s}_t} d\tilde{\rho}_t = \tilde{c}_t^2 d\tilde{\rho}_t. \tag{1.2}$$

Nous avons défini au passage la grandeur locale $\tilde{c}_i = \tilde{c}_i(\tilde{\rho}_i, \tilde{s}_i)$ qui, comme nous allons le voir, correspond à la célérité des ondes acoustiques.

1.3.2 Linéarisation et équations de propagation de l'acoustique

Au sein d'un écoulement quelconque, trois types de perturbations, définies comme des petits mouvements fluctuants de moyenne temporelle nulle, sont susceptibles d'interagir [26] : les perturbations tourbillonnaires, associées à la viscosité et rotationnelles ; les perturbations entropiques, liées à la conductibilité thermique ; et les perturbations acoustiques, associées à la compressibilité, essentiellement irrotationnelles et de nature propagative. Dans le modèle analytique, ainsi que dans les méthodes numériques présentées au chapitre 2, l'hypothèse d'un écoulement uniforme ou potentiel simplifie grandement le problème puisque les fluctuations entropiques et tourbillonnaires sont alors exclues. En conséquence, pour toute variable de l'écoulement, on définira la grandeur acoustique \tilde{g} comme étant la partie fluctuante de la grandeur totale \tilde{g}_i autour de sa valeur moyenne dans le temps \tilde{g}_0 :

$$\tilde{g}_i(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{g}_0(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}). \quad (1.3)$$

Dans le cas d'un écoulement moyen uniforme $(\tilde{p}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{v}_0 \vec{e}_z, \tilde{s}_0)$, on écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{p}_0 + \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}), & \tilde{\rho}_i(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \tilde{v}_i(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{v}_0 \vec{e}_z + \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t}), & \tilde{s}_i(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \tilde{s}_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

De manière générale, l'amplitude du champ acoustique est faible devant la valeur moyenne de l'écoulement total : $\tilde{g} \ll \tilde{g}_0$. À titre d'exemple, au seuil de douleur de l'oreille humaine (120 dB SPL³), les rapports entre fluctuations acoustiques et valeurs moyennes de l'écoulement sont de l'ordre de : $\tilde{p} / \tilde{p}_0 \sim 2 \cdot 10^{-4}$, $\tilde{\rho} / \tilde{\rho}_0 \sim 10^{-4}$ et $\tilde{v} \sim 5 \cdot 10^{-2}$. C'est pourquoi, pour décrire les phénomènes de propagation du son, on se place généralement dans le cadre de l'acoustique linéaire qui néglige les termes d'ordres supérieurs à un dans les équations de la mécanique des fluides (1.1). Dans le cas du bruit généré par les turboréacteurs, cette approximation peut être remise en cause à proximité immédiate de la soufflante. Toutefois, les non-linéarités ayant pour conséquence une décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes acoustiques [69], il est toujours possible de situer le domaine d'étude dans une région légèrement plus en aval où l'approximation linéaire est pertinente, ce que nous supposons désormais.

En insérant les expressions (1.4) dans les équations (1.1) et en ne conservant que les termes du premier ordre, nous obtenons les formes linéarisées suivantes :

³ SPL : Niveau de pression sonore (Sound Pressure Level), voir l'annexe 1.

$$\frac{d_0 \tilde{\rho}}{d\tilde{t}} + \tilde{\rho}_0 \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1.5)$$

$$\tilde{\rho}_0 \frac{d_0 \tilde{\mathbf{v}}}{d\tilde{t}} + \tilde{\nabla}(\tilde{p}) = \vec{0}, \quad (1.6)$$

avec $\frac{d_0}{d\tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}}_0 \cdot \tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$, la dérivée suivant l'écoulement moyen.

Par ailleurs, le développement de Taylor de la relation (1.2) autour de l'état d'origine non perturbé permet de relier les pression et densité acoustiques selon :

$$\tilde{p} = \left(\frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial \tilde{\rho}_t} \right)_{0,s} \tilde{\rho} = \tilde{c}_0^2 \tilde{\rho}, \quad \text{avec } \tilde{c}_0^2 = \left(\frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial \tilde{\rho}_t} \right)_{0,s}. \quad (1.7)$$

En effectuant l'opération $\operatorname{div}(1.6) - \frac{d_0}{d\tilde{t}}(1.5)$, puis en éliminant la densité acoustique $\tilde{\rho}$ à l'aide de la relation (1.7), on aboutit enfin à l'équation de propagation des ondes convectées portant sur la pression acoustique \tilde{p} :

$$\Delta \tilde{p} - \frac{1}{\tilde{c}_0^2} \frac{d_0^2 \tilde{p}}{d\tilde{t}^2} = 0. \quad (1.8)$$

Les vitesses et densités acoustiques $\tilde{\mathbf{v}}$ et $\tilde{\rho}$ sont reliées à la pression \tilde{p} par l'intermédiaire de l'équation d'Euler linéarisée (1.6) et de la relation (1.7). En considérant l'expression $r\vec{o}t(1.6)$, on vérifie par ailleurs la nature irrotationnelle du champ acoustique, ce qui permet de définir le potentiel des vitesses acoustiques $\tilde{\phi}$, souvent utilisé dans la formulation des problèmes acoustiques :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\nabla} \tilde{\phi}. \quad (1.9)$$

Comme nous l'avions anticipé, l'équation (1.8) montre que la grandeur \tilde{c}_0 correspond à la célérité des ondes acoustiques dans le repère lié à l'écoulement porteur. De manière classique, sa valeur est déterminée en assimilant l'air à un gaz parfait. Associée au caractère isentropique de l'écoulement, cette hypothèse permet de vérifier la relation (1.10) qui, combinée à l'équation d'état (1.11), conduit à l'expression (1.12) :

$$\tilde{p}_t \tilde{\rho}_t^{-\gamma_{GP}} = cste, \quad (1.10)$$

$$\tilde{p}_t = \tilde{\rho}_t r_{air} \tilde{T}_t, \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_0^2 = \gamma_{GP} r_{air} \tilde{T}_0. \quad (1.12)$$

Nous avons noté $\gamma_{GP}=1.4$, le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants, $r_{air}=286.73 \text{ J/kgK}$, la constante spécifique de l'air, \tilde{T}_t et \tilde{T}_0 , la température de l'écoulement total et sa valeur moyenne.

1.3.3 Formulation adimensionnelle

Dans ce mémoire, nous utiliserons des grandeurs adimensionnelles définies à l'aide des densité et célérité de référence $\tilde{\rho}_{ref}$ et \tilde{c}_{ref} , et d'un rayon caractéristique \tilde{R}_{ref} :

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}_{ref} \tilde{c}_{ref}^2}, & \vec{v}_0 &= \frac{\tilde{\vec{v}}_0}{\tilde{c}_{ref}}, & \rho_0 &= \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{ref}}, \\
 p &= \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_{ref} \tilde{c}_{ref}^2}, & \vec{v} &= \frac{\tilde{\vec{v}}}{\tilde{c}_{ref}}, & \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{ref}}, \\
 c_0 &= \frac{\tilde{c}_0}{\tilde{c}_{ref}}, & t &= \tilde{t} \frac{\tilde{c}_{ref}}{\tilde{R}_{ref}}, & \vec{x} &= \frac{\tilde{\vec{x}}}{\tilde{R}_{ref}}.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Pour le modèle analytique, les grandeurs de références sont les densité et célérité de l'écoulement moyen uniforme $\tilde{\rho}_0$ et \tilde{c}_0 et le rayon externe du conduit \tilde{R}_{ext} . Nous utiliserons également le rapport de rayon $h = \tilde{R}_{int} / \tilde{R}_{ext}$. Avec les grandeurs adimensionnelles (1.13), les équations de la propagation acoustique se réécrivent :

$$\begin{aligned}
 \Delta p - \frac{d_0^2 p}{dt^2} &= 0, \\
 \rho &= p, \\
 \frac{d_0 \vec{v}}{dt} + \vec{\nabla} p &= \vec{\theta}, \\
 \text{avec : } \frac{d_0}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + M_0 \frac{\partial}{\partial z} \text{ et } M_0 = \tilde{v}_0 / \tilde{c}_0, \text{ le nombre de Mach local.}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3.4 Formulation harmonique

Pour résoudre le problème (1.14), nous nous placerons désormais dans le domaine des fréquences. Cette approche est fréquemment utilisée en acoustique des conduits car elle permet de simplifier la recherche des solutions. En outre, la méthode est bien adaptée à l'étude du bruit des turboréacteurs dont le spectre est composé de raies émergeant fortement d'un bruit à large bande (voir l'introduction). Pour toute grandeur adimensionnelle du champ acoustique $g(\vec{x}, t)$, on définit les composantes harmoniques complexes $\hat{g}(\vec{x}, k)$ à l'aide de la transformée de Fourier (1.15) :

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\vec{x}, k) &= \mathfrak{F}_g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}, t) e^{ikt} dt, \\
 g(\vec{x}, t) &= \mathfrak{F}_g^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\vec{x}, k) e^{-ikt} dk.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$k = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_{ref}} \tilde{R}_{ref}$ est le nombre d'onde adimensionnel et $\tilde{\omega}$ la pulsation. La fréquence et la longueur d'onde correspondantes sont notées : $\tilde{f} = \tilde{\omega}/2\pi$ et $\tilde{\lambda} = 2\pi\tilde{c}_0/\tilde{\omega}$. En utilisant les relations (1.15), l'équation des ondes se réduit à l'équation de Helmholtz et le problème (1.14) s'écrit, dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{p} + (k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z})^2 \hat{p} &= 0, \\ \hat{\rho} &= \hat{p}, \\ \left(-ik + M_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} + \vec{\nabla} \hat{p} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Bien entendu, une fois le problème résolu dans l'espace des fréquences, il est possible de se ramener à une description temporelle par une simple transformée de Fourier inverse. Notons que dans la suite de ce mémoire, afin d'alléger les notations, les composantes fréquentielles \hat{g} seront écrites plus simplement g .

1.3.5 Conditions aux limites

L'équation de propagation des ondes acoustiques ayant été établie, il nous reste désormais à formuler les conditions aux limites associées pour aboutir à une formulation complète du problème.

Surface source Γ

La section source Γ (figure 1.1) est une surface fictive d'entrée et de sortie des ondes acoustiques, utilisée explicitement dans les approches numériques de résolution du problème pour lesquelles le domaine doit être limité. Elle permet, d'une part, de définir le champ incident dans le domaine de propagation et, d'autre part, d'autoriser la sortie des ondes réfléchies. La forme exacte des champs incident et réfléchi, à savoir les modes de conduit, est détaillée au paragraphe 1.4.

Surfaces solides

Au niveau des surfaces solides, deux types de conditions aux limites doivent être distingués selon que l'on considère une paroi rigide (Σ^R) ou traitée (Σ^T). Dans le cas de la surface rigide, tout d'abord, on impose la condition d'imperméabilité classique :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \text{avec } \vec{n}, \text{ vecteur normal à la paroi.} \tag{1.17}$$

La formulation de la condition aux limites sur une paroi absorbante est un problème plus délicat, particulièrement en présence d'un écoulement moyen. Les traitements acoustiques utilisés dans les conduits d'éjection des turboréacteurs se caractérisent par une structure en nids d'abeilles (cavités cloisonnées) recouverte d'une couche résistive de types 'tôle perforée' ou 'wiremesh' (terme anglais utilisé pour désigner un tissu métallique microporeux). Selon qu'il existe une ou deux couches de nids d'abeilles, on parle de traitements SDOF ou 2DOF

(single ou double degree of freedom). Généralement, ces matériaux sont considérés comme des structures à réaction localisée, c'est-à-dire que la réponse de la surface traitée à l'excitation acoustique est locale et qu'il n'y pas de transmission d'énergie acoustique le long du traitement. On introduit alors le concept d'impédance du matériau, caractérisant, pour une fréquence donnée, la réaction de la paroi à la force induite par la pression acoustique incidente. En écriture adimensionnelle (on parle alors d'impédance spécifique ou réduite), cette grandeur s'écrit :

$$Z(\vec{x}_\Sigma, k) = \frac{p(\vec{x}_\Sigma, k)}{\vec{v}_\Sigma(\vec{x}_\Sigma, k) \cdot \vec{n}}, \quad (1.18)$$

\vec{n} étant le vecteur normal à la paroi orienté vers l'intérieur du matériau, et \vec{x}_Σ et \vec{v}_Σ , les position et vitesse d'un point de la paroi du matériau.

De manière générale, l'impédance dépend du type de matériau, des caractéristiques de l'écoulement et de l'excitation acoustique (fréquence, amplitude) [69]. Dans le cadre de notre étude, cependant, nous ne chercherons pas à caractériser l'impédance d'un traitement acoustique et nous la considérerons comme une donnée du problème.

Pour formuler la condition aux limites sur les parois traitées, la notion d'impédance n'est pas suffisante et il est nécessaire de lui adjoindre une hypothèse de continuité reliant le mouvement de la paroi au champ acoustique. Historiquement, l'écriture d'une telle relation a fait l'objet de controverses : faut-il écrire la continuité des vitesses normales ou la continuité des déplacements normaux ? En effet, lorsque le milieu fluide est animé d'un écoulement moyen, ces deux approches conduisent à des relations différentes. En réalité, le choix de l'une ou l'autre des solutions dépend des hypothèses effectuées sur la nature précise de l'écoulement à proximité de la paroi, notamment de la prise en compte ou non d'une couche limite [116]. Dans le cas des conduits de turboréacteurs, la couche limite étant relativement mince, la solution généralement retenue est la continuité des déplacements normaux [50] [75] [77] [105]. En considérant cette hypothèse et en se plaçant dans le cas d'une surface quelconque en présence d'un écoulement non visqueux, Myers a proposé la formulation suivante, utilisée dans la quasi-totalité des études sur les turboréacteurs :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \left(1 - \frac{1}{ik} \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{ik} \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) (\vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}). \quad (1.19)$$

Cependant, dans le cadre de sa thèse, Lidoine [65] a montré que la représentation eulerienne des déplacements normaux choisie par Myers est inadaptée pour décrire le problème de manière rigoureuse. En utilisant le formalisme de la représentation mixte, basée sur le calcul des perturbations lagrangiennes en fonction des coordonnées eulériennes, il utilise alors comme point de départ la continuité des déplacements normaux lagrangiens et aboutit à une nouvelle formulation, équivalente à la relation de Myers à la condition que l'écoulement porteur soit irrotationnel... Or, c'est effectivement le cas dans le modèle analytique présenté ici, ainsi que dans les méthodes numériques considérées ensuite. Par conséquent, nous utiliserons la relation de Myers (1.19) qui, combinée aux équations (1.15) et (1.16) permet d'écrire la condition aux limites suivante sur les surfaces traitées (Σ^T) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\alpha}{ik} \left(-ik + M_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p = \frac{i\alpha}{k} \left(k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p. \quad (1.20)$$

α désigne ici l'admittance réduite du matériau, définie comme l'inverse de l'impédance réduite : $\alpha = 1/Z$.

Principe de causalité et rayonnement à l'infini

Pour assurer l'unicité de la solution, il est nécessaire de compléter la mise en équations du problème par le principe de causalité, spécifiant qu'à une distance suffisamment éloignée de la source, les ondes acoustiques se propagent librement vers l'infini et non en sens inverse. Dans la méthode analytique, ceci est traduit par la condition de Sommerfeld, prise en compte dans les modèles de rayonnement présentés au paragraphe 1.6.2.

1.4 Propagation acoustique en conduit annulaire infini

1.4.1 Décomposition du champ acoustique en modes de conduit

Afin de modéliser la propagation du son à l'intérieur des conduits présentés sur la figure 1.1, nous allons désormais assimiler chaque tronçon rigide ou traité à un conduit annulaire de longueur infinie. Cette approche, fréquemment utilisée, permet de décrire le champ acoustique sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions particulières, appelées modes de conduit. En pratique, les conditions aux limites aux extrémités de chaque tronçon seront assurées par la méthode de raccordement modal aux interfaces rigide/traitée (paragraphe 1.5) et par les modèles de réflexion et de rayonnement à l'extrémité du conduit (paragraphe 1.6).

En reprenant l'équation de Helmholtz (1.16) et en considérant les conditions aux limites (1.20) sur les parois interne ($r=h$) et externe ($r=1$) du conduit, le problème de la propagation en conduit annulaire infini s'écrit, pour la pression acoustique p :

$$\Delta p + (k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z})^2 p = 0,$$

avec, en $r=h$ ($j=1$) et $r=1$ ($j=2$) : $\frac{\partial p}{\partial r} = (-1)^j \frac{i\alpha_{int/ext}}{k} \left(k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p.$ (1.21)

De manière classique [65] [77] [112], par la méthode de séparation des variables, on recherche les solutions sous la forme :

$$p(r, \varphi, z) = f_r(r) f_\varphi(\varphi) e^{ik_z z}. \quad (1.22)$$

L'équation sur la variable φ impose :

$$f_\varphi(\varphi) = cste_1 e^{ik_\varphi\varphi} + cste_2 e^{-ik_\varphi\varphi}, \quad \text{avec } k_\varphi, \text{ complexe.} \quad (1.23)$$

En utilisant la condition de périodicité du champ acoustique $f_\varphi(\varphi + 2\pi) = f_\varphi(\varphi)$, on montre que la constante k_φ prend nécessairement des valeurs entières. La dépendance azimutale du champ de pression peut alors s'écrire :

$$f_\varphi(\varphi) = cste_1 e^{im\varphi} + cste_2 e^{-im\varphi}, \quad \text{avec } m, \text{ entier naturel.} \quad (1.24)$$

Dans le cas du conduit annulaire, et contrairement au conduit avec bifurcations étudié au chapitre 3, les constantes $cste_1$ et $cste_2$ sont indépendantes. Les composantes $e^{im\varphi}$ et $e^{-im\varphi}$ du champ acoustique peuvent donc être considérées séparément comme des solutions particulières de l'équation en φ . Nous appellerons désormais modes d'ordre azimutal m l'ensemble des solutions du problème de dépendance angulaire $e^{im\varphi}$, dont l'expression générale est :

$$p_m(r, \varphi, z) = cste f_{r_m}(r) e^{ik_{z_m}z + im\varphi}, \quad \text{avec } m, \text{ entier relatif.} \quad (1.25)$$

Pour une valeur de m donnée, la fonction définissant l'amplitude radiale $f_{r_m}(r)$ du champ de pression acoustique vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 f_{r_m}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_{r_m}}{dr} + \left(k_{r_m}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) f_{r_m} = 0, \quad (1.26)$$

où nous avons noté :

$$k_{r_m}^2 = (k - M_0 k_{z_m})^2 - k_{z_m}^2. \quad (1.27)$$

L'équation (1.26) dépend des paramètres m et k_{r_m} et admet pour solutions élémentaires les fonctions de Bessel de première et de seconde espèces, respectivement $J_m(k_{r_m} r)$ et $Y_m(k_{r_m} r)$ (voir [2] [42]). On écrit donc :

$$f_{r_m}(r) = cste_{1,m} J_m(k_{r_m} r) + cste_{2,m} Y_m(k_{r_m} r). \quad (1.28)$$

Les constantes apparaissant ci-dessus sont déterminées par les conditions aux limites du problème. En insérant l'expression (1.28) dans les équations (1.21) puis en considérant la relation (1.27), on aboutit tout d'abord à un système aux valeurs propres portant sur les constantes k_{r_m} et k_{z_m} . Ce système (1.29) admet une infinité de solutions $(k_{r_{mn}}^\pm, k_{z_{mn}}^\pm)$, numérotées de $n = 1$ à $n = +\infty$.

$$\begin{aligned}
& \left\{ k_{r_{mn}}^{\pm} J'_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) + i\alpha_{int} \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 J_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) \right\} \times \left\{ k_{r_{mn}}^{\pm} Y'_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) - i\alpha_{ext} \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) \right\} \\
& - \left\{ k_{r_{mn}}^{\pm} J'_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) - i\alpha_{ext} \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 J_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) \right\} \times \left\{ k_{r_{mn}}^{\pm} Y'_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) + i\alpha_{int} \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) \right\} = 0, \\
& k_{z_{mn}}^{\pm} = \frac{k}{1 - M_0^2} \left\{ -M_0 \pm \sqrt{1 - (1 - M_0^2) \left(\frac{k_{r_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$k_{r_{mn}}^{\pm}$ est appelée constante de propagation radiale (ou nombre d'onde radial) et $k_{z_{mn}}^{\pm}$ constante de propagation axiale (ou nombre d'onde axial). L'exposant \pm désigne le sens de propagation de l'onde (+ correspondant au sens de l'écoulement, vers les $z > 0$, - au sens inverse). J'_m et Y'_m sont les dérivées des fonctions de Bessel.

Ainsi, au sein d'un ordre azimutal m donné, il existe une infinité dénombrable de solutions particulières, appelées modes d'ordre radial n . Plus généralement, la solution associée à un couple de valeurs propres $(k_{r_{mn}}^{\pm}, k_{z_{mn}}^{\pm})$ donné est appelée mode de conduit (m, n) et s'exprime de la façon suivante :

$$p_{mn}^{\pm}(r, \varphi, z) = [Cste_{1, mn}^{\pm} J_m(k_{r_{mn}}^{\pm} r) + Cste_{2, mn}^{\pm} Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm} r)] e^{ik_{z_{mn}}^{\pm} z} e^{im\varphi}. \tag{1.30}$$

Du fait de la divergence de la fonction Y_m en $r=0$, les constantes $Cste_{2, mn}^{\pm}$ sont nécessairement nulles dans le cas d'un conduit cylindrique de section circulaire et la forme radiale des modes s'exprime alors à l'aide de la fonction J_m uniquement. En conduit annulaire, en revanche, les deux fonctions de Bessel J_m et Y_m doivent être prises en compte. Les conditions aux limites (1.21) permettent de relier les constantes $Cste_{1, mn}^{\pm}$ et $Cste_{2, mn}^{\pm}$ selon :

$$\begin{aligned}
\Omega_{mn}^{\pm} &= \frac{Cste_{2, mn}^{\pm}}{Cste_{1, mn}^{\pm}} = - \frac{k_{r_{mn}}^{\pm} J'_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) + i\alpha_{int} k \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 J_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h)}{k_{r_{mn}}^{\pm} Y'_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h) + i\alpha_{int} k \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm} h)} \\
&= - \frac{k_{r_{mn}}^{\pm} J'_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) - i\alpha_{ext} k \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 J_m(k_{r_{mn}}^{\pm})}{k_{r_{mn}}^{\pm} Y'_m(k_{r_{mn}}^{\pm}) - i\alpha_{ext} k \left(1 - M_0 \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{k}\right)^2 Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm})}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Finalement, les modes de conduit (m, n) peuvent donc s'écrire sous la forme générale (1.32), proposée par Rienstra [111] :

$$\begin{aligned}
p_{mn}^{\pm}(r, \varphi, z) &= A_{mn}^{\pm} \left[\cos(\tau_{mn}^{\pm}) J_m(k_{r_{mn}}^{\pm} r) + \sin(\tau_{mn}^{\pm}) e^{i\Psi_{mn}^{\pm}} Y_m(k_{r_{mn}}^{\pm} r) \right] e^{ik_{z_{mn}}^{\pm} z + im\varphi} = A_{mn}^{\pm} F_{mn}^{\pm}(k_{r_{mn}}^{\pm} r) e^{ik_{z_{mn}}^{\pm} z + im\varphi}, \\
\text{avec } \tau_{mn}^{\pm} &= \arctan |\Omega_{mn}^{\pm}|, \quad \Psi_{mn}^{\pm} = \text{phase}(\Omega_{mn}^{\pm}).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Le coefficient A_{mn}^{\pm} , *a priori* inconnu, est appelé amplitude modale et dépend de la source. Pour simplifier les écritures, la fonction $F_{mn}^{\pm}(k_{r_{mn}}^{\pm} r)$ désigne la dépendance radiale d'un mode (m,n) . La formulation (1.32) montre qu'un mode donné possède une structure d'onde stationnaire dans le sens radial, qui provient des réflexions successives sur les parois du conduit. Selon les variables z et φ , le mode obéit au contraire à un comportement ondulatoire déterminé par le terme de phase de (1.32). Si $m \neq 0$, on parle de mode 'tournant' car la propagation s'accompagne d'une rotation du champ acoustique. Pour $m=0$, en revanche, le champ est à symétrie de révolution et le mode est qualifié de 'symétrique'.

Pour déterminer complètement la forme et le comportement des modes, il nous reste désormais à résoudre le système aux valeurs propres (1.29). De manière générale, les constantes $k_{r_{mn}}^{\pm}$ et $k_{z_{mn}}^{\pm}$ sont des grandeurs complexes, fonctions des paramètres suivants : fréquence, rapport de rayon, vitesse de l'écoulement, traitements acoustiques et sens de propagation de l'onde. Dans le cas du conduit rigide, toutefois, le problème se simplifie. Les nombres d'onde radiaux $k_{r_{mn}}$ dépendent alors uniquement du rapport de rayon h et prennent des valeurs réelles positives vérifiant la relation :

$$J'_m(k_{r_{mn}} h) Y'_m(k_{r_{mn}}) - J'_m(k_{r_{mn}}) Y'_m(k_{r_{mn}} h) = 0, \quad (1.33)$$

et $k_{r_{01}} = 0$ (solution non incluse dans l'équation précédente).

Pour une valeur de m donnée, les solutions de l'équation (1.33) sont recherchées par simple dichotomie puis classées, à partir de $n=1$ ⁴, dans un ordre croissant (voir par exemple Bridge et Angrist [14]). Notons que pour n fixé, les valeurs de $k_{r_{mn}}$ augmentent également avec m .

En conduit traité, le calcul des valeurs propres est beaucoup plus compliqué. Eversman [32] a proposé une méthode de résolution élégante, basée sur le théorème des fonctions implicites et reprise à Airbus dans différentes études [77] [36]. À partir des solutions en conduit rigide, les valeurs propres du problème traité sont calculées par intégration en faisant évoluer l'admittance, de manière continue, de zéro à la valeur souhaitée. Si la méthode donne des résultats satisfaisants en conduit circulaire, des problèmes sont fréquemment observés en conduit annulaire et le schéma n'aboutit pas toujours aux valeurs recherchées. C'est pourquoi, à la demande d'AIRBUS, une nouvelle méthodologie de résolution a été développée par la société MATAP [11]. Désormais, les valeurs propres $k_{r_{mn}}^{\pm}$, solutions d'une équation $f(k_{r_{mn}}^{\pm})=0$ déduite du système (1.29), sont recherchées dans le plan complexe à l'intérieur d'un contour C donné. Dans un premier temps, l'application du théorème des résidus (voir par exemple [122]) sur ce contour permet de déterminer le nombre de racines de f , c'est à dire le nombre de valeurs propres existant dans le domaine d'étude. Celui-ci est alors maillé puis les minima locaux de $|f|$ sont calculés à partir des différents points du maillage par application d'un algorithme d'optimisation classique. Pour finir, le théorème des résidus est appliqué autour de chacun des minima pour identifier les racines de f et donc les valeurs propres du problème. Le principal intérêt de la méthode est de garantir la validité des valeurs propres calculées. Bien entendu, en début de calcul, la taille du domaine

⁴ Certains auteurs utilisent une numérotation à partir de $n=0$. Il ne s'agit là que d'une convention.

d'étude doit être suffisante pour contenir autant de valeurs propres qu'il est souhaité. Nous reviendrons au paragraphe 1.5 sur ce qu'il faut entendre par là.

Finalement, une fois les constantes de propagation $k_{r_{mn}}^{\pm}$ et $k_{z_{mn}}^{\pm}$ déterminées, la pression acoustique à l'intérieur du conduit s'exprime simplement comme une combinaison linéaire de modes se propageant dans le sens des z positifs (modes dits incidents dans notre analyse) et négatifs (modes rétrogrades ou réfléchis) :

$$p(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn}^+ F_{mn}^+(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn}^- F_{mn}^-(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right]. \quad (1.34)$$

En utilisant l'équation d'Euler linéarisée (1.16), les composantes de la vitesse acoustique s'écrivent de manière similaire :

$$\begin{aligned} v_z(r, \varphi, z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_{mn}^+ A_{mn}^+ F_{mn}^+(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_{mn}^- A_{mn}^- F_{mn}^-(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right], \\ v_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_{mn}^+ A_{mn}^+ F_{mn}^+(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_{mn}^- A_{mn}^- F_{mn}^-(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right], \\ v_r(r, \varphi, z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{mn}^+ A_{mn}^+ F_{mn}'(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{mn}^- A_{mn}^- F_{mn}'(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right], \end{aligned}$$

avec $\Lambda_{mn}^{\pm} = \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{(k - M_0 k_{z_{mn}}^{\pm})}$, $\mu_{mn}^{\pm} = \frac{m}{(k - M_0 k_{z_{mn}}^{\pm})}$, $\eta_{mn}^{\pm} = \frac{-i k_{r_{mn}}^{\pm}}{(k - M_0 k_{z_{mn}}^{\pm})}$,

et $F_{mn}'(k_{r_{mn}}^{\pm} r) = \cos(\tau_{mn}^{\pm}) J_m'(k_{r_{mn}}^{\pm} r) + \sin(\tau_{mn}^{\pm}) e^{i\Psi_{mn}^{\pm}} Y_m'(k_{r_{mn}}^{\pm} r)$. (1.35)

Afin d'illustrer la structure modale du champ acoustique, la distribution de pression sur une section de conduit rigide, relative à différents modes, est représentée sur la figure 1.2. Du fait de la dépendance en $e^{im\varphi}$, l'ordre azimutal des modes correspond au nombre de périodes sur la circonférence du conduit. L'ordre radial est lié, quant à lui, au nombre de nœuds de pression sur un rayon (égal à $n-1$ pour notre convention).

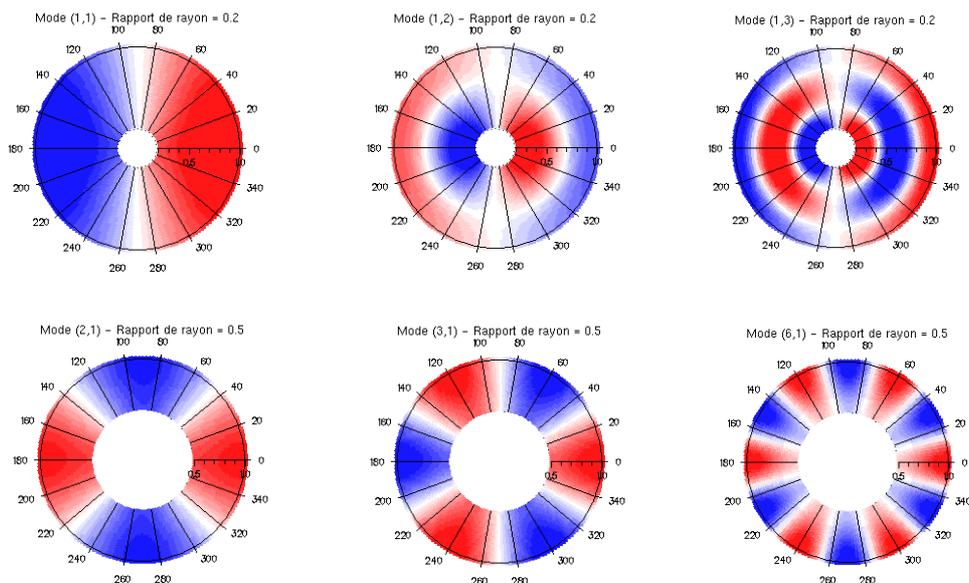


Figure 1.2 : Modes de conduit rigide : distribution du champ de pression (partie réelle) sur une section de conduit. Rapports de rayon $h=0.2$ et $h=0.5$.

1.4.2 Phénomène de coupure et atténuation

En conduit rigide, comme nous l'avons mentionné, les constantes de propagation radiales sont des grandeurs réelles positives croissant à la fois avec l'ordre radial n et l'ordre azimutal m . En conséquence, pour une valeur donnée de la fréquence réduite k , il existe un nombre limité de modes (m,n) satisfaisant la relation (1.36) :

$$k_{r_{mn}} (1 - M_0^2) = k_{c_{mn}} < k . \quad (1.36)$$

$k_{c_{mn}}$ définit la fréquence de coupure réduite du mode (m,n) . Si elle est effectivement inférieure à la fréquence réduite k , la constante de propagation axiale $k_{z_{mn}}^{\pm}$ est réelle (cf (1.29)) et le mode se propage le long du conduit avec une amplitude constante, c'est-à-dire sans atténuation. On dit alors que le mode est passant. Lorsque la fréquence de coupure est supérieure à la fréquence d'étude, la constante de propagation axiale devient imaginaire pure (hormis la partie convective liée à l'écoulement) et l'amplitude du mode décroît depuis la source de manière exponentielle selon z . On parle dans ce cas de mode évanescent, ou de mode coupé. Plus la fréquence de coupure augmente et plus la décroissance du mode évanescent est rapide. Au-delà d'une certaine distance dans la direction de propagation, la contribution des modes évanescents devient donc négligeable et le champ acoustique peut s'exprimer de manière satisfaisante en fonction des modes passants uniquement.

Dans le cas d'un conduit alternativement rigide et traité (figure 1.1), cependant, il n'est pas toujours possible de négliger la contribution des modes évanescents. En effet, bien qu'ils ne transportent aucune énergie acoustique, les modes évanescents influencent les redistributions modales se produisant aux ruptures d'impédance entre les modes de conduit rigide et les modes de conduit traité (voir paragraphe 1.5). Ainsi, Lidoine [65] a montré que,

dans certains cas, la prise en compte de deux ou trois modes radiaux évanescents pouvait améliorer la modélisation de la propagation acoustique et les bilans énergétiques aux interfaces. Dans notre modèle analytique, nous effectuerons donc une troncature modale du champ acoustique en considérant les différents modes passants et, pour chaque mode azimutal, les premiers modes radiaux évanescents si nécessaires.

Comme le montre la relation (1.36), le nombre de modes passants dépend de la fréquence d'étude, de l'écoulement et du rapport de rayon puisque la constante $k_{r_{mn}}$ évolue elle-même avec h (cf. (1.33)). S'il apparaît clairement que l'écoulement abaisse les fréquences de coupure et tend donc à favoriser la propagation d'un plus grand nombre de modes, l'influence du rapport de rayon est plus délicate à évaluer *a priori*. A titre d'exemple, la figure 1.3 donne l'évolution des constantes de propagation $k_{r_{mn}}$, en fonction du rapport de rayon, pour les premiers modes radiaux à $m=3$ et $m=10$. A l'exception du cas $n=1$ et au-delà d'une zone de faible évolution suivie d'une légère décroissance, les constantes $k_{r_{mn}}$ augmentent avec h , de sorte que le nombre de modes passants diminue généralement avec la hauteur du canal⁵. Quelle que soit la configuration étudiée, par ailleurs, notons que le mode (0,1), ou mode plan, est toujours passant ($k_{r_{01}} = 0$).

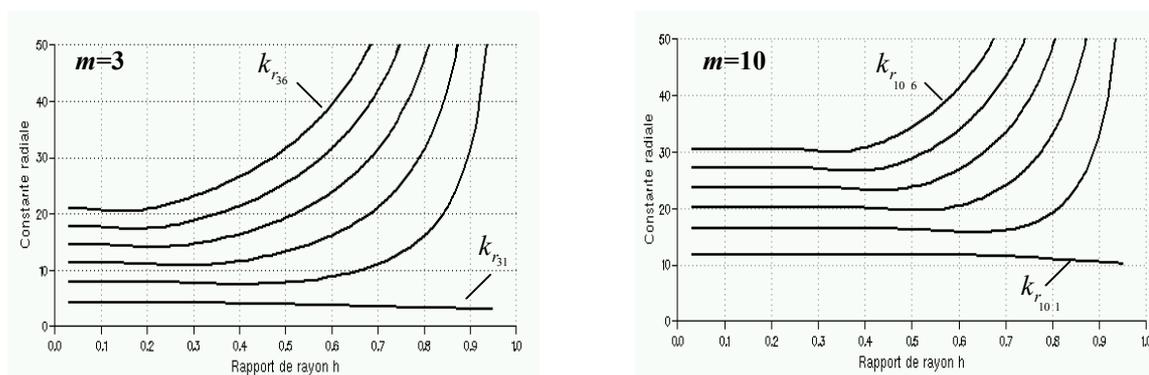


Figure 1.3 : Évolution des constantes de propagation $k_{r_{mn}}$ avec le rapport de rayon h .

En conduit traité, la notion de coupure décrite précédemment n'est plus valable. Toutes les constantes de propagation axiales comportent une partie réelle propagative et une partie imaginaire, responsable d'un phénomène d'atténuation. Selon la valeur de la partie imaginaire, toutefois, l'atténuation des modes est plus ou moins importante et en pratique, il est possible de limiter le nombre de modes à prendre en compte pour obtenir une description satisfaisante du champ acoustique. Ce comportement étend la notion de coupure. Il est à noter que, physiquement, il n'existe pas de lien réel entre un mode de conduit rigide (m,n) et son analogue en conduit traité. Par ailleurs, les valeurs propres étant complexes, la numérotation des modes en conduit traité est beaucoup moins naturelle qu'en conduit rigide puisqu'il est possible de classer les modes selon différents critères : partie réelle, partie imaginaire ou norme des valeurs propres... Pour une valeur de m donnée, nous avons choisi pour notre part de numérotter les modes en fonction de leur atténuation croissante (partie imaginaire croissante de $k_{z_{mn}}^{\pm}$).

⁵ Dans ce mémoire, nous définirons la hauteur de canal comme étant la distance entre les parois interne et externe du conduit $\bar{R}_{ext} - \bar{R}_{int}$.

1.4.3 Forme radiale des modes de conduit rigide : zone de propagation forte et zone de propagation faible

Dans le modèle analytique, ainsi que dans les approches numériques et géométriques suivies ensuite, les sources acoustiques sont traduites par des modes incidents à partir d'une section de conduit rigide (surface Γ , figure 1.1). Aussi, pour comprendre les phénomènes de propagation et de rayonnement acoustiques présentés dans les pages qui suivent, il peut être intéressant d'étudier plus en détail la forme d'un mode et son comportement dans le conduit. Nous débutons dans ce paragraphe par une analyse du profil d'amplitude radiale des modes en conduit rigide. En reprenant la terminologie de l'approximation géométrique exposée au paragraphe 1.4.4, nous introduisons tout d'abord le rayon caustique du mode (m,n) défini par le rapport (on suppose ici que $m \neq 0$) :

$$r_{c_{mn}} = \frac{|m|}{k_{r_{mn}}}. \quad (1.37)$$

En invoquant les propriétés des fonctions de Bessel, on peut montrer que ce rayon est toujours inférieur au rayon externe du conduit ($r_{c_{mn}} < 1$ en notation adimensionnelle). En conséquence, la formulation (1.32) d'un mode (m,n) se réécrit :

$$\begin{aligned} p_{mn}^{\pm}(r, \varphi, z) &= A_{mn}^{\pm} \left(\cos(\tau_{mn}) J_m\left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}}\right) + \sin(\tau_{mn}) e^{i\Psi_{mn}} Y_m\left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}}\right) \right) e^{ik_{z_{mn}} z + im\varphi}, \\ &= A_{mn}^{\pm} F_{mn}\left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}}\right) e^{ik_{z_{mn}} z + im\varphi}, \end{aligned}$$

avec : $e^{i\Psi_{mn}} = 1$ si $\Omega_{mn} > 0$ et $e^{i\Psi_{mn}} = -1$ si $\Omega_{mn} < 0$ (conduit rigide). (1.38)

L'intérêt de cette approche est de dissocier deux zones de conduit selon la valeur du rapport $r/r_{c_{mn}}$. Pour $r > r_{c_{mn}}$, les fonctions de Bessel intervenant dans la forme radiale ont un argument supérieur à leur indice m , ce qui se traduit par un comportement oscillant de la fonction propre $F_{mn}\left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}}\right)$, d'amplitude non négligeable. Lorsque $r < r_{c_{mn}}$, en revanche, la fonction $F_{mn}\left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}}\right)$ décroît de manière exponentielle depuis le rayon caustique jusqu'à la paroi interne et son amplitude est limitée. On parlera alors d'une zone de propagation forte ($r > r_{c_{mn}}$), dans laquelle se concentre la majeure partie de l'énergie acoustique, et d'une zone de propagation faible ($r < r_{c_{mn}}$) où l'énergie est beaucoup moins importante. Si la première région ($r > r_{c_{mn}}$) est présente quels que soient le mode et la géométrie considérés, la seconde ($r < r_{c_{mn}}$) n'apparaît qu'à la condition $h < r_{c_{mn}}$. Ces résultats sont illustrés sur la figure 1.4 dans le cas du mode $(9,5)$ ($r_{c_{mn}} = 0.35$), pour les rapports de rayon $h = 0.05$ et $h = 0.6$.

Dans le cas des modes $(0,n)$, la définition du rayon caustique n'a plus de sens physique. Il est possible toutefois de généraliser l'analyse précédente en notant que seule la zone de propagation forte est alors présente.

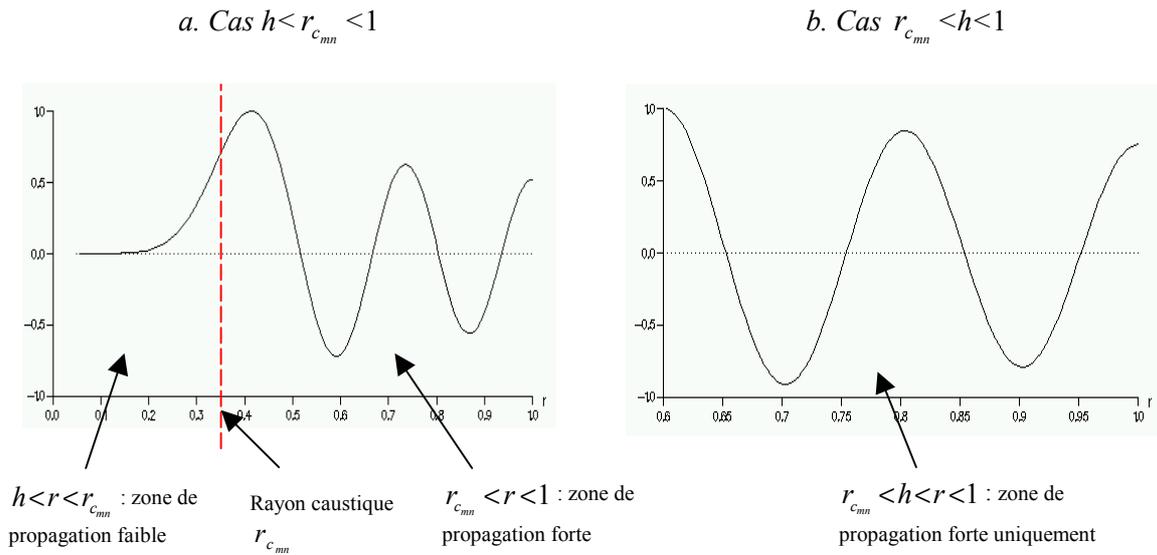


Figure 1.4 : Profil radial des modes de conduit rigide (fonction F_{mn} normalisée) : zone de propagation forte et zone de propagation faible. Mode (9,5), 1.4.a : $h=0.05$, 1.4.b : $h=0.6$.

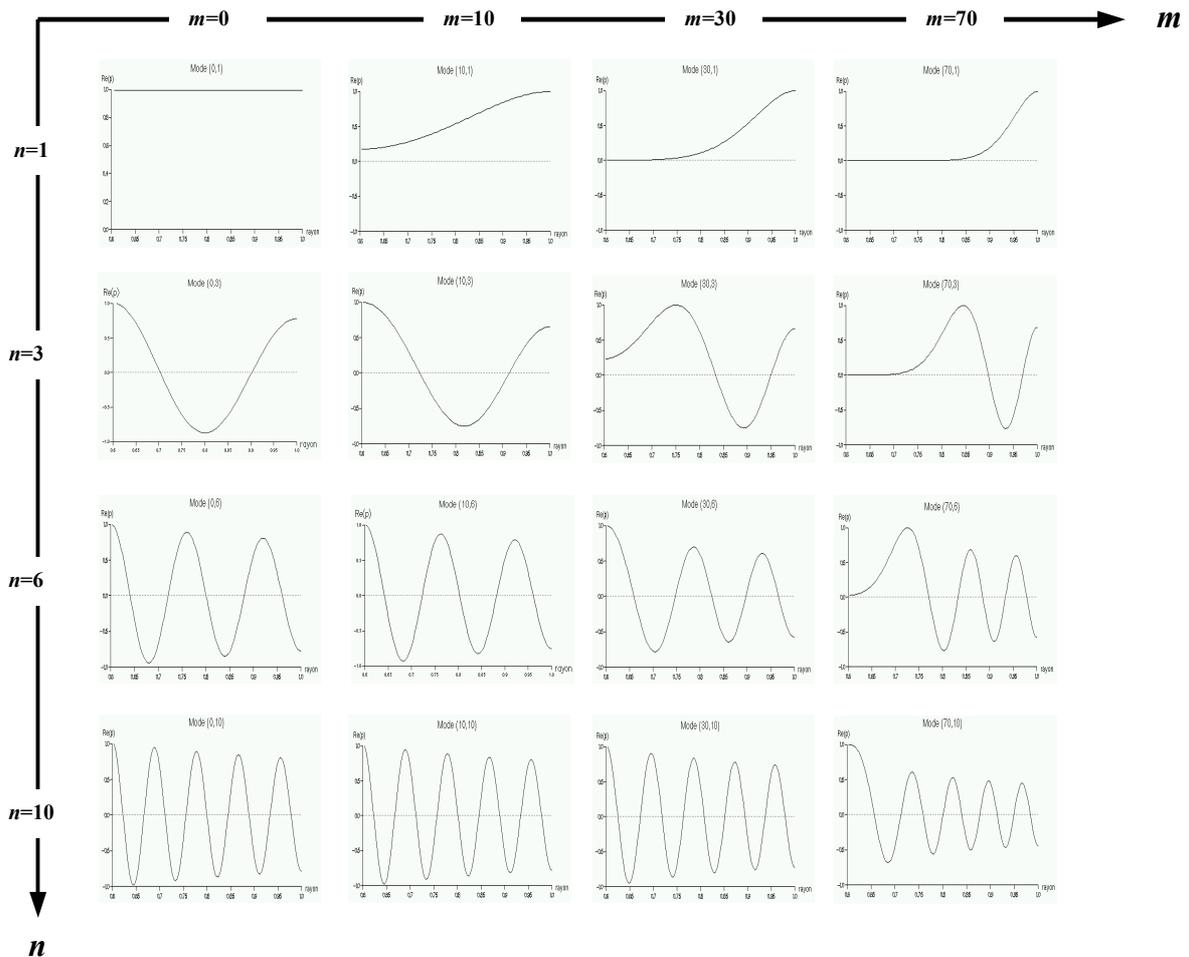


Figure 1.5 : Profil radial des modes de conduit rigide : évolution en fonction des ordres azimutal et radial pour un rapport de rayon $h=0.6$.

De manière générale, du fait de l'existence ou non de la zone de propagation faible, l'énergie des modes est donc soit répartie sur toute la hauteur du canal, soit localisée à l'intérieur d'un domaine plus restreint s'étendant à partir de la paroi externe. Pour une géométrie de conduit donnée ($h=0.6$), la figure 1.5 illustre l'évolution du profil radial des modes en fonction de l'ordre azimutal et de l'ordre radial. Deux conclusions peuvent être formulées :

- Lorsque l'ordre azimutal m augmente, la zone énergétique des modes se concentre sur une région de plus en plus étroite à proximité de la paroi externe.
- Lorsque l'ordre radial n augmente, la largeur de la zone énergétique tend au contraire à augmenter, pour occuper toute la largeur du conduit.

Ces conclusions nous seront très utiles pour analyser les différences de comportement entre les modes, que ce soit en terme d'atténuation par les traitements acoustiques ou en terme de rayonnement. Intuitivement, on peut prévoir qu'un corps central entièrement inclus dans la zone de propagation faible n'a que peu d'influence sur la structure du champ sonore associé à un mode.

1.4.4 Description des modes de conduit rigide en termes de rayons

Pour visualiser le comportement d'un mode à l'intérieur du conduit, il peut être parfois plus parlant d'utiliser une approche géométrique du problème décrivant la propagation acoustique en termes de rayons, c'est-à-dire en termes de chemins de propagation. Le formalisme de l'approximation géométrique, valable à haute fréquence, est rappelé au chapitre 2. De manière assez intuitive, toutefois, et pour faciliter l'analyse des résultats dans la suite du mémoire, nous nous proposons d'introduire dès à présent l'interprétation des modes sous forme de rayons. Le modèle proposé ci-dessous s'appuie très largement sur la théorie de Chapman [24] [25] établie en conduit circulaire et adaptée ici à une géométrie annulaire.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas d'un mode passant en conduit rigide, sans écoulement. Pour ne pas induire de confusion entre les différentes ondes, nous supposons par ailleurs que le mode se propage dans le sens des $z > 0$ (la propagation vers les $z < 0$ est évidemment identique). On introduit tout d'abord les angles suivants :

- l'angle d'incidence θ_{mn} , défini sur $]0, \pi/2[$:

$$\sin(\theta_{mn}) = \frac{k_{r_{mn}}}{k}. \quad (1.39)$$

- l'angle d'enroulement φ_{mn} , défini sur $]-\pi/2, \pi/2[$

$$\sin(\varphi_{mn}) = \frac{m}{k_{r_{mn}}}. \quad (1.40)$$

En considérant la définition du rayon caustique (1.37), la forme d'un mode de conduit (m,n) se réécrit, pour $m \neq 0$:

$$p_{mn}(r, \varphi, z) = A_{mn} \left(\cos(\tau_{mn}) J_m \left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}} \right) + \sin(\tau_{mn}) e^{i\Psi_{mn}} Y_m \left(|m| \frac{r}{r_{c_{mn}}} \right) \right) e^{ik \cos \theta_{mn} z + im\varphi},$$

$$(e^{i\Psi_{mn}} = 1 \text{ si } \Omega_{mn} > 0 \text{ et } e^{i\Psi_{mn}} = -1 \text{ si } \Omega_{mn} < 0).$$
 (1.41)

Analyse en zone de propagation forte ($r_{c_{mn}} \ll r < 1$)

Dans la zone de propagation forte, l'argument des fonctions de Bessel étant supérieur à leur ordre, il est possible de tirer bénéfice des approximations de Debye définies par (cf. [2, §9.33]) :

$$J_m \left(\frac{m}{\cos \psi} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m \tan \psi}} \cos(m \tan \psi - m \psi - \pi/4),$$

$$Y_m \left(\frac{m}{\cos \psi} \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m \tan \psi}} \sin(m \tan \psi - m \psi - \pi/4).$$
 (1.42)

Ces expressions ne sont validées *a priori* que pour des valeurs de m « suffisamment grandes » mais les études numériques de Chapman montrent que les approximations de Debye sont en réalité valables quel que soit l'ordre azimutal m , si l'on ne se situe pas trop près du rayon caustique. Aussi, en définissant l'angle de Debye ψ selon $\cos \psi = r_{c_{mn}} / r$ et le rayon local r_{loc} selon $r_{loc} = \sqrt{r^2 - r_{c_{mn}}^2}$, la combinaison des expressions (1.42) et de la formulation (1.41) permet de définir la solution approchée des modes de conduit (1.43) :

$$p_{mn} \sim p_{mn}^1 + p_{mn}^2, \quad \text{avec :}$$

$$p_{mn}^1 = A_{mn} \sqrt{\frac{r_{c_{mn}}}{2\pi |m| r_{loc}}} e^{i \left\{ m \left(\frac{r_{loc}}{r_{c_{mn}}} - \psi \right) - \frac{\pi}{4} - |\tau_{mn}| \right\}} e^{ik \cos \theta_{mn} z} e^{im\varphi},$$

$$p_{mn}^2 = A_{mn} \sqrt{\frac{r_{c_{mn}}}{2\pi |m| r_{loc}}} e^{-i \left\{ m \left(\frac{r_{loc}}{r_{c_{mn}}} - \psi \right) - \frac{\pi}{4} - |\tau_{mn}| \right\}} e^{ik \cos \theta_{mn} z} e^{im\varphi}.$$
 (1.43)

(La valeur absolue $|\tau_{mn}|$ apparaît en considérant le signe de $e^{i\Psi_{mn}}$ dans (1.41)).

L'intérêt de cette écriture est de dissocier, dans l'expression de la pression locale, un terme d'amplitude et un terme de phase. Le premier variant lentement devant le second à haute fréquence, on se retrouve alors précisément dans le cadre de l'approximation géométrique de l'acoustique, ce qui permet d'interpréter le résultat en termes de rayons. Par conséquent, les solutions approchées (1.43) montrent qu'en chaque point P de la zone de propagation forte passent deux rayons caractérisés par les vecteurs d'onde locaux $\vec{K}^{1,2}$.

$$\vec{K}^{1,2} = \pm m \sqrt{\frac{1}{r_{c_{mn}}^2} - \frac{1}{r^2}} \vec{e}_r + \frac{m}{r} \vec{e}_\varphi + k \cos \theta_{mn} \vec{e}_z, \quad \text{avec } |\vec{K}^{1,2}| = k.$$
 (1.44)

Ces vecteurs correspondent aux directions de propagation des rayons et sont déterminés en considérant le gradient du terme de phase dans les solutions p_{mn}^1 et p_{mn}^2 . De manière directe, on vérifie que l'angle des vecteurs d'onde par rapport à l'axe du conduit est égal à θ_{mn} , d'où sa dénomination d'angle d'incidence. D'après la relation (1.39), l'incidence des modes par rapport à l'axe du conduit augmente donc avec le paramètre de coupure.⁶ Géométriquement, les directions de propagation selon \vec{e}_r et \vec{e}_φ sont un peu plus délicates à interpréter car elles dépendent de la position du point de calcul. En reprenant l'analyse de Chapman, toutefois, on peut montrer que chacun des rayons se propage en fait le long de plans tangents à la surface caustique définie par $r = r_{c_{mn}}$. Selon le type de mode considéré, ou plus précisément selon les valeurs relatives des rayons interne et caustique, on aboutit alors à deux schémas de propagation (figure (1.6)). Si $r_{c_{mn}} > h$, les plans tangents à la surface caustique n'ont aucune intersection avec la paroi interne du conduit de sorte que les rayons se propagent sans rencontrer le corps central. Ils se concentrent dans ce cas à proximité de la paroi externe, dans la zone de propagation forte, ce qui se traduit par une propagation hélicoïdale par segments de droite tout à fait équivalente à ce que l'on observe en conduit circulaire (figure 1.6.a). Si $r_{c_{mn}} < h$, en revanche, les tangentes au rayon caustique coupent le corps central. Les rayons se propagent donc en se réfléchissant à la fois sur la paroi interne et la paroi externe du conduit, ce qui se traduit par une propagation hélicoïdale « en étoile » (figure 1.6.b). Dans la suite, pour dissocier ces deux cas de figure, nous parlerons respectivement de « mode à caustique apparente » et de « mode à caustique masquée ». Notons que, dans chacun des cas, l'angle φ_{mn} (1.40) correspond, au niveau de la paroi externe, à l'angle de la projection des rayons acoustiques sur une section droite avec le rayon du conduit. En ce sens, φ_{mn} constitue une mesure de « l'enroulement » associé à la propagation modale.

Analyse en zone de propagation faible ($h < r < r_{c_{mn}}$)

Ce paragraphe concerne uniquement les modes à caustique apparente. Dans la zone $h < r < r_{c_{mn}}$, l'argument des fonctions de Bessel intervenant dans l'expression modale (1.41) est inférieur à l'ordre m . Les approximations de Debye utilisées sont alors, pour m positif :

$$J_m\left(\frac{m}{\cosh \zeta}\right) \sim \frac{e^{m(\tanh \zeta - \zeta)}}{\sqrt{2\pi m \tanh \zeta}},$$

$$Y_m\left(\frac{m}{\cosh \zeta}\right) \sim \frac{e^{m(\zeta - \tanh \zeta)}}{\sqrt{(\pi/2) m \tanh \zeta}}. \quad (1.45)$$

En définissant l'angle ζ selon : $\cosh \zeta = r_{c_{mn}}/r$, l'insertion des approximations de Debye dans la forme modale (1.41) aboutit à :

⁶ Nous appellerons dans la suite « taux de coupure » le rapport de la fréquence de coupure d'un mode (cf. page 26) sur la fréquence d'étude : $k_{c_{mn}}/k$. Si ce rapport est inférieur à 1, le mode est passant ; dans le cas contraire, il est évanescent.

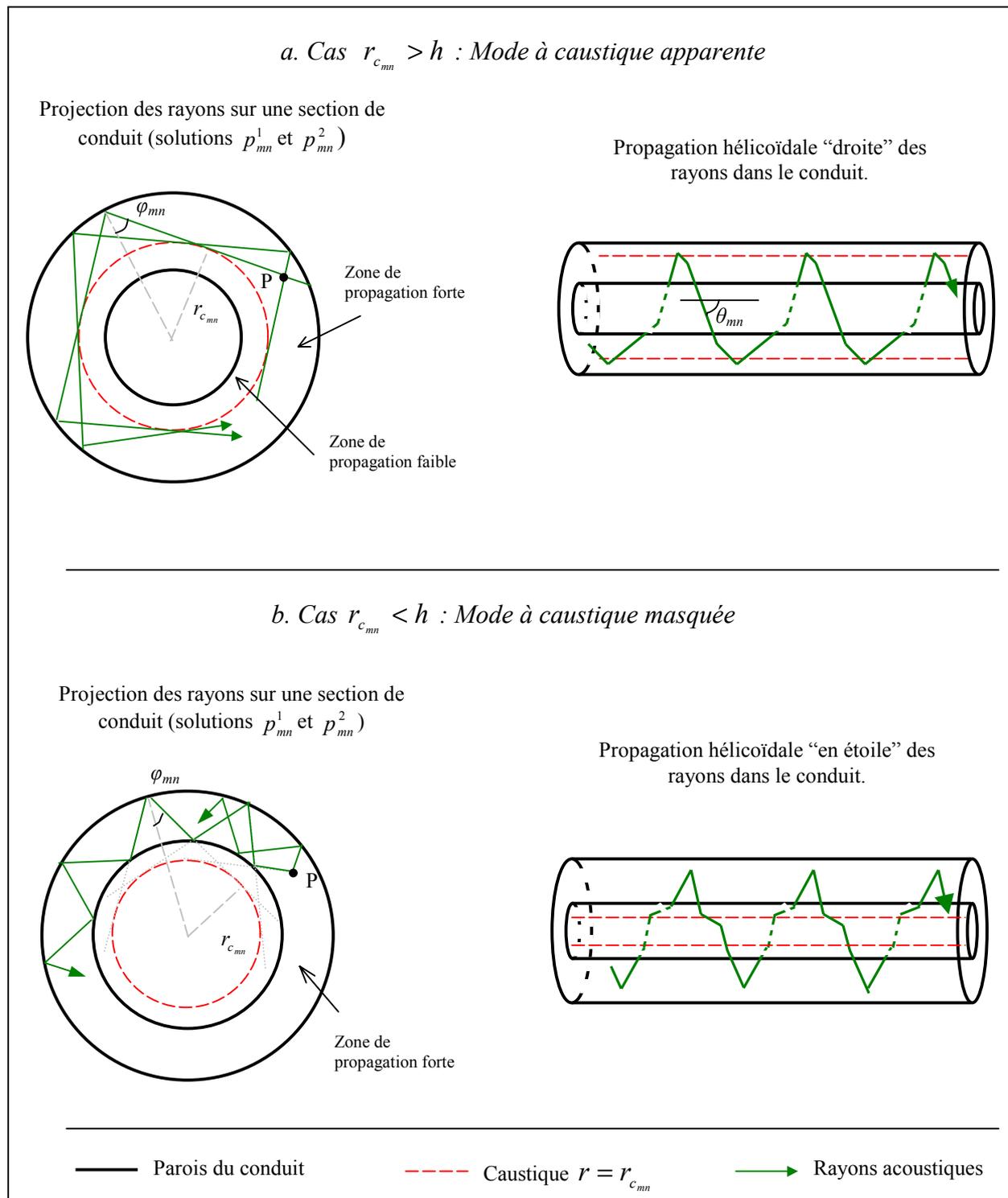


Figure 1.6 : Interprétation géométrique de la propagation des modes de conduit en terme de rayons. Zone de propagation forte.

$$p \sim A_{mn} \sqrt{\frac{r_{c_{mn}}}{r_{loc} |m| \pi}} \left(\frac{\cos \tau_{mn}}{\sqrt{2}} e^{m \left(\frac{r_{loc}}{r_{c_{mn}}} - \zeta \right)} + \sqrt{2} \sin \tau_{mn} e^{m \left(\zeta - \frac{r_{loc}}{r_{c_{mn}}} \right)} \right) e^{ik \cos \theta_{mn} z + im \varphi},$$

avec :

$$r_{loc} = \sqrt{r_{c_{mn}}^2 - r^2}. \quad (1.46)$$

La pression modale apparaît à nouveau comme la somme de deux ondes mais dont la phase, cette fois, ne dépend plus de la variable r . Chapman [24] [25] parle alors d'ondes non homogènes se propageant dans un milieu stratifié, avec des rayons s'enroulant autour de cylindres à r constant. Un calcul énergétique montre toutefois que ces ondes ne véhiculent qu'une très faible part de l'énergie acoustique. Nous ne chercherons pas ici à décrire de façon plus détaillée le comportement du champ acoustique en zone de propagation faible.

1.5 Formulation matricielle de la propagation acoustique en présence de discontinuités d'impédance

Dans le paragraphe précédent a été exprimée la forme du champ acoustique en conduit annulaire rigide ou traité. Afin de modéliser la propagation du son dans un conduit constitué de différents tronçons (Σ^R) et (Σ^T) (figure 1.1), il reste maintenant à déterminer les relations de passage aux discontinuités d'impédance.

1.5.1 Méthode de raccordement modal aux discontinuités d'impédance

Le passage d'une rupture d'impédance s'accompagne d'une modification des conditions aux limites sur une section de conduit. La structure du champ acoustique de part et d'autre de l'interface étant différente, les modes incidents sur la discontinuité ne peuvent être conservés sans modification. Des redistributions modales sous la forme de réflexions et de transmissions se produisent donc entre les modes du tronçon rigide et les modes du tronçon traité (voir Zorumski, [135]). Tant que la symétrie de révolution du problème est conservée, toutefois, les recompositions ne sont possibles qu'entre modes de même ordre azimutal m et sont gouvernées par les conditions de continuité des grandeurs azimutales. Pour une interface située à l'abscisse z et pour un ordre azimutal m donné, on écrit donc :

$$\begin{aligned} p_m^R(r, \varphi, z) &= p_m^T(r, \varphi, z), \\ v_{z_m}^R(r, \varphi, z) &= v_{z_m}^T(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Les exposants R et T désignent le caractère rigide ou traité des zones de conduit. En reprenant les écritures modales des champs de pression et de vitesse acoustiques (1.34) et (1.35), nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [A_{mn}^{+R}(z) + A_{mn}^{-R}(z)] F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn}^{+T}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + A_{mn}^{-T}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\Lambda_{mn}^{+R} A_{mn}^{+R}(z) + \Lambda_{mn}^{-R} A_{mn}^{-R}(z)] F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_{mn}^{+T} A_{mn}^{+T}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + \Lambda_{mn}^{-T} A_{mn}^{-T}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r),$$
(1.48)

avec : $A_{mn}^{\pm R}(z) = A_{mn}^{\pm R} e^{ik_{z_{mn}}^{\pm R} z}$ et $A_{mn}^{\pm T}(z) = A_{mn}^{\pm T} e^{ik_{z_{mn}}^{\pm T} z}$, les amplitudes des modes à l'abscisse z .

Pour résoudre pratiquement le système d'équations (1.48), il est nécessaire d'effectuer une troncature sur l'ensemble des modes de façon à conserver un nombre fini d'inconnues A_{mn}^{\pm} de part et d'autre de la discontinuité. Dans le tronçon rigide, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.2, la prise en compte des modes passants et de quelques modes évanescents est suffisante pour assurer une bonne description du champ acoustique. Dans les équations de continuité (1.48), on conserve donc $N(m)$ modes radiaux définis par :

$$N(m) = N_{passant}(m) + N_e(m) \quad (1.49)$$

$N_{passant}(m)$ est le nombre de modes radiaux passants à l'ordre azimutal m et $N_e(m)$ le nombre de modes évanescents choisi pour le calcul. Dans le tronçon traité, la troncature du champ acoustique est *a priori* plus problématique. En effet, bien que les modes soient atténués, ils possèdent tous une composante propagative et sont donc susceptibles de transporter de l'énergie (contrairement aux modes coupés du tronçon rigide). Négliger certains modes, même fortement atténués, peut donc avoir pour conséquence de négliger une part de l'énergie transmise dans la partie traitée. En pratique, cependant, on constate que les échanges entre les deux tronçons font intervenir de façon dominante les modes de conduit traité les moins atténués et l'on effectue une troncature modale équivalente à celle du conduit rigide, sur les $N(m)$ premiers modes radiaux :

$$\sum_{n=1}^{N(m)} [A_{mn}^{+R}(z) + A_{mn}^{-R}(z)] F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) = \sum_{n=1}^{N(m)} A_{mn}^{+T}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + A_{mn}^{-T}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r),$$

$$\sum_{n=1}^{N(m)} [\Lambda_{mn}^{+R} A_{mn}^{+R}(z) + \Lambda_{mn}^{-R} A_{mn}^{-R}(z)] F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) = \sum_{n=1}^{N(m)} \Lambda_{mn}^{+T} A_{mn}^{+T}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + \Lambda_{mn}^{-T} A_{mn}^{-T}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r).$$
(1.50)

Afin d'isoler les composantes modales du tronçon rigide, on utilise ensuite les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres F_{mn}^R (1.51) (voir [2] [112]) qui, combinées au produit scalaire $\int_h^1 (1.50).F_{mp}^R(k_{r_{mp}}^R r) r dr$, conduisent aux équations (1.52) :

$$\int_h^1 F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) F_{mp}^R(k_{r_{mp}}^R r) r dr = Y_{mp} \delta_{np}, \quad (1.51)$$

$$\text{où } Y_{mp} = \int_h^1 (F_{mp}^R(k_{r_{mp}}^R r))^2 r dr = \left[\frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{m^2}{(k_{r_{mp}}^R)^2} \right) (F_{mp}^R(k_{r_{mp}}^R r))^2 \right]_h^1,$$

et δ_{np} est le symbole de Kronecker.

$$\forall p \in [1, N(m)] :$$

$$\left(A_{mp}^{+R}(z) + A_{mp}^{-R}(z) \right) Y_{mp} = \sum_{n=1}^{N(m)} \left(A_{mn}^{+T}(z) S_{mnp}^+ + A_{mn}^{-T}(z) S_{mnp}^- \right), \quad (1.52)$$

$$\left(\Lambda_{mp}^{+R} A_{mp}^{+R}(z) + \Lambda_{mp}^{-R} A_{mp}^{-R}(z) \right) Y_{mp} = \sum_{n=1}^{N(m)} \left(\Lambda_{mn}^{+T} A_{mn}^{+T}(z) S_{mnp}^+ + \Lambda_{mn}^{-T} A_{mn}^{-T}(z) S_{mnp}^- \right),$$

avec : $S_{mnp}^{\pm} = \int_h^1 F_{mn}^{\pm T}(k_{r_{mn}}^{\pm T} r) F_{mp}^R(k_{r_{mp}}^R r) r dr$.

Le système (1.52) se réécrit sous la forme matricielle (1.53) :

$$\begin{pmatrix} A_{mp}^{+R}(z) \\ A_{mp}^{-R}(z) \end{pmatrix}_{p \in [1, N(m)]} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Lambda_{mn}^{+T} - \Lambda_{mp}^{-R}}{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mp}^{-R}} \cdot \frac{S_{mnp}^+}{Y_{mp}} & \frac{\Lambda_{mn}^{-T} - \Lambda_{mp}^{-R}}{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mp}^{-R}} \cdot \frac{S_{mnp}^-}{Y_{mp}} \\ \frac{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mn}^{+T}}{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mp}^{-R}} \cdot \frac{S_{mnp}^+}{Y_{mp}} & \frac{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mn}^{-T}}{\Lambda_{mp}^{+R} - \Lambda_{mp}^{-R}} \cdot \frac{S_{mnp}^-}{Y_{mp}} \end{pmatrix}}_{M(\alpha_{int}, \alpha_{ext})} \begin{pmatrix} A_{mn}^{+T}(z) \\ A_{mn}^{-T}(z) \end{pmatrix}_{n \in [1, N(m)]} \quad (1.53)$$

Nous obtenons ainsi la matrice de passage $M(\alpha_{int}, \alpha_{ext})$ entre un tronçon de conduit rigide et un tronçon traité. Il est important de noter que l'orthogonalité des fonctions propres F_{mn}^R (1.51) est nécessaire à l'obtention de la formulation matricielle et n'est valable qu'en conduit rigide. Par conséquent, le modèle analytique ne peut considérer le cas de deux tronçons consécutifs caractérisés des traitements différents mais seulement une alternance de parties rigides et de parties traitées. Ce type de configuration, néanmoins, est représentatif de ce que l'on rencontre en réalité dans la mesure où des traitements différents sont séparés par des jonctions rigides.

1.5.2 Couplage des discontinuités, calcul matriciel global

Une fois la relation de passage aux discontinuités d'impédance établie, le calcul de la propagation acoustique dans un conduit alternativement rigide et traité (figure 1.1) s'obtient par simple multiplication matricielle. Tout d'abord, en considérant un tronçon traité (Σ^T) débutant en $z^{T,i}$, de longueur $L^{T,i}$ et caractérisé par les admittances réduites α_{int}^i et α_{ext}^i , l'équation (1.53) et son inverse relient les amplitudes modales rigides $A_{mn}^{\pm R, i}$ et $A_{mn}^{\pm R, (i+1)}$ en amont et en aval de la zone traitée (1.54) :

$$\begin{bmatrix} \left(A_{mn}^{+R, (i+1)} \right)_{n \in [1, N(m)]} \\ \left(A_{mn}^{-R, (i+1)} \right)_{n \in [1, N(m)]} \end{bmatrix} = H^i \begin{bmatrix} \left(A_{mn}^{+R, i} \right)_{n \in [1, N(m)]} \\ \left(A_{mn}^{-R, i} \right)_{n \in [1, N(m)]} \end{bmatrix},$$

$$\text{avec : } H^i = [E^R(z^{T,i} + L^{T,i})]^{-1} \cdot [M(\alpha_{int}^i, \alpha_{ext}^i)] [E^T(L^{T,i})] [M(\alpha_{int}^i, \alpha_{ext}^i)]^{-1} \cdot [E^R(z^{T,i})],$$

$$\text{et : } [E^{R/T}(z)] = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{ik_{z_{mn}}^{+R/T} z} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z_{mn}}^{-R/T} z} \end{pmatrix} & n \in [1, N(m)] \\ \begin{pmatrix} 0 & e^{ik_{z_{mn}}^{-R/T} z} \\ e^{ik_{z_{mn}}^{+R/T} z} & 0 \end{pmatrix} & n \in [1, N(m)] \end{cases} \quad (1.54)$$

Lorsque le conduit se compose de plusieurs tronçons traités, la multiplication des relations (1.54) aboutit à une formulation matricielle du type :

$$\begin{pmatrix} (A_{mn}^{+f})_{n \in [1, N(m)]} \\ (A_{mn}^{-f})_{n \in [1, N(m)]} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} (A_{mn}^{+\Gamma})_{n \in [1, N(m)]} \\ (A_{mn}^{-\Gamma})_{n \in [1, N(m)]} \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

où les exposants Γ et f renvoient respectivement aux première et dernière portions de conduit rigides, à proximité de la source et de la section de sortie. Dans notre modèle, les données d'entrée du problème sont les amplitudes modales incidentes $A_{mn}^{+\Gamma}$. Les composantes des champs transmis et réfléchis dans les différents tronçons sont à déterminer. Pour cela, toutefois, les relations de passage formulées ci-dessus ne sont pas suffisantes et il est nécessaire de fermer le système d'équations en considérant l'apport de la réflexion à la section de sortie. On introduit alors les coefficients de réflexion croisés R_{mpn} représentant, à l'extrémité du conduit, la réflexion du mode incident (m, n) sur le mode réfléchi (m, p) . La notation matricielle correspondante, avec \mathfrak{R} désignant la matrice des coefficients R_{mpn} , s'écrit :

$$(A_{mp}^{-f})_{p \in [1, N(m)]} = (R_{mpn}) (A_{mn}^{+f})_{n \in [1, N(m)]} = \mathfrak{R} (A_{mn}^{+f})_{n \in [1, N(m)]}. \quad (1.56)$$

Le calcul des coefficients de réflexion pour les deux modèles géométriques considérés sur la figure 1.1 est présenté au paragraphe suivant. Finalement, en supposant ces coefficients connus, la combinaison des équations (1.55) et (1.56) fournit les amplitudes modales réfléchies à la source et transmises en bout de conduit (1.57) :

$$\begin{aligned} (A_{mn}^{+f})_{n \in [1, N(m)]} &= [I - H_2 H_4^{-1} \mathfrak{R}]^{-1} \cdot [H_1 - H_2 H_4^{-1} H_3] (A_{mn}^{+\Gamma})_{n \in [1, N(m)]}, \\ (A_{mn}^{-\Gamma})_{n \in [1, N(m)]} &= -[H_4 - \mathfrak{R} H_2]^{-1} \cdot [H_3 - \mathfrak{R} H_1] (A_{mn}^{+\Gamma})_{n \in [1, N(m)]}, \end{aligned}$$

$$\text{en notant } H_1, H_2, H_3, \text{ et } H_4 \text{ les sous-matrices de } H \text{ selon : } H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Les amplitudes modales A_{mn}^{+f} sont de première importance puisque directement liées à l'énergie acoustique rayonnée à l'extérieur du conduit.

1.5.3 Application : matrices de réflexion et de transmission de part et d'autre d'un tronçon traité et efficacité des traitements sur parois interne et externe

Afin d'illustrer les redistributions modales aux discontinuités d'impédance, nous allons maintenant étudier les matrices de transmission et de réflexion de part et d'autre d'un tronçon traité. Le problème considéré, schématisé sur la figure 1.7, est le suivant. Pour une excitation acoustique d'intensité 100 dB⁷ portant successivement sur les différents modes radiaux $(0,n)$, on représente les intensités modales transmises au-delà d'un tronçon traité et réfléchies dans la première partie rigide (cf. schéma 1.7.a). La fréquence réduite d'étude est $k=40$. Les matrices sont données d'abord dans le cas d'un traitement sur la paroi externe uniquement ($\alpha_{ext}=0.5$, $\alpha_{int}=0$), puis pour un traitement sur les parois interne et externe ($\alpha_{ext}=0.5$, $\alpha_{int}=0.5$). Pour la première configuration (figures 1.7.b et 1.7.c), les résultats sont similaires à ceux du conduit circulaire [65]. En transmission, le mode incident $(0,n)$ a tendance à alimenter le mode correspondant au-delà de la portion traitée mais également les modes d'ordres radiaux inférieurs. Dans le cas des modes incidents $(0,3)$ et $(0,4)$, on observe de véritables 'conversions' modales puisque la transmission se fait majoritairement sur les modes $(0,2)$ et $(0,3)$ respectivement. En réflexion (figure 1.7.c), l'énergie est transportée principalement par le dernier mode radial passant $(0,6)$. De manière générale, l'atténuation liée au traitement acoustique et la réflexion dans le premier tronçon rigide augmentent avec l'ordre radial du mode incident.

A l'ordre azimutal $m=0$, quel que soit le mode radial considéré, la zone de propagation forte des modes décrite au paragraphe 1.4.3 occupe toute la largeur du conduit. En conséquence, la répartition énergétique des modes suivant le rayon n'apporte aucun éclairage sur les redistributions modales observées. L'approche géométrique en termes de rayons, en revanche, est tout à fait cohérente avec les résultats obtenus. Nous avons vu au paragraphe 1.4.4 que l'angle de propagation des modes dans le conduit augmente avec le taux de coupure : plus l'ordre radial est élevé, plus le mode incident se propage en se réfléchissant fréquemment sur les parois du conduit. Les discontinuités d'impédance sont donc de plus en plus 'visibles' et la réflexion augmente avec l'ordre radial du mode incident. De la même façon, l'efficacité du traitement acoustique est renforcée et la part d'énergie transmise se réduit. Enfin, les modes d'ordre radial élevé étant fortement atténués à l'intérieur de la zone traitée, il n'est pas surprenant que la transmission se fasse majoritairement sur les premiers ordres radiaux.

Lorsque l'on considère un traitement acoustique à la fois sur la paroi interne et la paroi externe du conduit, les observations précédentes restent globalement valables mais une composante nouvelle apparaît : que ce soit en terme de transmission ou de réflexion, on constate parfois (figures 1.7.d et 1.7.e) que l'énergie incidente est redistribuée de façon privilégiée sur les modes d'ordres radiaux de même parité que celle du mode incident. Ce phénomène, cependant, n'est pas observé de manière systématique et une étude plus approfondie mériterait aujourd'hui d'être menée pour interpréter ces différents types de comportement...

⁷ L'intensité modale I_{mn} utilisée tout au long de ce mémoire, en présence d'un écoulement uniforme, est définie en annexe 1.

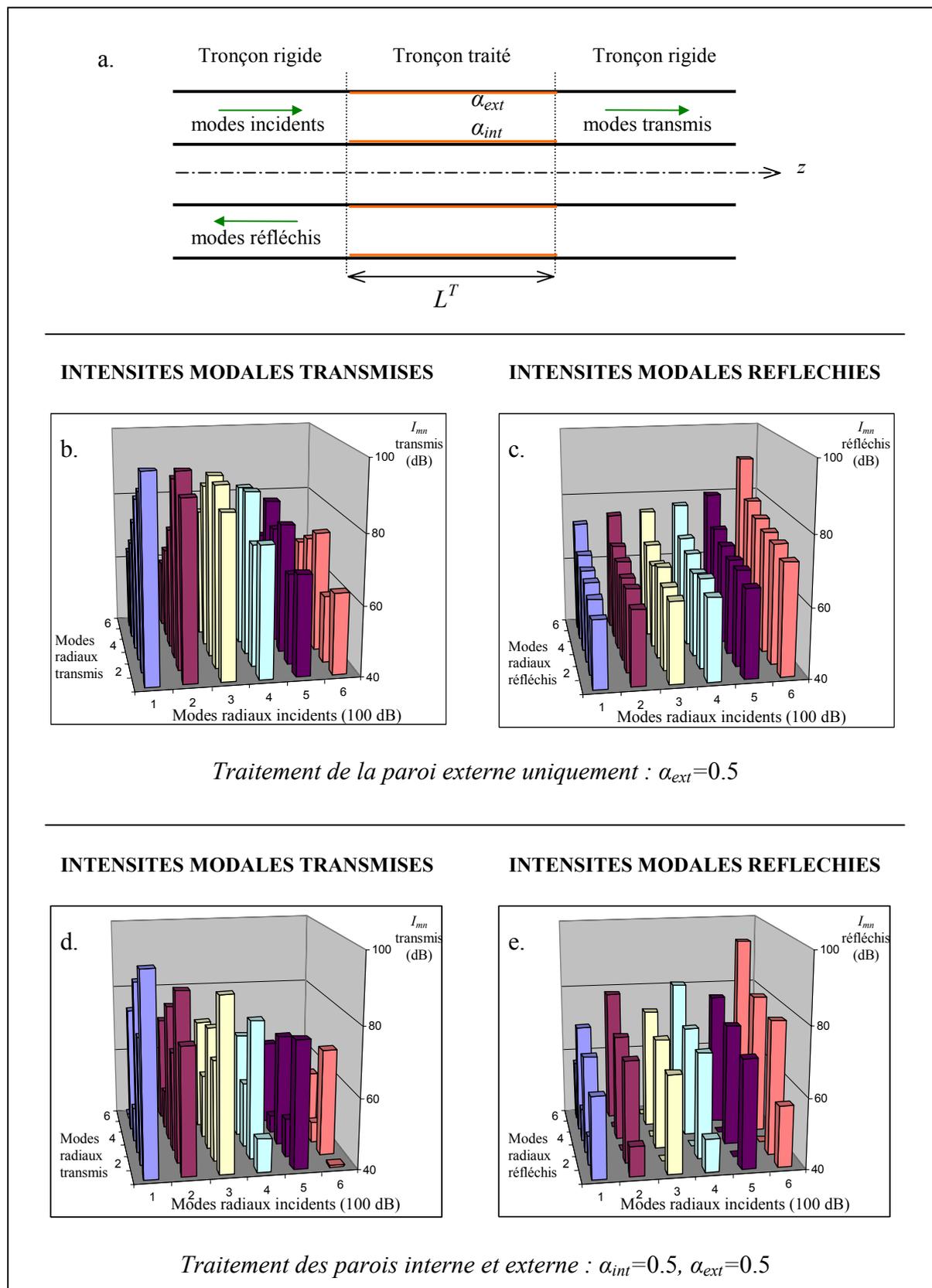


Figure 1.7 : Matrices de transmission et de réflexion des modes rigides $(0,n)$ de part et d'autre d'un tronçon traité ($k=40, h=0.6, L^T=1, M_0=0$).

Au-delà des redistributions modales aux discontinuités d'impédance, il peut être intéressant d'étudier l'efficacité relative des traitements acoustiques sur les parois interne et externe du conduit. En effet, de nombreux éléments structurels ou fonctionnels (raidisseurs, inverseurs de poussée, système de conditionnement d'air...) sont installés en pratique dans les conduits d'éjection et, contrairement aux entrées d'air, les parois des conduits ne peuvent être entièrement traitées. La disposition des matériaux absorbants obéit alors à différents compromis. Dans ce contexte, on peut se demander quelle surface est à traiter en priorité. La figure 1.8 apporte un premier élément de réponse. L'intensité transmise au-delà d'un tronçon traité pour différents modes incidents et pour une excitation multimodale (compte tenu de l'hypothèse d'équi-répartition de l'énergie sur les modes passants) est donnée dans les cas d'un traitement disposé : sur le cylindre interne uniquement, sur le cylindre externe uniquement, et sur les deux parois simultanément. Les résultats illustrent en outre l'influence de la forme radiale des modes sur l'efficacité des traitements.

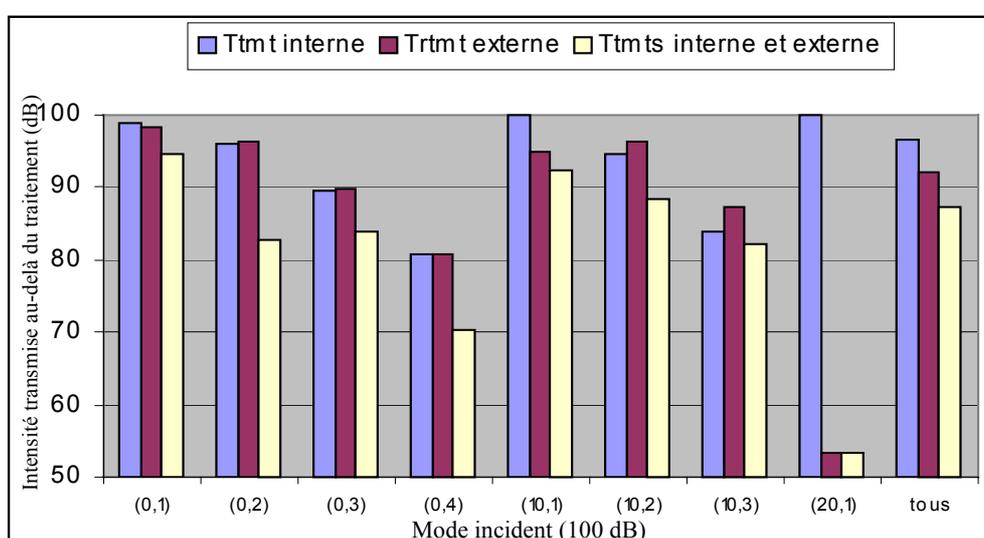


Figure 1.8 : Efficacité relative des traitements sur parois interne et externe ($k=25$, $h=0.6$, $L^T=1$, $\alpha_{int/ext}=0.5$ si paroi traitée, intensité incidente : 100 dB, $M_0=0$)

Pour les modes symétriques (d'ordre azimutal $m=0$), l'énergie étant répartie sur toute la largeur du conduit, l'efficacité des traitements sur les parois interne et externe est sensiblement identique. On observe alors une augmentation de l'atténuation avec l'ordre radial incident liée, comme nous venons de le voir, à l'angle de propagation des modes dans le conduit. Pour l'ordre azimutal $m=10$, en revanche, l'influence de la répartition de l'énergie acoustique sur une section de conduit commence à être visible. Dans le cas du mode (10,1) en particulier, on constate qu'un traitement acoustique sur la paroi interne n'a aucune influence, contrairement au traitement de la surface externe. Le phénomène apparaît de manière encore plus flagrante dans le cas du mode (20,1) et s'explique par la concentration de l'énergie acoustique à proximité du cylindre extérieur (cf. figure 1.5). Lorsque l'ordre radial augmente (modes (10,2) et (10,3)), la zone énergétique s'élargit jusqu'à la paroi interne et le bénéfice du traitement correspondant est à nouveau visible. Il peut même s'avérer supérieur à celui d'un traitement sur la paroi externe (mode (10,3)), probablement en raison d'une densité énergétique plus importante à proximité de la surface interne (même si les phénomènes de redistribution modale peuvent également avoir une influence).

En conclusion, les phénomènes de redistribution modale et l'efficacité des traitements acoustiques s'expliquent de manière relativement simple à partir de la forme des modes considérés et de l'approche géométrique en termes de rayons acoustiques. Si les surfaces interne et externe du conduit ne peuvent être traitées simultanément, il est conseillé de favoriser les traitements sur le cylindre extérieur. En effet, que ce soit pour une excitation multimodale qui caractérise généralement le bruit à large bande ou pour les modes susceptibles d'être générés préférentiellement à la fréquence de passage des pales (modes de type $(m,1)$, avec m relativement élevé), on vérifie que l'atténuation obtenue par un traitement externe est supérieure à celle d'un traitement sur la paroi interne.

1.6 Réflexion à l'extrémité du conduit et rayonnement vers l'extérieur

A l'extrémité du conduit, l'énergie acoustique incidente se répartit entre le champ rayonné vers l'extérieur et le champ réfléchi dans le conduit. Chacun des deux phénomènes dépend de la géométrie considérée à proximité de l'ouverture. Nous présentons ci-dessous les formulations retenues pour les deux modèles présentés sur la figure 1.1, avec corps central infini ou corps central tronqué sur la section de sortie.

Il est important de noter que les solutions proposées pour les deux configurations en matière de coefficients de réflexion et de directivité en champ lointain sont obtenues à l'aide de méthodes de résolution très différentes. Le cas du conduit annulaire sans épaisseur avec corps central infini a été résolu par Rienstra [111], qui utilise la technique de Wiener-Hopf particulièrement bien adaptée aux problèmes de diffraction impliquant des conditions aux limites définies différemment sur deux demi-espaces. Bien que basée sur un formalisme mathématique relativement complexe, la méthode a le mérite d'aboutir à une solution exacte du problème. L'effet d'un écoulement uniforme est inclus dans la solution de Rienstra. Par l'intermédiaire d'un paramètre réglable γ , lié à la condition à la limite considérée, il est possible également de modéliser l'influence d'une couche de vortécité se développant à partir du bord de fuite. La signification et les conséquences de cet « échappement tourbillonnaire » sont discutées en détail au paragraphe 1.6.3.

La formulation utilisée dans le cas du conduit bafflé est une solution approchée du problème. Les calculs des champs rayonnés et réfléchis sont effectués à partir de modèles distincts, présentés par Morfey [82] et Zorumski [134] et utilisant pour point de départ la méthode intégrale (voir le chapitre 2, page 65). Le rayonnement des modes est évalué en assimilant l'ouverture du conduit à une membrane bafflée vibrant à la vitesse du champ acoustique sur la section de sortie. Les coefficients de réflexion sont estimés par l'intermédiaire des impédances de rayonnement, qui relie la pression et la vitesse acoustiques à l'extrémité du conduit en considérant le résultat de la formulation intégrale au voisinage de la section de sortie. Les solutions établies par Morfey et Zorumski ignorant l'effet de l'écoulement, nous introduisons la transformation de Prandtl-Glauert (ou de Lorentz) [23] pour en tenir compte, en nous restreignant au cas d'un écoulement uniforme :

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{1 - M_0^2}, & \bar{k} &= \frac{k}{\beta}, & \bar{z} &= \frac{z}{\beta}, \\
\bar{k}_{z_{mn}} &= \sqrt{\bar{k}^2 - k_{r_{mn}}^2}, & \bar{R}_{ec} &= \sqrt{1 - (M_0 \sin \theta_{ec})^2} \frac{R_{ec}}{\beta}, \\
\sin \bar{\theta}_{ec} &= \frac{\beta \sin \theta_{ec}}{\sqrt{1 - (M_0 \sin \theta_{ec})^2}}, & \cos \bar{\theta}_{ec} &= \frac{\cos \theta_{ec}}{\sqrt{1 - (M_0 \sin \theta_{ec})^2}}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Physiquement, introduire un écoulement uniforme dans la configuration bafflée peut surprendre, mais Rice et Saule [107] ont montré, dans le cas d'un conduit circulaire, que le modèle permet de retrouver de manière satisfaisante le rayonnement du conduit libre mince. Les résultats présentés dans la suite justifieront également une telle simplification.

1.6.1 Réflexion à l'extrémité du conduit

En reprenant les coefficients de réflexion R_{mpn} introduits précédemment (1.56), la pression acoustique dans la dernière partie de conduit rigide précédant la section de sortie s'écrit, pour l'ordre azimutal m :

$$p_m(r, \varphi, z) = e^{im\varphi} \sum_{n=1}^{N(m)} A_{mn}^{+f} \left[F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{p=1}^{N(m)} R_{mpn} F_{mp}(k_{r_{mp}} r) e^{ik_{z_{mp}}^- z} \right]. \tag{1.59}$$

Les expressions des coefficients de réflexion pour chacune des deux configurations sont données par les formules suivantes, selon les deux formulations retenues :

- Conduit libre mince avec corps central infini, modèle de Rienstra :

$$R_{mpn} = -\frac{N_{mp}^2 (1+W_{mn})(1+W_{mp})}{4 W_{mp} (W_{mn} + W_{mp})} \frac{1 - M_0 W_{mn} \gamma - M_0 (\gamma - 1) W_{mp}}{1 - M_0 W_{mn}} F_{mn}(k_{r_{mn}}) F_{mp}(k_{r_{mp}}) K^-(W_{mn}) K^-(W_{mp}),$$

$$\text{avec } W_{mn} = \sqrt{1 - \chi_{mn}^2} \text{ si } \chi_{mn} \leq 1 \text{ et } W_{mn} = i\sqrt{\chi_{mn}^2 - 1} \text{ si } \chi_{mn} > 1, \quad \chi_{mn} = \frac{\beta k_{r_{mn}}}{k},$$

$$N_{mn} = \frac{\pi k_{r_{mn}}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1 - (m/k_{r_{mn}})^2}{J_m'(k_{r_{mn}})^2 + Y_m'(k_{r_{mn}})^2} - \frac{1 - (m/(k_{r_{mn}} h))^2}{J_m'(k_{r_{mn}} h)^2 + Y_m'(k_{r_{mn}} h)^2} \right]^{-1/2},$$

$$K^-(W_{mn}) = \exp \left[\frac{(-i) W_{mn}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log K(\tau)}{\tau^2 - W_{mn}^2} d\tau \right] \quad \text{si } \arg(W_{mn}) = 0,$$

$$K^-(W_{mn}) = K(W_{mn}) / K^-(-W_{mn}) \quad \text{si } \arg(W_{mn}) = \pi,$$

$$K(x) = \pi \frac{H_m^{(1)}(k v(x)/\beta)}{H_m^{(1)}(k v(x) h/\beta)} \left\{ J_m'(k v(x) h/\beta) Y_m'(k v(x)/\beta) - Y_m'(k v(x) h/\beta) J_m'(k v(x)/\beta) \right\},$$

$$v(x) = (1-x)^{1/2} (1+x)^{1/2} \quad \text{et} \quad H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x). \tag{1.60}$$

γ est le paramètre lié à la couche de vorticité. Poser $\gamma=1$ revient à imposer la condition de Kutta, c'est-à-dire un échappement tourbillonnaire suffisant pour annuler la singularité de la solution au bord de fuite. $\gamma=0$ correspond à la solution continue, sans vorticité (voir le paragraphe 1.6.3). La difficulté principale du calcul résident dans l'estimation des intégrales complexes K^- . Celle-ci est effectuée en deux temps dans le code de calcul MADIWHAX, conformément aux instructions de Rienstra [111].

- Conduit bafflé avec corps central tronqué, modèle de Zorumski :

Les coefficients de réflexion R_{mpn} sont solutions de l'équation matricielle suivante (p et n désignant respectivement les lignes et les colonnes de chaque matrice) :

$$\mathfrak{R} = [R_{mpn}] = -[Z_{mpn}\Lambda_{mn}^- - \delta_{pn}]^{-1}[Z_{mpn}\Lambda_{mn}^+ - \delta_{pn}], \quad \text{avec :}$$

$$Z_{mpn} = \frac{I}{(\bar{k})^2 Y_{mp}} \left[\int_0^{\pi/2} \sin \Psi [E_{mp}(\sin \Psi)] [E_{mn}(\sin \Psi)] d\Psi - i \int_0^{\infty} \cosh \Psi [E_{mp}(\cosh \Psi)] [E_{mn}(\cosh \Psi)] d\Psi \right],$$

$$E_{mn}(\tau) = \left[\frac{\bar{k}r F_{mn}(k_{r_{mn}} r) J'_m(\tau \bar{k}r) - k_{r_{mn}} r F'_{mn}(k_{r_{mn}} r) J_m(\tau \bar{k}r)}{(k_{r_{mn}}/\bar{k})^2 - \tau^2} \right]_{r=h}^{r=1}, \quad \Lambda_{mn}^{\pm} = \frac{k_{z_{mn}}^{\pm}}{(k - M_0 k_{z_{mn}}^{\pm})}. \quad (1.61)$$

Z_{mpn} est appelée l'impédance de rayonnement généralisée. L'intégrande de la partie complexe tendant rapidement vers zéro, les impédances sont calculées par simple intégration numérique, pas à pas. Elles définissent le rapport des amplitudes de pression et de vitesse modales sur la section de sortie du conduit selon la formule :

$$(A_{mn}^{+f} + A_{mn}^{-f}) = \sum_{p=1}^{N(m)} Z_{mpn} (\Lambda_{mp}^+ A_{mp}^{+f} + \Lambda_{mp}^- A_{mp}^{-f}). \quad (1.62)$$

A titre d'illustration, nous avons représenté sur la figure 1.9 les évolutions des coefficients R_{011} , R_{022} et R_{033} obtenues, en fonction de la fréquence, par les formulations de Rienstra et de Zorumski. Les comparaisons font apparaître un comportement similaire pour les deux modèles, à l'exception d'oscillations visibles dans le cas du conduit bafflé uniquement (nous n'avons pas cherché ici à analyser cette caractéristique, mais un phénomène d'interaction entre les champs diffractés sur la paroi externe du conduit et sur le corps central pourrait constituer une explication). Finalement, on constate que la réflexion d'un mode sur lui-même est conséquente   proximité de sa coupure mais diminue ensuite rapidement lorsque la fréquence augmente (notons que le rapport de l'énergie réfléchie sur l'énergie incidente est égal au carré du coefficient R_{0mn}). En raison de leurs faibles valeurs, les coefficients de réflexion croisés R_{0np} entre des modes $(0,n)$ et $(0,p)$ distincts n'ont pas été représentés sur la figure 1.9. Notre étude a montré que la part d'énergie réfléchie sur des modes radiaux différents est extrêmement faible, avec des rapports de l'énergie réfléchie sur l'énergie incidente inférieurs à 10^{-2} quelle que soit la fréquence considérée. Ceci justifie que ces réflexions croisées soient négligées dans la correction du rayonnement de la géométrie bafflée présentée plus loin.

Pour compléter quelque peu l'analyse de la réflexion en sortie de conduit, l'influence de l'écoulement et du rapport de rayon sur le coefficient R_{011} est illustrée sur la figure 1.10. Seul le modèle de Rienstra est considéré ici. La présence d'un écoulement diminue l'importance de la réflexion ce qui s'explique par l'effet Doppler sur la fréquence, tendant à éloigner le mode de sa coupure. La réduction de la hauteur du canal se traduit par une augmentation de la réflexion. Dans ce cas, des raisonnements purement géométriques peuvent être avancés puisque le rapport de la longueur d'onde sur la largeur du conduit augmentant, les phénomènes de diffraction prennent de l'importance et la transmission du son est défavorisée.

