

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Vincent FLEURY

Superdirectivité, bruit d'appariement et autres
contributions au bruit de jet subsonique

Soutenue le 8 juin 2006 devant la Commission d'Examen

JURY

Examineurs : M. Christophe BAILLY
M. Grégoire CASALIS
M. Georges ÉLIAS
M. Yves GERVAIS (Rapporteur)
M. Jacques HAERTIG
M. Patrick HUERRE (Rapporteur)
M. Daniel JUVÉ

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR CNRS 5509 et École Centrale de Lyon

Cette thèse a débuté en octobre 2002 et s'est déroulée au Centre Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon. Elle a été financée par une allocation MENRT.

J'exprime toute ma gratitude à Daniel Juvé, professeur à l'ECL et directeur du groupe Acoustique, pour avoir accepté de diriger mes travaux.

Le bon déroulement de cette thèse est en grande partie dû à Christophe Bailly, professeur à l'ECL, et je l'en remercie. Ses compétences, sa disponibilité et son enthousiasme m'ont été d'une aide précieuse. Je souhaite également le remercier chaleureusement pour les nombreux échanges que j'ai pu avoir avec lui.

Yves Gervais, professeur à l'ESIP et directeur du LEA, et Patrick Huerre, directeur de recherche au CNRS et directeur du LadHyX, ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et je leur en suis reconnaissant.

Merci également à tous les autres membres du jury, Grégoire Casalis et Georges Élias, tous deux directeurs de recherche à l'ONERA, et Jacques Haertig, directeur de recherche à l'ISL, d'avoir bien voulu juger mon travail. J'en profite pour remercier tout particulièrement Grégoire Casalis de m'avoir aiguillé vers un travail de thèse en aéroacoustique alors que se posait la question de mon avenir.

Je remercie tous les membres du Centre Acoustique d'avoir contribué à rendre très plaisant mon passage parmi eux. Merci tout particulièrement à Jean-Michel, Emmanuel, Pascal et Pierre pour leur aide multiple, de l'informatique à la mise en place d'un montage expérimental. Merci aussi à Christophe Bogey pour ses remarques bienveillantes et avisées.

Enfin, c'est l'occasion de mentionner toute l'équipe des doctorants et stagiaires que j'ai eu la chance de rencontrer : Olivier, Sébastien (les deux), Julien (les deux aussi), Benoît, Yvan, Yannick, Benjamin, Thomas, Thomasss, Thomasz, Argantaël.

Table des matières

1	Superdirectivité et bruit d'appariement	5
1.1	Introduction	5
1.2	Modèles de bruit d'appariement tourbillonnaire	8
1.2.1	Modélisation de la source aéroacoustique et de son rayonnement	8
1.2.2	Modélisation du champ de pression proche et de son rayonnement	18
1.3	Conditions expérimentales	20
1.3.1	Installation expérimentale	20
1.3.2	Instrumentation	23
1.4	Caractérisation du jet naturel	23
1.4.1	Conditions initiales	23
1.4.2	Fluctuations dans la couche de cisaillement	24
1.4.3	Fluctuations sur l'axe du jet	35
1.5	Caractérisation du jet excité	37
1.5.1	Caractéristiques de l'excitation	37
1.5.2	Effets de l'excitation	38
1.5.3	Croissance des fluctuations le long de la couche de cisaillement	41
1.5.4	Fluctuations sur l'axe du jet	44
1.6	Champ de pression	46
1.6.1	Fluctuations de pression	47
1.6.2	Distribution de la pression $p'_{f_{s1}}$ le long de la couche de cisaillement	49
1.6.3	Directivité acoustique de $p'_{f_{s1}}$	52
1.6.4	Décroissance du champ de pression $p'_{f_{s1}}$	56
1.7	Conclusion	59
2	Rayonnement acoustique des instabilités absolues dans un jet subsonique	61
2.1	Introduction	61
2.2	Présentation du problème de stabilité et de sa résolution numérique	62
2.3	Profils de vitesse en tangente hyperbolique d'épaisseur variable	64