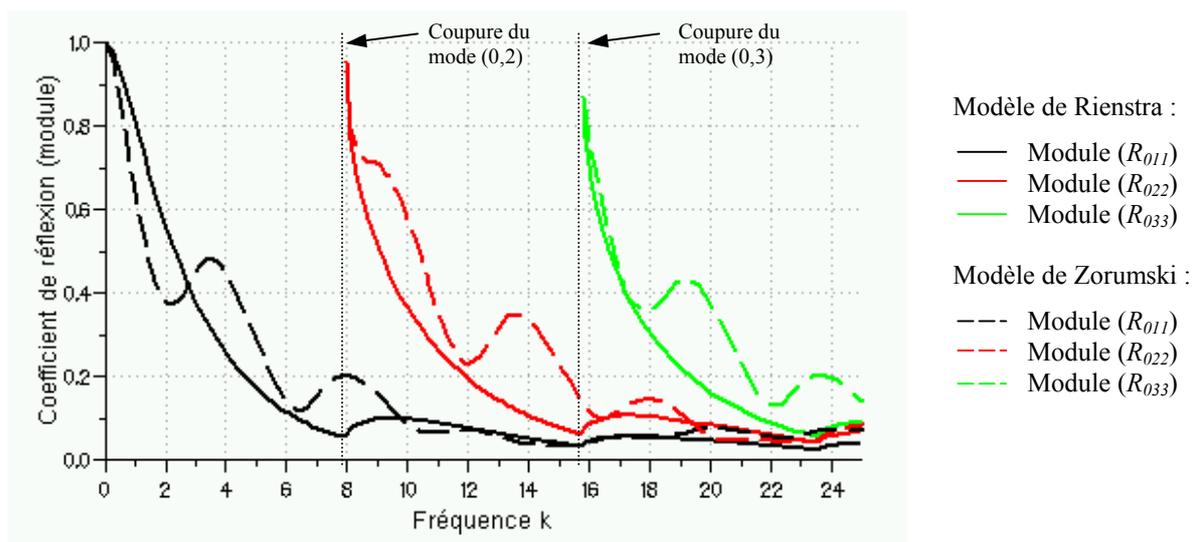


Figure 1.9 : Coefficients de réflexion à l'extrémité du conduit : évolution avec la fréquence et comparaison des modèles de Rienstra et de Zorumski. $M_0=0$, $h=0.6$.

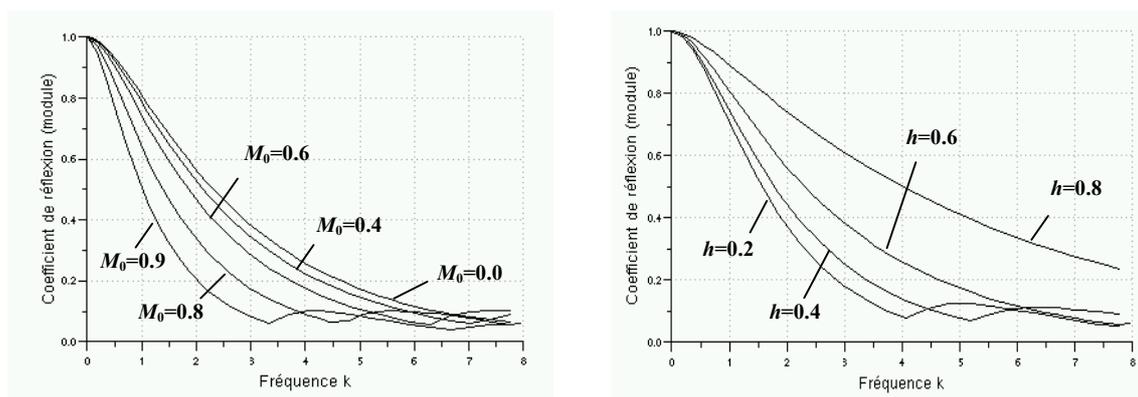


Figure 1.10 : Coefficients de réflexion R_{011} pour différentes valeurs du nombre de Mach (figure 1.1.a, $h=0.6$, $\gamma=1$) et du rapport de rayon (figure 1.1.b, $M_0=0$). Modèle de Rienstra.

1.6.2 Rayonnement en champ lointain

• Formulations

A la sortie du conduit, chaque mode incident (m,n) rayonne dans l'espace extérieur. Le souci ultime étant de caractériser le bruit perçu dans l'environnement des aéroports, nous nous intéressons principalement au rayonnement en champ lointain. Physiquement, cette condition est obtenue lorsque la longueur d'onde λ et la distance d'écoute R_{ec} (mesurée entre le centre de la section de sortie et la position du point d'écoute) vérifient : $R_{ec} \gg l$, $R_{ec} \gg \lambda$ et $R_{ec} \lambda \gg l$ (voir Lévy [62]). La dernière relation, notamment, permet de dissocier dans l'expression du champ rayonné les termes dépendant de la position angulaire θ_{ec} et de la distance du point d'écoute R_{ec} , ce qui revient à dire que la directivité ne dépend plus de la distance à la source. On introduit alors la fonction de directivité modale $D_{mn}(\theta_{ec})$, composante angulaire du rayonnement en champ lointain :

$$p_{mn}^{ray}(R_{ec}, \theta_{ec}, \varphi) = A_{mn}^{+f} e^{im\varphi - iM_0 k z} \frac{e^{ikR_{ec}}}{R_{ec}} D_{mn}(\theta_{ec}). \quad (1.63)$$

Pour chacun des deux modèles considérés, l'expression de la fonction de directivité modale est donnée ci-dessous.

- Conduit libre mince avec corps central infini, modèle de Rienstra :

$$D_{mn}(\theta_{ec}) = \frac{(-i)^m}{2\pi} F_{mn}(k_{r,mn}) \frac{1 + W_{mn}}{1 - M_0 W_{mn}} K^-(W_{mn}) G_{mn}\left(\arccos \frac{\cos \theta_{ec}}{\sqrt{1 - M_0^2 \sin^2 \theta_{ec}}}\right),$$

avec :

$$G_{mn}(x) = \frac{(1 - \cos x) K^+(\cos x)}{\sin x H_m^{(1)}[(k/\beta)\sin x]} \left[\frac{1 - M_0 \cos x}{W_{mn} - \cos x} - \gamma M_0 \right],$$

$$K^-(x) = \exp \left[\frac{(-i)x}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log K(\tau)}{\tau^2 - x^2} d\tau \right] \quad \text{si } \arg(x) \in]-\pi, 0], \text{ ce qui est le cas ici,}$$

$$K^+(x) = K(x)/K^-(x) \quad \text{si } \arg(x) \in]-\pi, 0], \quad K^+(x) = K^-(-x) \quad \text{si } \arg(x) \in]0, \pi],$$

et $K(x)$, W_{mn} et $H_m^{(1)}(x)$ définis en (1.60). (1.64)

De la même façon que pour les coefficients de réflexion, γ est lié au degré de la prise en compte d'une condition de Kutta au bord de fuite.

- Conduit bafflé avec corps central tronqué, modèle de Morfey :

Contrairement au modèle de Rienstra, rigoureusement exact en champ lointain, plusieurs simplifications sont effectuées dans le cas de la géométrie bafflée. Pour comprendre les hypothèses du modèle de Morfey et l'adaptation proposée ici, les grandes lignes du calcul sans écoulement méritent d'être rappelées. Comme nous l'avons mentionné, l'approximation

bafflée utilise pour point de départ la formulation intégrale (voir le chapitre 2, page 65) qui s'écrit, en notant \vec{x} le point d'écoute et \vec{y} un point de la surface d'intégration Σ :

$$p(\vec{x}) = \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n} G(\vec{x}, \vec{y}) - p(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} \right] d\Sigma. \quad (1.65)$$

Dans notre cas, la surface Σ correspond au plan du baffle, le vecteur normal \vec{n} est le vecteur \vec{e}_z et l'on choisit pour fonction de Green celle du demi-espace limité par un plan rigide : $G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{-e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{2\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$. Cette hypothèse revient à supprimer la contribution dipolaire du rayonnement, représentée par le second terme de l'intégrande dans l'expression (1.65), et constitue une première approximation du modèle (l'ouverture du conduit n'est pas prise en compte dans la fonction de Green). En notant Σ_{sortie} la section de sortie du conduit, la pression rayonnée en \vec{x} s'écrit alors :

$$p(\vec{x}) = \frac{-ik}{2\pi} \int_{\Sigma_{sortie}} v_z(\vec{y}) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} d\Sigma. \quad (1.66)$$

$v_z(\vec{y})$ est la vitesse axiale du champ acoustique sur la section de sortie, inconnue a priori. Pour estimer le rayonnement d'un mode incident (m, n) à l'extrémité du conduit, on suppose donc généralement que cette vitesse est donnée par la composante $v_{z_{mn}}^+$ du champ incident, ce qui revient à négliger la réflexion :

$$p_{mn}(\vec{x}) = \frac{-ik}{2\pi} \int_{\Sigma_{sortie}} v_{z_{mn}}^+(r, \varphi) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}(r, \varphi)|}}{|\vec{x}-\vec{y}(r, \varphi)|} r dr d\varphi, \\ v_{z_{mn}}^+(r, \varphi) = A_{mn}^{+f} \frac{k_{z_{mn}}^+}{k} F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{im\varphi}. \quad (1.67)$$

Le calcul de cette intégrale dans le cadre de l'approximation en champ lointain correspond au modèle de Morfey. En utilisant la transformation de Prandtl-Glauert, on aboutit à la fonction de directivité modale suivante :

$$D_{mn}(\theta_{ec}) = \frac{\bar{k}_{z_{mn}}}{i^{m-1}} \frac{\bar{k} \sin \bar{\theta}_{ec}}{(k_{r_{mn}})^2 - (\bar{k} \sin \bar{\theta}_{ec})^2} \left[r J'_m(\bar{k} r \sin \bar{\theta}_{ec}) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) \right]_{r=h}^{r=1}. \quad (1.68)$$

Dans la majorité des cas, cette formulation permet de retrouver le rayonnement d'un conduit avec corps central tronqué de manière satisfaisante. Toutefois, lorsque le mode incident est proche de sa coupure, la réflexion à l'extrémité du conduit est significative et le fait de considérer uniquement la contribution du champ incident $v_{z_{mn}}^+$ dans le calcul intégral peut conduire à des erreurs importantes dans la prédiction du rayonnement. C'est pourquoi, afin d'améliorer l'approximation « classique » du conduit bafflé, nous proposons de corriger la formulation en incluant dans le modèle la réflexion à l'extrémité du conduit. Connaissant les coefficients R_{mpn} , la vitesse acoustique axiale sur la section de sortie pour un mode incident (m, n) est donnée par :

$$v_{z_{mn}}^{sortie}(r, \varphi) = A_{mn}^{+f} e^{im\varphi} \left[\Lambda_{mn}^+ F_{mn}(k_{r_{mn}} r) + \sum_{p=1}^{N(m)} \Lambda_{mp}^- R_{mpn} F_{mp}(k_{r_{mp}} r) \right]. \quad (1.69)$$

En reportant cette expression dans l'équation (1.66), on aboutit à une nouvelle formulation de la directivité en champ lointain, combinaison des fonctions D_{mp} présentées ci-dessus (1.68). En raison de la faible valeur des coefficients croisés R_{mpn} , toutefois, il est possible de simplifier le calcul pour ne conserver que la réflexion d'un mode sur lui-même. Dans ce cas, la fonction de directivité corrigée s'écrit simplement :

$$D_{mn}^{cor}(\theta_{ec}) = (1 - R_{mnn}) \frac{\bar{k}_{z_{mn}}}{i^{m-1}} \frac{\bar{k} \sin \bar{\theta}_{ec}}{(k_{r_{mn}})^2 - (\bar{k} \sin \bar{\theta}_{ec})^2} \left[r J'_m(\bar{k} r \sin \bar{\theta}_{ec}) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) \right]_{r=h}^{r=1}. \quad (1.70)$$

Cette dernière formulation est la solution retenue dans l'élaboration du code de calcul MADiWHAX, construit sur la modélisation analytique développée dans ce chapitre.

• Diagrammes de rayonnement modaux

De nombreux calculs ont été effectués à l'aide des modèles décrits ci-dessus et des exemples variés de diagrammes de rayonnement seront présentés et analysés tout au long de ce mémoire. Néanmoins, afin de familiariser le lecteur avec le rayonnement des conduits annulaires, nous nous proposons de discuter dès à présent des principales caractéristiques des directivités modales en champ lointain. Les différences entre les deux formulations analytiques et l'influence de quelques paramètres comme l'écoulement ou le rapport des rayons sont également discutées.

Dans un premier temps, une validation de la méthode de calcul a été entreprise par comparaison des résultats avec le modèle de Lordi et Homicz [48]. Celui-ci, basé sur la technique de Wiener-Hopf, peut être considéré comme l'équivalent de la formulation de Rienstra pour les conduits circulaires et a été implémenté à AIRBUS dans le cadre de la thèse de Lidoine [65]. Pour les besoins de la comparaison, le rapport de rayon dans les modèles annulaires est fixé à $h=0.03$ et les calculs sont effectués sans écoulement. De plus, afin d'illustrer l'intérêt de la correction apportée à l'approximation bafflée, les diagrammes de rayonnement sont présentés pour deux types de modes plus ou moins proches de leur coupure (figure 1.11). L'intensité modale incidente est égale à chaque fois à $I_{mn}=100$ dB. De manière générale, on observe un très bon accord entre les différents calculs. Les modèles de Rienstra et de Lordi & Homicz, en particulier, donnent bien des résultats identiques. Dans le cas d'un mode éloigné de sa coupure (figure 1.11.a), les prédictions de l'approximation bafflée sont également très satisfaisantes même si la présence du baffle entraîne une surestimation du rayonnement aux angles élevés. Lorsque le mode est proche de sa coupure, en revanche, les différences entre l'approximation de Morfey et les modèles de Wiener-Hopf sont plus importantes (figure 1.11.b). La prise en compte de la réflexion à l'extrémité du conduit permet alors d'améliorer les résultats et si quelques différences persistent du fait de l'influence croissante du baffle sur les modes rayonnant aux angles élevés, les prédictions corrigées restent acceptables. Notons que dans le cas de la figure 1.11.a, la réflexion en extrémité de conduit étant négligeable, seul le calcul non corrigé a été représenté pour la géométrie bafflée (le calcul corrigé est équivalent).

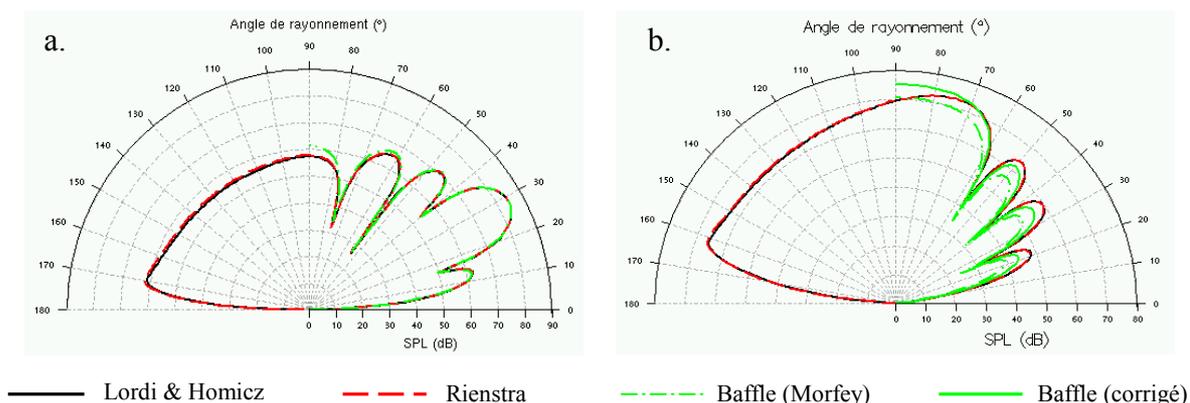


Figure 1.11 : Comparaison du modèle de Rienstra et de l'approximation bafflée ($h=0.03$) avec le modèle circulaire de Lordi et Homicz. a : mode (4,2) ; b : mode (7,4). $M_0=0$, $k=20$, conduit rigide, $I_{mn}=100$ dB, $R_{ec}=20$.

Si les rayonnements des configurations avec corps centraux tronqué et infini sont similaires lorsque le rapport de rayon tend vers zéro, il n'en va pas de même, généralement, pour une géométrie annulaire quelconque. La figure 1.12 présente ainsi l'évolution des diagrammes de rayonnement avec le rapport de rayon pour les deux configurations considérées et pour les modes incidents (0,3) à $k=20$ et (30,1) à $k=40$. On distingue deux types de comportement :

- Lorsque la forme radiale du mode incident le rend sensible à la présence du corps central, c'est à dire lorsque la zone de propagation forte s'étend jusqu'à la paroi interne du conduit, les directivités modales avec corps centraux tronqué et infini diffèrent notablement (figure 1.12.a : mode (0,3)). Dans ce cas, en effet, la géométrie du corps central influe sur les phénomènes de diffraction à proximité de la section de sortie et donc sur le rayonnement en champ lointain. Bien entendu, les différences de rayonnement observées justifient l'utilisation des deux modèles analytiques. A ce stade de l'étude, en revanche, il est difficile de prédire quelle géométrie permet de modéliser au mieux le rayonnement d'une éjection réaliste. Seul le calcul numérique apporte une réponse et nous reviendrons sur ce point aux chapitres 2 et 3.

- Lorsque l'énergie du mode incident est localisée à proximité de la paroi externe, la diffraction à l'extrémité du conduit est entièrement gouvernée par le bord de fuite externe et les rayonnements obtenus par le modèle de Rienstra et l'approximation bafflée deviennent équivalents⁸ (mode (30,1), figure 1.12). En vertu de l'analyse du paragraphe 1.4.3, ce type de comportement est à attendre pour les modes d'ordre azimutal élevé.

⁸ En réalité, les bords de fuites de nos deux modèles ne sont pas rigoureusement identiques (paroi sans épaisseur et baffle) mais l'existence d'un bord anguleux engendre le même phénomène de diffraction. Par ailleurs, dans le cas de la géométrie longue, si le champ diffracté par le bord de fuite interfère avec le prolongement du corps central à l'extérieur du conduit, quelques différences peuvent être observées entre les deux modèles. Ce phénomène, toutefois, apparaît en général à des fréquences relativement élevées (voir paragraphe 2.4).

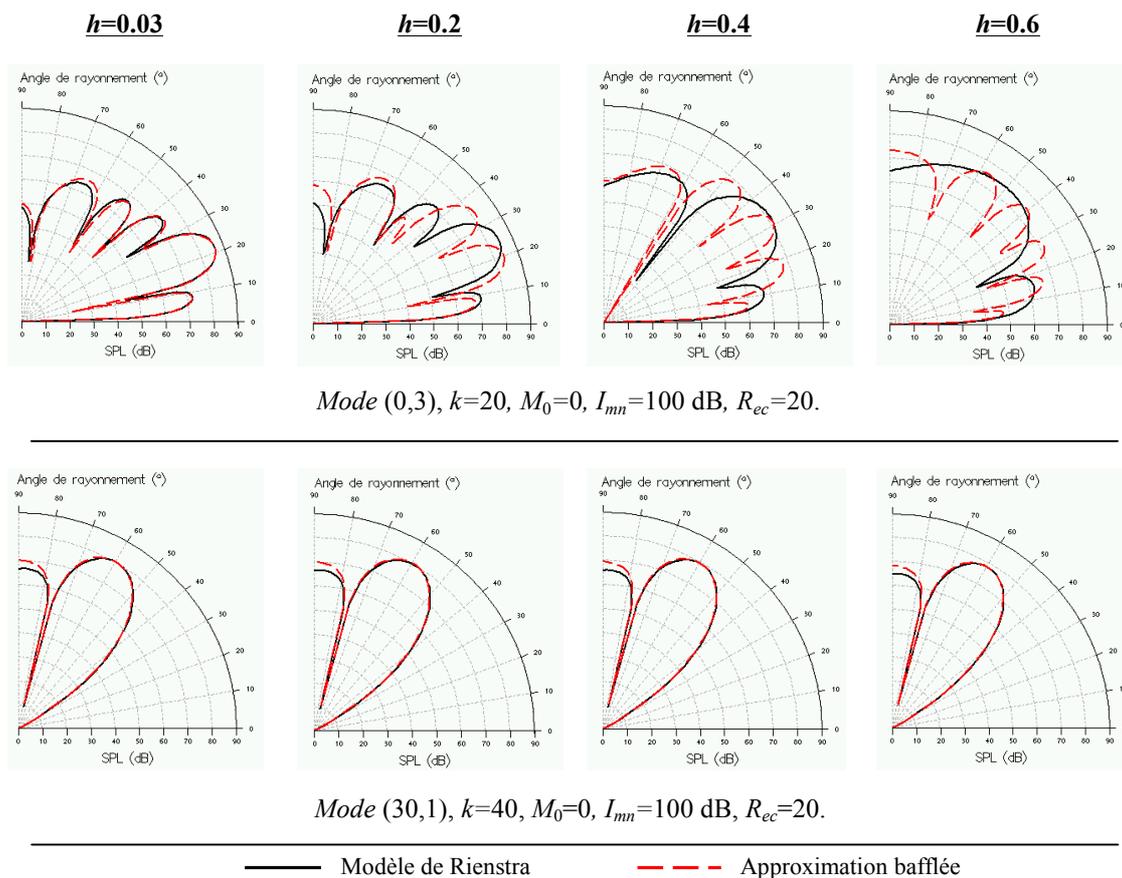
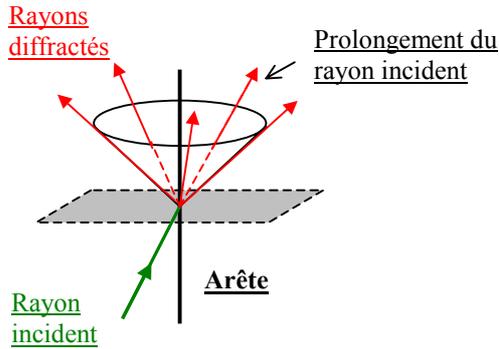


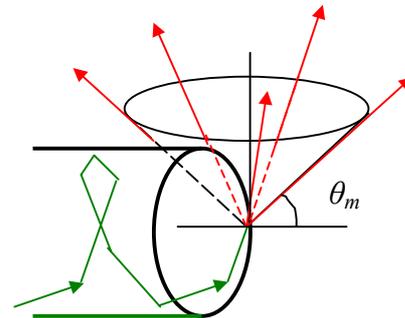
Figure 1.12 : Diagrammes de rayonnement en fonction du rapport de rayon h . Comparaison des modèles de Rienstra et du baffle pour deux modes donnés.

Au-delà des différences de rayonnement liées à la géométrie, il ressort des diagrammes de la figure 1.12 que les directivités modales en champ lointain sont toujours constituées de lobes et d’extinctions successives (pour $0^\circ < \theta_{ec} < 90^\circ$). Dans le cas des conduits circulaires, la position du lobe principal correspond à l’angle d’incidence du mode dans le conduit, conformément à l’intuition, et les différentes annulations sont observées aux angles d’incidence des autres modes passants de même ordre azimutal. En conduit annulaire, cependant, puisque le rayonnement dépend de la forme du corps central, le comportement est plus délicat à analyser. En pratique, nous avons observé que la concordance des positions des lobes et des extinctions avec l’angle d’incidence des modes radiaux reste valable pour la configuration avec corps central infini, mais pas pour la configuration tronquée. L’interprétation du résultat échappe aux représentations intuitives que l’on se fait généralement des phénomènes de propagation. En revanche, en reprenant la description des modes de conduit en termes de rayons (paragraphe 1.4.4) et en introduisant la théorie géométrique de la diffraction de Keller [52] [53], il est possible d’expliquer l’augmentation du nombre de lobes observée dans le cas du conduit avec corps central tronqué (cf. figure 1.12). À ce titre, la figure 1.13 propose une approche qualitative de la diffraction par l’extrémité d’un conduit annulaire, valable normalement à haute fréquence. Selon la théorie de Keller, tout rayon incident sur l’arête d’une surface solide génère un cône de rayons diffractés qui s’obtient, à partir du point d’impact, en faisant pivoter le prolongement du rayon incident autour de la tangente à l’arête (figure 1.13.a, cas d’une arête droite). À

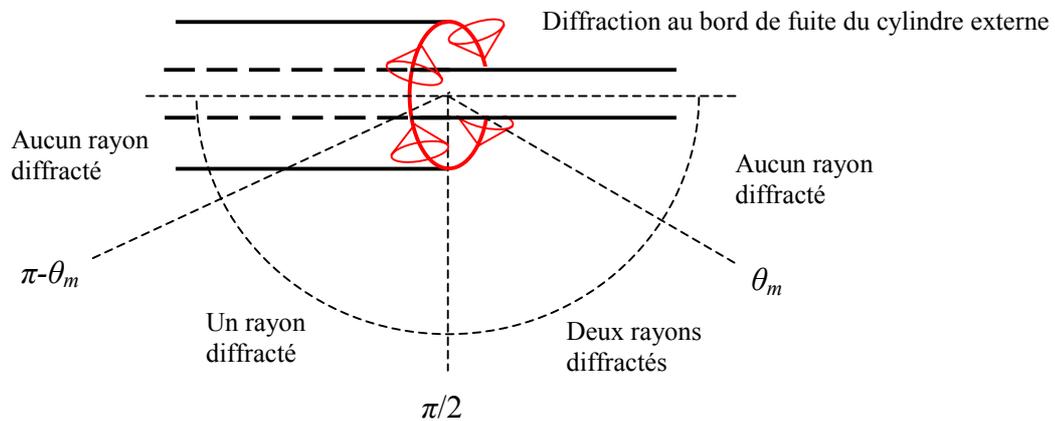
a. Théorie géométrique de la diffraction sur une arête vive : cône de Keller



b. Application à la diffraction à l'extrémité d'un conduit cylindrique



c. Rayonnement d'un conduit annulaire avec corps central infini : un seul anneau de diffraction



d. Rayonnement d'un conduit annulaire avec corps central tronqué (mode à caustique masquée) : deux anneaux de diffraction

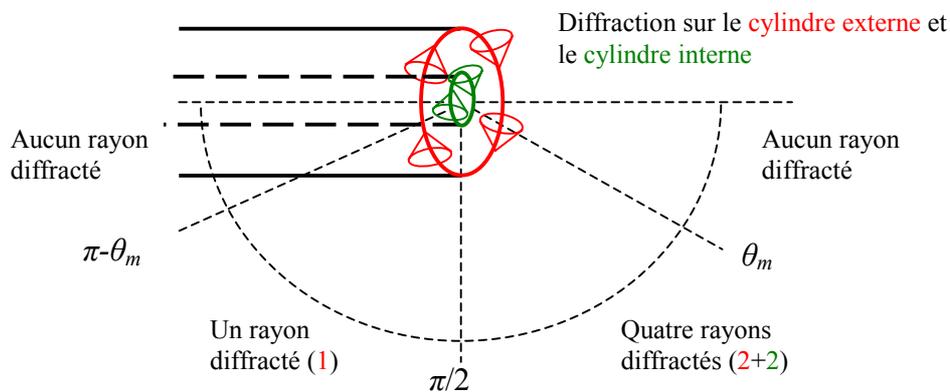


Figure 1.13 : Interprétation géométrique de la diffraction à l'extrémité d'un conduit annulaire. a. : cône de Keller, b. : diffraction à l'extrémité d'un conduit cylindrique, c. et d. : nombre de rayons diffractés en chaque point de l'arc de directivité.

l'extrémité d'un conduit cylindrique, chaque point de l'arête circulaire du cylindre externe est atteint par un rayon incident et devient donc l'origine d'un cône de diffraction (figure 1.13.b, exemple pour un conduit circulaire). En considérant le produit scalaire $\vec{K}^{1,2} \cdot \vec{e}_\varphi$ en $r=1$, où $\vec{K}^{1,2}$ est le vecteur d'onde des rayons donné par l'expression (1.44), on montre que l'angle θ_m des cônes de diffraction avec le plan perpendiculaire à leur axe (cf. figure 1.13.b) est tel que :

$$\sin(\theta_m) = \frac{|m|}{k}, \quad \theta_m \in]0, \pi/2[. \quad (1.71)$$

Du fait de l'existence des différents cônes de diffraction, l'extrémité du conduit se comporte comme un anneau de sources secondaires, rayonnant dans tout l'espace. De manière immédiate, on peut observer que pour chaque cône de Keller : un quart des rayons diffractés sont dirigés vers l'intérieur du conduit et constituent donc le champ réfléchi ; un quart des rayons se propagent à l'extérieur du conduit, vers l'amont, et représentent le rayonnement en $\theta_{ec} > \pi/2^\circ$; enfin, la moitié des rayons sont diffractés vers l'aval et génèrent le rayonnement en $0 < \theta_{ec} < \pi/2$.

Plus précisément, en analysant les directions de propagation de l'ensemble des rayons, on peut déterminer différentes régions angulaires pour le champ lointain. Dans le cas d'un conduit circulaire, on montre ainsi que (voir Chapman [24], Hocter [47]) :

- $0 < \theta_{ec} < \theta_m$: aucun rayon n'est diffracté dans cette région, que l'on qualifie de zone de silence. Par conséquent, θ_m est lui aussi appelé 'angle de silence'. De la même manière, du fait de la symétrie des cônes de Keller, aucun rayon ne parvient en $\pi - \theta_m < \theta_{ec} < \pi$.
- $\theta_m < \theta_{ec} < \pi/2$: chaque point de l'espace est atteint par deux rayons diffractés provenant de deux cônes de Keller différents. L'interférence entre ces rayons est à l'origine des lobes et des extinctions observés dans les diagrammes de directivité.
- $\pi/2 < \theta_{ec} < \pi - \theta_m$: un seul rayon parvient en chaque point de cette zone angulaire, qui se caractérise donc par une directivité sans lobe.

En conduit annulaire, le problème est tout à fait similaire. Dans le cas du corps central infini, la diffraction à l'extrémité du conduit est générée de la même façon par l'arête du cylindre extérieur. Les conclusions du conduit circulaire restent donc valables (figure 1.13.c), même si pour certaines configurations, une partie des rayons diffractés se réfléchit sur le corps central à l'extérieur du conduit. Dans le cas de la géométrie tronquée, en revanche, une deuxième arête circulaire, sur le corps central, est susceptible de jouer le rôle d'anneau de diffraction. On distingue alors deux cas de figure :

- Si le mode incident est un mode à caustique apparente (cf. paragraphe 1.4.4), aucun rayon ne percute l'arête du corps central. Le rayonnement est donc gouverné par la diffraction sur l'arête externe uniquement et le nombre de rayons parvenant dans chaque zone angulaire est identique à celui du cas précédent (cf. figure 1.13.c).
- Si le mode incident est un mode à caustique masquée, alors l'extrémité du corps central diffracte effectivement une partie de l'énergie incidente (figure 1.13.d). Dans ce cas, les angles d'incidence des rayons sur les arêtes interne et externe étant identiques,

les cônes de Keller sur chacun des deux anneaux présentent le même angle au sommet. Le découpage de l'arc de directivité en trois régions effectué précédemment est donc toujours valable mais quatre rayons diffractés parviennent cette fois dans la zone $\theta_m < \theta_{ec} < \pi/2$ (deux provenant de l'anneau externe, deux autres de l'anneau interne). Un seul rayon, toujours, parvient en $\pi/2 < \theta_{ec} < \pi - \theta_m$ (le quart de cône rayonnant vers l'arrière n'existe pas pour l'arête interne). On aboutit au schéma de la figure 1.13.d qui permet d'expliquer l'augmentation du nombre de lobes en conduit tronqué par l'existence d'interférences entre un nombre de rayons plus élevé.

Bien que la description de la diffraction en terme de rayons ne soit en principe justifiée qu'à fréquence suffisamment élevée (on considère généralement le critère $k > 30$ comme une limite de validité raisonnable de l'approximation à haute fréquence), le modèle que nous venons de proposer permet de comprendre trois autres caractéristiques des directivités modales, observées pour toute fréquence :

- les zones de silence sont symétriques en aval et en amont du conduit (figure 1.11),
- les angles de silence pour les géométries avec corps central tronqué et infini sont identiques (figure 1.12),
- enfin, comme le montre l'expression (1.71), l'angle de silence ne dépend pas de l'ordre radial du mode incident, mais uniquement de l'ordre azimutal (figure 1.14).

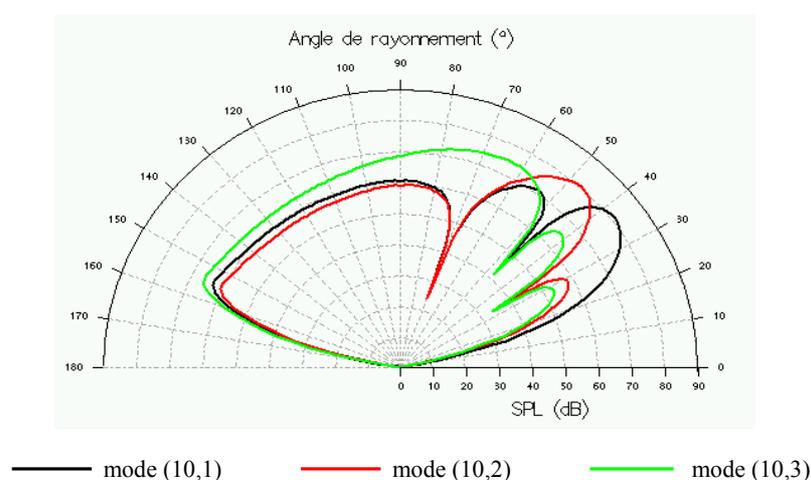


Figure 1.14 : Diagrammes de rayonnement des différents modes radiaux de l'ordre azimutal $m=10$. Modèle de Rienstra. $k=22$, $h=0.6$, $M_0=0$, $I_{mn}=100$ dB, $R_{ec}=20$.

Pour conclure avec cette première analyse des directivités modales en champ lointain, la figure 1.15 illustre l'influence d'un écoulement uniforme sur le rayonnement d'un mode de conduit isolé. Les diagrammes de rayonnement à $M_0=0.6$ et sans écoulement sont comparés dans le cas d'un mode insensible à la forme du corps central (mode (30,1), à $k=40$ et $h=0.6$, cf. figure 1.12). Aucun échappement tourbillonnaire n'est pris en compte dans le modèle de Rienstra (l'influence de ce phénomène est discutée au paragraphe suivant). Les conclusions suivantes peuvent être formulées :

- On observe un bon accord entre les prédictions des deux modèles analytiques en présence d'écoulement. Du fait du mode considéré, ce résultat était attendu mais il permet de confirmer la pertinence de la transformation de Prandtl-Glauert introduite dans le modèle du baffle (malgré le caractère peu réaliste de l'écoulement uniforme pour une telle géométrie). Comme dans le cas sans écoulement, toutefois, notons que l'accord entre les modèles n'est pas valable quel que soit le mode incident.
- La présence d'un écoulement a tendance à décaler le lobe principal vers l'axe du conduit et à augmenter le nombre de lobes secondaires. Dans le cas du corps central infini, puisque la position des lobes et des extinctions correspond à l'angle d'incidence des modes radiaux de même ordre azimuthal, ce résultat s'explique par la diminution des fréquences de coupure modales (1.36). Pour le modèle du baffle, cet argument n'est plus valable mais le phénomène reste néanmoins observable, y compris pour les modes dont le rayonnement n'est pas équivalent à celui de la géométrie avec corps central infini.

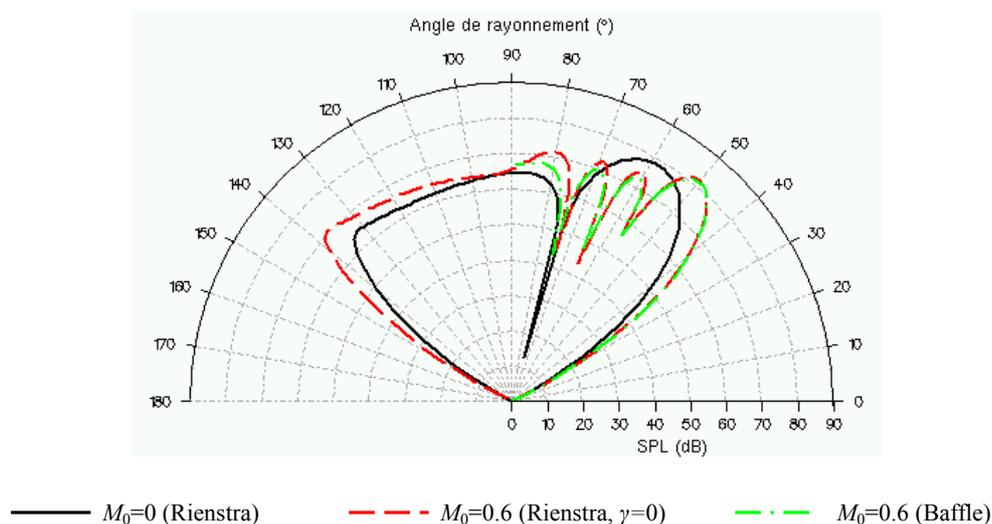


Figure 1.15 : Diagrammes de rayonnement avec ou sans écoulement.
 Mode (30,1), $k=40$, $h=0.6$, $I_{mn}=100$ dB, $R_{ec}=20$.

1.6.3 Condition de Kutta et échappement tourbillonnaire

Comme nous l'avons mentionné au cours des pages précédentes, la solution analytique de Rienstra permet de modéliser l'influence d'un échappement tourbillonnaire au bord de fuite sur les champs réfléchis et transmis à l'extrémité du conduit. Nous présentons ci-dessous une interprétation physique du phénomène, ainsi que ses conséquences sur le rayonnement en champ lointain.

- **Interprétation physique des différentes solutions**

En mécanique des fluides, les effets de viscosité sont généralement confinés au sein des couches limites. Dans de nombreux problèmes, il est donc possible de modéliser l'écoulement en dehors de ces régions en considérant le fluide comme non visqueux. Cependant, pour aboutir à une solution satisfaisante, il peut alors être nécessaire d'ajouter aux équations du

problème une condition supplémentaire, imposant de manière artificielle les caractéristiques de l'écoulement réel. C'est le rôle de la condition de Kutta, ou condition de Kutta-Joukowski, utilisée pour modéliser les écoulements autour d'un bord de fuite singulier.

Le problème du rayonnement des conduits d'éjection est sensiblement équivalent. En effet, les équations de l'acoustique présentées au paragraphe 1.3 supposent un écoulement fluide irrotationnel et non visqueux ne permettant pas de modéliser de manière complète les phénomènes réels au bord de fuite que représente l'arête du conduit dans sa section terminale. Aussi, l'une des conséquences des simplifications effectuées est que le problème acoustique constitué des équations de propagation (1.14), de la condition aux limites sur les parois (1.17) et de la condition de rayonnement à l'infini (Sommerfeld) n'admet une solution unique, pour une onde incidente donnée, qu'à condition de supposer le champ acoustique (p, \vec{v}, ϕ) continu en tout point de l'espace (voir par exemple Rienstra [111], Munt [85]). La méthode de Wiener-Hopf est un moyen de calculer cette solution, dont l'expression en champ lointain est donnée par la formulation (1.64), avec $\gamma=0$. En champ proche, cependant, on montre que cette solution fait apparaître une vitesse acoustique infinie au bord de fuite caractérisant le fait qu'en ce point, le champ acoustique contourne le bord singulier infiniment mince (figure 1.16.a). Ce phénomène, rendu possible par les lois de l'écoulement potentiel, ne correspond pas à un comportement physique. En réalité, le contournement du bord de fuite est empêché par la viscosité du fluide qui impose un décrochage de « l'écoulement acoustique », selon le schéma de la figure 1.16.b (cf. Roger [116]). Du fait de l'entraînement par l'écoulement moyen, les tourbillons ainsi créés sont écartés du bord de fuite et convectés sous la forme d'un sillage le long d'une « couche de vorticité » (figure 1.16.c).

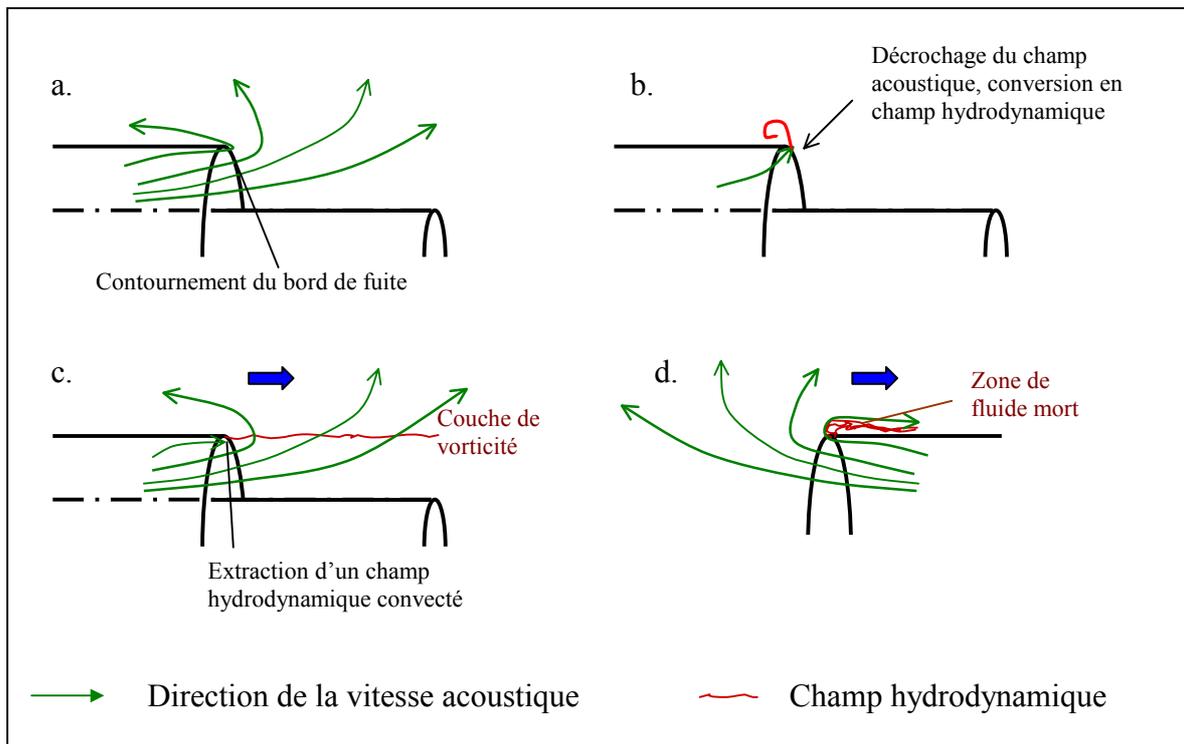


Figure 1.16 : Comportement du champ acoustique autour d'un bord singulier.
 (a) : vitesse acoustique selon la théorie potentielle continue ; (b) : décollement initial au bord de fuite pour un écoulement visqueux ; (c) : vitesse acoustique et couche de vorticité avec condition de Kutta; (d) : cas de l'entrée d'air.

La résolution du problème proposée par Rienstra permet de modéliser cet « échappement tourbillonnaire ». Pour cela, les hypothèses de continuité du potentiel acoustique ϕ et de la vitesse acoustique axiale $\partial\phi/\partial z$ sont abandonnées dans le prolongement du conduit ($r=1$, $z > z_{\text{sortie}}$), où se développe la couche de vorticité (le potentiel n'est pas défini en présence d'un écoulement rotationnel). De ce fait, le problème admet une infinité de solutions liées, physiquement, à la quantité de vorticité produite dans le sillage et, mathématiquement, au degré de singularité du champ acoustique au bord de fuite. Pour déterminer complètement une solution, il est donc nécessaire d'imposer une condition supplémentaire, fixant ces inconnues. Cette condition est introduite dans le modèle de Rienstra par l'intermédiaire du paramètre γ , dont chacune des valeurs complexes correspond à une solution particulière du problème. Seule la solution obtenue pour $\gamma=1$, toutefois, vérifie la condition de Kutta spécifiant une vitesse acoustique finie au bord de fuite : dans ce cas, la quantité de vorticité produite est exactement celle nécessaire pour empêcher le contournement de la paroi mince. En résumé, on distingue trois types de solutions :

- la « solution continue » ($\gamma=0$) qui n'intègre aucun phénomène visqueux (donc pas de création de vorticité) et se caractérise par un champ acoustique (p, \vec{v}, ϕ) continu en tout point de l'espace mais singulier au bord de fuite (v mais aussi p sont infinies)
- la « solution de Kutta » ($\gamma=1$) qui permet d'imposer une pression et une vitesse acoustiques finies au bord de fuite par l'intermédiaire d'un lâché de vorticité. Le potentiel et la vitesse acoustiques sont discontinus à travers la couche de vorticité. La pression, elle, est continue.
- les solutions intermédiaires (γ complexe diff rent de 0 et 1) qui prennent en compte différents taux de vorticité, mais ne permettent pas d'éliminer la singularité au bord de fuite (p, v infinies)

Dans la suite, nous ne considérerons que les solutions particulières $\gamma=0$ et $\gamma=1$. Nous insistons ici sur le fait que le champ acoustique diffracté en tout point de l'espace est entièrement déterminé par la condition choisie au bord de fuite, tout comme l'existence de la couche de vorticité dans le cas $\gamma \neq 0$.

• Cas d'une entrée d'air

De manière générale, les études portant sur le rayonnement des conduits d'éjection décrivent de façon explicite le comportement du champ acoustique au niveau du bord de fuite (Rienstra [108] [109] [111], Munt [85] [86] [87], Morgan [84]). Dans le cas des entrées d'air, en revanche, la solution en champ lointain est généralement donnée sans préciser ses caractéristiques au bord d'attaque. En réalité, l'écoulement étant désormais en sens inverse, la prise en compte d'une ligne de discontinuité n'a aucune signification physique et le problème est résolu en supposant la continuité du champ acoustique dans tout l'espace [48], ce qui assure l'unicité de la solution. Comme pour l'éjection, cependant, cette solution implique une vitesse acoustique infinie au bord d'attaque [41]... Heureusement, le principe d'un contournement de la paroi solide est cette fois moins problématique, pour deux raisons. D'une part, sur les moteurs réels, les lèvres des entrées d'air sont relativement épaisses et à courbure régulière de sorte que le contournement est possible pour la majorité des fréquences. D'autre part, si l'on considère une paroi fine, l'effet d'un décollement tourbillonnaire au niveau d'un bord d'attaque ne se traduit pas de la même façon que pour un bord de fuite (cf. Roger [116]).

En effet, sous l'action de l'écoulement extérieur, le décrochage est désormais forcé de recoller à la paroi et il se forme une zone de recirculation, selon le schéma de la figure 1.16.d. Celle-ci se traduit par un épaissement artificiel de la paroi qui autorise, en première approximation, le contournement du bord d'attaque.

- **Influence théorique de la condition de Kutta sur le champ lointain (éjection)**

La figure 1.17 présente quelques diagrammes de rayonnement correspondant à la solution continue et à la solution de Kutta, pour différents modes incidents à $k=10$ et $M_0=0.6$. Comme l'ont souligné Munt [85] et Rienstra [111] dans le cas d'un conduit circulaire puis annulaire, la prise en compte de la condition de Kutta entraîne un renforcement du rayonnement aux faibles angles et une diminution aux angles élevés. Plus précisément, le rapport des solutions en champ lointain montre que la limite entre les deux domaines angulaires correspond à l'angle de propagation du mode incident dans le conduit θ_{mn} . Si l'augmentation du rayonnement pour $\theta < \theta_{mn}$ est généralement limitée, l'atténuation aux angles élevés peut atteindre des niveaux conséquents. Physiquement, ce comportement traduit le fait qu'avec la condition de Kutta, du fait de la création de vorticité, une partie de l'énergie acoustique incidente est convertie au bord de fuite sous forme d'énergie hydrodynamique. Pour de très faibles valeurs de la fréquence, de l'ordre de $k \sim 1$, cet échange d'énergie entre champ acoustique et champ hydrodynamique se caractérise par une atténuation importante de la

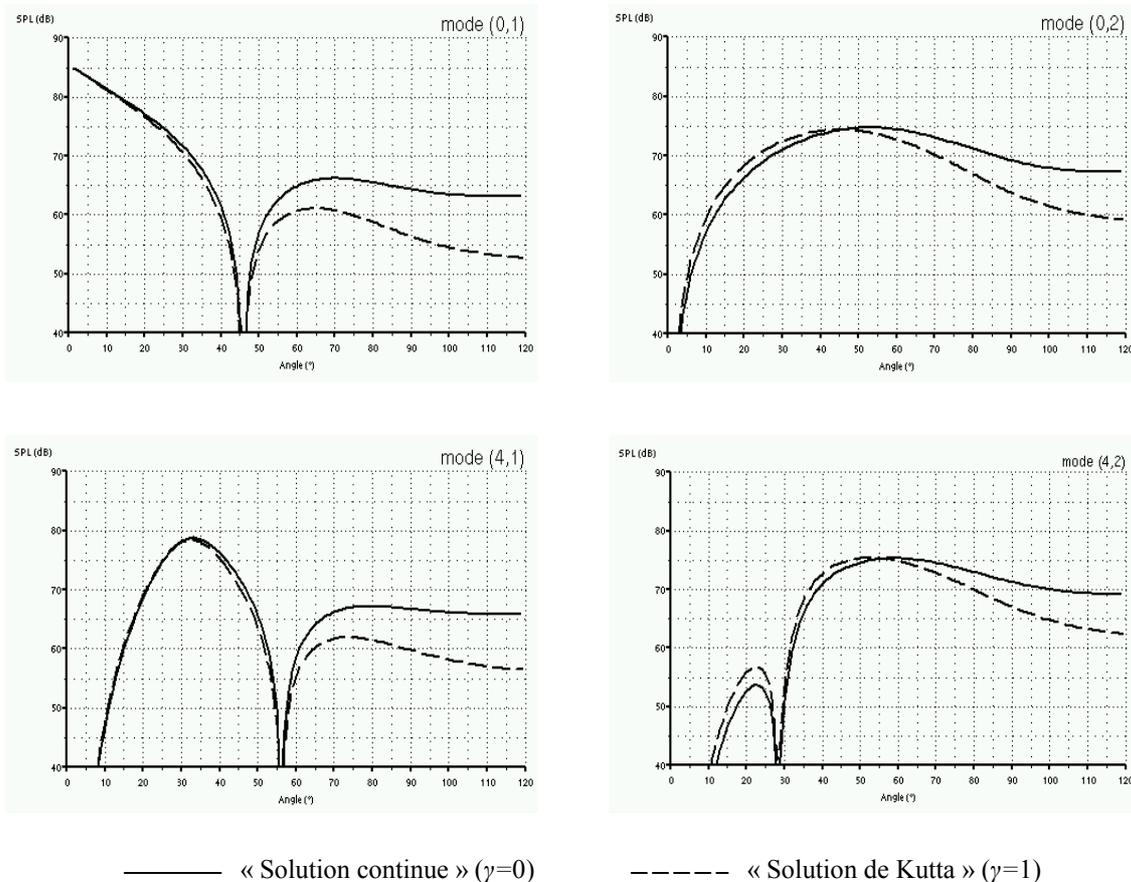


Figure 1.17 : Comparaison des diagrammes de rayonnement modaux avec et sans échappement tourbillonnaire. Modèle de Rienstra. $k=10$, $h=0.6$, $M_0=0.6$, $R_{ec}=20$, $I_{mn}=100$ dB.

puissance acoustique rayonnée, observée expérimentalement par Bechert *et al.* [8] et modélisée par Howe [49], Bechert [9] et Rienstra [109] [111]. Aux fréquences qui nous intéressent, toutefois, la génération de vorticité se traduit plus par une modification des directivités que par une diminution nette de l'énergie rayonnée (cf. figure 1.17, le niveau sur le lobe principal est équivalent quelle que soit la solution considérée).

A priori, l'influence de la condition de Kutta sur le rayonnement acoustique dépend de la vitesse de l'écoulement moyen. La figure 1.18 montre en effet que de manière générale, l'écart entre les solutions avec et sans échappement tourbillonnaire augmente avec la valeur du nombre de Mach extérieur, conformément à l'intuition. Lorsque $M_0=0$, la vorticité n'étant plus convectée par l'écoulement moyen, les deux solutions deviennent équivalentes.

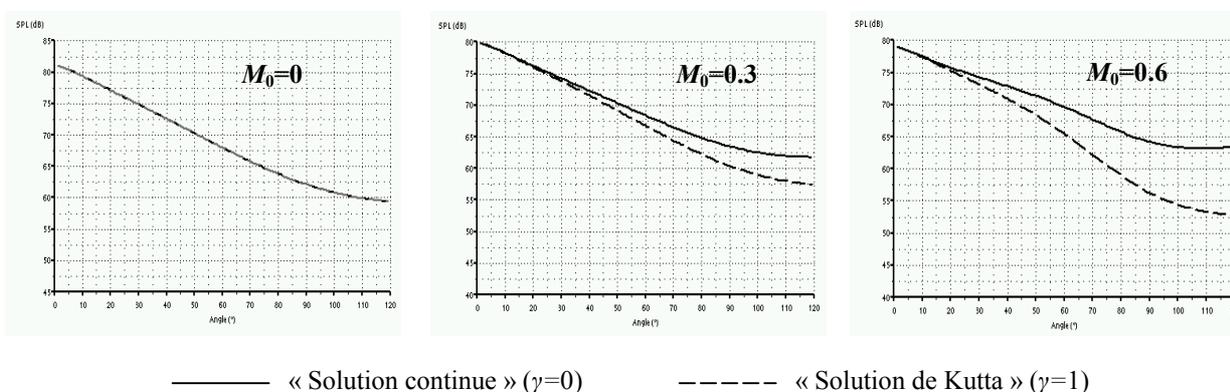


Figure 1.18 : Influence de la condition de Kutta sur le rayonnement du mode (0,1) en fonction du nombre de Mach M_0 . $k=10$, $h=0.6$, $Re_c=20$, $I_{mn}=100$ dB.

• Choix de la solution

Dans un modèle analytique avec paroi infiniment mince et écoulement uniforme, la solution de Kutta apparaît comme légitime du fait de l'incapacité du fluide à contourner un bord singulier. Dans la réalité, cependant, le problème est plus compliqué puisque l'épaisseur du bord de fuite n'est jamais totalement nulle et l'écoulement moyen est loin d'être uniforme. Plusieurs auteurs se sont donc interrogés sur la validité de la condition de Kutta en régime fluctuant mais, aujourd'hui encore, une certaine incertitude demeure sur le sujet. Elle s'explique principalement par deux raisons. Tout d'abord, de manière générale, la solution réelle ne correspond pas à l'une des solutions $\gamma=1$ ou $\gamma=0$ mais plus probablement à un compromis entre les deux, comme le concluent Bechert et Pfizenmaier [7] après une étude expérimentale portant sur différents paramètres. Ensuite, justement, un grand nombre de paramètres influent sur le comportement des ondes au bord de fuite, ce qui complique l'analyse. Notamment, la structure du champ acoustique incident (fréquence, amplitude, incidence par rapport au bord de fuite...), les caractéristiques de l'écoulement porteur (nombre de Reynolds, nombre de Mach, turbulence, gradient de température...) et la géométrie du bord de fuite (forme, épaisseur, inclinaison...) sont susceptibles de faire tendre la solution réelle vers l'un ou l'autre des modèles analytiques. Aujourd'hui, on favorise généralement la solution de Kutta mais on sait, à titre d'exemple, qu'un écoulement porteur perturbé [45] ou une augmentation de la fréquence feront dévier la solution de ce

comportement idéal. L'influence de l'ensemble des paramètres, cependant, n'est pas toujours comprise.

Dans le cadre de notre étude, nous avons donc décidé de conserver les deux solutions analytiques de Rienstra. En pratique, nous conseillons de privilégier la solution de Kutta mais la formulation continue pourra être utilisée pour évaluer les écarts maximums possibles avec la réalité supposée. Dans le cas du conduit bafflé, enfin, la solution étant construite à partir d'un modèle sans écoulement, aucun échappement tourbillonnaire n'est pris en compte. Le modèle proposé correspond donc à un équivalent, pour la géométrie tronquée, de la solution continue de Rienstra.

1.7 Rayonnement d'un conduit annulaire en présence de traitement acoustique

Après avoir décrit les éléments constitutifs de la méthode analytique et analysé chacun des phénomènes physiques associés, nous concluons ce premier chapitre par une application générale du code de calcul portant sur le rayonnement d'un conduit annulaire en présence de traitements acoustiques. Pour une source donnée, le rayonnement d'un conduit traité s'obtient en considérant la combinaison linéaire des directivités modales dont les coefficients sont les amplitudes des modes transmis à l'extrémité du conduit. Compte tenu des redistributions d'énergie aux discontinuités d'impédance et de l'allure oscillante des directivités modales, on s'attend alors à observer des formes de rayonnement relativement complexes. La figure 1.19 compare les diagrammes de rayonnement obtenus pour une configuration rigide et deux

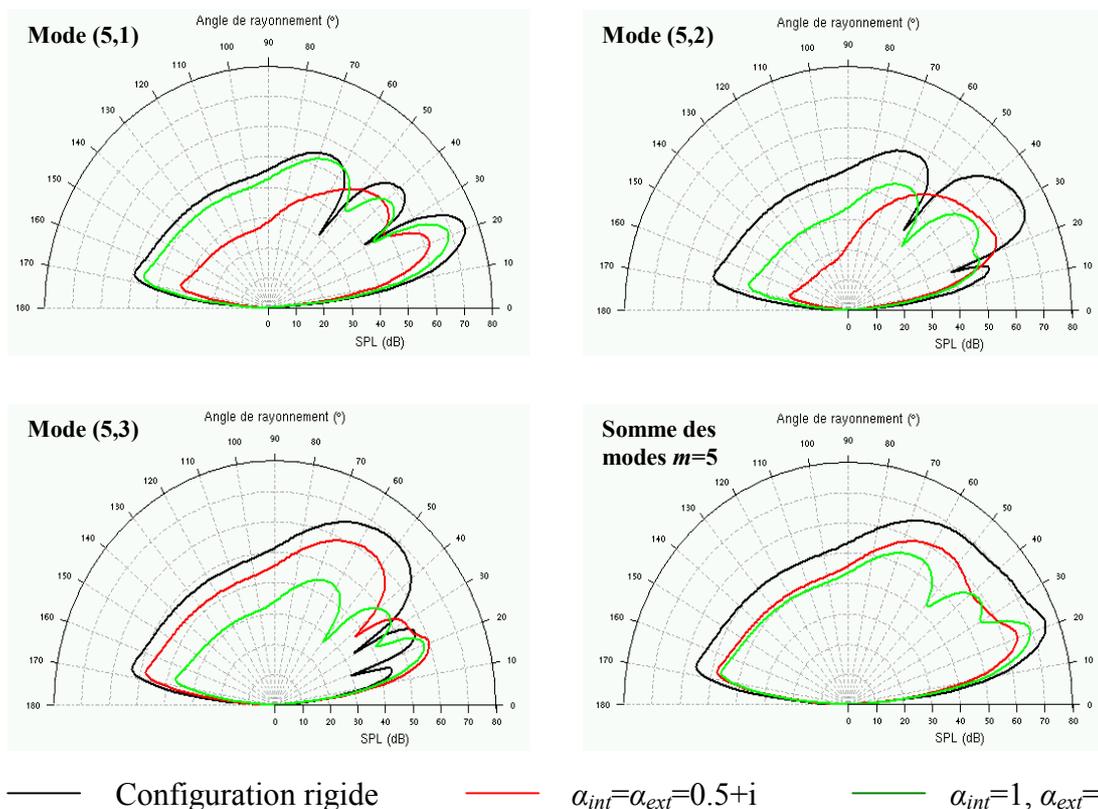


Figure 1.19 : Influence des traitements acoustiques sur le rayonnement des modes (5,n) et le rayonnement global pour $m=5$ (somme des modes radiaux). $k=20$, $M_0=0.5$, $R_{ec}=20$, $I_{mn}=100$ dB.

configurations traitées dans le cas d'une source définie d'abord par chacun des modes radiaux de l'ordre azimutal 5, puis par la somme de ces différents modes (sommation RMS : pas d'interférences entre les modes). Les données complètes de l'étude sont : $k=20$, $h=0.6$, $L^E=3$, $z^T=1$, $L^T=1$, $\alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.5+i$ pour la première configuration traitée, puis $\alpha_{int}=1$ et $\alpha_{ext}=0.5$ pour la seconde configuration (on ne considère à chaque fois qu'un seul tronçon traité).

Si l'on étudie le rayonnement d'un mode incident isolé, les résultats de la figure 1.19 illustrent en champ lointain les redistributions modales observées au paragraphe 1.5.3. Ainsi, à l'exception des modes incidents d'ordre $n=1$, on observe généralement en conduit traité un recentrage de la direction principale de rayonnement, qui s'explique par les transmissions d'énergie sur les modes d'ordres radiaux inférieurs. Ceci apparaît clairement sur la figure 1.19 pour le mode (5,3), un peu moins pour le mode (5,2) (probablement du fait des phénomènes de parité observés au paragraphe 1.5.3).

Si l'on s'intéresse au potentiel d'atténuation des traitements acoustiques, les rayonnements obtenus pour les différents modes montrent que l'efficacité relative de deux traitements dépend fortement du champ incident. Ainsi, dans notre cas, l'atténuation fournie par la première configuration traitée (courbe rouge) est supérieure pour le mode (5,1) et inférieure pour les modes (5,2) et (5,3). Ce phénomène illustre la nécessité d'avoir une description suffisante de la source dans le cadre des études d'optimisation. Dans les entrées d'air, plusieurs mesures du contenu modal ont été réalisées au cours d'essais statiques et l'on commence aujourd'hui à avoir une connaissance satisfaisante des modes excités selon le type de bruit considéré (bruit à large bande, bruit de raies...). Dans le cas des éjections, en revanche, aucune analyse n'a pour l'instant été effectuée avec précision. Pour le bruit de raies, les modèles analytiques prévoient l'excitation de modes particuliers liés à l'interaction entre le sillage de la soufflante et les aubes de son redresseur [126] mais l'émergence de ces modes sur les moteurs réels reste à vérifier. Par conséquent, en conduit d'éjection, l'hypothèse la plus fréquemment utilisée aujourd'hui encore est celle d'une équi-répartition de l'énergie acoustique sur l'ensemble des modes passants (on parle alors d'excitation multi-modale).

Une fois la source définie, enfin, il est à noter que la détermination d'un optimum en terme de traitement acoustique demeure très délicate et obéit à de nombreux compromis. D'une part, les matériaux absorbants devront assurer la meilleure atténuation possible sur une gamme de fréquences élargie et pour les différentes conditions de vol de l'avion. Ceci suppose, notamment, la prise en compte d'écoulements et de sources variables d'une configuration à l'autre. D'autre part, la définition des traitements peut varier selon les critères d'optimisation retenus. A titre d'exemple, on observe sur la figure 1.19 que l'atténuation en configuration traitée présente un caractère anisotrope. Selon que l'on cherche à réduire l'énergie totale rayonnée ou que l'on privilégie une direction angulaire pour l'atténuation, on pourra alors s'orienter vers différents traitements...

1.8 Conclusion

Après un court rappel des équations de base de l'acoustique, ce premier chapitre nous a permis d'exposer la méthode de calcul analytique et ses différentes étapes : décomposition du champ en mode de conduit, redistributions modales aux discontinuités d'impédance, réflexion à l'extrémité du conduit et rayonnement vers l'extérieur. Les modèles mathématiques

associés à chacune de ces étapes ont été présentés et les phénomènes physiques correspondants illustrés par de nombreux exemples. Un effort particulier a été porté sur l'interprétation des résultats, avec notamment une description des phénomènes de propagation et de diffraction en terme de rayons. L'influence de l'écoulement, du rapport de rayon, de la forme du corps central et d'un échappement tourbillonnaire au bord de fuite du conduit a également été soulignée.

Nous disposons désormais d'un code de calcul analytique dédié à la modélisation du rayonnement acoustique d'un conduit annulaire en présence d'un écoulement uniforme et de traitements acoustiques. Deux géométries simplifiées peuvent être considérées, l'une avec un corps central infini, l'autre avec un corps central tronqué sur la section de sortie. Si le modèle de rayonnement associé à la géométrie tronquée présente quelques approximations, nous insistons ici sur le fait que les solutions calculées par la méthode de Wiener-Hopf dans le cas du corps central infini sont mathématiquement exactes (compte tenu des hypothèses faites sur la géométrie et l'écoulement). Par conséquent, le modèle analytique va maintenant pouvoir être utilisé comme solution de référence pour étudier la validité des méthodes de calcul numériques BEM et FEM et de la méthode asymptotique par sommation de faisceaux gaussiens.

Chapitre 2

Approches numériques et asymptotiques du problème

2.1 Introduction

La simulation numérique des phénomènes de propagation et de rayonnement acoustiques a connu depuis quelques années des avancées considérables qui permettent aujourd'hui de se tourner vers différentes méthodes de calcul selon les besoins de la modélisation. En aéroacoustique, on distingue généralement deux types d'approches numériques (on parle de méthodes CAA pour Computational AeroAcoustics) :

- les méthodes de calcul directes (DNS : Direct Numerical Simulation) basées sur une résolution des équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires à toutes les échelles. Les déterminations du champ aérodynamique et des fluctuations acoustiques sont alors implicitement couplées et effectuées de façon conjointe.
- les approches hybrides ou indirectes qui consistent à dissocier le calcul aérodynamique du calcul acoustique. Dans ce cas, le champ moyen est déterminé dans une première étape par une méthode CFD (pour Computational Fluid Dynamics) puis utilisé comme support pour l'étude de la propagation acoustique. Naturellement, la précision de ce type de méthode dépend de la capacité de l'opérateur de propagation à rendre compte de l'interaction entre le champ acoustique et l'écoulement porteur.

À première vue, les méthodes de résolution directes sont très attractives car elles permettent de déterminer le champ acoustique à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides, sans hypothèse simplificatrice particulière. Contrairement aux méthodes hybrides, les interactions entre les perturbations aérodynamiques et acoustiques sont alors directement prises en compte et les termes sources sont calculés. Cependant, du fait des différences d'échelles et d'amplitudes existant entre les grandeurs aérodynamiques et acoustiques, la mise en œuvre des méthodes directes est relativement complexe. Les contraintes numériques au niveau des algorithmes de discrétisation, des maillages et des conditions aux limites, notamment, sont très importantes. C'est pourquoi, malgré le développement depuis quelques années de techniques spécifiques à l'aéroacoustique [125] [59], les méthodes DNS demeurent limitées actuellement à des problèmes fondamentaux

résolus sur des domaines de petite taille et ne sont appliquées que très rarement en aéronautique.

L'emploi des méthodes hybrides pour prédire le rayonnement acoustique des turboréacteurs est devenu, en revanche, très fréquent. Selon les auteurs ou le type de modélisation retenu, la résolution du problème peut être effectuée aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Les principales méthodes utilisées aujourd'hui en conduit d'éjection sont rappelées ci-dessous, en fonction de la complexité physique du modèle considéré :

1. Les méthodes intégrales (ou BEM : Boundary Element Method) constituent l'approche la plus simple. Elles permettent de modéliser la diffraction des ondes acoustiques par des solides quelconques mais sont limitées à un modèle d'écoulement uniforme. Ces méthodes sont donc utilisées en général pour étudier des effets de géométrie et servent également parfois de référence pour évaluer les résultats de méthodes plus élaborées [61] [103]. Le principal avantage des formulations intégrales est de ramener la discrétisation du problème aux seules frontières du domaine de propagation.
2. Suite aux développements effectués dans le cadre des entrées d'air, différentes méthodes basées sur la résolution de l'équation de propagation en écoulement potentiel (voir paragraphe 2.2.2) ont été appliquées au problème de l'éjection. Ainsi, Sugimoto *et al.* [123] [124] utilisent une méthode fréquentielle par éléments finis de volume (FEM : Finite Element Method) tandis que Di Francescantonio et Casalino [28] [21] développent une nouvelle approche numérique appelée GFD (Green Function Discretization).¹ Comme nous l'avons vu en introduction, cependant, les écoulements en conduit d'éjection font apparaître des couches de mélange rotationnelles et ne peuvent être considérés *a priori* comme potentiels. C'est pourquoi les applications citées ci-dessus se limitent en réalité à des configurations sans écoulement ou à une modélisation de la propagation des ondes à l'intérieur des conduits où l'hypothèse de l'écoulement potentiel est plus acceptable. Pour permettre une application plus générale de ce type de méthode, des développements spécifiques ont été proposés par Eversman et Okunbur [33] [34] qui intègrent dans la formulation FEM une ligne de glissement entre deux écoulements potentiels. Ce modèle a ensuite été utilisé par Nallasamy *et al.* [89] [90] et semble fournir des résultats cohérents même si aujourd'hui, aucune évaluation précise de la méthode n'a été entreprise.
3. Pour prendre en compte l'effet d'un écoulement porteur quelconque sur la propagation des ondes, de nombreux auteurs développent actuellement des méthodes de calcul basées sur la résolution des équations d'Euler linéarisées (méthodes LEE : Linearized Euler Equations). L'approche la plus fréquemment utilisée consiste à résoudre le problème dans le domaine temporel, à partir d'un schéma aux différences finies (Zhang [129] [130] [131] [132], Ozyoruk *et al.* [96] [95], Ahuja *et al.* [3], Li *et al.* [63]). Certains auteurs, comme Redonnet *et al.* [101] [102] [103] [104], se placent dans un cadre plus général en considérant une formulation 'en petites perturbations' des équations d'Euler ou de Navier-Stokes (non linéarisées *a priori*). Quelques approches fréquentielles sont également proposées comme celles de Ozyoruk [97] ou

¹ L'idée de la méthode est d'utiliser, dans le schéma de discrétisation, des fonctions d'interpolation correspondant aux solutions locales de l'équation de Helmholtz (fonctions de Green). En tenant compte ainsi d'un aspect physique de la propagation dans le schéma numérique, la méthode permet de réduire les contraintes de discrétisation qui s'appliquent habituellement.

Zhao *et al.* [133]. Ces derniers, notamment, présentent une méthode de type éléments finis pour déterminer la solution des équations d'Euler linéarisées. Notons que pour évaluer le rayonnement en champ lointain, ces différentes approches sont généralement couplées à un calcul intégral fondé sur la technique de la surface de Kirchhoff [67] ou sur l'analogie acoustique de Ffowcs-Williams & Hawkings [13]. Pour le problème spécifique de l'éjection, la seconde formulation semble la plus adaptée car contrairement à l'intégration de Kirchhoff, elle permet de situer la surface d'intégration dans une région d'écoulement non uniforme.

De manière générale, les méthodes de calcul numériques ne convergent que si la discrétisation du problème est suffisante pour décrire correctement le caractère ondulatoire de la propagation du bruit. Par conséquent, les maillages acoustiques sont contraints par les plus petites longueurs d'onde du problème et le volume des calculs augmente inexorablement avec la bande de fréquence considérée. L'emploi des méthodes numériques n'est donc possible généralement que pour les problèmes en basses et moyennes fréquences (nous donnerons dans la suite un ordre de grandeur des fréquences accessibles pour les différentes méthodes utilisées dans ce mémoire). Pour étudier la propagation acoustique à haute fréquence, on se tourne alors vers des approches spécifiques basées sur des approximations asymptotiques de l'équation de propagation des ondes. Citons la méthode de l'équation parabolique considérée par Lan [56], Mendoza *et al.* [72] puis Nark *et al.* [91] [92] [93], ou encore les méthodes dites de « tracé de rayons » (Ray-Tracing) utilisées principalement jusqu'ici sur le problème de l'entrée d'air (Dougherty [30], Lidoine [65]).

Afin de modéliser le rayonnement acoustique des nacelles de turboréacteurs, nous disposons à AIRBUS de trois méthodes de calcul développées initialement pour le problème de l'entrée d'air. Ces méthodes, toutes basées sur une approche fréquentielle, sont :

- Pour les basses et moyennes fréquences : la méthode intégrale (code ACTI3S) et la méthode FEM en écoulement potentiel (code ACTRAN).
- Pour les hautes et moyennes fréquences : la méthode dite de sommation de faisceaux gaussiens (méthode SFG, code VOXLAN). Cette approche correspond à une extension des méthodes de tracé de rayon qui repose sur une approximation paraxiale de l'équation des ondes autour de rayons déterminés au préalable par la théorie géométrique.

Si la méthode intégrale et la méthode par sommation de faisceaux gaussiens sont limitées à la prise en compte d'un écoulement uniforme², ces deux approches combinées doivent nous permettre de modéliser le problème sur toute la gamme de fréquence ($0 < k < 140$) en tenant compte, notamment, de géométries réalistes. Pour étudier l'influence d'un écoulement non uniforme, on pourra se tourner ensuite vers la méthode FEM. Dans le code de calcul ACTRAN, l'écoulement moyen est supposé en tout point irrotationnel³. Cette hypothèse est

² Théoriquement, l'approche asymptotique peut être formulée pour un écoulement quelconque à condition que les gradients s'étendent sur des longueurs caractéristiques supérieures à la longueur d'onde. Le code VOXLAN utilisé ici suppose toutefois un modèle d'écoulement uniforme.

³ Les développements proposés par Eversman et Okunbur (voir page précédente) ne sont pas intégrés au code ACTRAN.

incompatible avec le développement des couches de mélange en aval de l'éjection de sorte que la méthode semble *a priori* mal adaptée à notre problème... En l'absence de modèle plus général, cependant, l'évaluation de la méthode FEM potentielle présente un intérêt pour deux raisons :

- Si l'on ne souhaite pas utiliser la méthode potentielle pour modéliser les phénomènes acoustiques à travers les couches de mélange, l'application du code ACTRAN peut être limitée à l'étude de la propagation à l'intérieur des conduits. Dans ce cas, en effet, l'hypothèse de l'écoulement potentiel n'est pas trop abusive car cela revient principalement à négliger l'influence des couches limites, relativement faible. La méthode FEM permettra alors d'analyser l'effet des variations de vitesse dans le conduit et d'évaluer plus précisément l'efficacité des traitements acoustiques en écoulement non uniforme. Par ailleurs, pour effectuer une première estimation du rayonnement en champ lointain, on pourra réaliser un couplage de la méthode FEM à des modèles de rayonnement analytiques. Cette approche, notamment, a été proposée par Sugimoto et Astley [124].
- Malgré les limitations théoriques, il peut être intéressant d'évaluer les résultats du code ACTRAN sur un écoulement porteur non potentiel. En effet, aucune analyse de ce type n'a été proposée pour l'instant et il est donc délicat de condamner une telle application *a priori*. En réalité, utiliser la méthode FEM sur un écoulement non potentiel revient principalement à négliger les termes rotationnels présents dans les équations d'Euler : selon l'influence de ces termes sur la propagation acoustique, on obtiendra alors des résultats plus ou moins satisfaisants. Il est par exemple permis de penser que les effets de réfraction du son par les gradients seront correctement pris en compte... Enfin, notons qu'il est possible de proposer à l'aide du code ACTRAN un modèle particulier de couche de cisaillement respectant les hypothèses fondamentales de la méthode. Ce modèle revient à inclure artificiellement une membrane solide imperméable séparant deux écoulements potentiels et autorisant la transmission des perturbations acoustiques (voir le chapitre 4)...

Pour effectuer une première évaluation des méthodes numériques utilisées dans ce mémoire, nous nous limiterons dans ce chapitre à une analyse des résultats en configurations canoniques, sans écoulement ou avec un écoulement uniforme. Dans un premier temps, les équations de base considérées dans chacune des approches sont rappelées, ainsi que les grandes lignes de la résolution numérique⁴. Les résultats des méthodes à basses fréquences (BEM et FEM) sont comparés ensuite aux prédictions du modèle analytique présenté au chapitre 1, puis à des mesures réalisées en chambre sourde. Enfin, la pertinence de la méthode asymptotique SFG est évaluée à l'aide de la méthode de calcul analytique. Nous verrons que les conclusions de l'analyse sont extrêmement positives concernant les méthodes à basses fréquences mais plus mitigées pour ce qui est de la méthode asymptotique.

⁴ Le but ici est simplement de donner une vue d'ensemble des méthodes utilisées dans ce mémoire. Pour une description plus détaillée de chacun des modèles, on pourra se reporter à la thèse de Lidoine [65].

2.2 Présentation des différentes méthodes de calcul

2.2.1 Formulation intégrale par éléments finis de frontière

L'utilisation de la représentation intégrale est devenue fréquente dans les problèmes de physique à grande échelle, lorsque le domaine de propagation considéré est ouvert. La méthode, en effet, est bien adaptée à l'étude des phénomènes de rayonnement en présence d'objets diffractant car elle permet de relier le champ acoustique en tout point de l'espace aux valeurs de la pression et de sa dérivée normale sur les frontières du domaine. Pour étudier la propagation du son autour de géométries tridimensionnelles complexes, il suffit alors d'effectuer un maillage de surface, ce qui limite fortement la taille des systèmes à résoudre. Contrairement aux méthodes de calcul volumique, par ailleurs, la condition de rayonnement de Sommerfeld est naturellement prise en compte dans la formulation intégrale.

Cependant, la mise en œuvre de la méthode intégrale par éléments finis de frontière est soumise à deux inconvénients majeurs. Le premier est lié à l'existence de singularités dans les intégrales surfaciques qui compliquent la résolution numérique du problème. Le second réside dans la non-symétrie des systèmes obtenus par les méthodes de discrétisation directes qui interdit l'utilisation d'algorithmes d'inversion performants. Afin de contourner ces deux inconvénients, Hamdi [43] puis Mebarek [71] ont proposé une nouvelle approche du problème basée sur une formulation variationnelle des équations intégrales. En utilisant des fonctions tests puis en suivant le schéma de Galerkin classique, cette approche permet de réduire l'ordre des singularités et aboutit, après discrétisation, à un système généralement symétrique. C'est donc cette formulation variationnelle qui a été retenue dans le code de calcul ACTI3S développé par le Centre Commun de Recherche d'EADS et utilisé à AIRBUS. Nous nous proposons de rappeler dans cette section les principaux fondements de la méthode intégrale et de décrire les particularités du code ACTI3S portant, notamment, sur le modèle d'écoulement considéré (écoulement dit quasi-uniforme).

- **Position du problème**

La modélisation du problème considérée dans le code ACTI3S est représentée sur la figure 2.1. L'éjection est tridimensionnelle, non nécessairement à symétrie de révolution, et de forme quelconque *a priori*. Le domaine de propagation Ω^+ est séparé du domaine intérieur Ω^- par l'intermédiaire d'une surface fermée Σ . Cette dernière est constituée de surfaces réelles, rigides Σ^R ou traités Σ^T , et de surfaces fictives Γ qui assurent l'entrée et la sortie des ondes dans le domaine de propagation (voir le paragraphe 1.3.5). Afin de représenter les conduits d'éjection primaire et secondaire, par exemple, plusieurs surfaces sources Γ peuvent être prises en compte. Pour les besoins de la décomposition modale, toutes correspondent à des sections de conduits droites, de formes annulaires, et sont situées dans une partie de conduit rigide.

Le vecteur normal aux différentes surfaces \vec{n} est orienté vers le domaine intérieur Ω^- . L'écoulement moyen dans le milieu de propagation Ω^+ est supposé uniforme (nous reviendrons sur ce point, qui en toute rigueur constitue une hypothèse impropre, page 69).

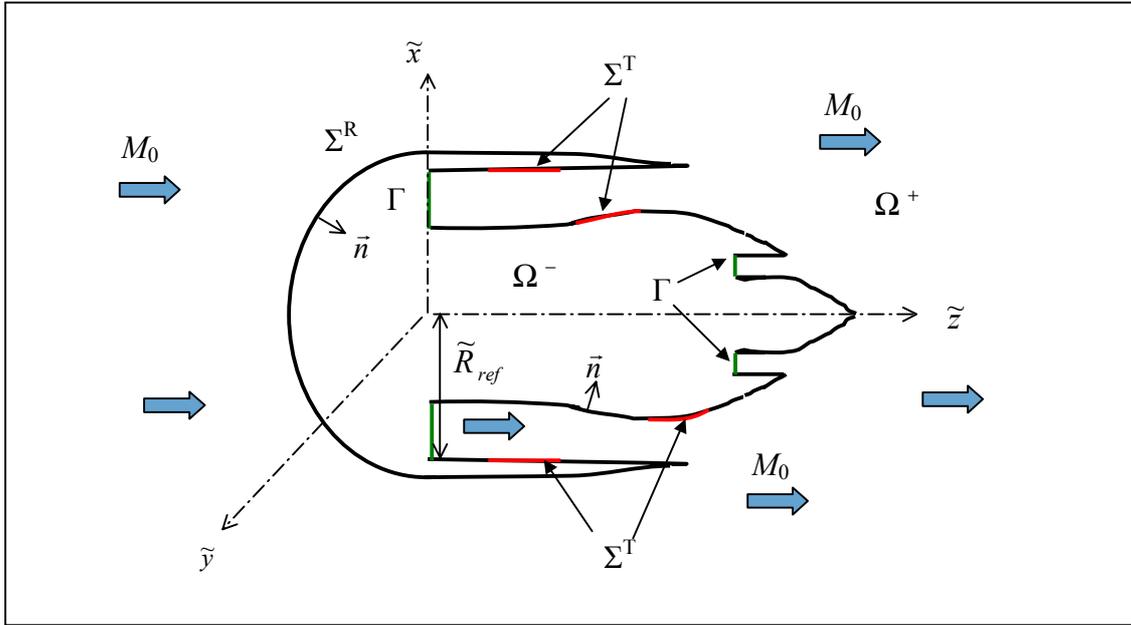


Figure 2.1 : Modélisation de l'éjection dans la formulation intégrale.

De la même manière qu'au chapitre 1, nous utiliserons dans cette section des grandeurs adimensionnelles (voir les équations (1.13)). La densité et la célérité du son de l'écoulement moyen $\tilde{\rho}_0$ et \tilde{c}_0 sont à nouveau choisies comme grandeurs de référence mais la géométrie considérée ici ne se réduisant plus à un conduit annulaire de section constante, la longueur caractéristique \tilde{R}_{ref} est définie cette fois comme étant le rayon externe de la surface modale de plus grande taille (cf. figure 2.1).

• Équation intégrale en l'absence d'écoulement

Dans un premier temps, pour introduire la formulation intégrale en s'affranchissant des problèmes de modélisation liés à l'écoulement, nous supposons que le champ de vitesse moyen est nul ($M_0 = 0$). La pression acoustique dans le domaine Ω^+ , que l'on note ici p^+ , est alors solution du problème (2.1) :

$$\begin{aligned}
 \text{dans } \Omega^+ : & \quad \Delta p^+ + k^2 p^+ = 0, \\
 \text{sur } \Sigma^R : & \quad \frac{\partial p^+}{\partial n} = 0, \\
 \text{sur } \Sigma^\Gamma : & \quad \frac{\partial p^+}{\partial n} = i\alpha k p^+, \\
 \text{sur } \Gamma : & \quad p^+ = p_{inc} + p_{ref} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial n} + \frac{\partial p_{ref}}{\partial n}, \\
 \text{à l'infini :} & \quad \text{condition de Sommerfeld.}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans notre cas, la pression incidente est définie sous la forme d'un mode de conduit rigide passant, d'intensité réglable. La pression réfléchie s'exprime, elle, comme une combinaison linéaire de modes rétrogrades dont les amplitudes constituent des inconnues du problème.

Pour écrire la formulation intégrale de manière rigoureuse (en définissant notamment l'opérateur de Laplace au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 [43]), il est nécessaire de considérer également un problème adjoint dans le domaine Ω^- . On note alors p^- la pression dans Ω^- et on impose :

$$\begin{aligned} \text{dans } \Omega^- : \quad & \Delta p^- + k^2 p^- = 0, \\ \text{sur } \Sigma^R : \quad & \frac{\partial p^-}{\partial n} = 0, \\ \text{sur } \Sigma^T : \quad & \frac{\partial p^-}{\partial n} = -i\alpha k p^-, \\ \text{sur } \Gamma : \quad & p^- = 0 \text{ et } \frac{\partial p^-}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il est à noter que le choix du problème intérieur est arbitraire et ne modifie pas la solution dans Ω^+ . En revanche, l'équation intégrale à résoudre dépend des problèmes intérieur et extérieur de sorte que pour faciliter la résolution de cette équation, il importe de choisir un problème adapté dans Ω^- .

Une fois les problèmes sur Ω^+ et Ω^- correctement posés, on introduit la fonction de Green harmonique tridimensionnelle en espace libre $G(\vec{x}_0, \vec{x})$:

$$G(\vec{x}_0, \vec{x}) = \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}_0|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}. \quad (2.3)$$

Cette fonction est solution, sur $\Omega^+ \cup \Omega^-$, de l'équation $\Delta G + k^2 G = -\delta(\vec{x}_0)$ et satisfait la condition de Sommerfeld. En utilisant le théorème de Green, on aboutit à la formulation intégrale (2.4) qui relie le champ de pression $p(\vec{x})$, en tout point de $\Omega^+ \cup \Omega^- - \Sigma$, aux inconnues de surface $q_1(\vec{y})$ et $q_2(\vec{y})$:

$$p(\vec{x}) = \int_{\Sigma} \left[G(\vec{x}, \vec{y}) q_1(\vec{y}) - \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} q_2(\vec{y}) \right] d\Sigma_y, \quad (2.4)$$

$$\text{avec :} \quad q_1(\vec{y}) = \left(\frac{\partial p^+(\vec{y})}{\partial n} - \frac{\partial p^-(\vec{y})}{\partial n} \right),$$

$$\text{et :} \quad q_2(\vec{y}) = p^+(\vec{y}) - p^-(\vec{y}). \quad (2.5)$$

q_1 et q_2 sont appelés, respectivement, potentiel de simple couche et potentiel de double couche. Physiquement, ces grandeurs correspondent à des distributions de sources ponctuelles de types monopolaire et dipolaire, rayonnant dans le domaine de propagation.

En conclusion, la formulation intégrale permet de scinder le problème en deux parties. Dans un premier temps, il s'agit de déterminer les potentiels de couche q_1 et q_2 sur la frontière des domaines Ω^+ et Ω^- . Cette première étape constitue la difficulté principale de l'approche intégrale et nécessite la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique par éléments finis de frontière. Une fois les inconnues q_1 et q_2 déterminées, le champ acoustique en tout point du domaine de propagation Ω^+ s'obtient par un simple calcul de l'intégrale surfacique (2.4). Nous présentons dans la suite les grandes lignes du calcul des potentiels de couche.

- **Équations de couche et formulation variationnelle**

En réécrivant l'équation intégrale (2.4) pour un point de calcul \vec{x} situé sur la surface d'intégration Σ puis en dérivant la relation obtenue par rapport au vecteur normal à la surface au point \vec{x} , on aboutit, après quelques développements analytiques, au système des équations de couche (2.6):

$$\begin{aligned} s[q_1] + d_1[q_2] - \frac{1}{2}q_2 &= 0, \\ -d_r[q_2] + d_2[q_1] + \frac{1}{2}q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dans lequel nous avons noté :

$$\begin{aligned} s[f](\vec{x}) &= \int_{\Sigma} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\Sigma_y, & d_1[f](\vec{x}) &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} f(\vec{y}) d\Sigma_y, \\ d_2[f](\vec{x}) &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_x} f(\vec{y}) d\Sigma_y, & d_r[f](\vec{x}) &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y \partial n_x} f(\vec{y}) d\Sigma_y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la résolution des équations de couche par une discrétisation directe du système (2.6) présente deux inconvénients majeurs. D'une part, elle nécessite l'évaluation de la partie finie, si elle existe, de l'intégrale singulière $d_r[q_2]$ (intégrale divergente du fait de la double dérivation de la fonction de Green sous le signe somme, voir Hamdi [43]). D'autre part, elle conduit à un système d'équations linéaires dans lequel la matrice globale est pleine et non symétrique. Afin de contourner ces deux inconvénients, les équations de couche peuvent être résolues à partir d'une formulation variationnelle, comme l'ont proposé Hamdi [43] et Mebarek [71]. On introduit pour cela les fonctions tests Ψ_1 et Ψ_2 évoluant dans le même espace, respectivement, que q_1 et q_2 et on définit le produit scalaire suivant, pour toute surface S :

$$\langle f, g \rangle_S = \int_S fg dS. \quad (2.8)$$

Les équations de couche (2.6) se réécrivent alors sous la forme variationnelle (2.9) :

$$\begin{aligned} \langle s[q_1], \Psi_1 \rangle_{\Sigma} + \langle d_1[q_2], \Psi_1 \rangle_{\Sigma} - \frac{1}{2} \langle q_2, \Psi_1 \rangle_{\Sigma} &= 0, \\ -\langle d_r[q_2], \Psi_2 \rangle_{\Sigma} + \langle d_2[q_1], \Psi_2 \rangle_{\Sigma} + \frac{1}{2} \langle q_1, \Psi_2 \rangle_{\Sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

C'est ce système d'équation qui est résolu, dans ACTI3S, par discrétisation en éléments finis de frontière. Notons que l'intégration par partie du produit scalaire $\langle d_r[q_2], \Psi_2 \rangle_{\Sigma}$ permet d'éliminer la double dérivation de la fonction de Green et, par conséquent, d'aboutir à une formulation régulière.

• Modélisation de l'écoulement

Pour pouvoir bénéficier d'une expression analytique simple de la fonction de Green, la formulation intégrale est limitée, *a priori*, à la prise en compte d'un écoulement uniforme et subsonique. Dans ce cas, le problème à résoudre est identique à celui présenté au chapitre 1 pour la formulation analytique mais les conditions aux limites sur les surfaces solides posent problème. En effet, lorsque l'on considère une éjection de forme quelconque telle que celle représentée sur la figure 2.1, le concept de l'écoulement uniforme est incompatible avec la condition de glissement qui doit être respectée sur les parois de la nacelle :

$$M_0 \vec{e}_z \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.10)$$

On aboutit ainsi à une contradiction qui provient du caractère très simpliste de l'approximation de l'écoulement uniforme. En pratique, le fluide contourne les parois de l'éjection et le champ de vitesse ne peut être considéré comme uniforme. C'est pourquoi, pour modéliser le problème en présence d'un écoulement, de nombreux auteurs proposent en fait de coupler le calcul intégral à une méthode de résolution volumique. Dans ce cas, la propagation du son autour des parois solides est calculée par une méthode de type différences finies ou éléments finis de volume et sur une surface fictive située suffisamment loin de la nacelle pour que l'écoulement puisse être considéré comme uniforme (on parle de surface de Kirchhoff), les résultats sur la pression et sa dérivée normale sont utilisées pour effectuer un calcul intégral.

Cependant, cette approche revient à utiliser les méthodes de calcul volumiques et ne tire donc aucun bénéfice du principal avantage de la formulation intégrale, qui consiste à effectuer un maillage de surface uniquement. C'est pourquoi, dans le code de calcul ACTI3S, une solution intermédiaire a été retenue pour respecter au mieux les conditions aux limites tout en s'affranchissant d'un couplage de la méthode intégrale. Cette solution est appelée dans la suite *écoulement quasi-uniforme*. Le principe est le suivant :

1. Dans le domaine de propagation Ω^+ , l'écoulement est supposé uniforme et vaut : $\vec{v}_0 = M_0 \vec{e}_z$. Pour établir l'équation intégrale, on considère alors la fonction de Green en écoulement uniforme G_0 , solution de l'équation :

$$\Delta G_0 + \left(k - iM_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 G_0 = -\delta. \quad (2.11)$$

En utilisant le théorème de Green, on aboutit après un développement analytique à la représentation intégrale suivante :

$$p(\vec{x}) = \int_{\Sigma} \left[G_0(\vec{x}, \vec{y}) q_1(\vec{y}) - \frac{\partial G_0(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} q_2(\vec{y}) \right] d\Sigma_y - \int_{\Sigma} \left[(\vec{v}_0 \cdot \vec{n}) (\vec{v}_0 \cdot \vec{V}) (q_2(\vec{y}) G_0(\vec{x}, \vec{y})) \right] d\Sigma_y, \\ \text{avec : } \vec{x} \in \Omega^+ . \quad (2.12)$$

Cette dernière relation permet d'établir un nouveau système aux équations de couche, similaire au système (2.9).

2. Sur les surfaces solides Σ^R et Σ^T de la frontière Σ , l'écoulement est supposé tangent et s'écrit :

$$\vec{v}_0 = M_0 \vec{e}_z - M_0 (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \vec{n} . \quad (2.13)$$

Finalement, le calcul des potentiels de couche et de l'intégrale finale (2.12) s'effectue en tenant compte de la condition (2.13), ainsi que des conditions aux limites portant sur les perturbations acoustiques (1.17) et (1.19). La relation de Myers (1.19), en particulier, est réécrite dans le cas d'un écoulement tangent à la paroi ...

En conclusion, la modélisation introduite dans le code ACTI3S suppose un écoulement uniforme dans le domaine de propagation Ω^+ et un écoulement rasant sur les parois solides de la nacelle (Σ^R et Σ^T). À première vue, le modèle peut paraître assez grossier car le champ de vitesse considéré est alors discontinu. L'application du code ACTI3S sur le problème des entrées d'air a montré toutefois que cette modélisation permet de retrouver les prédictions analytiques en présence d'un écoulement uniforme [64]. Nous verrons dans la section 2.3 ce qu'il en est dans le cas de l'éjection.

- **Discretisation en éléments finis de frontière**

Dans le cas d'une géométrie quelconque, le système des équations de couche (2.9) ne peut être résolu que numériquement en procédant à une discrétisation du problème. La surface Σ est alors maillée en éléments finis de frontière, de formes triangulaires. Pour assurer la convergence du calcul numérique, la taille des éléments finis est contrainte de façon classique par la longueur d'onde acoustique λ . La discrétisation, en effet, doit être suffisamment fine pour décrire de manière satisfaisante le caractère ondulatoire du champ acoustique. Par ailleurs, lorsque l'on considère un écoulement porteur, il importe de tenir compte des effets de dilatation et de rétrécissement de la longueur d'onde. Pour le code de calcul ACTI3S, les études de convergence ont abouti au critère de discrétisation suivant : loin des discontinuités de géométrie ou d'impédance, une taille de maille inférieure à $(\lambda/5)(1-M_0^2)$ est suffisante pour garantir une bonne précision des résultats ; proche des discontinuités, l'évolution du champ acoustique est plus rapide et le maillage doit être raffiné, de manière continue, jusqu'à des tailles inférieures à $(\lambda/15)(1-M_0^2)$. En conclusion, lorsque la fréquence d'étude augmente, la discrétisation du problème nécessite la résolution de systèmes de plus en plus importants, ce qui se traduit par une augmentation des temps de calcul et requiert des

capacités de stockage en mémoire de plus en plus élevées. Aussi, pour des applications de type industriel portant sur des configurations tridimensionnelles, nous retiendrons que la méthode de calcul BEM est applicable, actuellement, jusqu'à des fréquences réduites de l'ordre de $k \sim 50$. Pour plus d'information sur la mise en oeuvre et la résolution du problème numérique, on pourra se reporter aux travaux de Lidoine [65].

2.2.2 Formulation par éléments finis de volume et éléments infinis

Lorsque l'on souhaite prendre en compte l'effet d'un écoulement non uniforme quelconque sur la propagation des ondes acoustiques, il est nécessaire de procéder à une discrétisation du milieu de propagation. Pour les problèmes de grande taille tels que ceux considérés en aéronautique, les méthodes de résolution utilisées sont basées en général sur une *approche hybride* qui consiste à dissocier les problèmes aérodynamique et acoustique. L'écoulement porteur moyen sert alors de support pour écrire l'opérateur de propagation acoustique et doit être déterminé préalablement au calcul acoustique. La méthode par éléments finis de volume considérée dans ce mémoire s'appuie sur un modèle d'écoulement porteur potentiel, seul cas pour lequel l'hypothèse de découplage entre écoulement porteur et ondes sonores est rigoureusement valide.

L'une des difficultés principales de la mise en oeuvre des méthodes FEM dans un domaine non borné réside dans le choix de la condition aux limites à appliquer sur les bords du maillage pour respecter la condition de Sommerfeld. En effet, si aucune condition spécifique n'est définie, des réflexions parasites d'origine purement numérique viennent perturber le champ acoustique dans le domaine de propagation considéré. Afin de résoudre ce problème et de permettre l'évaluation du rayonnement en champ lointain, deux solutions ont été proposées. La première consiste à considérer une zone d'absorption artificielle sur les frontières du domaine et à coupler la méthode volumique à un calcul intégral par l'intermédiaire d'une surface de Kirchhoff ou de Ffowcs-Williams & Hawkings, définie à l'intérieur du domaine de calcul. La seconde, utilisée dans notre cas, repose sur la théorie des éléments infinis dite 'wave-envelope' dans la littérature anglaise (on parle de méthode WEM). Le modèle correspondant, développé notamment par Astley *et al.* [5] et Eversman [35], est basé sur le théorème de Wilcox-Atkinson qui spécifie que tout champ rayonné en espace homogène peut être décrit comme une série infinie de champs multipolaires. Pour coupler la théorie des éléments infinis à la méthode par éléments finis de volume, il est nécessaire de considérer alors deux domaines de propagation, séparés par une surface particulière. Dans le domaine intérieur des éléments finis, l'écoulement porteur peut être non uniforme mais potentiel. Dans le domaine extérieur, pour la mise en oeuvre des éléments infinis, l'écoulement doit être uniforme. Il est à noter que pour le problème de l'éjection, la définition d'une zone d'écoulement uniforme n'est pas aisée car les jets issus des conduits primaires et secondaires s'étendent sur une distance importante en aval de la nacelle. Contrairement aux entrées d'air, un gradient d'écoulement demeure donc sur une région très étendue autour de l'éjection. Nous verrons au chapitre 4 les solutions qui peuvent être envisagées alors pour appliquer la technique des éléments infinis...

Le code ACTRAN utilisé au cours de cette étude est développé par la société FFT de Louvain. Il correspond à une version fréquentielle de la méthode FEM/WEM. Les équations de propagation dans les domaines intérieur et extérieur sont couplées à l'aide d'une formulation variationnelle et résolues par discrétisation en éléments finis de volume et

éléments infinis. Nous rappelons dans cette section les équations fondamentales considérées dans la méthode et les grandes lignes de la résolution du problème.