2.4	Profils de vitesse d'une simulation de jet subsonique par LES	66
2.5	Conclusion	70
3	Caractérisation par P.I.V. des corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points dans un jet subsonique	71
3.1	Introduction	71
3.2	Conditions expérimentales	74
3.2.1	Installation	74
3.2.2	Instrumentation	76
3.3	Vitesses moyennes et fluctuantes	79
3.3.1	Vitesse dans la couche de cisaillement	79
3.3.2	Vitesse sur l'axe du jet	86
3.3.3	Champs de vitesse	88
3.4	Corrélations spatio-temporelles des vitesses en deux points	92
3.4.1	Corrélations spatiales	93
3.4.2	Corrélations spatio-temporelles	109
3.5	Conclusion	119
A	Rayonnement d'une source aéroacoustique annulaire et compacte	125
A.1	Cas d'une distribution parfaitement axisymétrique	125
A.2	Cas d'une distribution non-axisymétrique	127
B	Rayonnement acoustique d'une frontière cylindrique de pression	129
B.1	Position du problème	129
B.2	Champ lointain	130
B.3	Champ proche	132
B.4	Applications	134
B.4.1	Fonction d'enveloppe gaussienne	134
B.4.2	Fonction d'enveloppe sinusoïdale	136
	Bibliographie	141

Objectifs et organisation du manuscrit

En régime supersonique, les composantes dominantes du bruit de jet ont été mises en évidence et un consensus a été trouvé pour expliquer les mécanismes de bruit. Ces composantes sont le bruit de choc, le rayonnement d'ondes de Mach et le screech. En régime subsonique, l'origine des sources de bruit reste en revanche un sujet très débattu. Les jets subsoniques représentent pourtant la grande majorité des jets utilisés dans l'aviation civile. Par ailleurs, compte tenu de la réduction significative de l'impact acoustique des moteurs et compte tenu de la mise en place de normes de plus en plus contraignantes, le bruit de jet est (re)devenu une préoccupation majeure des constructeurs d'avions. Pour guider des stratégies de réduction de bruit, il est nécessaire de mieux comprendre les phénomènes de génération acoustique. Dans ce travail de thèse, trois sujets relatifs au bruit de jet subsonique sont abordés.

La première partie concerne le bruit produit par l'appariement des tourbillons formés par l'enroulement de la couche de cisaillement initiale. Bien que cette source acoustique ne représente qu'une très faible part du bruit total du jet, ce mécanisme constitue néanmoins un problème modèle en aéroacoustique. Deux formes de rayonnement radicalement distinctes ont été constatées. On distingue une directivité acoustique constituée de deux lobes séparés par un angle d'extinction autour de 65° de l'axe aval du jet, et un rayonnement superdirectif constitué d'un seul lobe orienté vers l'aval. La première forme de directivité est reportée par plusieurs travaux, aussi bien numériquement, voir [61, 9], qu'expérimentalement, voir [46, 20]. En revanche, la superdirectivité n'a été observée que par Laufer & Yen [54], malgré apparemment quelques autres tentatives. Aussi existe-t-il une certaine suspicion à l'égard du phénomène du rayonnement superdirectif. L'objectif principal dans cette partie est de reproduire dans une même installation ces deux formes de directivités. Nous cherchons également à caractériser les différences dans le processus d'appariement. Par ailleurs, des modèles acoustiques sont proposés dans la littérature pour expliquer chacune de ces émissions. Toutefois, il n'existe pas de formalisme unique pour expliquer ces deux formes de rayonnement. Les résultats expérimentaux obtenus dans cette étude sont analysés à l'aide d'un modèle acoustique unique, similaire à celui utilisé par Crighton & Huerre [26] pour expliquer la superdirectivité.

Dans une deuxième partie, nous étudions numériquement le rayonnement acoustique produit par des ondes d'instabilité dans un jet subsonique. Cette analyse se place dans le cadre de la stabilité linéaire et locale. Nous savons qu'en régime subsonique, les instabilités convectives ont une vitesse de phase également subsonique, et donc ne rayonnent pas en champ lointain (du moins dans une approche locale). Dans cette partie, nous nous intéressons aux ondes d'instabilité absolues. Les profils de vitesse utilisés pour cette étude proviennent d'une simulation numérique des grandes échelles (LES). La discussion abordée se limite à l'analyse des vitesses de phase et à la prévision de la direction du rayonnement acoustique dans le cas de vitesses su-

personiques. La confrontation avec le champ acoustique fourni également par la LES constitue le principal intérêt de notre démarche. Cette étude est toutefois purement spéculative. En effet, dans le cas des jets non-chauffés, sans écoulement externe de retour, ou encore sans rotation moyenne, la réalité des modes absolus n'est pas établie, ceux-ci étant stables.

La troisième partie présente des résultats de mesure obtenus par PIV (anémométrie par images de particules) concernant les corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points dans un jet subsonique à grand nombre de Mach. Du point de vue de la mécanique des fluides, la connaissance des corrélations permet de caractériser l'étendue et la durée de vie des fluctuations organisées dans le jet. En particulier, on fournira les échelles intégrales de longueur et de temps pour la turbulence. Du point de vue de l'acoustique, les corrélations spatio-temporelles de vitesse sont utilisées comme données d'entrée pour des modèles statistiques de prévision de bruit. Ces modèles sont très appréciés dans l'industrie car ils fournissent une estimation pour un faible coût de calcul. Toutefois, la base de données disponible dans la littérature est restreinte. La mesure des corrélations requiert l'acquisition d'un grand nombre de données. Ce travail s'avère fastidieux avec des techniques de mesures locales telles que le fil chaud ou l'anémométrie laser par effet Doppler. Avec le développement récent de la PIV, l'exploration détaillée des corrélations est actuellement réalisable. C'est dans ce contexte qu'a été effectuée la campagne de mesures présentée dans cette partie. Les données acquises sont par ailleurs utilisées pour mener une analyse dimensionnelle des échelles intégrales.

Remarque : les notations utilisées dans chacune des trois parties sont indépendantes.

Chapitre 1

Superdirectivité et bruit d'appariement dans un jet subsonique

1.1 Introduction

Les études de Mollo-Christensen, Kolpin & Martuccelli [63] et Crow & Champagne [27] sont parmi les premières à avoir mis en évidence l'importance des structures cohérentes pour le bruit des jets subsoniques. L'analyse spectrale de la pression acoustique fournie par Mollo-Christensen *et al.* montre la contribution majeure des composantes dont le nombre de Strouhal $St_D = fD/U_j$ est voisin de 0.3, cette valeur dépendant de l'angle d'observation par rapport à l'axe du jet. Ici, f représente la fréquence, D le diamètre du jet, et U_j la vitesse du jet. Sur la base de ce résultat, Crow & Champagne [27] ont cherché à caractériser les structures fluctuantes associées à ce nombre de Strouhal St_D de 0.3. Grâce à une excitation acoustique, ces auteurs ont montré que le niveau de saturation de cette composante sur l'axe du jet est maximal en fonction de la fréquence d'excitation f_{ex} . Une visualisation du jet par fumée a également permis d'observer la structure tourbillonnaire de ce mode colonne à l'extrémité aval du cône potentiel, du moins pour des jets à faible nombre de Reynolds $Re_D = U_j D/\nu$, entre 10^3 et 10^4 , ν étant la viscosité cinématique. Bien que l'appariement tourbillonnaire soit un mécanisme de production acoustique efficace, ce processus a été écarté depuis longtemps pour expliquer le bruit des jets. En l'absence de forçage externe, l'appariement de structures bien organisées est en effet très peu probable même dans le cas d'écoulements à faibles nombres de Reynolds. L'appariement tourbillonnaire constitue néanmoins un sujet d'étude privilégié, notamment pour l'application d'analogies aéroacoustiques (voir Mitchell, Lele & Moin [61], Bastin, Lafon & Candel [3] et Bogey, Bailly & Juvé [11]) et pour la confrontation de théories acoustiques (voir par exemple Bridges & Hussain [20] et Huerre & Crighton [36]). Le travail présenté dans cette partie de thèse concerne le bruit produit par l'appariement des tourbillons issus de l'enroulement de la

couche de cisaillement initiale d'un jet subsonique.