- **Équations de propagation en écoulement potentiel**

Au chapitre 1, les équations de l'acoustique linéaire en milieu homogène avec écoulement uniforme ont été réécrites, de manière classique, à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides (1.1). Afin de présenter la formulation du problème considérée dans la méthode par éléments finis de volume, il est nécessaire de rappeler également les équations de la propagation acoustique en présence d'un écoulement potentiel. Les étapes conduisant à l'écriture du problème ayant été exposées de manière détaillée par différents auteurs (voir par exemple [65] [121, page 249]), nous nous limiterons dans ce mémoire à un rappel des équations principales et des hypothèses fondamentales du modèle.

Le milieu de propagation est assimilé à un gaz parfait non visqueux et non conducteur de la chaleur. L'écoulement est stationnaire et on suppose qu'à des distances suffisamment éloignées de la nacelle, il peut être considéré comme uniforme. La combinaison de ces différentes hypothèses permet alors de vérifier les propriétés suivantes :

- l'écoulement total est homoentropique, c'est-à-dire que l'entropie ne varie pas en fonction du temps et de la position dans l'espace.
- l'écoulement total est irrotationnel en tout point de l'espace.

Le champ aérodynamique, par conséquent, peut être décrit par l'intermédiaire du potentiel des vitesses $\tilde{\phi}_t$:

$$\tilde{\mathbf{v}}_t = \bar{\nabla} \tilde{\phi}_t. \quad (2.14)$$

Comme au chapitre 1, l'indice t renvoie aux grandeurs de l'écoulement total et la notation \tilde{g} caractérise les grandeurs dimensionnelles. En négligeant les forces de pesanteur, on montre que sous les hypothèses précédentes, les équations fondamentales de la mécanique des fluides (1.1) se réduisent à une équation scalaire portant sur le potentiel des vitesses $\tilde{\phi}_t$ [65] [121] :

$$\Delta \tilde{\phi}_t - \frac{1}{\tilde{c}_t^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_t}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\partial [\bar{\nabla} \tilde{\phi}_t]^2}{\partial \tilde{t}} + \frac{\bar{\nabla} \tilde{\phi}_t}{2} \cdot \bar{\nabla} \left([\bar{\nabla} \tilde{\phi}_t]^2 \right) \right] = 0,$$

avec : $\tilde{c}_t^2 = \tilde{c}_\infty^2 - (\gamma_{GP} - 1) \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_t}{\partial \tilde{t}} + \frac{(\bar{\nabla} \tilde{\phi}_t)^2}{2} - (M_\infty \tilde{c}_\infty)^2 \right].$ (2.15)

\tilde{c}_t est défini de la même manière qu'au chapitre 1 (voir équation (1.2)). γ_{GP} est le rapport des capacités calorifiques du gaz parfait. Les constantes \tilde{c}_∞ et M_∞ , enfin, correspondent aux valeurs à l'infini de la célérité \tilde{c}_t et du nombre de Mach : $M_\infty = \tilde{v}_\infty / \tilde{c}_\infty$.

Pour formuler les équations de la propagation acoustique, on définit à nouveau la grandeur acoustique \tilde{g} comme étant la partie fluctuante de la grandeur totale \tilde{g}_t autour de la valeur moyenne \tilde{g}_0 (voir (1.3) et (1.4)) et on suppose $\tilde{g} \ll \tilde{g}_0$. La linéarisation du problème conduit alors à l'équation (2.16) gouvernant le potentiel des vitesses acoustiques :

$$\Delta \tilde{\phi} - \frac{1}{\tilde{c}_0^2} \left[\frac{d_0^2 \tilde{\phi}}{d\tilde{t}^2} + \bar{\nabla} \tilde{\phi} \cdot \bar{\nabla} \left[\frac{(\bar{\nabla} \tilde{\phi}_0)^2}{2} \right] + (\gamma_{GP} - 1) \Delta \tilde{\phi}_0 \frac{d_0 \tilde{\phi}}{d\tilde{t}} \right] = 0. \quad (2.16)$$

\tilde{c}_0 est la célérité locale des ondes acoustiques, déterminée en conservant les termes d'ordre 0 dans les équations (2.15) :

$$\tilde{c}_0^2 = \tilde{c}_\infty^2 - (\gamma_{GP} - 1) \left[\frac{\tilde{v}_0^2 - (M_\infty \tilde{c}_\infty)^2}{2} \right]. \quad (2.17)$$

Finalement, en introduisant les grandeurs adimensionnelles (1.13) (avec \tilde{c}_{ref} et $\tilde{\rho}_{ref}$ définies par les valeurs moyennes de l'écoulement à l'infini \tilde{c}_∞ et $\tilde{\rho}_\infty$, et \tilde{R}_{ref} , le rayon externe de la surface modale de plus grande taille), l'équation scalaire de la propagation acoustique (2.16) se réécrit, en formulation harmonique :

$$\Delta \phi - \frac{1}{\tilde{c}_0^2} \left[(-ik + \tilde{v}_0 \cdot \bar{\nabla})^2 \phi + \frac{1}{2} \bar{\nabla} \phi \cdot \bar{\nabla} (v_0^2) + (\gamma_{GP} - 1) \Delta \phi_0 (-ik + \tilde{v}_0 \cdot \bar{\nabla}) \phi \right] = 0. \quad (2.18)$$

La pression, la vitesse et la densité acoustiques sont reliées au potentiel des vitesses ϕ par les relations (2.19) :

$$\begin{aligned} p &= \tilde{c}_0^2 \rho = -\rho_0 (-ik + \tilde{v}_0 \cdot \bar{\nabla}) \phi, \\ \tilde{v} &= \bar{\nabla} \phi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

• Position du problème

L'équation de propagation des ondes acoustiques en écoulement potentiel ayant été établie, nous pouvons désormais présenter le problème considéré dans le code de calcul ACTRAN (figure 2.2). Comme pour la méthode intégrale, l'éjection est de forme quelconque et définie par l'intermédiaire d'une surface fermée Σ constituée de parois réelles, rigides ou traitées (Σ^R et Σ^T), et de surfaces sources Γ . Le milieu de propagation est divisé en deux domaines distincts Ω_1 et Ω_2 séparés par une surface fictive Σ_∞ . Le domaine intérieur Ω_1 , fermé, correspond au domaine des éléments finis de volume où l'écoulement est *a priori* non uniforme et potentiel. Le domaine ouvert Ω_2 est le domaine dans lequel la discrétisation en éléments infinis sera appliquée. L'écoulement y est supposé uniforme et dirigé selon l'axe z : $\tilde{v}_\infty = M_\infty \tilde{c}_\infty \bar{e}_z$. Les potentiels acoustiques dans Ω_1 et Ω_2 seront notés, respectivement, ϕ_1 et ϕ_2 .

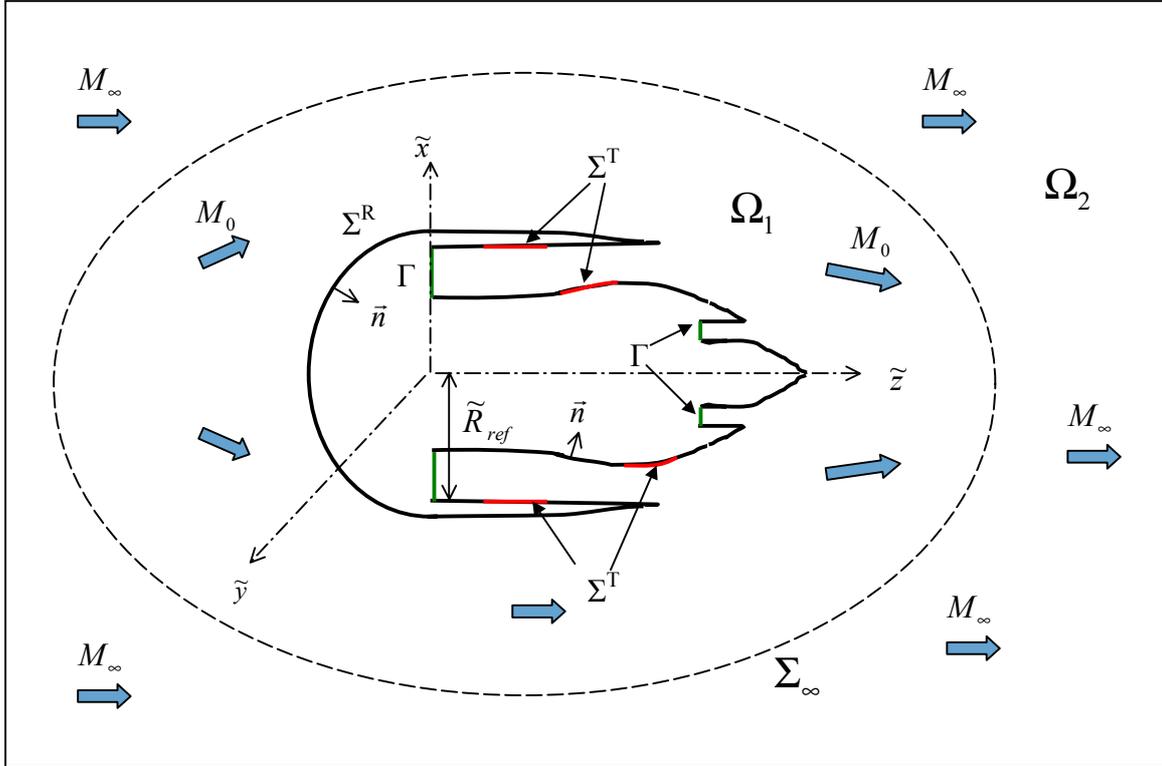


Figure 2.2 : Modélisation de l'éjection dans la méthode FEM/WEM.

Dans le domaine intérieur, le potentiel acoustique ϕ_1 satisfait l'équation (2.18). Pour faciliter la résolution numérique, toutefois, cette équation peut être réécrite sous la forme (2.20) [65]. En considérant les conditions aux limites (2.21), le problème sur le domaine Ω_1 s'écrit alors :

$$ik \frac{\rho_0}{c_0^2} (-ik + \bar{v}_0 \cdot \bar{\nabla}) \phi_1 + \text{div} \left[\rho_0 \bar{\nabla} \phi_1 - \frac{\rho_0}{c_0^2} \bar{v}_0 (-ik + \bar{v}_0 \cdot \bar{\nabla}) \phi_1 \right] = 0, \quad \text{avec :} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \text{sur } \Sigma^R : \quad & \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0, \\ \text{sur } \Sigma^T : \quad & \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\alpha}{ik} (-ik + \bar{v}_0 \cdot \bar{\nabla} - \bar{n} \cdot (\bar{n} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}_0) (\rho_0 (-ik + \bar{v}_0 \cdot \bar{\nabla})) \phi_1, \\ \text{sur } \Gamma : \quad & \phi_1 = \phi_{1,inc} + \phi_{1,ref}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

La condition sur Σ^T , notamment, provient de l'équation de Myers (1.19) associée à la définition de l'impédance (1.18). Sur la surface Γ , le champ acoustique peut être défini comme une combinaison de modes incidents et de modes réfléchis, à condition de s'assurer au préalable que l'écoulement sur cette section est uniforme.

Dans le domaine extérieur Ω_2 , le potentiel acoustique ϕ_2 est solution de l'équation de Helmholtz convectée combinée à la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\Delta\phi_2 + \left(k + iM_\infty \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \phi_2 = 0, \quad (2.22)$$

$$\text{à l'infini : condition de Sommerfeld.} \quad (2.23)$$

Enfin, sur la surface fictive Σ_∞ , le raccordement entre les domaines intérieur et extérieur est assurée par la continuité du potentiel acoustique et de sa dérivée normale. L'écoulement sur Σ_∞ est supposé uniforme. Le vecteur normal à la surface est orienté dans le sens 'sortant', de Ω_1 à Ω_2 .

• Formulation variationnelle

Comme pour la méthode intégrale, la résolution numérique des problèmes associés à Ω_1 et Ω_2 est menée dans ACTRAN à partir d'une formulation variationnelle. On introduit pour cela les fonctions tests Ψ_1 et Ψ_2 évoluant, respectivement, dans les mêmes espaces fonctionnels que ϕ_1 et ϕ_2 . En effectuant l'opération $\int_{\Omega_1} (2.20) \Psi_1 d\Omega_1$, on aboutit à la formulation variationnelle suivante dans le domaine Ω_1 :

$$\begin{aligned} & k^2 \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi_1 \Psi_1 d\Omega_1 + ik \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} [(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \Psi_1 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1) \phi_1] d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} [(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1)(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1) - c_0^2 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1] d\Omega_1 + \int_{\Sigma} \rho_0 \Psi_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{n}}{c_0^2} (-ik + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \phi_1 \right] d\Sigma \\ & + \int_{\Sigma_\infty} \Psi_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n} - M_\infty (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) (-ik + M_\infty \frac{\partial}{\partial z}) \phi_1 \right] d\Sigma_\infty = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les intégrales surfaciques sur Σ et Σ_∞ , notamment, apparaissent en considérant le théorème de la divergence. Nous les noterons dans la suite I_Σ et I_{Σ_∞} .

De la même manière, en développant l'intégrale de volume $\int_{\Omega_2} (2.22) \Psi_2 d\Omega_2$ et en considérant des fonctions tests Ψ_2 qui vérifient la condition de Sommerfeld, on montre que la formulation variationnelle s'écrit sur Ω_2 :

$$\begin{aligned}
& k^2 \int_{\Omega_2} \phi_2 \Psi_2 d\Omega_2 + ik \int_{\Omega_2} M_\infty \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Psi_2 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \phi_2 \right] d\Omega_2 \\
& + \int_{\Omega_2} \left[M_\infty^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \vec{\nabla} \phi_2 \cdot \vec{\nabla} \Psi_2 \right] d\Omega_2 \\
& - \int_{\Sigma_\infty} \Psi_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - M_\infty (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) (-ik + M_\infty \frac{\partial}{\partial z}) \phi_2 \right] d\Sigma_\infty = 0. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Pour relier les problèmes sur Ω_1 et Ω_2 , on impose alors la continuité des fonctions tests Ψ_1 et Ψ_2 sur la surface intermédiaire Σ_∞ . Sous cette hypothèse, la dernière intégrale de l'équation (2.25) est égale à I_{Σ_∞} . En tenant compte des différentes conditions aux limites sur la surface $\Sigma = \Sigma^R \cup \Sigma^T \cup \Gamma$, le problème global à résoudre s'écrit, après quelques développements [65] [121] :

$$\begin{aligned}
& k^2 \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi_1 \Psi_1 d\Omega_1 + ik \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left[(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \Psi_1 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1) \phi_1 \right] d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left[(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1) - c_0^2 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{\nabla} \Psi_1 \right] d\Omega_1 + k^2 \int_{\Omega_2} \phi_2 \Psi_2 d\Omega_2 \\
& + ik \int_{\Omega_2} M_\infty \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Psi_2 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \phi_2 \right] d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \left[M_\infty^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \vec{\nabla} \phi_2 \cdot \vec{\nabla} \Psi_2 \right] d\Omega_2 \\
& + \int_{\Sigma^T} \frac{\rho_0^2 \alpha}{ik} (-ik + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \phi_1 (-ik + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \Psi_1 d\Sigma^T \\
& + \int_{C^T} \frac{\rho_0^2 \alpha}{ik} \Psi_1 (-ik + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \phi_1 (\vec{n} \wedge \vec{v}_0) \cdot \vec{dl} \\
& + \int_{\Gamma} \rho_0 \Psi_1 \left[-\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_z}{c_0^2} (-ik + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \phi_1 \right] d\Gamma = 0. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Pour chacune des surfaces traitées considérées sur Σ^T , C^T désigne un contour quelconque entourant le traitement acoustique et orienté par la normale extérieure \vec{n} . L'équation (2.26) correspond finalement au problème traité numériquement par le code de calcul ACTRAN.

- **Discrétisation en éléments finis de volume et éléments infinis**

Afin de résoudre l'équation (2.26) pour une géométrie et un écoulement potentiel quelconques, il est nécessaire de procéder à la discrétisation du problème. Le domaine intérieur Ω_1 , tout d'abord, est maillé en petits éléments de volume de formes hexaédriques. Sur chacun des nœuds du maillage, le champ de vitesse moyen \vec{v}_0 est supposé connu, ce qui nécessite souvent une interpolation des résultats aérodynamiques sur le maillage acoustique.

Comme dans la méthode intégrale, la taille maximale des mailles acoustiques est liée à la longueur d'onde λ du problème considéré, en tenant compte des effets de dilatation dus à l'écoulement. Le champ de vitesse moyen n'étant plus uniforme, toutefois, le critère de discrétisation est plus complexe. Il dépend de la valeur locale de l'écoulement mais aussi de la direction et de la norme des gradients de vitesse...

Dans le domaine de propagation extérieur Ω_2 , les éléments de type 'wave-envelope' correspondent à des branches infinies, construites par une transformation géométrique des éléments de volume conventionnels. L'une des faces de l'élément infini est attachée à la surface Σ_∞ et la face opposée est envoyée à l'infini. Pour plus d'information sur la question, on pourra une nouvelle fois se reporter à la thèse de Lidoine [65].

La méthode par éléments finis de volume nécessitant un maillage du domaine de propagation, les limites en terme de temps de calcul et de stockage en mémoire sont atteintes à des fréquences plus faibles que dans le cas de la méthode intégrale. Aussi, pour des applications industrielles en configurations tridimensionnelles, la méthode de calcul FEM ne peut s'appliquer pour l'instant que pour des fréquences réduites inférieures à $k=30$ environ. En version axisymétrique, en revanche, le code ACTRAN peut être utilisé à des fréquences bien plus élevées de l'ordre de $k \leq 100 - 120$.

2.2.3 Formulation asymptotique par sommation de faisceaux gaussiens

Comme nous l'avons mentionné en introduction, la bande de fréquence présentant un intérêt industriel pour l'insonorisation des nacelles est très large, s'étendant en terme de nombre d'onde adimensionnel de $k=0$ à $k=140$ environ. Or, les méthodes de calcul numériques que nous venons de présenter ne peuvent être appliquées qu'à des fréquences relativement faibles, ne permettant pas de couvrir l'ensemble des besoins industriels. Pour traiter le domaine des hautes fréquences, on se tourne donc généralement vers les méthodes de calcul dites asymptotiques dont l'idée principale est de simplifier les équations de départ en tirant bénéfice du faible rapport entre la longueur d'onde acoustique et les échelles caractéristiques du problème. Pour une fréquence suffisamment élevée, la résolution du problème approché fournit alors une bonne approximation de la solution exacte.

Dans la théorie de l'acoustique géométrique, la trajectoire des ondes est habituellement traduite en termes de *rayons acoustiques* [17] [98], conformément au principe de Fermat. Les rayons sont déterminés par l'équation *eikonale*, de nature cinématique, à laquelle on associe l'équation de *transport* décrivant l'évolution dynamique du champ le long de tubes de rayons. Les étapes conduisant à l'obtention de ces deux équations sont rappelées dans la première partie de ce paragraphe. En acoustique géométrique classique, toutefois, le calcul dynamique de la propagation à l'intérieur d'un conduit est délicat car les réflexions des rayons sur les surfaces courbes sont à l'origine de caustiques⁵ multiples et complexes sur lesquelles la solution de l'approximation géométrique est singulière. De plus, pour aboutir à une bonne évaluation des résultats en champ lointain, l'échantillonnage à la source en nombre de rayons doit être relativement important, ce qui peut être pénalisant en terme de temps de calcul. Pour contourner ces difficultés tout en conservant le concept de base de l'approximation géométrique, nous nous sommes tournés à AIRBUS [65] vers la méthode de sommation de faisceaux gaussiens (méthode SFG) [22] [100] [39]. Celle-ci repose sur une approximation

⁵ Une caustique est une surface enveloppe de rayons.

paraxiale de l'équation des ondes centrée sur un rayon déterminé préalablement par l'équation cinématique de la théorie géométrique.

Le code de calcul VOXLAN utilisé dans cette étude est développé par la société ARISTE. La méthode implémentée, théoriquement, permet de modéliser la propagation acoustique associée à une géométrie de conduit quelconque, en présence d'un écoulement uniforme et de traitements acoustiques. Dans le cadre de la thèse, toutefois, seules des configurations canoniques ont été étudiées, sans écoulement ni traitement acoustique. Aussi, afin de simplifier l'exposé de la méthode SFG, nous nous placerons ici dans le cadre d'un milieu de propagation homogène au repos (écoulement nul). Par ailleurs, nous ne chercherons pas à décrire précisément l'ensemble des étapes du calcul par sommation de faisceaux gaussiens mais simplement les éléments nécessaires à la compréhension de l'étude réalisée dans ce mémoire : détermination des rayons acoustiques, construction d'un faisceau gaussien autour d'un rayon donné, modélisation de la source et sommation sur l'ensemble des faisceaux. La détermination et l'optimisation des paramètres associés à un faisceau et le calcul de la réflexion sur les surfaces courbes ne seront pas abordés dans ce paragraphe.

- **Théorie de l'acoustique géométrique, rappel des équations de base**

A haute fréquence, la longueur d'onde acoustique est faible devant les échelles caractéristiques du problème. Par conséquent, la variation de l'amplitude et la déformation des fronts d'onde sont négligeables à l'échelle de la longueur d'onde et le champ acoustique peut être considéré en tout point de l'espace sous la forme d'une onde localement plane. On écrit alors :

$$\phi(\vec{x}) = A(\vec{x}) e^{ik\tau(\vec{x})}. \quad (2.27)$$

Les variations de l'amplitude $A(\vec{x})$ sont considérées comme lentes par rapport à celle de la phase $k\tau(\vec{x})$. En reprenant la démarche de Candel [17], on considère alors le développement asymptotique de l'amplitude selon les puissances inverses du nombre d'onde k :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{k^n}. \quad (2.28)$$

En insérant les relations (2.27) et (2.28) dans l'équation d'onde (2.1) puis en regroupant les termes selon les puissances de k , on aboutit, à l'ordre 0 et à l'ordre 1 respectivement, aux équations (2.29) et (2.30) :

$$1 - (\vec{\nabla}\tau)^2 = 0, \quad (2.29)$$

$$2\vec{\nabla}\tau \vec{\nabla}A_0 + \Delta\tau A_0 = 0. \quad (2.30)$$

La première est appelée *équation eikonale* et décrit la cinématique des ondes acoustiques. La seconde est l'*équation de transport* qui permet, une fois les trajectoires déterminées, de calculer l'amplitude du champ en tout point de l'espace.

L'équation eikonale est à la base de la théorie géométrique de l'acoustique. Elle permet en effet de déterminer la vitesse de phase \vec{c}_ϕ et la vitesse de groupe \vec{c}_g . Cette dernière, en particulier, caractérise la direction de propagation du *rayon acoustique* que l'on définit comme étant la courbe tangente à la vitesse de groupe en tout point de l'espace. En introduisant les notions de vecteur d'onde $\vec{K} = k\vec{\nabla}\tau$ et de direction d'onde $\vec{v} = \vec{K}/|K|$, on obtient dans notre cas :

$$\vec{c}_g(\vec{x}) = \frac{\partial k}{\partial \vec{K}} = \vec{v}, \quad \vec{c}_\phi(\vec{x}) = \frac{k}{|K|} \vec{v} = \vec{v}. \quad (2.31)$$

En milieu homogène et sans écoulement, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont donc identiques et perpendiculaires aux plans de phase. Les rayons acoustiques correspondent dans ce cas à de simples droites. Dans des configurations plus générales, toutefois, les rayons sont déviés par l'écoulement et ont tendance à se diriger vers les zones de plus faible vitesse [65]. On obtient alors des courbes gauches qui peuvent être déterminées en intégrant la direction de la vitesse de groupe à partir d'un point donné...

Une fois les trajectoires des rayons acoustiques déterminées, l'amplitude du champ peut être calculée en tout point de l'espace en considérant l'équation de transport (2.30), qui se réécrit sous forme conservative : $\text{div}(A_0^2 \vec{v}) = 0$. Cette équation est généralement interprétée en termes de « tubes de rayons », le long desquels le flux d'énergie acoustique est conservé. L'amplitude du champ est donc inversement proportionnelle à la surface de la section normale des tubes de rayon, ce qui est à l'origine de nombreuses difficultés dans les méthodes fondées sur l'application directe de l'acoustique géométrique. Au voisinage des caustiques (enveloppes de rayons) et des points de focalisation, le calcul devient en effet singulier. C'est l'une des raisons pour lesquels on peut avoir recours à la modélisation des faisceaux gaussiens qui permet de calculer le champ en tout point de l'espace.

- **Approximation de l'équation de Helmholtz sous forme de faisceaux gaussiens**

Un faisceau gaussien est une représentation asymptotique du champ acoustique sous la forme d'une onde paraxiale centrée sur un rayon déterminé au préalable par la théorie géométrique. À chaque rayon est ainsi associé un champ diffus constituant une bonne approximation de l'équation des ondes au voisinage du rayon. En sommant la contribution d'un nombre de faisceaux suffisant, on peut alors reconstituer le champ acoustique en tout point de l'espace.

L'expression d'un faisceau gaussien s'écrit dans le système de coordonnées (s, ζ_1, ζ_2) associé au rayon (figure 2.3). Le point $M(s, \zeta_1, \zeta_2)$ est repéré par l'abscisse curviligne s de sa projection orthogonale sur le rayon $X(s)$ et par le vecteur $\vec{\zeta} = (0, \zeta_1, \zeta_2)$, orthogonal à la tangente au rayon au point X .

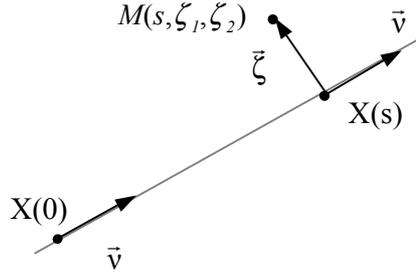


Figure 2.3 : Repère lié au rayon pour l'approximation paraxiale du champ acoustique.

La solution de l'équation de Helmholtz est recherchée sous la forme d'une onde paraxiale :

$$\phi(\vec{x}) = F(s, \vec{\zeta}) e^{iks}. \quad (2.32)$$

En introduisant l'expression (2.32) dans l'équation de Helmholtz (2.1), on obtient dans le repère lié au rayon :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2} = 0. \quad (2.33)$$

À ce stade, on effectue une première approximation en recherchant des solutions de l'équation (2.33) valables uniquement au voisinage du rayon [22] [100] [39]. Plus précisément, on considère que le vecteur $\vec{\zeta}$ est de l'ordre de grandeur de $k^{-1/2}$. On introduit alors le changement de variable $\vec{\xi} = \vec{\zeta} \sqrt{k}$, de sorte que $\vec{\xi}$ est d'ordre 0 en k . En invoquant l'hypothèse de haute fréquence, on peut ainsi négliger le premier terme de l'équation (2.33). On aboutit alors à l'équation paraxiale (2.34) :

$$2i \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} = 0. \quad (2.34)$$

La solution de cette équation peut être recherchée sous la forme générale (2.35) [39] [37] :

$$F(s, \xi_1, \xi_2) = A(s) e^{-\frac{i}{2} (\vec{\xi}^t \cdot M(s) \cdot \vec{\xi})}. \quad (2.35)$$

$M(s)$ est une matrice complexe symétrique de dimension (2,2), $\vec{\xi}$ est le vecteur (ξ_1, ξ_2) et $A(s)$ est l'amplitude complexe du faisceau gaussien. En reportant cette expression dans l'équation (2.34), on aboutit à un système de deux équations différentielles portant sur $M(s)$ et $A(s)$ [39] [37]. En l'absence d'écoulement, ces équations peuvent être résolues de manière analytique et l'on aboutit à la formulation du faisceau gaussien suivante [65] :

$$\phi(s, \zeta_1, \zeta_2) = A(s_{ref}) \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(s - \varepsilon_1)(s - \varepsilon_2)}} e^{iks + \frac{ik}{2} \left(\frac{\zeta_1^2}{s - \varepsilon_1} + \frac{\zeta_2^2}{s - \varepsilon_2} \right)}. \quad (2.36)$$

ε_1 et ε_2 sont des paramètres complexes dont les valeurs déterminent la courbure du front d'onde et la largeur du faisceau. Pour assurer une décroissance gaussienne autour du rayon, leurs parties imaginaires doivent être positives. Il est à noter que le fait de considérer des paramètres complexes permet de s'affranchir des problèmes rencontrés en acoustique géométrique à la traversée des caustiques. Pour un faisceau gaussien, en effet, le dénominateur du terme d'amplitude ne peut jamais être nul. De manière générale, les coefficients ε_1 , ε_2 et la normalisation $A(s_{ref})$ dépendent des conditions à la source et aux points de contrôle, puis des différentes réflexions sur les parois solides. Pour plus d'information sur le calcul de ces paramètres et sur la modélisation des réflexions, on pourra se reporter aux références [65] et [37].

- **Sommation des faisceaux gaussiens et modélisation de la source**

La méthode de sommation des faisceaux gaussiens peut être considérée comme une approximation à haute fréquence de la formulation intégrale présentée au paragraphe 2.2. La méthode est en effet fondée sur un calcul asymptotique de l'équation intégrale en choisissant de représenter la fonction de Green sur « la base des faisceaux gaussiens ». En supposant la répartition de pression et de vitesse sur une surface source Γ connue, le potentiel acoustique en tout point de l'espace \vec{x} est écrit comme la somme des contributions des faisceaux lancés dans toutes les directions et depuis chaque point source, selon :

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi(\vec{x}_0)}{\partial n(\vec{x}_0)} G_{SFG}(\vec{x}_0, \vec{x}) - \phi(\vec{x}_0) \frac{\partial G_{SFG}(\vec{x}_0, \vec{x})}{\partial n(\vec{x}_0)} \right] d\Gamma, \quad (2.37)$$

$$G_{SFG}(\vec{x}_0, \vec{x}) = \int_{\theta_0, \varphi_0} \phi_{SFG}(\vec{x}, \vec{x}_0, \theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0.$$

G_{SFG} est la fonction de Green approchée construite sur la base de l'acoustique géométrique et du formalisme des faisceaux gaussiens. $\phi_{SFG}(\vec{x}, \vec{x}_0, \theta_0, \varphi_0)$ correspond au potentiel acoustique calculé au point \vec{x} par l'approximation gaussienne, à partir de la propagation du rayon acoustique envoyé depuis le point source \vec{x}_0 , dans la direction définie par les angles θ_0 et φ_0 .

Comme dans les méthodes numériques et analytiques présentées dans les pages précédentes, on souhaite pouvoir modéliser à l'aide de la méthode asymptotique le rayonnement associé à des modes de conduit incidents. Concrètement, on procède de la façon suivante. La surface source Γ , définie par une section de conduit annulaire, est discrétisée en fonction de la longueur d'onde considérée, de façon comparable aux méthodes de calcul numériques. En chaque point source, on attribue une valeur de pression et de vitesse normale correspondant à la valeur locale du mode choisi et l'on envoie des rayons dans toutes les directions du demi-espace défini par le sens de propagation du mode, de manière isotrope (figure 2.4). Les rayons se propagent ensuite dans le conduit et rayonnent vers l'extérieur. Leur contribution en tout point \vec{x} peut être évaluée et la sommation finale (2.37) fournit la

valeur du potentiel acoustique en chaque point de contrôle. Nous reviendrons au paragraphe 2.4 sur les critères de discrétisation de la source et l'échantillonnage en nombre de rayons retenus dans notre étude.

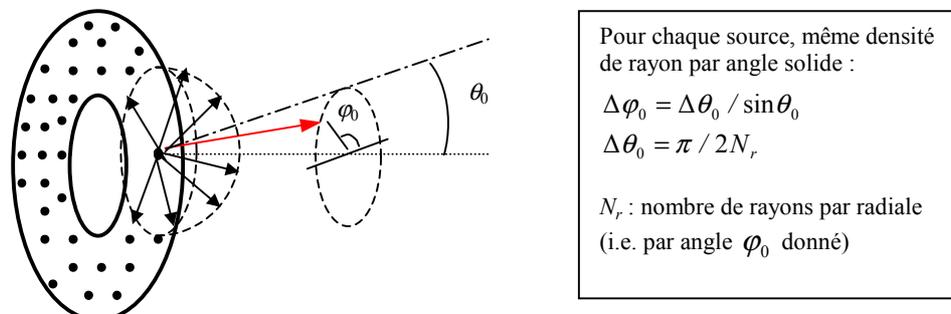


Figure 2.4 : Discrétisation et échantillonnage isotrope de la source.

2.2.4 Conclusion sur les différentes méthodes de calcul

Les trois méthodes de calcul numériques et asymptotiques que nous nous proposons d'évaluer dans ce mémoire ont été présentées dans cette première section. Elles sont basées sur des approches du problème radicalement différentes. La formulation intégrale par éléments finis de frontière a pour principal objectif de modéliser l'influence d'une géométrie réaliste tridimensionnelle sur les phénomènes de propagation et de rayonnement acoustiques. Les effets d'un écoulement moyen uniforme sont également pris en compte par l'intermédiaire d'une modélisation particulière, que nous avons appelée *écoulement quasi-uniforme*. La méthode BEM est théoriquement validée pour toute la gamme de fréquence mais ne peut s'appliquer pratiquement, à l'heure actuelle, qu'à des fréquences réduites inférieures à $k \sim 50$. La méthode par éléments finis de volume considérée dans ACTRAN a pour vocation d'étudier les effets de réfraction et de convection liés à la présence d'un écoulement non uniforme, non visqueux, homoentropique et irrotationnel. Cette dernière hypothèse, notamment, permet de dissocier de manière rigoureuse l'écoulement porteur des perturbations acoustiques et rend possible la résolution exacte du problème posé. La méthode par éléments finis de volume est actuellement applicable à des fréquences réduites inférieures à $k=30$ environ. Enfin, la méthode par sommation de faisceaux gaussiens est une approche asymptotique valide, théoriquement, à très haute fréquence. De manière générale, toutefois, les méthodes asymptotiques conduisent à l'obtention de résultats satisfaisants à des fréquences moyennes, voir relativement faibles. Ainsi, dans le cadre des études sur l'entrée d'air, la validité de la méthode SFG a été vérifiée pour des fréquences réduites supérieures à $k=30$ environ. En théorie, l'approche asymptotique peut être développée en présence d'un écoulement quelconque mais la formulation considérée dans VOXLAN se limite au cas de l'écoulement uniforme.

Le rappel des fondements théoriques et des hypothèses associées à chacune des méthodes ayant été effectué, nous pouvons désormais analyser les résultats des différentes approches sur des configurations canoniques de conduit d'éjection. Nous débutons au paragraphe 2.3 par l'évaluation des méthodes à basses fréquences.

2.3 Évaluation des méthodes numériques BEM et FEM en configuration canonique

Ce paragraphe est consacré à l'analyse des résultats des méthodes numériques à basses fréquences sur des configurations canoniques de conduit d'éjection. Deux études successives sont proposées. Dans la première, la méthode de calcul analytique présentée au chapitre 1 (MADIWHAX) est utilisée en tant que référence pour vérifier la validité des méthodes numériques⁶. Dans la seconde, les prédictions des méthodes de calcul sont comparées à des résultats de mesures effectuées en chambre sourde par le Laboratoire d'Acoustique d'AIRBUS France. À chaque fois, nous procédons suivant une démarche d'analyse progressive en considérant les différents paramètres du problème les uns après les autres.

2.3.1 Comparaison entre les méthodes numériques BEM et FEM et la méthode analytique

2.3.1.1 Cas tests génériques

La majeure partie des résultats présentés dans cette première phase de validation des méthodes numériques est basée sur trois géométries simplifiées de conduit d'éjection, illustrées sur la figure 2.5 par les maillages du calcul FEM (maillage du domaine intérieur en éléments finis). Les trois géométries représentent un conduit annulaire de section constante et ne diffèrent que par la longueur et la forme des corps centraux. Deux d'entre elles, avec corps central tronqué et corps central long (figure 2.5.a. et 2.5.c.), sont choisies pour effectuer les comparaisons avec les modèles analytiques. La troisième (figure 2.5.b.) correspond à une géométrie intermédiaire représentant grossièrement une éjection à flux séparés avec cône émergeant (voir l'introduction). Elle permettra d'effectuer une première analyse de l'influence d'un corps central plus réaliste pour lequel il n'existe pas de formulation analytique à notre connaissance.

Les trois géométries sont à symétrie de révolution et fermées de manière artificielle en amont par une surface rigide dont l'influence est négligeable, le champ rayonné dans cette région étant faible. La longueur des conduits est $L^E = 3$ et le rapport de rayon est de $h=0.6$. Bien que le modèle analytique de Rienstra suppose un corps central infini, son prolongement est limité dans la géométrie longue afin de conserver une surface de maillage finie. Pour cette configuration, par ailleurs, deux formes de l'extrémité du corps central ont été retenues (cf. figure 2.1.c.) : la première est elliptique et sera utilisée dans la quasi-totalité des cas ; la seconde correspond à une troncature droite du cylindre (traits pointillés, figure 2.1.1c). Selon le cas, le prolongement du corps central atteint alors $6\tilde{R}_{ext}$ ou $7\tilde{R}_{ext}$, soit environ 4.8 ou 5.6 fois la longueur d'onde la plus élevée considérée ici.

Dans chacune des géométries, le cylindre extérieur possède une épaisseur relative e . Il est donc possible de choisir plusieurs formes de bord de fuite. Dans le cadre des études sur l'entrée d'air, Lidoine [65] a étudié l'influence de la forme de la lèvre sur le rayonnement : en comparant des calculs numériques au modèle analytique de Lordi et Homicz (voir paragraphe 1.6.2, page 47), il montre que la prise en compte d'une lèvre biseautée permet de retrouver précisément le rayonnement obtenu avec une paroi sans épaisseur. Ce résultat s'explique par l'existence d'une arête vive dans les deux géométries qui génère des phénomènes de

⁶ La comparaison des résultats des méthodes numériques et analytiques a fait l'objet d'une publication au 10^{ème} congrès international d'aéroacoustique AIAA/CEAS [29].

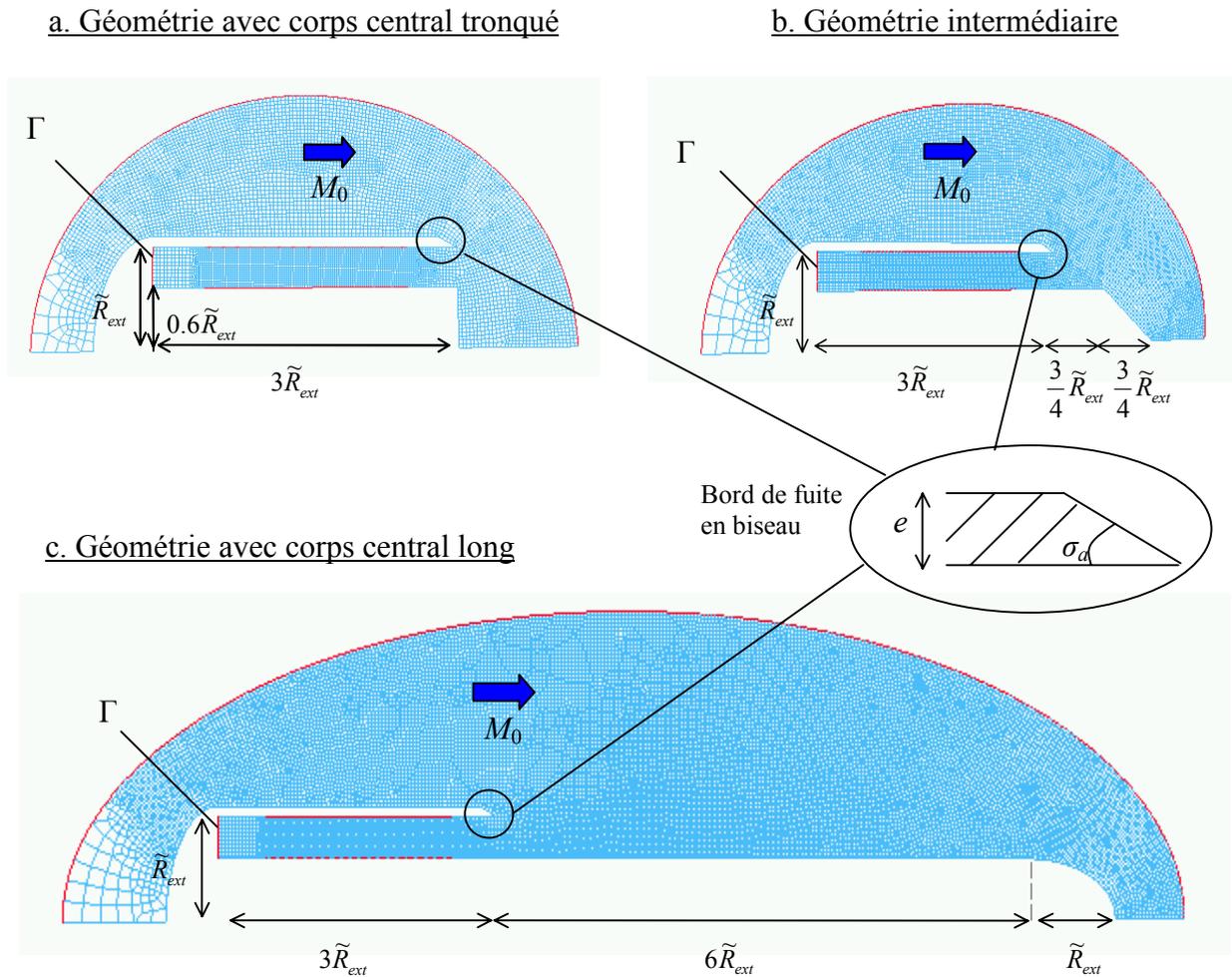


Figure 2.5 : Modèles génériques de conduit d'éjection, maillages FEM correspondants.

diffraction équivalents. Nos modèles analytiques présentant chacun un bord de fuite anguleux, nous considérons également un bord de fuite en biseau, caractérisée par un angle $\sigma_a=30^\circ$ et une épaisseur relative $e = \tilde{e} / \tilde{R}_{ext} = 0.1$.

Les comparaisons entre les méthodes de calcul numériques et analytiques sont réalisées pour quatre valeurs de la fréquence, correspondant aux nombres d'onde adimensionnels $k=5$, $k=7$, $k=9$ et $k=11$. Ces valeurs, relativement faibles, sont choisies pour limiter les temps de calcul des méthodes numériques. Pour améliorer encore les temps de calcul, on utilise la version axisymétrique du code ACTRAN. De la même manière que pour le code analytique, les sources sont définies sous la forme de modes incidents à partir d'une surface annulaire Γ située en début de conduit. L'intensité moyenne sur chaque mode radial incident est fixée à $I_{mn}=120$ dB.

Dans la plupart des cas, les résultats sont donnés en champ lointain sur un arc de directivité s'étendant de 0° à 120° pour les géométries avec corps central long et intermédiaire, et de 0° à 90° pour la géométrie tronquée. La distance d'écoute est $R_{ec} = 20$. Afin d'étudier des configurations traitées, enfin, différentes zones de traitement acoustique sont spécifiées : la position des traitements z^T (distance entre la source et le début du

traitement), la longueur traitée L^T et les admittances réduites α_{int} et α_{ext} seront indiquées pour chacun des cas traités considérés dans la suite.

2.3.1.2 Comparaison entre les différentes méthodes : configuration sans écoulement

Pour débiter l'analyse des résultats, nous considérons tout d'abord le cas sans écoulement. La liste des modes passants pour chacune des fréquences d'étude et pour le rapport de rayon $h=0.6$ est indiquée ci-dessous (on se restreint ici aux ordres azimutaux positifs) :

$k=5$	(0,1) (1,1) (2,1) (3,1) (4,1)
$k=7$	(0,1) (1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1)
$k=9$	(0,1) (0,2) (1,1) (1,2) (2,1) (2,2) (3,1) (3,2) (4,1) (5,1) (6,1) (7,1)
$k=11$	(0,1) (0,2) (1,1) (1,2) (2,1) (2,2) (3,1) (3,2) (4,1) (4,2) (5,1) (5,2) (6,1) (7,1) (8,1) (9,1)

Tableau 2.1 : Liste des modes passants aux différentes fréquences d'étude. $h=0.6$, $M_0=0$.

- **Conduit rigide : rayonnement en champ lointain**

Les premières comparaisons portent sur le rayonnement en champ lointain des conduits avec corps central infini, pour le modèle analytique, et corps central long à extrémité arrondie, pour les calculs numériques. Les résultats obtenus pour l'ensemble des modes passants à $k=5$ et pour quelques modes à $k=9$ sont exposés sur la figure 2.6. De manière générale, on observe un bon accord entre les différentes méthodes, que ce soit en terme de niveau rayonné ou en terme de position des lobes et des extinctions. Les résultats des deux méthodes numériques, en particulier, se confondent de manière presque parfaite. Quelques différences, en revanche, peuvent être observées avec le modèle analytique : pour le mode (0,1) ($k=5$ et $k=9$) notamment, les directivités obtenues avec les méthodes numériques présentent des oscillations qui n'apparaissent pas dans les prédictions analytiques. Pour expliquer l'origine du phénomène, trois observations peuvent être formulées :

- Les oscillations prédites par ACTI3S et ACTRAN sont identiques. Or, les codes de calcul sont basés sur deux méthodes très différentes. Il est donc peu probable que les différences avec le modèle analytique résultent d'un problème de modélisation (discrétisation, source ...). L'existence des oscillations s'explique plus certainement par un phénomène physique.
- La forme oscillante des directivités modales est clairement visible pour le mode (0,1) ($k=5$ et $k=9$), elle apparaît pour le mode (1,1) à $k=9$ puis disparaît pour les modes plus élevés. Les oscillations sont donc liées aux caractéristiques du mode incident ou du rayonnement correspondant.
- Enfin, en dehors de la forme du bord de fuite dont nous avons déjà parlé, les géométries analytique et numérique diffèrent principalement par la longueur du corps central considérée.

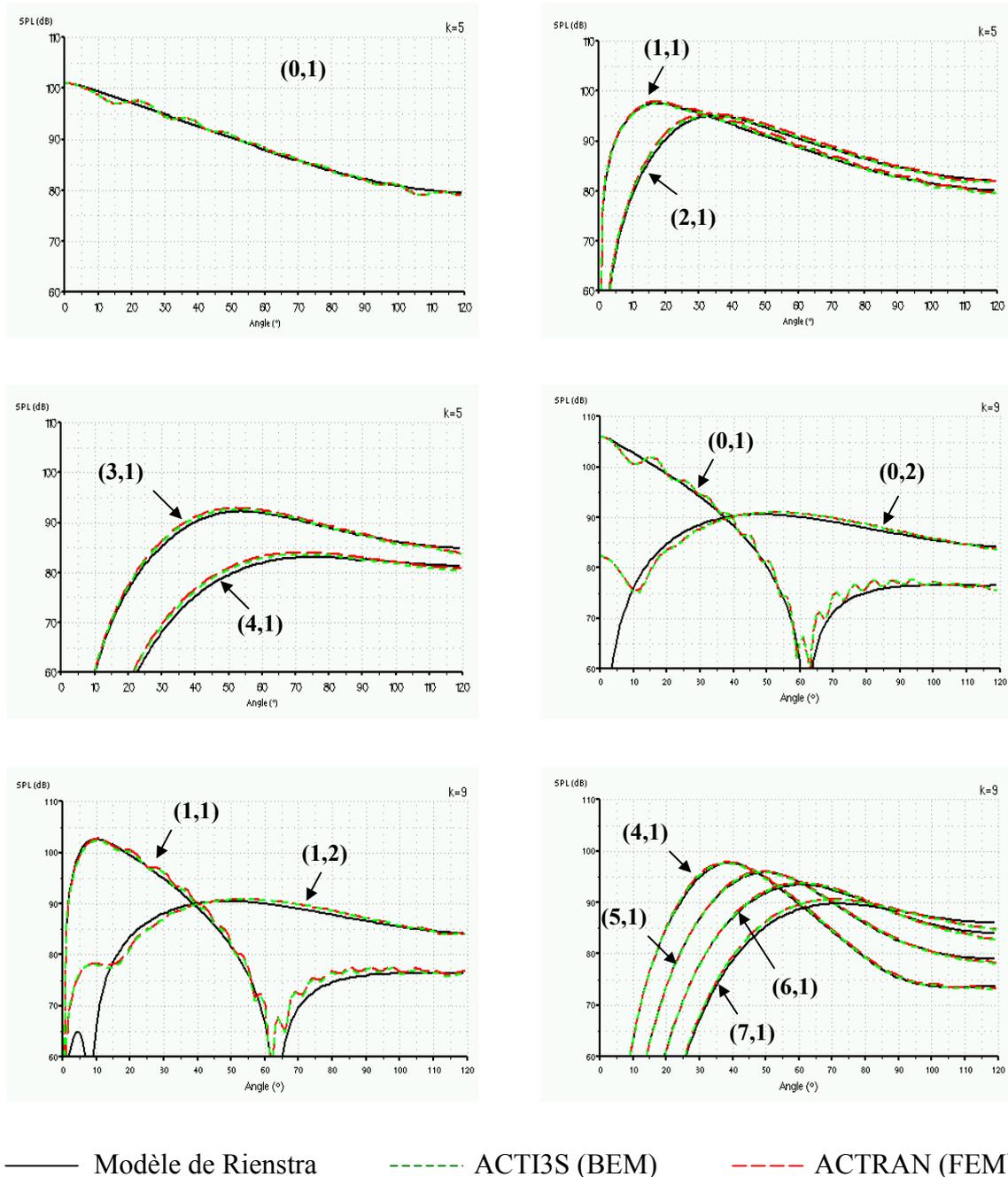


Figure 2.6 : Diagrammes de rayonnement modaux. Comparaison entre les méthodes numériques et le modèle de Rienstra. Cas rigide sans écoulement, corps central long.

Finalement, il est donc possible de comprendre les oscillations apparaissant dans les calculs numériques comme une conséquence de la longueur finie du corps central. L'explication suivante peut être avancée. Dans le cas du mode (0,1), comme le montrent les diagrammes de la figure 2.6, l'énergie acoustique incidente est rayonnée, principalement, en direction de l'axe. Par conséquent, à l'extérieur du conduit, une part importante du champ diffracté sur la section de sortie se propage à proximité du corps central. Lorsque ce champ parvient à l'extrémité du corps, un nouveau phénomène de diffraction se produit. En rayonnement, l'interférence entre les champs diffractés par la section de sortie du conduit et par l'extrémité du corps central se traduit par les oscillations observées sur les diagrammes de

directivité. Lorsque l'ordre du mode incident augmente, en revanche, le rayonnement est dirigé vers des angles de plus en plus élevé. A l'extérieur du conduit, l'énergie acoustique se propageant à proximité du corps central diminue donc rapidement et la diffraction par l'extrémité de ce corps devient négligeable. Dans ce cas, le rayonnement en champ lointain est entièrement gouverné par la diffraction en sortie de conduit et le fait de considérer un corps central fini ou non ne modifie pas le rayonnement (à condition, bien sûr, que ce corps soit suffisamment long).

Pour confirmer cette analyse, de nouveaux calculs numériques ont été effectués dans le cas d'un corps central long, tronqué à son extrémité (voir les pointillés sur la figure 2.5.c). L'idée est la suivante : en modifiant la forme de l'extrémité du corps central, on influe sur la diffraction se produisant à ce niveau de sorte que les interférences observées en champ lointain doivent prendre une forme différente. Les rayonnements obtenus avec ACTRAN pour les configurations avec corps central long arrondi et coupé sont représentés sur la figure 2.7 (mode (0,1), $k=5$). Les différences observées entre les courbes confirment le lien direct entre les oscillations du champ lointain et la diffraction par l'extrémité du corps central.

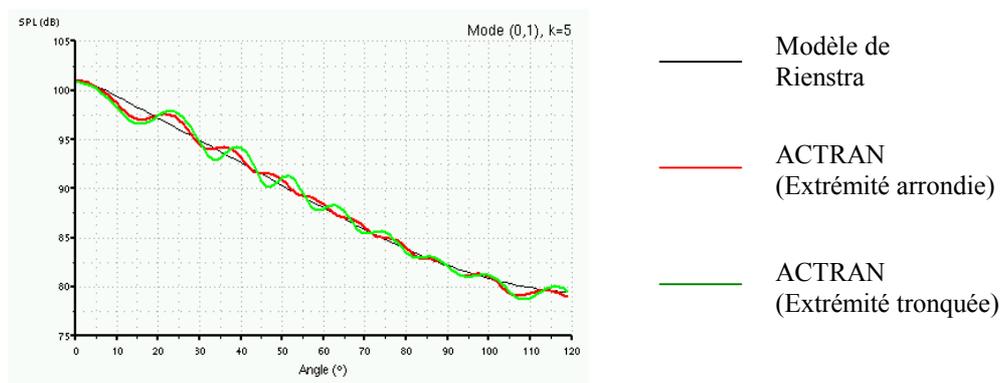


Figure 2.7 : Influence de l'extrémité du corps central sur le rayonnement du mode (0,1) à $k=5$. Cas rigide sans écoulement, corps central long.

Pour poursuivre l'analyse des résultats en champ lointain, nous comparons sur la figure 2.8 les rayonnements calculés par le modèle du baffle et par les méthodes numériques, dans le cas de la géométrie tronquée (figure 2.5.a.). Les diagrammes de directivité sont présentés pour les mêmes fréquences que précédemment ($k=5$ et $k=9$), ce qui permet de constater que les rayonnements correspondant aux configurations longue (figure 2.6) et tronquée (figure 2.8) sont très différents pour la majorité de nos cas d'étude. Pour chaque diagramme de directivité (figure 2.8), les prédictions de l'approximation bafflée « classique » et de la formulation corrigée (voir chapitre 1, pages 46-47) sont indiquées. A nouveau, on observe un bon accord général entre les différentes méthodes et la validité des calculs numériques est confirmée par la concordance parfaite des résultats d'ACTI3S et d'ACTRAN. Les différences entre les méthodes numériques et le modèle analytique, toutefois, sont plus importantes que dans le cas de la géométrie « longue ». Elles s'expliquent par la présence du baffle dans le calcul analytique et par les hypothèses simplificatrices du modèle.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la prise en compte de la réflexion à l'extrémité du conduit permet de limiter les approximations analytiques, ce qui se traduit, pour les modes

proches de leur coupure, par une amélioration sensible des comparaisons (voir en particulier les modes (3,1) et (4,1) à $k=5$ et les modes (0,2), (1,2), (3,2) et (7,1) à $k=9$). L'influence du baffle sur le rayonnement, en revanche, est inhérente à la méthode analytique et ne peut être éliminée. Outre la surestimation du rayonnement aux angles élevés, celle-ci est probablement responsable de la position approximative des lobes et des extinctions observée dans certains cas (mode (0,1) à $k=5$, modes (0,2), (1,2) et (3,2) à $k=9$).

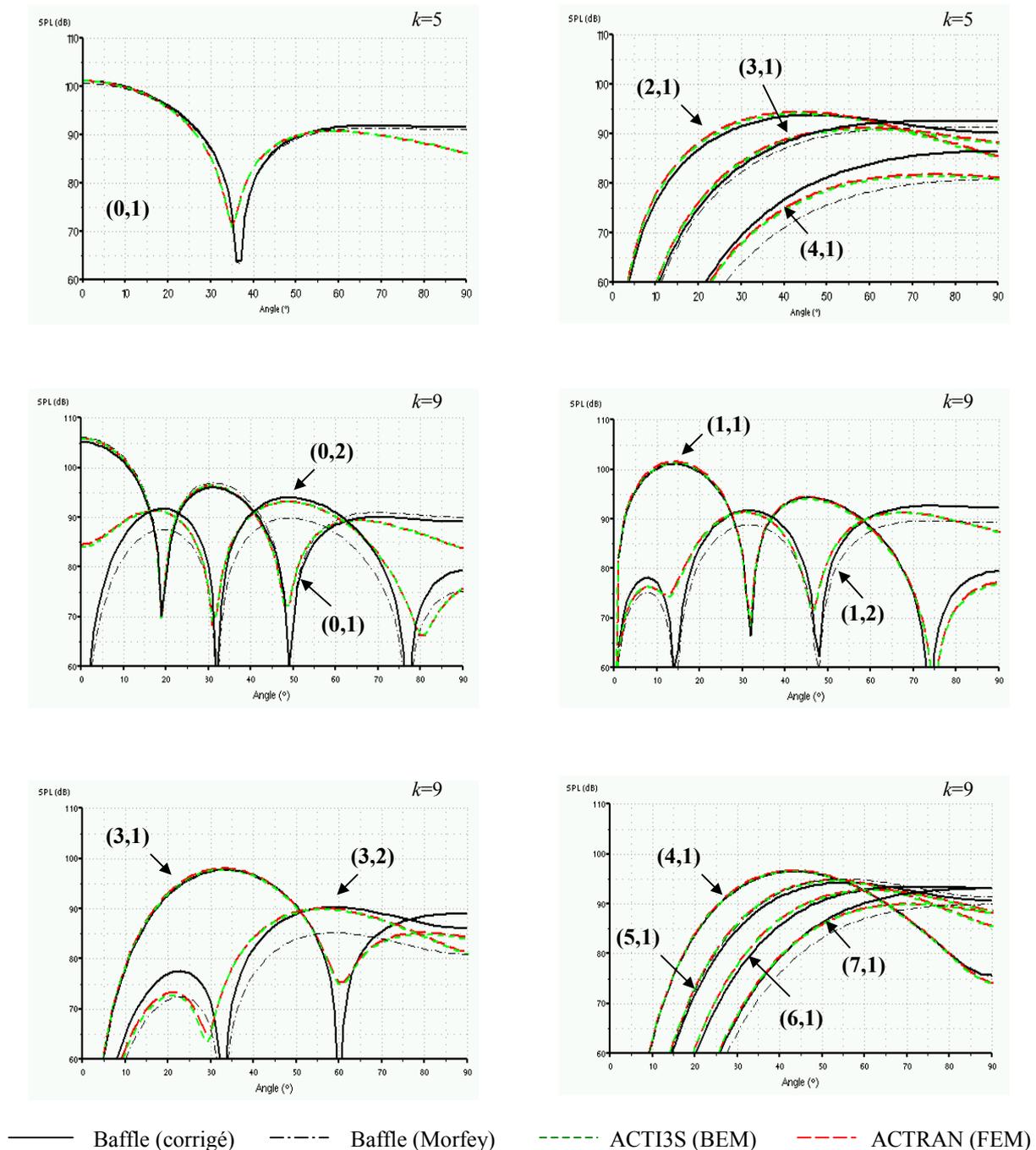


Figure 2.8 : Diagrammes de rayonnement modaux aux fréquences $k=5$ et $k=9$. Comparaison entre les méthodes numériques et le modèle du baffle. Cas rigide sans écoulement, corps central tronqué.

• **Conduit rigide : résultats sur la phase**

Nous avons vu au chapitre 1 que les modes correspondent à des solutions élémentaires du problème dans le conduit. Pour reconstituer une source réelle, il est nécessaire en général de considérer la somme de différents modes, caractérisés chacun par une amplitude et une phase données. Aussi, pour valider les différentes méthodes de calcul, il importe de vérifier également la cohérence des résultats en terme de phase. À partir de la pression complexe p , celle-ci peut être définie modulo π selon :

$$phase = \arctan \frac{\text{Im}(p)}{\text{Re}(p)}. \tag{2.38}$$

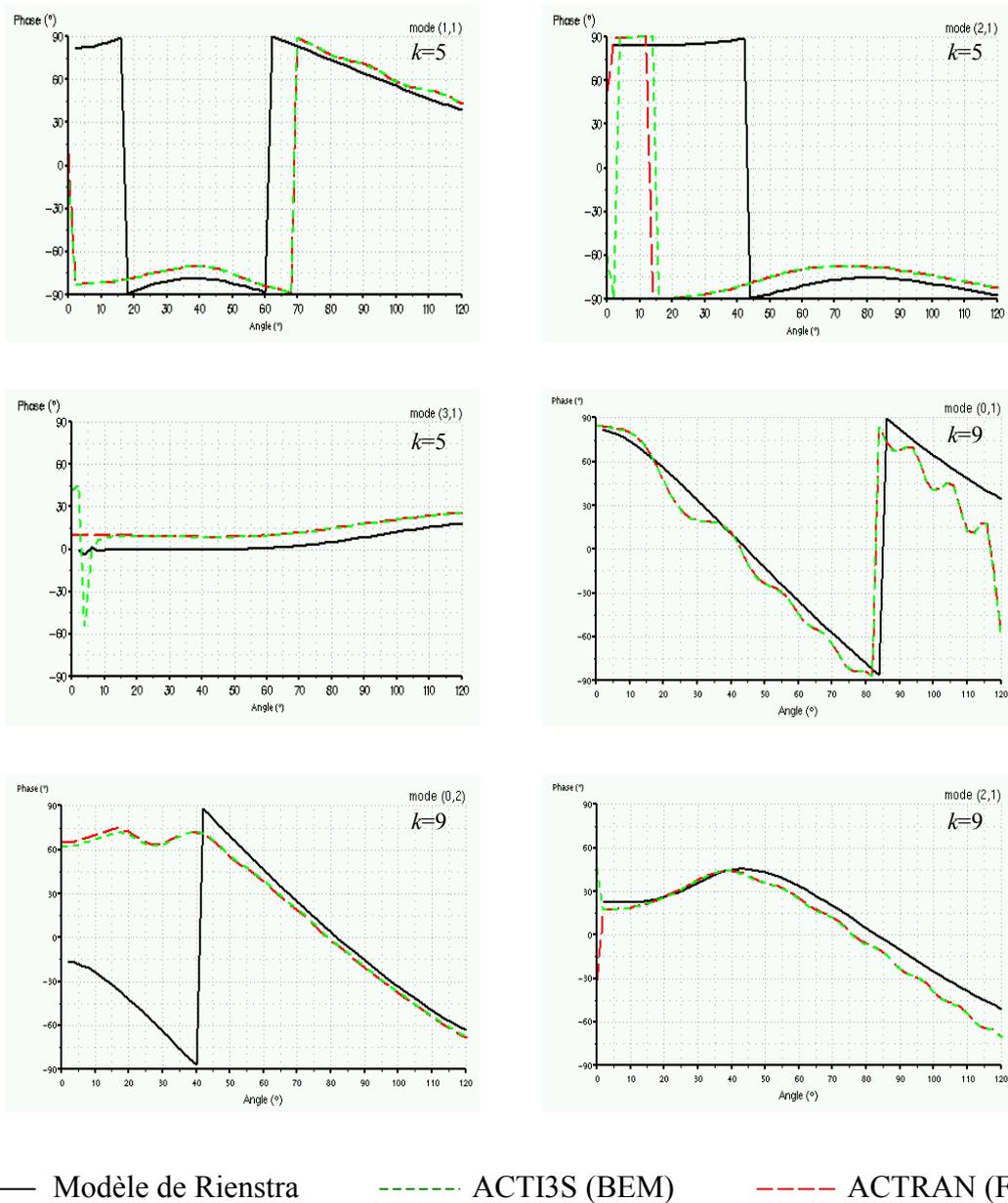


Figure 2.9 : Phase de la pression rayonnée. Comparaison entre les méthodes numériques et le modèle de Rienstra. Cas rigide sans écoulement, corps central long.

La figure 2.9 compare les phases de la pression rayonnée en champ lointain, calculées par le modèle de Rienstra et par les méthodes numériques sur la géométrie longue arrondie. Les résultats sont donnés pour quelques modes passants aux fréquences réduites $k=5$ et $k=9$. Comme pour les comparaisons sur l'amplitude, on observe un bon accord entre les différentes méthodes. À l'exception des très faibles angles pour certains modes où le rayonnement est négligeable, les résultats des codes numériques sont identiques. Les comparaisons avec le modèle analytique sont également très satisfaisantes. En effet, si l'on observe un léger décalage entre les prédictions numériques et analytiques, l'évolution en fonction de l'angle θ_{ec} est la même pour tous les codes. Pour les premiers modes, enfin, il est à noter que l'on retrouve par le calcul numérique les oscillations liées à la diffraction par l'extrémité du corps central.

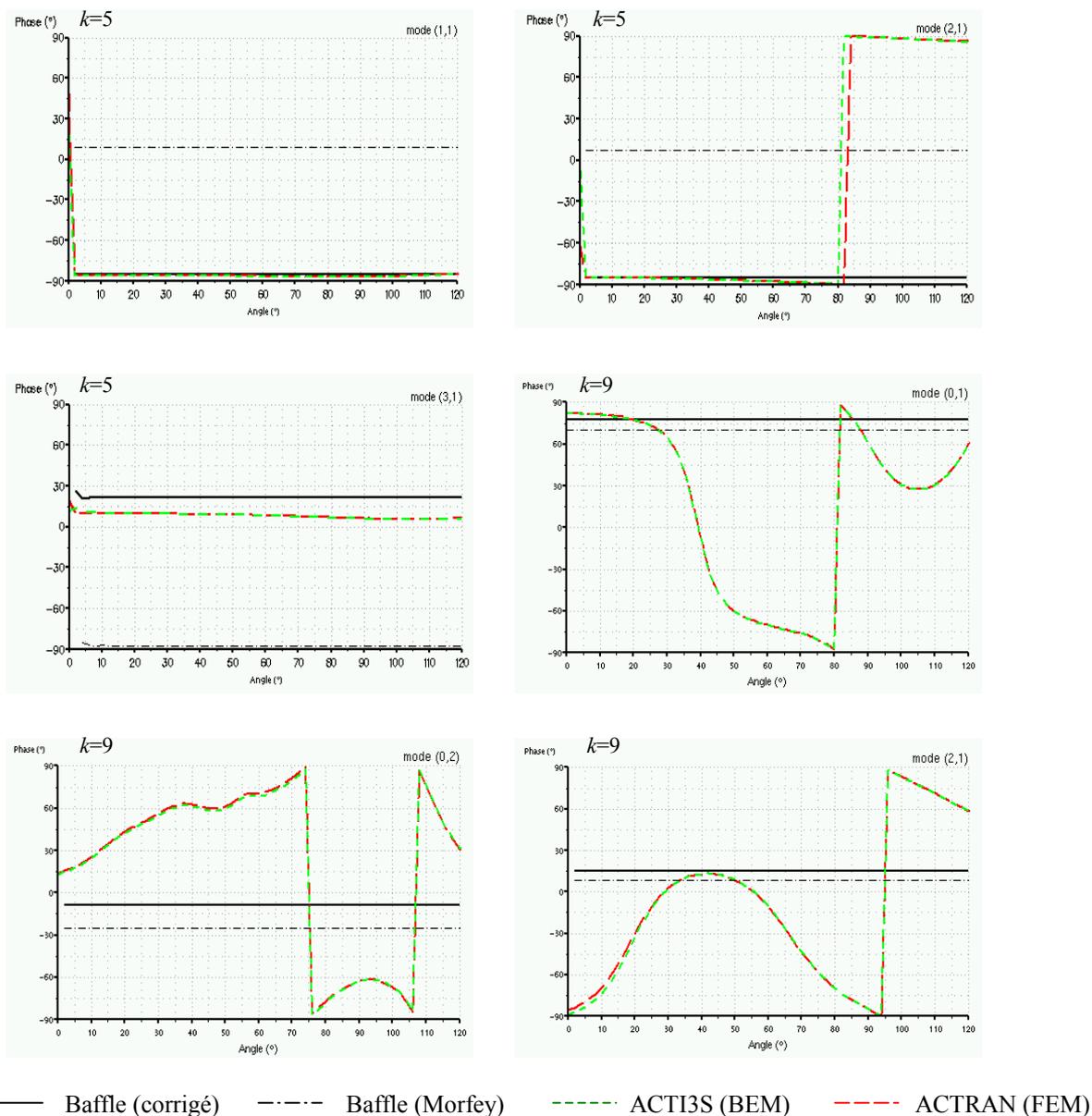


Figure 2.10 : Phase de la pression rayonnée. Comparaison entre les méthodes numériques et le modèle du baffle. Cas rigide sans écoulement, corps central tronqué.

Les comparaisons dans le cas du corps central tronqué sont présentées sur la figure 2.10, pour des configurations (modes et fréquences) identiques à celles de la figure 2.9. En reprenant les formulations (1.68) et (1.70), on peut constater que dans le modèle de l'approximation bafflée, la phase de la pression rayonnée ne dépend pas de la position angulaire. À $k=5$, les résultats des calculs numériques semblent confirmer cette propriété et les comparaisons avec le modèle analytique sont favorables. À $k=9$, en revanche, les prédictions numériques font apparaître une forte variation de la phase avec l'angle de rayonnement ce qui remet en cause la validité du modèle du baffle. Une nouvelle fois, ce résultat n'est pas surprenant compte tenu des approximations de ce modèle. Le fait de négliger la contribution dipolaire, notamment, pourrait expliquer les écarts observés.

En définitive, les comparaisons sur la phase montrent qu'en utilisant le modèle analytique de Rienstra ou les méthodes numériques ACTI3S et ACTRAN, il est possible d'effectuer des calculs interférentiels, considérant la contribution de plusieurs modes, avec un bon niveau de précision. Dans le cas du modèle analytique du baffle, en revanche, le calcul de la phase n'est pas correct en général et pour évaluer la contribution de différents modes, nous serons limités à des approches de type sommation RMS ('Root Mean Square' : moyenne géométrique des niveaux rayonnés).

- **Conduit rigide : résultats en champ proche**

Pour conclure avec l'évaluation des méthodes numériques en configuration rigide, nous présentons sur la figure 2.11 des résultats sur le champ calculé au voisinage des conduits par les deux méthodes numériques. Les cas représentés correspondent au mode (0,1), à $k=11$, pour les configurations longue et tronquée. Les cartographies du haut illustrent le champ de pression (SPL) obtenu avec ACTRAN, celles du bas représentent le champ résultant de la différence entre les prédictions des deux codes numériques : $|SPL(ACRAN) - SPL(ACTI3S)|$.

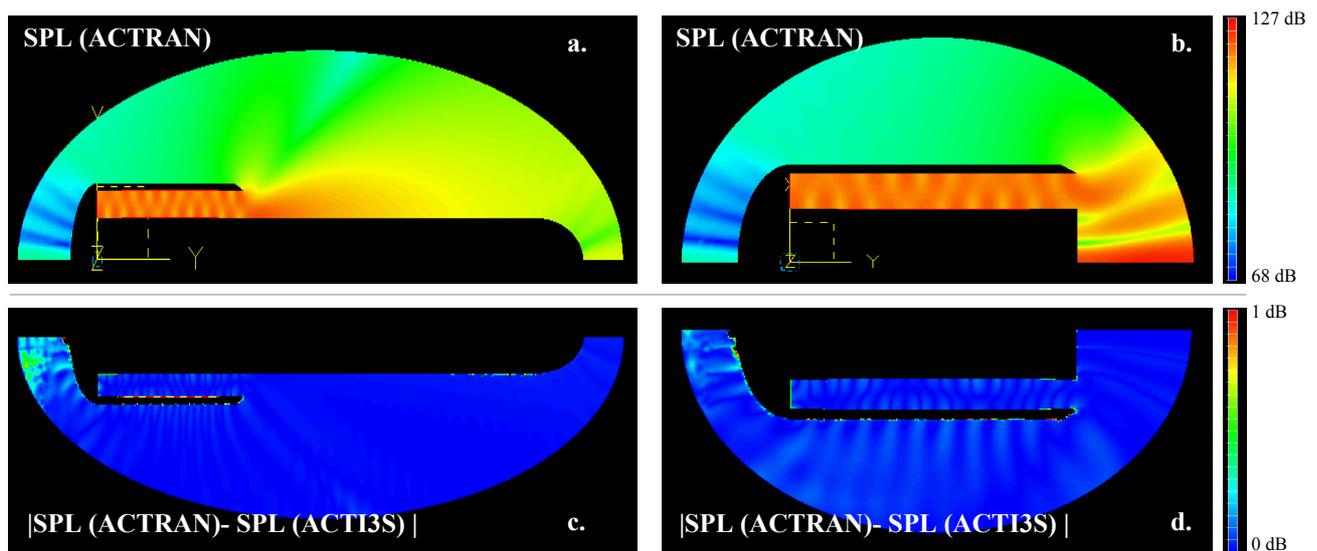


Figure 2.11 : Cartographies de champ proche pour les configurations longue et tronquée. Niveau de pression SPL calculé par ACTRAN et champ de la différence entre ACTRAN et ACTI3S. Mode (0,1), $k=11$.

En premier lieu, la visualisation du champ proche permet de constater que les lobes et les extinctions observées en rayonnement apparaissent rapidement après la section de sortie du conduit. Dans le cas de la géométrie longue (figure 2.11.a), on distingue ainsi la formation d'un lobe principal à proximité du corps central et d'un lobe secondaire autour de 90° . Dans le cas de la géométrie tronquée (figure 2.11.b), trois lobes de fortes amplitudes sont immédiatement générés en sortie de conduit. Quelle que soit la géométrie considérée, par ailleurs, les comparaisons entre ACTI3S et ACTRAN (figure 2.11.c et 2.11.d) illustrent le parfait accord entre les deux calculs numériques. À l'exception des points situés en amont de l'éjection où le champ rayonné est très faible et des points situés à proximité immédiate des surfaces solides où le calcul intégral est singulier, on vérifie que le champ résultant de la différence entre les deux méthodes tend uniformément vers zéro.

Finalement, l'ensemble des résultats présentés jusqu'ici permet de conclure à la validité des méthodes numériques FEM et BEM en configuration rigide et sans écoulement. Pour conclure l'étude des deux méthodes de calcul en l'absence d'écoulement, nous présentons au paragraphe suivant quelques comparaisons en conduit traité.

- **Conduit traité : rayonnement en champ lointain**

Au chapitre 1, l'influence de traitements axisymétriques sur la propagation du son a été modélisée puis interprétée en considérant la forme des modes de conduit et les redistributions aux discontinuités d'impédance. Les conclusions suivantes, entre autres, ont été formulées :

- l'atténuation fournie par les traitements a tendance à augmenter avec le paramètre de coupure du mode incident,
- au-delà d'un traitement, l'énergie d'un mode incident (m,n) est transmise de façon préférentielle sur le mode correspondant (m,n) ou sur des modes d'ordres radiaux plus faibles.

Dans le cas des méthodes BEM et FEM, la résolution du problème est basée sur une approche différente ne faisant pas intervenir de décomposition modale du champ dans le conduit. Aussi, il est intéressant de vérifier que la présence des traitements acoustiques se traduit de la même façon et que l'on retrouve par le calcul numérique l'atténuation et les redistributions modales prédites par la méthode analytique.

Les figures 2.12 et 2.13 présentent des comparaisons entre les calculs numériques et analytiques pour deux configurations de conduit traité avec corps central long. Les fréquences réduites d'étude sont, respectivement, $k=9$ et $k=11$. Deux zones de traitements acoustiques sont considérées dans le cas de la figure 2.12, une zone seulement dans le cas de la figure 2.13. Pour chacune des configurations, les admittances ont été choisies pour garantir une atténuation suffisante. A titre de référence, les rayonnements en conduit rigide sont indiqués sur les différents graphes.

De nouveau, les comparaisons entre les différentes méthodes sont excellentes, ce qui permet d'affirmer que l'influence des traitements acoustiques est correctement modélisée par les méthodes numériques. Comme annoncé précédemment, on observe que l'atténuation augmente avec le taux de coupure du mode incident. Dans le cas des modes incidents $(m,2)$, par ailleurs, les rayonnements obtenus en champ lointain mettent en évidence des redistributions modales dans le conduit puisque les directivités font apparaître la signature des modes $(m,1)$ correspondants. Ce résultat confirme que les redistributions modales sont bien prises en compte par les méthodes numériques.

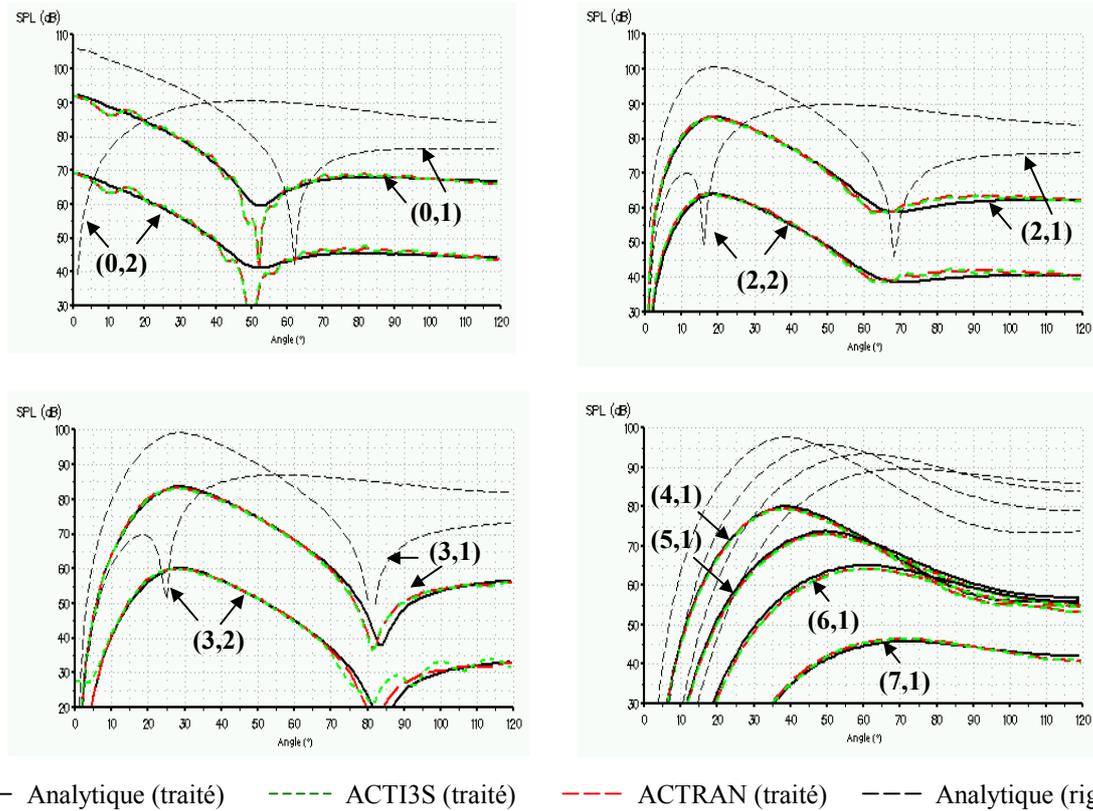


Figure 2.12 : Rayonnements modaux en conduit traité. Corps central long, $k=9$, deux zones de traitement : $(z^T=0.5, L^T=0.5, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.8-i0.5)$; $(z^T=2, L^T=0.5, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=1)$.

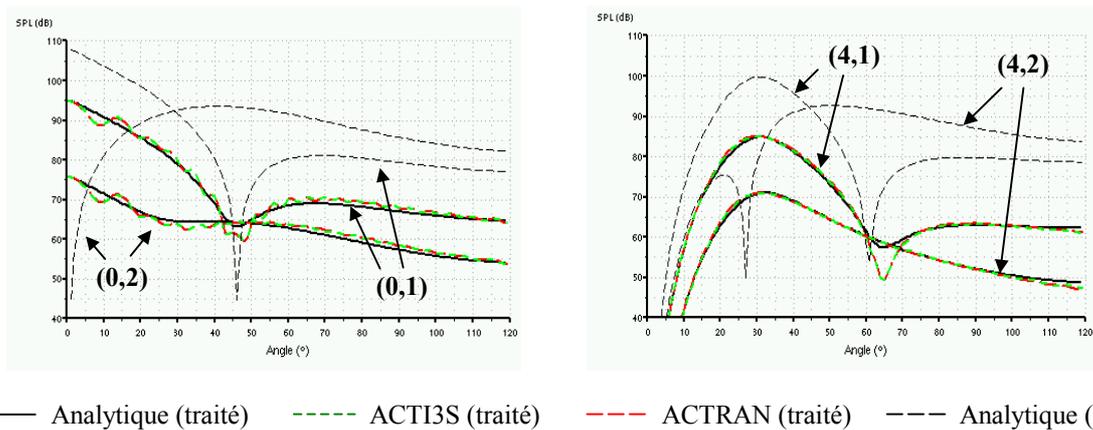


Figure 2.13 : Rayonnements modaux en conduit traité. Corps central long, $k=11$, une zone de traitement : $(z^T=1, L^T=1, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.5+i0.2)$.

Des comparaisons équivalentes ont été effectuées dans le cas de la géométrie tronquée, aboutissant aux mêmes conclusions. Quelques résultats sont illustrés sur la figure 2.14, à la fréquence réduite $k=11$ et pour une configuration présentant un seul tronçon traité. Pour une meilleure lisibilité des graphes, la référence rigide n'est pas indiquée ici. Il est à noter que les redistributions modales favorisant souvent un rayonnement vers les faibles angles, les

comparaisons entre l'approximation bafflée et les méthodes numériques sont souvent meilleures qu'en conduit rigide. À nouveau, la prise en compte de la réflexion en extrémité de conduit améliore les prédictions analytiques mais plutôt que le niveau de pression rayonnée, celle-ci modifie cette fois la forme des directivités en champ lointain (modes (1,2) et (4,2)). Ceci provient du fait que, dans la sommation des directivités modales, la contribution des modes transmis sur la section de sortie varie selon que l'on considère les formulations corrigée (1.70) ou non corrigée (1.68).

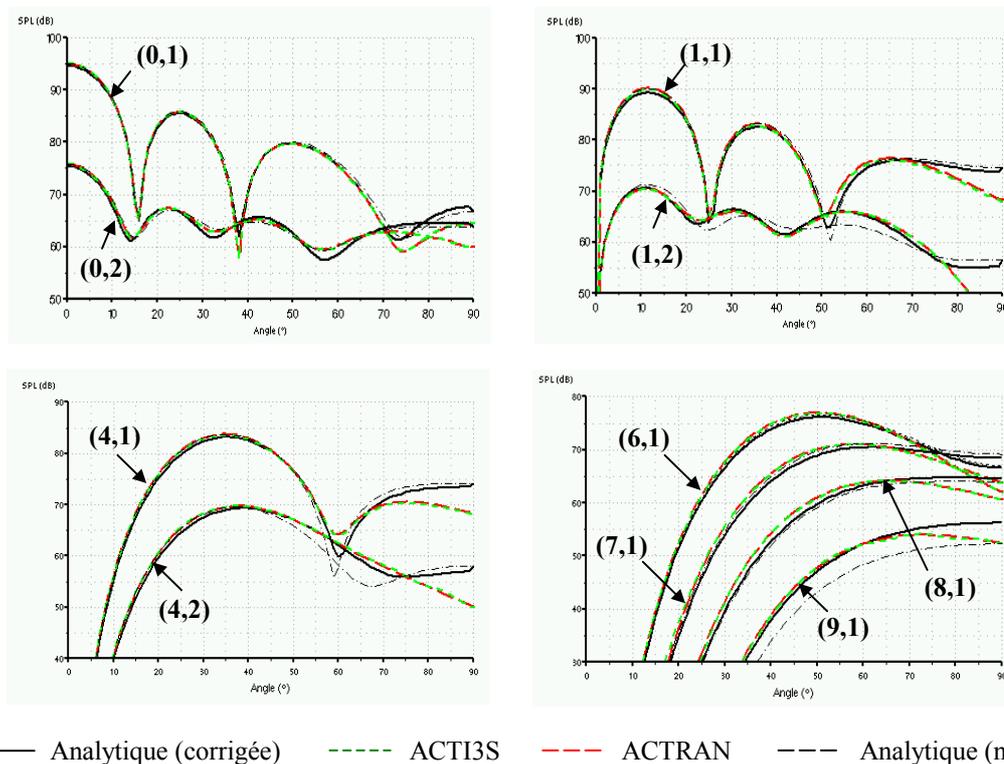


Figure 2.14 : Rayonnements modaux en conduit traité. Corps central tronqué, $k=11$, un tronçon traité : ($z^T=1, L^T=1, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.5+i0.2$).

Pour illustrer l'influence des traitements sur la propagation des modes et confronter les différentes méthodes de calcul, il peut être intéressant également de visualiser la forme du champ acoustique dans le conduit. Nous présentons sur la figure 2.15 la distribution de pression sur une section de conduit traitée, que nous comparons à la forme du mode incident défini sur la section source Γ . La déformation du champ acoustique après traversée des zones de traitement met en évidence les redistributions modales existant aux discontinuités d'impédance. Dans le cas du mode (3,1), par exemple, l'apparition des nœuds de pression sur un rayon de conduit en certaines positions angulaires caractérise la contribution des modes (3,2) et (3,3) au champ total. Seuls les résultats du modèle analytique et d'ACTRAN sont comparés sur la figure 2.15 : nous vérifions une nouvelle fois la cohérence des deux méthodes de calcul.⁷

⁷ Notons que dans le cadre de cette étude, la réflexion à l'extrémité du conduit n'est pas prise en compte, ce qui revient à supposer que le dernier tronçon rigide est infini. Dans les méthodes numériques, cette propriété peut être intégrée en considérant une deuxième surface modale en extrémité de conduit qui autorise la sortie du champ acoustique sans réflexion.

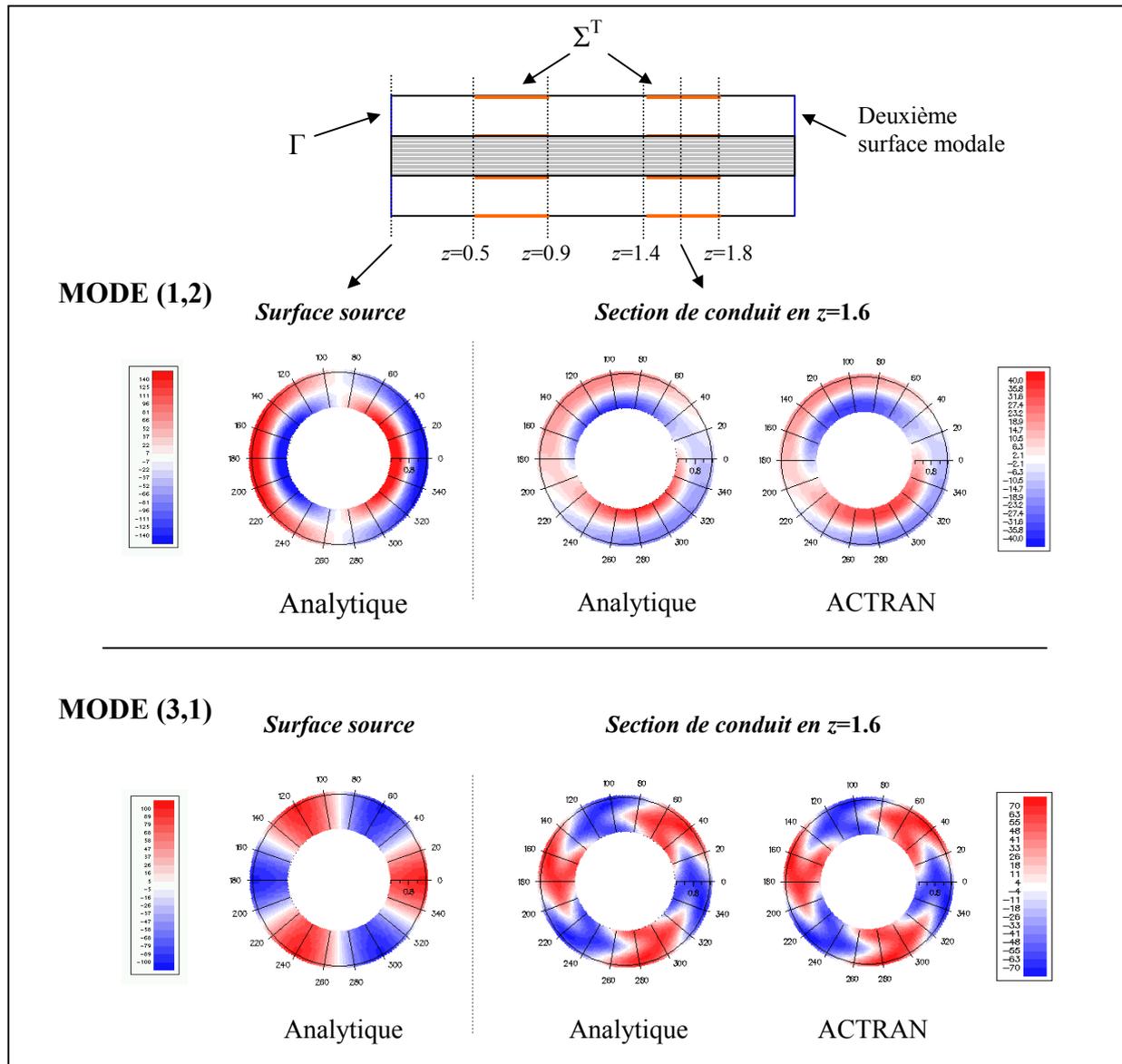


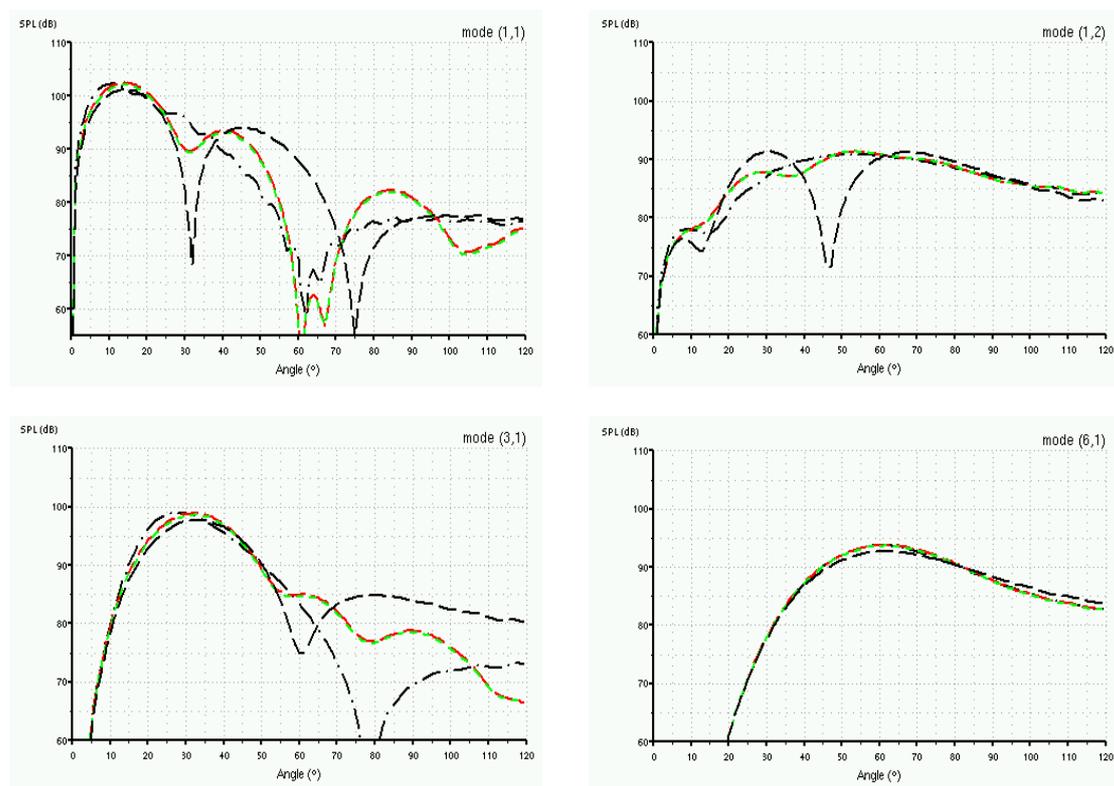
Figure 2.15 : Cartographie de pression sur une section de conduit en configuration traitée. Deux zones de traitements : ($z^T=0.5, L^T=0.4, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.6-i0.2$), ($z^T=1.4, L^T=0.4, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.2+i0.3$). $k=18.48, I_{mn}=130$ dB.

Ces dernières comparaisons en conduit traité concluent de manière très positive l'étude de validité des méthodes numériques en configurations canoniques, sans écoulement. Avant d'analyser le comportement des codes ACTI3S et ACTRAN en présence d'un écoulement uniforme, nous présentons ci-dessous les résultats des calculs numériques obtenus dans le cas de la géométrie intermédiaire (figure 2.5.b).

- **Influence de la longueur du corps central sur le rayonnement en champ lointain**

Au cours du chapitre 1, nous avons montré que les rayonnements des configurations avec corps central infini et corps central tronqué diffèrent à moins que l'énergie du mode incident soit localisée à proximité de la paroi extérieure. Pour poursuivre l'analyse de l'influence du corps central sur le rayonnement en champ lointain, nous proposons sur la figure 2.16 une comparaison des diagrammes de directivité obtenus par les méthodes numériques pour la géométrie intermédiaire (figure 2.5.b) et les géométries « analytiques » (figures 2.5.a et 2.5.c). Le but de l'étude est d'évaluer l'importance des différences entre les configurations analytiques et la géométrie intermédiaire et de déterminer si l'une des méthodes analytiques permet d'approcher le rayonnement d'un conduit plus réaliste.

Les comparaisons de la figure 2.16 confirment l'analyse du chapitre 1 : lorsque l'ordre azimutal du mode incident augmente, l'influence du corps central sur le rayonnement diminue. Ainsi l'écart entre les différentes configurations géométriques est important pour le mode (1,1), plus faible pour le mode (3,1) et quasiment nul pour le mode (6,1). Lorsque des différences entre les configurations sont observées, par ailleurs, deux conclusions peuvent être formulées :



- - - - - Corps long (ACTI3S) - - - - - Corps tronqué (ACTI3S) - - - - - Corps intermédiaire (ACTI3S) - - - - - Corps intermédiaire (ACTRAN)

Figure 2.16 : Influence de la longueur du corps central sur le rayonnement. $k=9$.

- si le mode rayonne relativement près de l'axe, comme dans le cas du mode (1,1), la directivité de la géométrie intermédiaire ne correspond à aucune des directivités asymptotiques mais plutôt à un compromis entre les deux.
- si le rayonnement est dirigé vers les angles élevés, comme dans le cas du mode (1,2), la directivité de la géométrie intermédiaire est proche de celle du corps central infini, mais différente de celle du corps tronqué.

Ces résultats s'expliquent bien entendu par les phénomènes de diffraction se produisant dans la région de sortie du conduit. En effet, bien que les fréquences considérées ici soient faibles, on peut penser que le rayonnement de la géométrie intermédiaire, comme celui de la géométrie avec corps central long, est gouverné par deux diffractions successives. La première, sur la section de sortie du conduit, est similaire pour ces deux modèles d'éjection (les géométries sont identiques sur cette section). Par conséquent, si à ce niveau le champ acoustique est dirigé sur les côtés de la nacelle, les rayonnements des deux configurations sont proches (mode (1,2)). En revanche, si l'énergie acoustique demeure à proximité du corps central au-delà de la section de sortie du conduit, le second phénomène de diffraction à l'extrémité de ce corps modifie fortement le rayonnement de la géométrie intermédiaire, mais peu celui de la géométrie longue. Les directivités des deux modèles d'éjection sont alors différentes (mode (0,1)).

En conclusion, les comparaisons de la figure 2.16 confirment qu'en règle générale, le recours aux méthodes de calcul numériques est nécessaire pour déterminer précisément le rayonnement d'un conduit d'éjection de forme réaliste. En utilisant le modèle analytique du corps central infini, toutefois, il semble possible d'approcher de manière satisfaisante le rayonnement d'une éjection à flux séparés. L'erreur commise, en effet, ne sera conséquente que pour les premiers modes rayonnant en direction de l'axe. L'écart entre le modèle du baffle et les configurations plus réalistes, en général, est plus important... Ce résultat présente un intérêt pour les applications industrielles qui nécessitent souvent des études paramétriques rapides et ne permettent pas toujours l'utilisation des méthodes numériques. Pour effectuer une première approximation du rayonnement d'un conduit d'éjection secondaire, nous conseillons donc d'utiliser le modèle analytique de Rienstra plutôt que l'approximation bafflée. Notons ici que des géométries beaucoup plus réalistes seront étudiées au chapitre 3 : nous aurons alors l'occasion de revenir sur la pertinence du modèle analytique avec corps central infini.

2.3.1.3 Comparaison entre les différentes méthodes : cas de l'écoulement uniforme

La section précédente nous a permis de vérifier la cohérence des différents codes de calcul en l'absence d'écoulement. Afin de progresser dans l'étude de validité des méthodes numériques, nous pouvons désormais analyser les résultats en présence d'un écoulement uniforme. Il s'agit, notamment, de répondre aux questions suivantes :

- Les méthodes numériques permettent-elles de retrouver les effets de convection et la déformation des directivités modales mis en évidence par le calcul analytique ?
- L'atténuation fournie par les traitements acoustiques en présence d'un écoulement est-elle correctement prédite ? En effet, la condition aux limites (1.19) dépend de la valeur du nombre de Mach à proximité du traitement.
- Enfin, les solutions calculées par les méthodes numériques correspondent-elles au modèle analytique continu, à la solution de Kutta (échappement tourbillonnaire au bord de fuite), ou à une solution intermédiaire ?

- **Limitation de la notion d'écoulement uniforme**

Avant de répondre à ces différentes questions, il est important de préciser les difficultés qu'engendre la notion d'écoulement uniforme dans les calculs numériques. Ce concept, en effet, est un concept purement mathématique. Il s'adapte bien au modèle analytique avec paroi sans épaisseur mais pose problème dès que l'on considère des surfaces inclinées par rapport à la direction de l'écoulement. Or, c'est justement le cas du bord de fuite et de l'extrémité du corps central dans les configurations numériques.