Pour des conditions initiales laminaires dans la couche de cisaillement, une excitation convenable du jet permet généralement d'obtenir un processus d'appariements stable comme l'ont montré Zaman & Hussain [78] et Kibens [48]. Ce dernier a obtenu une cascade périodique de trois appariements successifs en contrôlant faiblement le développement initial du mode le plus instable de la couche de cisaillement. Ces appariements constituent des sources acoustiques fixes et génèrent des composantes discrètes de bruit, à savoir le premier sous-harmonique de la fréquence d'excitation $f_{s1} = f_{ex}/2$ correspondant au premier appariement, ainsi que les deux sous-harmoniques suivants, $f_{s2} = f_{ex}/4$ et $f_{s3} = f_{ex}/8$ pour le second et troisième appariements plus en aval, respectivement. Bridges & Hussain [20] se sont intéressés au diagramme de directivité d'un appariement stable dans un jet à très faible nombre de Mach. Ils ont mis en évidence la présence d'un angle d'extinction θ^* dans le champ acoustique lointain, autour de 65° par rapport à l'axe du jet. Cette annulation est généralement expliquée à l'aide d'une analogie aéroacoustique en utilisant une distribution axisymétrique et compacte des termes sources quadrupolaires. Une telle modélisation prévoit en effet un angle d'extinction θ^* autour de 55° , voir Möhring [62] par exemple.

Laufer & Yen [54] ont également étudié le bruit d'appariement dans des jets à faible nombre de Mach, mais pour des nombres de Reynolds Re_D plus élevés que ceux considérés par Bridges & Hussain ($Re_D > 10^5$). Dans ce cas, les conditions de la couche de cisaillement initiale ne sont probablement pas parfaitement laminares, mais plutôt nominalement laminares d'après la classification introduite par Zaman [77]. Laufer & Yen observent une directivité du bruit d'appariement en désaccord avec les résultats de Bridges & Hussain [20]. En particulier, aucun angle d'extinction n'est détecté et le rayonnement est très orienté vers l'aval, avec une dynamique beaucoup plus grande. Laufer & Yen modélisent cette directivité par un facteur d'antenne exponentiel, qualifié de rayonnement superdirectif par Crighton & Huerre [26] :

$$p' = \exp(45M_p \cos \theta) \quad (1.1)$$

où M_p représente le nombre de Mach de convection des structures tourbillonnaires. Ce résultat est très surprenant puisqu'il ne se conforme à aucun développement multipolaire comme attendu à très faible nombre de Mach pour une source acoustiquement compacte. Pour expliquer cette modélisation empirique, Huerre & Crighton [36] développent l'analogie de Lighthill ([57, 58]) en considérant une distribution non-compacte des termes sources. À partir d'une répartition gaussienne de la source le long de la couche de cisaillement, un facteur d'antenne superdirectif est ainsi retrouvé. La présence de quelques termes supplémentaires en désaccord avec les observations de Laufer & Yen a toutefois limité la portée de cette analyse. Une approche alternative a été proposée par Crighton & Huerre [26]. Au lieu de modéliser la source aéroacoustique, Crighton & Huerre postulent un champ de pression gaussien au voisinage d'un

appariement, en accord avec les mesures de Laufer & Yen. Crighton & Huerre calculent le rayonnement acoustique en résolvant une équation d'onde dans le milieu environnant. Un facteur d'antenne superdirectif est à nouveau retrouvé, accompagné d'un terme supplémentaire de type dipolaire, résultant toutefois uniquement du caractère bidimensionnel du problème traité par ces auteurs.

Les résultats présentés dans cette première partie visent à fournir de nouveaux éléments pour la compréhension des mécanismes de bruit associés au bruit d'appariement tourbillonnaire dans les jets subsoniques. L'état de la couche de cisaillement initiale est suspecté avoir un rôle déterminant. En effet, comme l'ont montré Hussain & Zaman [40] l'évolution aval des structures de vorticité est fortement influenc e par les conditions initiales du jet, ce qui modifie donc très probablement aussi le rayonnement acoustique émis par ces tourbillons. Deux jets sont considérés, l'un étant initialement laminaire et l'autre initialement nominalemt laminaire. Tous deux sont étudiés dans la même installation, seule la vitesse du jet U_j étant modifi e. Une source acoustique est par ailleurs utilis e pour contrôler la croissance du mode le plus instable dans la couche de cisaillement. Les deux diagrammes de rayonnement associés au bruit d'appariement ont été retrouvés et, dans les deux cas, les propriétés de l'écoulement ont été caract ris es en détail afin de mettre en évidence les mécanismes de bruit spécifiques. Par ailleurs, pour faciliter l'interprétation du champ acoustique lointain mesuré, un modèle de rayonnement similaire à celui utilisé par Crighton & Huerre [36] a été développé mais en géométrie 3D et axisymétrique.