Pour remédier à ce problème, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.1, la notion d'écoulement quasi-uniforme a été introduite dans la méthode de calcul BEM. Bien que la modélisation soit alors légèrement différente de celle d'un écoulement totalement uniforme, les études effectuées dans le cadre de l'entrée d'air ont montré que cette hypothèse permet de retrouver les prédictions du modèle analytique de Lordi et Homicz ([48], voir le chapitre 1, page 47). Dans le cadre de notre étude, il s'agira donc de vérifier que les résultats du code ACTI3S sont valables également en configuration d'éjection (écoulement sortant).

Dans le cas de la méthode FEM, le problème est différent. Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que la méthode prend en compte dans sa formulation l'influence d'un écoulement non uniforme potentiel. De manière générale, cet écoulement est calculé préalablement à la modélisation acoustique, par l'intermédiaire d'un code de calcul CFD, puis interpolé sur le maillage acoustique pour le calcul ACTRAN. Dans ce cas, le champ de vitesse utilisé vérifie les conditions aux limites classiques de glissement ou d'arrêt sur les parois de la nacelle et le problème est correctement posé. Pour modéliser un écoulement uniforme, en revanche, les deux solutions qui s'offrent à nous ne sont guère satisfaisantes (voir Lidoine [65]) :

- la solution la plus simple est d'imposer un vecteur vitesse \vec{v}_0 identique en tout point du maillage acoustique (figure 2.17.a). Dans ce cas, l'écoulement est rigoureusement uniforme mais la condition aux limites sur les surfaces inclinées par rapport à l'axe n'est pas physique. Sur ces surfaces, en effet, l'écoulement est directement issu de la paroi solide.

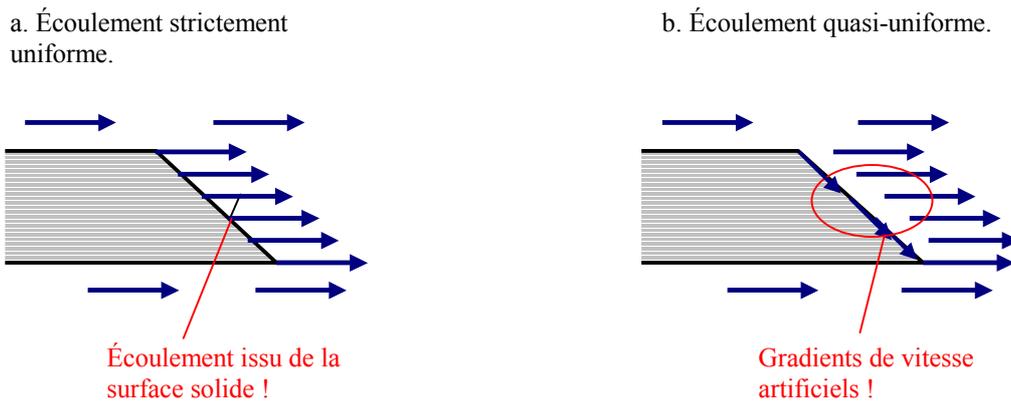


Figure 2.17 : Modélisation d'un écoulement uniforme dans la méthode FEM : deux solutions guère satisfaisantes. Exemple d'un bord de fuite en biseau.

- la seconde solution consiste à s'inspirer de la modélisation quasi-uniforme introduite dans la méthode BEM. Sur les nœuds appartenant aux parois de l'éjection, on ne conserve alors que la composante tangentielle du vecteur vitesse et en tout autre point du maillage, on impose un écoulement uniforme (figure 2.17.b). Contrairement au calcul intégral, cependant, cette modélisation introduit des gradients de vitesse artificiels dépendant du maillage considéré. Entre les nœuds de la surface et les nœuds voisins, on passe en effet d'un vecteur vitesse réduit \bar{v} au vecteur « uniforme » \bar{v}_0 . Des phénomènes de réfraction non physiques vont donc venir s'ajouter au problème initial, risquant de polluer la solution.

La modélisation d'un écoulement uniforme ne semble donc pas possible dans la méthode numérique par éléments finis de volume. Sur le problème des entrées d'air, les deux solutions proposées ci-dessus ont été testées mais les calculs se sont effectivement soldés par l'obtention de résultats incohérents [65]. Dans le cas des conduits d'éjection, pour la géométrie avec corps central long (figure 2.5.c), nous avons tout de même voulu évaluer le modèle de l'écoulement rigoureusement uniforme. Les résultats sont donnés sur la figure 2.18 pour quatre valeurs du nombre de Mach : $M_0=0, 0.2, 0.4$ et 0.6 . Le cas représenté est le mode (0,1) à la fréquence $k=9$. Initialement, pour les faibles vitesses de l'écoulement, le modèle semble donner des résultats satisfaisants. Par rapport au cas $M_0=0$, en effet, les rayonnements obtenus pour les nombres de Mach $M_0=0.2$ et $M_0=0.4$ font apparaître des comportements tout à fait physiques : on observe ainsi un décalage de l'extinction, lié à la diminution de la fréquence de coupure du mode (0,2), et une légère baisse de niveau sur le lobe principal, liée aux effets de convection. Dans le cas de l'écoulement $M_0=0.6$, en revanche, la directivité présente de fortes perturbations qui ne peuvent être expliquées par un phénomène physique. Ces perturbations sont le reflet des problèmes de modélisation au niveau du bord de fuite. Différents calculs ont été effectués sur la configuration de la figure 2.18, aboutissant au même type de conclusion. Selon la fréquence et le mode considérés, toutefois, les perturbations apparaissent pour des valeurs de Mach plus ou moins élevées.

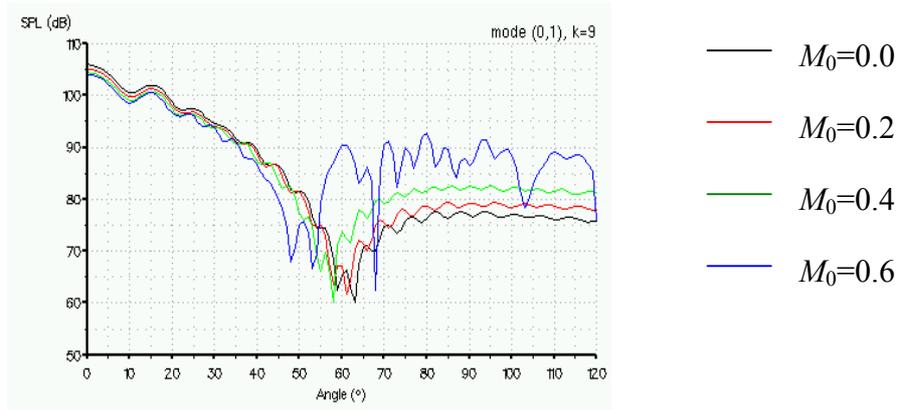


Figure 2.18 : Diagrammes de rayonnement calculés par ACTRAN en présence d'un écoulement uniforme. Géométrie avec corps central long (figure 2.5.c).

Actuellement, dans le code ACTI3S, il est impératif de considérer une épaisseur non nulle pour toute surface solide. Ceci explique, entre autres, la forme des modèles génériques retenus pour notre étude (figure 2.5). Dans le code de calcul ACTRAN, en revanche, il est possible *a priori* de modéliser des surfaces sans épaisseur. Afin de permettre l'utilisation de la méthode FEM en présence d'un écoulement uniforme, nous avons donc voulu tester une nouvelle géométrie d'éjection, considérant un cylindre extérieur infiniment mince. L'idée est la suivante. En éliminant l'épaisseur du bord de fuite, on limite les problèmes de modélisation de l'écoulement aux surfaces situées à l'extrémité du corps central et en amont de l'éjection (fermeture artificielle de la géométrie). Le champ acoustique se propageant dans ces régions étant généralement très faible, on espère alors retrouver une solution réaliste, comparable au modèle analytique. En dehors de l'épaisseur du bord de fuite, la nouvelle géométrie (figure 2.19) est identique au modèle de la figure 2.5.c.

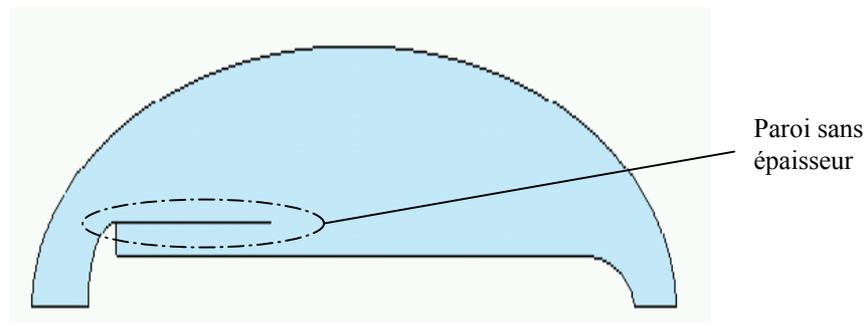


Figure 2.19 : Modèle de conduit d'éjection avec paroi externe sans épaisseur.

Nous présentons sur la figure 2.20 les rayonnements calculés par ACTRAN sur la géométrie avec paroi externe sans épaisseur. La fréquence, le mode et les nombres de Mach considérés sont identiques au cas de la figure 2.18. On constate que les perturbations irréalistes observées précédemment à $M_0=0.6$ ne sont plus visibles. Dans le cas du corps central allongé, la prise en compte d'un bord de fuite sans épaisseur permet donc d'éviter la dégénérescence des résultats du code ACTRAN.

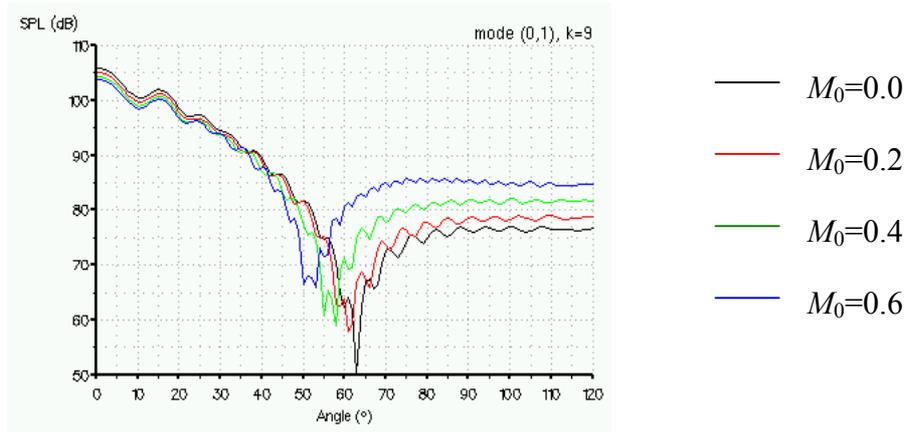


Figure 2.20 : Diagrammes de rayonnement calculés par ACTRAN en présence d'un écoulement uniforme. Géométrie avec paroi externe sans épaisseur.

Finalement, en considérant pour le calcul ACTRAN la géométrie de la figure 2.19, nous pouvons désormais procéder à la comparaison des différentes méthodes en présence d'un écoulement uniforme. Il est important de noter, toutefois, que cette modélisation de l'écoulement demeure inadaptée à la méthode de calcul FEM. De manière générale, l'utilisation du code ACTRAN sur des géométries plus réalistes nécessitera au préalable le calcul d'un champ de vitesse respectant des conditions aux limites physiques sur les parois de l'éjection. Néanmoins, l'évaluation des résultats de la méthode FEM en présence d'un écoulement uniforme présente un intérêt car elle permet de vérifier que certains phénomènes liés à l'écoulement, autres que la réfraction, sont bien pris en compte dans ACTRAN (effets de convection, décalage fréquentiel, influence de l'écoulement sur l'efficacité des traitements acoustiques). Afin de ne pas retomber dans des configurations problématiques, nous nous limitons dans la suite au cas de la géométrie avec corps central long.

- **Comparaisons entre les différentes méthodes en conduit rigide**

Dans un premier temps, les différentes méthodes de calcul ont été comparées en conduit rigide. Les solutions de référence sont données par le modèle analytique de Rienstra, avec ou sans échappement tourbillonnaire au bord de fuite (« solution de Kutta » et « solution continue », voir le chapitre 1, page 53). Les calculs ACTI3S sont effectués sur la géométrie générique (figure 2.5.c) avec l'hypothèse de l'écoulement quasi-uniforme. Le code ACTRAN est utilisé sur le modèle d'éjection de la figure 2.19, dans le cas d'un écoulement strictement uniforme.

Les premières comparaisons sont présentées pour un nombre de Mach $M_0=0.4$ (figure 2.21). De manière assez surprenante, on constate que le rayonnement prédit par ACTRAN correspond à la solution continue de Rienstra tandis que le calcul ACTI3S s'accorde, lui, à la solution de Kutta !

Pour comprendre les différences de comportement entre ACTI3S et ACTRAN, il est nécessaire de confronter les caractéristiques de chacune des solutions analytiques aux formulations retenues dans les codes de calcul numériques. Au chapitre 1, nous avons vu que le problème de la diffraction par un bord de fuite en présence d'un écoulement uniforme admet une infinité de solutions. Parmi l'ensemble de ces solutions, nous avons retenu :

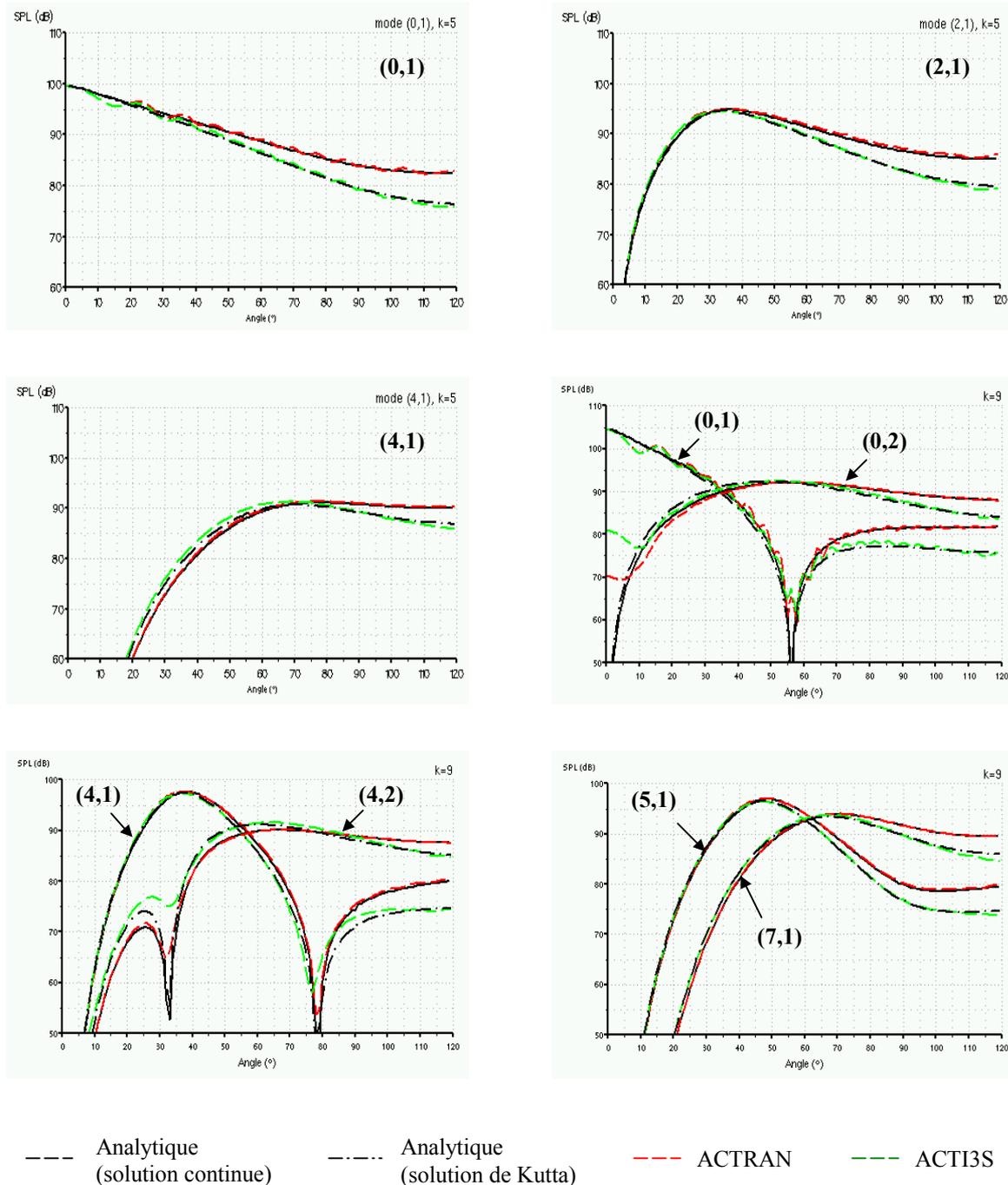


Figure 2.21 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'un écoulement uniforme. $M_0=0.4$, $k=5$ et $k=9$, conduit rigide.

- la « solution continue » ($\gamma=0$), seule solution pour laquelle le champ acoustique (p, v, ϕ) est continu en tout point de l'espace.
- la « solution de Kutta » ($\gamma=1$), qui est l'unique solution présentant une vitesse et une pression acoustiques finies au bord de fuite. Dans ce cas, la pression acoustique est continue en tout point de l'espace mais le potentiel et la vitesse acoustiques sont discontinus au bord de fuite.

Dans le code de calcul ACTRAN, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.2, l'équation de propagation (2.18) est écrite sur le potentiel acoustique puis résolue, sous forme variationnelle, en considérant que l'inconnue ϕ est continue en tout point de l'espace. La solution recherchée ne peut donc faire intervenir aucun saut de potentiel et le problème admet une solution unique, correspondant à la solution analytique continue.

Dans le cas du code ACTI3S, l'interprétation du résultat est plus délicate. En effet, l'équation des ondes en milieu convecté (2.1) est écrite sur le champ de pression acoustique p mais les solutions analytiques proposées par Rienstra supposant toute une pression continue, les hypothèses relatives à la continuité de p ne peuvent justifier la convergence d'ACTI3S vers la solution de Kutta. Aussi, pour proposer une interprétation rigoureuse du résultat, il s'agirait plutôt de démontrer que la solution recherchée ne peut tendre vers l'infini en un point de la surface, ce qui garantirait alors que le calcul ACTI3S converge vers la solution de Kutta. Une telle démonstration n'a pas été entreprise dans le cadre de la thèse et la justification de l'accord entre le calcul ACTI3S et la solution de Kutta demeure donc ouverte...

A première vue, il peut paraître surprenant que la formulation intégrale permette de retrouver la solution analytique tenant compte d'une couche de vorticité convectée dans le *milieu de propagation*. Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, toutefois, la solution du problème considéré ici est entièrement définie par la condition à la limite appliquée au bord de fuite de sorte que la prise en compte ou non d'un échappement tourbillonnaire peut tout à fait être imposée par une méthode de calcul surfacique. Dans le modèle analytique, par ailleurs, le champ de vorticité est un champ de perturbations hydrodynamiques mais l'écoulement moyen, lui, est rigoureusement uniforme. L'emploi de la fonction de Green en écoulement uniforme dans la formulation intégrale n'est donc pas en contradiction avec le développement de la couche de vorticité.

Nous insistons ici sur le fait que l'accord des codes ACTRAN et ACTI3S avec l'une ou l'autre des solutions analytiques est lié à la variable de base choisie dans chacun des codes et non   la méthode de résolution par éléments finis de volume ou de frontière. A titre d'exemple, l'utilisation d'un code de calcul BEM écrit à partir de l'inconnue 'potentiel acoustique' ϕ conduirait très certainement à l'obtention de la solution continue ($\gamma=0$).

Il est à noter que l'accord entre les pr dictiones numériques et analytiques, pour les deux types de solution, est excellent. Par rapport au cas sans écoulement (figure 2.6), les méthodes numériques permettent de retrouver le décalage des lobes et des extinctions, ainsi que l'apparition de nouveaux modes passants (mode (4,2)   $k=9$). L'évolution des diagrammes de directivité en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement est également bien prise en compte, comme le montre les comparaisons de la figure 2.22. Du fait de l'influence croissante de l'échappement tourbillonnaire, l'écart entre les solutions calculées par ACTI3S et ACTRAN augmente avec la valeur du nombre de Mach

Comme dans le cas sans écoulement, enfin, nous présentons sur la figure 2.23 des comparaisons sur la phase de la pression rayonnée. La valeur du nombre de Mach est $M_0=0.4$. Contrairement aux résultats en terme de niveau, il apparaît que la phase du champ lointain ne dépend pas de la condition à la limite appliquée au bord de fuite. Les pr dictiones des deux méthodes numériques sont donc comparables et on vérifie qu'elles s'accordent avec le calcul analytique. Par rapport au cas sans écoulement (figure 2.9), enfin, l'évolution de la phase avec l'angle de directivité est beaucoup plus rapide, ce qui s'explique par l'apparition du terme convectif $e^{-iM_0\bar{k}\bar{z}}$ dans l'expression du champ lointain (1.63).

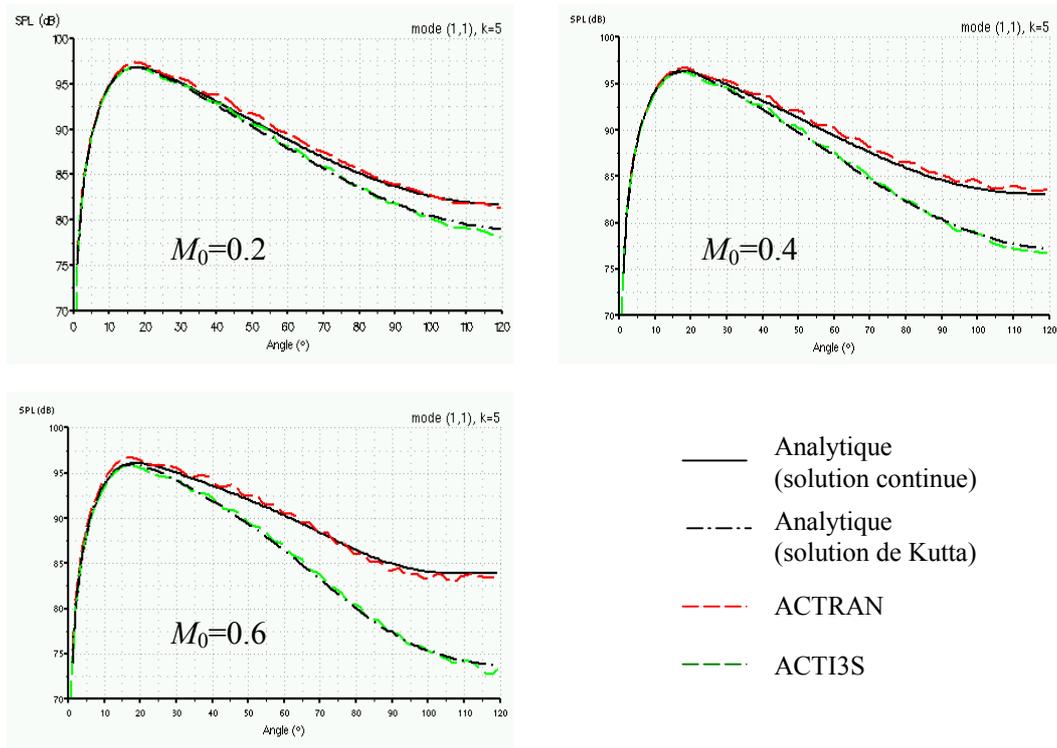


Figure 2.22 : Diagrammes de rayonnement pour différentes valeurs de l'écoulement. Mode (0,1), $k=5$.

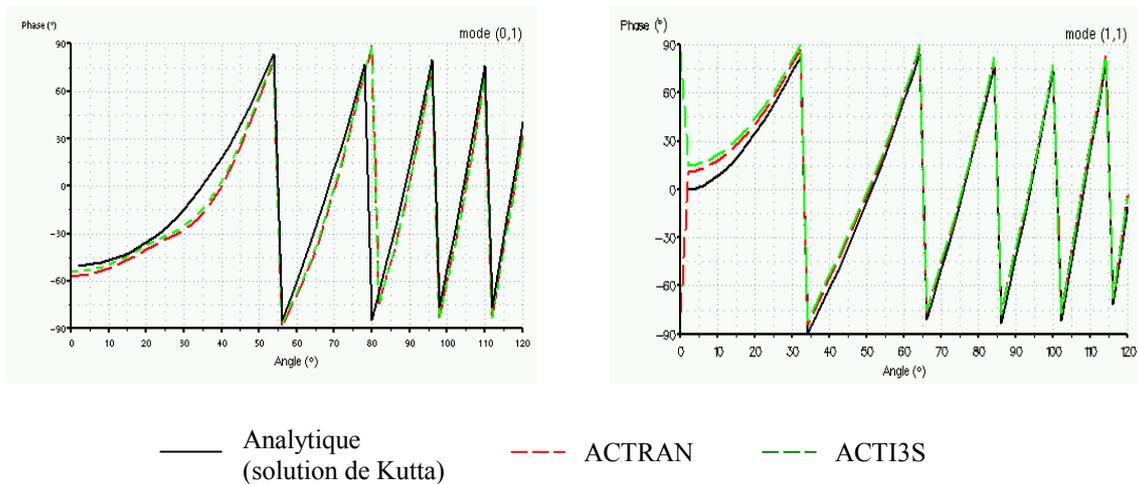


Figure 2.23 : Phase de la pression rayonnée pour un écoulement uniforme $M_0=0.4$. Modes (0,1) et (1,1), $k=5$.

• **Comparaison entre les différentes méthodes en conduit traité**

Pour conclure l'étude de validité des méthodes numériques en configurations canoniques, nous considérons désormais le cas d'un conduit traité en présence d'un écoulement uniforme. L'objectif, notamment, est de vérifier l'atténuation prédite par les méthodes numériques pour un nombre de Mach non nul. Les calculs ACTI3S et ACTRAN sont effectués sur les mêmes configurations que précédemment, à savoir le modèle générique (figure 2.5.c) pour ACTI3S et le modèle avec paroi externe sans épaisseur (figure 2.19) pour ACTRAN. La figure 2.24 présente quelques comparaisons obtenues pour un nombre de Mach $M_0=0.6$, en reprenant la configuration traitée considérée sans écoulement (figure 2.13) (position des traitements et valeurs d'admittance inchangées). Les prédictions en conduit rigide sont données en tant que référence.

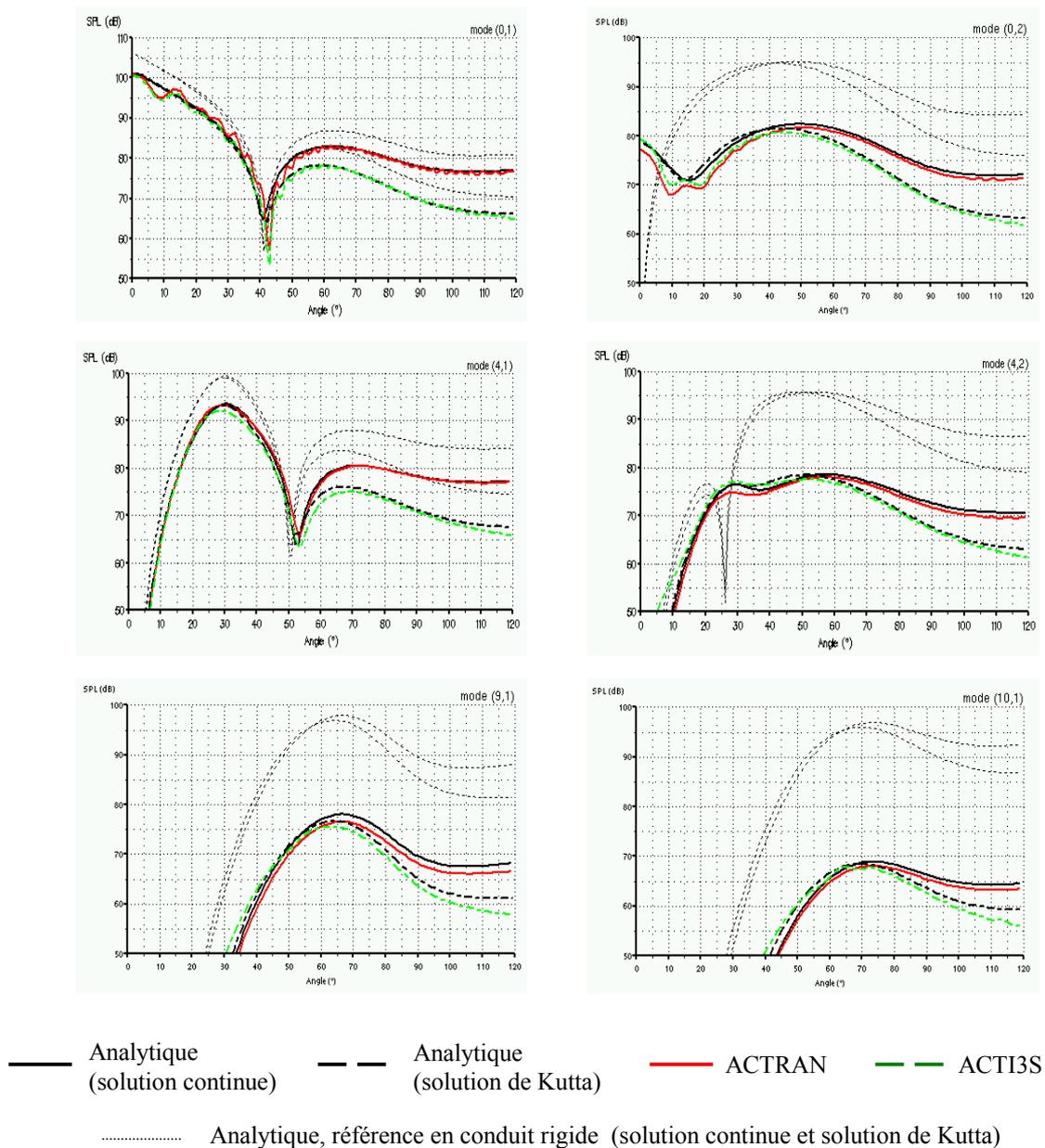


Figure 2.24 : Diagrammes de rayonnement modal en conduit traité avec écoulement uniforme. $k=11$, $M_0=0.6$, un tronçon traité : $(z^T=1, L^T=1, \alpha_{int}=\alpha_{ext}=0.5+i0.2)$.

Comme en configuration rigide, on retrouve deux groupes distincts de solutions (solution continue et solution de Kutta). Les résultats amènent les conclusions suivantes :

- L'accord entre les méthodes de calcul est une nouvelle fois vérifié. Les différences sont un peu plus prononcées que pour la configuration traitée sans écoulement mais l'écart entre les prédictions numériques et analytiques reste faible devant l'atténuation prédite par chacune des méthodes.
- La comparaison des résultats présentés sur les figures 2.24 et 2.13 montre qu'en conduit d'éjection, la présence d'un écoulement tend à diminuer l'efficacité des traitements acoustiques. À titre d'exemple, l'atténuation du mode (4,1) est d'environ 15 dB dans le cas sans écoulement et de 7 dB pour un nombre de Mach $M_0=0.6$. Rigoureusement, ces résultats ne sont pas directement comparables car l'admittance d'un traitement acoustique est légèrement modifiée en présence d'écoulement mais les tendances observées sont tout de même proches du comportement réel. Physiquement, la perte d'efficacité des traitements en présence de l'écoulement peut se comprendre comme une conséquence des effets de convection. En effet, ceux-ci diminuent l'incidence des modes et réduisent le parcours des ondes acoustiques à l'intérieur du conduit (augmentation du pas de la propagation hélicoïdale).

Cette dernière série de résultats permet de conclure de manière positive la première phase de validation des méthodes numériques basses fréquences par comparaison des différents codes de calcul.

2.3.1.4 Conclusion sur la comparaison des différentes méthodes de calcul

Un grand nombre de comparaisons entre les différents modèles théoriques ont été présentées ci-dessus pour vérifier la pertinence des méthodes FEM et BEM sur des configurations canoniques de conduits d'éjection. Les modèles analytiques de Rienstra et de l'approximation de la membrane bafflée ont été utilisés en tant que référence même si dans certains cas, les résultats de l'approximation bafflée ont été remis en cause. L'étude s'est inscrite dans une démarche d'analyse progressive afin d'isoler l'influence de chacun des paramètres du problème : géométrie, écoulement uniforme, présence des traitements acoustiques. Dans la configuration sans écoulement, les principales conclusions sont les suivantes :

- Quelle que soit la géométrie considérée (corps central long ou tronqué), la directivité et les niveaux de pression rayonnée calculés par les méthodes analytiques et numériques sont équivalents. Les prédictions sur la phase obtenues par ACTI3S, ACTRAN et le modèle de Rienstra sont également cohérents. En revanche, les résultats de l'approximation bafflée en terme de phase ne sont pas conformes aux prédictions numériques.
- Les champs proches calculés par les deux méthodes numériques sont identiques.
- L'atténuation et les redistributions modales induites par les traitements acoustiques sont correctement modélisées par les méthodes de calcul numériques.

- Les phénomènes de diffraction à l'extrémité du corps central ont été mis en évidence et l'influence de la longueur du corps central sur le rayonnement a été analysée. Nous avons ainsi montré qu'en première approximation, pour prédire le rayonnement d'une éjection à flux séparés, il est préférable d'utiliser le modèle de Rienstra plutôt que l'approximation bafflée. Pour une estimation précise des effets de géométries, cependant, le recours aux méthodes numériques reste indispensable.

L'étude effectuée en présence d'un écoulement uniforme a montré que ce concept est inadapté à la méthode de calcul FEM. Dans le cas d'un corps central allongé, toutefois, il est possible d'éviter la dégénérescence des résultats d'ACTRAN en considérant un bord de fuite sans épaisseur. La comparaison des méthodes numériques et du modèle de Rienstra aboutit alors aux conclusions suivantes :

- Les codes de calcul ACTRAN et ACTI3S convergent, respectivement, vers les solutions de Rienstra avec et sans échappement tourbillonnaire. L'accord des méthodes numériques avec l'une ou l'autre des solutions analytiques s'explique par la variable de base choisie dans chacun des codes (pression ou potentiel acoustique).
- L'hypothèse de l'écoulement quasi-uniforme introduite dans ACTI3S permet de retrouver les prédictions du modèle analytique basé sur un écoulement rigoureusement uniforme.
- Les effets de convection et le décalage fréquentiel liés à l'écoulement sont correctement modélisés par les méthodes numériques. L'atténuation engendrée par les traitements acoustiques est également estimée de manière satisfaisante.

Si la modélisation d'un écoulement uniforme dans la méthode FEM est impossible pour la géométrie avec corps central tronqué, cette configuration est tout à fait envisageable dans le cas de la méthode BEM. A titre de complément, la figure 2.25 présente des comparaisons entre l'approximation bafflée et la méthode intégrale pour trois valeurs du nombre de Mach : $M_0=0$, $M_0=0.4$, $M_0=0.6$. La fréquence réduite est fixée à $k=9$ et les rayonnements sont donnés dans le cas du mode (0,1). L'accord entre les deux méthodes est très satisfaisant et même supérieur à nos attentes. En effet, l'écoulement étant introduit dans l'approximation bafflée par l'intermédiaire de la transformation de Prandtl-Glauert (chapitre 1), la solution analytique utilisée ici est un équivalent, pour la géométrie tronquée, de la solution continue de Rienstra (sans échappement tourbillonnaire). Or, nous avons vu que le calcul ACTI3S impose une condition de Kutta au niveau du bord de fuite extérieur et il est probable qu'une condition similaire soit appliquée ici sur les bords singuliers du corps central. En conséquence, on aurait pu s'attendre à obtenir un écart croissant entre les deux méthodes lorsque le nombre de Mach augmente, ce qui n'est visiblement pas le cas sur la figure 2.25. L'interprétation des résultats en configuration tronquée avec écoulement uniforme est toutefois très délicate et elle n'est pas indispensable à notre propos. Nous considérerons donc simplement les comparaisons de la figure 2.25 comme une nouvelle illustration du bon comportement de la méthode BEM en présence d'un écoulement uniforme.

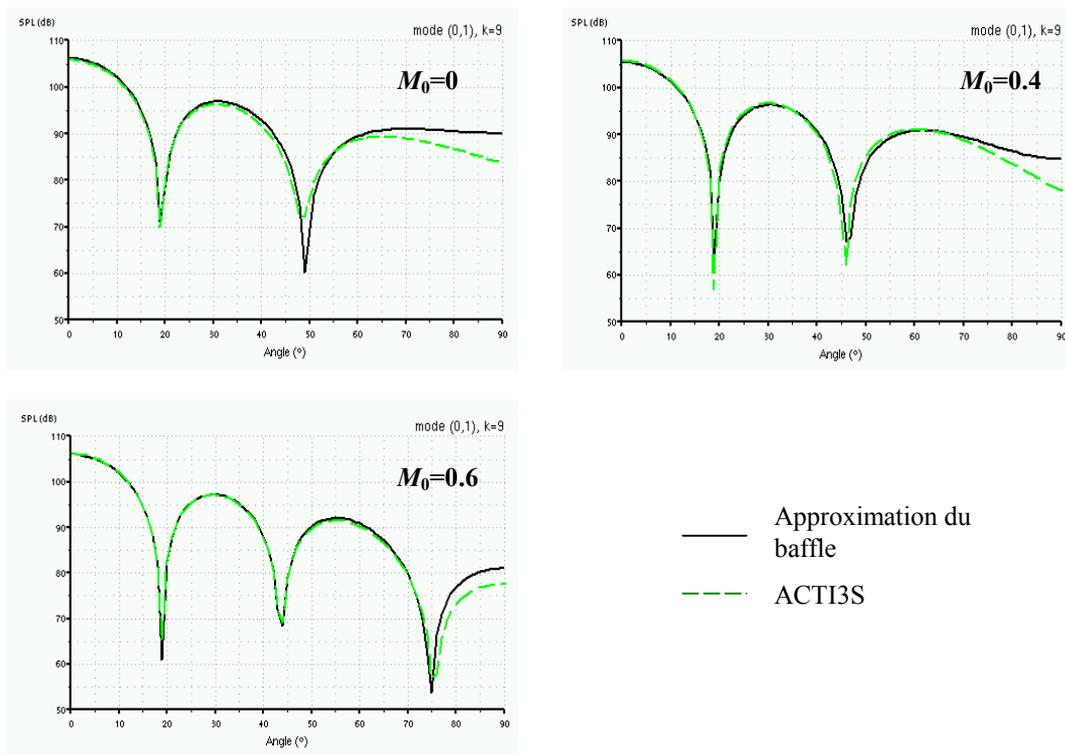


Figure 2.25 : Diagrammes de rayonnement pour différentes valeurs de l'écoulement. Comparaison entre le modèle du baffle et la méthode BEM. Mode (0,1), $k=9$.

Pour parler de validation des méthodes de calcul, la comparaison des différentes approches théoriques entre elles n'est pas suffisante. Il importe également de s'assurer que les modèles mathématiques utilisés dans chacune des méthodes traduisent de manière satisfaisante la réalité physique. C'est pourquoi une campagne de mesures sur différentes maquettes de conduit d'éjection a été menée au Laboratoire d'Acoustique d'AIRBUS France. Le paragraphe suivant présente une comparaison des résultats d'essais à la simulation

2.3.2 Comparaison entre le calcul numérique FEM et des mesures en chambre sourde

La campagne de mesures a été réalisée en chambre sourde, sans écoulement. Comme nous allons le voir, plusieurs maquettes de conduits d'éjection ont été spécifiées puis fabriquées, toutes de formes axisymétriques. Suite aux résultats que nous venons de présenter montrant l'accord parfait des méthodes FEM et BEM en configuration sans écoulement, seuls les calculs ACTRAN seront confrontés dans cette section à la mesure expérimentale. Le principe de la mesure, le banc d'essai et les modèles d'éjection sont présentés dans un premier temps, suivis de l'analyse des résultats.

2.3.2.1 Dispositif expérimental, configurations pour la mesure et le calcul

- **Modèles d'éjection**

Les maquettes de conduits d'éjection fabriquées pour cette étude ont été définies à partir d'une veine acoustique utilisée à AIRBUS pour modéliser des entrées d'air et correspondant à un conduit cylindrique de section circulaire. Afin de réaliser des mesures sur des configurations d'éjection, trois formes de corps centraux ont été spécifiées, représentant de manière schématique les éléments internes d'un conduit secondaire (conduit primaire, cône...). La géométrie des corps centraux et leur position par rapport à l'extrémité de la veine circulaire sont présentées sur la figure 2.26. Les deux premières configurations (figures 2.26.a et 2.26.b) correspondent à des formes simplifiées d'une éjection à flux séparés avec cône immergé et d'une éjection à flux mélangés (voir l'introduction). Dans la suite, on parlera de configurations de types 'nacelle courte' et 'nacelle longue'. La troisième forme d'éjection, non représentative d'un moteur réel, est inspirée par le modèle analytique avec corps central infini et a été choisie pour confirmer certains des résultats obtenus jusqu'ici. En comparant les mesures sur les différentes maquettes, on souhaite notamment vérifier l'influence de la longueur du corps central sur le rayonnement et l'effet de la diffraction à l'extrémité de ce corps. L'extrémité circulaire de la veine est suffisamment fine pour considérer dans les calculs numériques le même type de bord de fuite que précédemment, en forme de biseau (voir la figure 2.5). Le rapport de rayon dans la partie annulaire de section constante est fixé à $h=0.6$.

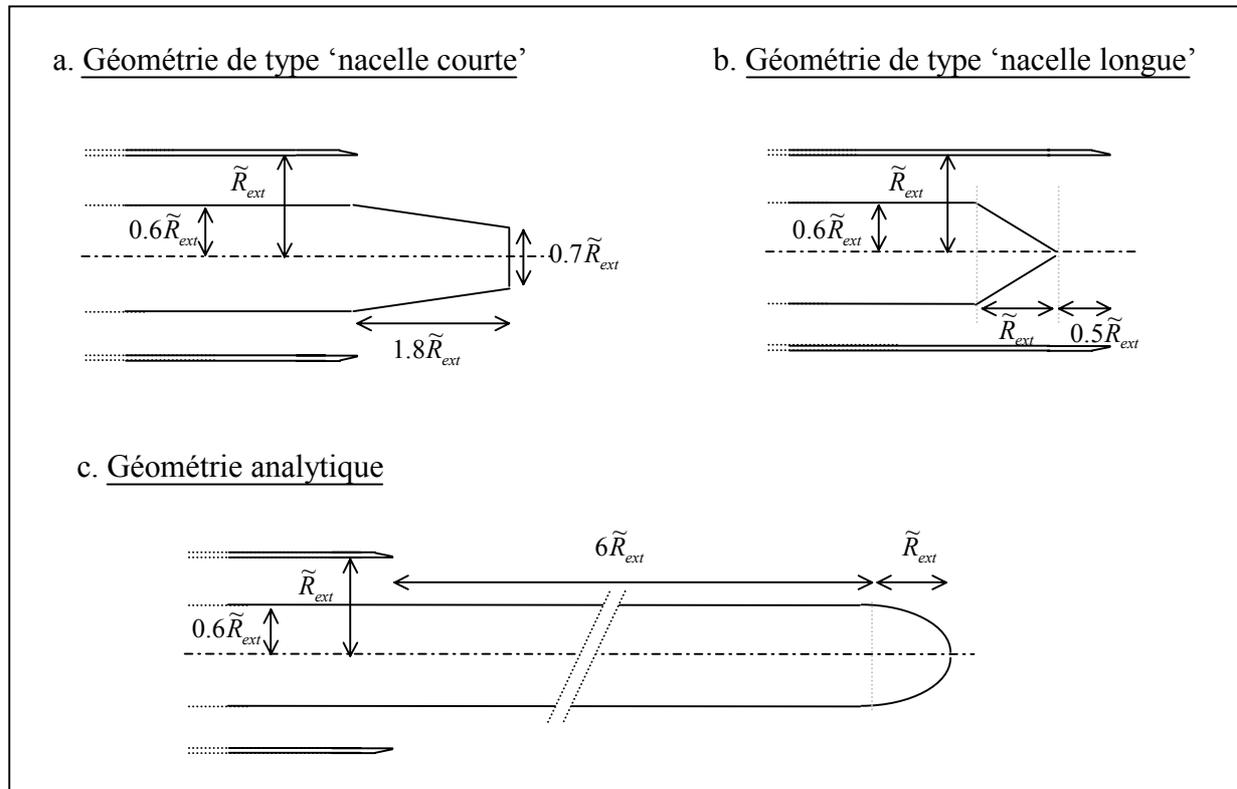


Figure 2.26 : Modèles de conduits d'éjection utilisés pour la mesure.

- **Principe de la campagne de mesure et banc d'essai**

La figure 2.27 présente un schéma du banc d'essai utilisé pour la campagne de mesures. La veine extérieure est constituée de plusieurs tronçons remplissant chacun une fonction spécifique. A l'intérieur du conduit, l'excitation acoustique est assurée par un anneau de 21 haut-parleurs développé à AIRBUS. Les haut-parleurs sont répartis de manière équidistante sur la circonférence de l'anneau. Le contrôle du signal émis en chaque point permet de générer des modes d'ordre azimutal m donné, avec m compris entre -10 et +10 [127]. Il est à noter que la gamme des modes azimutaux que l'on peut exciter est directement liée au nombre de haut-parleurs utilisés. L'ordre radial des modes, en revanche, ne peut être contrôlé.

Le champ acoustique généré dans le conduit est analysé par l'intermédiaire de deux anneaux de détection modale constitués de 22 microphones affleurant la paroi externe du conduit. Pour chacun des anneaux, la mesure de la pression acoustique en 22 positions angulaires permet de déterminer, sur la section de conduit correspondante, l'amplitude complexe $A_m(z)$ des modes azimutaux m compris entre -10 et +10. Les amplitudes calculées sur chacune des sections, toutefois, correspondent à la somme des amplitudes incidentes et réfléchies. Pour dissocier la contribution des différentes ondes et connaître l'intensité des modes incidents (donnée d'entrée des codes de calcul), nous utilisons donc deux anneaux de détection modale (voir l'annexe 2). Comme l'anneau de haut-parleurs, les anneaux de détection modale ont été développés à AIRBUS.

Afin d'effectuer des mesures en configurations rigides et traitées, les deux anneaux de microphones sont séparés par un tronçon intermédiaire qui peut être recouvert d'un matériau absorbant. Lorsque le traitement acoustique est présent, il débute après la jonction entre le premier anneau de détection et le tronçon intermédiaire et s'étend sur une longueur $L^T=1.065$.

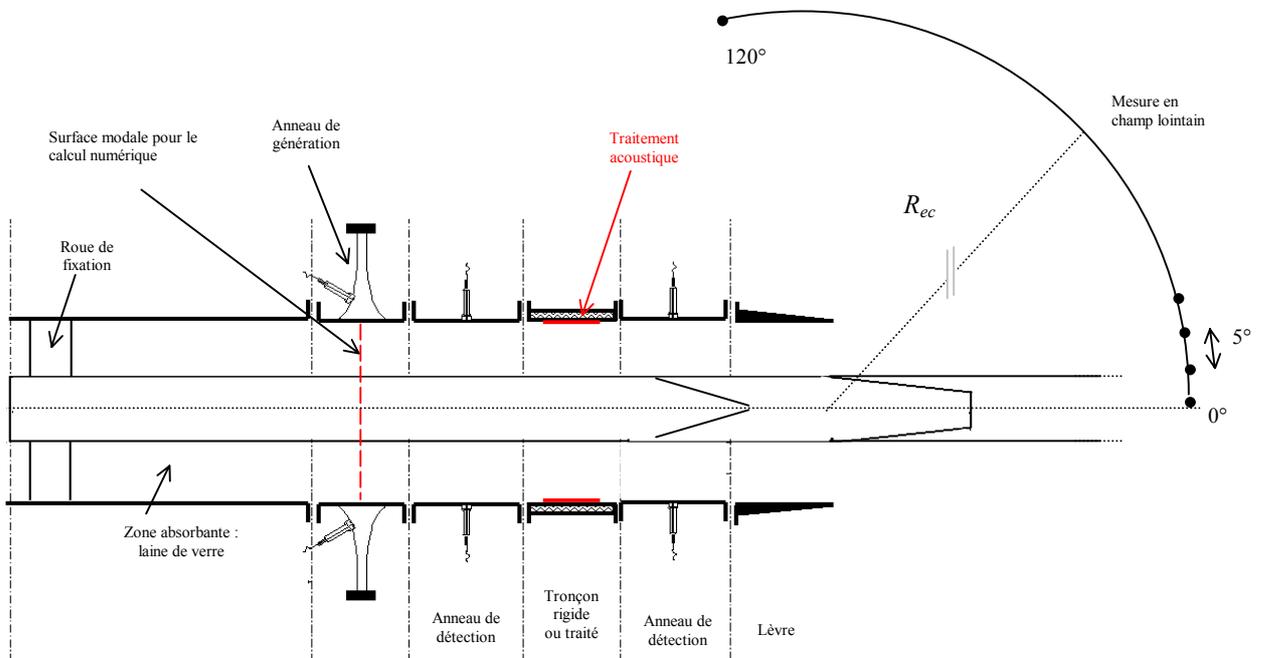


Figure 2.27 : Schéma du dispositif expérimental.

Notons que seule la paroi externe du conduit peut être traitée, le corps central est toujours rigide. Le traitement acoustique utilisé est un traitement de type SDOF avec tôle perforée et ‘wiremesh’ (tissu métallique microporeux).

A l’extérieur du conduit, le rayonnement est mesuré à l’aide de vingt cinq microphones situés sur un arc de cercle entre 0° à 120° . Le pas angulaire est de 5° . La distance de mesure par rapport au centre de la section de sortie est $R_{ec} = 10$, ce qui est suffisant pour que la condition de champ lointain soit vérifiée.

Pour finir, précisons que les corps centraux sont fixés à l’intérieur de la veine à l’aide de deux roues métalliques positionnées à l’arrière du conduit. La coaxialité de la veine et des corps centraux est vérifiée et renforcée dans le cas de la forme analytique à l’aide d’une élingue à l’extrémité du corps central. La partie arrière du conduit, entre l’anneau de haut-parleurs et les roues de fixation, est remplie de laine de verre afin d’absorber les ondes réfléchies et éliminer ainsi les réflexions parasites. Pendant les mesures, l’extérieur de la veine est également recouvert de laine de verre.

Les appareils de mesure et les différentes configurations du banc d’essai sont illustrés par les photographies de la figure 2.28.

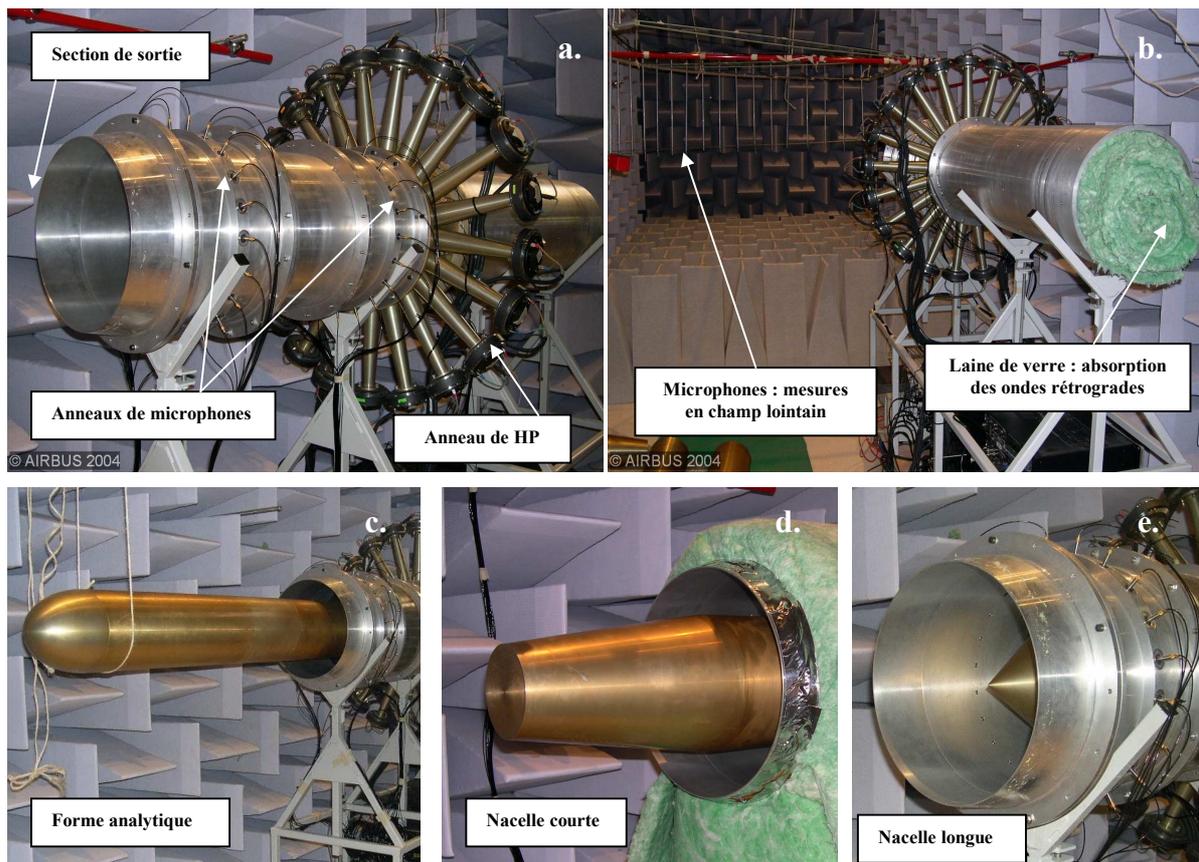


Figure 2.28 : Photographies du banc d’essai. a. : veine circulaire et instrumentation ; b. : vue arrière de la veine ; c., d., e. : les trois maquettes de corps centraux.

• **Configurations d'étude : fréquences et excitations**

Pour chacun des modèles d'éjection présentés sur la figure 2.26, les mesures sont effectuées avec et sans traitement acoustique pour quatre valeurs de la fréquence correspondant approximativement à $k=5.19$, $k=7.15$, $k=10.31$ et $k=12.84$. Le choix de ces fréquences est dicté, principalement, par deux critères :

- L'excitation et la détection modales ne permettant pas de distinguer les différents modes radiaux pour un ordre azimutal donné, les fréquences d'étude ont été sélectionnées pour que seul un mode radial n soit passant dans la majorité des cas.
- Comme nous l'avons mentionné précédemment, les intensités incidentes I_{mn} générées par l'anneau de haut-parleurs sont estimées à partir des mesures effectuées par les deux anneaux de détection. En règle générale, la dissociation des ondes incidentes et réfléchies ne pose pas de problème mais il se peut parfois que les incertitudes de mesure « polluent » le calcul. Ainsi, Boden et Abom [1] [12] ont montré que pour un champ acoustique de nombre d'onde axial k_z , l'extraction de l'onde incidente peut être faussée si l'espacement entre les deux positions de mesure L_a est tel que le produit $k_z \times L_a$ est proche d'un multiple de π . Pour plus de détail, on pourra se reporter à l'annexe 2 mais on retiendra dès à présent que les amplitudes modales $A_{mn}^+(z)$ et $A_{mn}^-(z)$ ne peuvent être dissociées correctement qu'à la condition :

$$(p+0.1)\pi < k_{z_{mn}} L_a < (p+0.8)\pi, \quad \text{avec } p \text{ entier naturel.} \quad (2.38)$$

$k_{z_{mn}}$ est la constante de propagation axiale du mode considéré. Les fréquences réduites $k=5.19$, $k=7.15$ et $k=10.31$ ont donc été choisies pour que les modes passants $(m,1)$ vérifient tous la condition (2.38). Dans le cas de la fréquence $k=12.84$, le mode $(8,1)$ seulement ne respecte pas cette condition : nous montrons en annexe 2 que le calcul de l'onde incidente, alors, est effectivement incorrect.

Le tableau 2.2 indique pour chaque fréquence d'étude l'ensemble des modes passants sur une section annulaire de rapport de rayon $h=0.6$ et sur la section circulaire correspondant à l'extrémité du conduit de type nacelle longue (seul les ordres azimutaux positifs sont considérés) :

k	Modes passants sur une section annulaire $h=0.6$	Modes passants sur une section circulaire de rayon 1
$k=5.19$	(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1),	(0,1), (0,2), (1,1), (2,1), (3,1)
$k=7.15$	(0,1), (1,1), (2,1), (3,1) (4,1), (5,1)	(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1), (5,1)
$k=10.31$	(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (7,1), (8,1)	(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (6,1), (7,1), (8,1)
$k=12.84$	(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1) (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2), (7,1), (7,2), (8,1), (9,1), (10,1), (11,1)	(0,1) à (0,4), (1,1) à (1,4), (2,1) à (2,3), (3,1) à (3,3), (4,1) à (4,3), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2), (7,1), (8,1), (9,1), (10,1), (11,1)

Tableau 2.2 : Liste des modes passants pour les différentes fréquences d'étude.

Pour chaque configuration (fréquence, géométrie, conduit traité ou rigide), les mesures en conduit et en champ lointain sont réalisées dans le cas d'une excitation portant sur :

- chacun des modes azimutaux passants, séparément (m positif uniquement),
- l'ensemble des modes azimutaux (excitation de type « multimodal »).

2.3.2.2 Analyse des résultats

Avant de comparer les rayonnements en champ lointain obtenus par la mesure et le calcul, nous présentons ci-dessous, à titre d'illustration, quelques résultats de mesures effectuées en conduit par les anneaux de détection modale. Le but est de vérifier que l'excitation spécifiée sur l'anneau de haut-parleurs correspond bien à ce que l'on mesure dans le conduit.

• Mesures en conduit

La figure 2.29 présente les amplitudes des modes azimutaux détectées par les anneaux de microphones pour différentes excitations de l'anneau de haut-parleurs. Le cas d'une excitation sur un mode azimutal m donné est considéré ici, avec les exemples $m=0$ (figure 2.29.a.) et $m=3$ (figure 2.29.b.). La fréquence réduite est $k=5.19$ et les mesures sont effectuées en configuration rigide sur la géométrie analytique. L'abscisse des diagrammes correspond à l'ordre azimutal des modes mesurés par les anneaux de détection. L'ordonnée indique l'amplitude de ces modes, en décibel, au niveau de la paroi externe $A_m^{dB}(z)$, telle que :

$$A_m^{dB}(z) = 20 \log \left(\frac{|A_m(z,1)|}{2 \cdot 10^{-5}} \right),$$

avec :

$$p(z,1,\varphi) = \sum_m A_m(z,1) e^{im\varphi},$$

$$A_m(z,1) = \sum_n \left[A_{mn}^+ F_{mn}(k_{r_{mn}} 1) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + A_{mn}^- F_{mn}(k_{r_{mn}} 1) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right]. \quad (2.39)$$

Les données en noir sont issues des mesures sur le premier anneau de détection (après l'anneau de génération), les données en rouge proviennent du deuxième anneau (après le tronçon intermédiaire). On vérifie que les modes se propageant dans le conduit correspondent effectivement à l'excitation souhaitée. La dynamique entre le mode principal et les modes parasites, par ailleurs, est excellente. Elle se situe généralement entre 20 et 30 dB. Pour les calculs numériques présentés dans la suite, seul le mode principal spécifié sur l'anneau de haut-parleurs est donc envoyé à la source. À côté de ce mode, les résultats de la figure 2.29 font apparaître, grossièrement, deux niveaux de « bruit modal ». Le premier palier met en évidence la présence dans le conduit des modes passants autres que le mode principal, excités de manière « parasite » par l'anneau de génération. Le second palier correspond aux modes évanescents qui sont également générés à la source mais qui se dissipent ensuite le long du conduit. Au niveau des anneaux de microphones, la détection d'une amplitude sur ces modes évanescents s'explique plus par les incertitudes de mesure que par une contribution réelle des modes au champ total. Concernant les modes passants, enfin, précisons que les différences de niveaux observées entre les deux anneaux de détection sont liées à la présence dans le conduit des ondes réfléchies. Combinées aux modes incidents, ces ondes forment une composante stationnaire responsable de la variation de niveau le long du conduit.

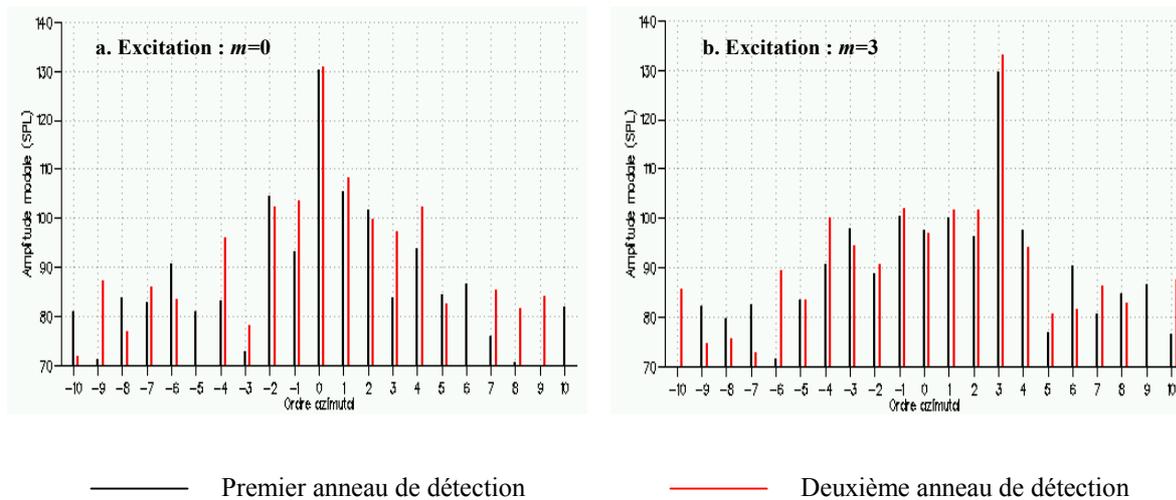


Figure 2.29 : Contenus modaux sur les anneaux de détection pour quatre excitations de l'anneau de haut-parleurs en conduit rigide. $k=5.19$, géométrie analytique.

La figure 2.30 illustre le type de contenu modal obtenu en conduit traité. Les configurations représentées correspondent à l'excitation des modes $m=3$ et $m=4$, à $k=7.15$, pour la géométrie avec nacelle courte. On observe cette fois une différence de niveau importante entre les deux anneaux qui s'explique par la présence du traitement acoustique. Il est à noter que pour ces configurations traitées, l'extraction de l'intensité incidente à l'aide des deux anneaux de détection est impossible. Au paragraphe suivant, les calculs en conduit traité sont donc effectués en reprenant la valeur de l'intensité incidente calculée en configuration rigide. Ceci suppose que le champ généré par les haut-parleurs est indépendant de la présence du traitement dans le conduit.

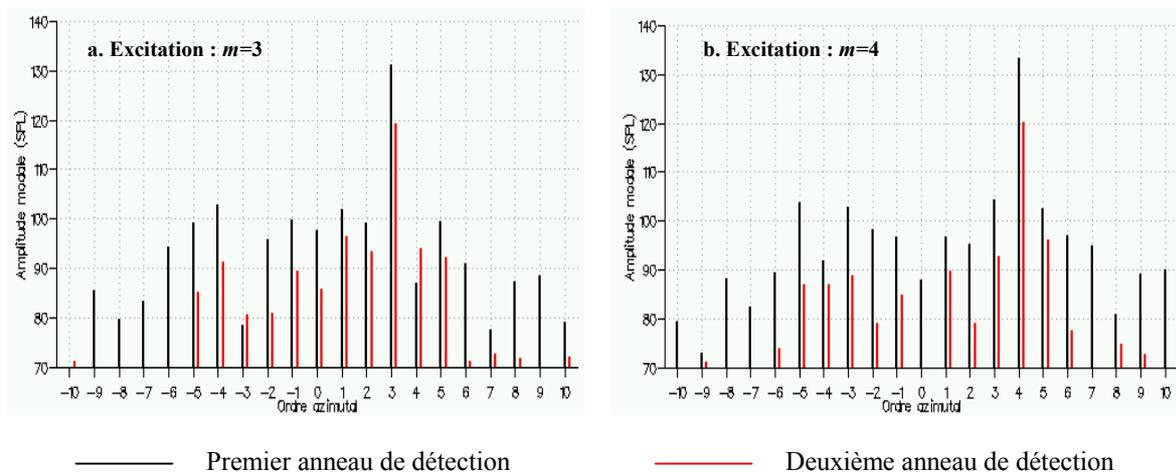


Figure 2.30 : Contenus modaux sur les anneaux de détection pour deux excitations de l'anneau de haut-parleurs en conduit traité. $k=7.15$, nacelle courte.

• **Rayonnement : comparaison entre la mesure et le calcul**

Nous présentons dans ce paragraphe les comparaisons entre la pression rayonnée mesurée en chambre sourde et calculée par la méthode numérique FEM. L'analyse porte principalement sur les configurations ne présentant qu'un seul mode radial généré à la source. Le cas d'une excitation sur plusieurs modes azimutaux ou radiaux est considéré ensuite, mais l'interprétation des résultats est alors plus délicate car la répartition exacte de l'énergie incidente sur les différents modes ne peut être détectée simplement.

• Cas d'un mode radial isolé

Ce cas de figure concerne l'ensemble des modes azimutaux aux fréquences réduites $k=5.19$ et $k=7.15$ et les derniers modes azimutaux seulement aux fréquences $k=10.31$ et $k=12.84$ (cf. tableau 2.2). Les figures 2.31 à 2.39 présentent les comparaisons entre la mesure et le calcul pour les trois premières fréquences ($k=5.19$, $k=7.15$, $k=10.31$) et pour les

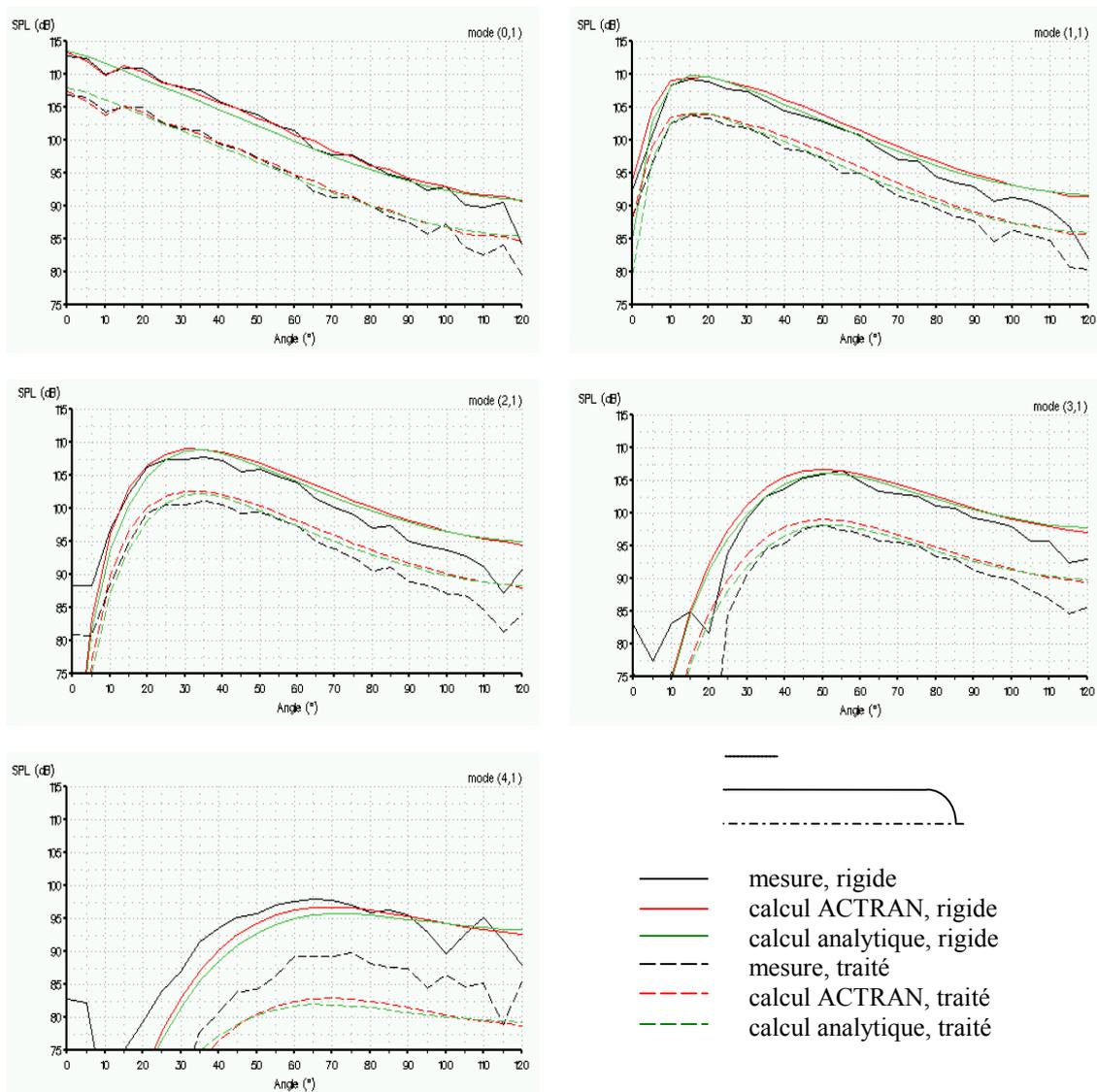


Figure 2.31 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigide et traité. $k=5.19$, forme analytique.

différentes configurations considérées. Pour chaque excitation modale, les résultats des configurations rigide et traitée sont donnés sur la même figure.

Dans le cas de la géométrie avec corps central long, les prédictions analytiques sont ajoutées aux calculs ACTRAN. Pour chacune des deux méthodes, la surface source Γ est définie sur la section des haut-parleurs de l'anneau de génération (voir la figure 2.27). Nous rappelons enfin que le niveau de l'onde incidente est déterminé à partir des mesures effectuées en conduit rigide.

Résultats en conduit rigide

Quelles que soient la géométrie et la fréquence considérées, les comparaisons en conduit rigide sont très satisfaisantes. En terme de directivité, notamment, les résultats sont tout à fait remarquables puisque l'on observe un bon accord entre la mesure et la prédiction sur la position du lobe principal mais également sur la forme complète des courbes de rayonnement.

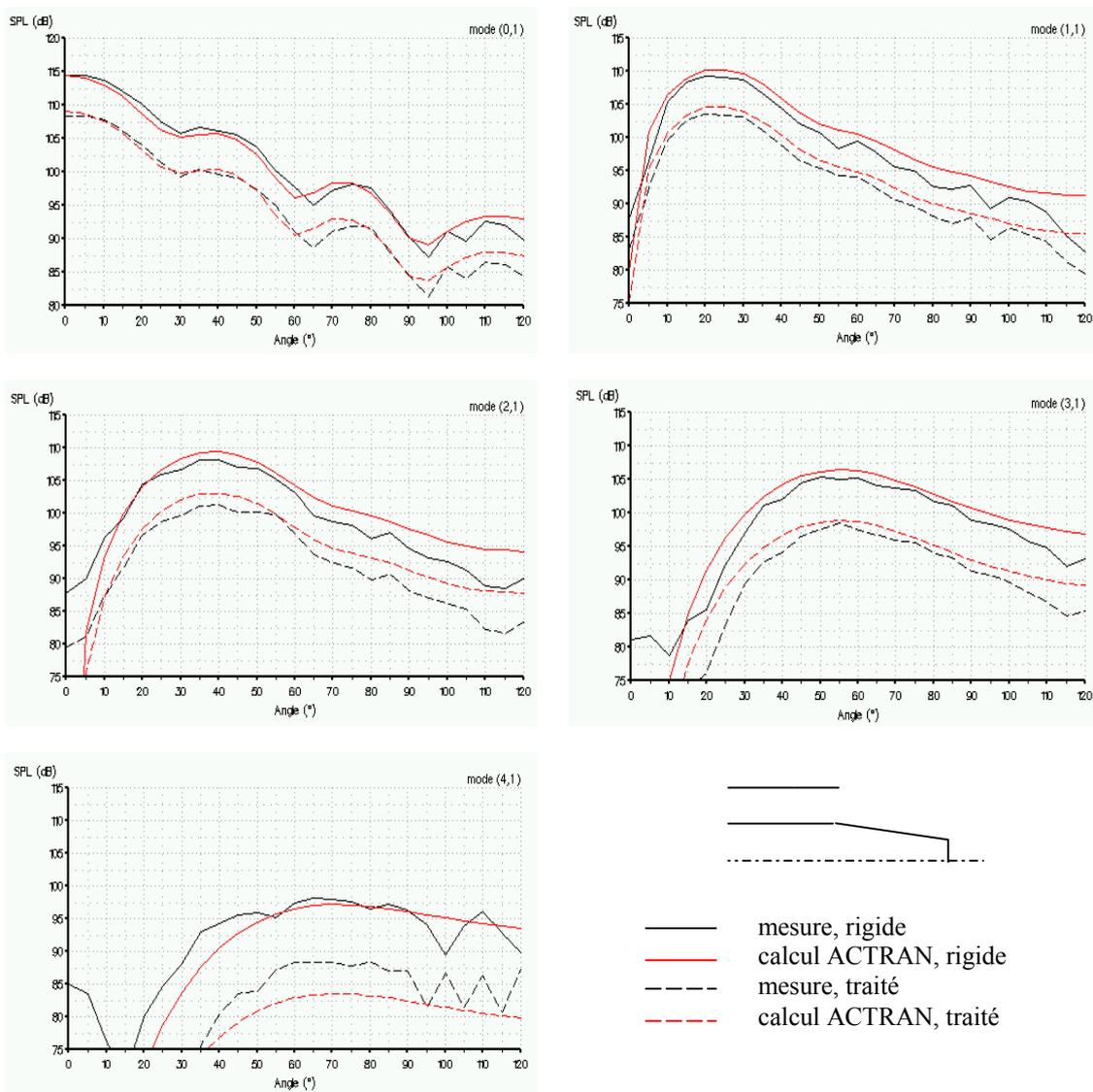


Figure 2.32 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigides et traitées. $k=5.19$, nacelle courte.

Pour les premiers modes passants, en particulier, l'allure chahutée des courbes de directivité prédites par le calcul (oscillations, extinctions) se retrouve de manière très précise par la mesure (voir les modes (0,1) et (1,1) sur les figures 2.32, 2.33, 2.35 et 2.36). Il est à noter qu'un tel niveau de détail est assez rare dans le domaine de l'acoustique des conduits.

Concernant les niveaux de pression rayonnés, les comparaisons entre le calcul et la mesure sont un peu moins précises mais les résultats sont tout de même très corrects. L'écart sur le lobe principal se situe généralement entre 0 et 1 dB, avec quelques cas atteignant 2 dB pour la géométrie de type « nacelle longue » (mode (1,1) à $k=5.19$ et $k=7.15$, mode (5,1) à $k=10.81$). Compte tenu du fait que les intensités incidentes utilisées pour le calcul sont déduites des mesures en conduit, on peut considérer cet écart comme relativement faible. Par ailleurs, il n'est pas surprenant que les plus fortes différences de niveaux apparaissent dans le cas de la nacelle longue. Pour cette configuration, en effet, le deuxième anneau de détection modale se situe sur la zone de décroissance de l'extrémité du corps central, ce qui augmente

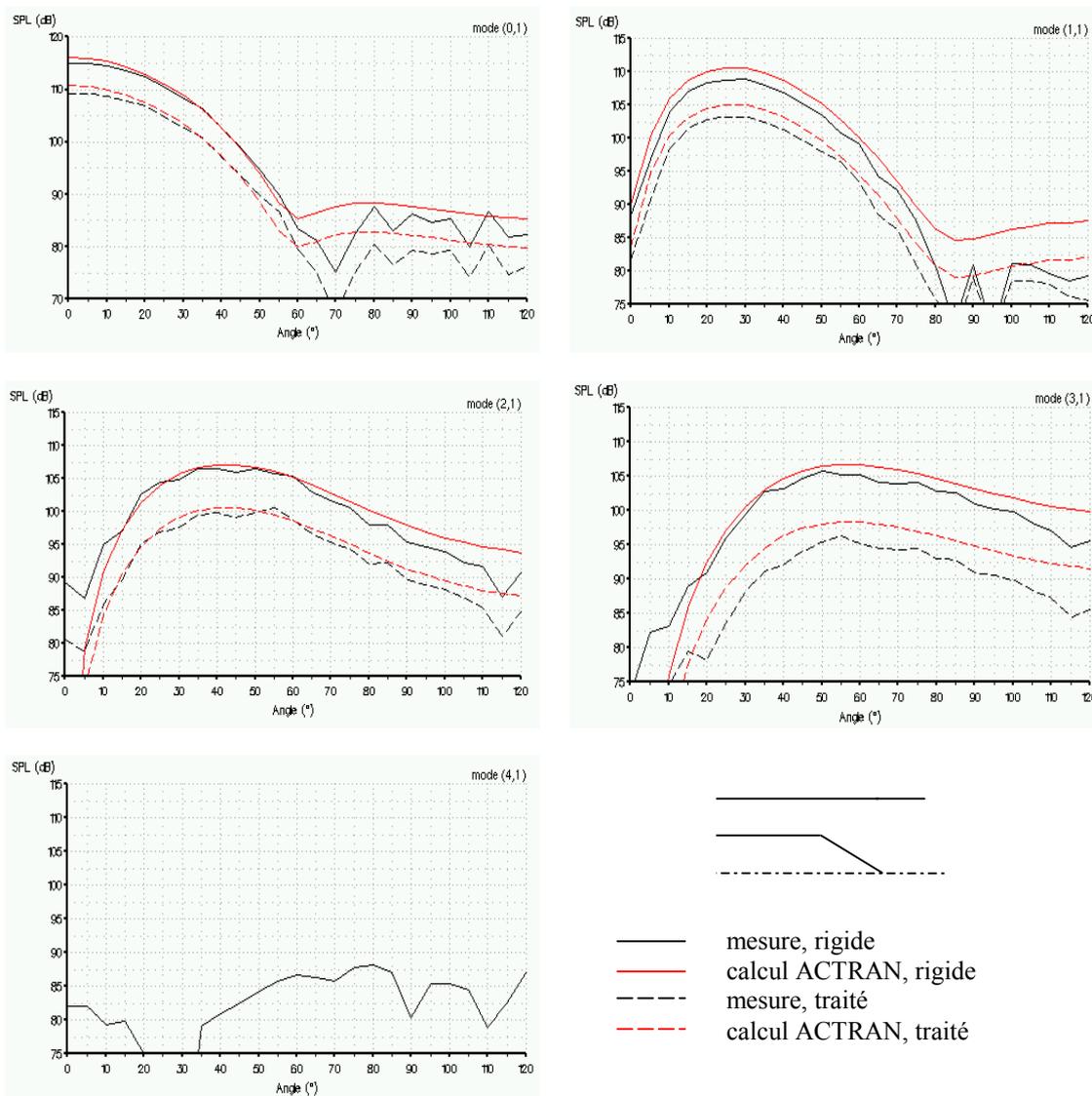


Figure 2.33 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigides et traitées. $k=5.19$, nacelle longue.

les incertitudes de mesure et nous oblige à formuler des hypothèses supplémentaires pour le calcul de l'intensité incidente (conservation de l'énergie du mode incident le long du conduit à section variable, voir l'annexe 2).

Résultats en conduit traité

En règle générale, l'impédance d'un traitement acoustique dépend du matériau, de la fréquence, de l'écoulement mais également du niveau sonore de l'onde incidente. Au cours de l'expérience, l'amplitude du champ acoustique mesuré à la paroi s'est avérée être dépendante du mode excité à la source avec des fluctuations de l'ordre de 10 dB entraînant des variations de l'impédance caractéristique de 5 à 10%. Afin d'effectuer les comparaisons les plus précises possibles, les calculs en conduit traité ont donc été effectués en considérant une valeur différente de l'impédance pour chacun des modes envoyés à la source (figures 2.31 à 2.39).

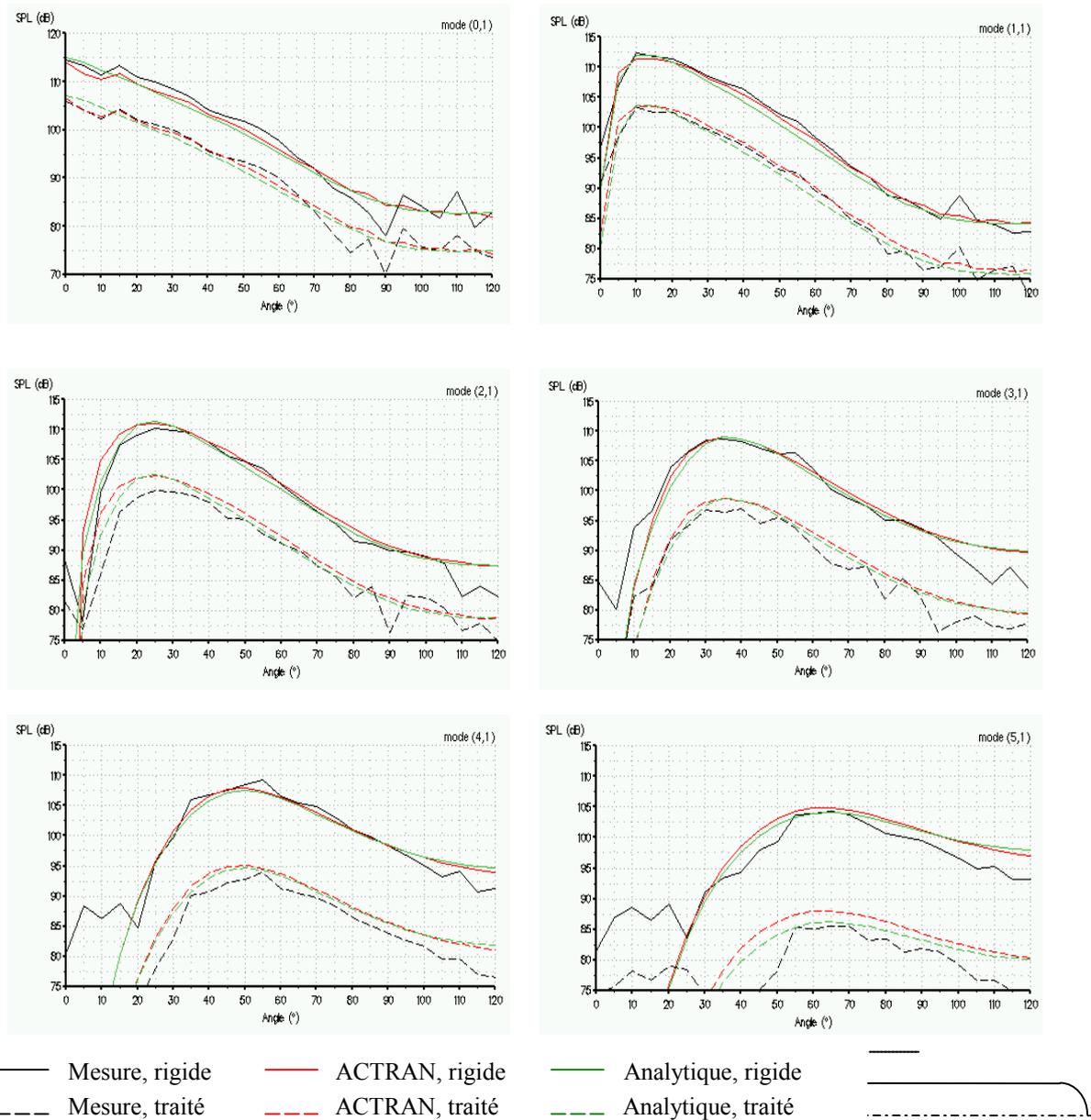


Figure 2.34 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigides et traitées. $k=7.15$, forme analytique.

Il n'est pas nécessaire ici de préciser les impédances utilisées dans chacun des cas mais pour fixer un ordre d'idée, nous indiquons ci-dessous la valeur moyenne de l'admittance réduite pour les trois fréquences d'étude. La moyenne est effectuée sur l'ensemble des modes excités à la source et sur les différentes configurations d'éjection :

k	5.19	7.15	10.31
Impédance réduite	$\alpha=0.30+i0.25$	$\alpha=0.42+i0.19$	$\alpha=0.40-i0.20$

Tableau 2.3 : Impédances réduites moyennes du traitement acoustique selon la fréquence.

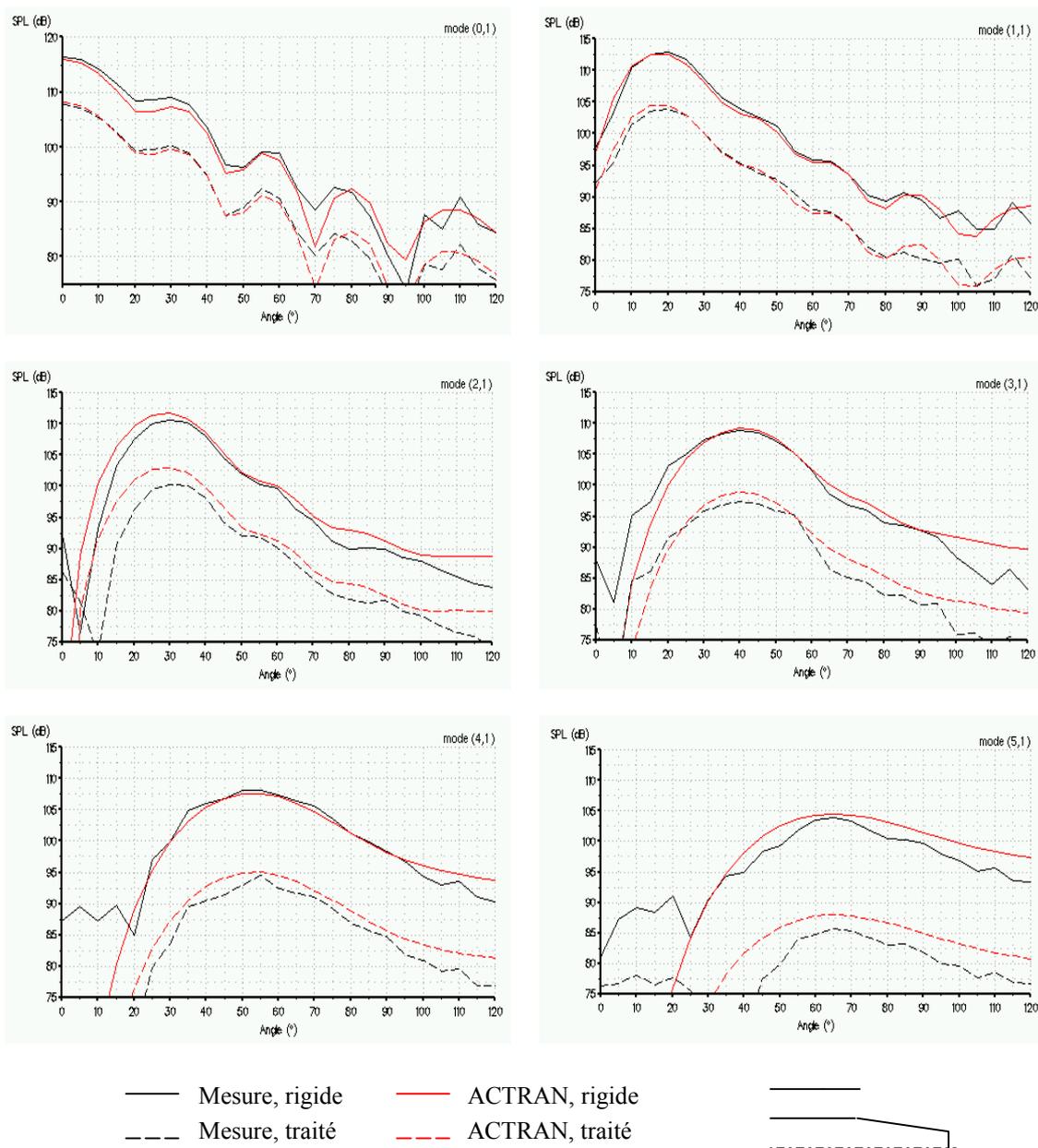


Figure 2.35 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigides et traitées. $k=7.15$, nacelle courte.

De manière générale, on observe un très bon accord entre la mesure et le calcul en configuration traitée. En comparant les résultats des différentes figures, on peut constater que l'atténuation fournie par le traitement acoustique ne dépend pas de la géométrie du conduit. Elle augmente en revanche avec la fréquence et l'ordre du mode considéré ce qui se traduit généralement par des écarts plus importants entre la mesure et le calcul. Compte tenu de l'incertitude existant sur l'impédance caractéristique du matériau, toutefois, les comparaisons des figures 2.31 à 2.39 sont suffisantes pour conclure à la validité de nos modèles de calcul en présence de traitements acoustiques.

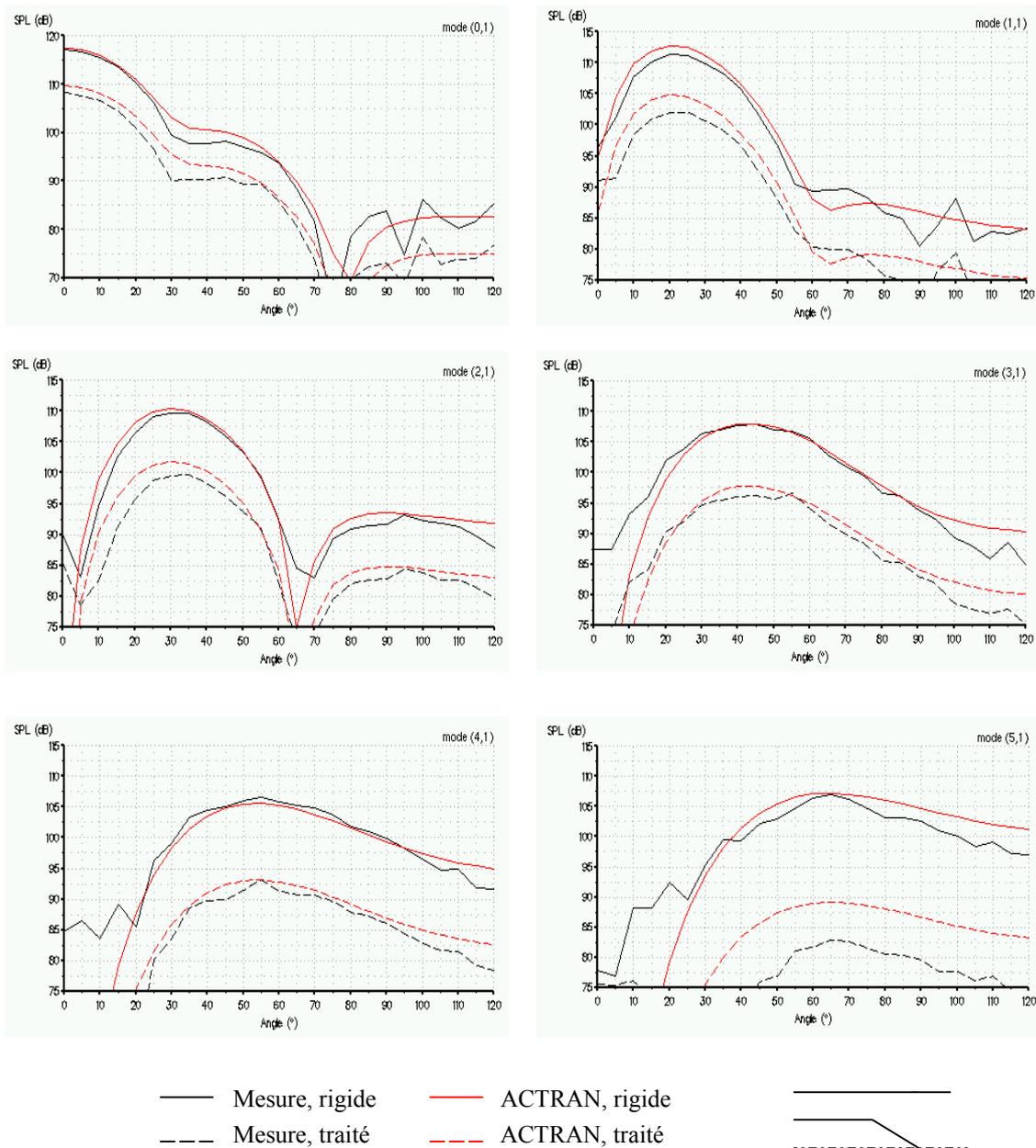


Figure 2.36 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. Configurations rigides et traitées. $k=7.15$, nacelle longue.

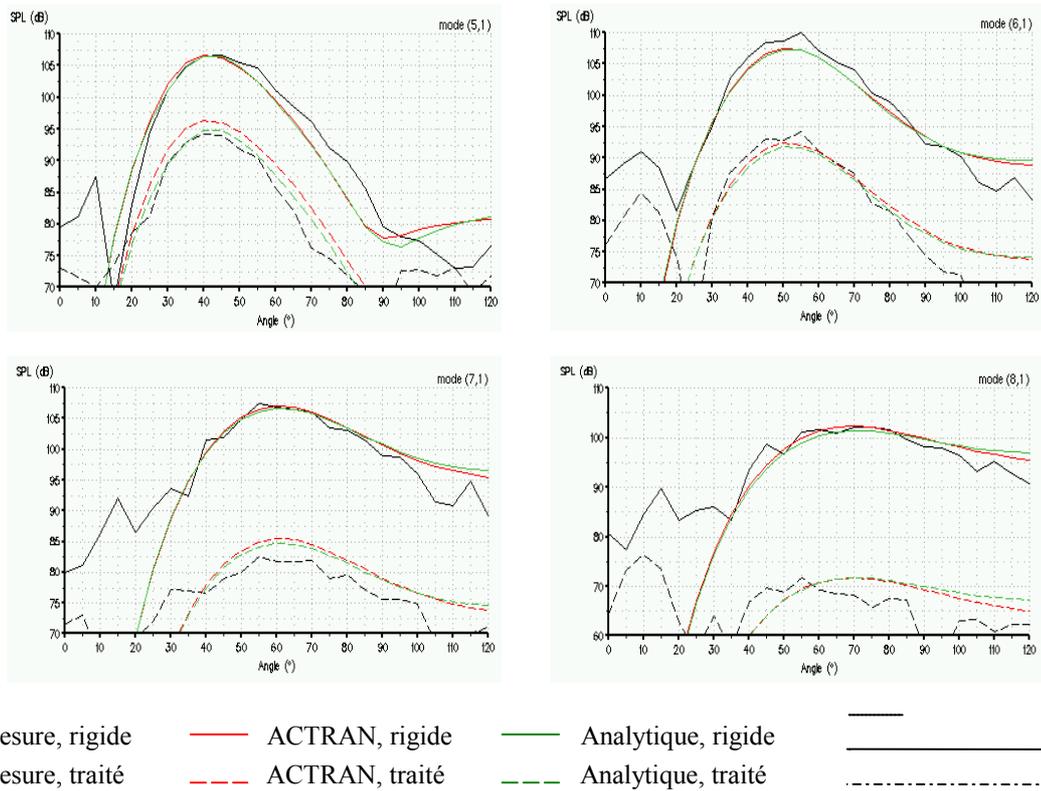


Figure 2.37 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. $k=10.31$, forme analytique.

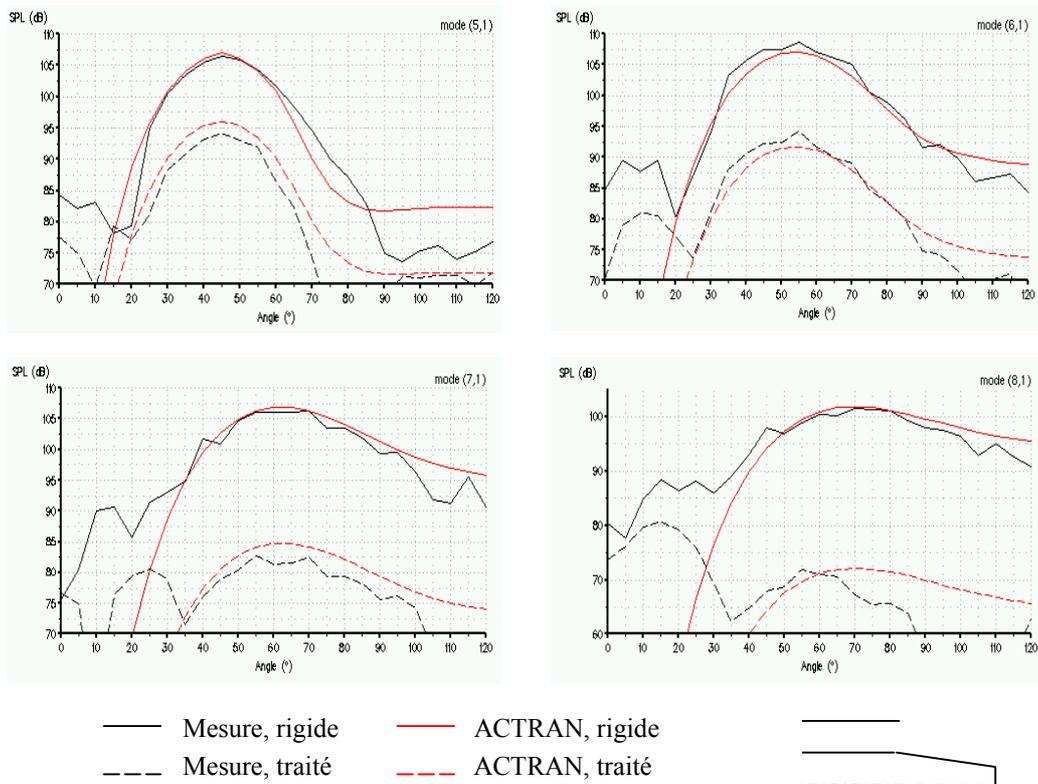


Figure 2.38 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. $k=10.31$, nacelle courte.