Cette chapitre est organis e comme suit. La section 1.2 présente les différentes modélisations analytiques généralement utilis es pour expliquer les mécanismes de bruit liés à l'appariement tourbillonnaire. Le protocole expérimental est décrit à la section 1.3. Pour chacun des deux jets étudiés, les conditions initiales de la couche de cisaillement sont décrites avec précision à la section 1.4, l'excitation n'étant pas utilis e. L'évolution des fluctuations au centre de la couche de cisaillement et sur l'axe du jet est également  tudi e. L'influence de l'excitation sur le développement aérodynamique du jet est analys e à la section 1.5. La section 6 est consacr e au champ de pression produit par le premier appariement, c'est-à-dire le premier sous-harmonique de l'excitation. La directivité du bruit d'appariement et la décroissance radiale du champ de pression au voisinage de l'appariement sont étudiés dans cette section. Les résultats de mesure en champ lointain sont interprétés à l'aide du modèle de rayonnement développé en annexe B. Le champ proche mesuré est modélisé et utilisé comme donn e d'entrée du modèle.

1.2 Modèles de bruit d'appariement tourbillonnaire

1.2.1 Modélisation de la source aéroacoustique et de son rayonnement

Rayonnement d'une source axisymétrique et compacte

L'objectif des analogies aéroacoustiques est de prédire le bruit produit par un écoulement à partir des fluctuations aérodynamiques. L'approche proposée par Lighthill [57] consiste à réarranger les équations de Navier-Stokes de manière à écrire une équation de propagation dans le milieu environnant, les termes restant constituant alors les termes de production et de réfraction de la grandeur propagée. La difficulté de cette approche consiste néanmoins à dissocier ces deux contributions pour ne conserver que le terme de production à déterminer, voir Bogey *et al.* [12, 13]. De nombreuses analogies peuvent être formulées mais, moyennant une description de l'écoulement suffisamment précise, celles-ci fournissent une prévision identique comme le souligne Crighton [25]. Il peut être toutefois judicieux dans certains cas de privilégier une analogie particulière, dans la mesure où la formulation du terme source fait intervenir plus ou moins explicitement une description connue des fluctuations de la source acoustique. Par exemple, dans le cas du bruit d'appariement tourbillonnaire, une formulation du terme source basée sur la vorticit   $\vec{\omega}$ est relativement bien adapté. Ainsi, pour expliquer leurs observations relatives au bruit d'appariements tourbillonnaires, Bridges & Hussain [20] utilisent l'analogie de M  hring [62] : (voir   galement Dowling [29])

$$p'(\vec{R}, t) = \frac{\rho_0}{12\pi c_0^2 R^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int (\vec{R} \cdot \vec{y})(\vec{R} \cdot \vec{y} \wedge \vec{\omega}) d\vec{y} \quad (1.2)$$

o   $\vec{R} := (R, \theta)$ est la position pour laquelle on souhaite d  terminer la pression acoustique (observateur) et $\vec{y} := (x, r, \phi)$ est un point dans la r  gion de la source acoustique, voir la figure 1.1.

Pour obtenir cette formulation, M  hring fait l'hypoth  se d'une r  partition acoustiquement compacte de la vorticit  , de la conservation de l'  nergie cin  tique des fluctuations, et de l'existence d'une fonction de Green vectorielle \vec{G} telle que $\nabla \wedge \vec{G} = \nabla \mathcal{G}$, \mathcal{G}   tant la fonction de Green de l'  quation des ondes en champ libre. Bien que l'existence de \vec{G} ne soit pas démontré dans le cas d'un   coulement quelconque, sa d  finition semble   tre bien posé    faible nombre de Mach, voir Crighton [25]. Dans l'expression (1.2), la vorticit   $\vec{\omega}$ est évalué au temps retard   $t - |\vec{R} - \vec{y}|/c_0 \approx t - R/c_0$ par hypoth  se de compacit  . Gr  ce    cette formulation, M  hring a pu d  terminer le bruit produit par un anneau de vorticit   parfaitement axisym  trique. Ce calcul est reproduit en annexe A et l'on en rappelle ici uniquement le r  sultat :

$$|p'| = \frac{\rho_0}{12c_0^2} \frac{|Q(t - R/c_0)|}{R} |3 \cos^2 \theta - 1| \quad (1.3)$$