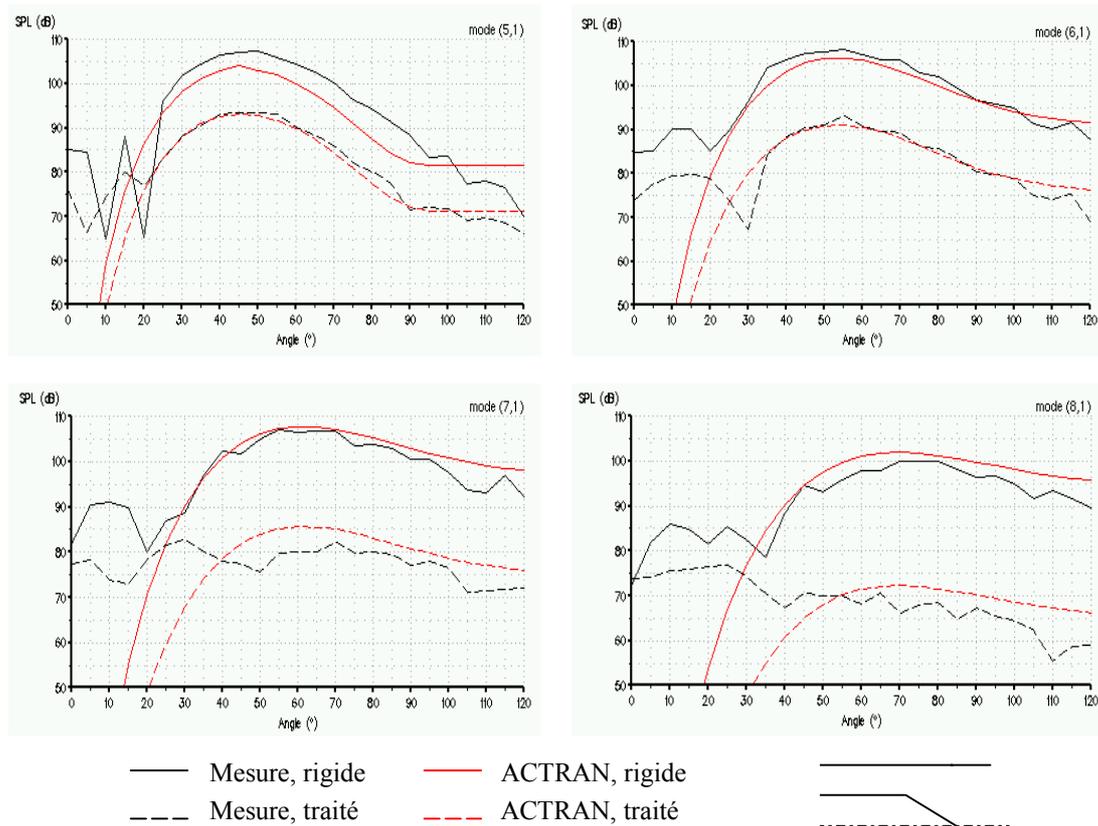


Figure 2.39 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour différentes excitations modales. $k=10.31$, nacelle longue.

Analyse complémentaire

Au-delà des comparaisons brutes entre l'expérience et la simulation qui confirment la validité de nos méthodes de calcul, plusieurs phénomènes physiques particulièrement intéressants ressortent des courbes de rayonnement des figures 2.31 à 2.39 :

- Dans le cas de la configuration « nacelle courte », tout d'abord, les phénomènes de diffraction par l'extrémité du corps central sont mis en évidence expérimentalement par l'apparition d'oscillations de forte amplitude dans les courbes de directivité du mode (0,1) à $k=5.19$ et $k=7.15$ (figures 2.32 et 2.35). Ces oscillations, visibles uniquement pour cette configuration d'éjection, traduisent clairement les interférences entre le champ principal rayonné à la sortie du conduit et le champ diffracté à l'extrémité du corps central. Comme nous l'avons vu précédemment (page 96), lorsque l'ordre du mode incident augmente, le rayonnement principal est de plus en plus dirigé vers les angles élevés et la part de l'énergie acoustique diffractée par le corps central diminue. En conséquence, les rayonnements mesurés en chambre sourde ne font plus apparaître d'oscillations.
- Dans le cas de la géométrie « nacelle longue », des phénomènes de coupure liés aux variations de section du conduit sont également observés par la mesure. Les données du tableau 2.2 montrent qu'à $k=5.19$, le mode (4,1) est passant sur la section annulaire de l'anneau de génération mais coupé sur la section de sortie circulaire. Une excitation sur ce mode a tout de même été réalisée et le rayonnement correspondant en champ

lointain a été mesuré. La comparaison des résultats des figures 2.31, 2.32 et 2.33 montre alors que le rayonnement du mode (4,1) obtenu pour la « nacelle longue » est inférieur de 10 à 15 dB à celui des géométries de type « analytique » et « nacelle courte ». À l'intérieur du conduit, les mesures des anneaux de détection nous assurent pourtant de la propagation du mode avec une énergie conséquente (figure 2.40). La diminution du rayonnement observée en champ lointain traduit donc le phénomène de coupure se produisant entre le second anneau de détection modale et la section de sortie du conduit. À l'endroit précis où le mode (4,1) devient évanescent, l'énergie incidente est réfléchiée en sens inverse. Le « résidu » de rayonnement mesuré en champ lointain (figure 2.33) s'explique alors principalement par la présence des autres modes passants dans le conduit, excités de manière involontaire à la source.

- Dans le même ordre d'idée, toujours pour la géométrie de type « nacelle longue », il est intéressant de noter l'apparition d'une extinction dans la directivité du mode (0,1) à $k=5.19$ (figure 2.33) et des modes (0,1), (1,1) et (2,1) à $k=7.15$ (figure 2.36). Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, cette extinction caractérise l'apparition d'un second mode radial passant au niveau de la section de sortie du conduit (cf. tableau 2.2).

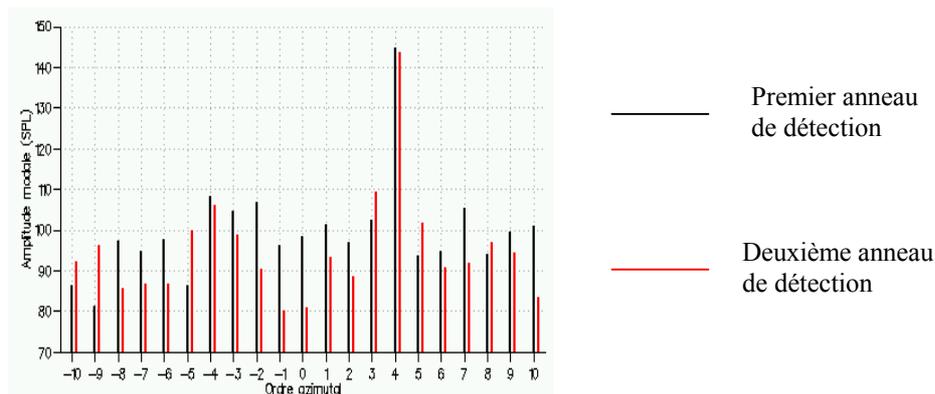


Figure 2.40 : Contenus modaux dans le conduit correspondant à l'excitation du mode $m=4$ à $k=5.19$. Nacelle longue, conduit rigide.

Au paragraphe 2.3.1.2 (page 96), les rayonnements obtenus par le calcul numérique sur différentes géométries d'éjection ont été comparés dans le but d'analyser l'influence de la longueur du corps central sur le champ de pression rayonné. Afin de confirmer par la mesure les tendances observées numériquement et de confronter les rayonnements des géométries de type « nacelle courte » et « analytique », nous présentons sur la figure 2.41 une comparaison des mesures effectuées pour les trois maquettes d'éjection, à $k=5.19$. On vérifie ainsi les deux points suivants :

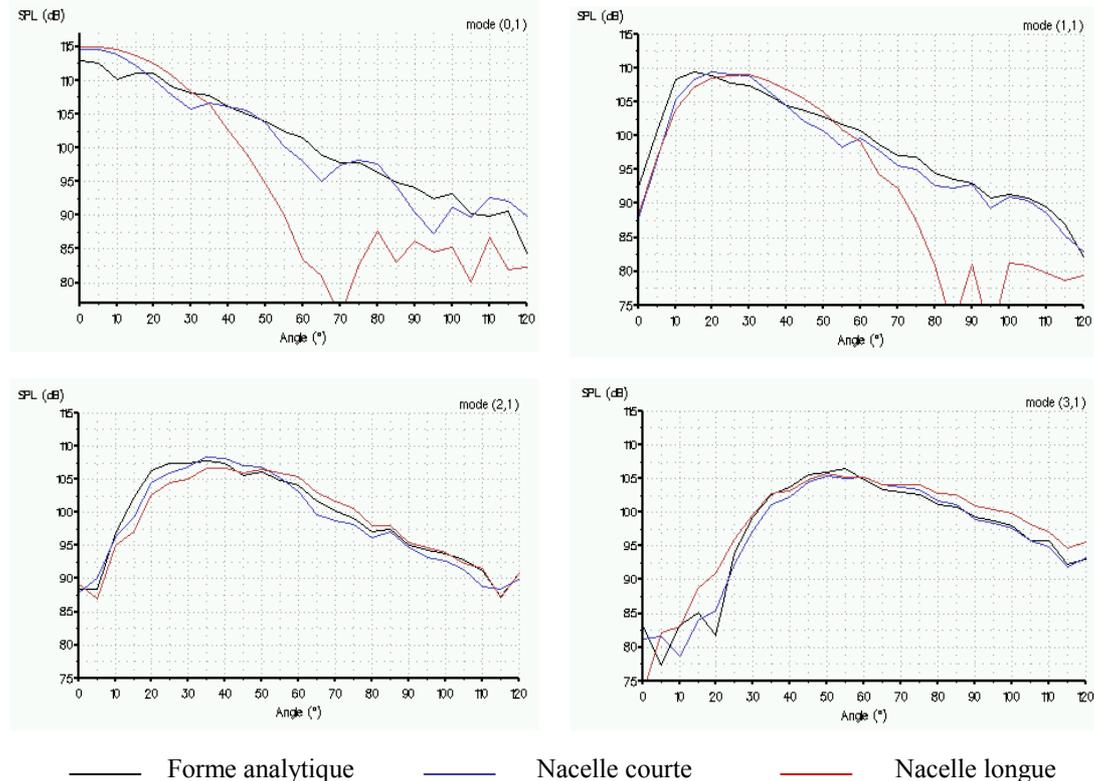


Figure 2.41 : Comparaison des rayonnements mesurés en champ lointain pour les trois formes d'éjection. $k=5.19$, modes (0,1), (1,1), (2,1) et (3,1).

- L'influence du corps central sur le champ de pression rayonné diminue lorsque l'ordre du mode incident augmente.
 - Quel que soit le mode incident, le rayonnement du conduit de type « nacelle courte » s'accorde relativement bien avec celui de la géométrie analytique. Ce résultat est similaire à celui obtenu au cours de l'étude numérique sur la géométrie « intermédiaire » (page 96) et confirme la pertinence du modèle de Rienstra pour évaluer, en première approximation, le rayonnement d'une éjection à flux séparés avec cône immergé ou émergent.
- Excitation sur plusieurs modes radiaux ou azimutaux simultanément

Excitation sur plusieurs modes radiaux pour un ordre azimutal fixé

Pour un ordre azimutal donné, lorsque plusieurs modes radiaux sont passants sur la section source, l'analyse des résultats est plus délicate car les mesures dont nous disposons sont insuffisantes pour déterminer l'énergie transmise sur chacun des modes radiaux et le déphasage entre ces modes⁸. Pour ce type d'excitation, il n'est donc plus possible de comparer de manière directe les rayonnements obtenus en champ lointain. Pour confronter la mesure au

⁸ Seule une mesure du champ acoustique en différentes positions radiales du conduit permettrait d'analyser le contenu radial mais celle-ci nécessite l'utilisation d'un système de mesure intrusif...

calcul, la seule possibilité consiste alors à évaluer de manière empirique l'énergie transmise sur chacun des modes en comparant les rayonnements modaux calculés pour différentes valeurs de l'intensité incidente aux mesures réalisées en champ lointain. Une fois ce recalage effectué, le rayonnement peut être calculé pour différents déphasages entre les modes radiaux puis comparé à la mesure.

La figure 2.42 présente les résultats obtenus par ce type d'analyse dans le cas des modes $m=0$ et $m=2$, à $k=5.19$ et pour la géométrie analytique. Les calculs sont effectués ici à l'aide du code MADIWHAX. Les graphes de gauche illustrent le recalage empirique des intensités modales incidentes, ceux de droite comparent la mesure en champ lointain aux rayonnements calculés pour différents déphasages entre les modes radiaux. À titre d'exemple, pour le mode $m=0$, on observe qu'en attribuant une intensité moyenne incidente de 119.5 dB au mode (0,1) et 124 dB au mode (0,2), on parvient approximativement à recaler la prédiction à la mesure lorsque le déphasage entre les modes est de 45° . De façon générale, cependant, il n'existe pas de règle simple permettant de déterminer la répartition d'énergie et le déphasage entre les modes pour ce type d'excitation.

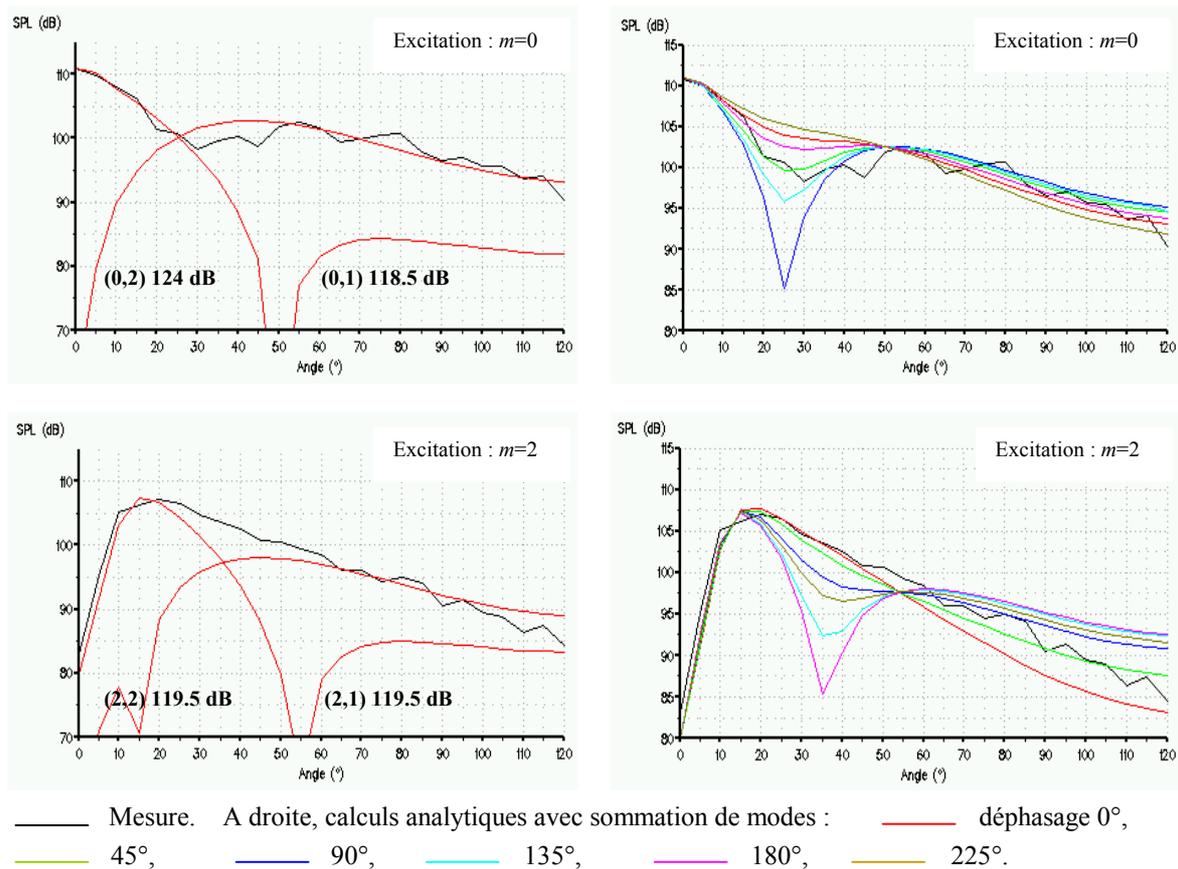


Figure 2.42 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour une excitation azimutale donnée avec plusieurs modes radiaux passants. À gauche : recalage en niveau sur chacun des modes radiaux. À droite : rayonnements correspondants pour différents déphasages entre les modes. $k=5.19$, configuration analytique.

Excitation sur plusieurs modes azimutaux

Pour chaque géométrie et chaque fréquence d'étude, une excitation sur tous les modes azimutaux simultanément a été réalisée en ne spécifiant un signal d'entrée que sur un seul haut-parleur de l'anneau de génération. Lorsque seul le premier mode radial est passant pour les différents ordres azimutaux, il est possible de déterminer l'amplitude incidente complexe des modes $(m,1)$ se propageant dans le conduit et d'effectuer alors un calcul en rayonnement en sommant la contribution des différents modes, phase incluse.

La figure 2.43 présente le résultat obtenu par ce type de calcul dans le cas de la géométrie analytique, à $k=5.19$. Le rayonnement en sommation RMS (Root Mean Square) est également donné. De manière prévisible, on constate que l'accord mesure/prédiction est moins évident que dans le cas des modes radiaux isolés mais globalement, la comparaison est acceptable. Notamment, on parvient à retrouver par le calcul la position angulaire d'une extinction dans la directivité, liée aux interférences entre les modes. La position et la largeur du lobe principal, en revanche, sont légèrement sous-estimées.

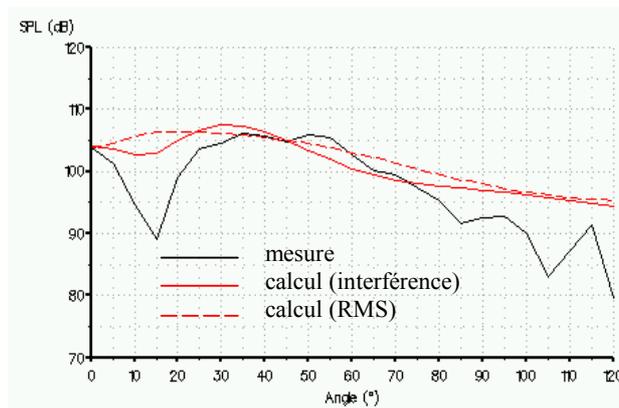


Figure 2.43 : Comparaison entre les rayonnements mesurés et calculés pour une excitation portant sur tous les modes azimutaux. $k=5.19$, configuration analytique.

2.3.2.3 Conclusion sur la comparaison entre la mesure et le calcul

L'étude expérimentale présentée dans cette section a fait apparaître un très bon accord entre les mesures en chambre sourde et les prédictions des méthodes de calcul. Quelle que soit la géométrie considérée, les comparaisons en terme de directivité et de niveau du champ de pression rayonné sont excellentes. Les atténuations mesurées et calculées en présence de traitement acoustique sont également conformes. Aussi, ces résultats participent à la validation croisée de la méthode de calcul FEM et du banc d'essai. La précision des mesures effectuées dans cette étude, en particulier, doit être soulignée. Elle illustre la qualité du banc d'essai et valide les différents éléments de la chaîne de mesure : anneau de génération modale, anneaux de détection, arc de microphone, systèmes d'acquisition et de contrôle des signaux...

L'étude en chambre sourde conclue de manière très positive l'évaluation des méthodes de calcul numériques BEM et FEM en configuration canonique : les résultats obtenus dans ce paragraphe et dans le précédent (validation croisée des différentes méthodes) permettent d'affirmer qu'en l'absence d'écoulement, les méthodes numériques et la méthode analytique retranscrivent la réalité physique.

Afin de clore l'évaluation des différentes méthodes de calcul utilisées dans ce mémoire, il nous reste désormais à analyser les résultats de la méthode asymptotique par sommation de faisceaux gaussiens...

2.4 Évaluation de la méthode asymptotique SFG en configuration canonique

Ce paragraphe est dédié à l'analyse des résultats de la méthode asymptotique SFG sur des configurations canoniques de conduit d'éjection. Comme pour les méthodes numériques à basses fréquences étudiées précédemment, l'objectif initial de l'étude était de procéder à une validation de l'approche asymptotique en comparant les prédictions de VOXLAN et de MADIWHAX à haute fréquence. Comme nous allons le voir, cependant, des divergences importantes entre les calculs asymptotiques et analytiques ont été observées dès les configurations les plus simples en conduit rigide et sans écoulement. Dès lors, il nous est apparu nécessaire d'interpréter l'origine de ces différences et de réorienter l'étude en considérant les résultats du code VOXLAN sur des cas tests élémentaires.

La totalité de l'analyse est effectuée en l'absence d'écoulement et sans traitement acoustique. Les calculs asymptotiques ont été réalisés pour deux fréquences réduites, correspondant à $k=50$ et $k=100$ ⁹. Les conclusions formulées pour chacune de ces fréquences étant équivalentes, nous considérerons principalement dans la suite les résultats obtenus à $k=50$. A cette fréquence, et pour le rapport de rayon $h=0.6$ considéré dans la majorité des cas, on compte 226 modes passants dans le conduit, répartis sur les ordres azimutaux $m=0$ à $m=47$.

Enfin, il est à noter que dans la méthode SFG, aucun modèle de diffraction n'est actuellement pris en compte. Par conséquent, les faisceaux rayonnent dans une zone angulaire limitée correspondant à la plage de lancement des rayons à la source. Dans le cadre de notre étude, l'angle d'incidence maximal par rapport à l'axe du conduit est fixé à $\theta_0=85^\circ$, de sorte que le domaine de validité de la méthode s'étend théoriquement de -85° à 85° . Dans la suite, les directivités en champ lointain seront donc tracées uniquement entre 0° et 90° .

⁹ Nous rappelons que l'évaluation de la méthode asymptotique dans le cadre des études sur l'entrée d'air a conclu à la validité des résultats du code VOXLAN pour des fréquences réduites supérieures à $k=30$ environ.

2.4.1 Comparaison entre la méthode asymptotique SFG et les modèles analytiques : limitations du code VOXLAN

Afin d'illustrer les problèmes rencontrés lors de l'application de la méthode SFG sur des conduits annulaires, nous présentons dans ce premier paragraphe des résultats de comparaison entre le code VOXLAN et les modèles analytiques. Comme pour l'étude des méthodes à basses fréquences, les comparaisons ont été entreprises initialement pour les configurations avec corps central long et corps central tronqué. Dans le calcul VOXLAN, les conduits annulaires sont définis simplement sous la forme de deux cylindres droits dont les longueurs respectives peuvent être choisies. Le cylindre externe est d'épaisseur nulle et le cylindre interne est supposé plein.

Les figures 2.44 et 2.45 présentent quelques résultats obtenus pour les deux types de géométrie, dans le cas d'un conduit de longueur $L^E=2$ et de rapport de rayon $h=0.6$. Pour la configuration avec corps central long, le prolongement du cylindre interne au-delà de la section de sortie est $L_{pr}=10$, ce qui est largement suffisant pour permettre une comparaison des résultats de VOXLAN avec le modèle analytique de Rienstra¹⁰.

Pour chacune des configurations, les exemples des modes (6,2), (13,4) et (17,3) ont été retenus. L'intensité moyenne sur chacun des modes est fixée à $I_{mn}=100$ dB, ce qui sera le cas pour tous les diagrammes de rayonnement modaux présentés au cours de cette étude. Les données suivantes, également, sont indiquées pour les différents cas tests : nombre de rayons N_r lancés sur une radiale (i.e. à φ donné) depuis chaque point source (voir le paragraphe 2.2.3, page 82) ; discrétisation de la source D_s correspondant à la taille des éléments par rapport à la longueur d'onde acoustique ; et enfin, distance de rayonnement R_{ec} entre la sortie du conduit et l'arc de directivité. Pour cette dernière, notamment, il est à noter que lorsque la fréquence augmente, le critère de champ lointain $R_{ec} \lambda \gg 1$, qui doit être satisfait pour que la forme angulaire du rayonnement ne dépende plus de la distance d'écoute, est plus critique. Ainsi, à $k=50$ et en tenant compte d'un prolongement du corps central de longueur $L_{pr}=10$, nous avons vérifié qu'une distance d'écoute $R_{ec}=50$ est nécessaire et suffisante pour que les directivités calculées par VOXLAN ne varient plus avec R_{ec} .

Finalement, les comparaisons des figures 2.44 et 2.45 amènent les conclusions suivantes :

- De manière générale, les résultats du code VOXLAN ne sont pas satisfaisants. Les prédictions sur la forme, la position et le niveau du lobe principal sont très approximatives. Les lobes secondaires, également, ne sont pas reproduits ou de façon très hasardeuse.
- Sur le lobe principal, les différences entre les modèles analytiques et la méthode SFG sont plus prononcées lorsque le corps central se prolonge à l'extérieur du conduit. Pour le mode (6,2), ainsi, le calcul asymptotique s'accorde avec les prédictions analytiques en configuration tronquée, mais pas pour la configuration avec corps central long. L'exemple du mode (17,3) montre toutefois qu'en règle générale, la configuration tronquée conduit également à des résultats problématiques.

¹⁰ Contrairement aux méthodes à basses fréquences considérées précédemment, la longueur du corps central n'est pas problématique ici car pour ce type de géométrie particulièrement simple, le calcul VOXLAN s'effectue sans discrétisation (facettisation) de la surface.

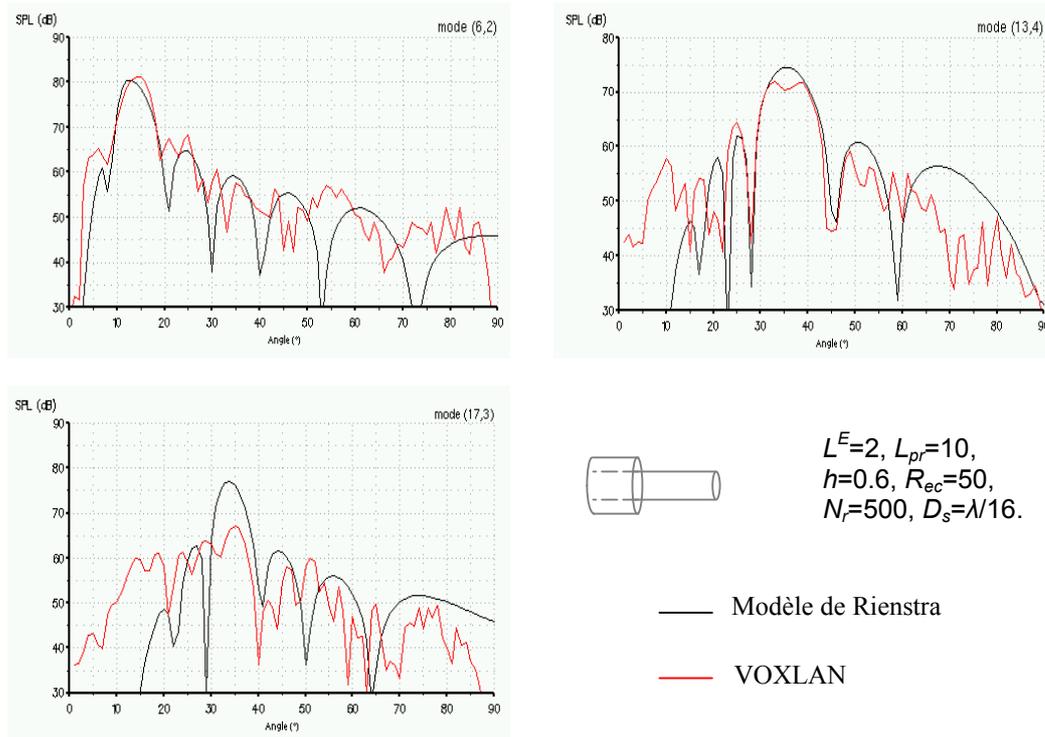


Figure 2.44 : Diagrammes de rayonnement des modes (6,2), (13,4) et (17,3) à $k=50$. Comparaisons entre le modèle de Rienstra et VOXLAN. Corps central long.

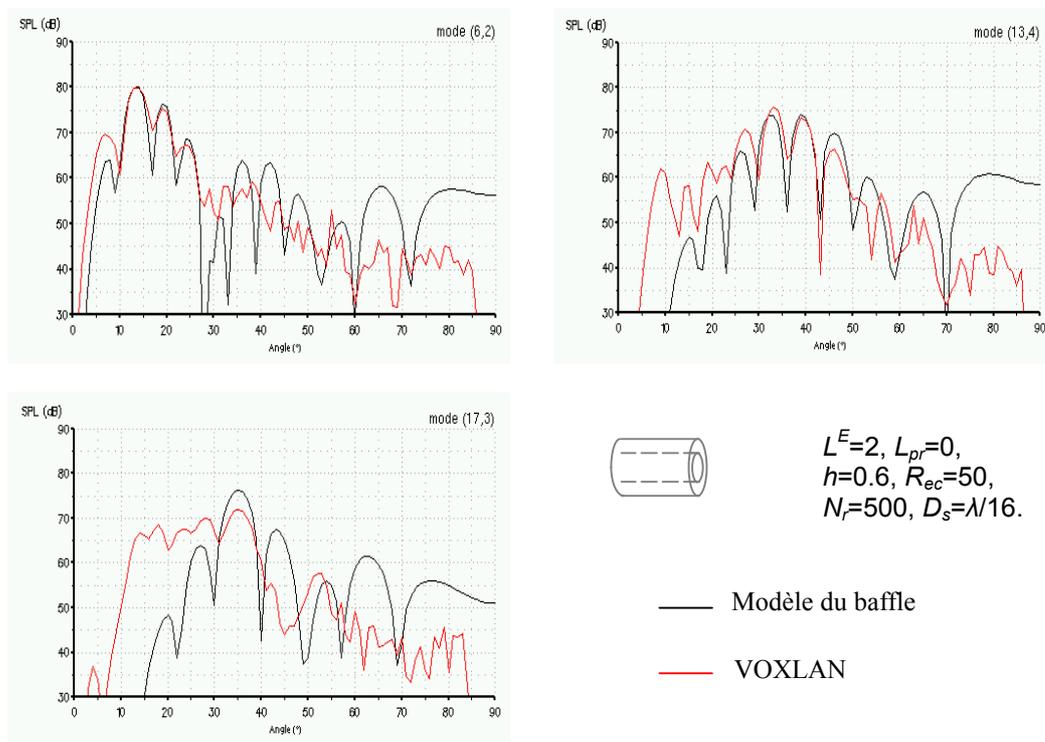


Figure 2.45 : Diagrammes de rayonnement des modes (6,2), (13,4) et (17,3) à $k=50$. Comparaisons entre le modèle du baffle et VOXLAN. Corps central tronqué.

- Les prédictions du code VOXLAN ont tendance à surestimer le rayonnement aux angles situés en deçà du lobe principal et à le sous-estimer aux angles élevés.

Dans le cadre des études effectuées sur les entrées d'air, des comparaisons similaires entre la méthode SFG et le modèle analytique de Lordi et Homicz [48] ont été présentées par Lidoine [65]. Les conclusions étaient alors les suivantes :

- Pour un conduit de section circulaire, les prédictions du code VOXLAN sur le rayonnement du lobe principal sont généralement très satisfaisantes. Dans ce cas, en effet, seuls les résultats pour les modes rayonnant aux angles élevés sont dégradés, ce qui s'explique alors par l'influence non négligeable de la diffraction sur la lèvre du conduit.
- Les lobes secondaires ne sont pas bien reproduits par la méthode SFG et ceci est d'autant plus vrai que la longueur du conduit augmente. Plusieurs explications ont été avancées pour comprendre ce phénomène, comme l'existence de réflexions non acoustiques pour certains rayons¹¹ ou le fait que la méthode SFG implique une troncature de l'intégrale de Kirchhoff à la source (voir la formule (2.37), page 81)...

Compte tenu de ces résultats, l'incapacité de la méthode SFG à prédire correctement le rayonnement des lobes secondaires en conduit annulaire était tout à fait prévisible. La dégradation des résultats sur le lobe principal, en revanche, constitue une nouveauté relativement inattendue. Dans le cadre de cette étude, nous nous proposons donc d'essayer de comprendre l'origine de ce phénomène en analysant le comportement du code VOXLAN sur différents cas tests.

Au préalable, toutefois, il peut être intéressant d'évaluer les conséquences du caractère approximatif de la méthode SFG sur le rayonnement d'un ensemble de modes. A haute fréquence, en effet, le nombre de modes se propageant dans le conduit est tel que le champ rayonné par un mode isolé ne présente que peu d'intérêt. Pour les applications industrielles, on travaille donc directement à partir de sources plus réalistes correspondant à la somme de différents modes. L'approche la plus fréquemment retenue consiste alors à répartir l'énergie incidente sur la totalité des modes passants ou sur certains modes azimutaux seulement, puis à effectuer une sommation RMS des rayonnements modaux. En procédant de la sorte, on aboutit, pour un nombre de modes élevé, à une bonne approximation du champ total rayonné.

Les figures 2.46 et 2.47 présentent des comparaisons entre les prédictions analytiques et asymptotiques pour des sommations RMS portant, d'une part, sur les modes radiaux des ordres azimutaux $m=6$ et $m=17$ et, d'autre part, sur la totalité des modes passants. Dans chacun des cas, l'intensité moyenne des modes radiaux est fixée à 100 dB. A $k=50$ et pour le rapport de rayon $h=0.6$, on compte 7 modes passants à l'ordre azimutal $m=6$, et 6 à l'ordre $m=17$.

¹¹ Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la suite...

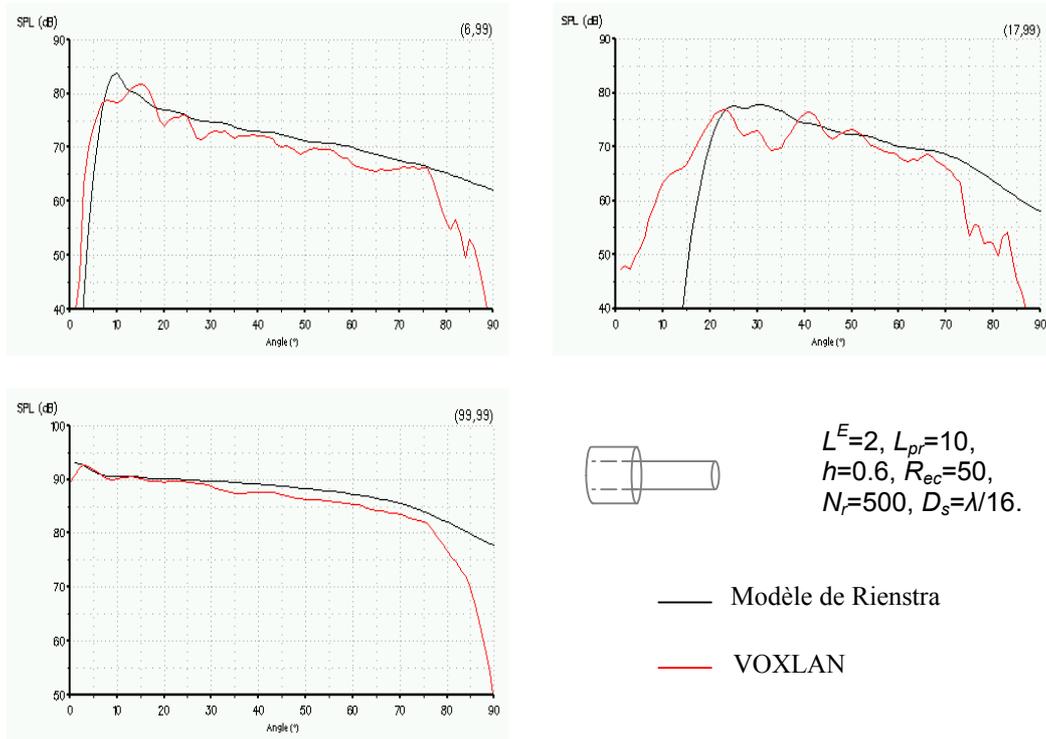


Figure 2.46 : Diagrammes de rayonnement par sommation RMS sur les modes azimutaux $m=6$ et $m=17$ et sur l'ensemble des modes passants. Comparaison entre le modèle de Rienstra et VOXLAN.

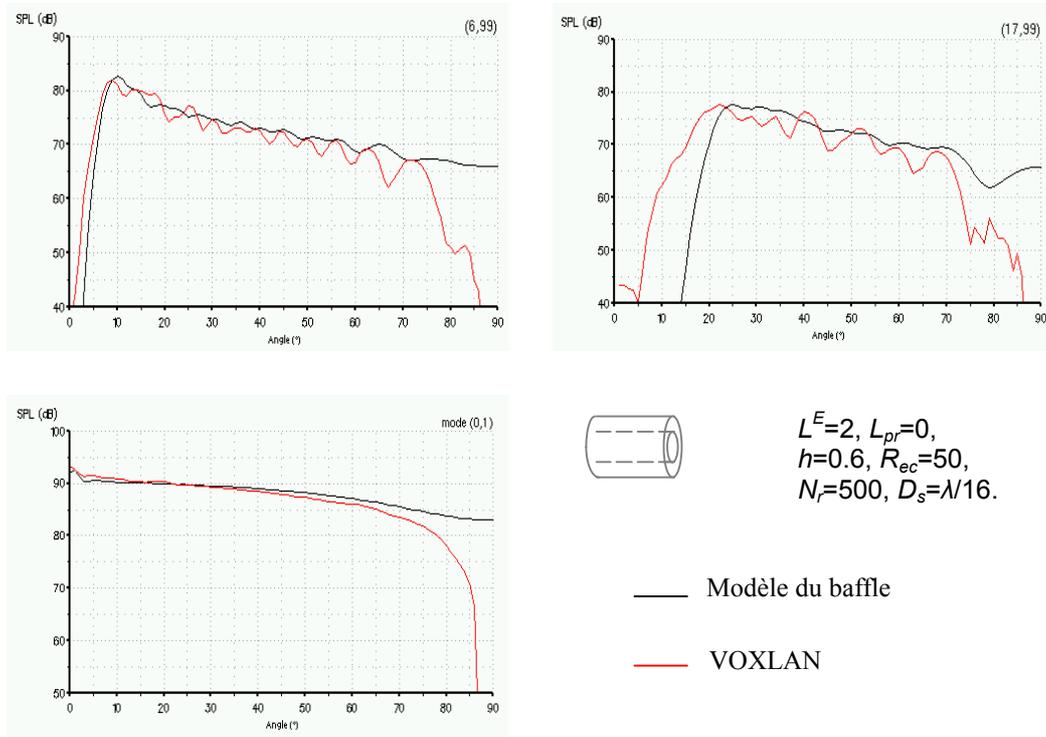


Figure 2.47 : Diagrammes de rayonnement par sommation RMS sur les modes azimutaux $m=6$ et $m=17$ et sur l'ensemble des modes passants. Comparaison entre le modèle du baffle et VOXLAN.

Les rayonnements en sommation RMS résultant principalement de la contribution des lobes principaux des différents modes, les problèmes observés précédemment sur les directivités modales se répercutent sur les diagrammes de rayonnement des figures 2.46 et 2.47. On vérifie ainsi que les résultats du code VOXLAN ne sont pas suffisamment précis pour permettre une application industrielle de la méthode. On note également une nouvelle fois que les prédictions de VOXLAN sont généralement meilleures pour la configuration avec corps central tronqué.

2.4.2 Vérification du modèle de source annulaire dans le code VOXLAN

Pour comprendre l'origine des problèmes observés dans les résultats du code VOXLAN, il est nécessaire tout d'abord de s'assurer que les sources acoustiques définies sous la forme de modes annulaires sont correctement prises en compte dans la méthode de calcul. Pour cela, nous avons effectué une première série de tests considérant le rayonnement d'une surface modale libre, dégagée de tout conduit. La configuration d'étude est représentée sur le schéma de la figure 2.48, dans laquelle nous comparons les résultats obtenus par la méthode SFG et le modèle du baffle, dans le cas des modes (9,1), (9,3), (9,4) et (9,5). Plusieurs valeurs de la discrétisation de la source sont considérées dans le calcul VOXLAN.

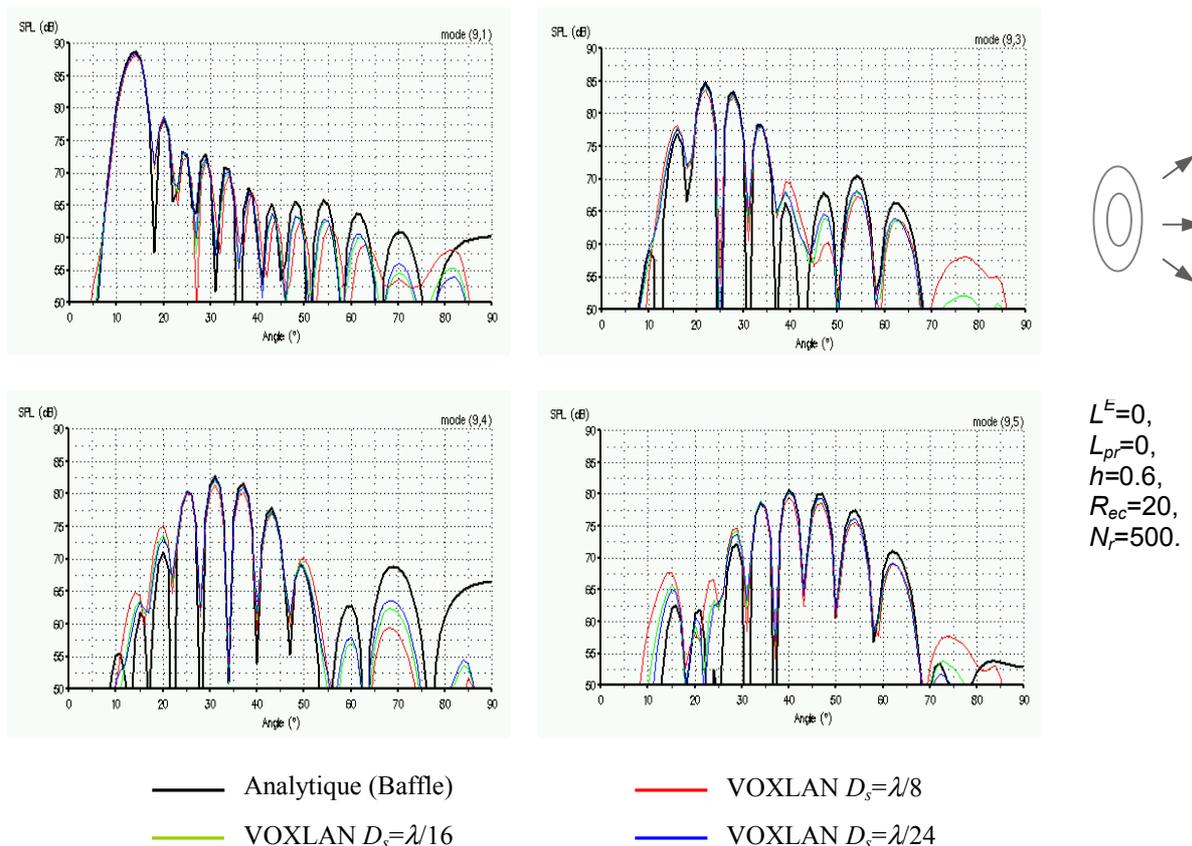


Figure 2.48 : Diagrammes de rayonnement des modes (9,1), (9,3), (9,4) et (9,5) à $k=50$. Influence de la discrétisation de la source pour le calcul VOXLAN.

En premier lieu, on constate que les comparaisons sont tout à fait satisfaisantes et bien meilleures que celles présentées au paragraphe précédent en présence d'un conduit annulaire. Les lobes principaux et les lobes secondaires sont correctement estimés ici par la méthode SFG. À condition que la discrétisation de la source soit suffisamment fine, l'accord entre les résultats analytiques et asymptotiques est valable quel que soit le mode considéré. Finalement, il ressort de la figure 2.48 qu'une discrétisation de la surface modale en $\lambda/16$ est nécessaire et suffisante pour décrire correctement les modes passants à la fréquence réduite $k=50$.

Outre la discrétisation de la surface modale, il est nécessaire également de vérifier que le nombre de rayons lancés depuis chaque point source est suffisant pour que la sommation des faisceaux gaussiens effectuée aux points d'écoute converge vers la solution du problème. Sur la figure 2.48, le nombre de rayons considérés par radiale est $N_r=500$. Pour contrôler la pertinence de cet échantillonnage, des calculs ont également été conduits en imposant le double de rayons ($N_r=1000$), tout autre paramètre étant égal par ailleurs. Les diagrammes de la figure 2.49 montrent que la solution calculée en champ lointain est alors inchangée. L'échantillonnage de 500 rayons par radiale est donc suffisant pour décrire correctement le champ acoustique rayonné.¹²

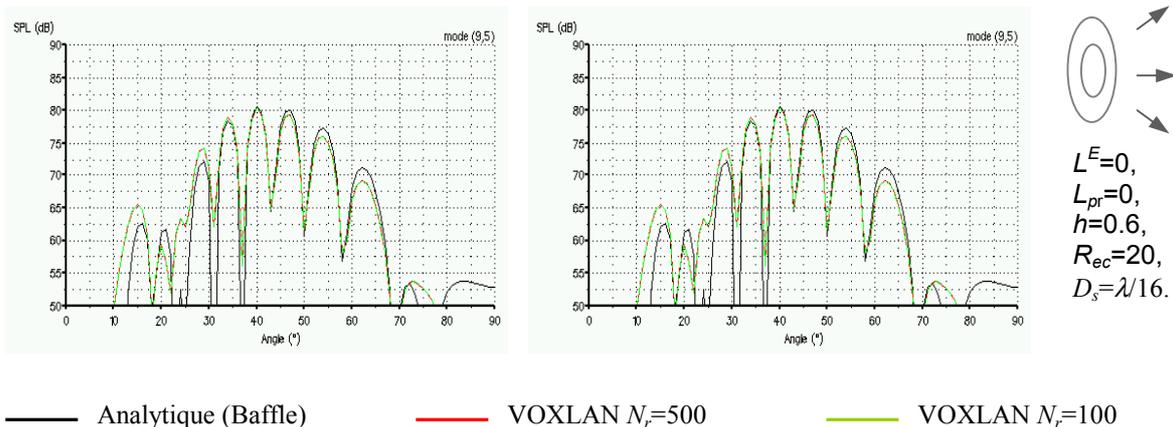


Figure 2.49 : Diagrammes de rayonnement des modes (9,4) et (9,5) à $k=50$.
Influence du nombre de rayons lancés à la source pour le calcul VOXLAN.

Finalement, les résultats des figures 2.48 et 2.49 nous assurent que pour une discrétisation de la surface modale suffisamment fine ($D_s=\lambda/16$) et un nombre de rayons adaptés ($N_r=500$), les sources annulaires sont correctement prises en compte dans la méthode SFG. Les calculs présentés au paragraphe 2.4.1 vérifiant déjà les critères de discrétisation et d'échantillonnage établis ci-dessus, la modélisation de la source ne peut être responsable des problèmes observés en conduits annulaires. Cette vérification était nécessaire avant d'analyser plus en détail les résultats du code VOXLAN.

¹² En réalité, le nombre de rayons nécessaire à la convergence du calcul VOXLAN est également lié au facteur d'évanescence des faisceaux gaussiens et à la distance d'écoute (par construction géométrique)...

2.4.3 Rayonnement d'une surface modale annulaire avec prolongement d'un corps central

Nous avons vu au paragraphe 2.4.1 que les prédictions de la méthode SFG sont généralement plus mauvaises pour la configuration avec corps central long que pour la configuration tronquée. Aussi, afin d'étudier l'influence du corps central sur les résultats de VOXLAN tout en s'affranchissant d'éventuels problèmes liés à la propagation des rayons dans le conduit, nous présentons sur la figure 2.50 quelques diagrammes de rayonnement obtenus dans le cas d'une surface source à partir de laquelle s'étend un corps central de longueur $L_{pr}=10$ (voir le schéma de la figure 2.50). Comme au paragraphe précédent, on s'intéresse ici au rayonnement des modes (9,1), (9,3), (9,4) et (9,5).

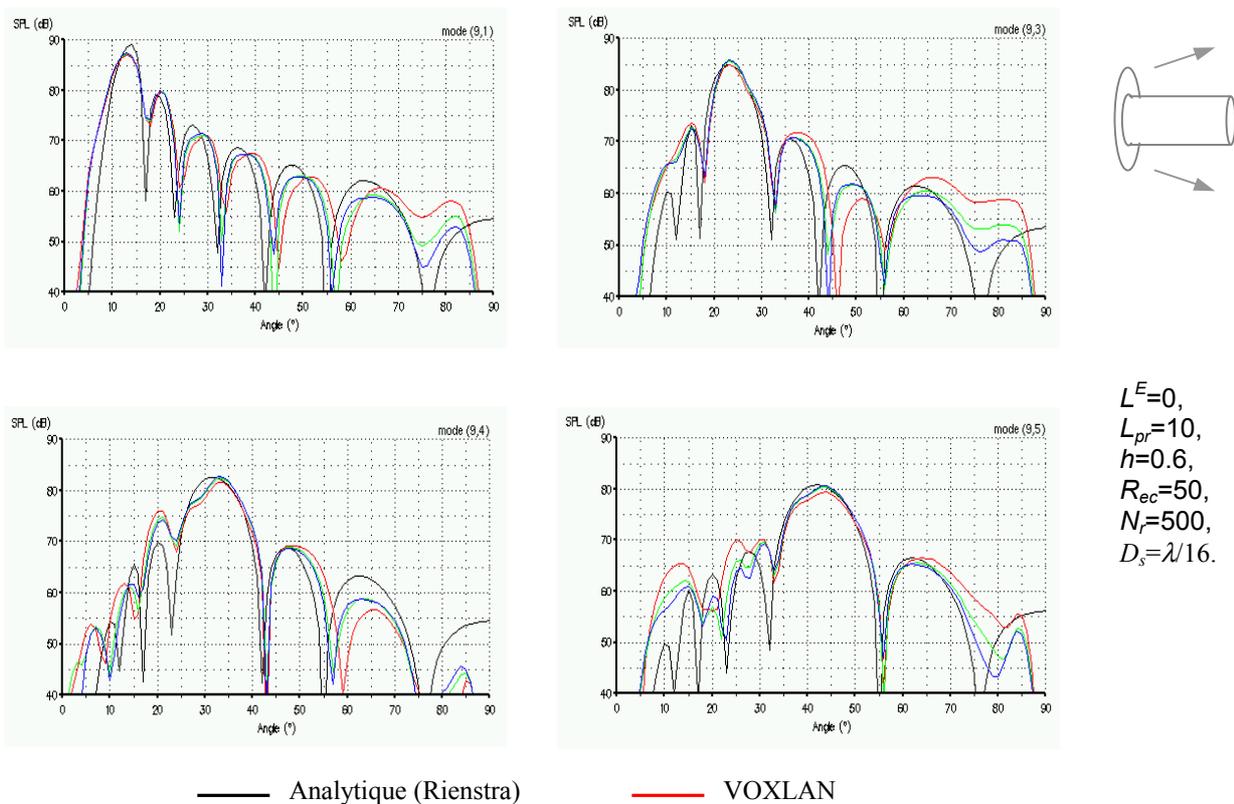


Figure 2.50 : Diagrammes de rayonnement des modes (9,1), (9,3), (9,4) et (9,5) dans le cas d'une surface modale libre avec prolongement d'un corps central. $k=50$.

Quel que soit le mode considéré, on constate que les prédictions du code VOXLAN ne sont pas satisfaisantes. En particulier, le lobe principal apparaît quelques fois atrophié, quelques fois sous-estimé ou encore mal positionné. Compte tenu des résultats présentés dans le cas d'une surface modale totalement libre (figure 2.48), on peut clairement affirmer que la présence d'un corps central est source de problème dans le calcul par sommation de faisceaux gaussiens.

Entre les configurations des figures 2.48 et 2.50, seules les fonctions de Green construites sur la base des faisceaux gaussiens diffèrent dans le calcul global de la méthode SFG. En effet, les sources et l'intégration finale sont identiques (voir la formulation (2.37), page 81)... A nos yeux, les facteurs susceptibles d'expliquer une mauvaise estimation des fonctions de Green sont les suivants :

1. Erreur lors du calcul de la réflexion des rayons sur le corps central

Pour le type d'application considéré dans notre étude, les deux points suivant, notamment, pourraient expliquer une mauvaise prise en compte des réflexions sur le corps central :

- Jusqu'ici, VOXLAN a toujours été utilisé sur des conduits circulaires, de sorte qu'une simple erreur dans le code liée à l'inversion de la courbure du corps central par rapport au cylindre externe aurait pu être responsable d'un calcul inexact de la réflexion. Les vérifications entreprises, toutefois, n'ont fait apparaître aucun problème de ce type.
- En revanche, il existe une limitation théorique de l'approximation asymptotique qui peut engendrer des erreurs lors de la prise en compte des réflexions sur le corps central. En effet, la théorie géométrique constitue une bonne approximation de l'équation de Helmholtz en des points suffisamment éloignés des sources mais près de celles-ci, l'hypothèse d'onde localement plane constituant la base des méthodes asymptotiques n'est plus valable. Lidoine ([65], page 176) montre ainsi que le champ associé à la propagation d'un rayon ne vérifie l'équation de Helmholtz qu'à condition que la relation $kL_S \gg 1$ soit satisfaite, où L_S est la distance de propagation du rayon depuis le point source. Par conséquent, si un rayon subit une réflexion après une distance de propagation insuffisante, en un point où l'approximation asymptotique n'est pas valable, il est probable que la solution réfléchie ne vérifie pas les équations de l'acoustique... Or, que ce soit en présence d'un conduit annulaire ou pour la configuration de la figure 2.50, les points sources pris en compte dans nos applications sont situés à proximité immédiate d'une paroi solide. Un grand nombre de rayons est donc susceptible de fausser le calcul VOXLAN...

2. Insuffisance de la méthode liée au fait que l'on néglige toute diffraction sur le corps central

Aucun modèle de diffraction n'est pris en compte dans le code de calcul VOXLAN. A très haute fréquence, le champ diffracté devient normalement négligeable devant le champ spéculaire ce qui justifie l'utilisation des méthodes de calcul asymptotiques. Cependant, aux fréquences qui nous intéressent ($k < 140$), les phénomènes de diffraction sont encore susceptibles d'influencer le rayonnement des modes de conduit¹³, en particulier si l'énergie acoustique est localisée à proximité des parois. En conduit circulaire, le fait de négliger toute diffraction est ainsi responsable de la dégradation des résultats des méthodes asymptotiques pour les modes rayonnant vers 90° , influencés par la diffraction sur la lèvre de l'entrée d'air. Plusieurs auteurs se sont donc intéressés à la prise en compte de modèles géométriques de la diffraction, comme Kempton [54] ou Hocter [47] qui utilisent la théorie de Keller [52] [53] (cf. chapitre 1) pour modéliser le champ diffracté sur une arête vive, ou encore Dougherty [30] qui considère le modèle des ondes rampantes de Pierce [98]¹⁴ pour évaluer la diffraction sur une lèvre épaisse de courbure régulière...

¹³ La théorie géométrique de la diffraction de Keller introduite qualitativement au chapitre 1 prévoit une décroissance de l'amplitude du champ diffracté en $k^{-1/2}$.

¹⁴ Ce modèle de diffraction spécifie qu'une part non négligeable de l'énergie acoustique incidente se propage le long des parois sous la forme d'ondes rampantes, qui rayonnent ensuite tangentiellement à l'objet diffractant...

Si l'influence des phénomènes de diffraction n'est visible que pour certains modes dans le cas des entrées d'air, la configuration des conduits d'éjection est *a priori* plus problématique. En effet, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur du conduit, de nombreux modes annulaires sont susceptibles d'être influencés par des phénomènes de diffraction sur le corps central. Celui-ci, effectivement, est propice au développement d'ondes rampantes. Ainsi, à l'intérieur d'un conduit annulaire, la propagation des modes sensibles à la présence du corps central (modes à caustique masquée, cf. chapitre 1) risque d'être mal modélisée par la méthode de calcul SFG sans diffraction. De façon similaire, dans le cas de la figure 2.50 (surface modale avec prolongement d'un corps central), les problèmes observés dans les résultats du code VOXLAN pourraient s'expliquer par une diffraction du champ acoustique par le corps central, à l'extérieur du conduit...

En conclusion, il existe deux facteurs susceptibles d'expliquer la dégradation des résultats de VOXLAN en présence d'un corps central : la pollution du calcul par des rayons non acoustiques et le fait de négliger toute diffraction. Dans la suite de cette étude, nous nous proposons donc de mettre en œuvre différents tests afin d'analyser la pertinence de ces hypothèses et d'isoler finalement l'origine des problèmes rencontrés dans VOXLAN.

2.4.4 Recherche d'éventuels rayons non acoustiques

Avant d'étudier l'influence d'éventuels rayons non acoustiques sur les résultats du code VOXLAN, il convient dans un premier temps de mettre en évidence l'existence de tels rayons. Dans ce but, nous avons effectué une première série de tests élémentaires portant sur la propagation d'*un seul* rayon à l'intérieur d'un conduit annulaire. L'idée est la suivante : en conduit rigide, le contenu modal associé à tout champ acoustique se conserve lors de la propagation des ondes le long du conduit. Par conséquent, dans le code de calcul VOXLAN, si le champ de pression résultant de la propagation d'un rayon donné satisfait les équations de l'acoustique, la conservation du contenu modal en différentes sections du conduit doit être vérifiée. En considérant alors plusieurs configurations de rayons puis en analysant pour chaque cas l'évolution du contenu modal le long du conduit, nous pouvons évaluer l'influence de la distance entre la source et le point de première réflexion, L_{SR} , sur la validité du calcul VOXLAN.

La figure 2.51 illustre le type de test que l'on se propose de réaliser. On considère ici une configuration particulièrement simple, correspondant à la propagation d'un rayon parallèlement à l'axe du conduit, c'est-à-dire sans réflexion. La longueur du conduit est $L^E=2$ et le rapport de rayon vaut $h=0.05$. Le faisceau est envoyé depuis le point source $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0, 0)$, dans la direction $(\theta_0, \varphi_0) = (0, 0)$ (la signification des différentes variables est rappelée sur le schéma de la figure 2.51). En $z=0.5$, $z=1$ et $z=1.5$, le champ de pression calculé par VOXLAN est analysé par une méthode de décomposition modale (voir l'annexe 2), puis les résultats obtenus pour chacune des sections sont tracés sous forme de diagrammes présentant l'intensité modale (en dB) en fonction de l'ordre des modes (figure 2.51.a). Pour une meilleure lisibilité de ces diagrammes, le numéro de l'abscisse correspond à l'ordre azimutal m des modes et les ordres radiaux n sont classés de façon croissante entre deux unités successives. À titre d'exemple, les modes $(2,1)$ à $(2,n)$ sont rangés entre les abscisses 2 et 3. Par ailleurs, bien que les contenus modaux soient analysés pour l'ensemble des modes passants, on se limitera dans cette étude aux résultats obtenus pour les modes azimutaux compris entre $m=0$ et $m=10$. Dans la configuration d'étude considérée ici, les

champs de pression calculés par VOXLAN en différentes sections de conduit sont strictement identiques (voir la figure 2.51.b). On vérifie donc évidemment la conservation du contenu modal le long du conduit...

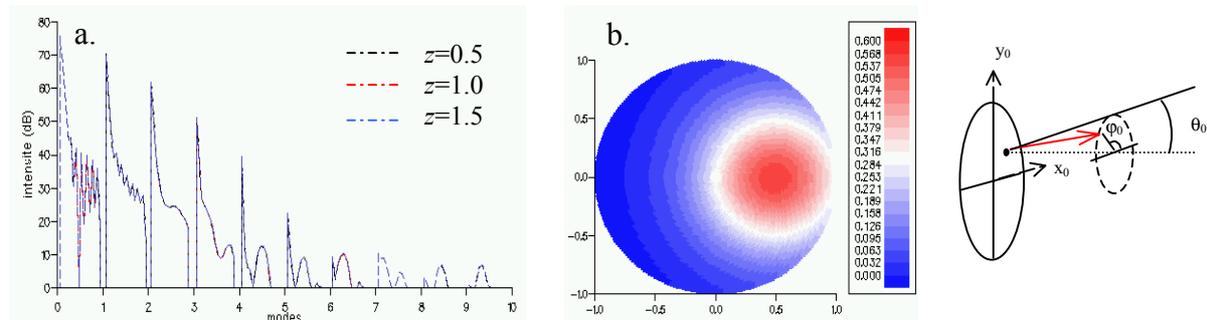


Figure 2.51 : Contenu modal en plusieurs sections de conduit (a.) et amplitude du champ de pression sur une section (b.). Cas d'un rayon parallèle à l'axe du conduit. $k=50$.

Lorsque l'on considère des rayons lancés depuis la source avec une incidence non nulle par rapport à l'axe du conduit, il convient d'être très prudent dans l'analyse des résultats du code VOXLAN. En effet, la visualisation des champs de pression obtenus en différentes sections de conduit a permis de mettre en évidence plusieurs limitations de la méthode de calcul :

- Tout d'abord, l'approximation paraxiale du champ acoustique effectuée autour d'un rayon porteur ne prend pas en compte l'existence d'éventuels obstacles à proximité de ce rayon. Cette manière de procéder n'a pas de conséquence critique pour des calculs en rayonnement car les points de contrôle sont alors dégagés de tout obstacle voisin, mais à l'intérieur du conduit, lorsque la largeur de la gaussienne est telle que son intersection avec les parois solides n'est pas nulle, l'approximation du champ réalisée autour d'un rayon n'est plus valable (figure 2.52). Dans ce cas, le champ de pression calculé par le code VOXLAN ne correspond pas à un champ acoustique.
- Une deuxième limitation du code apparaît lorsque les segments de rayon entre deux réflexions successives sont de taille relativement limitée. En effet, la pression en un point de contrôle \vec{x} est calculée par VOXLAN en considérant, pour chaque rayon voisin, l'approximation paraxiale du champ acoustique (2.36) écrite à l'abscisse curviligne s défini par le projeté orthogonal de \vec{x} sur le rayon. Par conséquent, lorsque la largeur de la gaussienne est suffisamment importante par rapport à la longueur des segments de rayon, il se crée des discontinuités artificielles dans le conduit comme dans l'exemple de la figure 2.52 où la contribution du segment rouge est limitée à la portion bleue de la section de contrôle.

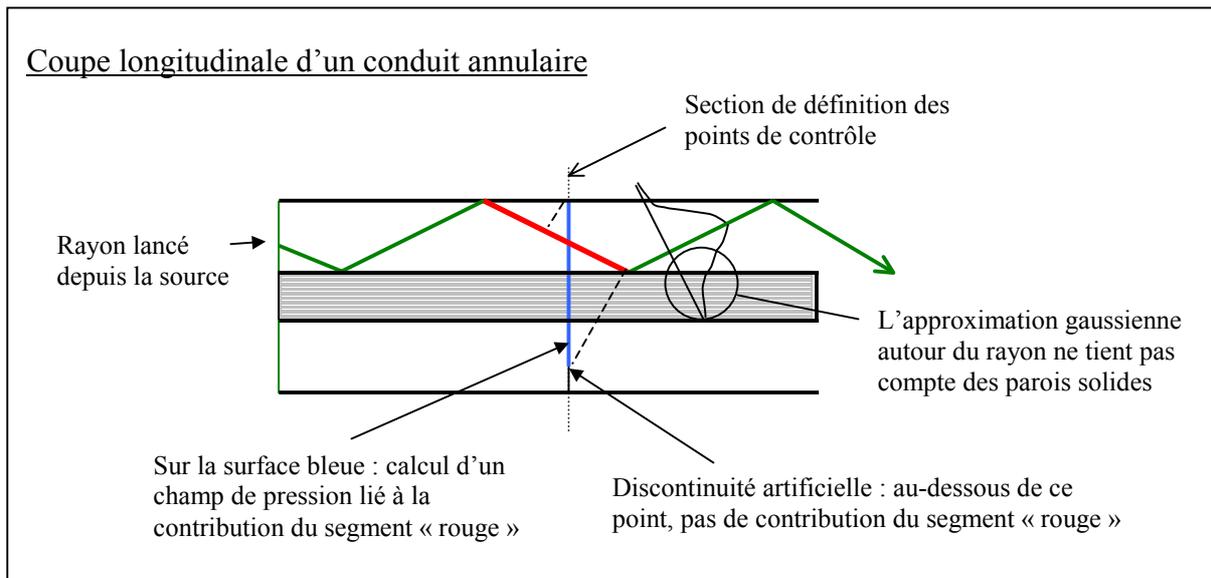


Figure 2.52 : Illustration schématique des limitations de VOXLAN pour le calcul du champ de pression à l'intérieur d'un conduit.

La figure 2.53 permet de visualiser ces limitations du code VOXLAN pour le calcul du champ de pression à l'intérieur d'un conduit. On se place ici dans le cas d'un rayon lancé depuis le point source $(x_0, y_0, z_0) = (0.75, 0, 0)$ et dans la direction $(\theta_0, \varphi_0) = (45^\circ, 180^\circ)$. Le rayon se propage alors dans le plan (x, y) , de façon similaire au schéma de la figure 2.52. Les caractéristiques du conduit sont : $L^E=2$ et $h=0.6$. Les distributions de pression obtenues en $z=0.5$ (figure 2.53.a) et $z=1$ (figure 2.53.b) mettent en évidence les discontinuités artificielles liées à la longueur limitée des segments de rayon et le fait que l'approximation gaussienne ne tient pas compte des parois du conduit. Pour ce type de cas critique, le contenu modal associé au champ de pression ne peut être conservé le long du conduit (figure 2.53.a).

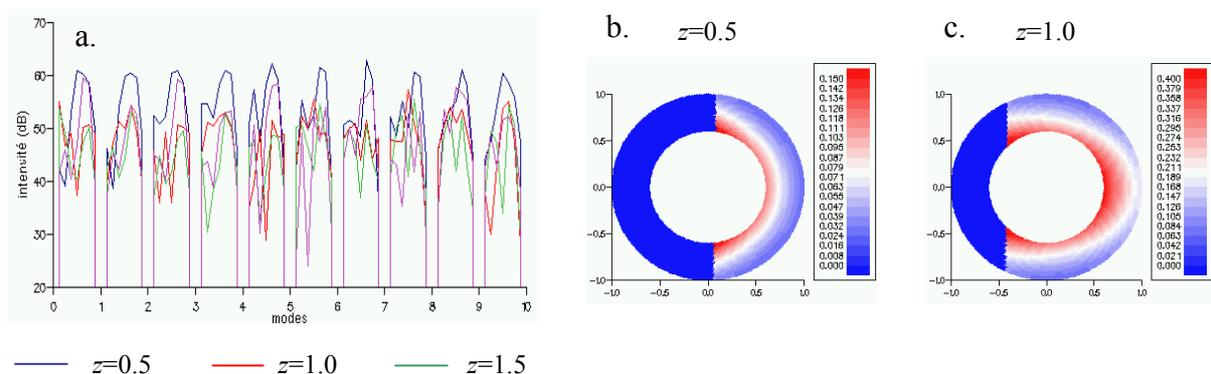


Figure 2.53 : Contenu modal (a.) et amplitude du champ de pression (b. et c.) en différentes sections de conduit. Illustration des limitations de VOXLAN. $k=50$.

Malgré ces limitations, il est possible d'étudier l'influence de la distance L_{SR} entre la source et le point de première réflexion sur la validité des rayons pris en compte dans le calcul VOXLAN. Pour cela, il suffit de considérer des rayons à faible incidence pour que les segments entre deux réflexions successives soient suffisamment longs, puis de choisir le facteur d'évanescence de la gaussienne de façon à ce que les faisceaux soient étroits et n'interfèrent pas avec les parois solides. C'est ce que nous avons effectué pour les cas tests présentés sur la figure 2.54, où quatre configurations de rayon caractérisées par des distances L_{SR} variables ont été étudiées. La fréquence réduite, le rapport de rayon et la longueur du conduit sont fixés à $k=100$, $h=0.3$ et $L^E=2.5$. Pour chacune des configurations, la position du point source, la direction initiale du rayon et la distance L_{SR} sont indiquées dans le tableau 2.4. Notons que dans chacun des cas, le rayon se propage une nouvelle fois dans le plan (x,y) .

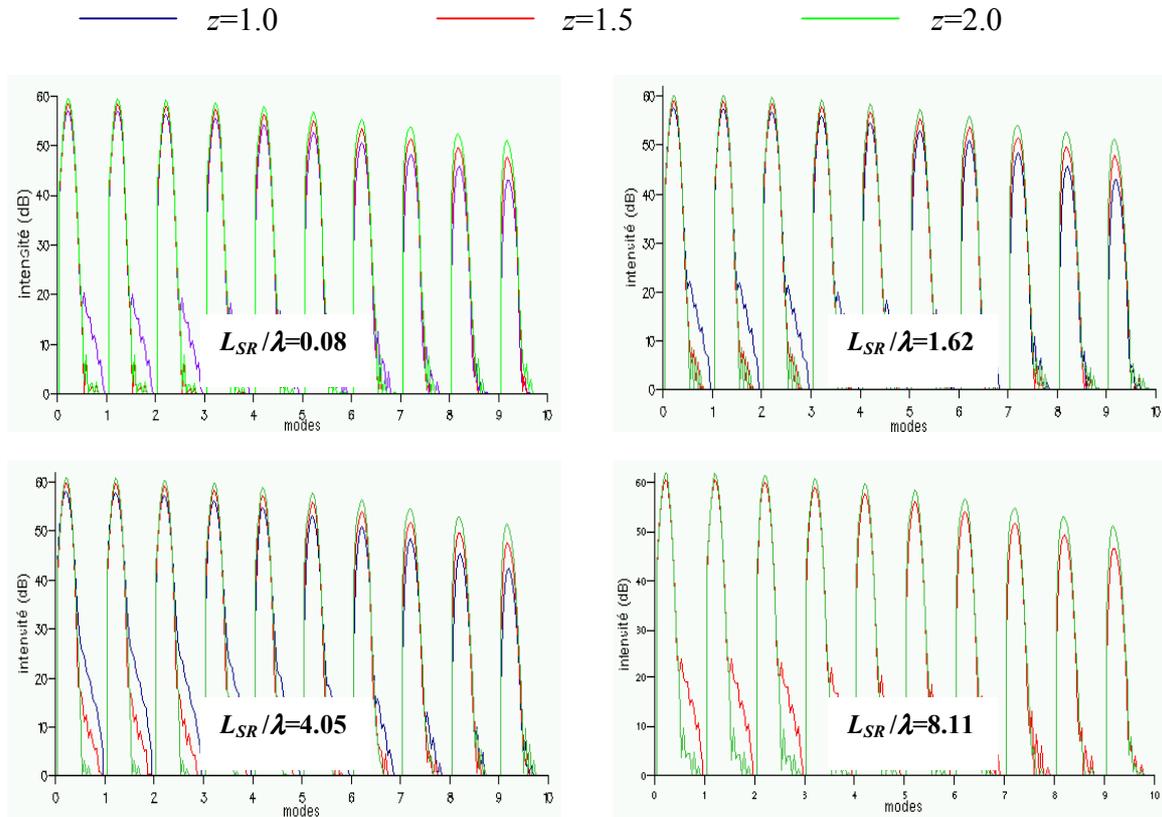
	Position de la source (x_0, y_0, z_0)	Direction du lancer (θ_0, φ_0)	Rapport L_{SR}/λ
Configuration 1	(0.301,0.0,0.0)	(11.27°,180°)	0.08
Configuration 2	(0.32.0,0.0)	(11.27°,180°)	1.62
Configuration 3	(0.35.0,0.0)	(11.27°,180°)	4.05
Configuration 4	(0.40.0,0.0)	(11.27°,180°)	8.11

Tableau 2.4 : Configuration des différents cas tests pour l'étude de validité des rayons en fonction de la distance L_{SR} avant première réflexion.

Pour les quatre configurations d'étude, le contenu modal associé à la propagation du rayon considéré est analysé en trois positions axiales : $z=1$, $z=1.5$ et $z=2$. Sur ces différentes sections, les distributions de pression présentées pour la configuration numéro 2 (figure 2.54.b) nous assurent que le calcul du champ n'est pas affecté par les problèmes mis en évidence précédemment. Finalement, les résultats de décomposition modale (figure 2.54.a) montrent que la distance avant première réflexion L_{SR} n'a pas de réelle influence sur la conservation du contenu modal. En effet, les courbes obtenues pour les différentes configurations sont quasiment identiques. Hormis une légère variation de niveau sur les modes élevés lorsque l'on progresse le long du conduit, le contenu modal se conserve de manière approximative dans chacun des cas.

En conclusion, l'existence de rayons non acoustiques ne semble pas constituer une explication valable des problèmes observés dans les prédictions du code VOXLAN. Pour nous en assurer, nous avons effectué une dernière série de tests en rayonnement, consistant à enlever de la solution finale la contribution des rayons subissant une première réflexion après une distance de propagation $L_{SR} < \kappa\lambda$, où κ est un paramètre réglable. Les résultats obtenus dans le cas d'une surface modale avec prolongement d'un corps central sont présentés sur la figure 2.55, pour plusieurs valeurs de κ . On constate que l'élimination des rayons *a priori* défavorables n'aboutit pas à une amélioration des résultats. Au contraire, si l'énergie du mode considéré est localisée à proximité du corps central (mode (9,5), voir chapitre 1), ignorer la contribution de certains rayons se traduit par une dégradation des résultats. Dans ce cas, en effet, une partie de l'énergie acoustique est négligée. Si l'amplitude modale est concentrée à la périphérie de la surface source (mode (9,1)), l'influence des rayons éliminés sur le calcul complet est quasiment nulle... Ces résultats confirment que les prédictions du code VOXLAN ne sont pas affectées par d'éventuels rayons non acoustiques.

a. : Décompositions modales en trois sections de conduit pour les différentes configurations d'étude



b. : Amplitude (norme) du champ de pression sur les trois sections de décomposition modale pour la configuration d'étude numéro 2 : $L_{SR}/\lambda=1.62$

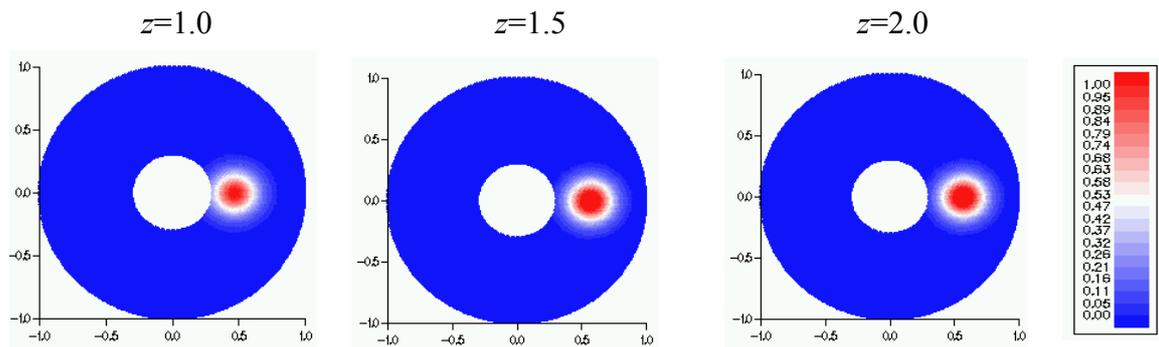


Figure 2.54 : Contenu modal (a.) et amplitude du champ de pression (b.) en différentes sections de conduit. Influence de la distance avec première réflexion L_{SR} sur la conservation du contenu modal dans le conduit. $k=100$.

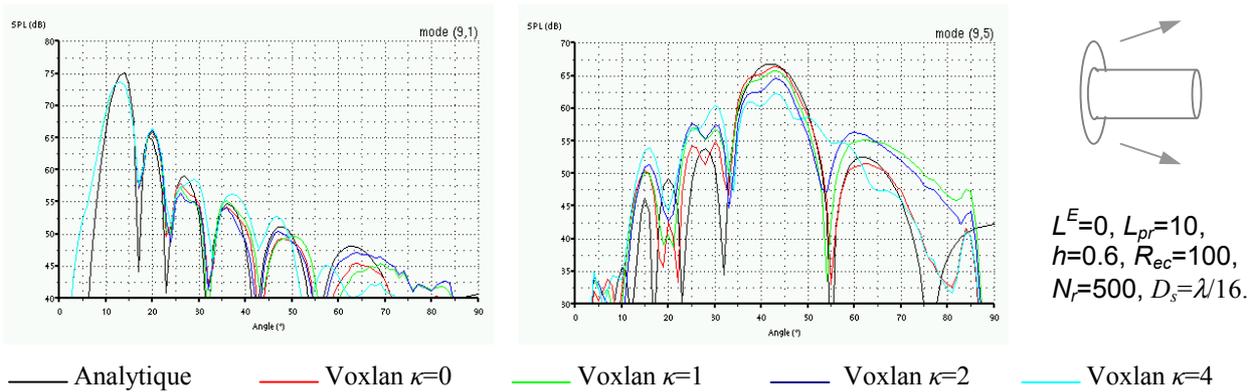


Figure 2.55 : Diagrammes de rayonnement des modes (9,1) et (9,5) obtenus en éliminant les rayons a priori défavorables. $k=50$.

2.4.5 Caractérisation des modes problématiques et diffraction sur le corps central

Aux paragraphes 2.4.1 et 2.4.3, nous avons vu que les prédictions du code VOXLAN se dégradent lorsque l'on considère un corps central se prolongeant à partir d'une surface modale libre ou à l'extérieur d'un conduit. L'hypothèse des rayons non acoustiques ne pouvant expliquer ce comportement, il est probable que le rayonnement de ces configurations soit en fait influencé par des phénomènes de diffraction sur le corps central. Sur la figure 2.50, les résultats de la méthode asymptotique présentés dans le cas de la surface source avec prolongement d'un corps central font apparaître, pour tous les modes considérés, des directivités en champ lointain erronées. Pour certains modes, toutefois, les prédictions de VOXLAN sur cette configuration d'étude sont satisfaisantes. Aussi, afin de mettre en évidence un lien entre les modes problématiques dans le calcul asymptotique et une éventuelle diffraction sur le corps central, nous avons analysé le chemin suivi par l'énergie acoustique au-delà du conduit (ou de la surface modale), à l'aide du code ACTRAN. Les résultats sont présentés sur la figure 2.56. Deux modes ((0,7) et (30,1)) dont le rayonnement est correctement estimé par VOXLAN ont été retenus, ainsi que deux modes problématiques ((0,2) et (9,1)). Les calculs en champ proche effectués par ACTRAN considèrent un conduit de longueur $L^E=3$. Les rayonnements correspondant obtenus par VOXLAN sont présentés, en revanche, dans le cas d'une surface modale sans conduit. Les paramètres du calcul asymptotique, enfin, sont identiques à ceux de la figure 2.50.

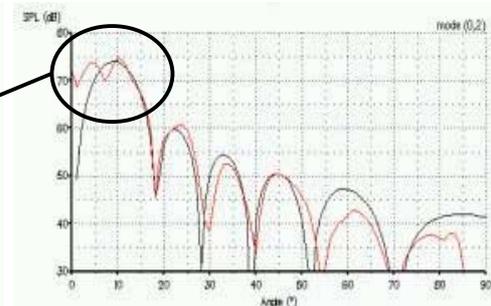
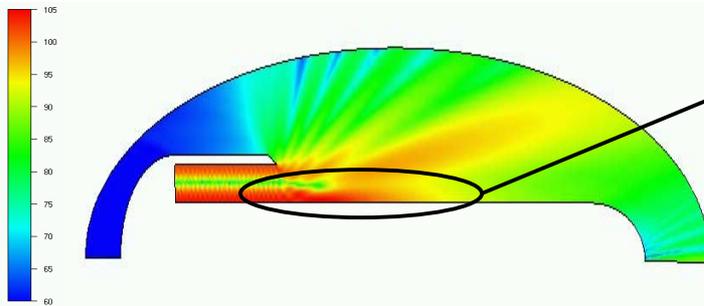
Finalement, les résultats de la figure 2.56 confirment le lien direct entre la dégradation des résultats de VOXLAN et l'influence du corps central sur le rayonnement modal. Dans le cas des modes (0,2) et (9,1), une large part de l'énergie acoustique se propage à proximité du corps central ou se réfléchit sur celui-ci. Par conséquent, le rayonnement est susceptible d'être influencé par une diffraction de type « ondes rampantes » et les prédictions de VOXLAN se révèlent inexactes. Le cas du mode (0,2), notamment, est intéressant. En effet, la visualisation du champ proche fait apparaître une concentration d'énergie le long du corps central qui tend à disparaître au cours de la propagation, probablement sous l'influence des phénomènes de diffraction qui redirigent le rayonnement vers les angles élevés pour ce type de problème [98]. Or le calcul VOXLAN qui, lui, néglige toute diffraction prévoit effectivement un lobe aux faibles angles, correspondant à la propagation du champ acoustique le long du corps central !

Champ proche calculé par ACTRAN (SPL, dB)

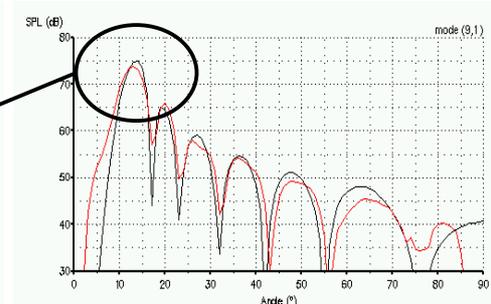
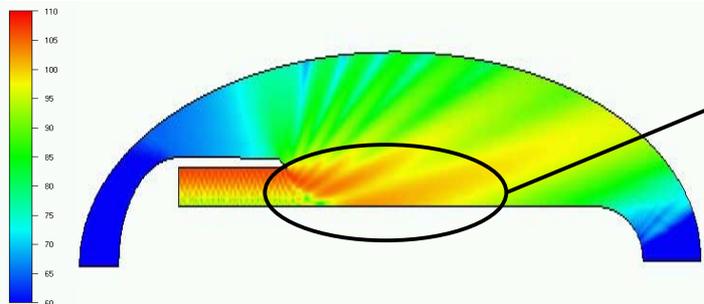
Rayonnement en champ lointain

— Modèle analytique — Voxlan

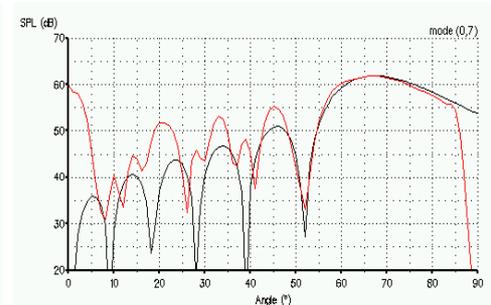
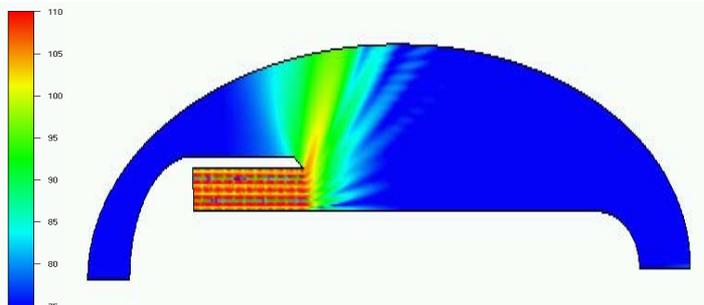
Mode (0,2)



Mode (9,1)



Mode (0,7)



Mode (30,1)

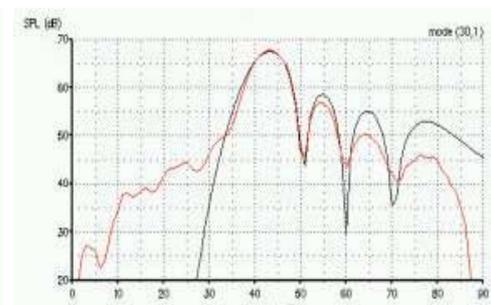
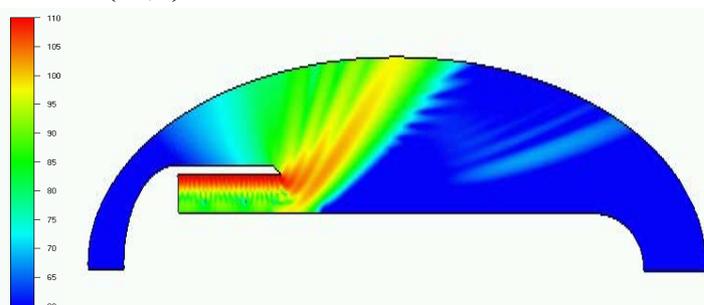


Figure 2.56 : Caractérisation des modes problématiques. $k=50$, $h=0.6$.

*Modes (0,2) et (9,1) : influence du corps central sur le rayonnement : divergence VOXLAN/analytique,
Modes (0,7) et (30,1) : pas d'influence du corps central sur le rayonnement : accord VOXLAN/analytique.*

Dans le cas des modes (0,7) et (30,1), les cartographies de champ proche montrent qu'à l'extérieur du conduit, l'énergie acoustique n'interagit pas avec le corps central. En conséquence, les comparaisons des rayonnements calculés par VOXLAN et MADIWHAX sont tout à fait satisfaisantes et l'on retrouve pour ce type de configurations des résultats du même ordre que ceux obtenus en conduit circulaire : validité des résultats asymptotiques sur le lobe principal, sur-estimation des niveaux aux faibles angles et sous-estimation aux angles élevés...

Il est à noter que sans la visualisation du champ proche à l'aide d'une méthode numérique, il est difficile de prévoir *a priori* la validité ou non du calcul VOXLAN pour un mode donné. En effet, si l'on se fiait à la répartition énergétique des modes à l'intérieur du conduit (cf. chapitre 1, figure 1.5), on aurait pu s'attendre à obtenir des résultats corrects à la fois pour les modes (9,1) et (30,1), dont les énergies sont localisées à proximité de la paroi externe. On constate ici que ce n'est pas le cas pour le mode (9,1) car le champ acoustique est redirigé vers le corps central à l'extérieur du conduit. De la même façon pour le mode (0,7), l'énergie modale à proximité du corps central étant importante, on aurait pu prédire un calcul inexact de la méthode asymptotique...

2.4.6 Conclusion sur l'application de la méthode SFG en conduit annulaire

L'étude à haute fréquence que nous venons de présenter a permis de mettre en évidence les limitations de la méthode asymptotique SFG, sous sa forme actuelle, pour traiter le problème des conduits d'éjection. Ainsi, dès que l'on considère la présence d'un corps central dans le calcul VOXLAN, les résultats ne sont pas satisfaisants. Plusieurs tests élémentaires ont été conduits afin de déterminer l'origine de ces différences avec le résultat analytique. Finalement, après avoir vérifié que les sources annulaires sont correctement prises en compte dans la méthode puis écarté l'hypothèse d'une pollution des résultats par des rayons ne respectant pas les équations de l'acoustique, nous avons montré que le fait de négliger la diffraction sur le corps central est l'origine probable de l'imprécision des résultats de VOXLAN.

En conclusion, la méthode asymptotique SFG ne peut être envisagée actuellement pour des applications industrielles en conduit d'éjection. Aussi, malgré le développement des ressources informatiques qui permettent d'utiliser les méthodes BEM et FEM à des fréquences de plus en plus élevées, il est nécessaire aujourd'hui de proposer de nouvelles solutions afin de se doter d'un outil de prédiction à haute fréquence, pour des problèmes en trois dimensions... Deux orientations sont actuellement en cours d'étude :

- La prise en compte de la diffraction par onde rampante dans le code de calcul VOXLAN. Cette solution est en cours de développement et pourra être testée dès l'année 2006. Elle demande l'hybridation complexe de VOXLAN et d'un code de recherche de rayon incluant la théorie géométrique de la diffraction.
- L'utilisation d'une méthode de résolution de l'équation parabolique. L'avantage de ce type de formulation est de prendre en compte les phénomènes de diffraction de façon naturelle. Son principal inconvénient, en revanche, est l'incertitude des résultats pour des angles de propagation élevés par rapport à l'axe du conduit [56].

2.5 Conclusion générale sur l'application des méthodes numériques et asymptotiques

L'objectif de ce chapitre était d'évaluer la pertinence des méthodes numériques BEM (ACTI3S) et FEM (ACTRAN) et de la méthode asymptotique SFG (VOXLAN) sur des configurations canoniques de conduit d'éjection, en présence d'un écoulement nul ou uniforme. Après un rappel des fondements théoriques et des hypothèses associées à chacune de ces approches, trois études distinctes ont été présentées. Les deux premières portent sur l'évaluation des méthodes numériques à basses fréquences, la troisième sur l'évaluation de la méthode asymptotique à hautes fréquences. Dans un premier temps, les résultats des codes ACTI3S et ACTRAN ont été comparés aux prédictions analytiques de MADIWHAX afin de s'assurer de la cohérence des différentes approches. Ensuite, pour vérifier que les modèles de calcul théoriques reproduisent correctement la réalité physique, les calculs ACTRAN et MADIWHAX ont été confrontés à des mesures effectuées en chambre sourde, en l'absence d'écoulement. Enfin, la comparaison des résultats de VOXLAN et de MADIWHAX a mis en évidence les limitations actuelles de la méthode asymptotique SFG et l'origine des problèmes a été analysée. Les principales conclusions de ces trois études sont les suivantes :

1. En l'absence d'écoulement, les méthodes de calcul analytiques, BEM et FEM conduisent à des résultats identiques. L'accord entre les différents calculs est excellent en champ lointain comme en champ proche. En présence d'un écoulement uniforme, deux groupes de solutions ont été identifiés : le code ACTRAN converge vers la « solution continue » de Rienstra tandis que les prédictions d'ACTI3S s'accordent avec la « solution de Kutta » tenant compte d'un échappement tourbillonnaire au bord de fuite. Les différences de comportement entre les deux méthodes numériques ont été attribuées au choix de la variable de base considérée dans chacun des codes, à savoir le potentiel acoustique pour ACTRAN et la pression acoustique pour ACTI3S. Enfin, l'atténuation et les redistributions modales induites par les traitements acoustiques sont correctement modélisées par les deux méthodes numériques, quelle que soit la valeur du nombre de Mach.
2. La comparaison des résultats d'ACTRAN et de MADIWHAX avec les mesures en chambre sourde a fait apparaître un très bon accord entre la simulation et l'expérience, en conduit rigide comme en conduit traité. Pour la configuration sans écoulement, ce résultat confirme la pertinence des méthodes de calcul analytiques et numériques utilisées dans ce mémoire. Il participe également à la validation du banc d'essai, la précision des mesures réalisées au cours de l'étude devant une nouvelle fois être soulignée.
3. Actuellement, le code VOXLAN ne permet pas de prédire correctement le rayonnement acoustique des conduits d'éjection et ne peut donc être utilisé pour des applications industrielles. Des différences importantes entre les prédictions analytiques et asymptotiques sont en effet observées dès que la géométrie considérée présente un corps central. Les insuffisances de VOXLAN s'expliquent probablement par l'absence de modèle de diffraction dans le calcul asymptotique, le corps central, notamment, étant propice au développement d'ondes rampantes.

À ce stade de notre étude, le bilan suivant peut être dressé concernant l'évaluation des différentes méthodes de calcul sur le problème de l'éjection. Le code ACTI3S, tout d'abord, peut être considéré comme validé compte tenu des hypothèses de la méthode intégrale (écoulement uniforme). Les résultats de ce chapitre nous assurent que le code retranscrit la réalité physique en l'absence d'écoulement et les comparaisons entre ACTI3S et MADIWHAX dans le cas d'un écoulement uniforme sont favorables. Désormais, la méthode BEM pourra donc être utilisée à AIRBUS pour étudier le rayonnement acoustique issu d'une géométrie tridimensionnelle quelconque, comme nous le proposons au chapitre 3 où l'influence de différents facteurs géométriques associés à l'éjection d'un moteur à flux séparés est analysée. Ensuite, l'évaluation du code ACTRAN en configuration canonique a montré que la notion d'écoulement uniforme est inadaptée à la méthode FEM. Pour des configurations particulières d'éjection, toutefois, nous avons pu vérifier que les effets de convection liés à un écoulement uniforme et que l'atténuation induite par des traitements acoustiques en présence d'écoulement sont correctement calculés par ACTRAN. Ainsi, la validité du code n'est pas remise en cause et celui-ci pourra être utilisé, à titre d'exemple, pour apprécier l'efficacité des traitements acoustiques en présence d'un écoulement porteur potentiel, pour des applications limitées à l'intérieur des conduits. L'évaluation de la méthode FEM demande désormais à être poursuivie dans le cas d'un écoulement irrotationnel, plus réaliste, bien que l'on sorte alors du domaine d'application théorique de la méthode. Une telle analyse est proposée au chapitre 4. Enfin, comme nous l'avons signalé précédemment, le code VOXLAN n'est pas applicable actuellement sur le problème de l'éjection et ne sera plus utilisé dans ce mémoire. Des développements sont en cours pour intégrer la théorie géométrique de la diffraction à la méthode SFG : ils seront évalués dans le cadre d'études ultérieures à la thèse.

Chapitre 3

Étude phénoménologique des caractéristiques géométriques des conduits d'éjection

3.1 Introduction

Le modèle analytique de la propagation acoustique en conduit d'éjection présenté au chapitre 1 est basé sur une représentation géométrique du problème très simplifiée, assimilant les tuyères à des guides d'ondes annulaires de section constante. Par suite, l'étude de validité des méthodes numériques et asymptotiques du chapitre 2 a été réalisée, également, en considérant des configurations canoniques. Pourtant, comme nous l'avons mentionné en introduction, la forme réelle des conduits d'éjection est plus complexe. La propagation acoustique dans l'éjection froide, notamment, est susceptible d'être influencée par plusieurs facteurs géométriques comme les fortes variations de section le long du conduit, les bifurcations verticales qui donnent naissance à deux zones de propagation distinctes, ou encore les différents éléments structurels et fonctionnels que constituent les inverseurs de poussée, les raidisseurs, les systèmes de conditionnement d'air etc... De manière analogue, hors du conduit, les modèles de rayonnement analytiques avec corps centraux tronqué ou infini ne peuvent constituer qu'une première approximation du rayonnement acoustique d'un moteur réel, en particulier s'il s'agit d'une éjection à flux séparés (voir l'introduction) avec prolongement du capot moteur et du cône à l'extérieur de la nacelle. Dans le cas d'un moteur installé, enfin, les éléments environnants comme le mât-réacteur ou la voilure influencent également le rayonnement. En définitive, pour une modélisation du problème la plus réaliste possible, il est nécessaire de prendre en compte la géométrie complète du moteur et des éléments voisins.

Le but de ce chapitre est de réaliser une étude générique déterminant l'impact des principales caractéristiques géométriques des conduits d'éjection sur la propagation et le rayonnement acoustiques. On se concentre ici principalement sur les spécificités associées à un conduit secondaire, pour un moteur à flux séparés avec cône émergeant. Une analyse progressive de l'influence des différents facteurs est effectuée, en partant de modélisations analytiques pour terminer par le rayonnement d'une éjection réaliste dérivée de la géométrie réelle d'un moteur équipant une gamme d'avions modernes de type long courrier. La majeure partie du chapitre est consacrée à l'influence des bifurcations sur la propagation acoustique dans le conduit. Dans un premier temps, un modèle analytique est présenté puis comparé au

calcul intégral (ACTI3S) afin de valider les deux méthodes sur ce type de configuration. La formulation analytique est ensuite utilisée pour analyser en détail le comportement des ondes à l'intérieur d'un conduit avec bifurcations. Enfin, pour compléter ces résultats et progresser vers des géométries plus réalistes, de nombreux calculs BEM sont réalisés. On s'intéresse notamment à l'efficacité de traitements acoustiques disposés sur les parois des bifurcations, aux conséquences des variations de section le long du conduit sur la propagation des modes, et au rayonnement d'une géométrie réaliste (le niveau de complexité de l'étude s'arrête, sur la forme réaliste, à la prise en compte des bifurcations et du mâ-t-réacteur : aucune modélisation de l'aile n'est effectuée ici).

Comme pour les chapitres précédents, et toujours dans le but de dissocier les différents paramètres, l'effet d'un écoulement non-uniforme n'est pas pris en compte dans cette étude. Si la formulation du modèle analytique avec bifurcations exposée en début de chapitre inclut la présence d'un écoulement subsonique et uniforme, l'ensemble des résultats présentés ensuite se limite au cas d'un milieu de propagation au repos¹.

3.2 Modèle analytique de la propagation acoustique dans un conduit de section annulaire avec bifurcations minces

À notre connaissance, il n'existe quasiment aucune étude publiée traitant de l'impact des bifurcations sur la propagation acoustique en conduit d'éjection. En effet, qu'il s'agisse de modélisations analytiques ou numériques, les différents auteurs considèrent généralement des conduits de forme axisymétrique. Seuls les récents travaux de Nark *et al.* [93] et Casalino *et al.* [21]² fournissent quelques résultats associés à la propagation du son dans un conduit tridimensionnel avec bifurcations. À l'aide d'une méthode de calcul basée sur le formalisme de l'approximation parabolique, Nark *et al.* mettent en évidence des recompositions modales du champ acoustique lors de sa propagation le long d'un conduit composé de tronçons avec et sans bifurcation. Dans le même temps, les comparaisons entre la méthode numérique GFD de Casalino (voir le paragraphe 2.1) et la méthode BEM de AIRBUS sur le même type de problème aboutissent à des conclusions identiques (les résultats de ces comparaisons sont présentés plus loin).

Si ces deux études donnent une première indication de l'influence des bifurcations, elles se limitent toutefois à des analyses relativement succinctes et n'offrent aucune description du champ acoustique dans la portion de conduit comprenant les bifurcations. C'est pourquoi, afin de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu et doter AIRBUS d'un outil de calcul rapide simulant la propagation acoustique en présence de bifurcations, un modèle analytique a été développé puis programmé. Ce modèle, baptisé BIFIDUCT, est décrit dans les pages qui suivent.

3.2.1 Hypothèses et géométrie du modèle analytique BIFIDUCT

Le type de géométrie considéré dans le modèle analytique BIFIDUCT est présenté sur la figure 3.1, dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) ³. Le conduit d'éjection est

¹ L'analyse des résultats du modèle analytique en présence d'un écoulement uniforme devra donc faire l'objet d'une étude ultérieure à la thèse.

² Ce papier a été préparé en collaboration avec AIRBUS, dans le cadre d'une étude préliminaire aux développements présentés dans ce chapitre...

³ Nous utilisons pour ce problème les grandeurs adimensionnelles définies au chapitre 1 (cf. équations (1.13)).

assimilé à un guide d'ondes constitué de trois portions de conduit à base cylindrique, correspondant à un tronçon avec bifurcations C entouré de deux tronçons annulaires A_1 et A_2 . Du fait de l'existence des deux parois verticales d'épaisseur nulle situées en $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$, le tronçon C est lui-même composé de deux conduits parallèles C_1 en $\varphi \in]0, \pi[$ et C_2 en $\varphi \in]\pi, 2\pi[$. Les rayons \tilde{R}_{int} et \tilde{R}_{ext} des cylindres interne et externe ont une valeur constante sur toute la longueur du conduit. L'écoulement moyen, enfin, est supposé uniforme, subsonique et dirigé selon l'axe \vec{e}_z .

Comme dans le code de calcul MADIWHAX, le champ acoustique incident est défini sous la forme de modes annulaires à partir d'une surface source Γ marquant le début du tronçon A_1 . Les modes incidents, caractérisés par les amplitudes A_{mn}^{1+} , se propagent ensuite jusqu'à la première jonction de tronçons A_1/C où leur énergie se répartit entre les modes transmis C_{mn}^{1+} et C_{mn}^{2+} dans les conduits parallèles C_1 et C_2 et les modes réfléchis A_{mn}^{1-} dans la section annulaire A_1 . Sur la seconde discontinuité de géométrie C/A_2 , une nouvelle redistribution du champ acoustique se produit, donnant naissance aux modes réfléchis C_{mn}^{1-} et C_{mn}^{2-} dans le tronçon C et aux modes transmis A_{mn}^{2+} dans le second tronçon annulaire A_2 . Finalement, en tenant compte de la réflexion à l'extrémité du conduit à l'origine des modes rétrogrades A_{mn}^{2-} , il est nécessaire de calculer les amplitudes des ondes transmises et réfléchies dans chaque tronçon de conduit pour décrire correctement la propagation du son dans le modèle géométrique de la figure 3.1. La résolution du problème global passe donc par le développement d'une expression modale du champ acoustique à l'intérieur des conduits parallèles du tronçon C , puis par la formulation de relations de passage aux discontinuités de géométrie (ou d'impédance).

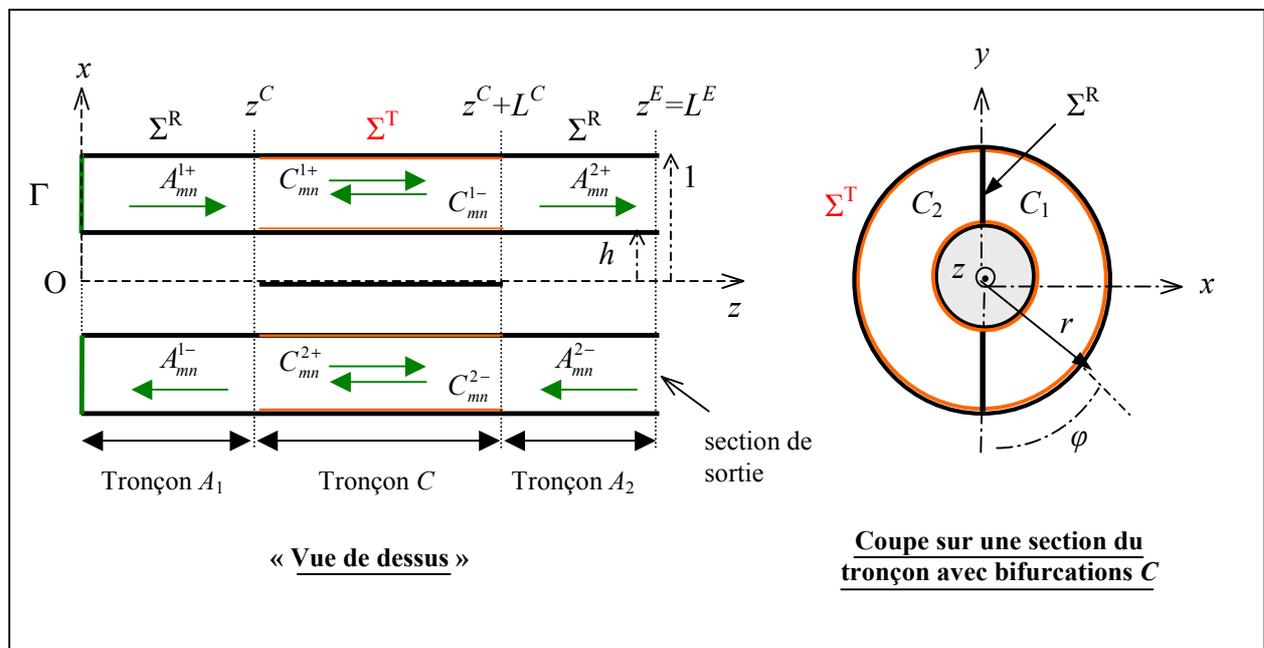


Figure 3.1 : Géométrie du modèle analytique BIFIDUCT.

A priori, plusieurs configurations de traitement acoustique peuvent être envisagées dans le problème que nous nous proposons de traiter. Compte tenu de la méthode de résolution utilisée, toutefois, deux contraintes s'imposent à nous. Tout d'abord, pour aboutir à une expression relativement simple des modes de conduit dans les tronçons avec bifurcations, celles-ci doivent être supposées rigides. Ensuite, comme pour les discontinuités d'impédance considérées au paragraphe (1.5), le recours à une méthode de raccordement modal aux interfaces A_1/C et C/A_2 n'est possible que si l'un des tronçons de part et d'autre de la discontinuité est lui aussi supposé rigide. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous placerons donc dans la configuration de la figure 3.1, considérant des traitements acoustiques sur les cylindres interne et externe du tronçon C , mais des parties annulaires A_1 et A_2 entièrement rigides.

Actuellement, aucun module de rayonnement n'est couplé au modèle de propagation BIFIDUCT. Toutefois, le dernier tronçon de conduit étant supposé annulaire, les modèles de rayonnement du chapitre 1 peuvent très facilement être incorporés au code de calcul.

3.2.2 Modes acoustiques dans un conduit de section annulaire avec bifurcations minces

L'approche modale utilisée pour décrire le champ acoustique en conduit cylindrique annulaire se décline très facilement au cas du conduit avec bifurcations. En considérant un tronçon infiniment long, le problème sur la pression acoustique p s'écrit de manière très similaire au cas annulaire (voir les équations (1.21)) :

$$\begin{aligned}
 \forall (r \in]h, 1[, \varphi \in]0, \pi[\text{ ou } \varphi \in]\pi, 2\pi[, z) : \quad & \Delta p + (k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z})^2 p = 0, \\
 \text{avec, en } r = h \text{ (} j=1 \text{) et } r = 1 \text{ (} j=2 \text{):} \quad & \frac{\partial p}{\partial r} = (-1)^j \frac{i\alpha_{int/ext}}{k} \left(k + iM_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p, \\
 \text{en } \varphi = 0^+ \text{ ou } \pi^- \text{ si } \varphi \in]0, \pi[, \text{ et en } \varphi = \pi^+ \text{ ou } 2\pi^- \text{ si } \varphi \in]\pi, 2\pi[: \quad & \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les nouveautés résident dans la présence de deux conduits parallèles C_1 et C_2 *a priori* indépendants et dans la prise en compte de nouvelles conditions aux limites sur les parois rigides des bifurcations. En effectuant le changement de variable $\varphi' = \varphi - \pi$, les équations du conduit C_2 deviennent toutefois équivalentes à celles du conduit C_1 , si bien que la forme du champ acoustique dans les deux guides parallèles est identique. Pour déterminer la structure modale du champ acoustique en présence de bifurcations, on peut donc se limiter à la résolution du problème associée à $\varphi \in]0, \pi[$. Il est à noter qu'une approche générale des conduits avec embranchement et sans écoulement est décrite dans l'ouvrage de Mittra et Lee [76]. Le calcul qui suit, qui en constitue une extension, est mené de façon indépendante et bénéficie des propriétés particulières liées à la parité des bifurcations des conduits d'éjection.

En recherchant la solution du problème (3.1) par la méthode de séparation des variables utilisée au chapitre 1, on montre que la composante f_φ de la pression acoustique s'exprime une nouvelle fois sous la forme (1.24) : $f_\varphi(\varphi) = cste_1 e^{im\varphi} + cste_2 e^{-im\varphi}$, avec m entier naturel. Cependant, les conditions aux limites sur les bifurcations imposent désormais un couplage entre les ondes tournantes $e^{+im\varphi}$ et $e^{-im\varphi}$, de sorte que la composante azimutale du champ de pression acoustique s'écrit finalement :

$$f_\varphi(\varphi) = cste \cos(m\varphi), \quad m \text{ étant un entier naturel.} \quad (3.2)$$

Pour une valeur de m donnée, les équations sur les composantes radiale et axiale de la pression acoustique p se déclinent de manière strictement identique au cas du conduit annulaire. En conséquence, le problème (3.1) admet une infinité de solutions particulières p_{mn}^\pm qui correspondent aux modes de conduit avec bifurcations et qui s'écrivent, pour $\varphi \in]0, \pi[$:

$$\begin{aligned} p_{mn}^\pm(r, \varphi, z) &= C_{mn}^\pm \left[\cos(\tau_{mn}^\pm) J_m(k_{r_{mn}}^\pm r) + \sin(\tau_{mn}^\pm) e^{i\Psi_{mn}^\pm} Y_m(k_{r_{mn}}^\pm r) \right] e^{ik_{z_{mn}}^\pm z} \cos(m\varphi), \\ &= C_{mn}^\pm F_{mn}^\pm(k_{r_{mn}}^\pm r) e^{ik_{z_{mn}}^\pm z} \cos(m\varphi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le coefficient C_{mn}^\pm désigne l'amplitude modale, $k_{r_{mn}}^\pm$ et $k_{z_{mn}}^\pm$ sont les constantes de propagation radiale et axiale, solutions des équations (1.29), et τ_{mn}^\pm et Ψ_{mn}^\pm sont définis par les équations (1.31) et (1.32). Comme au chapitre 1, n est un entier naturel strictement positif représentant l'ordre radial des modes de conduit (m, n).

En adjoignant aux composantes (3.3) les solutions associées au conduit parallèle C_2 ($\varphi \in]\pi, 2\pi[$), on peut finalement exprimer le champ acoustique dans les deux domaines du conduit avec bifurcations par la formulation complète :

$$\boxed{p(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m\varphi) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_{mn}^{1+} F_{mn}^+(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{mn}^{1-} F_{mn}^-(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right] \text{ pour } \varphi \in]0, \pi[,} \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m(\varphi - \pi)) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_{mn}^{2+} F_{mn}^+(k_{r_{mn}}^+ r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{mn}^{2-} F_{mn}^-(k_{r_{mn}}^- r) e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right] \text{ pour } \varphi \in]\pi, 2\pi[.} \quad (3.4)$$

Ainsi, la forme du champ acoustique en présence de bifurcations est similaire de celle du conduit annulaire correspondant. Seule la dépendance des modes avec la coordonnée azimutale φ est modifiée. Les termes progressifs en $e^{+im\varphi}$ et $e^{-im\varphi}$ du conduit annulaire sont remplacés par un terme d'onde stationnaire en $\cos(m\varphi)$. De ce fait, la propagation associée à un mode (m, n) donné ne fait plus apparaître de rotation du champ acoustique, les ventres et nœuds de pression (ou de vitesse) conservant la même position angulaire au cours du temps et le long du conduit. Comme nous le verrons dans les pages qui suivent, toutefois, ceci ne signifie pas que le champ acoustique global dans un conduit avec bifurcations ne peut se propager selon des directions azimutales.

Avant de considérer la modélisation des discontinuités de géométrie aux interfaces entre un tronçon annulaire et un tronçon avec bifurcations, nous nous proposons d'illustrer ci-dessous les difficultés qu'engendre la prise en compte de traitements acoustiques sur les parois des bifurcations. Dans ce cas, en effet, la composante azimutale du champ acoustique s'exprime sous la forme $f_\varphi(\varphi) = cste_1 e^{ik_\varphi\varphi} + cste_2 e^{-ik_\varphi\varphi}$, avec k_φ constante de propagation orthoradiale ne prenant plus des valeurs entières mais complexes (ces nouvelles valeurs étant par ailleurs couplées à celles des constantes radiale et axiale k_r et k_z). En conséquence, la composante radiale $f_r(r)$ du champ de pression ne vérifie plus les équations de Bessel à indice entier m et les solutions particulières du problème doivent satisfaire les équations (3.5) :

$$\forall (r \in]h, 1[, \varphi \in]0, \pi[, z), \quad p(r, \varphi, z) = f_r(r) e^{\pm ik_\varphi\varphi} e^{\pm ik_z z},$$

$$\text{avec : } \frac{d^2 f_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_r(r)}{dr} + \left[k_r^2 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} \right] f_r(r) = 0,$$

$$k_r^2 = [k - M_0 k_z]^2 - k_z^2, \quad (3.5)$$

$$\left[ik_\varphi + i\alpha_0 k \left(1 - M_0 \frac{k_z}{k}\right)^2 \right] \left[-ik_\varphi - i\alpha_\pi k \left(1 - M_0 \frac{k_z}{k}\right)^2 \right] e^{-ik_\varphi\pi} -$$

$$\left[ik_\varphi - i\alpha_\pi k \left(1 - M_0 \frac{k_z}{k}\right)^2 \right] \left[-ik_\varphi + i\alpha_0 k \left(1 - M_0 \frac{k_z}{k}\right)^2 \right] e^{ik_\varphi\pi} = 0,$$

$$\text{et : } \frac{df_r(r)}{dr} = (-1)^j i\alpha_{int,ext} (k - M_0 k_z)^2 f_r(r), \quad \text{en } r=h \text{ (} j=1\text{), et } r=1 \text{ (} j=2\text{)}.$$

α_0 et α_π désignent ici les admittances réduites sur les parois des bifurcations, en $\varphi=0^+$ et $\varphi=\pi^-$. La résolution du système (3.5) est beaucoup plus complexe que celle considérée précédemment et n'a pas été abordée au cours de la thèse. Ceci justifie la limitation du modèle théorique à la prise en compte de bifurcations rigides.

3.2.3 Formulation matricielle de la propagation acoustique en présence de discontinuités de géométrie

L'expression du champ acoustique dans un conduit avec bifurcations ayant été établie, nous allons maintenant nous intéresser à la modélisation des discontinuités de géométrie aux interfaces entre les différents tronçons du conduit présenté sur la figure 3.1. Comme pour la prise en compte des ruptures d'impédance au chapitre 1, nous considérerons que le champ acoustique dans chacun des tronçons A_1 , C_1 , C_2 et A_2 s'écrit comme une somme de modes de conduit infini, les conditions aux limites de chaque partie étant en réalité assurées par les équations de raccordement modal.

- **Analyse préliminaire et sélection des composantes du raccordement modal**

L'une des principales difficultés dans la mise en équation du problème réside dans le choix des composantes modales à raccorder aux jonctions des différents tronçons. En effet,

contrairement aux ruptures d'impédance modélisées précédemment, les discontinuités de géométrie considérées ici font intervenir trois portions de conduit, et non plus deux, et impliquent une modification des conditions aux limites selon la coordonnée azimutale φ . En conséquence, des redistributions d'énergie entre des modes d'ordres azimutaux différents sont désormais possibles et les équations de raccordement doivent *a priori* faire intervenir tous les modes de conduit azimutaux et radiaux.

Avant de modéliser le problème, les redistributions entre différents modes azimutaux ont été vérifiées en effectuant des comparaisons entre la méthode BEM (ACTI3S) et la méthode GFD de Casalino [21] sur une géométrie similaire à celle de la figure 3.1. La figure 3.2 présente le potentiel acoustique ϕ calculé par les deux méthodes sur des anneaux situés en une section du tronçon central C (figure 3.2.a) et une section du tronçon annulaire A_2 (figure 3.2.b) : bien que dans notre étude seul le mode (6,1) soit défini à la source, l'évolution du champ selon φ est caractéristique de la contribution de plusieurs modes azimutaux...

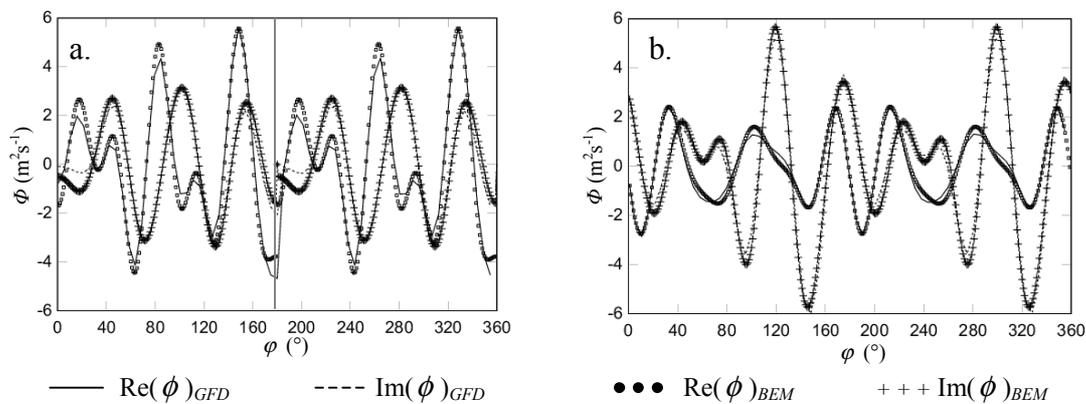


Figure 3.2 : Comparaison BEM / GFD sur une section du tronçon avec bifurcations C (a. : $z=1.5$, $r=0.8$) et sur une section du tronçon annulaire A_2 (b. : $z=2.5$, $r=0.8$).
 $k=13$, $h=0.6$, $z^C=1$, $L^C=1$, $M_0=0$. Mode incident : (6,1).

Afin de diminuer la complexité du problème et de limiter le nombre d'inconnues à combiner de part et d'autre des discontinuités, il est possible cependant de tirer profit de la périodicité azimutale du modèle géométrique. En effet, pour une valeur donnée de la coordonnée radiale r , le problème peut être assimilé à celui de la diffraction d'une onde incidente sur un réseau périodique infini de longueur L^C selon z et de période $d=\pi$ selon φ . Ce type de problème a souvent été étudié dans le domaine de l'électromagnétisme (voir par exemple Mittra et Lee [76, page 51], et Wu *et al.* [128]), et les ondes diffractées par une telle structure sont connues pour vérifier la théorie de Floquet, reliant les champs diffractés en φ et $\varphi+d$ selon la relation :

$$\forall(r, \varphi, z), \quad f_{diff}(r, \varphi + d, z) = f_{diff}(r, \varphi, z)e^{ik_\varphi d}, \quad (3.6)$$

où k_φ désigne la composante azimutale du vecteur d'onde incident, et d est la période du réseau selon φ .

Appliquée à notre modèle, avec l'onde incidente correspondant à un mode de conduit annulaire (m_{inc}, n_{inc}) dans le premier tronçon A_1 , la relation de Floquet impose la condition suivante sur le champ de pression diffracté dans les différentes parties du conduit :

$$\forall(r, \varphi, z), \quad p_{diff}(r, \varphi + \pi, z) = e^{im_{inc}\pi} p_{diff}(r, \varphi, z) = (-1)^{m_{inc}} p_{diff}(r, \varphi, z). \quad (3.7)$$

En reportant les formulations modales (1.34) et (3.4) dans l'équation (3.7), on montre alors que les amplitudes des modes (m, n) transmis et réfléchis dans les différents tronçons du conduit doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{- pour les tronçons annulaires :} \quad \forall(m, n), \quad & (-1)^m A_{mn}^{1-} = (-1)^{m_{inc}} A_{mn}^{1-}, \\ & (-1)^m A_{mn}^{2\pm} = (-1)^{m_{inc}} A_{mn}^{2\pm}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{- pour le tronçon central } C : \quad \forall(m, n), \quad C_{mn}^{2\pm} = (-1)^{m_{inc}} C_{mn}^{1\pm}. \quad (3.9)$$

Ainsi, dans les tronçons annulaires A_1 et A_2 , les réflexions et transmissions issues d'un mode incident (m_{inc}, n_{inc}) ne peuvent se faire que sur des modes d'ordre azimutal de même parité que l'ordre incident m_{inc} . Dans le tronçon central C , la théorie de Floquet ne se traduit par aucune contrainte sur l'ordre des modes excités mais elle impose l'égalité, à un terme de phase près, des amplitudes modales transmises dans chacun des conduits parallèles. Ces conclusions vont nous simplifier l'écriture des relations de passage aux discontinuités de géométrie. En particulier, puisque la parité de l'ordre azimutal incident est conservée dans chacun des tronçons A_1 et A_2 , nous considérerons dans la suite deux problèmes séparés. Le premier combine les modes d'ordre azimutal pair uniquement dans les parties annulaires, le second les modes d'ordre azimutal impairs. La solution générale associée à un champ incident quelconque s'écrira ensuite comme la somme des solutions des deux « sous-problèmes ».

- **Formulation matricielle pour le passage d'une discontinuité de géométrie**

Aux ruptures de géométrie en $z=z^C$ et $z=z^C+L^C$ (figure 3.1), les équations de continuité de la pression et de la vitesse axiale acoustiques s'écrivent :

$$p^{A_{1,2},R}(r, \varphi, z) = \begin{cases} p^{C_1,T}(r, \varphi, z) & \forall(r \in]h, 1[, \varphi \in]0, \pi[) \\ p^{C_2,T}(r, \varphi, z) & \forall(r \in]h, 1[, \varphi \in]\pi, 2\pi[) \end{cases}, \quad (3.10\text{-a})$$

$$v_z^{A_{1,2},R}(r, \varphi, z) = \begin{cases} v_z^{C_1,T}(r, \varphi, z) & \forall(r \in]h, 1[, \varphi \in]0, \pi[) \\ v_z^{C_2,T}(r, \varphi, z) & \forall(r \in]h, 1[, \varphi \in]\pi, 2\pi[) \end{cases}. \quad (3.10\text{-b})$$

Les exposants $A_{1,2}$ et $C_{1,2}$ renvoient aux tronçons de conduit correspondants et R et T au caractère rigide ou traité des cylindres interne et externe. Suite à l'analyse du paragraphe précédent, nous considérerons ici que les modes de conduit annulaire ont un ordre azimutal m de parité donnée ($m \in Z_p$ ou $m \in Z_i$, avec $Z_{p,i}$ l'ensemble des entiers relatifs pairs/impairs). En utilisant les écritures modales des champs acoustiques (1.34) et (3.4) et en tenant compte des relations (3.9) entre les amplitudes $C_{mn}^{1\pm}$ et $C_{mn}^{2\pm}$ de part et d'autre des bifurcations, les équations de continuité (3.10) imposent :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in Z_{p,i}} \sum_{n \in N^*} (A_{mn}^{1,2+}(z) + A_{mn}^{1,2-}(z)) F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) e^{im\varphi} \quad (3.11-a) \\
& = \sum_{m \in N} \sum_{n \in N^*} (C_{mn}^{1+}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + C_{mn}^{1-}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r)) \cos(m\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in]0, \pi[\\
& = \sum_{m \in N} \sum_{n \in N^*} ((\pm 1) C_{mn}^{1+}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + (\pm 1) C_{mn}^{1-}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r)) \cos[m(\varphi - \pi)] \quad \text{pour } \varphi \in]\pi, 2\pi[
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \in Z_{p,i}} \sum_{n \in N^*} (\Lambda_{mn}^{+R} A_{mn}^{1,2+}(z) + \Lambda_{mn}^{-R} A_{mn}^{1,2-}(z)) F_{mn}^R(k_{r_{mn}}^R r) e^{im\varphi} \quad (3.11-b) \\
& = \sum_{m \in N} \sum_{n \in N^*} (\Lambda_{mn}^{+T} C_{mn}^{1+}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + \Lambda_{mn}^{-T} C_{mn}^{1-}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r)) \cos(m\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in]0, \pi[\\
& = \sum_{m \in N} \sum_{n \in N^*} ((\pm 1) \Lambda_{mn}^{+T} C_{mn}^{1+}(z) F_{mn}^{+T}(k_{r_{mn}}^{+T} r) + (\pm 1) \Lambda_{mn}^{-T} C_{mn}^{1-}(z) F_{mn}^{-T}(k_{r_{mn}}^{-T} r)) \cos[m(\varphi - \pi)] \quad \text{pour } \varphi \in]\pi, 2\pi[
\end{aligned}$$

avec (± 1) égal à 1 si $m \in Z_p$ dans la partie annulaire et -1 si $m \in Z_i$ dans la partie annulaire.

$A_{mn}^{1,2\pm}(z) = A_{mn}^{1,2\pm} e^{ik_{z_{mn}}^{\pm} z}$ et $C_{mn}^{1\pm}(z) = C_{mn}^{1\pm} e^{ik_{z_{mn}}^{\pm} z}$ sont les amplitudes modales au niveau de la section de raccordement, Λ_{mn}^{\pm} est défini page 25 (équation (1.35)).

Pour résoudre le système infini (3.11) et aboutir à une formulation matricielle des relations de passage, on effectue une troncature modale dans chaque portion de conduit. Bien que la numérotation des modes considérés dans les tronçons avec et sans bifurcation appartienne à des ensembles mathématiques différents $((m,n) \in Z_{p,i} \times N^*$ ou $(m,n) \in N \times N^*$), il est nécessaire de conserver le même nombre de composantes modales de part et d'autre de la discontinuité :

$$\dim(T_{p,i}^A) = \dim(T^C) \quad (3.12)$$

avec $T_{p,i}^A = \text{Tronc}(Z_{p,i} \times N^*)$ troncature sur les modes de conduit annulaire,

$T^C = \text{Tronc}(N \times N^*)$ troncature sur les modes de conduit avec bifurcations.

Comme pour les ruptures d'impédance étudiées au chapitre 1, on exploite ensuite les propriétés d'orthogonalité des modes du tronçon rigide, ce qui permet ici d'isoler les composantes modales de la partie annulaire. En prenant en compte l'existence des deux conduits parallèles C_1 et C_2 pour l'intégration sur φ et en analysant correctement les différentes contraintes de parité, le produit scalaire $\int_h^1 \left(\int_0^{2\pi} (\cdot) e^{-iq\varphi} d\varphi \right) F_{qj}^R(k_{r_{qj}}^R r) r dr$ $((q,j) \in T_{p,i}^A)$

sur la troncature du système (3.11) aboutit à :

$$\forall (q,j) \in T_{p,i}^A,$$

$$\begin{aligned}
& A_{qj}^{1,2+}(z) Y_{qj} \pi + A_{qj}^{1,2-}(z) Y_{qj} \pi = \sum_{(m,n) \in T^C} (C_{mn}^{1+}(z) X_{mn,qj}^+ \alpha_{mq} + C_{mn}^{1-}(z) X_{mn,qj}^- \alpha_{mq}) \\
& \Lambda_{qj}^{+R} A_{qj}^{1,2+}(z) Y_{qj} \pi + \Lambda_{qj}^{-R} A_{qj}^{1,2-}(z) Y_{qj} \pi = \sum_{(m,n) \in T^C} (\Lambda_{mn}^{+T} C_{mn}^{1+}(z) X_{mn,qj}^+ \alpha_{mq} + \Lambda_{mn}^{-T} C_{mn}^{1-}(z) X_{mn,qj}^- \alpha_{mq})
\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{avec : } \alpha_{mq} = \int_0^\pi \cos(m\varphi) e^{-iq\varphi} d\varphi, \quad X_{mn,qj}^\pm = \int_h^1 F_{mn}^{\pm T}(k_{r_{mn}}^\pm r) F_{qj}^R(k_{r_{qj}}^R r) r dr,$$

$$\text{et } Y_{qj} = \int_h^1 [F_{qj}^R(k_{r_{qj}}^R r)]^2 r dr ; \quad \alpha_{mq} = \begin{cases} \Delta_q & \text{si } m=\pm q \\ 0 & \text{si } m+q \text{ pair et } m \neq \pm q \\ \frac{2iq}{m^2 - q^2} & \text{si } m+q \text{ impair} \end{cases}, \quad \Delta_q = \begin{cases} \pi & \text{si } q=0 \\ \pi/2 & \text{si } q \neq 0 \end{cases}.$$

Le système (3.13) se réécrit alors sous la forme matricielle (3.14) :

$$\begin{pmatrix} A_{qj}^{1,2+}(z) \\ A_{qj}^{1,2-}(z) \end{pmatrix} \begin{matrix} (q,j) \in T_{p,i}^A \\ (q,j) \in T_{p,i}^A \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{mn}^{+T} X_{mn,qj}^+ \alpha_{mq}}{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{qj}^{+R}} & \frac{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{mn}^{-T} X_{mn,qj}^- \alpha_{mq}}{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{qj}^{+R}} \\ \frac{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{mn}^{+T} X_{mn,qj}^+ \alpha_{mq}}{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{qj}^{-R}} & \frac{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{mn}^{-T} X_{mn,qj}^- \alpha_{mq}}{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{qj}^{-R}} \end{pmatrix}}_{M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})} \begin{pmatrix} C_{mn}^{1+}(z) \\ C_{mn}^{1-}(z) \end{pmatrix} \begin{matrix} (m,n) \in T^C \\ (m,n) \in T^C \end{matrix} \quad (3.14)$$

La matrice $M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})$ ainsi obtenue exprime la relation de passage entre les amplitudes modales des tronçons annulaires A_1 ou A_2 (rigides) et du tronçon avec bifurcations C (traité sur les parois interne et externe du conduit).

Pour revenir sur le choix des éléments des troncatures modales $T_{p,i}^A$ et T^C , il est évident que les ordres (q,j) et (m,n) des modes passants en conduit rigide, au minimum, doivent être pris en compte. Cependant, comme le nombre de modes passants de l'ensemble $Z_{p,i} \times \mathbb{N}^*$ est souvent inférieur à celui de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il peut être nécessaire de compléter le système (3.13) en ajoutant les premiers modes évanescents (q,j) de la zone annulaire. Notons simplement que dans ce cas, les ordres $(+q,j)$ et $(-q,j)$ ne peuvent être considérés simultanément car les équations correspondantes sont liées (ce n'est pas le cas si (q,j) est passant).

Enfin, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, le caractère rigide de l'un des deux tronçons est une condition nécessaire à la résolution du problème, puisque seuls les modes de conduit rigide sont orthogonaux. Cependant, si nous avons choisi dans le modèle de la figure 3.1 la partie annulaire comme étant cette partie rigide, il est tout à fait possible de traiter le problème inverse qui considère un tronçon annulaire traité accolé à un tronçon avec bifurcations supposé rigide. La démarche de résolution d'un tel problème est identique à celle que l'on vient de suivre, à la différence que l'on utilise cette fois l'orthogonalité des modes du tronçon C en effectuant le produit scalaire $\int_h^1 \int_0^\pi (\cdot) F_{qj}^R(k_{r_{qj}}^R r) \cos(q\varphi) r d\varphi dr$ ($(q,j) \in T^C$) sur les équations de continuité du champ acoustique. On aboutit alors à la nouvelle relation de passage :

$$\begin{pmatrix} C_{qj}^{1+}(z) \\ C_{qj}^{1-}(z) \end{pmatrix} \begin{matrix} (q,j) \in T^C \\ (q,j) \in T^C \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{mn}^{+T} X_{mn,qj}^+ \alpha_{-qm}}{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{qj}^{+R}} \frac{X_{mn,qj}^+ \alpha_{-qm}}{Y_{qj} \Delta_q} & \frac{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{mn}^{-T} X_{mn,qj}^- \alpha_{-qm}}{\Lambda_{qj}^{-R} - \Lambda_{qj}^{+R}} \frac{X_{mn,qj}^- \alpha_{-qm}}{Y_{qj} \Delta_q} \\ \frac{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{mn}^{+T} X_{mn,qj}^+ \alpha_{-qm}}{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{qj}^{-R}} \frac{X_{mn,qj}^+ \alpha_{-qm}}{Y_{qj} \Delta_q} & \frac{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{mn}^{-T} X_{mn,qj}^- \alpha_{-qm}}{\Lambda_{qj}^{+R} - \Lambda_{qj}^{-R}} \frac{X_{mn,qj}^- \alpha_{-qm}}{Y_{qj} \Delta_q} \end{pmatrix}}_{N_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})} \begin{pmatrix} A_{mn}^{1,2+}(z) \\ A_{mn}^{1,2-}(z) \end{pmatrix} \begin{matrix} (m,n) \in T_{p,i}^A \\ (m,n) \in T_{p,i}^A \end{matrix} \quad (3.15)$$

En conclusion, la disposition des traitements acoustiques proposée dans notre modèle peut être modifiée à condition qu'aucune discontinuité de géométrie (ou d'impédance) ne soit introduite entre deux tronçons traités. En outre, si le raccordement des tronçons avec et sans bifurcation se fait dans une portion de conduit complètement rigide, il est possible de résoudre le problème par les deux approches présentées ci-dessus. On montre alors que l'on aboutit au même résultat, avec des matrices $M_{p,i}(\alpha_{int}=0, \alpha_{ext}=0)$ et $N_{p,i}(\alpha_{int}=0, \alpha_{ext}=0)$ devenant inverses l'une de l'autre.

• Solution du problème global

Une fois établies les relations de passage (3.14) au niveau des discontinuités de géométrie, les amplitudes des ondes transmises et réfléchies dans chaque partie de conduit s'expriment simplement en fonction des amplitudes modales incidentes, sous la forme de produits matriciels. Finalement, pour une excitation azimutale de parité fixée et en incluant les coefficients de réflexion à l'extrémité du conduit introduits en (1.56), on obtient après développement :

$$\begin{aligned} (A_{qj}^{2+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A} &= [I - G_2 G_4^{-1} \mathfrak{R}]_{p,i}^{-1} [G_1 - G_2 G_4^{-1} G_3]_{p,i} (A_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A}, \\ (A_{qj}^{1-})_{(q,j) \in T_{p,i}^A} &= [G_4 - \mathfrak{R} G_2]_{p,i}^{-1} [\mathfrak{R} G_1 - G_3]_{p,i} (A_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A} = M_{p,i}^{inter} (A_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A}, \\ (C_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T^C} &= [H_3 - H_4 H_2^{-1} H_1]_{p,i}^{-1} [M_{p,i}^{inter} - H_4 H_2^{-1}]_{p,i} (A_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A}, \\ (C_{qj}^{1-})_{(q,j) \in T^C} &= [H_4 - H_3 H_1^{-1} H_2]_{p,i}^{-1} [M_{p,i}^{inter} - H_3 H_1^{-1}]_{p,i} (A_{qj}^{1+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec :

$$G_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext}) = [F_{p,i}^R(z^C + L^C)]^{-1} \cdot M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext}) \cdot E^T(L^C) \cdot [M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext})]^{-1} \cdot F_{p,i}^R(z^C) = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix}_{p,i},$$

$$H_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext}) = [F_{p,i}^R(z^C)]^{-1} \cdot M_{p,i}(\alpha_{int}, \alpha_{ext}) \cdot E^T(z^C) = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}_{p,i}, \quad (A_{qj}^{2-})_{(q,j) \in T_{p,i}^A} = \mathfrak{R}_{p,i} (A_{qj}^{2+})_{(q,j) \in T_{p,i}^A},$$

$$F_{p,i}^R(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_{z_{qj}}^+ z} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z_{qj}}^- z} \end{pmatrix} \begin{matrix} (q,j) \in T_{p,i}^A \\ (q,j) \in T_{p,i}^A \end{matrix} \quad E^T(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_{z_{mn}}^+ z} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z_{mn}}^- z} \end{pmatrix} \begin{matrix} (m,n) \in T^C \\ (m,n) \in T^C \end{matrix}.$$

Bien entendu, la connaissance des solutions particulières des problèmes pair et impair permet d'exprimer la solution du problème général associée à une excitation quelconque.

3.3 Analyse de la propagation et du rayonnement acoustiques associés à un conduit annulaire avec bifurcations minces

Le problème de la propagation acoustique en présence de bifurcations ayant été modélisé, nous allons maintenant nous intéresser aux résultats du code de calcul BIFIDUCT intégrant le formalisme des pages précédentes. Dans un premier temps, une comparaison de la méthode analytique avec ACTI3S est réalisée, permettant de vérifier la pertinence des deux modèles et d'analyser le contenu modal des champs transmis et réfléchis dans chaque portion de conduit. Le code de calcul analytique est ensuite utilisé seul pour étudier plus en détail les phénomènes de propagation dans un conduit avec bifurcations. Des études paramétriques sont effectuées, portant sur la fréquence d'excitation, le mode incident à la source ou encore la longueur du tronçon central C . Enfin, sur des géométries simplifiées similaires au conduit de la figure 3.1, quelques calculs numériques BEM viennent compléter l'étude analytique pour évaluer l'efficacité des traitements acoustiques sur bifurcation et caractériser le rayonnement en champ lointain.

L'ensemble des résultats présentés dans cette section est obtenu pour un conduit de rapport de rayon $h=0.6$, aux fréquences réduites $k=13, 20$ et 27 (à l'exception de l'étude sur le rayonnement à $k=11$, à comparer aux calculs du chapitre 2). La totalité de l'étude est effectuée sans écoulement. Le tableau 3.1 donne la liste des modes passants correspondant (seuls les ordres azimutaux positifs sont indiqués) :

$k=13$	$k=20$	$k=27$
$m=0$ à 7 : 2 modes radiaux $m=8$ à 11 : 1 mode radial	$m=0$ à 9 : 3 modes radiaux $m=10$ à 13 : 2 modes radiaux $m=14$ à 17 : 1 mode radial	$m=0$ à 10 : 4 modes radiaux $m=11$ à 16 : 3 modes radiaux $m=17$ à 19 : 2 modes radiaux $m=20$ à 24 : 1 mode radial

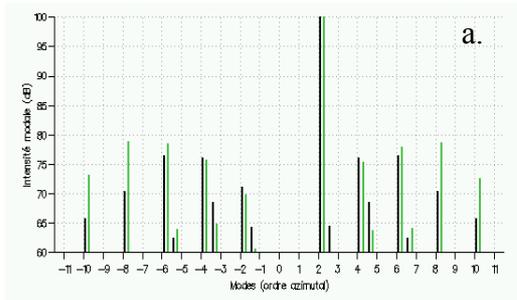
Tableau 3.1. Liste des modes de conduit passants aux différentes fréquences considérées. $h=0.6$, $M_0=0$.

3.3.1 Comparaison entre les méthodes analytique et intégrale

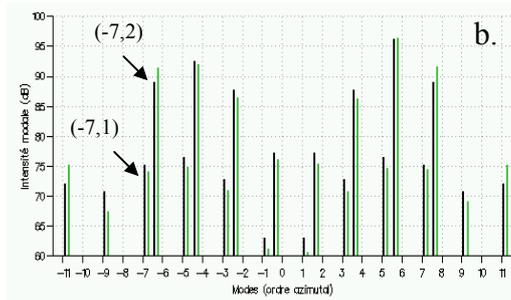
Afin de procéder à une validation croisée des méthodes analytique et intégrale, des calculs ACTI3S ont été réalisés sur le type de géométrie présenté sur la figure 3.1. Pour l'étude numérique, deux surfaces modales sont prises en compte aux extrémités du conduit, ce qui permet, outre la définition des modes incidents en Γ , d'imposer une condition de non-réflexion sur les ondes transmises en extrémité de conduit et réfléchies dans le premier tronçon (on considère donc $A_{mn}^{2-}=0$ pour les calculs analytiques). Par ailleurs, le code ACTI3S ne pouvant considérer une surface infiniment fine, une épaisseur de bifurcation non nulle mais négligeable devant les dimensions du conduit et la longueur d'onde a été choisie ($\tilde{e}/\tilde{R}_{ext} = 0.005$, $\tilde{e}/\tilde{\lambda} \approx 0.021$ pour $k=27$).

Le contenu modal prédit dans chaque tronçon de conduit par les deux méthodes de calcul et pour un mode incident unique défini à la source est présenté sur la figure 3.3. L'abscisse correspond à l'ordre azimutal m des modes et les ordres radiaux sont classés ensuite de façon croissante entre deux valeurs successives de m (voir l'exemple des modes $(-7,1)$ et $(-7,2)$ sur

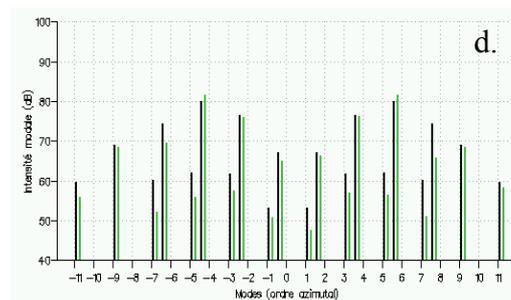
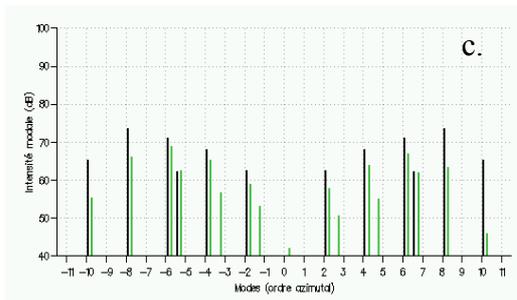
MODE INCIDENT : (2,1)



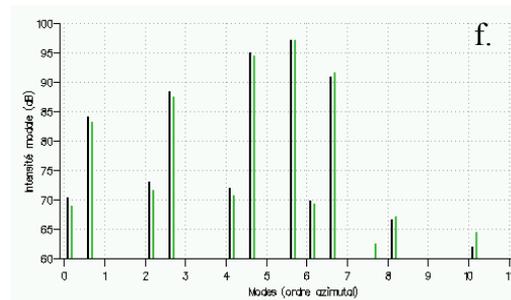
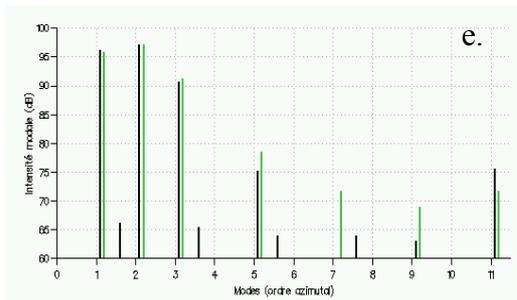
MODE INCIDENT : (5,2)



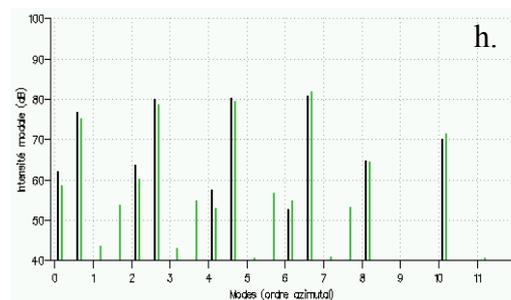
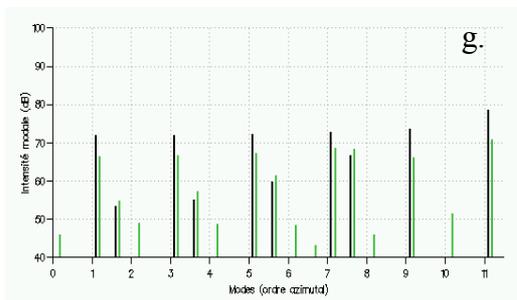
Intensités modales transmises dans le second tronçon annulaire A_2



Intensités modales réfléchies dans le premier tronçon annulaire A_1



Intensités modales transmises dans le tronçon avec bifurcations C



Intensités modales réfléchies dans le tronçon avec bifurcations C

— Modèle analytique BIFIDUCT — ACTI3S

Figure 3.3 : Comparaisons BIFIDUCT-ACTI3S sur la composition du champ transmis et réfléchi dans chaque tronçon de conduit. $k=13$, $M_0=0$, $z^C=1$, $L^C=1$, $L^E=3$.

le diagramme 3.3.b.). La fréquence réduite est $k=13$ et les diagrammes correspondent aux modes incidents (2,1) et (5,2) (intensité incidente : $I_{mn}=100$ dB). Le conduit est entièrement rigide. Dans le cas du calcul analytique, l'intensité des modes transmis et réfléchis dans les différents tronçons est donnée de manière directe par la résolution des équations (3.16). Pour le calcul numérique BEM, il est nécessaire de déterminer d'abord le champ acoustique sur plusieurs sections de conduit puis de procéder à des décompositions modales (voir l'annexe 2).

De nombreuses conclusions peuvent être tirées des diagrammes de la figure 3.3. Tout d'abord, on observe un accord global très satisfaisant entre les résultats des deux méthodes. Les calculs numériques confirment ainsi les hypothèses de base du modèle analytique concernant la parité azimutale des modes transmis et réfléchis dans chacun des tronçons :

1. Dans les parties annulaires, on vérifie que seuls les modes azimutaux de même parité que le mode défini à la source sont excités : les diagrammes a. et c. correspondant au mode incident (2,1) ne font intervenir que des modes d'ordre azimutal pair, tandis que les diagrammes b. et d. correspondant au mode (5,2) combinent des modes d'ordre azimutal impair uniquement.
2. Pour la section centrale avec bifurcations, aucune hypothèse n'est effectuée dans le calcul analytique sur la parité des ordres azimutaux transmis et réfléchis. Les résultats obtenus sont particulièrement intéressants puisque l'on constate qu'en terme de transmission (ondes se propageant vers les z positifs), on retrouve dans cette zone avec bifurcations le mode (m_{inc}, n_{inc}) excité à la source, puis les modes de parité azimutale opposée uniquement (c'est à dire impairs pour le mode incident (2,1) et pairs pour le mode (5,2), à l'exception dans ce cas d'une faible contribution de l'ordre azimutal $m=7$ pour le calcul numérique qui s'explique par la précision limitée de la décomposition modale). Pour les ondes réfléchies à l'extrémité du tronçon avec bifurcations (diagramme g. et h.), on ne trouve que des modes de parité opposée au mode annulaire incident (aux erreurs de décomposition modale près).

L'analyse de la contribution des différents modes en amplitude est également très instructive. Les conclusions suivantes peuvent être formulées :

3. La transmission de l'énergie acoustique incidente dans le tronçon central C puis dans le second tronçon annulaire se fait principalement sur le mode de même ordre (m_{inc}, n_{inc}) que le mode incident. Les modes d'ordre azimutal proche de m_{inc} (au signe près) sont ensuite les plus favorisés (voir par exemple les modes azimutaux $m=3$ et $m=7$ pour le mode incident (5,2), diagrammes b. et f.). Selon les cas, la part d'énergie transmise dans le dernier tronçon sur les modes $(m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc})$ peut être négligeable (diagramme a.), ou relativement importante (diagramme b.). Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.
4. Que ce soit en transmission ou réflexion, et quelle que soit la portion de conduit considérée, l'ordre radial du mode incident est très largement favorisé. Ainsi, pour le mode incident (5,2), on retrouve principalement dans le second tronçon annulaire (diagramme b.) les modes $(\pm 5, 2)$, $(\pm 7, 2)$ et $(\pm 3, 2)$. Seule une part négligeable de l'énergie est redistribuée sur les modes d'ordre radial $n=1$. Nous noterons toutefois que ce phénomène n'est pas du même type que l'exclusion des modes azimutaux de parités différentes. Par le calcul analytique, nous n'obtenons jamais une contribution

strictement nulle des autres ordres radiaux alors que c'est systématiquement le cas pour les ordres azimutaux exclus. Le fait que l'ordre radial incident soit favorisé s'explique simplement par la forme radiale des modes ainsi excités, plus proche de celle du mode incident, et non par des considérations sur la symétrie du problème.

5. De manière générale, la quasi-totalité de l'énergie incidente est transmise à travers les discontinuités de géométrie. Que ce soit dans la première zone annulaire ou dans le tronçon avec bifurcations, la contribution des différents modes réfléchis atteint un maximum de 80 dB environ, ce qui est peu comparé aux 100 dB définis à la source. Cette faible part de l'énergie réfléchie est d'ailleurs la principale explication des différences observées entre les deux méthodes sur le niveau des ondes réfléchies. En effet, il est difficile d'extraire du champ acoustique total la contribution précise de modes se situant 20 à 30 dB en dessous des modes émergents.
6. Enfin, pour les parties annulaires, il est intéressant de noter qu'à l'exception de la transmission sur l'ordre incident (m_{inc}, n_{inc}) dans le dernier tronçon, l'énergie transmise et réfléchie sur les modes $(+m, n)$ et $(-m, n)$ est strictement identique, c'est à dire :

$$\forall(m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc}), \quad |I_{mn}^{2+}| = |I_{-mn}^{2+}| \quad \text{dans le second tronçon annulaire,}$$

$$\forall(m, n), \quad |I_{mn}^{1-}| = |I_{-mn}^{1-}| \quad \text{dans le premier tronçon annulaire.}$$

En conclusion, le phénomène de réflexion dans le premier tronçon est parfaitement symétrique. Ce n'est pas le cas du champ transmis à l'extrémité du conduit, influencé, lui, par le sens de rotation du mode incident.

Ainsi, l'analyse des contenus modaux dans les différentes sections de conduit fournit de nombreux enseignements sur les phénomènes de propagation acoustique dans un conduit avec bifurcations. Comme annoncé précédemment, les comparaisons entre ACTI3S et le code analytique BIFIDUCT ont été effectuées pour trois fréquences, permettant à chaque fois de vérifier l'accord entre les méthodes de calcul. La figure 3.4 présente un exemple de comparaison à $k=27$, portant uniquement sur le contenu modal transmis dans le dernier

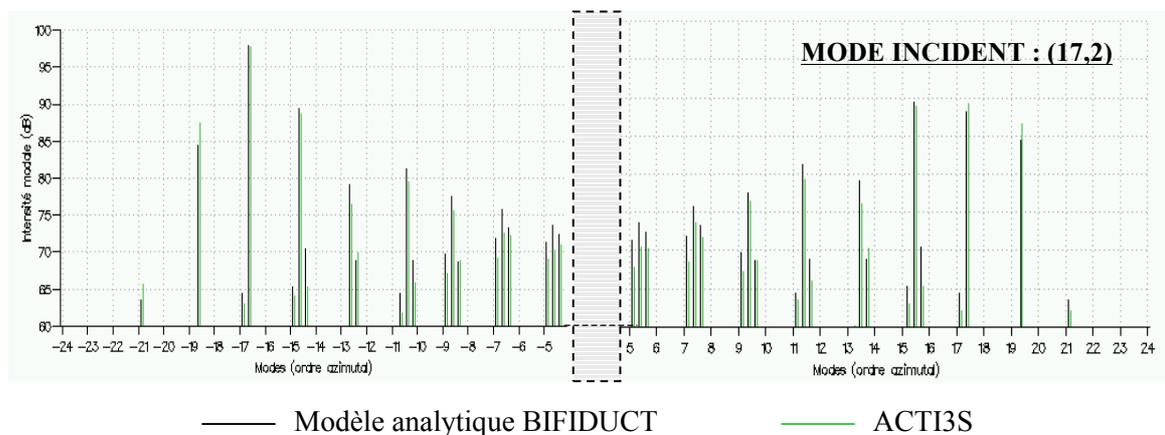


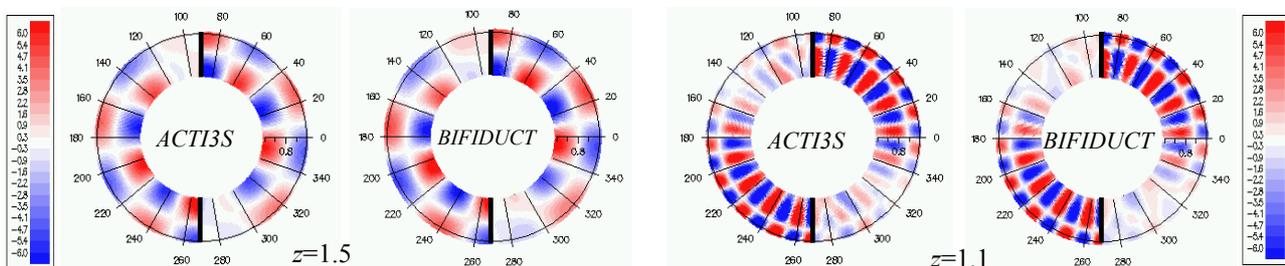
Figure 3.4 : Comparaisons BIFIDUCT-ACTI3S sur la composition du champ transmis dans le second tronçon annulaire A_2 . $k=27$, $M_0=0$, $z^C=0.5$, $L^C=1$, $L^E=2$.

tronçon A_2 . Pour une meilleure lisibilité des résultats, le diagramme a été tronqué entre les ordres azimutaux $m=-5$ et $m=+5$. Outre l'accord entre les deux codes de calcul, on constate que la majorité de l'énergie acoustique transmise à l'extrémité du conduit porte non pas sur le mode incident (17,2) mais sur le mode opposé (-17,2). Aussi, la conclusion du point 3 proposée ci-dessus doit être quelque peu reformulée : en réalité, on vérifie que la transmission dans le dernier tronçon annulaire se fait principalement sur les modes $(\pm m_{inc}, n_{inc})$, plutôt que sur le (m_{inc}, n_{inc}) seulement. Hormis cette précision, toutes les conclusions précédentes restent valables quels que soient la fréquence et le mode incident considérés.

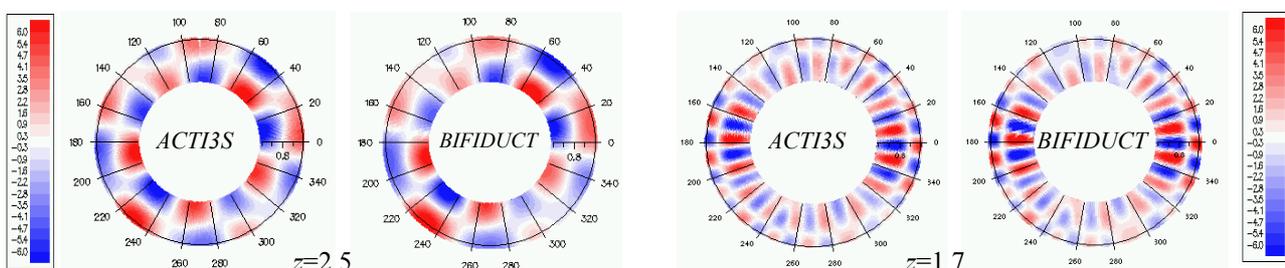
Pour conclure avec les comparaisons entre les méthodes analytique et numérique, on présente sur la figure 3.5 des cartographies de pression obtenues sur des sections du tronçon central C et du second tronçon annulaire A_2 . Sur ce type de résultat, on vérifie une nouvelle fois l'accord entre les deux codes de calcul. Du fait de la contribution de plusieurs modes de conduit, l'allure du champ de pression transmis est relativement complexe. En particulier, on observe de fortes variations d'amplitude selon la coordonnée φ . Dans le cas du tronçon C , des discontinuités du champ acoustique apparaissent de part et d'autre des bifurcations verticales. Malgré tout, comme la contribution du mode incident (au signe de l'ordre azimutal près) est prédominante dans chaque tronçon, certaines caractéristiques de la source restent observables le long du conduit, comme la présence ici du nœud de pression sur un rayon ou le nombre de pseudo-périodes azimutales identifiable à l'ordre azimutal incident. Pour finir, notons que les résultats du calcul numérique confirment l'hypothèse (3.7) du modèle analytique imposant l'égalité des champs en φ et $\varphi+\pi$ au signe près.

$k=13$ – Mode incident (5,2)
 $z^C=1, L^C=1, L^E=3, M_0=0.$

$k=27$ – Mode incident (17,2)
 $z^C=0.5, L^C=1, L^E=2, M_0=0.$



Partie réelle du champ de pression sur une section du tronçon avec bifurcations C .



Partie réelle du champ de pression sur une section du second tronçon annulaire A_2 .

Figure 3.5 : Comparaison BIFIDUCT-ACTI3S sur la partie réelle du champ de pression en une section du tronçon central ou du deuxième tronçon annulaire.

3.3.2 Complément d'analyse en conduit rigide

Afin de décrire de manière plus complète la propagation acoustique dans un conduit avec bifurcations, une étude approfondie a été réalisée à l'aide du code de calcul analytique. Dans un premier temps, pour caractériser l'importance des redistributions modales et mettre en évidence les phénomènes d'inversion de modes, nous avons effectué un calcul de l'intensité transmise, dans la dernière section de conduit, sur le mode (m_{inc}, n_{inc}) défini à la source et son « opposé » $(-m_{inc}, n_{inc})$. La figure 3.6 présente les résultats obtenus pour chaque mode passant aux fréquences $k=20$ et $k=27$. L'abscisse correspond à l'ordre azimutal du mode incident et les modes radiaux sont une nouvelle fois classés entre deux valeurs successives de m . L'intensité totale transmise sur tous les modes est également donnée, permettant de vérifier que toute l'énergie incidente ou presque ($I_{mn}=100$ dB) se retrouve à l'extrémité du conduit. La part d'énergie réfléchi est donc négligeable quel que soit le mode incident.

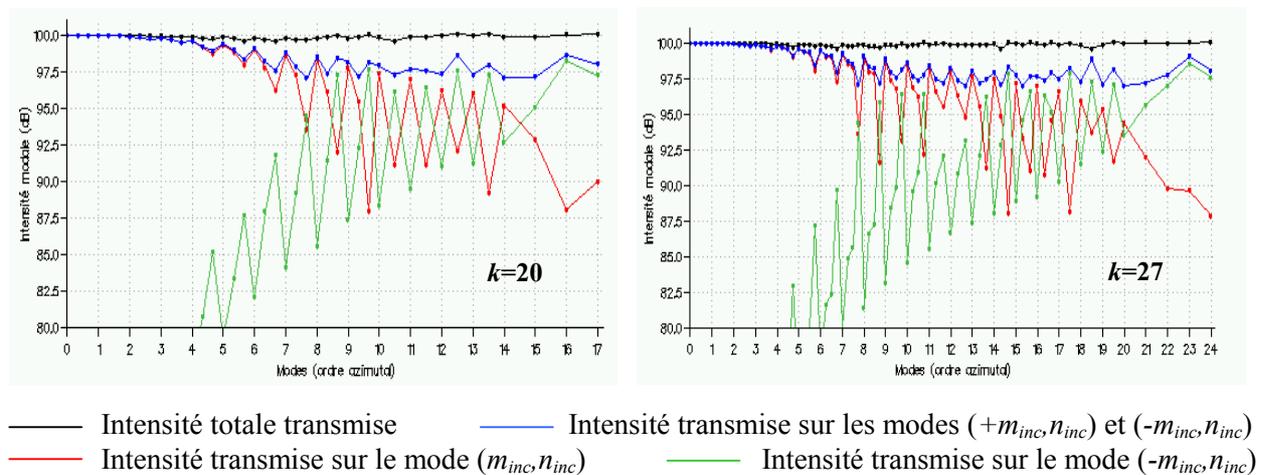


Figure 3.6 : Évolution de l'intensité transmise dans le second tronçon annulaire en fonction du mode incident. $z^C=1$, $L^C=1$, $L^E=3$, $M_0=0$.

L'évolution de l'intensité transmise sur les modes $(\pm m_{inc}, n_{inc})$ en fonction du mode considéré à la source est similaire pour les deux fréquences d'étude. Tout d'abord, pour les faibles ordres azimutaux, toute l'énergie incidente se transmet sur le mode $(+m_{inc}, n_{inc})$ de telle sorte que les bifurcations (en conduit rigide) sont transparentes pour ce type de source. Ensuite, lorsque l'ordre azimutal augmente, on observe une inversion progressive de l'importance des modes $(+m_{inc}, n_{inc})$ et $(-m_{inc}, n_{inc})$, la part de l'énergie transmise sur l'ordre azimutal négatif devenant peu à peu prédominante. L'évolution des courbes en « dent de scie » montre que l'ordre radial influence également la répartition d'énergie entre les modes azimutaux positifs et négatifs. Finalement, il semble que l'angle d'enroulement du mode annulaire incident (voir le paragraphe 1.4.4) soit le facteur déterminant des phénomènes de redistribution et d'inversion modale. Plus la propagation « hélicoïdale » du mode incident fait intervenir une rotation de l'énergie autour du conduit (faible pas d'hélice), plus les bifurcations ont un impact sur la transmission du son, ce qui est tout à fait intuitif.

À la fréquence réduite $k=20$, une analyse similaire de la transmission dans la dernière portion de conduit a été effectuée pour les modes incidents (1,2) et (7,1), en fonction cette fois de la longueur des bifurcations L^C . Les résultats de la figure 3.7 permettent de comprendre la façon dont le son se propage à l'intérieur du conduit et l'origine du phénomène d'inversion modale. En effet, on constate que l'énergie incidente se transmet alternativement, selon L^C , sur les modes d'ordre azimutal positif et négatif, ce qui montre que le champ acoustique se propage le long du tronçon central C en tournant dans un sens puis dans l'autre, au fur et à mesure de sa progression et des réflexions sur les parois radiales. En utilisant une interprétation en termes de rayons acoustiques, on peut donc proposer le schéma de principe de la figure 3.8 pour décrire la propagation dans le conduit BIFIDUCT. Dans le premier tronçon annulaire, l'onde incidente progresse de manière hélicoïdale avec un sens de rotation donné avant de se réfléchir, dans le tronçon central, sur l'une des bifurcations. Le champ réfléchi se propage alors en direction opposée ce qui se traduit par un changement du sens de rotation. Selon le nombre de réflexions subies sur les bifurcations, et donc selon le mode ou la longueur du tronçon intermédiaire, la transmission dans la dernière portion de conduit favorise l'un ou l'autre des deux sens de rotation, c'est à dire l'ordre azimutal $+m_{inc}$ ou $-m_{inc}$.

L'aspect oscillant de l'énergie transmise sur les modes $(+m_{inc}, n_{inc})$ et $(-m_{inc}, n_{inc})$ (figure 3.7, courbe bleue) doit également être souligné. Ce phénomène associé à la demi-longueur d'onde du mode incident caractérise l'importance des redistributions sur les modes $(m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc})$ et montre que celles-ci sont plus ou moins conséquentes selon le rapport entre la longueur d'onde et la longueur des bifurcations.

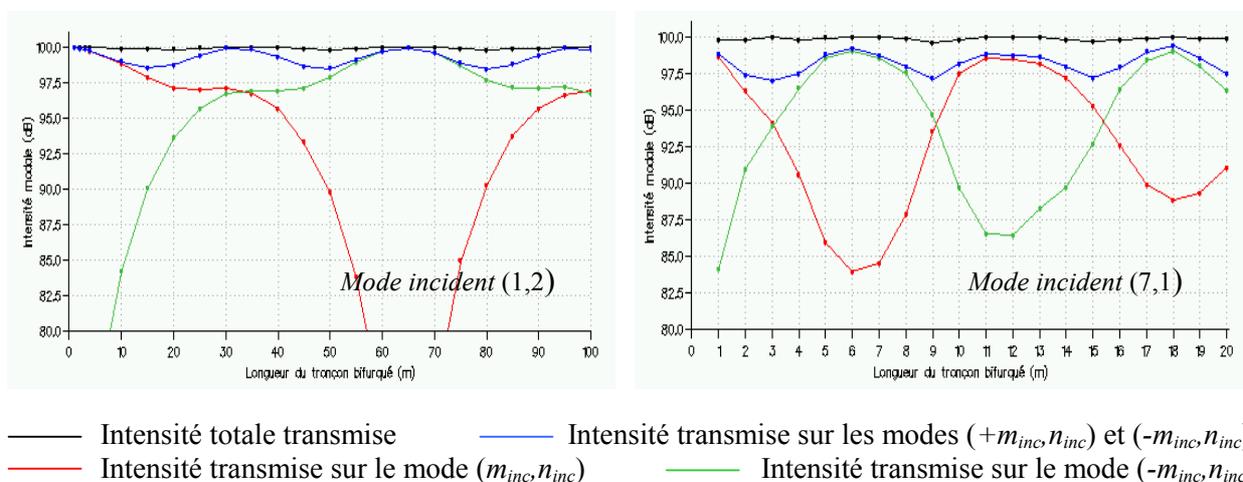


Figure 3.7 : Transmission de l'intensité acoustique dans le second tronçon annulaire en fonction de la longueur des bifurcations, pour un mode incident donné. $k=20$.

La visualisation du champ de pression en différentes sections du tronçon central (figure 3.9) confirme la description de la propagation acoustique proposée sur la figure 3.8. Le cas représenté correspond au mode incident (7,1) à $k=20$, avec des bifurcations de longueur suffisante pour observer deux réflexions successives du champ acoustique sur les parois verticales (réflexions distantes d'environ $L=6$ le long du conduit, cf. demi-période de la figure 3.8). Les flèches accompagnant les cartographies indiquent les sens de rotation successifs du champ sur les différentes sections considérées. Les zones d'ombre (zones bleues) sur les

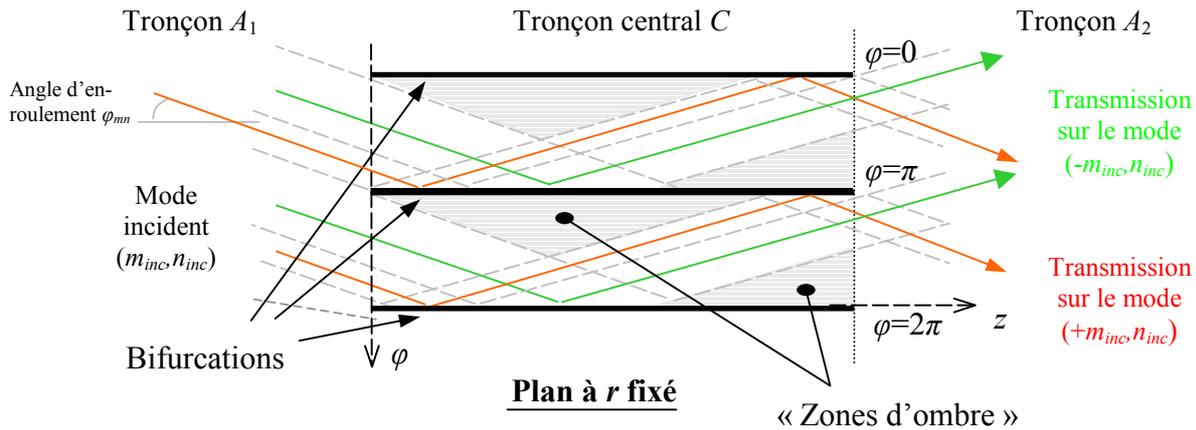


Figure 3.8 : Schéma de principe de la propagation acoustique en conduit BIFIDUCT, par une approche de type « rayons ».

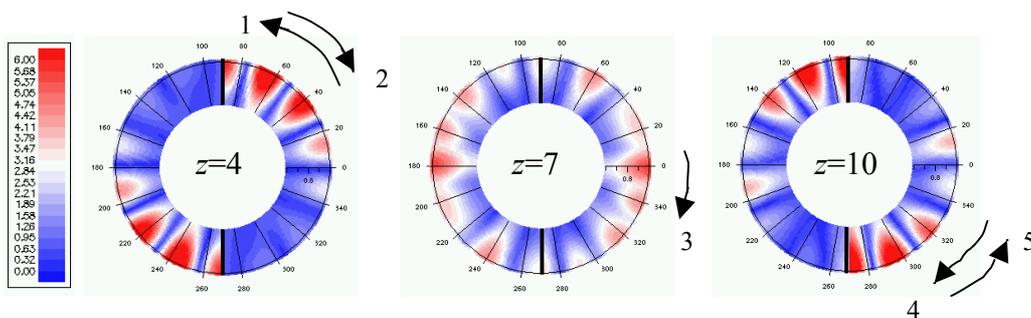


Figure 3.9 : Allure du champ de pression (norme) en différentes sections du tronçon central C, caractérisant les réflexions successives sur les parois de bifurcation. Mode incident : $(7,1)$. $k=20$, $z^C=1$, $L^C=18$, $L^E=20$.

cartographies 3.9.a et 3.9.c correspondent à un masquage du champ incident par les bifurcations qui se répercute ensuite le long du conduit (voir le schéma de la figure 3.8).

Il est important de noter que la rotation du champ acoustique dans le tronçon avec bifurcations n'est pas en contradiction avec la description des modes de conduit en termes d'ondes stationnaires angulaires présentée au paragraphe 3.2.2, ceci pour deux raisons. Tout d'abord, l'analyse du comportement acoustique proposée ci-dessus porte sur le champ total, c'est à dire sur une sommation de modes, ce qui rend possible une rotation selon φ des ventres et nœuds de pression. En particulier, la combinaison de modes est générée pour satisfaire des conditions aux limites particulières de raccordement aux tronçons annulaires, et la rotation du champ dans la portion avec bifurcations peut être comprise comme une sorte d'effet de bord des tronçons annulaires. Par ailleurs, il est tout à fait possible de généraliser aux modes d'un conduit avec bifurcations la description en termes de rayons des modes annulaires proposée au paragraphe 1.4.4. De manière immédiate, la dépendance azimutale stationnaire en $\cos(m\varphi)$ peut être vue comme la contribution de deux ondes tournantes $e^{+im\varphi}$ et $e^{-im\varphi}$ se propageant en sens inverses et impliquant une rotation du champ acoustique.

Pour conclure, si les résultats présentés ci-dessus concernent un mode d'ordre azimutal positif à la source, l'ensemble des conclusions formulées s'applique aussi bien aux modes d'ordre azimutal négatif, le problème étant parfaitement symétrique. À titre d'exemple, la figure 3.10 présente l'allure du champ de pression sur une section du tronçon central, pour les modes incidents (6,2) et (-6,2).

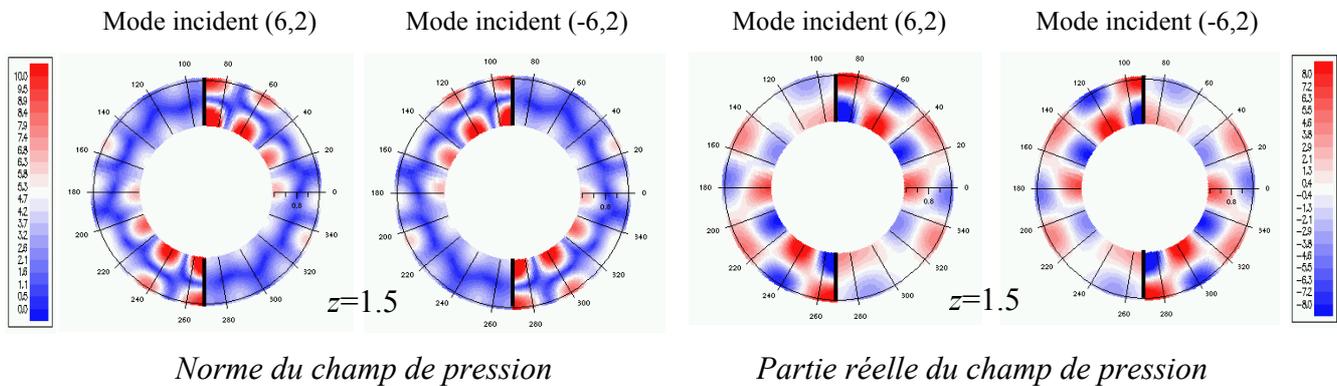


Figure 3.10 : Allure du champ de pression sur une section du tronçon avec bifurcations illustrant la symétrie des problèmes associés aux modes incidents $(+m,n)$ et $(-m,n)$. $k=13$, $z^C=1$, $L^C=1$, $L^E=3$.

3.3.3 Analyse en conduit traité et efficacité des traitements sur bifurcation

Après avoir étudié en détail la propagation du son en conduit rigide, nous nous proposons d'analyser dans ce qui suit les phénomènes liés à la prise en compte de traitements acoustiques dans le conduit de la figure 3.1. En particulier, puisque pour les conduits d'éjection la définition des surfaces traitées et des matériaux absorbants est effectuée actuellement à AIRBUS sur la base de calculs annulaires, le but de l'étude est d'apporter un premier élément de réponse quant à l'efficacité de traitements acoustiques disposés sur les parois des bifurcations. La méthode analytique ne pouvant modéliser ces traitements pour l'instant, seuls des calculs numériques BEM sont présentés dans cette section. Trois zones de traitement sont considérées sur la longueur du tronçon central L^C , correspondant aux parois des bifurcations (4 surfaces), à la paroi du cylindre interne, et à la paroi du cylindre externe. Les deux parties annulaires sont parfaitement rigides. La proportion des différentes surfaces traitées ainsi obtenue est proche de ce qui existe actuellement sur les moteurs réels, bien que la part des bifurcations sur le traitement total soit un peu exagérée dans les calculs présents (bifurcations : 14% de la surface traitée, cylindre externe : 54%, cylindre interne : 32%).

L'efficacité relative des différentes zones de traitement acoustique en fonction du mode incident est présentée sur la figure 3.11, pour les fréquences réduites $k=13$ et $k=27$. L'atténuation, définie comme la différence entre l'intensité incidente et l'intensité transmise au-delà du tronçon traité (tronçon central), est évaluée pour trois cas de figure : seules les bifurcations sont traitées (courbes noires), seuls les cylindres internes et externes sont traités (courbes rouges) et enfin toutes les surfaces du tronçon central sont traitées (courbes vertes). Les résultats sont donnés en terme d'atténuation globale (figures 3.11.a et 3.11.b) et d'atténuation par unité de surface traitée (figures 3.11.c et 3.11.d). Lorsqu'une admittance non nulle est spécifiée sur l'une des zones de traitement, elle est fixée à $\alpha=0.6+i0.2$.

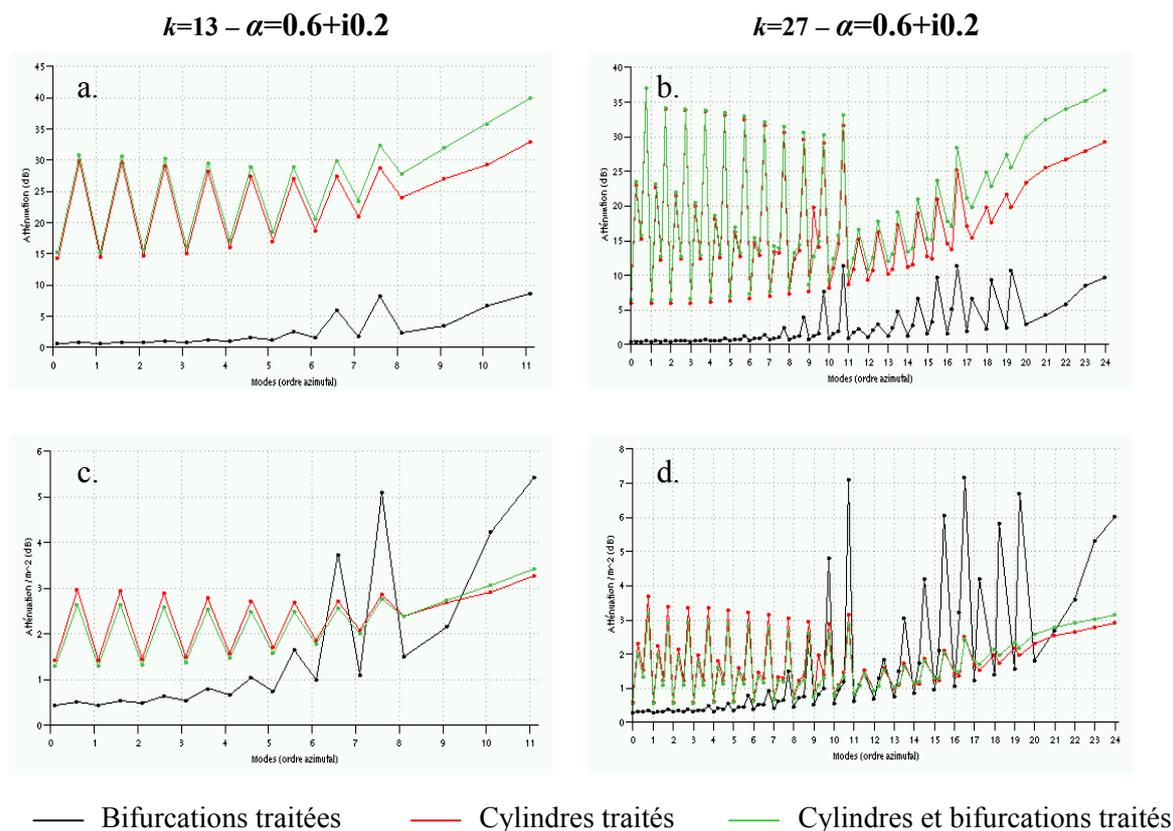


Figure 3.11 : Efficacité relative des traitements acoustiques sur cylindres et bifurcations en fonction du mode incident (calculs ACTI3S). $z^C=0.5$, $L^C=1$, $L^E=3$, $M_0=0$.

Il ressort des figures 3.11.a et 3.11.b que le gain en terme de réduction du bruit associé au traitement des bifurcations est fortement dépendant du mode incident. Pour la majorité des modes, l'ajout d'un matériau absorbant sur les parois verticales n'améliore pas ou peu l'atténuation obtenue par le traitement des cylindres. En revanche, pour certains modes caractérisés par un ordre azimutal ou un taux de coupure élevés, une hausse sensible de l'atténuation devient visible et atteint plus de 5 dB pour les cas les plus favorables. Cette efficacité relative des traitements de bifurcation en fonction du mode incident apparaît plus clairement encore sur les courbes d'atténuation par unité de surface traitée (figures 3.11.c et 3.11.d).

Les courbes d'atténuation obtenues ci-dessus sont compatibles avec l'analyse de la propagation acoustique présentée précédemment. En particulier, les modes affectés par un traitement sur bifurcation sont ceux pour lesquels une part importante de l'énergie incidente se réfléchit sur les parois verticales au vu de l'angle de propagation équivalent. Cette interprétation est confirmée par l'analyse du contenu modal transmis au-delà des traitements acoustiques, dans le second tronçon annulaire (figure 3.12). En effet, pour chaque mode considéré à la source, la composition du champ transmis est caractéristique du chemin suivi par les ondes sonores dans le tronçon central C :

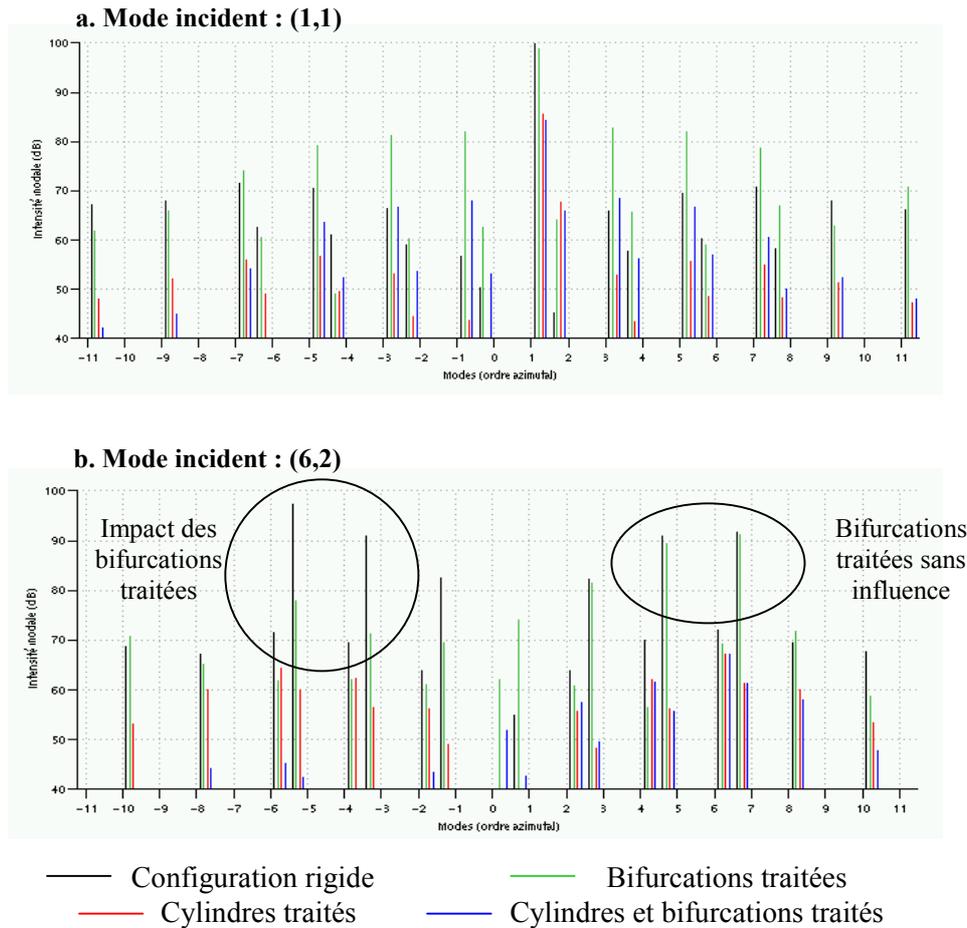


Figure 3.12 : Composition du champ transmis au delà du tronçon central, en présence de traitements acoustiques (ACTI3S). $k=13$, $M_0=0$, $z^C=0.5$, $L^C=1$, $L^T=2$, $\alpha=0.6+i0.2$.

- Les modes se propageant avec un faible angle d'enroulement autour du conduit (mode (1,1), figure 3.12.a) ne rencontrent quasiment pas les bifurcations : dans ce cas, l'influence des traitements acoustiques sur les parois verticales est négligeable. Par ailleurs, on observe que la symétrie de la transmission sur les mode $(+m,n)$ et $(-m,n)$ (autre que le mode incident) est à peu près conservée.
- À $k=13$ et pour la longueur de tronçon central considérée, les modes caractérisés par les angles d'enroulement les plus élevés (mode (6,2), figure 3.12.b) sont tels que la majeure partie de l'énergie provenant du premier tronçon annulaire se réfléchit sur l'une des parois verticales une seule et unique fois avant de repartir en sens inverse et sortir du tronçon central. En conséquence, la transmission sur le mode inverse $(-m_{inc}, n_{inc})$ est influencée par le traitement sur les bifurcations, mais le champ incident transmis sur le mode (m_{inc}, n_{inc}) , qui, lui, traverse la zone des bifurcations sans réflexion sur les parois verticales, se trouve équivalent à ce que l'on obtient en conduit rigide. Notons que ce phénomène d'atténuation plus importante sur l'ordre azimuthal négatif est visible également pour les modes transmis $(m,n) \neq (m_{inc}, n_{inc})$: ceci, en revanche, est beaucoup plus délicat à interpréter en termes de rayons...

Ces observations restent valables dans les configurations avec traitement sur cylindres interne et externe : lorsque les bifurcations sont supposées rigides (données rouges), la symétrie de la transmission sur les ordres azimutaux positifs et négatifs (hormis le mode incident) est conservée ; dans le cas contraire (bifurcations traitées, données bleues), les ordres azimutaux de signe opposé à l'ordre incident sont plus atténués. L'ensemble de ces résultats amène à conclure que pour un sens de rotation donné des modes incidents dans la première partie annulaire (qui peut être lié au sens de rotation de la soufflante sur les moteurs réels), l'efficacité d'un traitement acoustique n'est pas la même sur les deux faces des bifurcations. En conséquence, il est préférable, si nécessaire, de favoriser la face offerte initialement à l'incidence des modes annulaires selon φ .

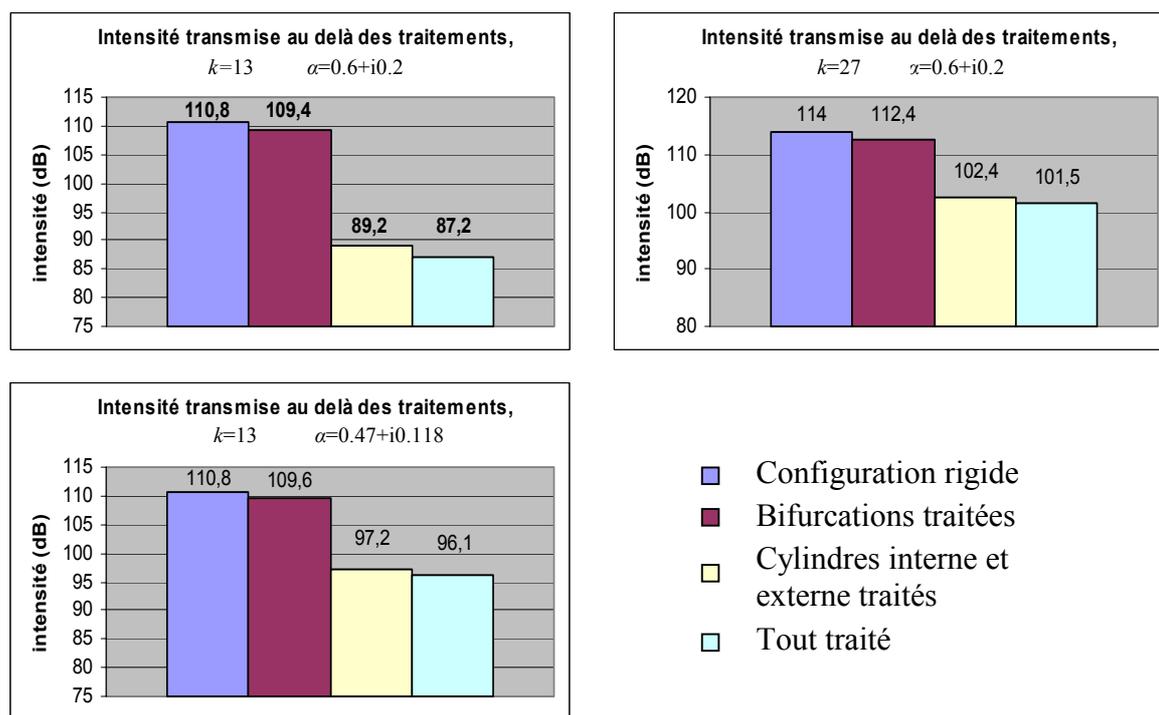


Figure 3.13 : Intensité transmise au-delà du tronçon central en présence de traitements acoustiques et pour un champ incident multimodal (ACTI3S). $z^C=0.5$, $L^C=1$, $L^T=2$, $M_0=0$.

Pour conclure avec l'analyse de l'impact des traitements acoustiques dans un conduit avec bifurcations, l'atténuation obtenue pour un champ incident multimodal (hypothèse d'équi-répartition de l'énergie sur les modes azimutaux) est illustrée sur la figure 3.13. Deux valeurs de l'impédance sont considérées à $k=13$, une à $k=27$. Sur ces diagrammes, l'efficacité des bifurcations traitées est peu convaincante comparée à celle des traitements sur cylindres, même si cette impression doit être quelque peu modulée du fait des surfaces traitées correspondantes.

En résumé, nous retiendrons que les traitements acoustiques disposés sur les parois des bifurcations peuvent conduire à un gain d'atténuation important si l'énergie incidente est transportée par un mode à fort taux d'enroulement autour du conduit (ce qui peut être le cas pour le mode d'indice égal au nombre de pales sur la raie du BPF). En revanche, dans le cas d'une source multimodale, le potentiel de réduction de bruit est beaucoup plus limité.

3.3.4 Rayonnement d'un conduit avec bifurcations et corps central long

Dans cette section qui clôt l'étude sur les conduits de géométrie simplifiée comportant des bifurcations, quelques résultats concernant le rayonnement acoustique de la configuration de la figure 3.14 sont présentés. Les calculs sont à nouveau réalisés à l'aide du code ACTI3S. Après une première section annulaire, les bifurcations, d'épaisseur négligeable, s'étendent jusqu'à la section de sortie (ce qui est le cas pour les moteurs réels, la bifurcation supérieure se prolongeant par ailleurs dans le mât-réacteur, voir l'introduction). Le corps central, très long, est choisi pour permettre une comparaison avec le rayonnement des conduits annulaires considérés aux chapitres 1 et 2. Une nouvelle fois, différentes zones de traitement sont définies dans la partie de conduit avec bifurcations, sur une longueur $L^T=1.5$. Les autres données géométriques sont indiquées sur la figure 3.14.

Rappelons que, outre la simplification géométrique effectuée, l'influence d'éléments hors conduit comme le mât-réacteur ou l'aile n'est pas considérée dans le modèle de la figure 3.14. Cette étude, qui s'inscrit dans notre démarche d'analyse progressive, permet donc de caractériser l'influence sur le rayonnement des bifurcations uniquement, bien que les éléments extérieurs soient susceptibles d'apporter une modification supplémentaire (l'influence du mât-réacteur est étudiée sur une géométrie réaliste au paragraphe 3.4.3).

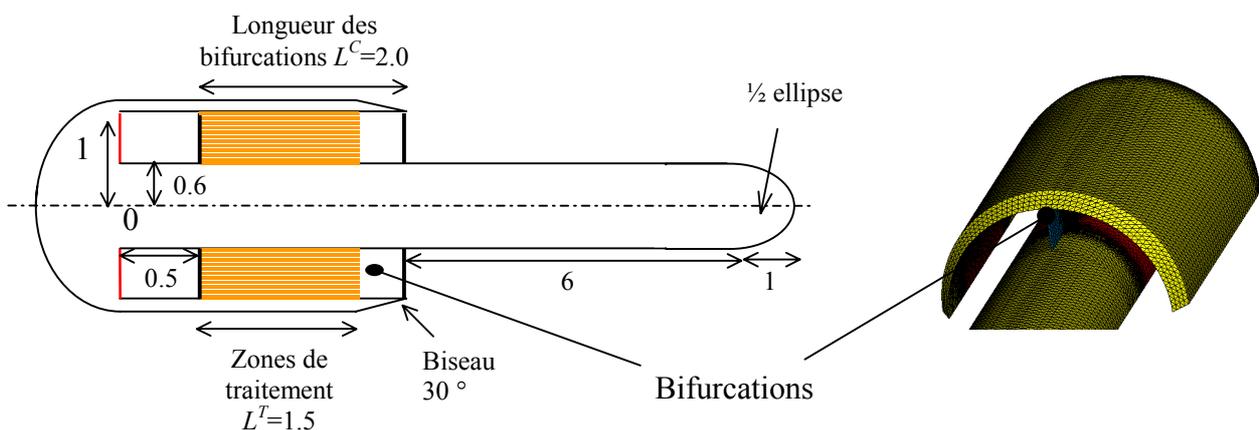


Figure 3.14 : Géométrie considérée pour l'étude du rayonnement acoustique d'un conduit « de forme analytique », avec bifurcations (coupe sur le plan des bifurcations et maillage BEM).

De manière prévisible, l'une des conséquences principales de la présence des bifurcations est la perte de symétrie axiale du rayonnement acoustique. Les cartographies de pression en champ lointain, sur une calotte sphérique centrée sur la section de conduit, illustrent ce phénomène (figure 3.15). Les rayonnements correspondant aux conduits rigides annulaire ou avec bifurcations sont comparés pour trois modes incidents à $k=11$ (voir la liste des modes passants au chapitre 2, page 85). Bien entendu, l'écart entre les deux configurations géométriques augmente avec l'importance des redistributions modales dans le conduit, ce qui se traduit, en présence des bifurcations, par un champ de plus en plus perturbé entre les modes (1,1) et (7,1) (bien qu'une propriété de symétrie centrale soit conservée).

Les diagrammes de rayonnement présentés sur la figure 3.16 permettent de préciser l'analyse. Les directivités obtenues avec bifurcations pour trois directions azimutales différentes sont comparées au rayonnement annulaire. Les conclusions suivantes peuvent être formulées :

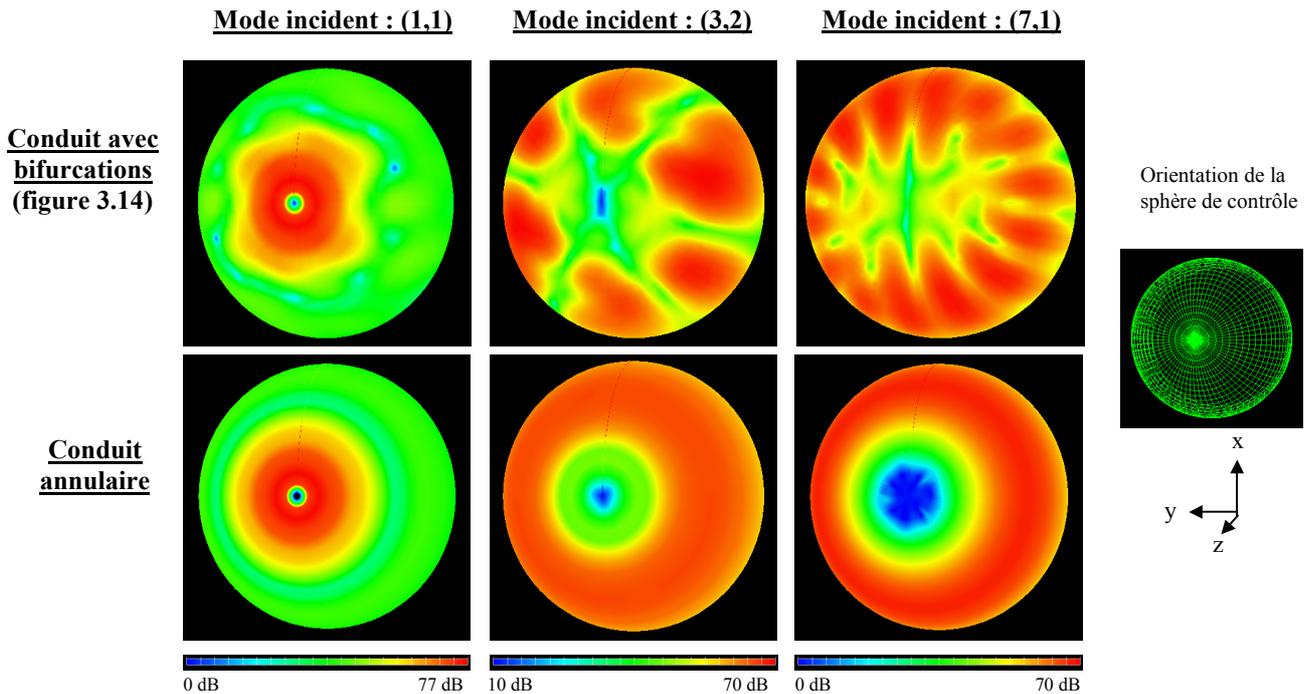


Figure 3.15 : Rayonnement (SPL) en champ lointain sur une calotte sphérique centrée sur la section de sortie. Comparaison entre les conduits annulaire et avec bifurcations. $k=11$, $M_0=0$, $R_{ec}=46$, configuration rigide.

- Le rayonnement sur le plan vertical avec bifurcations est strictement identique au rayonnement de la géométrie annulaire correspondante (courbes rouges et noires). Compte tenu de la modification du contenu modal aux discontinuités de géométries, ce résultat peut paraître surprenant mais s'explique en fait en exploitant les résultats du modèle analytique BIFIDUCT. En effet, dans le second tronçon annulaire, la symétrie des redistributions d'énergie sur les ordres $\pm m$ (cf. page 161) assure une contribution nulle des modes $(m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc})$ sur le plan des bifurcations :

$$\forall (m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc}), \quad |A_{mn}^{2+}| = |A_{-mn}^{2+}| \text{ de sorte que :} \\ p_{mn}^{A_2,+} = A_{mn}^{2+} F_{mn}(k_r, r) e^{ik_{-mn}^+ z} \sin(m\varphi), \quad \text{c'est-à-dire:} \quad p_{mn}^{A_2,+}(\varphi = 0, \varphi = \pi) = 0. \quad (3.17)$$

Ici, il n'existe pas de deuxième tronçon annulaire mais par extension, nous admettons que la transmission acoustique du tronçon avec bifurcations au champ libre obéit à des règles similaires, le plan des bifurcations correspondant à un nœud de pression pour les modes $(m, n) \neq (m_{inc}, n_{inc})$. Toutefois, l'absence de contribution des modes de redistribution en $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$ n'explique pas l'égalité des niveaux observée sur la figure 3.16 (courbes noires et rouges). Sans rentrer dans le détail, on peut en fait vérifier par le modèle analytique BIFIDUCT que la transmission sur les modes $(\pm m_{inc}, n_{inc})$ dans le tronçon A_2 se fait de telle sorte que, sur le plan des bifurcations, l'amplitude du champ transmis est égale à l'amplitude incidente.

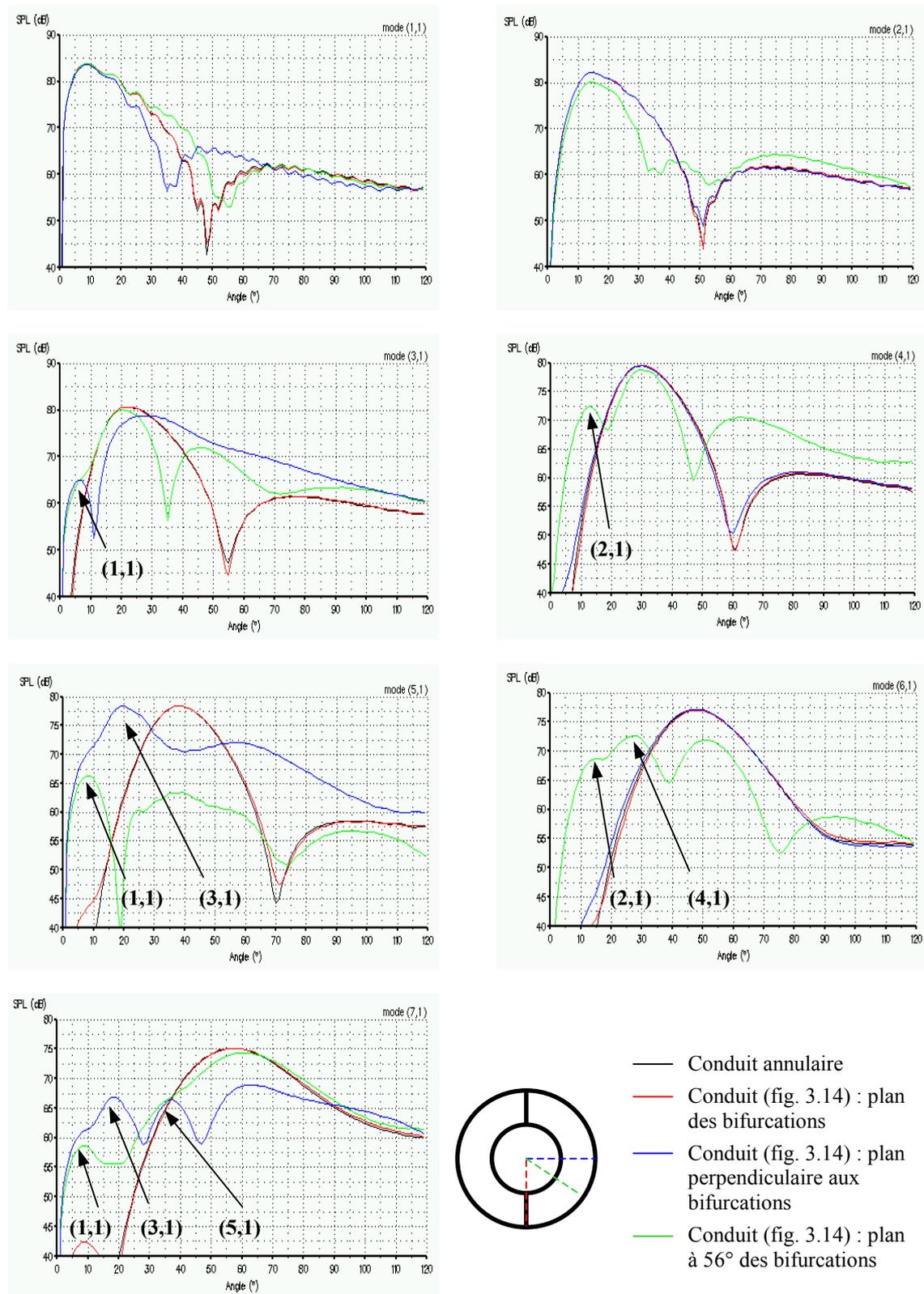


Figure 3.16 : Comparaison des rayonnements en champ lointain pour un conduit annulaire et pour trois positions azimutales du conduit avec bifurcations. $k=11$, $M_0=0$, $R_{ec}=20$, configuration rigide. La contribution des modes de redistribution est soulignée sur les diagrammes par les flèches.

- Dans le plan horizontal (courbes bleues), le rayonnement obtenu en présence des bifurcations est identique à celui du conduit annulaire pour les modes azimutaux pairs et diffère pour les modes impairs. Ceci s'explique par le même type de considération que précédemment.
- Enfin, dans les cas où le rayonnement de la configuration avec bifurcations diffère de celui de la configuration annulaire (plan à 56° , plan horizontal avec mode incident impair), il est possible de distinguer sur le champ lointain les contributions des modes de même parité azimutale que l'ordre incident. Ces contributions sont indiquées sur la figure 3.16 et se retrouvent en analysant la position des nouveaux lobes.

Pour finir, en complément de l'étude sur l'efficacité des différentes zones de traitement (section 3.3.3), la figure 3.17 présente quelques diagrammes de rayonnement obtenus en conduit traité, pour une source définie par une équi-répartition d'énergie sur les modes radiaux passants. Les résultats sont donnés dans le plan des bifurcations, à $k=13$ et pour les deux valeurs d'impédance déjà considérée sur la figure 3.13. Ils confirment le faible bénéfice des traitements sur bifurcation pour les sources à contenu multimodal.

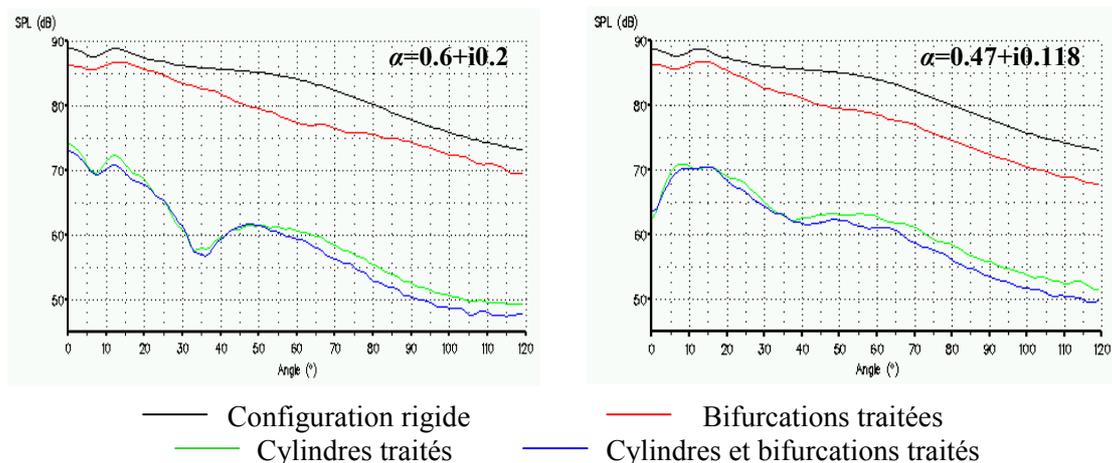


Figure 3.17 : Rayonnement d'un conduit avec bifurcations pour différentes zones de traitement. Source multimodale (équi-répartition sur les modes radiaux). $k=13$, $M_0=0$, plan des bifurcations.

3.4 Progression vers la prise en compte d'une géométrie réaliste

Bien que la géométrie simplifiée considérée au paragraphe précédent soit relativement éloignée de la forme réelle d'une éjection de turboréacteur, l'étude des phénomènes associés à une telle structure était indispensable pour isoler et comprendre l'influence des bifurcations sur la propagation acoustique. Fort des enseignements tirés de ce modèle analytique, il est maintenant possible de poursuivre l'analyse des caractéristiques géométriques des conduits d'éjection. Dans ce dernier paragraphe, en utilisant la méthode intégrale BEM, nous nous proposons d'étudier les facteurs suivants : influence sur la propagation acoustique de l'épaisseur des bifurcations et des fortes variations de section le long du conduit, impact sur le

rayonnement de la forme réelle du « corps central extérieur » (prolongement du conduit primaire, cône...), des bifurcations puis du mât. À l'exception de la première analyse portant sur l'épaisseur des bifurcations, l'étude est effectuée sur une géométrie dérivée d'un moteur réel volant actuellement sur des avions de type long courrier.

3.4.1 Influence de la forme réelle des bifurcations sur la propagation acoustique

Suivant notre démarche d'analyse progressive, nous nous proposons dans un premier temps d'évaluer l'impact d'une forme réaliste des bifurcations sur les redistributions modales mises en évidence précédemment. La figure 3.18.a présente les coupes longitudinales des bifurcations supérieure (jaune) et inférieure (rouge) à l'intérieur d'une nacelle réelle. Afin de dissocier les paramètres que sont la forme réelle des bifurcations et la variation de section du conduit, les bifurcations ont été extraites et insérées dans un conduit canonique de rapport de rayon constant $h=0.6$ (figure 3.18.b), en respectant grossièrement les épaisseurs relatives. Pour un mode incident donné, le contenu modal du champ transmis à l'extrémité du conduit est analysé et comparé aux résultats du modèle BIFIDUCT (figures 3.18.c et 3.18.d). Outre la caractérisation de l'influence de la largeur des bifurcations, le but de l'étude est de déterminer la pertinence ou les limitations du modèle géométrique analytique.

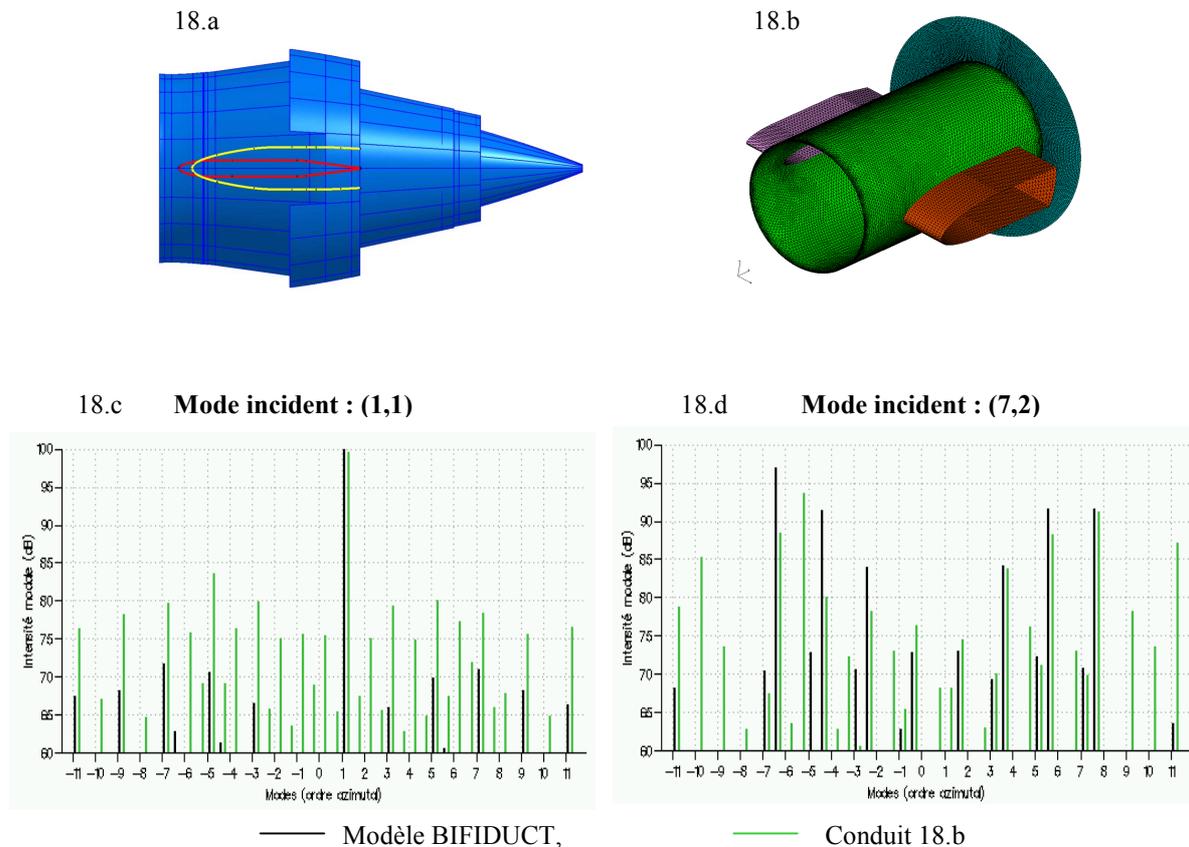


Figure 3.18 : Impact de l'épaisseur des bifurcations sur les redistributions. 18.a : coupes des bifurcations réelles sur une nacelle de moteur ; 18.b : conduit canonique avec bifurcations épaisses ; 18.c et 18.d : comparaison des contenus modaux à l'extrémité des conduits 18.b et analytique (BIFIDUCT), modes incidents (1,1) et (7,2), $k=13$, $M_0=0$.

Les diagrammes de la figure 3.18 permettent de tirer les conclusions suivantes pour ce qui est de la configuration avec bifurcations réalistes :

- les redistributions modales dans le conduit sont plus importantes que pour la géométrie du modèle analytique,
- la composition du champ transmis au-delà des bifurcations est particulièrement complexe, la parité azimutale des modes excités ne correspondant plus forcément à celle du mode incident,
- enfin, les transmissions sur les modes (m,n) et $(-m,n)$ (autres que le mode incident) ne sont plus identiques.

Les différences entre les configurations avec bifurcations fines et épaisses augmentent bien entendu avec l'ordre du mode incident, ou plus certainement avec son « taux d'enroulement » autour du conduit. Ainsi, dans le cas du mode (1,1), l'influence des bifurcations sur la propagation acoustique étant relativement faible, la prise en compte d'une épaisseur ne modifie pas sensiblement le champ transmis à l'extrémité du conduit. Pour le mode (7,2) en revanche, les contenus modaux obtenus avec les deux configurations sont très différents, le mode émergeant (-6,2) avec bifurcations réalistes ne correspondant même plus à l'ordre du mode incident (7,2) (au signe près). La perte de la périodicité du problème en $\varphi=\pi$, les longueurs légèrement différentes des bifurcations supérieure et inférieure et la variation de leurs épaisseurs le long du conduit constituent très certainement les raisons principales d'une modification si importante du champ transmis. L'une des conséquences, malheureusement, est que l'extrapolation des résultats du code analytique à une géométrie plus réaliste semble délicate. Aussi, pour analyser plus précisément la pertinence du modèle BIFIDUCT, il serait intéressant de réaliser une étude plus approfondie portant sur différentes épaisseurs de bifurcations et de déterminer ainsi une épaisseur limite en dessous de laquelle les prédictions du modèle analytique sont acceptables. En effet, de nouvelles configurations de nacelles considérant des bifurcations ne jouant plus un rôle de support et donc plus fines sont actuellement à l'étude au sein d'AIRBUS. Pour ce type d'installation, le modèle analytique pourrait alors s'avérer plus pertinent.

3.4.2 Analyse pour une géométrie réaliste sans bifurcation

Comme annoncé précédemment, nous allons maintenant nous intéresser aux phénomènes de propagation et de rayonnement associés à une géométrie réaliste d'éjection. Dans un premier temps, une étude sans bifurcation est effectuée afin de caractériser l'influence des variations de section le long du conduit et analyser le rayonnement d'une géométrie plus réaliste par rapport au modèle analytique avec corps central infini (chapitre 1).

La géométrie considérée est celle de la figure 3.18.a. Elle apparaît également, en coupe, sur les champs proches de la figure 3.19 qui permettent de visualiser la forme du conduit secondaire. Notons que la géométrie considérée est quasiment axisymétrique, seul un léger plat existant sur le bas de la nacelle. Contrairement aux configurations annulaires étudiées jusqu'ici avec ou sans bifurcation, il existe de fortes variations de section le long du conduit, notamment au niveau de la bosse recouvrant les étages de turbine de l'éjection chaude (figure 3.19). À titre d'exemple, dans notre cas, les rapports de rayon sur la surface source (située après les redresseurs) et la section de sortie sont respectivement $h\sim 0,59$ et $h\sim 0,75$. En

conséquence, l'ensemble des modes passants à une fréquence donnée varie le long du conduit, ce qui implique une modification du contenu modal entre la source et la section de sortie rayonnante. On peut alors se demander si seuls des phénomènes de coupure modifient la composition du champ acoustique ou si les variations de géométrie sont susceptibles de redistribuer elles-mêmes l'énergie incidente sur différents modes.

Le tableau 3.2 fournit la liste des modes passants à $k \sim 25.1$ sur la surface source et la section de sortie. Pour différents modes incidents, le tableau 3.3 présente le contenu modal transmis à l'extrémité du conduit. L'analyse est effectuée en négligeant les ondes réfléchies (pas de dissociation des champs incident et réfléchi). Les résultats sont indiqués pour les modes d'ordres azimutaux $m=0$, $m=5$, $m=10$ et $m=15$.

Surface source	Section de sortie
$m=0$ à 8 : 4 modes radiaux $m=9$ à 14 : 3 modes radiaux $m=15$ à 18 : 2 modes radiaux $m=19$ à 23 : 1 mode radial	$m=0$ à 10 : 3 modes radiaux $m=11$ à 21 : 2 modes radiaux $m=22$ à 25 : 1 mode radial

Tableau 3.2 : Liste des modes passants sur la surface source et la section de sortie du conduit. $k \sim 25.1$, $M_0=0$.

		Contenu modal en sortie (intensité, dB)			
		(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
Mode incident (intensité 100dB)	(0,1)	99.8	74.2	92.8	Mode coupé
	(0,2)	88.6	98.7	96.1	
	(0,3)	92.3	97.1	95.1	
	(0,4)	71.7	82.0	78.7	
		(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)
	(5,1)	100	82.6	90.2	Mode coupé
	(5,2)	85.6	98.7	95.7	
	(5,3)	92.1	96.5	95.5	
(5,4)	78.3	83.2	80.6		

		Contenu modal en sortie (intensité, dB)		
		(10,1)	(10,2)	(10,3)
	(10,1)	99.8	92.7	86.7
	(10,2)	94.0	99.2	85.3
	(10,3)	88.2	93.1	88.1

		(15,1)	(15,2)	
		(15,1)	100	92.7
	(15,2)	94.0	99.2	

Tableau 3.3 : Contenu modal transmis à l'extrémité du conduit pour différents modes incidents (donné en intensité transmise). $k \sim 25.1$, $M_0=0$.

La géométrie étant quasiment axisymétrique, nous avons vérifié que l'ordre azimutal du mode incident se conserve le long du conduit et c'est pourquoi seules les transmissions sur les modes de même ordre azimutal sont données ci-dessus. En revanche, les valeurs des tableaux 3.3 mettent en évidence des redistributions d'énergie sur les différents modes radiaux passants : les variations de section sur une géométrie réaliste sont suffisamment importantes pour modifier la composition du champ acoustique le long du conduit. Ce résultat

constitue un nouvel argument en faveur de l'utilisation des outils numériques pour la prédiction du bruit rayonné par les conduits d'éjection, puisque même les méthodes analytiques fondées sur l'approche des échelles multiples en conduit lentement variable ([113], voir le paragraphe 1.1) ne peuvent modéliser de tels phénomènes. En analysant plus en détail les résultats du tableau 3.3, on constate que l'importance des redistributions augmente avec l'ordre radial du mode incident : les modes d'ordre $n=3$ sont particulièrement affectés, leur énergie étant transmise majoritairement sur les modes d'ordre $n=2$. Ceci s'explique probablement par le fait que ce type de modes est plus sensible aux fortes variations de géométrie du corps central (voir la répartition de l'énergie modale sur la hauteur du conduit page 28).

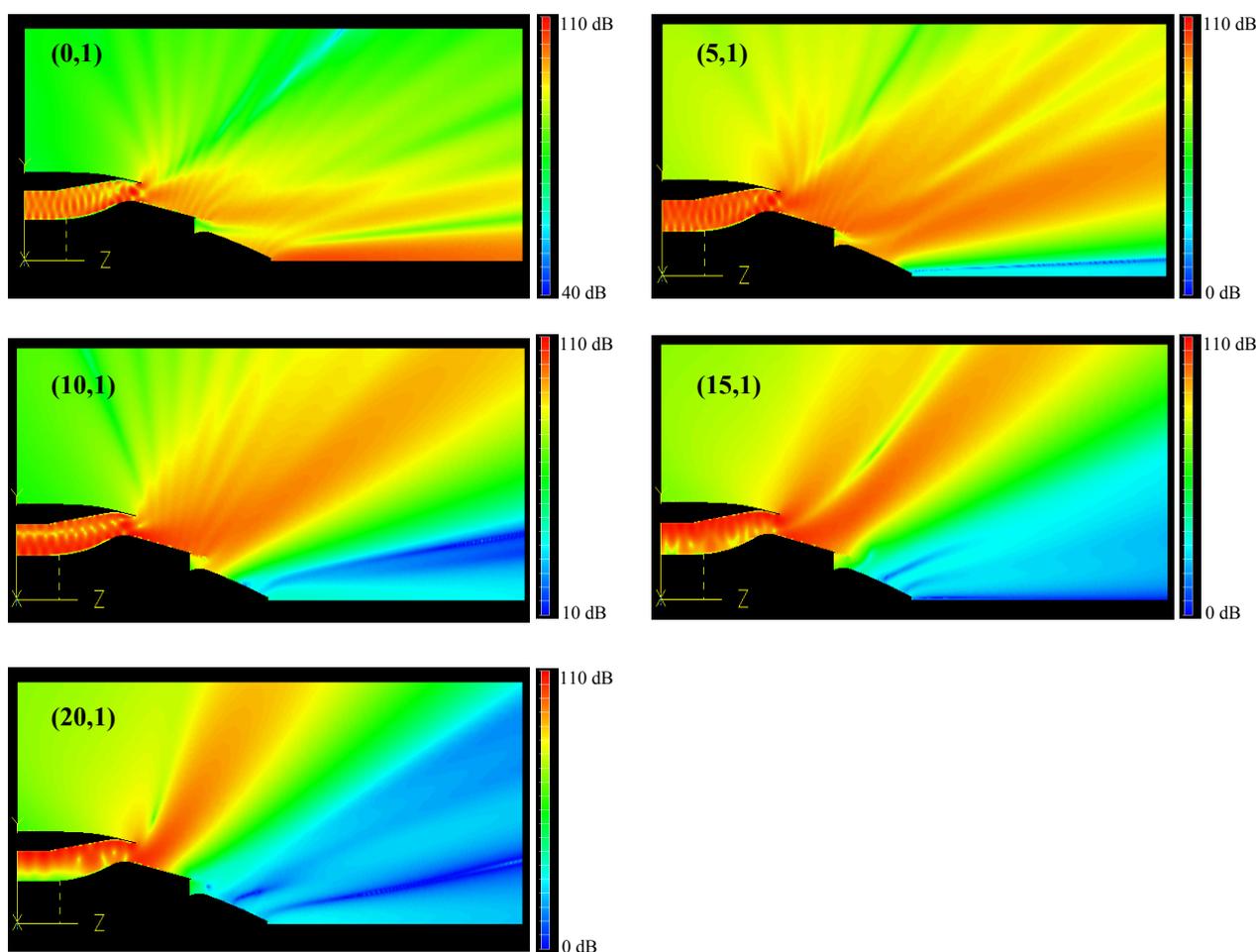


Figure 3.19 : Cartographies locales du champ (pression, SPL) pour différents modes incidents. $k \sim 25.1$, $M_0 = 0$.

Outre les conséquences sur la propagation acoustique à l'intérieur du conduit, la prise en compte d'une géométrie réaliste se traduit évidemment par un rayonnement plus complexe que celui modélisé par les méthodes analytiques. Les cartographies du champ acoustique au voisinage de l'éjection (figure 3.19) offrent un aperçu de la façon dont le conduit primaire et le cône peuvent influencer le rayonnement de l'éjection froide. Hormis pour les modes dont le rayonnement est dirigé vers les angles élevés, sur les côtés de la nacelle, on observe de nombreuses interférences, sous forme de stries (modes (0,1), (5,1), (10,1)), entre le champ

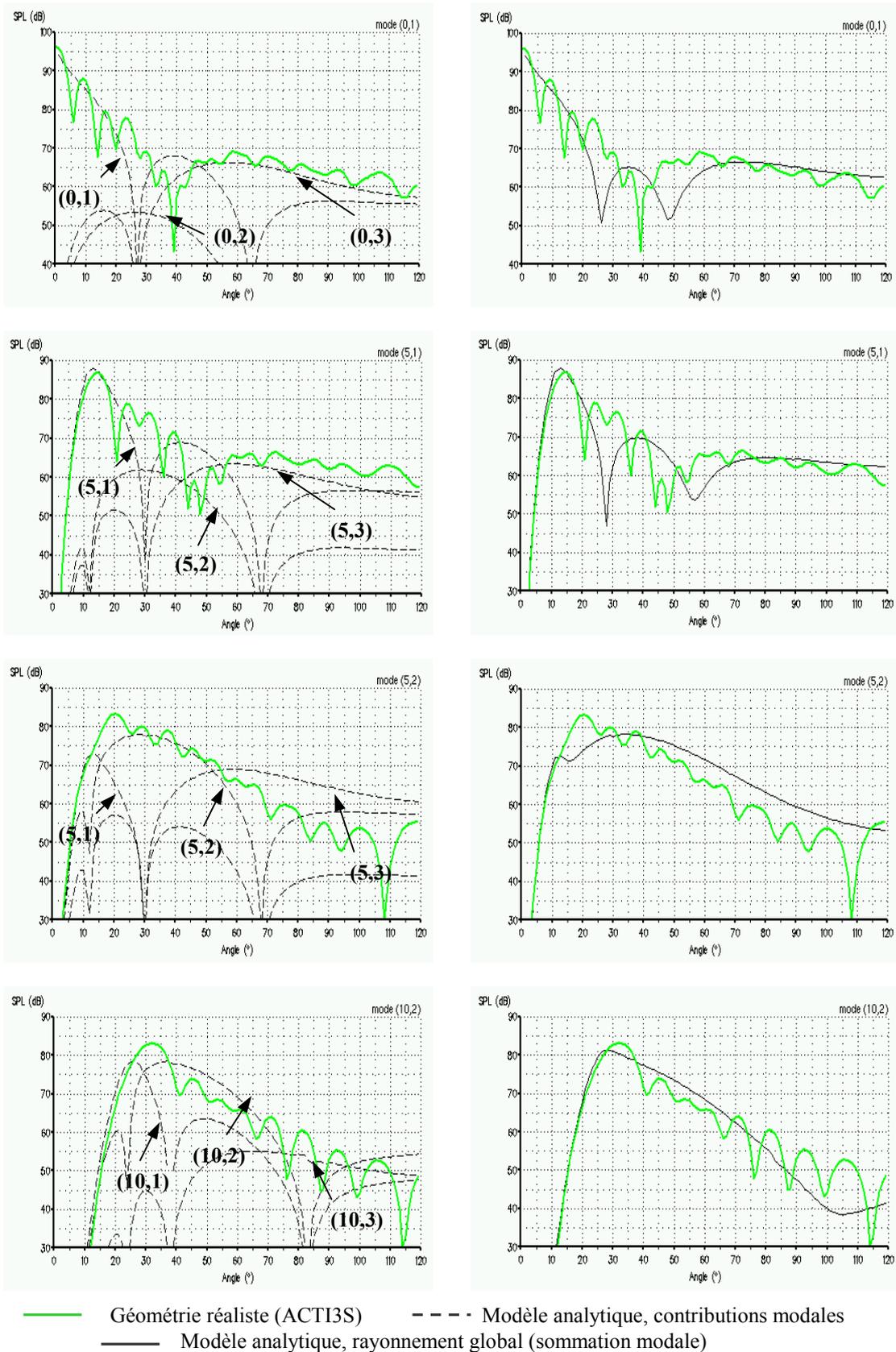


Figure 3.20 : Rayonnements en champ lointain pour les géométries réaliste et analytique (à gauche : contribution des modes transmis sur la section de sortie, à droite : sommation sur ces modes). $k \sim 25.1$, $M_0 = 0$, $R_{ec} = 20$.

principal issu du conduit secondaire et les champs réfléchis sur le corps central ou diffractés par le bord de fuite du conduit primaire et l'extrémité du cône (pour le mode (0,1)). Ces interférences laissent supposer l'existence de directivités en champ lointain irrégulières, ce que confirment les courbes de la figure 3.20. Les rayonnements obtenus pour quatre modes incidents sont donnés à titre d'exemple. Afin d'évaluer la pertinence du modèle analytique avec corps central infini, des comparaisons sont effectuées avec le code de calcul MADIWHAX (le rapport de rayon analytique est défini à partir de la section de sortie de l'éjection réaliste). Sur les graphes de gauche, le rayonnement de la géométrie réelle est juxtaposé à celui obtenu analytiquement pour chacun des modes transmis sur la section de sortie, en tenant compte des amplitudes calculées par la décomposition modale du champ acoustique (cf. tableaux 3.3). À droite, les différentes contributions modales ont été sommées, phase incluse, pour obtenir un rayonnement analytique global à comparer au résultat de la géométrie réelle.

En procédant de la sorte, on parvient à retrouver par le calcul analytique les grandes lignes de la directivité en champ lointain. En effet, à l'exception du mode (5,2), les comparaisons sont relativement satisfaisantes, les différences se résumant principalement aux oscillations observées pour la configuration réaliste, liées aux interférences. Ainsi, connaissant la composition du champ acoustique à l'extrémité du conduit, il est possible de faire une estimation relativement propre du champ lointain par un calcul analytique (d'autant que pour les modes d'ordre azimutal élevé qui rayonnent latéralement, les différences entre calculs numériques et analytiques disparaissent). Nous insistons toutefois sur le fait que la détermination du champ transmis sur la section de sortie est absolument indispensable, puisque même pour une source multimodale en sommation RMS, on ne peut retrouver précisément le rayonnement réaliste sans cette analyse préliminaire (figure 3.21).

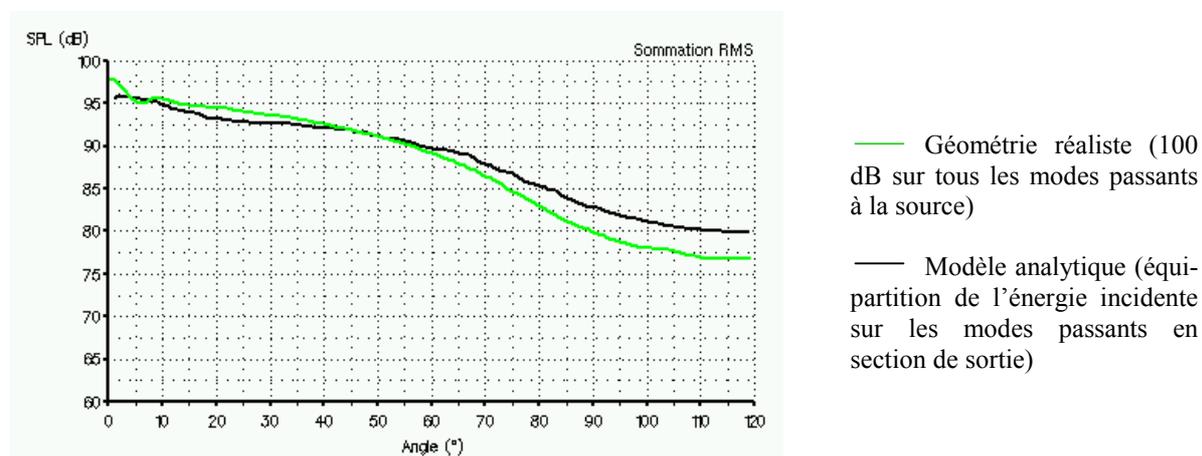


Figure 3.21 : Rayonnement en champ lointain pour une source multimodale (sommation RMS), géométries analytique et réaliste. $k \sim 25.1$, $M_0=0$, $R_{ec}=20$.

3.4.3 Géométrie réaliste avec bifurcations et mât-réacteur

Pour conclure ce chapitre et l'étude des caractéristiques géométriques, il ne nous reste plus qu'à analyser le rayonnement acoustique de la forme réaliste d'éjection considérée ci-dessus, en tenant compte cette fois des bifurcations à l'intérieur du conduit et du mât-réacteur

fixant le moteur à la voilure. Afin de dissocier l'influence des bifurcations de celle du mât, l'étude a été réalisée sur les deux modèles de la figure 3.22. Pour la configuration sans mât (figure 3.22.a), la bifurcation supérieure a été tronquée sur la section de sortie (elle se prolonge normalement un peu au-delà et se rattache au mât en dehors du conduit).

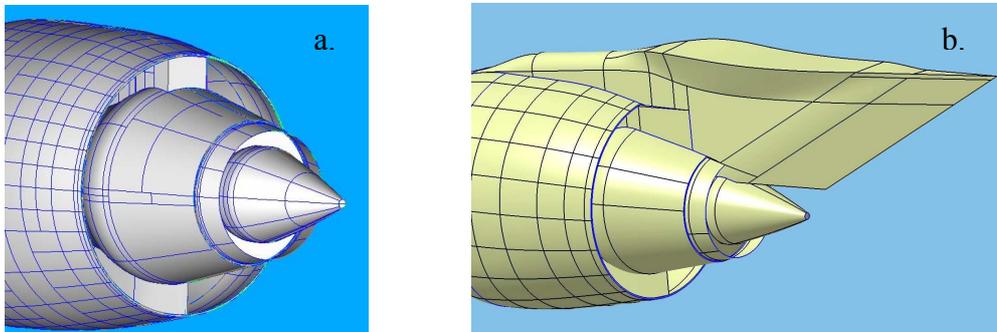


Figure 3.22 : Formes géométriques de l'éjection réaliste avec bifurcations, sans mât (22.a), et avec bifurcations et mât (22.b).

Toujours pour la fréquence réduite $k \sim 25.1$, on présente sur la figure 3.23 des cartographies en champ lointain sur une calotte sphérique située à une distance $R_{ec}=46$, pour les géométries : sans bifurcation ni mât, avec bifurcations mais sans mât, et avec bifurcation et mât. Les résultats sont donnés pour trois modes incidents. Comme dans le cas du conduit « analytique » considéré précédemment, on constate que la prise en compte des bifurcations perturbe fortement le rayonnement, davantage encore ici avec les formes réalistes puisqu'il n'existe plus la moindre symétrie sur le champ rayonné. Compte tenu des redistributions mises en évidence au paragraphe 3.4.1 (bifurcations épaisses), ce résultat n'est pas surprenant.

La comparaison des configurations avec et sans mât-réacteur est plus riche d'enseignements puisque l'on constate que les différences entre les cartographies, bien que visibles, ne sont finalement pas très importantes. Pour être plus précis, si l'on observe attentivement le rayonnement dirigé vers le sol, on remarque exactement les mêmes motifs pour les deux configurations, si bien que le mât-réacteur ne semble pas avoir d'influence véritable sur le champ rayonné dans cette direction. A des angles plus élevés en revanche (rayonnement proche de l'horizontale ou vers le ciel), des écarts apparaissent peu à peu. Les cartographies de la figure 3.24 représentant la différence (en valeur absolue, SPL) entre les champs lointains obtenus pour les deux géométries confirment cette impression : il existe une zone de rayonnement en direction du sol pour laquelle l'influence du mât-réacteur est quasiment nulle.

Les diagrammes de directivité de la figure 3.25 présentent des comparaisons plus précises des trois configurations de la figure 3.23 (avec ou sans bifurcations et/ou mât). Les rayonnements sont tracés pour quelques modes incidents donnés et pour une source de type multimodal dans le plan vertical (vers le sol) et dans le plan du point de certification latéral définies par l'OACI, dit « sideline » (décalé de 56°). En direction du sol, quelle que soit la source, on n'observe pas de variations notables du champ rayonné liées à la prise en compte du mât-réacteur. En « sideline », des différences légères apparaissent mais demeurent relativement négligeables (il semble que l'on approche des angles limites au-delà desquels

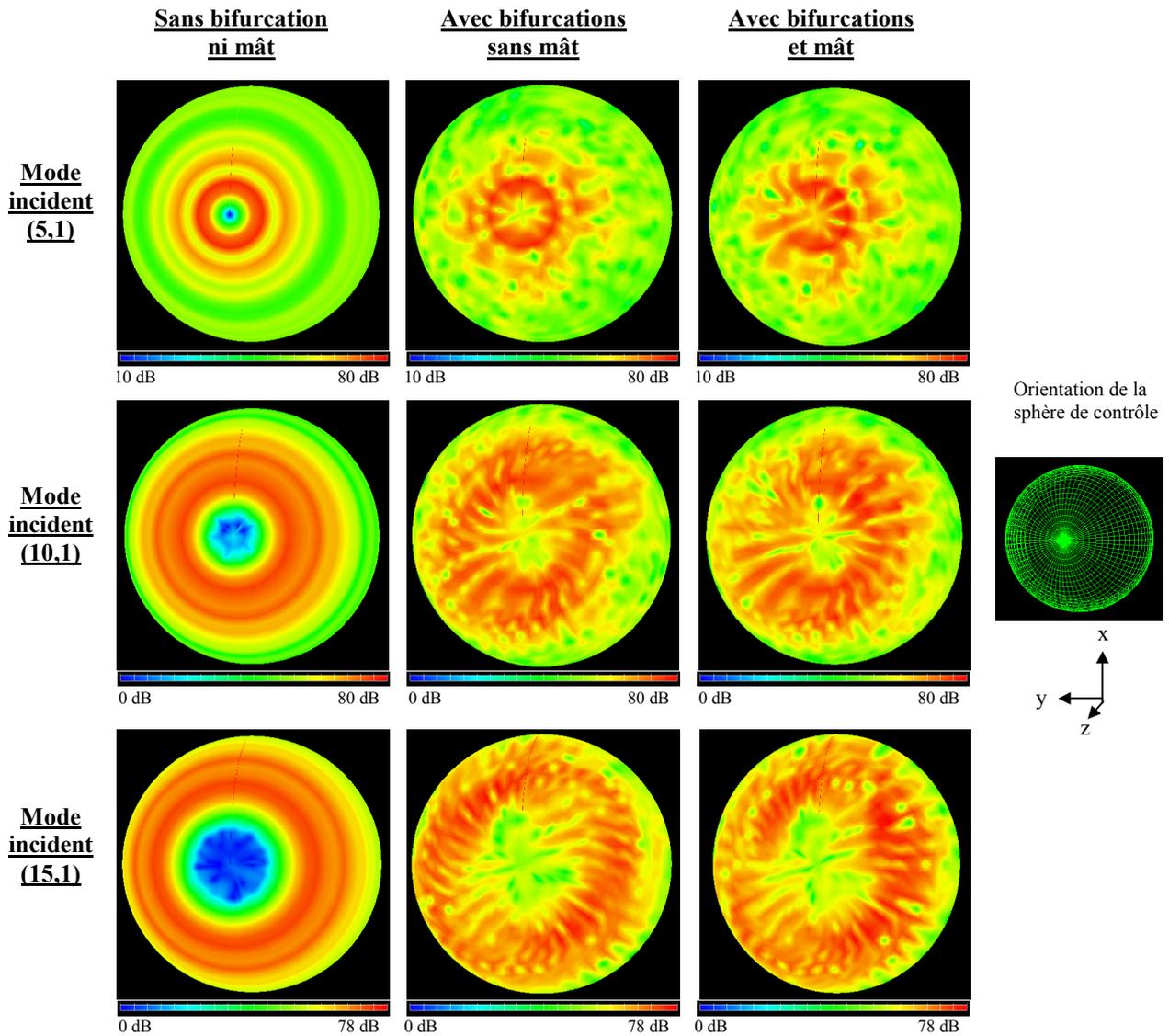


Figure 3.23 : Rayonnements (SPL) en champ lointain sur une calotte sphérique centrée sur la section de sortie. Comparaison entre les configurations avec ou sans bifurcations et/ou mât. $k=25.1$, $M_0=0$, $R_{ec}=46$.

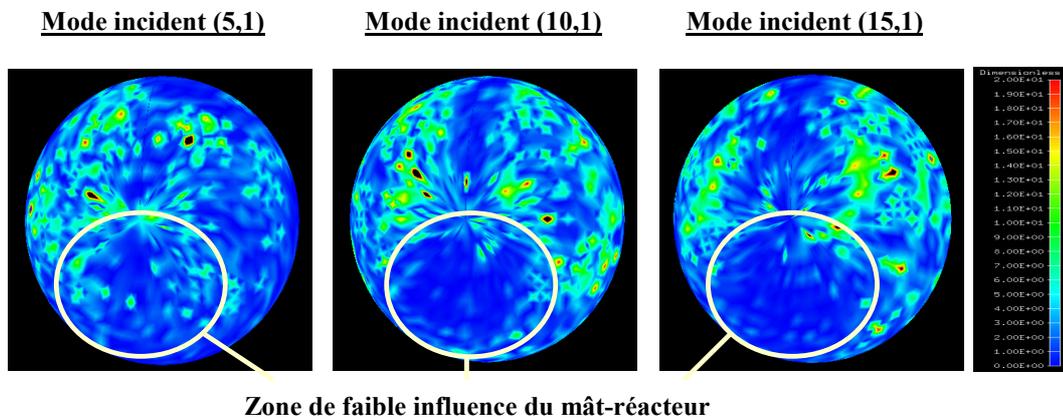


Figure 3.24 : Différence entre les champs rayonnés avec et sans mât (valeur absolue de l'écart en SPL). $k=25.1$, $M_0=0$, $R_{ec}=46$.

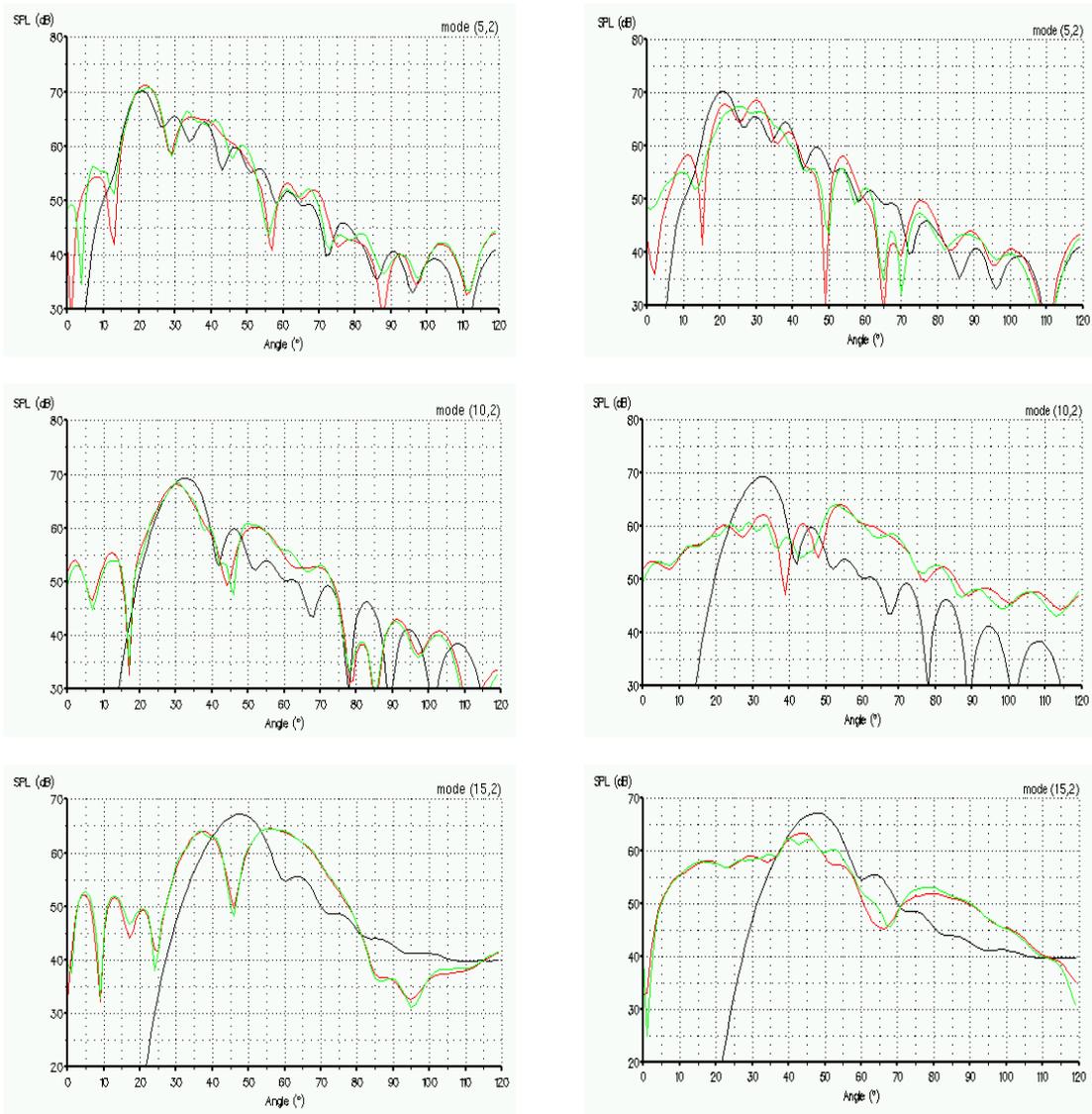
l'influence du mât devient conséquente). Ce résultat présente un véritable intérêt car il pourrait signifier que pour l'estimation du bruit rayonné sur les points de certification, il est possible de se limiter à la prise en compte des bifurcations dans le conduit sans modéliser le mât-réacteur. En terme de taille de maillage et de temps de calcul, cette simplification peut s'avérer être très bénéfique mais sa pertinence demande à être confirmée en présence d'un écoulement.

Enfin, il ressort de la figure 3.25 que les rayonnements obtenus pour une source multimodale, en sommation RMS et en conduit rigide, ne sont pas réellement dépendants de la prise en compte ou non des bifurcations. Pourtant les diagrammes de rayonnement des modes isolés font ressortir des différences importantes entre les configurations avec et sans bifurcations, dans le plan vertical y compris (ceci n'était d'ailleurs pas le cas pour la géométrie « analytique » considérée au paragraphe 3.3.4). Il semble donc que les redistributions modales générées par les bifurcations aient tendance à se compenser lorsque plusieurs modes incidents sont considérés, ou tout au moins que la modification du champ en conduit est suffisamment faible pour que la sommation RMS lisse les différences. Quoi qu'il en soit, il est peu probable que l'équivalence des rayonnements avec ou sans bifurcation demeure valable en conduit traité (ou même en configuration rigide lorsque le nombre de modes passants diminue) et finalement, l'ensemble des résultats des sections 3.3 et 4.4 amène plutôt à conclure qu'une estimation correcte du champ rayonné ne peut se faire sans prendre en compte les bifurcations en conduit.

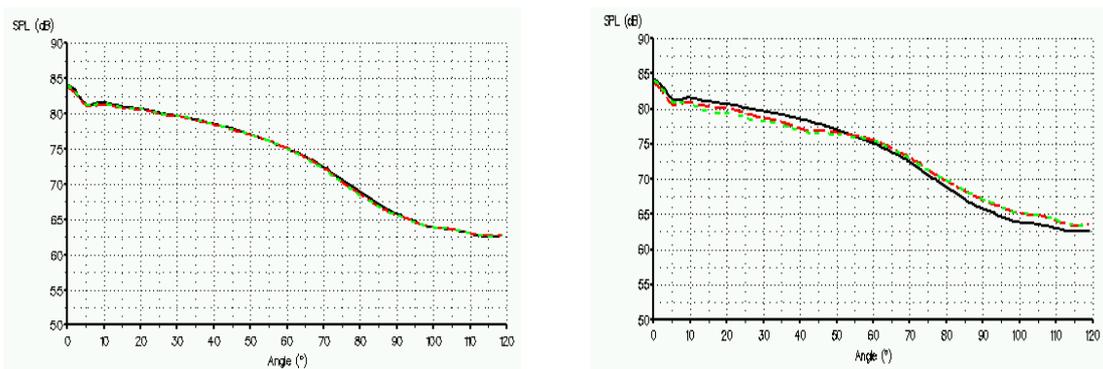
3.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons progressé dans la modélisation du rayonnement acoustique des conduits d'éjection en abandonnant les géométries canoniques et axisymétriques considérées jusqu'ici pour étudier la propagation à l'intérieur d'un conduit annulaire avec bifurcations, puis les phénomènes associés à une géométrie complètement réaliste. Pour ce qui est de la première étape, un modèle analytique (BIFIDUCT) a été développé, implémenté puis validé (sans écoulement) par comparaison avec des calculs numériques BEM. Les redistributions modales générées aux discontinuités de géométrie ont été analysées dans le détail et une description relativement complète de la propagation acoustique en présence de bifurcations a été proposée. Finalement, les conclusions principales de l'étude sur la géométrie analytique sont les suivantes :

- les bifurcations induisent des redistributions modales dans le conduit d'autant plus importantes que le mode annulaire incident se propage avec un fort taux d'enroulement. Dans ce cas, le contenu modal transmis au-delà des bifurcations est très différent du champ incident.
- l'efficacité des traitements acoustiques sur bifurcation est relativement décevante pour une source de type multimodal, mais devient très intéressante pour une source dominée par un mode à un fort taux d'enroulement. Ce résultat montre une nouvelle fois la nécessité d'accroître nos connaissances sur la composition réelle du bruit généré par les moteurs.



Rayonnements modaux : (5,2), (10,2) et (15,2)



Rayonnement pour une source multimodale (RMS, équi-répartition sur les modes radiaux).

— Sans bifurcation ni mât — Avec bifurcations, sans mât — Avec bifurcations et mât

Figure 3.25 : Rayonnements en champ lointain pour les géométries avec ou sans bifurcations et/ou mât-réacteur, dans le plan des bifurcations et le plan de « sideline » à 56° . $k \sim 25.1$, $M_0=0$, $R_{ec}=100$.

Bien que très instructive, la modélisation de la propagation acoustique en conduit analytique « BIFIDUCT » présente quelques limitations mises en évidence par l'étude d'une géométrie réaliste d'éjection. Ainsi, il semble que la forme réelle des bifurcations influence fortement la propagation du son et les redistributions modales dans le conduit. Les variations de section le long d'un conduit secondaire, également, induisent des redistributions sur différents modes radiaux. Comme nous l'avons signalé, ces résultats tendent à confirmer la nécessité de développer des outils numériques pour effectuer des simulations plus réalistes de la propagation du bruit en conduit d'éjection.

En terme de rayonnement, la prise en compte de la forme réelle du corps extérieur (prolongement du conduit primaire et du cône) est peut être un élément moins critique puisque des estimations relativement propres du champ lointain semblent possibles à partir du modèle analytique avec corps central infini. Toutefois, le contenu modal à l'extrémité du conduit est indispensable pour réaliser ces prédictions analytiques. Aussi, pour effectuer des simulations relativement réalistes tout en limitant les temps de calcul, des couplages peuvent être envisagés entre une méthode de calcul numérique, pour modéliser la propagation acoustique en conduit, et la méthode analytique MADIWHAX, pour évaluer le rayonnement en champ lointain.

Enfin, le faible impact du mât-réacteur sur le rayonnement en direction du sol est une propriété très intéressante dont on pourra tirer profit pour les études numériques futures en limitant la complexité et la taille des maillages. Ce résultat demande toutefois à être confirmé en configuration avec écoulement, la suppression du mât créant dans ce cas des couches de mélange irréalistes susceptibles de modifier le rayonnement.

Chapitre 4

Modélisation de la propagation acoustique en présence d'une couche de cisaillement par la méthode FEM

4.1 Introduction

Au chapitre précédent, l'influence des caractéristiques géométriques de l'éjection sur la propagation et le rayonnement acoustiques a été étudiée, dans le cas d'un écoulement uniforme, à l'aide de la méthode de calcul BEM. Afin de compléter le travail présenté dans ce mémoire, il est nécessaire désormais d'aborder les effets liés à la présence d'un écoulement plus réaliste et donc non uniforme. Comme nous l'avons vu en introduction, les champs aérodynamiques au voisinage des conduits d'éjection sont particulièrement complexes et caractérisés, notamment, par des couches de mélanges rotationnelles et de forts gradients de température. Or, la seule méthode de calcul susceptible de prendre en compte un écoulement non uniforme dont nous disposons actuellement est la méthode FEM, limitée, théoriquement, à un modèle d'écoulement porteur potentiel. A ce stade de notre étude, nous arrivons donc à un niveau de complexité physique pour lequel la pertinence de nos modèles numériques, développés initialement pour le problème de l'entrée d'air, peut être remise en cause... En l'absence de méthode de calcul plus adaptée, toutefois, nous proposons dans ce dernier chapitre d'évaluer les résultats de la méthode FEM en présence d'une couche de cisaillement infiniment mince, séparant deux écoulements uniformes. Bien que l'on sorte alors du domaine d'application théorique de la formulation potentielle, une telle étude présente un intérêt pour deux raisons (cf. paragraphe 2.1). D'une part, les résultats de la méthode FEM sur ce type de problème n'ont jamais été analysés de sorte que l'erreur commise par rapport à un calcul théorique exact mérite d'être évaluée avant de renoncer à une telle application. D'autre part, dans le cas d'une couche de cisaillement mince, il est possible de respecter l'hypothèse de l'écoulement potentiel dans le calcul ACTRAN en proposant une modélisation numérique particulière, avec adjonction d'une membrane solide séparant deux écoulements distincts.

Plusieurs modèles analytiques ont été développés pour déterminer le rayonnement acoustique d'un conduit en présence d'un jet uniforme émergeant dans un milieu en écoulement. Citons ainsi le travail de Mani [70], qui se place dans le cadre d'un problème bidimensionnel, les modèles de Savkar [118] et de Munt [86] [87], qui considèrent un conduit cylindrique circulaire, et enfin l'étude récente de Gabard *et al.* [38], qui étend les travaux précédents à un conduit annulaire avec corps central infini. Des approximations du modèle de Munt ont également été proposées par Cargill, à basses [18] et hautes fréquences [19], et par

Rienstra [110], à basses fréquences. La solution analytique de ces différents modèles est établie, généralement, à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf. L'une des difficultés principales du calcul provient des instabilités de la couche de cisaillement [74], de type Kelvin-Helmholtz, qui doivent être prises en compte pour calculer correctement le rayonnement acoustique [84] [86]. Or, les solutions proposées par Mani et Savkar ignorent ces instabilités. Le calcul de Savkar, par ailleurs, se traduit par un comportement peu physique en champ lointain avec l'apparition de lobes dénaturés dans les diagrammes de directivités modales. Pour évaluer les résultats de la méthode FEM, les modèles analytiques de Munt et de Gabard *et al.* semblent donc être les plus pertinents. Le second, en particulier, est bien adapté à notre problème car il permet de prendre en compte une géométrie annulaire et de choisir la condition à la limite appliquée au bord de fuite (condition de Kutta ou continuité du potentiel acoustique, cf. chapitre 1, page 53). Malheureusement, la publication de ce modèle est intervenue trop récemment pour que celui-ci puisse être intégré à notre étude...

La solution de référence utilisée dans ce chapitre est donc la solution analytique de Munt. Bien que basé sur une géométrie circulaire, ce modèle permet d'étudier l'influence d'une couche de cisaillement sur le rayonnement des modes de conduit, ce qui correspond tout à fait au problème que l'on souhaite modéliser ici avec ACTRAN. Les prédictions de Munt, par ailleurs, s'accordent de manière très satisfaisante avec les mesures expérimentales effectuées par Pinker et Bryce [99]. Finalement, le seul inconvénient du modèle provient du fait que la condition de Kutta est imposée de façon unique au bord de fuite. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, cette condition n'est pas prise en compte dans le calcul ACTRAN, qui considère au contraire la continuité du potentiel acoustique... Cependant, les diagrammes de directivités présentés aux chapitres 1 et 2 montrent que la condition choisie au bord de fuite influence relativement peu le rayonnement du lobe principal. Au cours de ce chapitre, nous proposons donc d'évaluer la pertinence du code ACTRAN sur le problème de Munt, en analysant les résultats en termes de position et de forme du lobe principal.

4.2 Évaluation des résultats de la méthode FEM sur la configuration analytique de Munt

4.2.1 Le modèle analytique de Munt

Le modèle analytique de Munt est présenté sur la figure 4.1. On considère un conduit circulaire sans épaisseur, de parois rigides et de rayon \tilde{R}_0 . La géométrie du problème est à symétrie de révolution, rapportée au système de coordonnées cylindriques $(\tilde{r}, \varphi, \tilde{z})$. Pour les besoins de la modélisation, le conduit est supposé semi-infini et défini en $(\tilde{r} = \tilde{R}_0, \tilde{z} < 0)$. Le champ acoustique incident est spécifié sous la forme de modes circulaires (m, n) , rayonnant depuis la section de sortie du conduit.

Le milieu fluide de propagation est constitué de deux zones d'écoulement distinctes séparées par une ligne de glissement située en $(\tilde{r} = \tilde{R}_0, \tilde{z} > 0)$. En $\tilde{r} < \tilde{R}_0$, on considère un jet cylindrique caractérisé par les valeurs moyennes $(\tilde{\rho}_{jet}, \tilde{c}_{jet}, \tilde{v}_{jet})$ de la densité, de la célérité du son et du champ de vitesse. Le jet émerge dans un milieu environnant défini en $\tilde{r} > \tilde{R}_0$ et de grandeurs moyennes $(\tilde{\rho}_{ext}, \tilde{c}_{ext}, \tilde{v}_{ext})$. Pour chacun des deux écoulements, le champ de vitesse est supposé parallèle à l'axe \tilde{z} et uniforme.

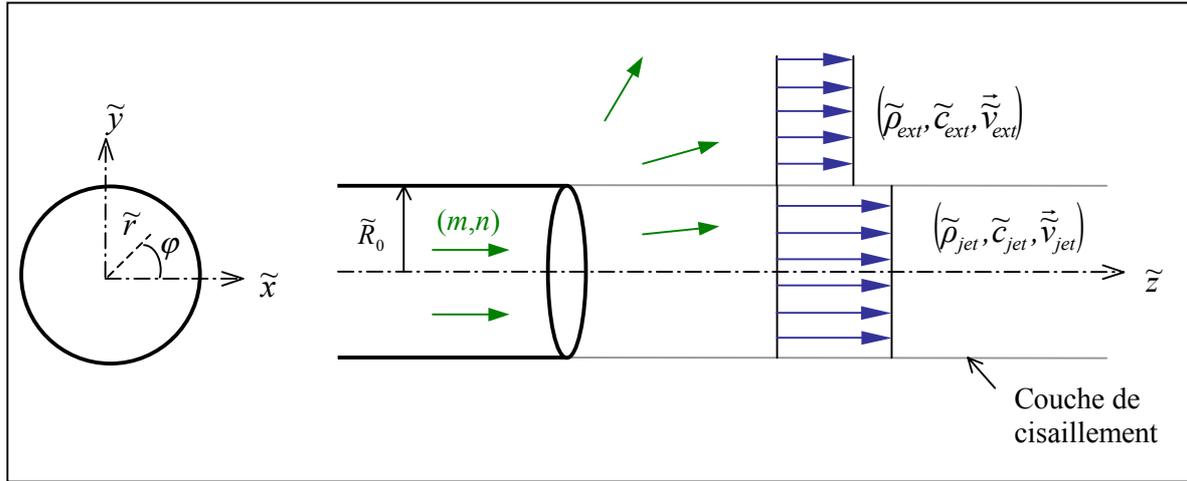


Figure 4.1 : Le modèle analytique de Munt.

Dans ce chapitre, nous utiliserons des grandeurs adimensionnelles définies à partir de la densité et de la célérité du jet ($\tilde{\rho}_{jet}$ et \tilde{c}_{jet}) et du rayon \tilde{R}_0 :

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_{jet}} \tilde{R}_0, & \tilde{x} &= \frac{\tilde{x}}{\tilde{R}_0}, & \chi_\rho &= \frac{\tilde{\rho}_{ext}}{\tilde{\rho}_{jet}}, & \chi_c &= \frac{\tilde{c}_{ext}}{\tilde{c}_{jet}}, \\
 \text{et : } M_{jet} &= \frac{\tilde{v}_{jet}}{\tilde{c}_{jet}}, & M_{ext} &= \frac{\tilde{v}_{ext}}{\tilde{c}_{ext}}, & \chi_v &= \frac{\tilde{v}_{ext}}{\tilde{v}_{jet}} = \chi_c \frac{M_{ext}}{M_{jet}}. & & (4.1)
 \end{aligned}$$

En particulier, χ_v , χ_ρ et χ_c caractérisent le rapport des grandeurs moyennes de part et d'autre de la couche de cisaillement¹. Sur un moteur réel, les ordres de grandeur de ces rapports sont :

- entre le milieu environnant et l'écoulement secondaire (rapport des grandeurs moyennes du premier sur le second) : $\chi_v \approx 0.4$, $\chi_\rho \approx 1$, $\chi_c \approx 1$ en approche, $\chi_v \approx 0.2-0.3$, $\chi_\rho \approx 1$, $\chi_c \approx 1$ au décollage.
- entre l'écoulement secondaire et l'écoulement primaire : $\chi_v \approx 1.2-1.4$, $\chi_\rho \approx 2$, $\chi_c \approx 0.6$ en approche, $\chi_v \approx 0.9$, $\chi_\rho \approx 2$, $\chi_c \approx 0.6-0.7$ au décollage.

Notons que le modèle de Munt n'a pas fait l'objet d'un développement de code spécifique à AIRBUS. Dans le cadre de ce chapitre, nous considérerons donc uniquement des résultats extraits de la publication de référence [86] (voir le paragraphe 4.2.4)...

4.2.2 Modélisation de la couche de cisaillement dans la méthode FEM

Pour évaluer les résultats de la méthode FEM sur le problème de Munt, deux types de modélisation numérique ont été retenues (figure 4.2). Dans la première (figure 4.2.a), le jet

¹ Les différences entre les célérités du jet et de l'écoulement environnant considérées ici sont une conséquence des écarts de température entre les écoulements.

issu du conduit cylindrique est séparé de l'écoulement environnant par l'intermédiaire d'une couche imperméable d'éléments solides. Le domaine des éléments finis est alors composé de trois régions distinctes correspondant à deux milieux fluides (le jet et l'écoulement environnant) et un milieu solide visco-élastique (la couche intermédiaire). Aux interfaces entre les différents milieux, le couplage fluide-solide est assuré par la continuité des déplacements normaux et la continuité des contraintes normales (voir [120, page 513]). Le but de cette modélisation, peu naturelle *a priori*, est de proposer une représentation du problème de Munt qui permette de respecter l'hypothèse de l'écoulement potentiel effectuée dans ACTRAN. Pour converger vers la solution analytique, les propriétés des éléments solides devront alors être choisies de manière à assurer une bonne transmission des perturbations acoustiques à travers la membrane imperméable (voir le paragraphe 4.2.3). Dans le cadre de notre étude (figure 4.2.a), cette membrane est constituée d'une unique couche d'éléments solides et son épaisseur relative $e = \tilde{e} / \tilde{R}_0 = 10^{-4}$ est identique à celle de la paroi du conduit.

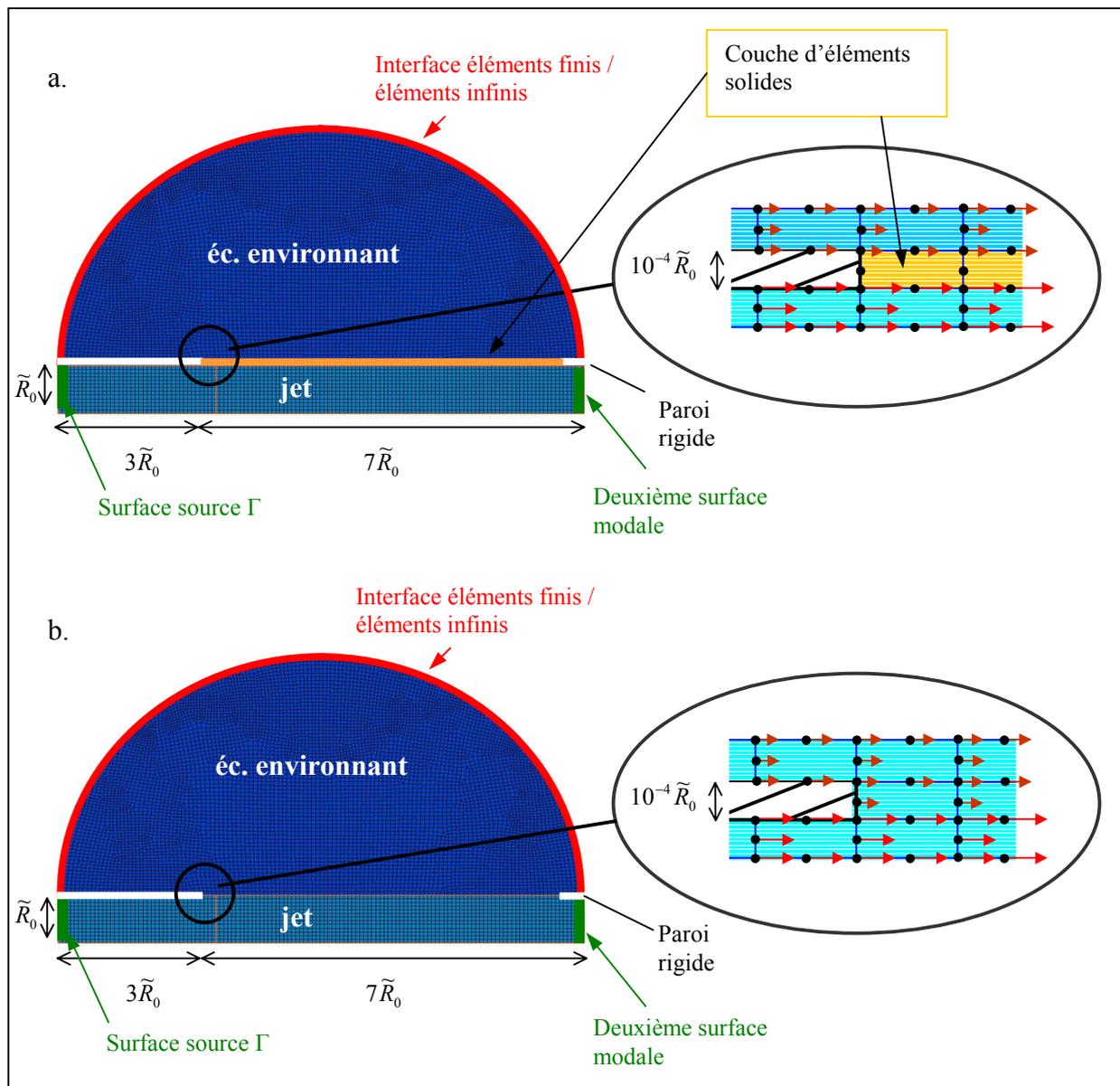


Figure 4.2 : Modélisations du problème analytique de Munt par la méthode FEM.
 a. : modèle avec couche d'éléments solides. b. : modèle classique sans éléments solides.

Dans la deuxième configuration de calcul (figure 4.2.b), aucune modélisation particulière de la couche de cisaillement n'est proposée. Le domaine de propagation est constitué d'un milieu fluide uniquement. La ligne de glissement entre l'écoulement environnant et le jet est définie simplement en spécifiant des grandeurs moyennes différentes sur deux lignes d'éléments successives du maillage. Dans ce cas, l'écoulement ne peut être considéré comme potentiel et le code de calcul ACTRAN est utilisé en dehors de son domaine de validité théorique... Par rapport au modèle précédent, l'épaisseur du conduit est inchangée et correspond une nouvelle fois à l'épaisseur d'une couche d'éléments finis de volume (fluide). Les éléments utilisés étant quadratiques, il est possible de spécifier plusieurs valeurs du champ aérodynamique moyen sur les nœuds situés au centre de la couche intermédiaire : nous avons choisi pour notre étude d'imposer les caractéristiques de l'écoulement environnant (voir la figure 4.2.b)². Comme au chapitre 2, les conditions aux limites sur le bord de fuite sont alors impropres mais nous n'avons pas observé ici de dégénérescence des résultats. Ceci s'explique probablement par les faibles valeurs de nombre de Mach considérées (voir paragraphe 4.2.4) et l'épaisseur réduite du bord de fuite.³

Pour chacune des deux configurations numériques, la longueur du conduit est fixée à $L^E = 3$ et le domaine des éléments finis s'étend sur une distance de sept rayons au-delà de la section de sortie. La prise en compte d'un écoulement non-uniforme étant incompatible avec la théorie des éléments infinis, ceux-ci sont définis uniquement dans la région de l'écoulement environnant. Par conséquent, le calcul du rayonnement en champ lointain est imprécis pour des angles inférieurs à 8° . Afin de fermer le domaine de calcul, on impose à l'extrémité du jet une deuxième surface modale dont le rôle est de limiter les réflexions parasites sur la frontière du maillage. Pour des raisons pratiques, enfin, cette surface est séparée de l'interface entre les éléments finis et infinis par une petite paroi rigide.

4.2.3 Détermination des paramètres solides et convergence des deux modèles numériques

Pour tester l'applicabilité du modèle de la membrane imperméable et déterminer des éléments solides adaptés à notre problème, une première étude a été menée en l'absence d'écoulement. Le matériau solide fictif considéré dans notre modèle est un matériau de type visco-élastique, caractérisé par trois paramètres :

- la densité ρ_s ,
- les coefficients de Lamé (λ_L, μ_L) qui traduisent la relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε (voir par exemple Schwartz [119]) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda_L \operatorname{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2 \mu_L \varepsilon_{ij}, & \text{qui s'écrit aussi :} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\lambda_L \operatorname{tr}(\sigma)}{2\mu_L(3\lambda_L + 2\mu_L)} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu_L} \sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

² Pour certaines configurations d'étude, des calculs ont également été effectués en imposant sur les nœuds centraux les valeurs moyennes correspondant au jet. Nous avons obtenu alors des résultats identiques.

³ Quoi qu'il en soit, il est possible si nécessaire de se ramener à un conduit sans épaisseur. Notons par ailleurs que ce type de problème disparaît si l'on considère une géométrie réaliste avec un écoulement calculé par une méthode CFD (Euler ou Navier-Stokes).

Pour garantir une bonne transmission des perturbations acoustiques d'un milieu fluide à l'autre, le matériau visco-élastique doit présenter les caractéristiques suivantes :

- faible valeur de la densité : en effet, en négligeant le cisaillement, le bilan des forces sur un élément solide conduit à la relation :

$$p_{sup} - p_{inf} = \rho_s e a_n, \quad (4.3)$$

où p_{sup} et p_{inf} désignent les pressions acoustiques sur les faces supérieure et inférieure de la couche solide, e l'épaisseur de cette couche et a_n l'accélération normale.

En considérant une faible valeur de la densité, on favorise alors la continuité des pressions acoustiques de part et d'autre de la membrane solide.

- raideur normale élevée : imposer cette propriété revient à s'assurer de l'égalité des déplacements normaux des faces supérieure et inférieure de la couche solide. La continuité des déplacements aux interfaces fluide/solide étant également satisfaite (voir le paragraphe 4.2.2), on vérifie alors la continuité des déplacements normaux fluides de part et d'autre de la membrane. Une forte raideur normale peut être obtenue en attribuant une faible valeur au coefficient de Lamé λ_L et une valeur élevée au coefficient μ_L (cf. (4.2)).

Dans le calcul ACTRAN, la densité des éléments solides peut être fixée à zéro sans générer de problèmes particuliers : on impose donc $\rho_s = 0$. Pour ce qui est des coefficients de Lamé, en revanche, choisir des valeurs trop faibles (pour λ_L) ou trop élevées (pour μ_L) provoque un mauvais conditionnement de la matrice, qui peut se traduire par l'apparition de problèmes d'ordre numérique. Afin de déterminer des coefficients adaptés à notre problème, nous avons donc effectué une première analyse des résultats du code ACTRAN avec éléments solides, en considérant plusieurs valeurs du couple (λ_L, μ_L) . Cette première étude sans écoulement a montré qu'en choisissant des coefficients de Lamé vérifiant les ordres de grandeurs (4.4), on assure une bonne transmission des perturbations acoustiques :

$$(\lambda_L, \mu_L) \approx (10^{-3} \rho_0 c_0^2, 100 \rho_0 c_0^2), \quad (4.4)$$

où $\rho_0 c_0^2$ correspond à l'impédance moyenne des deux milieux fluides.

A titre d'illustration, la figure 4.3 compare les rayonnements obtenus par ACTRAN pour les deux configurations de la figure 4.2 et une configuration plus classique sans éléments solides ni deuxième surface modale. Dans le cas du modèle de la membrane solide, les coefficients de Lamé sont choisis de manière à satisfaire la condition (4.4). La fréquence réduite est fixée ici à $k=11.7$ et les diagrammes de rayonnement sont tracés pour les modes (0,1), (5,2) et (9,1). Deux niveaux d'analyse peuvent être proposés à partir de ces différents graphes :

- Quel que soit le mode incident, les comparaisons entre les deux configurations de la figure 4.2 sont excellentes. Ce résultat confirme la pertinence du modèle de la membrane solide et montre qu'en choisissant des coefficients de Lamé adaptés, on assure une transmission quasi-complète des perturbations acoustiques à travers la couche d'éléments solides. De nombreux calculs ont été effectués en faisant varier les coefficients de Lamé, dans le modèle de la membrane solide, autour des valeurs indiquées par la relation (4.4) : les résultats obtenus sont stables pour une plage de valeurs relativement large de λ_L et μ_L .
- De manière générale, l'accord entre la configuration classique et les configurations de la figure 4.2 est également très satisfaisant même si dans le cas du mode (0,1), on observe quelques différences aux faibles angles traduisant l'influence sur le rayonnement de la deuxième surface modale. Ainsi, comme nous l'avons indiqué précédemment, les modèles de la figure 4.2 ne permettent pas de calculer correctement le rayonnement à proximité de l'axe... Dans le cas des modes (5,2) et (9,1), l'énergie acoustique étant principalement dirigée vers les angles élevés, l'influence de la deuxième surface modale ne se fait plus sentir et les comparaisons entre les différentes configurations sont excellentes. A ce titre, il est à noter que dans la majorité des cas étudiés ensuite en présence d'un écoulement cisailé, la réfraction des ondes entraîne une déviation du rayonnement vers les angles élevés de sorte que l'influence de la deuxième surface modale sur le rayonnement est négligeable.

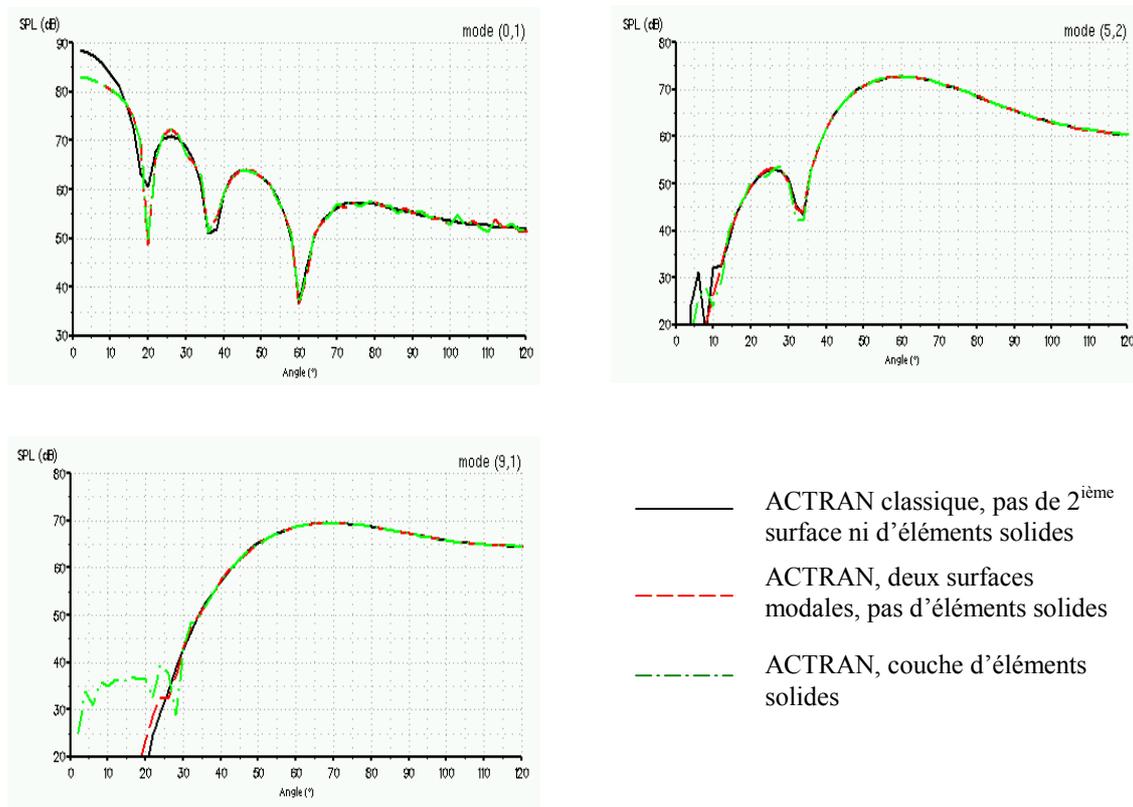


Figure 4.3 : Diagrammes de rayonnement modaux en l'absence d'écoulement. Comparaison entre les différentes configurations numériques. $k=11.7$.

En conclusion, les deux modèles numériques définis au paragraphe 4.2.2 permettent d'obtenir des résultats cohérents en l'absence d'écoulement. Seul le rayonnement aux faibles angles est *a priori* mal prédit. Afin d'évaluer la pertinence de chacun des modèles en présence d'une couche de cisaillement, nous pouvons désormais comparer le calcul ACTRAN au modèle analytique de Munt. Dans les applications qui suivent, les coefficients de Lamé pour le modèle de la membrane solide sont fixés de façon à vérifier la condition (4.4). Nous verrons qu'en présence d'un écoulement uniforme, on converge à nouveau vers les résultats de la configuration sans éléments solides.

4.2.4 Matrice de calcul

Le modèle analytique de Munt n'étant pas implémenté à AIRBUS, les configurations de calcul ont été définies à partir des résultats présentés dans l'article de référence [86]. Treize cas tests ont été retenus, regroupés en cinq séries (tableau 4.1). Les trois premières séries permettent d'étudier l'influence d'une différence de vitesse de part et d'autre de la ligne de glissement, en supposant la densité et la célérité uniformes. Les deux dernières séries considèrent des discontinuités de densité et de célérité.

Dans l'article de Munt, aucune information n'est fournie sur l'amplitude ou l'intensité des modes incidents dans le conduit. Pour comparer les rayonnements en champ lointain, nous avons donc procédé à un recalage des prédictions analytiques sur les calculs ACTRAN, de façon à ce que les niveaux rayonnés sur le lobe principal soient équivalents. Dans les comparaisons qui suivent, nous nous intéresserons donc uniquement à la forme des directivités modales. A titre indicatif, toutefois, on pourra noter que les résultats numériques sont présentés ici pour une distance d'écoute de $R_{ec} = 30$ et une intensité modale de 100 dB.

Série	Cas test	k	Mode incident	M_{jet}	M_{ext}	$\chi_v = \chi_c \frac{M_{ext}}{M_{jet}}$	$\chi_c = \frac{\tilde{c}_{ext}}{\tilde{c}_{jet}}$	$\chi_\rho = \frac{\tilde{\rho}_{ext}}{\tilde{\rho}_{jet}}$
1	1	4	(0,1)	0.5	0.5	1	1	1
	2	4	(0,1)	0.5	0.25	0.5	1	1
	3	4	(0,1)	0.5	0	0	1	1
2	4	11.7	(4,1)	0.14	0.14	1	1	1
	5	11.7	(4,1)	0.14	0.05	0.36	1	1
	6	11.7	(4,1)	0.14	0	0	1	1
3	7	4.58	(0,1)	0.134	0	0	1	1
	8	4.58	(3,1)	0.134	0	0	1	1
4	9	4	(0,1)	0.5	0	0	0.5	1
	3	4	(0,1)	0.5	0	0	1	1
	10	4	(0,1)	0.5	0	0	2	1
5	11	4	(0,1)	0.5	0	0	1	0.1
	12	4	(0,1)	0.5	0	0	1	0.5
	3	4	(0,1)	0.5	0	0	1	1
	13	4	(0,1)	0.5	0	0	1	2

Tableau 4.1 : Matrice de calcul.

4.2.5 Analyse des résultats en présence d'une discontinuité de vitesse

Pour débiter l'analyse des comparaisons entre le modèle analytique de Munt et les calculs ACTRAN, nous considérons tout d'abord les configurations pour lesquelles seuls les champs de vitesse moyens diffèrent entre le jet et l'écoulement environnant. Les rapports des célérités du son et des densités sont alors $\chi_c \approx 1$ et $\chi_\rho \approx 1$. Les comparaisons pour les séries de cas tests 1 à 3 sont présentées sur les figures 4.4 à 4.6. Outre les résultats analytiques de Munt et les calculs ACTRAN, les prédictions du code MADIWHAX (chapitre 1) sont indiquées à titre de référence. Le but, notamment, est de mesurer l'importance des phénomènes de réfraction en visualisant, pour les différentes configurations, le décalage du lobe principal par rapport au cas de l'écoulement uniforme. Le nombre de Mach considéré dans le calcul MADIWHAX est celui du jet. Par ailleurs, le code étant écrit pour des géométries annulaires, le rapport de rayon est fixé à $h=0.03$ (nous avons vu au chapitre 1 que l'on retrouve alors les résultats du conduit circulaire).

Avant d'analyser les résultats en présence d'une différence de vitesse réelle entre deux écoulements distincts, il peut être intéressant de discuter des comparaisons obtenues pour un écoulement rigoureusement uniforme (cas tests 1 et 4, figures 4.4.a et 4.5.a). Tout d'abord, ces configurations permettent de vérifier qu'en choisissant des coefficients de Lamé respectant la condition (4.4), la convergence des modèles numériques avec et sans éléments solides est assurée, comme en l'absence d'écoulement. Par suite, les résultats obtenus pour les deux modèles d'ACTRAN sont en bon accord avec les prédictions analytiques de MADIWHAX. Sur la figure 4.4.a, quelques différences apparaissent quant à la position de l'extinction mais celles-ci s'expliquent probablement par les réflexions parasites provenant, dans le calcul numérique, de la seconde surface modale et de la petite paroi solide associée. Dans le cas de la figure 4.5.a, ces réflexions sont négligeables et la position de l'extinction est correctement prédite par le calcul numérique. En présence d'un écoulement uniforme, la comparaison du modèle de Munt avec les calculs ACTRAN et MADIWHAX fait ressortir deux observations. D'une part, on vérifie que les résultats de ce modèle sont en accord, globalement, avec nos propres prédictions. D'autre part, on retrouve aux angles élevés l'influence de la condition de Kutta. Celle-ci, en effet, est imposée dans le modèle de Munt mais pas dans le calcul numérique (ni dans le calcul MADIWHAX considéré ici). Par conséquent, le rayonnement prédit par ACTRAN aux angles élevés est supérieur et l'écart entre les deux types de solution augmente avec la valeur du nombre de Mach (voir les figures 4.5.a et 4.4.a). Il est à noter que la prise en compte d'une couche d'éléments solides dans le calcul ACTRAN ne modifie pas la condition imposée au bord de fuite.

En présence d'une discontinuité de vitesse, les digrammes des figures 4.4 à 4.6 amènent les conclusions suivantes :

- De manière générale, l'accord entre la solution de Munt et le calcul ACTRAN sans éléments solides (figure 4.2.b) est tout à fait satisfaisant. En particulier, le calcul numérique permet de retrouver de façon relativement précise le décalage du lobe principal lié à la réfraction des ondes sur la couche de cisaillement. Parmi l'ensemble des cas tests étudiés ici, notons que ce décalage atteint jusqu'à 50° sur la figure 4.4.c.

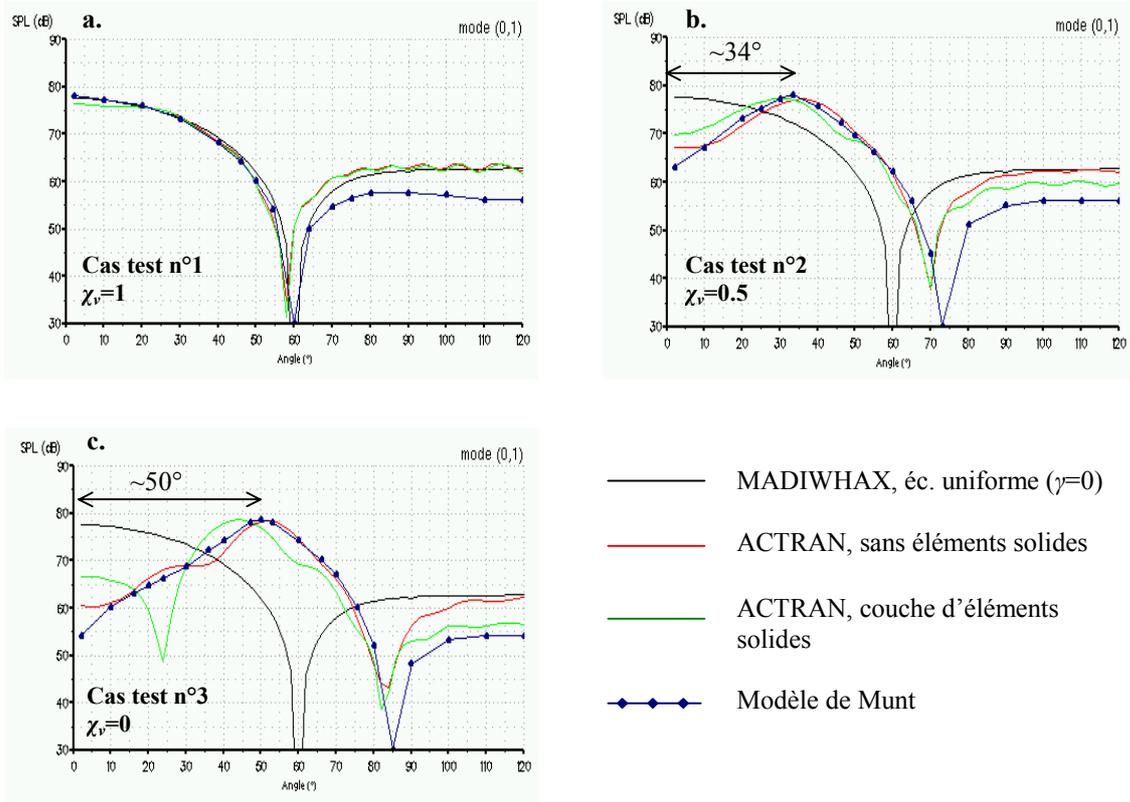


Figure 4.4 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'une discontinuité de vitesse. Comparaison entre le modèle de Munt et ACTRAN. Série 1, $k=4$, $M_{jet}=0.5$.

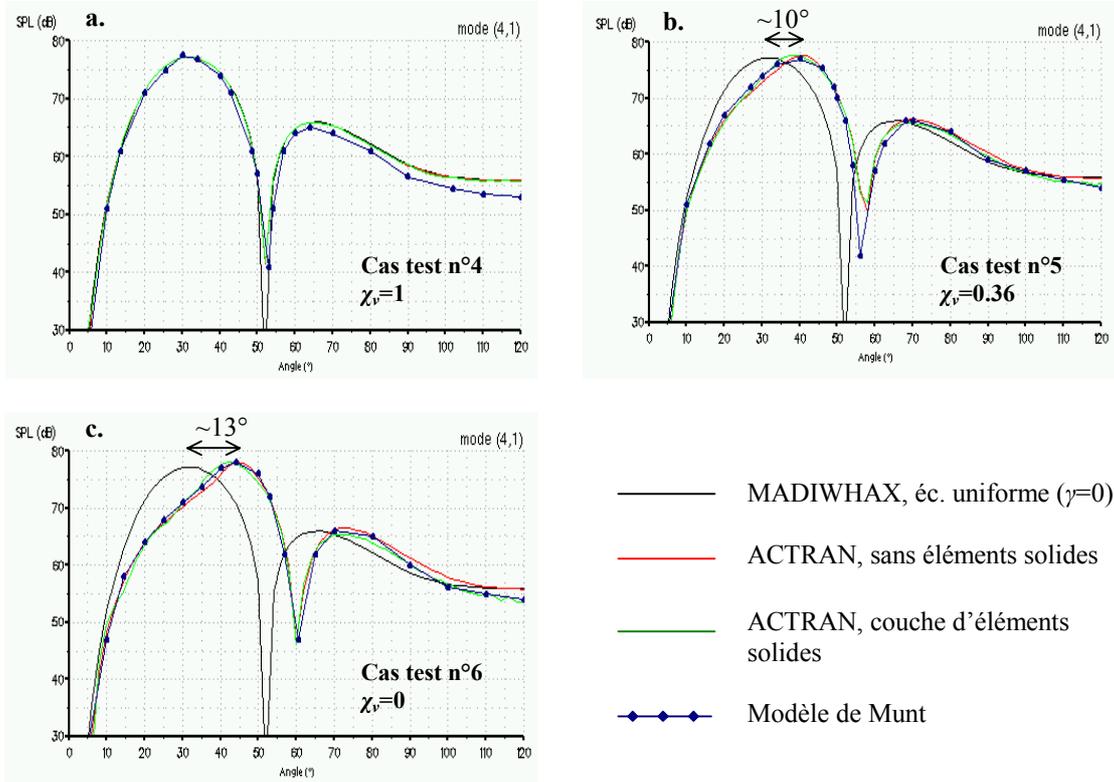


Figure 4.5 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'une discontinuité de vitesse. Comparaison entre le modèle de Munt et ACTRAN. Série 2, $k=11.7$, $M_{jet}=0.14$.

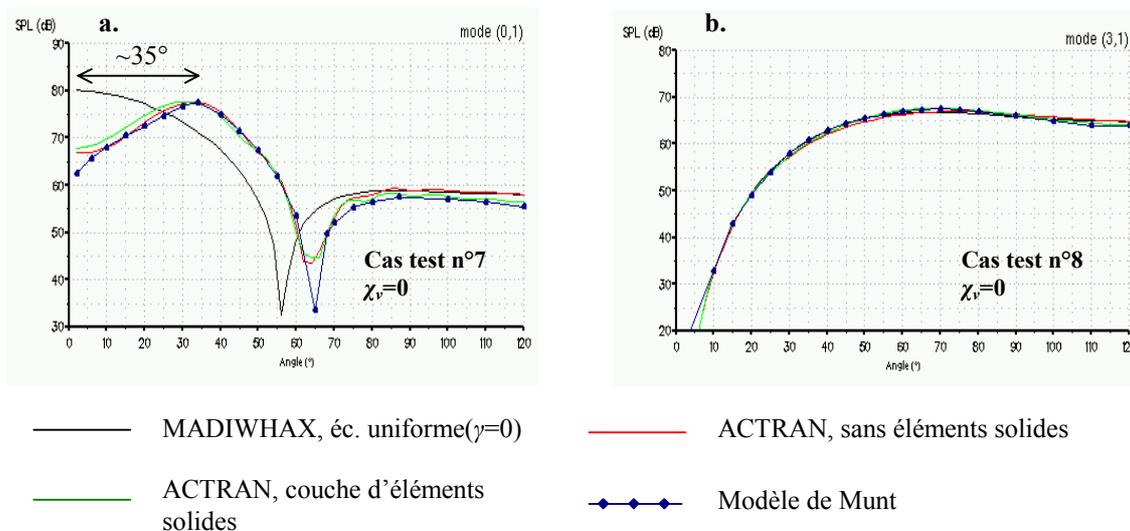


Figure 4.6 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'une discontinuité de vitesse. Comparaison entre le modèle de Munt et ACTRAN. Série 3, $k=4.58$, $M_{jet}=0.134$.

- Les comparaisons entre les prédictions de Munt et le calcul numérique avec éléments solides sont globalement moins favorables. Dans le cas de la figure 4.4.c, notamment, le calcul ACTRAN conduit à une erreur d'environ 10° sur la position du lobe principal et la directivité fait apparaître une extinction inexplicée autour de 25° . Les comparaisons présentées pour les autres cas tests sont généralement plus acceptables mais la position du lobe principal demeure souvent sous-estimée. Compte tenu de la modélisation relativement complexe mise en œuvre pour ce type de calcul ACTRAN, il est difficile d'interpréter ces résultats *a priori*. Une étude sur la sensibilité des paramètres solides en présence d'une couche de cisaillement pourrait apporter un premier élément de réponse mais au vu des résultats obtenus en l'absence d'éléments solides, cette étude n'a pas été entreprise ici.
- Les diagrammes de rayonnement présentés pour les différents cas tests montrent que l'influence des phénomènes de réfraction sur la directivité en champ lointain est loin d'être négligeable. Ainsi, pour la première série de comparaison (figure 4.4), une différence de nombre de Mach entre les deux écoulements égale à 0.5 entraîne un décalage du lobe principal de 50° environ. Dans la deuxième série (figure 4.5), la direction principale de rayonnement est déviée de 13° environ pour une différence de Mach valant seulement 0.14. Si ces résultats ne peuvent être transposés de manière directe à des problèmes plus réalistes, ils illustrent la nécessité de prendre en compte l'effet des couches de cisaillement pour prédire correctement le rayonnement des conduits d'éjection. Sur un moteur réel, à titre de comparaison, les différences de nombre de Mach entre l'écoulement secondaire et l'écoulement environnant sont de l'ordre de 0.7 au décollage et 0.3 en approche... De manière générale, enfin, il est à noter que l'importance des phénomènes de réfraction sur la ligne de glissement dépend de l'angle d'incidence du champ

acoustique. Dans le cas d'une onde plane, Ribner [105] et Miles [75] montrent que la déviation du champ incident a tendance à diminuer lorsque l'angle du front d'onde avec la couche de cisaillement diminue. Pour un mode incident, on peut donc supposer que l'influence de la réfraction sera d'autant plus faible que l'ordre du mode considéré est élevé. Ce résultat est confirmé par la figure 4.6, où l'on constate que pour une même configuration, le rayonnement du mode (0,1) est dévié de 35° environ tandis que l'influence de la réfraction sur le rayonnement du mode (3,1) est négligeable.

En conclusion, ces premières comparaisons montrent que lorsque la densité moyenne et la célérité du son sont supposées uniformes dans le domaine de propagation, la formulation potentielle implémentée dans ACTRAN prédit de manière relativement satisfaisante, malgré les limitations théoriques, l'effet d'une couche de cisaillement sur le rayonnement. Si ces résultats demandent à être confirmés sur un nombre de cas tests plus important, et notamment pour des valeurs de Mach plus élevées, ils semblent indiquer que l'influence des termes rotationnels présents dans les équations d'Euler linéarisées n'est pas de première importance pour ce type de problème canonique... Par suite, la modélisation avec éléments solides proposée ici afin de respecter l'hypothèse fondamentale de l'écoulement potentiel n'apporte aucun bénéfice. Elle se traduit même parfois par une dégradation des résultats.

Pour conclure l'analyse des résultats du code ACTRAN en présence d'une discontinuité de vitesse, nous présentons sur la figure 4.7 deux exemples de champ proche correspondant aux cas tests 4 et 6. La configuration numérique considérée ici est celle de la figure 4.2.b, sans éléments solides. La comparaison des deux cartographies de pression permet de visualiser la déviation des ondes sur la couche de cisaillement. Dans le cas de la figure 4.7.b, par ailleurs, on vérifie qu'en présence d'une discontinuité de vitesse dans l'écoulement moyen, le comportement du champ acoustique en sortie de conduit est tout à fait cohérent.

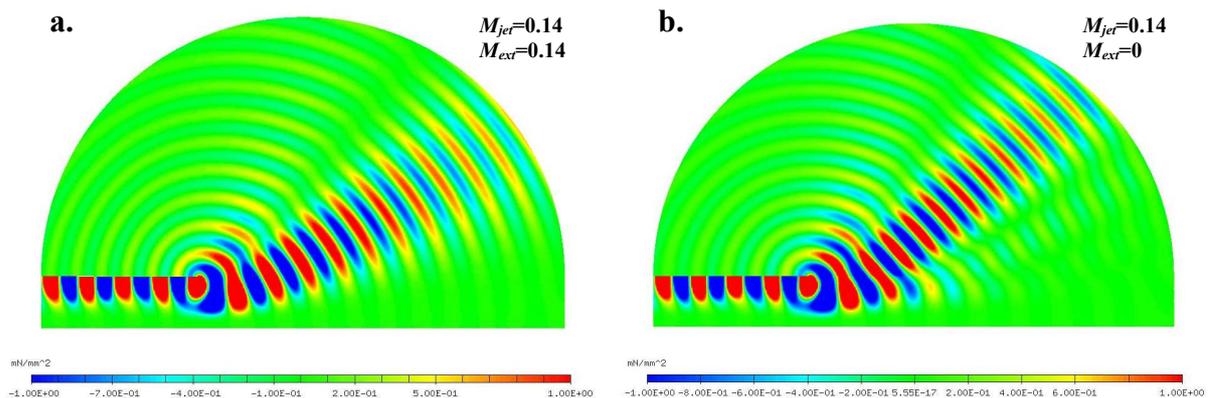


Figure 4.7 : Visualisation du champ de pression (partie réelle) au voisinage de la sortie du conduit. a. : cas test 4 ; b. : cas test 6. Mode (4,1), $k=11.7$.

4.2.6 Analyse des résultats en présence d'une discontinuité de célérité du son ou de densité moyenne

Après avoir étudié l'influence d'une différence de vitesse entre deux écoulements caractérisés par la même valeur de la célérité du son et les mêmes densités moyennes, nous analysons, dans ce dernier paragraphe, l'effet d'une discontinuité de célérité ou de densité. Il est à noter que pour chacun des cas tests considérés dans cette étude (séries 4 et 5), les vitesses moyennes de part et d'autre de la couche de cisaillement sont elles-mêmes différentes. Ainsi, le cas test 3 considérant un nombre de Mach égal à 0.5 pour le jet et 0 pour l'écoulement extérieur correspond ici à la configuration de référence. Malgré les résultats défavorables obtenus précédemment pour ce cas en présence de la membrane solide, les calculs ACTRAN ont été réalisés, à nouveau, pour les deux modèles de la figure 4.2.

Les comparaisons effectuées entre les calculs numériques et les résultats de Munt dans le cas d'une discontinuité de célérité sont présentées sur la figure 4.8. Les conclusions suivantes peuvent être formulées :

- Quel que soit le modèle numérique considéré, les calculs ACTRAN ne s'accordent pas avec les prédictions analytiques de Munt. En particulier, les résultats obtenus pour la configuration sans membrane solide, jugés satisfaisants lorsque le rapport des célérités est $\chi_c \approx 1$, sont ici totalement faux.

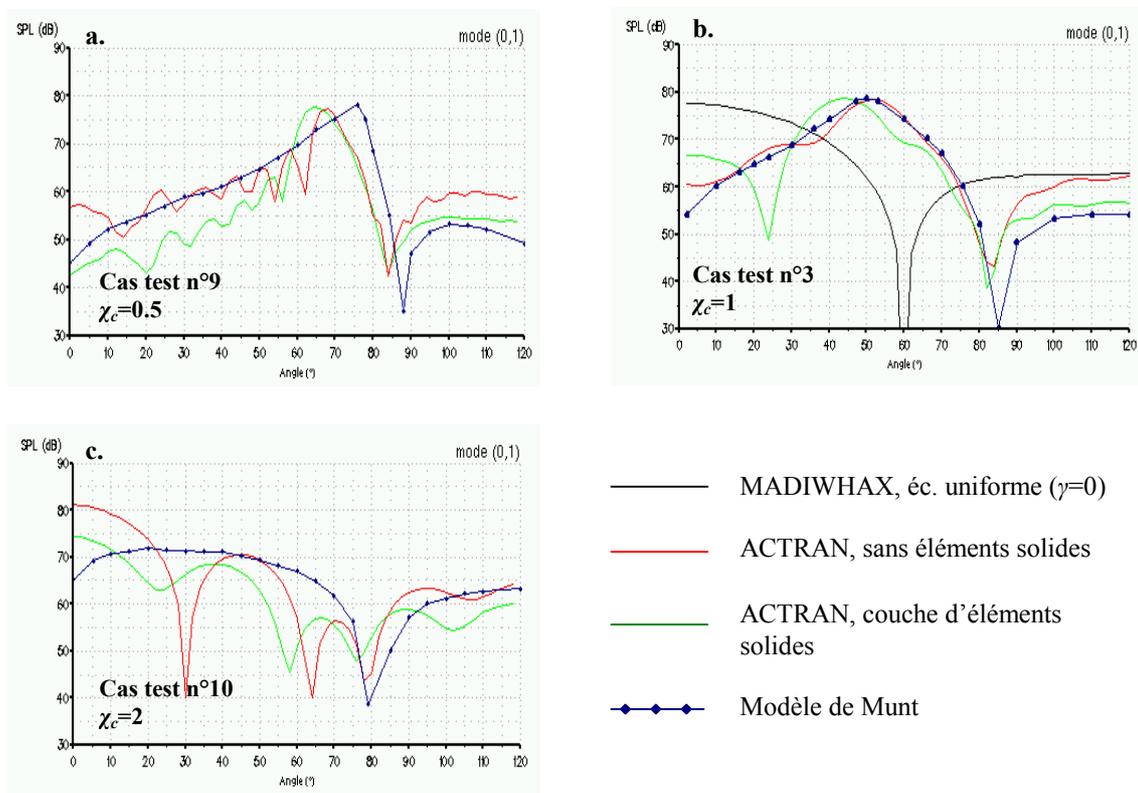


Figure 4.8 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'une discontinuité de célérité. Comparaison entre le modèle de Munt et ACTRAN. Série 4, $k=4$.

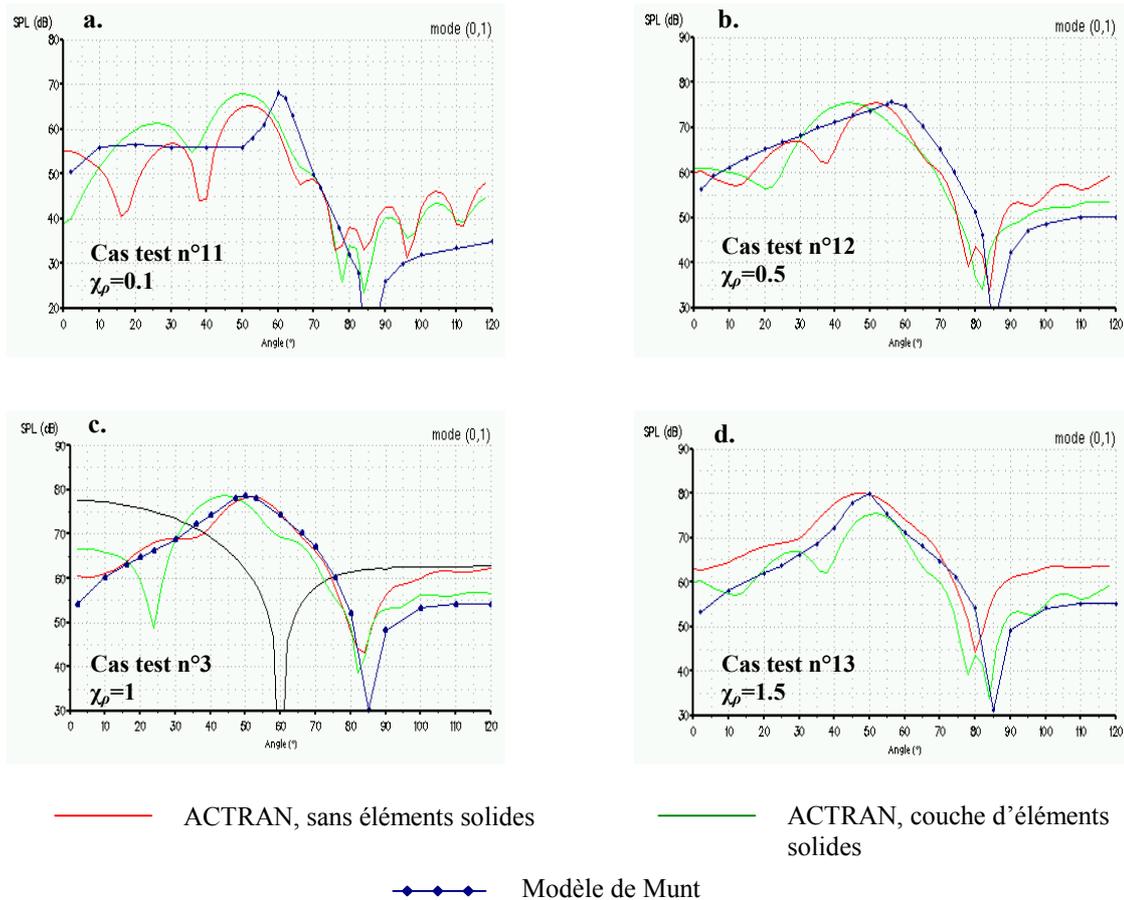


Figure 4.9 : Diagrammes de rayonnement modaux en présence d'une discontinuité de densité. Comparaison entre le modèle de Munt et ACTRAN. Série 5, $k=4$.

- A partir des résultats de Munt, on peut observer qu'un gradient de célérité se traduit par une déviation des ondes vers les faibles valeurs de c_0 . Ainsi, pour le cas test 9 (figure 4.8.a), la célérité du son dans l'écoulement environnant étant inférieure à celle du jet, le lobe principal est décalé vers les angles élevés. Pour le cas test 10 (figure 4.8.c), la configuration est inversée et le rayonnement est recentré en direction de l'axe. Comme l'a souligné Savkar [118], la déformation de la directivité modale liée à la couche de cisaillement est généralement plus importante pour une discontinuité de température (et donc de célérité) que pour une discontinuité de vitesse.

Les résultats obtenus dans le cas d'une différence de densité de part et d'autre de la ligne de glissement sont présentés sur la figure 4.9. Bien que les comparaisons entre le modèle de Munt et le calcul numérique sans éléments solides soient généralement meilleures qu'en présence d'une différence de célérité, les résultats du code ACTRAN sont à nouveau peu satisfaisants. En réalité, la réduction des écarts entre les prédictions numériques et analytiques s'explique très certainement par l'influence plus limitée de la discontinuité de densité sur le rayonnement. La position du lobe principal, en effet, semble moins affectée par le rapport des densités χ_ρ que par le rapport des célérités χ_c . L'influence des variations de densité sur la forme des directivités modales, en revanche, est bien visible.

4.3 Conclusion et perspectives

En utilisant comme référence le modèle analytique de Munt, nous avons présenté dans ce chapitre une première évaluation des résultats du code ACTRAN en présence d'une couche de cisaillement infiniment mince. Deux configurations numériques ont été proposées pour modéliser le problème. La première respecte l'hypothèse de l'écoulement potentiel mais nécessite la prise en compte d'une couche d'éléments solides entre deux milieux fluides distincts. La seconde consiste plus simplement à effectuer un calcul acoustique sur un écoulement porteur rotationnel, sachant que l'on sort alors du domaine d'hypothèse de la méthode de calcul. Finalement, les résultats obtenus pour ces deux configurations montrent que le modèle de la membrane solide n'apporte aucun bénéfice et peut donc être abandonné. En réalité, lorsque les écoulements de part et d'autre de la ligne de glissement sont caractérisés par les mêmes valeurs de la densité moyenne et de la célérité du son, les calculs effectués par ACTRAN sans éléments solides font apparaître des résultats satisfaisants. Si la couche de cisaillement s'accompagne d'une discontinuité de densité ou de célérité, en revanche, les prédictions deviennent erronées. Pour interpréter ces résultats, une analyse de l'influence des termes intervenant dans les équations d'Euler linéarisées mais négligés dans la formulation potentielle (2.18) pourrait être bénéfique... Il est à noter que les cas tests étudiés dans ce chapitre étant relativement peu nombreux, les conclusions présentées ci-dessus méritent d'être confirmées, notamment en présence d'écoulements plus importants. À titre d'exemple, les résultats du code ACTRAN pourraient être comparés, dans le cadre d'un partenariat, avec une méthode de calcul de type LEE (voir Zhang [130], Redonnet [104]...), ou avec des modèles analytiques récents (Gabard *et al.* [38]) ou à venir (Demir et Rienstra [27]).

À la lumière des résultats obtenus, toutefois, nous proposons d'utiliser dès aujourd'hui le code de calcul ACTRAN pour évaluer l'importance des phénomènes de réfraction, liés à un gradient de vitesse uniquement, sur des configurations plus pertinentes. Une étude est donc en cours de réalisation dans laquelle la méthode FEM sera appliquée sur une géométrie d'éjection réaliste, en présence d'un écoulement moyen solution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Ces deux types d'écoulement ont été déterminés par des méthodes de calcul CFD et sont représentés, pour une phase de décollage, sur la figure 4.10.

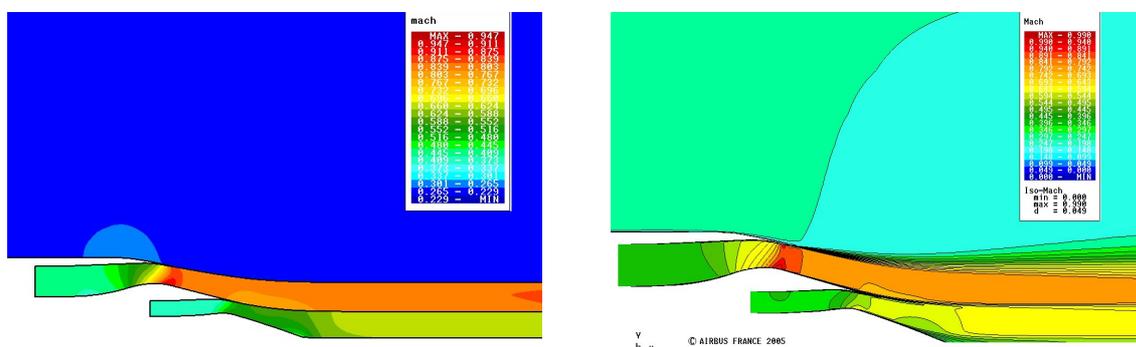


Figure 4.10 : Ecoulements de type Euler (a.) et Navier-Stokes (b.) sur une configuration réaliste d'éjection. Cartographie du nombre de Mach.

Les calculs FEM envisagés sur l'écoulement de type Euler peuvent être considérés comme une extension du problème de Munt : dans ce cas, en effet, l'écoulement environnant et les écoulements issus des conduits primaire et secondaire sont potentiels et séparés par une ligne de glissement. L'application du code ACTRAN sur un champ aérodynamique de type Navier-Stokes constitue en revanche une nouvelle étape vers la prise en compte de la complexité physique du problème de sorte que la validité des résultats obtenus sur cette configuration devra être analysée. A ce titre, il est à noter que des calculs en champ proche seront effectués également par l'ONERA (code sAbrinA) en utilisant une méthode de résolution des équations d'Euler non linéarisées (formulation en 'petites perturbations', voir Redonnet [102]).

Si l'utilisation de la méthode FEM peut être envisagée aujourd'hui pour étudier les phénomènes de réfraction sur des écoulements de type Euler, il est évident toutefois que cette solution n'est guère satisfaisante à long terme. Comme nous l'avons vu, en effet, le code ACTRAN ne permet pas de prendre en compte l'influence des gradients de densité ou de température (capitale pour le rayonnement du conduit primaire) et le comportement du code en présence de couches de cisaillement épaisses demeure incertain... C'est pourquoi, afin de se doter d'une méthode de calcul adaptée au problème de l'éjection, AIRBUS participe actuellement, en tant que partenaire industriel, au projet de recherche européen MESSIAEN. Le code ACTRAN_DGM développé dans ce projet devra répondre, entre autres, aux besoins industriels évoqués dans ce mémoire. Citons notamment la prise en compte des points suivants :

- écoulement stationnaire visqueux avec couches de mélange, gradients de densité et de température,
- géométries tridimensionnelles complexes,
- conditions aux limites rigides ou traitées,
- définition des sources sous la forme de modes de conduit,
- calcul du rayonnement en champ lointain.

Les contraintes en temps de calcul, également, sont étudiées au cours du projet. Le code ACTRAN_DGM est basé sur une résolution temporelle des équations d'Euler linéarisées. La méthode de discrétisation spatiale choisie est la méthode de Galerkin discontinue (d'où le nom du code, DGM signifiant Discontinuous Galerkin Method). Le principe est le suivant : la formulation conservative des équations d'Euler est multipliée par une fonction test (vectorielle) puis intégrée pour aboutir à une forme variationnelle. Contrairement à la méthode de Galerkin classique abordée au paragraphe 2.2.2, cette formulation variationnelle est écrite pour chaque élément de maillage. Aucune hypothèse de continuité n'est effectuée sur l'ensemble du domaine et le couplage entre les éléments adjacents se fait par l'intermédiaire de termes de flux correspondant aux intégrales surfaciques. Cette approche possède plusieurs avantages numériques comme le fait d'aboutir à des systèmes facilement parallélisables ou la possibilité d'adapter l'ordre des fonctions de base pour chaque élément... Précisons que le rayonnement en champ lointain sera calculé par une formulation intégrale de type Ffowcs-Williams / Hawkings.

Les premières versions du code ACTRAN_DGM devraient être disponibles au milieu de l'année 2006. Cette méthode de calcul LEE élargira nos possibilités de modélisation à la prise en compte d'écoulements porteurs beaucoup plus réalistes. Nous envisageons de poursuivre les travaux de la thèse en appliquant cette nouvelle méthode aux cas tests présentés dans ce mémoire et en confrontant les résultats obtenus dans un cas réaliste avec ceux du code de

calcul sAbrinA de l'ONERA. Enfin, la validation de la méthode ne pourra être complète qu'en effectuant une comparaison entre la simulation numérique et l'expérience en présence d'écoulement, ce qui constitue l'un des objectifs du projet européen TURNEX. Un dispositif de génération/détection modale similaire à celui présenté dans notre étude sera utilisé dans des conduits d'éjection secondaires et primaires, en présence de différents jets, et placé dans la chambre sourde de QINETIQ. Les résultats de mesure seront confrontés aux prédictions d'ACTRAN_DGM et nous espérons aboutir à une validation du même type que celle obtenue pour l'entrée d'air (voir la comparaison des résultats d'ACTRAN avec des mesures expérimentales [66]).

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'étude de la propagation et du rayonnement acoustiques des conduits d'éjection et a été réalisé autour de trois objectifs principaux. Le premier était de développer des méthodes de calcul analytiques permettant de modéliser le problème de façon souple et rapide. Le second consistait à évaluer, pour les conduits d'éjection, la pertinence de différentes méthodes de calcul numériques et asymptotiques utilisées jusqu'ici sur le problème de l'entrée d'air. Le dernier objectif, enfin, était d'améliorer notre compréhension des phénomènes physiques gouvernant la propagation et le rayonnement acoustiques des conduits d'éjection.

Afin de remplir ces objectifs, nous avons suivi une démarche d'analyse progressive en n'hésitant pas à partir de configurations simples pour intégrer les différents éléments de complexité physique les uns après les autres. Les deux premiers chapitres du mémoire ont ainsi été consacrés à l'étude de configurations canoniques définies par des conduits annulaires de section constante, en présence de traitements acoustiques et d'un écoulement uniforme. Une première méthode de calcul analytique a été présentée (code MADIWHAX) puis utilisée en tant que référence pour évaluer les méthodes numériques BEM (code ACTI3S) et FEM (code ACTRAN) et la méthode asymptotique SFG (code VOXLAN). La comparaison des résultats des différentes approches et la confrontation des calculs ACTRAN et MADIWHAX avec l'expérience ont permis de vérifier la pertinence des méthodes numériques à basses fréquences mais ont souligné les limitations de la formulation asymptotique SFG. L'influence des caractéristiques géométriques des conduits d'éjection sur la propagation et le rayonnement acoustiques a ensuite été analysée de manière détaillée. En particulier, une nouvelle méthode analytique (code BIFIDUCT) a été développée pour modéliser l'effet des bifurcations sur la propagation en conduit. Le travail présenté dans ce mémoire, enfin, s'est achevée par une première évaluation de l'influence d'un écoulement non uniforme en considérant le rayonnement d'un conduit circulaire en présence d'une couche de cisaillement infiniment mince séparant deux écoulements uniformes. Les prédictions du modèle analytique de Munt [86] ont alors été utilisées comme base de référence pour évaluer la pertinence du calcul par éléments finis de volume sur ce type de configuration.

Synthèse des principaux résultats

Le point de départ de notre étude a été le développement du code de calcul analytique MADIWHAX. Le modèle est basé sur la théorie modale fréquemment utilisée pour décrire les phénomènes de propagation à l'intérieur des guides d'onde. L'éjection est assimilée à un conduit annulaire de section constante, comportant éventuellement des parties traitées. L'écoulement est supposé uniforme. La théorie modale est écrite sous forme matricielle en tenant compte des phénomènes de diffraction aux discontinuités d'impédance par

l'intermédiaire d'une méthode de raccordement modal. Pour évaluer le rayonnement en champ lointain et la réflexion des ondes à l'extrémité du conduit, le calcul de la propagation modale est couplé à un calcul de diffraction sur la section de sortie. Deux modèles théoriques ont été retenus pour effectuer ce couplage. Le premier est le modèle de Rienstra [111], basé sur la technique de Wiener-Hopf. Il fournit une solution exacte du problème pour un conduit sans épaisseur avec corps central infini et offre le choix de la condition à la limite à appliquer au bord de fuite (avec ou sans échappement tourbillonnaire). Le second correspond au modèle de la membrane bafflée et aboutit à une solution approchée dans le cas d'un corps central tronqué sur la section de sortie.

Le champ de pression rayonné par un mode de conduit annulaire est caractérisé par différents domaines angulaires qui peuvent être interprétés à l'aide de la théorie géométrique de la diffraction de Keller. On distingue ainsi la zone de silence, aux faibles angles $\theta < \theta_m$, qui dépend uniquement de l'ordre azimutal du mode considéré et dans laquelle aucune énergie acoustique n'est rayonnée ; la zone principale de rayonnement, en aval de l'éjection $\theta_m < \theta < \pi/2$, qui présente une structure en forme de lobes et d'extinction ; et enfin la zone de rayonnement amont, qui fait apparaître une évolution plus lente de la directivité, sans extinction. Cette décomposition du rayonnement modal en trois régions angulaires est valable pour toute configuration canonique annulaire. La position des lobes et des extinctions, cependant, est dépendante de la longueur du corps central. De façon générale, la prise en compte d'un écoulement uniforme se traduit par un recentrage du lobe principal à proximité de l'axe et par une augmentation du nombre de lobes secondaires. En présence d'un écoulement, les effets de viscosité au bord de fuite du conduit peuvent être modélisés par l'application de la condition de Kutta. Celle-ci provoque une diminution du rayonnement pour les angles situés au-delà du lobe principal et une augmentation, plus limitée, pour les angles situés en deçà. Enfin, si le conduit comporte des traitements acoustiques, les redistributions modales aux ruptures d'impédance et l'atténuation dans les parties traitées modifient fortement le rayonnement acoustique, tant en terme de niveau rayonné qu'en terme de directivité.

Les comparaisons entre la méthode analytique MADIWHAX et les méthodes numériques BEM et FEM sur des configurations canoniques de conduits d'éjection ont permis de vérifier la cohérence des différentes approches en l'absence d'écoulement. Quelle que soit la géométrie considérée, les directivités et les niveaux de pression calculés en champ lointain par les modèles numériques et analytiques sont identiques, en conduit rigide comme en conduit traité. En particulier, l'atténuation et les redistributions modales induites par les traitements acoustiques sont correctement modélisées par les méthodes de calcul numériques. Dans le cas du corps central infini, l'accord entre les différentes approches sur la phase de la pression rayonnée est également vérifié. En configuration tronquée, en revanche, les prédictions de l'approximation de la membrane bafflée en terme de phase ne sont pas satisfaisantes mais ceci ne remet pas en cause la validité des méthodes numériques, qui demeurent cohérentes. Enfin, la comparaison des directivités obtenues pour les deux configurations analytiques et une géométrie plus réaliste avec corps central intermédiaire illustre la nécessité d'avoir recours aux méthodes de calcul numériques pour évaluer précisément le rayonnement en champ lointain. Si l'on souhaite effectuer une étude paramétrique rapide, cependant, le modèle

analytique avec corps central infini fournira une meilleure approximation du rayonnement d'un moteur à flux séparés que le modèle de la membrane bafflée¹.

De manière générale, la prise en compte d'un écoulement uniforme dans la méthode FEM est problématique car une telle hypothèse est incompatible avec la condition d'imperméabilité qui doit être vérifiée sur les parois de l'éjection. Pour certaines configurations, toutefois, il est possible de contourner le problème en considérant une paroi de conduit sans épaisseur. La comparaison entre le modèle analytique de Rienstra et les méthodes numériques fait alors apparaître deux familles de solution : la méthode par éléments finis de volume (FEM) converge vers la solution analytique « continue », sans échappement tourbillonnaire, tandis que le calcul par éléments finis de frontière s'accorde avec la « solution de Kutta », avec échappement tourbillonnaire. Les différences de comportement entre les deux méthodes numériques s'expliquent par la variable de base (potentiel ou pression acoustiques) considérée dans chacun des codes.

Pour confirmer de manière définitive la validité des modèles de calcul, une étude expérimentale sans écoulement a été réalisée au Laboratoire d'Acoustique d'AIRBUS France. Trois configurations de conduits annulaires ont été testées, en présence ou non de matériaux absorbants. L'excitation acoustique était assurée par un anneau de génération modale, permettant de contrôler l'ordre azimutal des modes envoyés à la source. Le champ de pression se propageant dans le conduit et le rayonnement vers l'extérieur étaient ensuite mesurés à l'aide, respectivement, de deux anneaux de détection modale et d'un arc de microphones. Quelle que soit la configuration considérée, les résultats en champ lointain ont fait apparaître un très bon accord entre la mesure et les prédictions numériques, avec un niveau de précision rarement observé pour de telles applications. Ainsi, l'étude expérimentale a permis, d'une part, de confirmer les capacités du banc de mesure développé à AIRBUS et, d'autre part, de vérifier que les modèles théoriques utilisés dans notre étude reproduisent correctement la réalité physique en l'absence d'écoulement.

Les méthodes numériques BEM et FEM étant basées sur une discrétisation du problème directement liée aux longueurs d'onde considérées, leur emploi est limité à des fréquences relativement faibles (pour des études industrielles en trois dimensions, on pourra retenir les domaines d'application suivant : $k < 50$ pour la méthode BEM et $k < 30$ pour la méthode FEM). Afin de couvrir l'ensemble du spectre présentant un intérêt industriel, nous avons donc voulu évaluer, pour les hautes fréquences, la méthode asymptotique SFG. La comparaison des résultats de VOXLAN et de MADIWHAX sur des configurations canoniques annulaires a alors mis en évidence les limitations de la méthode asymptotique dès que la géométrie considérée est composée d'un corps central. Une étude a donc été menée pour comprendre l'origine de la dégradation des résultats de VOXLAN en conduit annulaire. Finalement, l'hypothèse la plus probable est qu'il n'est pas possible de négliger la diffraction sur le corps central, même pour les fréquences élevées considérées ici...

De manière générale, la géométrie des conduits d'éjection est relativement complexe, ce qui rend l'approximation du conduit annulaire plus discutable que l'approximation circulaire souvent utilisée en entrée d'air. Pour analyser les phénomènes de propagation et de rayonnement acoustiques associés à des configurations plus réalistes, une étude a donc été proposée, en considérant les principaux facteurs géométriques des conduits d'éjection les uns

¹ Le cas d'un moteur à flux mélangés n'a pas été considéré dans le cadre de la thèse. Il est probable cependant que pour ce type de configuration, le modèle de rayonnement des conduits circulaires de Lordi et Homicz [48] sera le mieux adapté.

après les autres. Dans un premier temps, un modèle analytique de la propagation acoustique dans un conduit avec bifurcations a été développé (code BIFIDUCT). Il s'appuie sur une géométrie de conduit annulaire de section constante comprenant, sur un tronçon de longueur donnée, deux parois verticales supposées rigides et sans épaisseur. Les phénomènes de diffraction aux discontinuités de géométrie sont modélisés à l'aide d'une méthode de raccordement modale combinant des modes d'ordres radiaux et azimutaux différents. L'analyse des résultats du code BIFIDUCT montre que l'énergie d'un mode annulaire incident est redistribuée, au-delà du tronçon central avec bifurcations, sur des modes de même parité azimutale. L'importance des redistributions modales augmente par ailleurs avec l'angle d'enroulement du mode annulaire incident. De nombreux calculs numériques BEM ont ensuite été effectués pour étudier l'influence des principaux facteurs géométriques associés à l'éjection d'un moteur à flux séparés. Les conclusions suivantes ont alors été formulées. Tout d'abord, l'efficacité des traitements acoustiques disposés sur les parois des bifurcations est très dépendante du champ incident considéré : elle est ainsi relativement décevante pour les premiers modes passants ou pour une excitation multimodale mais devient conséquente pour les modes à fort taux d'enroulement. Ensuite, les variations de section le long d'un conduit secondaire et la forme réelle des bifurcations induisent des redistributions d'énergie sur l'ensemble des modes passants qui sont non négligeables et difficilement prévisibles *a priori*. Par suite, le rayonnement en champ lointain est fortement influencé par ces deux éléments, les bifurcations se traduisant en particulier par une perte de la symétrie de révolution du champ rayonné. Enfin, à l'extérieur du conduit, le mâ-t-réacteur semble relativement peu influencer le rayonnement en direction du sol, bien que cette affirmation demande à être confirmée en présence d'écoulement. Malgré ce dernier résultat, toutefois, l'analyse effectuée au cours de cette étude montre la nécessité de prendre en compte les principaux éléments de géométrie du problème pour prédire correctement le rayonnement acoustique des conduits d'éjection.

Pour finir, nous avons abordé l'influence d'un écoulement non uniforme en considérant les résultats de la méthode numérique FEM sur le problème analytique de Munt. Celui-ci correspond au rayonnement d'un conduit circulaire en présence d'une couche de cisaillement infiniment mince séparant deux écoulements uniformes. Deux configurations numériques ont été proposées pour modéliser le problème. La première vérifie l'hypothèse de l'écoulement potentiel effectuée dans ACTRAN mais nécessite la prise en compte d'une couche d'éléments solides entre deux milieux fluides distincts. La seconde consiste à effectuer un calcul acoustique sur un écoulement moyen non potentiel, sachant que l'on ne respecte plus alors les hypothèses fondamentales de la méthode de calcul. Finalement, les résultats obtenus pour les deux configurations numériques montrent que le modèle de la membrane solide n'apporte aucun bénéfice. En effet, lorsque les écoulements de part et d'autre de la couche de cisaillement sont caractérisés par les mêmes valeurs de la densité moyenne et les mêmes températures, les prédictions du code ACTRAN sans éléments solides sont tout à fait satisfaisantes. En présence d'une discontinuité de température ou de densité, en revanche, aucun des deux modèles numériques ne converge vers la solution analytique de Munt. L'ensemble de ces résultats demande à être confirmé sur des configurations plus réalistes mais en première approximation, il semble que les effets de réfraction sur une couche de cisaillement liés aux seules variations de vitesse sont correctement reproduits par le modèle potentiel d'ACTRAN. Il est à noter, enfin, que ces effets de réfraction se traduisent par une forte déviation du rayonnement acoustique vers les angles élevés. Pour effectuer des prédictions plus réalistes du rayonnement des conduits d'éjection, il est donc impératif de tenir compte des couches de cisaillement dans nos modèles de calcul.

Applications et perspectives

Le développement des méthodes analytiques et la validation des méthodes numériques proposés au cours de la thèse ont permis d'étendre de façon considérable les capacités de modélisation du rayonnement des conduits d'éjection au sein d'AIRBUS. Ainsi, différentes méthodes complémentaires peuvent être utilisées aujourd'hui dans les études d'insonorisation des tuyères de turboréacteur. Le code de calcul MADIWHAX, tout d'abord, peut être intégré au processus d'optimisation des traitements acoustiques qui nécessite des études paramétriques souples et rapides, incompatibles actuellement avec l'utilisation des méthodes numériques. Celles-ci, en revanche, offrent la possibilité d'étudier de nouvelles technologies de réduction du bruit et d'évaluer, de façon plus ponctuelle, l'influence de quelques paramètres sur les solutions à moindre bruit. Le code ACTRAN, ainsi, est d'ores et déjà employé pour mesurer l'effet d'un écoulement non uniforme sur l'efficacité des traitements acoustiques à l'intérieur d'un conduit. De nombreux travaux basés sur l'utilisation du code ACTI3S doivent également débuter dans le prolongement de la thèse. Ils porteront, notamment, sur une première optimisation de la disposition des traitements acoustiques dans un conduit d'éjection froide et sur l'évaluation de nouvelles configurations de bifurcations (forme, position, nombre...). D'autres solutions seront également évaluées dans le cadre d'études internes ou de projets européens : nous pensons, en particulier, au traitement des parties externes aux conduits (capot moteur, cône...), à une inclinaison de la section de sortie des éjections vers le ciel, ou encore à une modification de la forme des conduits en termes de courbure ou de rapport de rayon. Aujourd'hui, le potentiel de réduction du bruit rayonné par les conduits d'éjection semble relativement important. Sur la base des développements effectués dans cette étude, l'insonorisation des tuyères de turboréacteur va donc constituer l'un des objectifs majeurs du département acoustique d'AIRBUS.

Au-delà de la validation des méthodes de calcul, l'étude expérimentale présentée dans ce mémoire a confirmé les capacités du banc de mesures développé au Laboratoire d'Acoustique d'AIRBUS France. Celui-ci peut donc être utilisé aujourd'hui comme un outil de contrôle ou d'évaluation des technologies à moindre bruit. Une campagne de mesures portant sur les effets d'installation en configuration non conventionnelle a déjà été réalisée dans le cadre du projet national LNA2, en partenariat avec l'ONERA. De nouveaux essais sont également prévus en configuration isolée pour mesurer l'influence des bifurcations sur le rayonnement acoustique.

Pour poursuivre les travaux réalisés dans le cadre de la thèse et améliorer nos capacités de modélisation, plusieurs axes d'amélioration peuvent aujourd'hui être proposés :

- Concernant les méthodes analytiques, tout d'abord, la programmation d'un modèle de rayonnement tenant compte des effets de réfraction sur une couche de cisaillement infiniment mince semble indispensable pour déterminer plus précisément les directivités en champ lointain. Nous avons vu, en effet, qu'une faible variation de vitesse à travers les couches de mélange se traduit par une déviation importante de la direction principale de rayonnement. L'effet des gradients de température, également, est primordial. Actuellement, le modèle de Gabard *et al.* [38] est le mieux adapté à notre problème et le seul capable de modéliser le rayonnement d'un conduit annulaire en présence d'une couche de cisaillement. Un modèle équivalent, cependant, est en cours de développement dans le cadre du projet européen TURNEX... Afin de considérer des conduits circulaires ou annulaires à section lentement variables, la méthode des échelles multiples de Rienstra [113] peut être couplée à la méthode de

raccordement aux discontinuités d'impédance utilisée dans MADIWHAX. Ces développements ont été entrepris à AIRBUS et sont finalisés aujourd'hui pour modéliser le rayonnement des entrées d'air (code de calcul RIDIWHAX). En configuration d'éjection, toutefois, le couplage des deux méthodes demande à être validé et un module de rayonnement devra être intégré au code de calcul... Enfin, différentes améliorations du code de calcul BIFIDUCT peuvent être envisagées, comme le couplage du modèle de propagation avec un module de rayonnement ou la prise en compte de traitements acoustiques sur les parois des bifurcations... La validité de la formulation actuelle en présence d'un écoulement uniforme doit également être évaluée, ce qui pose la question de l'application d'une condition de Kutta au bord de fuite des bifurcations et de son influence sur les redistributions modales...

- L'imprécision des résultats de la méthode SFG en conduit annulaire a été attribuée à l'absence de modèle de diffraction dans le calcul asymptotique. Une hybridation de VOXLAN avec un code de recherche de rayon incluant la théorie géométrique de la diffraction est donc en cours de réalisation. La nouvelle version du code sera disponible au cours de l'année 2006 et devrait se traduire par une amélioration sensible des résultats... Dans le cas contraire, la méthode de l'équation parabolique pourrait constituer une solution alternative.
- Enfin, pour étendre nos capacités de modélisation à la prise en compte d'écoulements porteurs plus réalistes, il est nécessaire aujourd'hui de se tourner vers de nouvelles méthodes de calcul numériques. En effet, malgré quelques résultats encourageants, la formulation potentielle utilisée dans ACTRAN est peu adaptée, de façon générale, au problème de l'éjection. A l'heure actuelle, les méthodes basées sur la résolution des équations d'Euler linéarisées semblent être les plus à même de modéliser le rayonnement des conduits d'éjection car elles sont applicables sur tout type d'écoulement porteur et permettent, pour les basses fréquences, de traiter des problèmes à grande échelle. C'est pourquoi AIRBUS participe actuellement au projet européen MESSIAEN dont le principal objectif est de développer le code de calcul ACTRAN_DGM, basé sur une résolution temporelle des équations d'Euler linéarisées. Les premières versions du code seront disponibles dans le courant de l'année 2006. Nous intégrerons alors cette nouvelle méthode à nos outils de prédiction en suivant une démarche de validation progressive. Les résultats du code ACTRAN_DGM seront évalués sur les cas tests canoniques considérés dans cette étude puis confrontés, sur des configurations plus réalistes, aux prédictions du code sAbrinA de l'ONERA (formulation en petites perturbations des équations d'Euler). Enfin, la validation complète d'ACTRAN_DGM ne sera effective qu'après comparaison des résultats avec des mesures expérimentales en soufflerie, ce qui constitue l'un des objectifs du programme européen TURNEX.

À long terme, le développement de méthodes de calcul adaptées au problème de l'éjection devra nous permettre d'effectuer des simulations de plus en plus réalistes, l'un des objectifs étant de pouvoir reproduire de manière satisfaisante les résultats de mesure au banc statique du motoriste.

Parallèlement à l'amélioration et à la validation de nos outils de prédiction, plusieurs études devront être menées pour progresser dans la compréhension des phénomènes

physiques gouvernant le rayonnement acoustique des conduits d'éjection. Ainsi, si nous avons largement favorisé le bruit de soufflante aval au cours de la thèse, il sera intéressant également d'améliorer nos connaissances sur le rayonnement du bruit de turbine dont la contribution au bruit total de l'avion est parfois non négligeable (en approche généralement). Enfin, pour prédire correctement le rayonnement acoustique des conduits d'éjection, il semble indispensable de tenir compte des effets d'installation du moteur. Des études sur le sujet sont d'ores et déjà en cours dans le cadre de projets nationaux ou européens, en configuration conventionnelle (moteurs sous la voilure), ou en configurations non conventionnelles (moteurs sur la voilure, moteurs à l'arrière du fuselage avec empennage en « U » ou en « V », projets NACRE, LNA2).

Références bibliographiques

- [1] Abom, M. : 1989, 'Modal decomposition in ducts based on transfer function measurements between microphones'. *Journal of Sound and Vibration* 135(1), pp. 95-114.
- [2] Abramowitz, M. and I. A. Stegun : 1964, 'Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables'. New York : Dover Publications.
- [3] Ahuja, V., Y. Ozyoruk and L. N. Long : 2000, 'Computational simulations of fore and aft radiation from ducted fans'. 6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hawaii, 2000-1943.
- [4] Arguillat, B. : 2002, 'Modélisation de la propagation acoustique dans les conduits d'éjection des nacelles de turboréacteur. Recomposition modale aux discontinuités d'impédance'. Rapport de stage de DEA, Airbus France, École Centrale de Lyon.
- [5] Astley, R. J., G. J. Macaulay and J. P. Coyette : 1994, 'Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering'. *Journal of Sound and Vibration* 170(1), pp. 97-118.
- [6] Batard, H. : 2005, 'Development of the quiet aircraft. Industrial needs in terms of aircraft noise and main achievements in Europe'. Forum Acusticum, Budapest.
- [7] Bechert, D. and E. Pfizenmaier : 1975, 'Optical compensation measurements on the unsteady exit condition at a nozzle discharge edge'. *J. Fluid Mech.* 71, part 1, pp. 123-144.
- [8] Bechert, D., U. Michel and E. Pfizenmaier : 1977, 'Experiments on the transmission of sound through jets'. 4th AIAA Aeroacoustics Conference, Atlanta, Georgia, AIAA Paper 77-1278.
- [9] Bechert, D. W. : 1980, 'Sound absorption caused by vorticity shedding, demonstrated with a jet flow'. *Journal of Sound and Vibration* 70(3), pp. 389-405.
- [10] Bechet, N. : 2001, 'Modélisation analytique du rayonnement acoustique vers l'aval des nacelles de turboréacteurs'. Rapport de stage de DEA, Airbus France, École Centrale de Lyon.
- [11] Bes, C., S. Jan, M. Mongeau et Y. Qiu : 2004, 'Logiciel de calcul des valeurs propres dans un conduit annulaire traité infini en présence d'un écoulement uniforme'. Rapport SARL MATAP.
- [12] Boden, H. and M. Abom : 1986, 'Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts'. *J. Acoust. Soc. Am.* 79 (2), February 1986, pp. 541-549.

- [13] Brentner, K. B. and F. Farassat : 1998, 'An analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surface'. AIAA Journal, Vol. 36, No. 8, pp. 1376-1386.
- [14] Bridge, J. F. and S. W. Angrist : 1962, 'An extended table of roots of $J'_n(x)Y'_n(\beta x) - J'_n(\beta x)Y'_n(x) = 0$ ', Maths Comput. 16, pp. 198-204.
- [15] Bruneau, M. : 1998, 'Manuel d'acoustique fondamentale'. Paris : Hermès.
- [16] Candel, S. M. : 1973, 'Acoustic radiation from the end of a two-dimensional duct, effects of uniform flow and duct lining'. Journal of Sound and Vibration 28(1), pp. 1-13.
- [17] Candel, S. M. : 1977, 'Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics'. J. Fluid Mech. 83, pp. 465-493.
- [18] Cargill, A. M. : 1979, 'Low frequency sound radiation due to the interaction of unsteady flows with a jet pipe'. Proceedings of Symposium on Mechanics on Sound Generation in Flows, Göttingen (editer E.-A. Müller), pp. 19-25.
- [19] Cargill, A. M. : 1982, 'The radiation of high frequency sound out of a jet pipe'. Journal of Sound and Vibration 83(3), pp. 313-337.
- [20] Carrier, G. F. : 1956, 'Sound transmission from a tube with flow'. Quarterly of Applied Mathematics, 13, pp. 457-461.
- [21] Casalino, D., P. Di Francescantonio and Y. Druon : 2004, 'GFD predictions of fan noise propagation'. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, UK 2004-2989.
- [22] Cerveny, V., I. Psencik and M. Popov : 1982, 'Computation of wave fields in inhomogeneous media, Gaussian beam approach'. J. Geophysics Roy. Astr. Soc. 70, pp. 109-128.
- [23] Chapman, C. J. : 2000, 'Similarity variables for sound radiation in a uniform flow'. Journal of Sound and Vibration 233(1), pp. 157-164.
- [24] Chapman, C. J. : 1994, 'Sound radiation from a cylindrical duct. Part 1. Ray structure of the duct modes and of the external field'. J. Fluid Mech. 281, pp. 293-311.
- [25] Chapman, C. J. : 1996, 'Sound radiation from a cylindrical duct. Part 2. Source modeling, nil-shielding directions and the open-to-ducted transfer function'. J. Fluid Mech. 313, pp. 367-380.
- [26] Chu, B. T. and L. S. G. Kovaszny : 1958, 'Interactions in a viscous heat-conducting compressible gas'. J. Fluid Mech. 3.
- [27] Demir, A. and S. W. Rienstra : 2006, 'Sound radiation from an annular duct with jet flow and a lined center body'. Paper submitted to the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, USA, May 2006.

- [28] Di Francescantonio, P. and D. Casalino : 1999, 'Green's Function Discretization scheme for sound propagation in non-uniform flows'. AIAA Journal, Vol. 37, No. 10, October 1999.
- [29] Druon, Y., S. Lidoine and M. Roger : 2004, 'Acoustic radiation modeling of engine exhaust. Comparisons between analytical and numerical methods'. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, United Kingdom, 2004-2990.
- [30] Dougherty, R. P. : 1996, 'Nacelle acoustic design by ray tracing in three dimensions'. 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, State College, Pennsylvania, 96-1773.
- [31] Envia, E. : 2002, 'Fan noise reduction : an overview'. International Journal of Aeroacoustics, volume 1, number 1, 2002, pp. 43-64.
- [32] Eversman, W. : 1975, 'Computation of axial and transverse wave numbers for uniform two-dimensional ducts using a numerical integration scheme'. Journal of Sound and Vibration 41(2), pp. 252-255.
- [33] Eversman, W. : 1995, 'Aft fan duct acoustic radiation'. First CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference, München, 95-155.
- [34] Eversman, W. and D. Okunbor : 1998, 'Aft fan duct acoustic radiation'. Journal of Sound and Vibration 213(2), pp. 235-257.
- [35] Eversman, W. : 1999, 'Mapped infinite wave envelope elements for acoustic radiation in a uniformly moving medium'. Journal of Sound and Vibration 224(4), pp. 665-687.
- [36] Faivre-Pierret, A. : 2000, 'Modélisation de la propagation acoustique dans un conduit annulaire parcouru par un écoulement et tapissé de matériaux insonorisants'. Rapport de stage, EADS Airbus, ENSEEIHT.
- [37] Flori, A. and J. C. Houdebine : 2004, 'Étude du rayonnement acoustique haute fréquence par sommation des faisceaux gaussiens'. Document de justification théorique, société Aristè, version du 19 juin 2004.
- [38] Gabard, G., J. Astley and M. Ben Tahar : 2005, 'Noise radiation from a jet pipe : A benchmark problem for computational aeroacoustics'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-3064.
- [39] George, T. : 1987, 'Une approximation haute fréquence de l'équation des ondes : la sommation de faisceaux gaussiens. Méthodologie, tests et applications sismologiques'. Thèse de Doctorat ès Science de la Terre, Université Paris VI.
- [40] Golubev, V. V. and H. M. Atassi : 1996, 'Sound propagation in an annular duct with mean potential swirling flow'. Journal of Sound and Vibration 198(5), pp. 601-616.
- [41] Goldstein, M. E. : 1981, 'The coupling between flow instabilities and incident disturbances at a leading edge'. J. Fluid Mech. 104, pp. 217-246.
- [42] Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik : 1980, 'Table of integrals, series and products – Corrected and enlarged edition'. Academic Press.

- [43] Hamdi, M. A. : 1982, 'Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains'. Thèse de Doctorat d'État ès Sciences, Université de Technologie de Compiègne.
- [44] Harel, P. and M. Perulli : 1971, 'The influence of a stationary uniform axial flow on the propagation of acoustic modes of vibration in a cylindrical duct'. *Journal of Sound and Vibration* 15(4), pp. 455-474.
- [45] Heavens, S. N. : 1978, 'An experimental study of sound diffraction at an airfoil trailing edge'. *J. Fluid Mech.* 84, part2, pp. 331-342.
- [46] Hocter, S. T. : 1999, 'Exact and approximate directivity patterns of the sound radiated from a cylindrical duct'. *Journal of Sound and Vibration* 227(2), pp. 397-407.
- [47] Hocter, S. T. : 2000, 'Sound radiated from a cylindrical duct with Keller's geometrical theory'. *Journal of Sound and Vibration* 231(5), pp. 1243-1256.
- [48] Homicz, G. F. and J. A. Lordi : 1975, 'A note on the radiative directivity patterns of ducts acoustic modes'. *Journal of Sound and Vibration* 41(3), pp. 283-290.
- [49] Howe, M. S. : 1980, 'The dissipation of sound at an edge'. *Journal of Sound and Vibration* 70(3), pp. 407-411.
- [50] Ingard, U. : 1959, 'Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reflection, absorption and transmission'. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 31 (1959), pp. 1035-1036.
- [51] Joshi, M. C., R. E. Kraft and S. Y. Son : 1982, 'Analysis of sound propagation in an annular ducts with segmented treatment and sheared flow'. 20th AIAA Aeroacoustics Conference, Orlando, 82-0123.
- [52] Keller, J. B. : 1957, 'Diffraction by an aperture'. *Journal of Applied Physics* 28, pp. 426-444.
- [53] Keller, J. B, R. M. Lewis and B. D. Seckler : 1957, 'Diffraction by an aperture II'. *Journal of Applied Physics* 28, pp. 570-579.
- [54] Kempton, A. J. : 1980, 'Ray theory to predict the propagation of broadband noise fan noise'. 6th AIAA Aeroacoustics Conference, Hartford, Connecticut, 80-0968
- [55] Ko, S. H. : 1973, 'Theoretical prediction of sound attenuation in acoustically lined annular ducts in the presence of uniform flow and shear flow'. *The Journal of the Acoustical Society of America*, volume 5, number 6, pp. 1592-1606.
- [56] Lan, J. H. : 2001, 'Turbofan duct propagation model', NASA CR 2001-211245.
- [57] Lansing, D. L. : 1969, 'Exact solution for radiation of sound from a semi infinite circular duct with application to fan and compressor noise'. NASA SP-228, pp. 323-333.

- [58] Lansing, D. L. and W. E. Zorumski : 1973, 'Effects of wall admittance changes on duct transmission and radiation of sound'. *Journal of Sound and Vibration* 27(1), pp. 85-100.
- [59] Lele, S. K. : 1997, 'Computation Aeroacoustics : a review'. 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV, January 6-10, AIAA Paper 97-0018.
- [60] Levine, H. and J. Schwinger : 1948, 'On the radiation of sound from an unflanged circular pipe'. *Physical Review* 73(4), pp. 383-408.
- [61] Léwy, S. : 1988, 'Exact and simplified computation of noise radiation by an annular duct'. *Inter-noise* 88, pp. 1559-1563.
- [62] Léwy, S. : 2001 : 'Acoustique industrielle et aéroacoustique'. Hermès Science Europe.
- [63] Li, X. D., N. Schönwald and F. Thiele : 2001, 'Numerical computation of sound propagation and radiation in a duct'. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, the Netherlands, 2001-2179.
- [64] Lidoine, S., M. Roger, H. Batard, A. Delnevo and S. Troyes : 2001, 'Acoustic radiation modelling of aeroengine intake : comparison between analytical and numerical methods'. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, the Netherlands, 2001-2140.
- [65] Lidoine, S. : 2002, 'Approches théoriques du problème du rayonnement acoustique par une entrée d'air de turboréacteur'. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [66] Lidoine, S. and B. Caruelle : 2005, 'Fan noise radiation from intake : comparisons between FEM predictions and fan rig test measurements with flare'. 12th International Congress of Sound and Vibration, Lisbon, 2005.
- [67] Lyrantz, A. S. : 1994, 'Review : The use of Kirchhoff's method in computational aeroacoustics'. *Journal of Fluids Engineering* 116, pp. 665-675.
- [68] McAlpine, A. and M. J. Fischer : 2001, 'On the prediction of Buzz-Saw Noise in aeroengine inlet ducts'. *Journal of Sound and Vibration* 248(1), pp. 123-149.
- [69] Malmay, C. : 2000, 'Étude théorique et expérimentale de l'impédance acoustique de matériaux en présence d'un écoulement d'air tangentiel'. Thèse de Doctorat, Université du Maine.
- [70] Mani, R. : 1973, 'Refraction of acoustic duct waveguide modes by exhaust jets'. *Quart. Appl. Math.* 30, pp. 501-520.
- [71] Mebarek, L. : 1986, 'Méthode numérique par éléments finis de frontière pour le calcul par équations intégrales de champs acoustiques rayonnés par des structures axisymétriques'. Thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne.
- [72] Mendoza, J. M. and J. Lan : 2003, 'Prediction of aft fan duct lining attenuation for a turbofan engine'. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hilton Head, South Carolina, 2003-3241.

- [73] Meslioui, S. A. : 1996, 'Contribution à l'étude de l'insonorisation des entrées d'air latérales de turbomoteurs d'hélicoptères. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [74] Michalke, A. : 1965, 'On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer'. *J. Fluid Mech.* 23, part 3, pp. 521-544.
- [75] Miles, J. W. : 1956, 'On the reflection of sound at an interface of relative motion'. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 29, Number 2, Feb. 1957.
- [76] Mittra, R. and S. W. Lee : 1971, 'Analytical Methods in the Theory of Guided Waves'. *McMillan and Company*.
- [77] Montétagaud, F. : 1998, 'Modélisation de la propagation et du rayonnement acoustiques des entrées d'air de turboréacteurs'. Thèse de Doctorat, Université du Maine.
- [78] Montétagaud, F., H. Batard, P. Lempereur and C. Legros : 1998, 'Modal conversion from untreated to treated cylindrical ducts'. 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, 98-2309.
- [79] Montétagaud, F. and H. Batard : 2000, 'About the complexity of propagation and radiation of ducted modes'. 6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hawaiï, 2000-1955.
- [80] Montétagaud, F. and S. Montoux : 2005, 'Negatively scarfed intake : Design and acoustic performance'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-2944.
- [81] Morfey, C. L. : 1964, 'Rotating pressure patterns in ducts : their generation and transmission'. *Journal of Sound and Vibration* (1964) I, pp. 60-87.
- [82] Morfey, C. L. : 1969, 'A note on the radiation efficiency of acoustic duct modes'. *Journal of Sound and Vibration* 9(3), pp. 367-372.
- [83] Morfey, C. L. : 1971, 'Acoustic energy in non-uniform flows'. *Journal of Sound and Vibration* 14(2), pp. 159-187.
- [84] Morgan, J. D. : 1974, 'The interaction of sound with a semi infinite vortex sheet'. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 27, Part 4, pp. 609-640.
- [85] Munt, R. M. : 1975, 'Acoustic radiation from a circular cylinder in a subsonic stream'. *J. Inst. Maths Applics* (1975) 16, pp. 1-10.
- [86] Munt, R. M. : 1977, 'The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe'. *J. Fluid Mech.* 83, part 4, pp. 609-640.
- [87] Munt, R. M. : 1990, 'Acoustic transmission properties of a jet pipe with subsonic jet flow : I. The cold jet reflection coefficient'. *Journal of Sound and Vibration* 142(3), pp. 413-436.
- [88] Myers, M. K. : 1980, 'On the acoustic boundary condition in the presence of flow'. *Journal of Sound and Vibration* 71(3), pp. 429-434.

- [89] Nallasamy, M. : 1996, 'Noise radiation from fan inlet and aft ducts'. 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, State College, PA.
- [90] Nallasamy, M., D. L. Sutliff and L. J. Heidelberg : 2000, 'Propagation of Spinning Acoustic Modes in Turbofan Exhaust Ducts'. Journal of Propulsion and Power, Vol. 16, No. 5, September-October 2000.
- [91] Nark, D. M., F. Farassat, D. Stuart Pope and V. Vatsa : 2003, 'The development of the ducted fan noise propagation and radiation code CDUCT-LARC'. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hilton Head, South Carolina 2003-3242.
- [92] Nark, D. M., F. Farassat, D. Stuart Pope and V. Vatsa : 2004, 'A model for shear layer effects on engine noise radiation'. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, United Kingdom, 2004-2992.
- [93] Nark, D. M., F. Farassat, D. Stuart Pope and V. Vatsa : 2004, 'Effect of bifurcations on aft-fan engine nacelle noise'. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, United Kingdom, 2004-2988.
- [94] Noble, B. : 1958, 'Methods based on the Wiener-Hopf technique'. Pergamon Press.
- [95] Ozyoruk, Y., V. Ahuja and L. N. Long : 2001, 'Time domain simulations of radiation from ducted fans with liners'. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, The Netherlands, 2001-2171.
- [96] Ozyoruk, Y., V. Ahuja and L. N. Long : 2002, 'Euler predictions of forward and aft radiated noise of a turbofan'. 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado, AIAA-2002-2534.
- [97] Ozyoruk, Y., E. Alpman, V. Ahuja and L. N. Long : 2002, 'A frequency-domain numerical method for noise radiation from ducted fans'. AIAA paper 2002-2587, Reno, NV.
- [98] Pierce, A. D. : 1989, 'Acoustics : an introduction to its physical principles and applications'. Acoustic Society of America.
- [99] Pinker, R. A. and W. D. Bryce : 1976, 'The radiation of plane wave duct noise from a jet exhaust, statically and in flight'. AIAA paper n° 76-0581.
- [100] Popov, M. M. : 1982, 'A new method of computation of waves fields using gaussian beam'. Wave motion 4, pp. 85-97.
- [101] Redonnet, S., E. Manoha and P. Sagaut : 2001, 'Numerical simulation of propagation of small perturbations interacting with flows and solid bodies'. 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, The Netherlands, 2001-2273.
- [102] Redonnet, S. : 2001, 'Simulation de la propagation acoustique en presence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler'. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, n° d'ordre 2364.

- [103] Redonnet, S., E. Manoha and O. Kenning : 2004 'Numerical simulation of the downstream fan noise and jet noise of a coaxial jet with a shielding surface'. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, United Kingdom, 2004-2991.
- [104] Redonnet, S., E. Manoha and O. Kenning : 2005 'Numerical simulation of the downstream fan noise of 3D Coaxial Engines'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-2816.
- [105] Ribner, H. S. : 1957, 'Reflection, Transmission, and Amplification of Sound by a Moving Medium'. The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 29, Number 4, Apr. 1957.
- [106] Rice, E. J. : 1968, 'Attenuation of sound in soft walled circular ducts'. NASA TM X-5244.
- [107] Rice, E. J. and A. V. Saule : 1980, 'Far-field radiation of aft turbofan noise'. NASA TM 81506.
- [108] Rienstra, S. W. : 1981, 'Sound diffraction at a trailing edge'. J. Fluid Mech. (1981), vol. 108, pp. 443-460.
- [109] Rienstra, S. W. : 1981, 'On the acoustical implications of vortex shedding from an exhaust pipe'. Journal of Engineering for Industry, November 1981, Vol. 103, pp. 378-384.
- [110] Rienstra, S. W. : 1983, 'A small Strouhal number analysis for acoustic wave-jet flow-pipe interaction'. Journal of Sound and Vibration 86(4), pp. 539-556.
- [111] Rienstra, S. W. : 1984, 'Acoustic radiation from a semi-infinite annular duct in a uniform subsonic mean flow'. Journal of Sound and Vibration 94(2), pp. 267-288.
- [112] Rienstra, S. W. and A. Hirschberg : 1992, 'An introduction to acoustics'. Eindhoven University of Technology.
- [113] Rienstra, S. W. : 1998, 'Sound transmission in slowly varying circular and annular lined ducts with flow'. 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, 98-2311.
- [114] Rienstra, S. W. : 2000, 'Noise in Turbomachines : Sound propagation in ducts'. Von Karman Institute for fluid dynamics LS 2000-02.
- [115] Rienstra, S. W. and N. Peake : 2005, 'Modal scattering at an impedance transition in a lined flow duct'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-2852.
- [116] Roger, M. : 'Aéroacoustique, fondements et applications', communication personnel, ouvrage à paraître.
- [117] Ruffles, P. C. : 2003, 'Aero engines of the future'. The Aeronautical Journal, June 2003.
- [118] Savkar, S. D. : 1975, 'Radiation of cylindrical duct acoustic modes with flow mismatch'. Journal of Sound and Vibration 42(3), pp. 363-386.

- [119] Schwartz, J. M. : 2003, 'Calcul rapide de forces et de déformations mécaniques non-linéaires et visco-élastiques pour la simulation de chirurgie'. Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec.
- [120] Société FFT : 2004, 'ACTRAN 2004. MSC. Actran and ACTRAN/AE. User's Manuel, Volume 1 and 2, Version 1 of June 25th 2004'.
- [121] Société FFT : 2004, 'ACTRAN 2005. Aeroacoustics solutions : ACTRAN/TM and ACTRAN/LA. User's Manuel. Version 1 of October 29th 2004'.
- [122] Spiegel, M. : 1973, 'Variables complexes'. Série Schaum. McGraw-Hill.
- [123] Sugimoto, R., R. J. Astley, L. De Mercato, K. R. Holland, V. Jurdic and A. J. Kempton. : 2005, 'Prediction Methods for Propagation in Bypass Ducts and Comparison with Measured Data'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-3059.
- [124] Sugimoto, R. and R. J. Astley : 2005, 'Modelling of flow effects on propagation and radiation from bypass duct'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-3011.
- [125] Tam, K. W. : 2001, 'Computational aeroacoustics : an overview'. Présenté au RTO AVT Symposium on ageing mechanisms and control: Part A – Developments in computational aero- and hydro-acoustics, Manchester, UK, October 2001. Publié dans le RTO-MP-079(I).
- [126] Tyler, J. M. and T. G. Sofrin : 1962, 'Axial flow compressor noise studies'. SAE Transactions 70, pp. 309-332.
- [127] Ville, J. M. : 1978, 'Définition et réalisation d'un simulateur de modes tournants'. Note interne ONERA.
- [128] Wu, T. X. and D. L. Jaggard : 2004, 'Scattering of chiral periodic structure'. IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 52, n°7, July 2004.
- [129] Zhang, X., X. X. Chen, C. L. Morfey and P. A. Nelson : 2002, 'Computation of spinning modal radiation from an unflanged duct'. 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, CO, USA, 2002-2475.
- [130] Zhang, X., X. X. Chen, C. L. Morfey and P. A. Nelson : 2003, 'Acoustic radiation from a semi-infinite duct with a subsonic jet'. 41st AIAA Aerospace Science Meeting, Reno, NV, USA, 2003-0881.
- [131] Zhang, X., X. X. Chen, C. L. Morfey and B. J. Tester : 2003, 'Computation of fan noise radiation through a realistic engine exhaust geometry with flow'. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hilton Head, South Carolina, USA, 2003-3267.
- [132] Zhang, X. : 2003, 'Computation of sound radiation from ducts with flow'. Colloquium EUROMECH 449, Chamonix, France.

- [133] Zhao, Y. and P. J. Morris : 2005, 'The predictions of fan exhaust noise propagation'. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005-2815.
- [134] Zorumski, W. E. : 1973, 'Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts'. The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 54, Number 6, 1973, pp. 1667-1673.
- [135] Zorumski, W. E. : 1974, 'Acoustic theory of axisymmetric multisectionned ducts'. NASA TR R-419.

Annexe 1

Calcul des niveaux sonores à la source et en champ lointain

Les résultats présentés dans cette étude sont généralement indiqués en terme d'intensité ou de niveau de pression et les données d'entrée des codes de calcul sont définies par l'intermédiaire de l'intensité incidente, globale ou modale. Les développements théoriques proposés dans le mémoire étant exprimés à l'aide de la pression ou du potentiel acoustiques, nous proposons dans cette annexe de préciser les définitions des différentes grandeurs considérées à la source et en champ lointain.

1. Intensité incidente à la source

- **Intensité moyenne globale sur la section source Γ**

On suppose ici un écoulement porteur non uniforme caractérisé par les grandeurs $(\tilde{v}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{c}_0)$. Plusieurs définitions du vecteur de l'intensité acoustique locale moyennée dans le temps ont été proposées selon les auteurs. La définition la plus intuitive fait intervenir le vecteur flux d'énergie et un terme de convection de la densité d'énergie lié à l'écoulement moyen :

$$\langle \tilde{I}_{loc} \rangle(\vec{x}) = \langle \tilde{p}\vec{v} \rangle + \tilde{v}_0 \langle \tilde{e}_{ac} \rangle,$$

avec : $\tilde{e}_{ac} = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_0 \tilde{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{\rho}_0 \tilde{c}_0^2}$ et $\langle \rangle$ désignant la moyenne temporelle. (A1.1)

Bien que rencontrée dans de nombreux ouvrages, cette définition ne permet pas d'assurer, dans le cas général, la conservation de l'énergie acoustique pour toute surface fermée. En partant des équations de la mécanique des fluides, Morfey [83] a donc établi une nouvelle formulation de l'intensité locale, utilisée dans le cadre de cette thèse :

$$\langle \tilde{I}_{loc} \rangle(\vec{x}) = \langle \tilde{p}\vec{v} \rangle + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\rho}_0 \tilde{c}_0^2} \langle \tilde{p}^2 \rangle + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{c}_0^2} \langle \tilde{p}\vec{v} \cdot \tilde{v}_0 \rangle + \tilde{\rho}_0 \langle (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{v}) \cdot \tilde{v} \rangle. \quad (A1.2)$$

En régime harmonique, l'intensité locale moyennée dans le temps se réécrit sous la forme (A1.3), où g^* désigne le conjugué de la variable complexe g :

$$\left\langle \tilde{I}_{loc} \right\rangle(\vec{x}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\tilde{p} \tilde{v}^* + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{\rho}_0 \tilde{c}_0^2} |\tilde{p}|^2 + \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{c}_0^2} \tilde{p} (\tilde{v}^* \cdot \tilde{v}_0) + \tilde{\rho}_0 (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{v}) \cdot \tilde{v}^* \right). \quad (\text{A1.3})$$

On définit alors la puissance acoustique à la source comme le flux de l'intensité locale à travers la section source Γ :

$$\tilde{\Phi} = \int_{\Gamma} \left\langle \tilde{I}_{loc} \right\rangle \cdot \vec{e}_z \, d\tilde{S}_{\Gamma}, \quad (\text{A1.4})$$

puis l'intensité moyenne sur la section source comme la puissance acoustique par unité de surface :

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\Phi}}{\pi (\tilde{R}_{ext}^2 - \tilde{R}_{int}^2)}. \quad (\text{A1.5})$$

En combinant les équations (A1.3), (A1.4) et (A1.5), l'intensité moyenne à la source s'écrit :

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi (\tilde{R}_{ext}^2 - \tilde{R}_{int}^2)} \int_{\Gamma} \operatorname{Re} \left(\tilde{p} \tilde{v}_z^* + \frac{\tilde{v}_{0z}}{\tilde{\rho}_0 \tilde{c}_0^2} |\tilde{p}|^2 + \frac{\tilde{v}_{0z}}{\tilde{c}_0^2} \tilde{p} (\tilde{v}^* \cdot \tilde{v}_0) + \tilde{\rho}_0 (\tilde{v}_0 \cdot \tilde{v}) \cdot \tilde{v}_z^* \right) d\tilde{S}_{\Gamma}. \quad (\text{A1.6})$$

Finalement, la grandeur utilisée comme donnée d'entrée des codes de calcul est l'intensité moyenne en décibel, qui s'exprime à partir de l'intensité dimensionnelle \tilde{I} selon la relation (A1.7) :

$$I_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\tilde{I}}{\tilde{I}_{ref}} \right), \quad \text{avec : } \tilde{I}_{ref} = \frac{(1 + M_{\Gamma}) \tilde{p}_{ref}^2}{\tilde{\rho}_{\Gamma} \tilde{c}_{\Gamma}} \quad \text{et } \tilde{p}_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}. \quad (\text{A1.7})$$

$\tilde{\rho}_{\Gamma}$ et \tilde{c}_{Γ} sont les valeurs moyennes des densité et célérité du son $\tilde{\rho}_0$ et \tilde{c}_0 sur la section source Γ , M_{Γ} est la valeur moyenne du nombre de Mach $M_0 = \tilde{v}_0 / \tilde{c}_0$.

En considérant les grandeurs adimensionnelles définies à partir de $\tilde{\rho}_{\infty}$, \tilde{c}_{∞} et \tilde{R}_{ext} , on peut désormais introduire l'intensité moyenne adimensionnelle :

$$I = \frac{1}{2\pi (1 - h^2)} \int_{\Gamma} \operatorname{Re} \left(p v_z^* + \frac{v_{0z}}{\rho_0 c_0^2} |p|^2 + \frac{v_{0z}}{c_0^2} p (\vec{v}^* \cdot \vec{v}_0) + \rho_0 (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}) \cdot v_z^* \right) dS_{\Gamma},$$

$$\text{avec : } I = \frac{\tilde{I}}{\tilde{\rho}_{\infty} \tilde{c}_{\infty}^3}. \quad (\text{A1.8})$$

- **Intensité modale en présence d'un écoulement uniforme**

Lorsque l'écoulement est supposé uniforme sur la section Γ et égal à $\vec{v}_0 = M_0 c_0 \vec{e}_z$, la source acoustique peut être décomposée en une combinaison linéaire de modes de conduit, conformément à l'analyse présentée au chapitre 1. Les expressions de la pression et de la vitesse axiale incidentes sur une section de conduit en l'abscisse z sont rappelées ci-dessous :

$$p_{inc}(r, \varphi, z) = \sum_{m,n} p_{mn}^+(r, \varphi, z), \quad \text{avec : } p_{mn}^+(r, \varphi, z) = A_{mn}^+ F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} e^{im\varphi},$$

$$v_{z,inc}(r, \varphi, z) = \sum_{m,n} v_{z_{mn}}^+(r, \varphi, z), \quad \text{avec : } v_{z_{mn}}^+(r, \varphi, z) = \frac{k_{z_{mn}}^+}{\rho_0 (k - M_0 c_0 k_{z_{mn}}^+)} A_{mn}^+ F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{ik_{z_{mn}}^+ z} e^{im\varphi}. \quad (\text{A1.9})$$

On définit alors l'intensité modale incidente I_{mn}^+ comme étant l'intensité moyenne véhiculée par le mode incident (m, n) . A partir de l'expression (A1.8), on obtient :

$$I_{mn}^+ = \frac{1}{2\pi(1-h^2)} \int_0^1 \int_h^1 \text{Re} \left((1+M_0^2) p_{mn}^+ v_{z_{mn}}^{+*} + \frac{M_0}{\rho_0 c_0} |p_{mn}^+|^2 + \rho_0 c_0 M_0 |v_{z_{mn}}^+|^2 \right) r dr d\varphi. \quad (\text{A1.10})$$

En bénéficiant de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques et des fonctions de Bessel (voir [2]), on montre que l'intensité globale associée à la propagation de plusieurs modes est bien égale, en conduit rigide, à la somme des intensités modales. Cette propriété permet de singulariser la contribution énergétique de chacun des modes.

$$I = \sum_m I_m = \sum_m \sum_n I_{mn}. \quad (\text{A1.11})$$

Nous avons défini au passage l'intensité azimutale I_m . En considérant les relations (A1.9) et (A1.10), on aboutit à l'expression (A1.12) de l'intensité modale incidente à la source :

$$I_{mn}^+ = \frac{|A_{mn}^+|^2 Y_{mn} \left[(1-M_0^2) c_0 k k_{z_{mn}}^+ + M_0 k^2 \right]}{\rho_0 c_0 (1-h^2) \left[k - M_0 c_0 k_{z_{mn}}^+ \right]^2},$$

$$\text{avec : } Y_{mn} = \int_h^1 (F_{mn}(k_{r_{mn}} r))^2 r dr = \left[\frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{m^2}{k_{r_{mn}}^2} \right) (F_{mn}(k_{r_{mn}} r))^2 \right]_h^1. \quad (\text{A1.12})$$

Une fois les intensités incidentes en Γ renseignées, le calcul de la propagation et du rayonnement est effectué en considérant les amplitudes modales réelles correspondantes :

$$A_{mn}^+ = \sqrt{\frac{\rho_0 c_0 I_{mn}^+ (1-h^2)}{Y_{mn} \left[(1-M_0^2) c_0 k k_{z_{mn}}^+ + M_0 k^2 \right]}} \left| k - M_0 c_0 k_{z_{mn}}^+ \right|. \quad (\text{A1.13})$$

Dans ce cas, le déphasage entre les différents modes est nul mais rien n'empêche ensuite d'ajouter un terme de phase à chacun des modes considérés.

Enfin, pour toute section traversée par un écoulement uniforme, il est possible de définir de manière identique l'intensité modale réfléchie I_{mn}^- à partir des pression et vitesse axiale modales réfléchies p_{mn}^- et $v_{z_{mn}}^-$. Ces intensités I_{mn}^- ont été évaluées, notamment, dans le cadre de l'étude des ondes transmises et réfléchies dans un conduit avec bifurcations (chapitre 3).

2. Niveau de pression sonore (SPL)

L'oreille et les microphones étant sensibles à la pression acoustique, la grandeur généralement retenue en aéroacoustique pour évaluer le rayonnement sonore est le niveau de pression SPL (Sound Pressure Level) [62], défini de la façon suivante :

$$SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{|\tilde{p}|}{\tilde{p}_{ref}} \right), \quad \text{avec} \quad \tilde{p}_{ref} = 2.10^{-5} Pa. \quad (A1.14)$$

Ce niveau de pression SPL est la grandeur utilisée dans la thèse pour représenter les diagrammes de rayonnement en champ lointain ainsi que la plupart des cartographies locales du champ acoustique. Il est important de noter, cependant, qu'il ne s'agit pas d'une grandeur énergétique, la puissance rayonnée étant caractérisée par l'intensité acoustique et non par la pression.

Annexe 2

Méthode de décomposition modale et séparation des modes incidents et réfléchis

Nous présentons dans cette annexe les méthodes utilisées, d'une part, pour analyser le contenu modal associé à un champ de pression quelconque sur une section de conduit rigide annulaire ou bifurqué, et d'autre part, pour dissocier la contribution des modes incidents et réfléchis à partir des données d'amplitudes modales en deux sections de conduit. La méthode de décomposition modale retenue dans notre étude est une méthode itérative basée sur les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Bessel et trigonométriques et permettant d'assurer une meilleure convergence de l'analyse. Elle a été utilisée à plusieurs reprises au cours de la thèse pour déterminer le contenu modal associé à la propagation d'un faisceau gaussien dans un conduit annulaire (chapitre 2), pour décomposer le champ issu du calcul BEM en différentes sections d'un conduit bifurqué (chapitre 3), ou encore pour analyser les recompositions modales dues aux variations de section le long d'un conduit secondaire réaliste (chapitre 3). Les formules de dissociation des ondes incidentes et réfléchies ont été employées, entre autres, pour évaluer les amplitudes modales incidentes générées par l'anneau de haut-parleurs au cours de l'étude expérimentale (chapitre 2).

1. Méthode de décomposition modale itérative

- **Formulation en conduit annulaire**

Conformément à l'analyse présentée au chapitre 1, la pression acoustique en une section de conduit annulaire rigide, définie par l'abscisse z , s'écrit comme une combinaison linéaire de modes selon l'expression :

$$p^A(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn}(z) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{im\varphi} . \quad (\text{A2.1})$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.2, par ailleurs, tout champ acoustique se propageant en conduit rigide obéit au phénomène de coupure et peut donc s'exprimer de manière satisfaisante sur la base des modes passants et des premiers modes évanescents uniquement. Pour déterminer le contenu modal associé à un champ de pression calculé ou mesuré sur une section de conduit rigide, on introduit alors la grille modale G_{mod}^A (i.e. ensemble des modes (m,n) considérés) et l'on considère que le champ de pression à analyser p_{section}^A s'écrit en z :

$$p_{section}^A(r, \varphi, z) = \sum_{(m,n) \in G_{mod}^A} A_{mn}(z) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) e^{im\varphi} + p_{err}^A(r, \varphi, z). \quad (A2.2)$$

p_{err}^A désigne ici une fonction d'erreur relative au calcul numérique ou la mesure initiale, qui vérifie $|p_{err}^A| \ll |p_{section}^A|$. On cherche alors à déterminer les amplitudes modales $A_{mn}(z)$, avec $(m, n) \in G_{mod}$. En considérant le produit scalaire (A2.3) :

$$\int_{r=h}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} p_{section}^A(r, \varphi, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{-ip\varphi} r dr d\varphi, \quad \forall (p, q) \in G_{mod}^A, \quad (A2.3)$$

et en tirant profit des propriétés d'orthogonalité des modes de conduit rigide (A2.4) :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} e^{i(m-p)\varphi} d\varphi \int_{r=h}^{r=1} F_{mn}(k_{r_{mn}} r) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) r dr = 2\pi \delta_{mp} Y_{pq} \delta_{nq}, \quad (A2.4)$$

avec $Y_{pq} = \int_h^1 (F_{pq}(k_{r_{pq}} r))^2 r dr$ et où δ_{mp} et δ_{nq} sont les symboles de Kronecker,

on aboutit à l'expression (A2.5) des amplitudes modales sur la section de conduit z :

$$\forall (p, q) \in G_{mod}^A, \quad A_{pq}(z) = \frac{1}{2\pi Y_{pq}} \int_{r=h}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} p_{section}^A(r, \varphi, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{-ip\varphi} r dr d\varphi. \quad (A2.5)$$

• Formulation en conduit bifurqué

Conformément à l'analyse présentée au paragraphe 3.2.2, le champ de pression sur une section de conduit bifurqué rigide s'écrit (on se limite ici à la partie de conduit définie par $\varphi \in]0, \pi[$, le problème sur $]\pi, 2\pi[$ étant identique) :

$$p^C(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} C_{mn}(z) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) \cos(m\varphi). \quad (A2.6)$$

De la même manière que précédent, en considérant la troncature modale G_{mod}^C sur les modes de conduit bifurqué, on suppose que le champ de pression calculé ou mesuré $p_{section}^C$ sur la section de conduit z s'écrit sous la forme :

$$p_{section}^C(r, \varphi, z) = \sum_{(m,n) \in G_{mod}^C} C_{mn}(z) F_{mn}(k_{r_{mn}} r) \cos(m\varphi) + p_{err}^C(r, \varphi, z). \quad (A2.7)$$

En calculant ensuite le produit scalaire (A2.8) :

$$\int_{r=h}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} P_{section}^C(r, \varphi, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) \cos(p\varphi) r dr d\varphi, \quad \forall (p, q) \in G_{mod}^C, \quad (A2.8)$$

et en bénéficiant de la relation (A2.9) :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \cos(m\varphi) \cos(p\varphi) d\varphi \int_{r=h}^{r=1} F_{mn}(k_{r_{mn}} r) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) r dr = \Delta_p \delta_{mp} Y_{pq} \delta_{nq}, \quad (A2.9)$$

on aboutit à l'expression (A2.10) des amplitudes modales $C_{pq}(z)$:

$$\forall (p, q) \in G_{mod}^C, \quad C_{pq}(z) = \frac{1}{\Delta_p Y_{pq}} \int_{r=h}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} P_{section}^C(r, \varphi, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) \cos(p\varphi) r dr d\varphi, \quad (A2.10)$$

avec $\Delta_p = \pi$ si $p = 0$ et $\Delta_p = \pi/2$ si $p \neq 0$.

• Méthode itérative

Connaissant la distribution du champ de pression sur une section de conduit, les relations (A2.5) et (A2.10) permettent donc de retrouver le contenu modal recherché. Cependant, il est impossible d'avoir une connaissance précise du champ sur toute la section et la valeur de la pression ne peut être connue qu'en certains points de contrôle définis par le calcul ou la mesure. Par conséquent, il est nécessaire de procéder à une intégration numérique, source d'erreur, qui conduit aux pseudo-amplitudes $A_{pq}^1(z)$ et $C_{pq}^1(z)$ liées à la discrétisation considérée :

$$A_{pq}^1(z) = \frac{1}{2\pi Y_{pq}} \sum_j P_{section}^A(r_j, \varphi_j, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r_j) e^{-ip\varphi_j} r_j \Delta S_j, \quad (A2.11.a)$$

$$C_{pq}^1(z) = \frac{1}{\Delta_p Y_{pq}} \sum_j P_{section}^C(r_j, \varphi_j, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r_j) \cos(p\varphi_j) r_j \Delta S_j. \quad (A2.11.b)$$

Bien entendu, plus le nombre de points de discrétisation est élevé, plus les amplitudes modales $A_{pq}^1(z)$ et $C_{pq}^1(z)$ sont proches des valeurs recherchées $A_{pq}(z)$ et $C_{pq}(z)$. En recalculant le champ de pression à partir des pseudo-amplitudes $A_{pq}^1(z)$ et $C_{pq}^1(z)$, on aboutit aux pressions recomposées :

$$p^{A,1}(r, \varphi, z) = \sum_{(p,q) \in G_{mod}^A} A_{pq}^1(z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{ip\varphi}, \quad (A2.12.a)$$

$$p^{C,1}(r, \varphi, z) = \sum_{(p,q) \in G_{mod}^C} C_{pq}^1(z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) \cos(p\varphi). \quad (A2.12.b)$$

Généralement, on suppose que les champs de pression ainsi recomposés sont sensiblement identiques aux champs calculés ou mesurés initialement sur la section d'étude $p_{section}^A$ et $p_{section}^C$. Cependant, du fait des erreurs de la mesure ou du calcul numérique initiale p_{err}^A et p_{err}^C et de l'imprécision de l'intégration numérique (A2.11), les champs résultant de la différence $p_{section}^{A/C} - p^{A/C,1}$ ne sont pas nuls. Afin d'affiner le calcul, nous proposons donc d'utiliser une méthode de décomposition itérative (cf. Lidoine [65]).

Le principe de la méthode est simple. Après la première décomposition modale (A2.11), on détermine le champ de la différence $p_{section}^{A/C} - p^{A/C,1}$ que l'on décompose de la même façon que le champ initial $p_{section}^{A/C}$. En considérant le résultat de cette seconde décomposition modale, on détermine un nouveau champ recomposé, dont la différence avec le champ $p_{section}^{A/C}$ peut à nouveau être analysée... On effectue ainsi plusieurs itérations, selon le schéma suivant (nous nous limitons ici à l'exemple du conduit annulaire) :

Première itération :

$$\begin{aligned} \text{Décomposition du champ : } A_{pq}^1(z) &= \frac{1}{2\pi Y_{pq}} \sum_j p_{section}^A(r_j, \varphi_j, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r_j) e^{-ip\varphi_j} r_j \Delta S_j, \\ \text{Recomposition du champ : } p^{A,1}(r, \varphi, z) &= \sum_{(p,q) \in G_{mod}^A} A_{pq}^1(z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{ip\varphi}, \\ \text{Calcul du champ de différence : } p_{diff}^{A,1}(r_j, \varphi_j, z) &= p_{section}^A(r_j, \varphi_j, z) - p^{A,1}(r_j, \varphi_j, z). \end{aligned} \quad (A2.13)$$

Deuxième itération :

$$\begin{aligned} \text{Décomposition du champ : } A_{pq}^2(z) &= \frac{1}{2\pi Y_{pq}} \sum_j p_{diff}^{A,1}(r_j, \varphi_j, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r_j) e^{-ip\varphi_j} r_j \Delta S_j, \\ \text{Recomposition du champ : } p^{A,2}(r, \varphi, z) &= \sum_{(p,q) \in G_{mod}^A} (A_{pq}^1(z) + A_{pq}^2(z)) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{ip\varphi}, \\ \text{Calcul du champ de différence : } p_{diff}^{A,2}(r_j, \varphi_j, z) &= p_{section}^A(r_j, \varphi_j, z) - p^{A,2}(r_j, \varphi_j, z). \end{aligned} \quad (A2.14)$$

...

N^{ième} itération :

$$\begin{aligned} \text{Décomposition du champ : } A_{pq}^N(z) &= \frac{1}{2\pi Y_{pq}} \sum_j p_{diff}^{A,N-1}(r_j, \varphi_j, z) F_{pq}(k_{r_{pq}} r_j) e^{-ip\varphi_j} r_j \Delta S_j, \\ \text{Recomposition du champ : } p^{A,N}(r, \varphi, z) &= \sum_{(p,q) \in G_{mod}^A} (A_{pq}^1(z) + A_{pq}^2(z) + \dots + A_{pq}^N(z)) F_{pq}(k_{r_{pq}} r) e^{ip\varphi}, \\ \text{Calcul du champ de différence : } p_{diff}^{A,N}(r_j, \varphi_j, z) &= p_{section}^A(r_j, \varphi_j, z) - p^{A,N}(r_j, \varphi_j, z). \end{aligned} \quad (A2.15)$$

En procédant de la sorte, on vérifie que le champ de la différence diminue rapidement au cours des premières itérations puis converge ensuite vers une valeur constante, pour chaque point de contrôle j . On aboutit ainsi à une erreur irréductible, qui ne peut être décomposée sur la base modale choisie et correspond probablement à l'erreur initiale du calcul ou de la mesure sur la section $z : p_{err}^A$. Finalement les amplitudes modales extraites du processus de décomposition s'écrivent :

$$A_{pq}(z) = A_{pq}^1(z) + A_{pq}^2(z) + \dots + A_{pq}^N(z). \quad (\text{A2.16})$$

2. Séparation des modes de conduit incidents et réfléchis

Nous présentons dans cette section les formules utilisées pour dissocier la contribution des ondes incidentes et réfléchies à partir des données d'amplitudes modales calculées par la méthode de décomposition modale ou mesurées, dans le cadre de l'étude expérimentale, par les anneaux de détection. A l'exception du dernier paragraphe où nous considérons le cas d'un conduit de section variable, nous supposons ici un conduit annulaire rigide de section constante (les formules en conduit bifurqué sont identiques).

• Données issues de la méthode de décomposition modale

Les amplitudes $A_{mn}(z)$ calculées par la méthode de décomposition modale correspondent à la somme des amplitudes des modes incidents et réfléchis sur la section de conduit considérée. La formulation (A2.1), en effet, se réécrit sous la forme (A2.17) :

$$p^A(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} A_{mn}(z) F_{mn}(k_{r_{mn}}, r) e^{im\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_{mn}^+ e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + A_{mn}^- e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right) F_{mn}(k_{r_{mn}}, r) e^{im\varphi}, \quad (\text{A2.17})$$

où A_{mn}^+ est l'amplitude du mode (m, n) se propageant vers les z positif, et A_{mn}^- l'amplitude du mode (m, n) se propageant vers les z négatif. Afin de dissocier la contribution des ondes incidentes et réfléchies, deux solutions s'offrent à nous. Soit on effectue une décomposition du champ de pression en deux sections de conduit, soit on décompose le champ de pression et le champ de vitesse axiale sur une même section. Les deux méthodes sont équivalentes et nous nous limiterons dans la suite à la première solution, utilisée dans le cadre de la thèse.

On suppose donc les amplitudes totales $A_{mn}(z_1)$ et $A_{mn}(z_2)$ déterminées en deux sections de conduit, distantes de $L = z_2 - z_1$. En considérant la relation (A2.17), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} A_{mn}(z_1) &= A_{mn}^+ e^{ik_{z_{mn}}^+ z_1} + A_{mn}^- e^{ik_{z_{mn}}^- z_1}, \\ A_{mn}(z_2) &= A_{mn}^+ e^{ik_{z_{mn}}^+ z_2} + A_{mn}^- e^{ik_{z_{mn}}^- z_2}. \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

La résolution de ce système aboutit aux amplitudes A_{mn}^+ et A_{mn}^- des ondes incidentes et réfléchies :

$$\begin{aligned}
A_{mn}^+ &= \frac{\left(A_{mn}(z_2) - A_{mn}(z_1) e^{ik_{z_{mn}}^- L} \right) e^{-ik_{z_{mn}}^+ z_1}}{e^{ik_{z_{mn}}^+ L} - e^{ik_{z_{mn}}^- L}}, \\
A_{mn}^- &= \frac{\left(A_{mn}(z_2) - A_{mn}(z_1) e^{ik_{z_{mn}}^+ L} \right) e^{-ik_{z_{mn}}^- z_1}}{e^{ik_{z_{mn}}^- L} - e^{ik_{z_{mn}}^+ L}}.
\end{aligned} \tag{A2.19}$$

- **Données issues des mesures expérimentales (anneaux de détection modale)**

Formulation en conduit annulaire rigide de section constante

Dans le cadre de l'étude expérimentale présentée au chapitre 2, la mesure du champ de pression en 22 positions angulaires de la paroi externe du conduit (anneau de détection modale) permet de déterminer, pour $m \in]-10, 10[$, les amplitudes azimutales $A_m(z, 1)$ définies selon :

$$\begin{aligned}
p(z, 1, \varphi) &= \sum_m A_m(z, 1) e^{im\varphi}, \\
&= \sum_m e^{im\varphi} \left[\sum_n \left(A_{mn}^+ e^{ik_{z_{mn}}^+ z} + A_{mn}^- e^{ik_{z_{mn}}^- z} \right) F_{mn}(k_{r_{mn}} 1) \right].
\end{aligned} \tag{A2.20}$$

Pour un mode azimutal m donné, lorsque seul le mode radial $n=1$ est passant, la mesure des amplitudes modales $A_m(z_1, 1)$ et $A_m(z_2, 1)$ en deux positions axiales est suffisante pour dissocier les composantes incidente A_{m1}^+ et réfléchie A_{m1}^- du mode $(m, 1)$. En effet, la relation (A2.20) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
A_m(z_1, 1) &= \left(A_{m1}^+ e^{ik_{z_{m1}}^+ z_1} + A_{m1}^- e^{ik_{z_{m1}}^- z_1} \right) F_{m1}(k_{r_{m1}} 1), \\
A_m(z_2, 1) &= \left(A_{m1}^+ e^{ik_{z_{m1}}^+ z_2} + A_{m1}^- e^{ik_{z_{m1}}^- z_2} \right) F_{m1}(k_{r_{m1}} 1).
\end{aligned} \tag{A2.21}$$

Ce système est semblable au système (A2.18) considéré précédemment et conduit aux solutions :

$$\begin{aligned}
A_{m1}^+ &= \frac{\left[\left(A_{m1}(z_2, 1) / F_{m1}(k_{r_{m1}} 1) \right) - \left(A_{m1}(z_1, 1) / F_{m1}(k_{r_{m1}} 1) \right) e^{ik_{z_{m1}}^- L} \right] e^{-ik_{z_{m1}}^+ z_1}}{e^{ik_{z_{m1}}^+ L} - e^{ik_{z_{m1}}^- L}}, \\
A_{m1}^- &= \frac{\left[\left(A_{m1}(z_2, 1) / F_{m1}(k_{r_{m1}} 1) \right) - \left(A_{m1}(z_1, 1) / F_{m1}(k_{r_{m1}} 1) \right) e^{ik_{z_{m1}}^+ L} \right] e^{-ik_{z_{m1}}^- z_1}}{e^{ik_{z_{m1}}^- L} - e^{ik_{z_{m1}}^+ L}}.
\end{aligned} \tag{A2.22}$$

Une fois les amplitudes modales A_{m1}^+ déterminées, l'intensité incidente I_{m1}^+ générée par les anneaux de haut-parleurs peut être calculée (cf. annexe 1) et utilisée comme données d'entrée dans les codes de calcul pour la comparaison entre la mesure et la simulation (chapitre 2).

Incertitudes liées à la mesure

En l'absence d'écoulement, les constantes de propagation axiales $k_{z_{m1}}^+$ et $k_{z_{m1}}^-$ vérifient la relation : $k_{z_{m1}}^+ = -k_{z_{m1}}^- = k_{z_{m1}}$. Dans les expressions (A2.22), la dissociation des amplitudes incidentes et réfléchies à partir des mesures de pression en deux positions axiales fait alors intervenir une division par le dénominateur $\pm (e^{ik_{z_{m1}}L} - e^{-ik_{z_{m1}}L})$. Aussi, lorsque l'écartement entre les deux positions de mesure est tel que le produit $k_{z_{m1}}L$ tend vers un multiple de π , le dénominateur tend vers zéro et le calcul est mal conditionné. Dans le cas du mode plan, Boden et Abom [12] ont étudié la sensibilité de la formulation (A2.22) par rapport aux incertitudes de mesure (portant notamment sur l'écartement L ou sur les fonctions de transfert entre les microphones). En considérant plusieurs valeurs du produit $k_{z_{01}}L$ comprises entre 0 et π , ils concluent que la dissociation des modes incident et réfléchi ne peut être effectuée de façon précise qu'à condition de vérifier :

$$0.1\pi < k_{z_{01}}L < 0.8\pi . \quad (\text{A2.23})$$

En généralisant cette relation à l'ensemble des modes passants et à toute la gamme des valeurs de $k_{z_{m1}}L$, on obtient la condition (A2.24) considérée page 112 :

$$(p + 0.1)\pi < k_{z_{m1}}L < (p + 0.8)\pi , \quad p \text{ entier naturel} . \quad (\text{A2.24})$$

Dans l'étude expérimentale présentée au chapitre 2, les fréquences de travail ont été définies de façon à ce que les constantes de propagation $k_{z_{m1}}$ des modes passants ($m,1$) vérifient la condition (A2.24). Sur l'ensemble des modes considérés aux différentes fréquences d'étude, seul le mode (8,1) à $k=12.84$ ne satisfaisait pas cette condition, le produit $k_{z_{81}}L$ valant alors 7.91π . En utilisant les expressions (A2.22), nous avons tout de même voulu estimer l'amplitude incidente du mode (8,1) à partir des mesures des anneaux de détection puis nous avons utilisé le résultat, sous forme d'intensité incidente, comme donnée d'entrée du code ACTRAN. La figure A2.1 montre que le rayonnement calculé en champ lointain diffère alors d'environ 10 dB de la mesure réalisée en chambre sourde. Ce résultat met en

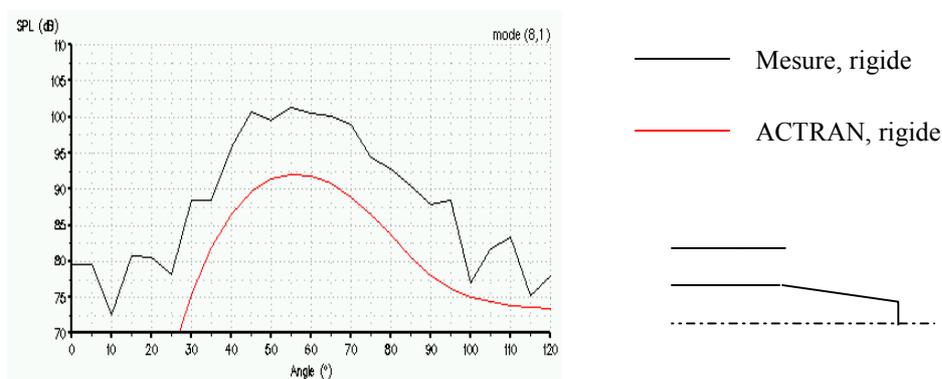


Figure A2.1 : Comparaison entre les rayonnements mesuré et calculé pour le mode (8,1) à $k=12.84$. Influence des incertitudes de mesure sur le calcul de l'intensité incidente.

évidence l'erreur commise sur le calcul de l'intensité incidente et confirme la pertinence de l'analyse de Boden et Abom (rappelons que pour les modes vérifiant la condition (A2.24), l'écart entre les niveaux de pression mesurés et calculés en champ lointain est toujours inférieur à 2 dB).

Conduit annulaire de section variable

Dans le cas de la géométrie de type « nacelle longue » considérée dans l'étude expérimentale, les anneaux de détection modale sont positionnés en deux sections de conduit de rapports de rayon différents. Pour dissocier la contribution des modes incidents et réfléchis, nous avons alors effectué deux hypothèses. La première consiste à supposer que sur la section du second anneau, située dans une partie de conduit de section variable, le champ acoustique s'exprime toujours comme une combinaison linéaire de modes annulaires. Dans ce cas, le système à résoudre sur les amplitudes modales s'écrit :

$$\begin{aligned} A_m(z_1, 1) &= A_{m1}^{1+} F_{m1}^1(k_{r_{m1}} 1) e^{ik_{z_{m1}}^+ z_1} + A_{m1}^{1-} F_{m1}^1(k_{r_{m1}} 1) e^{ik_{z_{m1}}^- z_1}, \\ A_m(z_2, 1) &= A_{m1}^{2+} F_{m1}^2(k_{r_{m1}} 1) e^{ik_{z_{m1}}^+ z_2} + A_{m1}^{2-} F_{m1}^2(k_{r_{m1}} 1) e^{ik_{z_{m1}}^- z_2}. \end{aligned} \quad (\text{A2.25})$$

où les exposants 1 et 2 renvoient aux deux sections de conduit considérées, et les inconnues $A_{m1}^{1,2+}$ et $A_{m1}^{1,2-}$ sont au nombre de quatre. Afin de déterminer les amplitudes incidente A_{m1}^{1+} et réfléchie A_{m1}^{1-} au niveau du premier anneau de détection, il est nécessaire alors d'effectuer une seconde hypothèse permettant de relier les amplitudes modales $A_{m1}^{1\pm}$ et $A_{m1}^{2\pm}$ en z_1 et z_2 . L'hypothèse retenue dans notre cas suppose la conservation des énergies modales incidente et réfléchie le long du conduit, ce qui revient à négliger les redistributions modales induites par les variations de section. On écrit alors :

$$\iint_{\text{section1}} p_{m1}^{1\pm}(z_1, r, \varphi) v_{z_{m1}}^{1\pm}(z_1, r, \varphi) ds_1 = \iint_{\text{section2}} p_{m1}^{2\pm}(z_2, r, \varphi) v_{z_{m1}}^{2\pm}(z_2, r, \varphi) ds_2. \quad (\text{A2.26})$$

Le calcul des intégrales (A2.26) pour une configuration sans écoulement ($k_{z_{m1}}^+ = -k_{z_{m1}}^- = k_{z_{m1}}$) permet de relier les amplitudes $A_{m1}^{1\pm}$ et $A_{m1}^{2\pm}$ selon l'expression :

$$A_{m1}^{2\pm} = A_{m1}^{1\pm} \sqrt{\frac{Y_{m1}^1 k_{z_{m1}}^1}{Y_{m1}^2 k_{z_{m1}}^2}}, \quad \text{avec : } Y_{mn}^{1,2} = \int_h^1 (F_{mn}^{1,2}(k_{r_{mn}} r))^2 r dr. \quad (\text{A2.27})$$

En combinant les équations (A2.25) et (A2.27), on aboutit finalement à l'expression de l'amplitude incidente A_{m1}^{1+} (A2.28) :

$$A_{m1}^{1+} = \left(\frac{\frac{A_m(z_2, 1)}{F_{m1}^2(k_{r_{m1}} 1) \sqrt{Y_{m1}^1 k_{z_{m1}}^1 / Y_{m1}^2 k_{z_{m1}}^2}} - \frac{A_m(z_1, 1)}{F_{m1}^1(k_{r_{m1}} 1)} e^{-ik_{z_{mn}}^2 z_2 + ik_{z_{mn}}^1 z_1}}{e^{ik_{z_{mn}}^2 z_2 - ik_{z_{mn}}^1 z_1} - e^{ik_{z_{mn}}^1 z_1 - ik_{z_{mn}}^2 z_2}} \right) e^{-ik_{z_{mn}}^1 z_1}. \quad (\text{A2.28})$$

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur M. ROGER

et les rapports de

Monsieur M. BEN TAHAR
Professeur - Laboratoire Roberval - Université de Technologie de Compiègne - Centre de Recherches de
Royallieu - BP 20529 - 60205 COMPIEGNE cedex

et de

Monsieur V. GIBIAT
Professeur - Laboratoire PHASE - Université Paul Sabatier - Toulouse III - 118, route de Narbonne -
31062 TOULOUSE cedex 4

Monsieur DRUON Yann

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 12 janvier 2006



P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'J. JOSEPH', written over a horizontal line.

J. JOSEPH