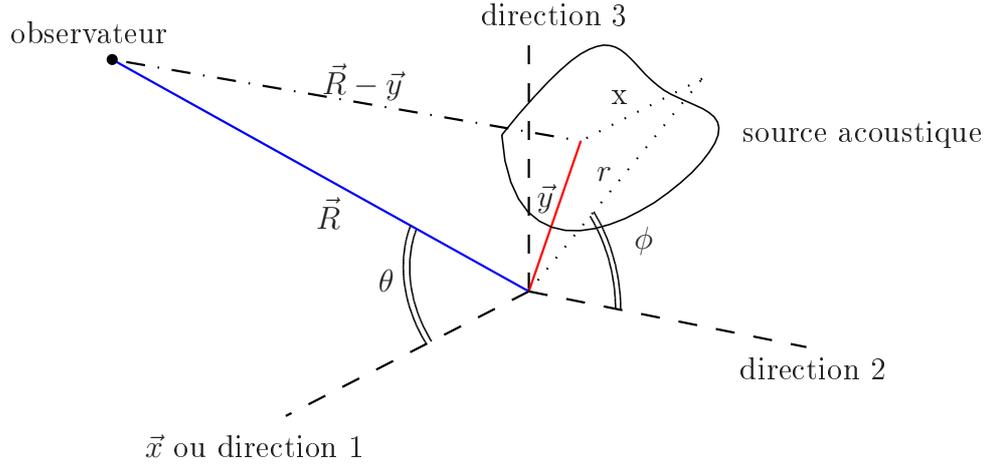


FIG. 1.1: Coordonnées cylindriques (x, r, ϕ) associées au vecteur \vec{y} dans la source et coordonnées polaires (R, θ) repérant l'observateur situé en \vec{R} .

avec

$$Q(t) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_S x r^2 \omega dS$$

\vec{x} étant l'axe de l'anneau et S une section d'azimut ϕ constant. Cette directivité présente un diagramme quadrupolaire avec deux angles d'extinction θ^* et θ^{**} situés à 55° et 125° de l'axe \vec{x} , voir la figure 1.2.

La comparaison du facteur de rayonnement $|3 \cos^2 \theta - 1|$ avec la directivité mesurée par Bridges & Hussain [20] est également montrée à la figure 1.3. On note un léger décalage de l'angle d'extinction θ^* . Pour expliquer ce désaccord, Bridges & Hussain [20] incriminent le modèle de source parfaitement axisymétrique et parfaitement compacte. Ils suggèrent par ailleurs une influence des parois de la buse pouvant introduire une diffraction notable du champ acoustique. L'effet de ces différentes imperfections est étudié dans ce qui suit.

Signalons avant cela que Bastin [3] retrouve le même facteur de rayonnement $|3 \cos^2 \theta - 1|$ à partir de l'analogie de Lighthill et en utilisant des hypothèses identiques à celles posées par Möhring. L'étude numérique menée par Mitchell, Lele & Moin [61] a démontré également l'efficacité de l'analogie de Lighthill à prédire le bruit d'appariement dans un jet axisymétrique.

Imperfections de la modélisation classique

Distribution non axisymétrique Dans le cas d'une distribution non axisymétrique de la vorticité, $\vec{\omega} = \omega_\phi(\phi) \omega_S(x, r, t) \vec{e}_\phi$, deux termes quadrupolaires supplémentaires contribuent au rayonnement acoustique comme le montre le calcul effectué en annexe A :

$$|p'(R, \theta)| = \frac{\rho_0}{12c_0^2} \frac{1}{R} \left| a_0 Q \times (3 \cos^2 \theta - 1) - a_1 P \frac{\sin(2\theta)}{2} - a_2 Q \frac{\sin^2 \theta}{2} \right| \quad (1.4)$$

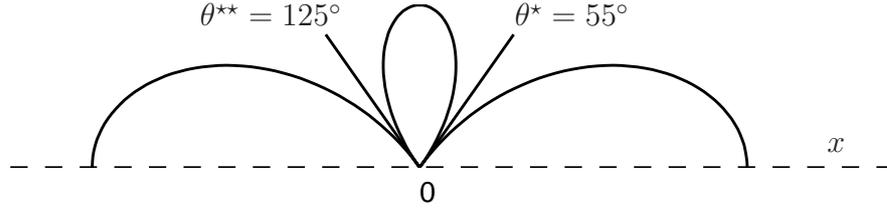


FIG. 1.2: Directivité acoustique d'une distribution axisymétrique et compacte de la source acoustique.

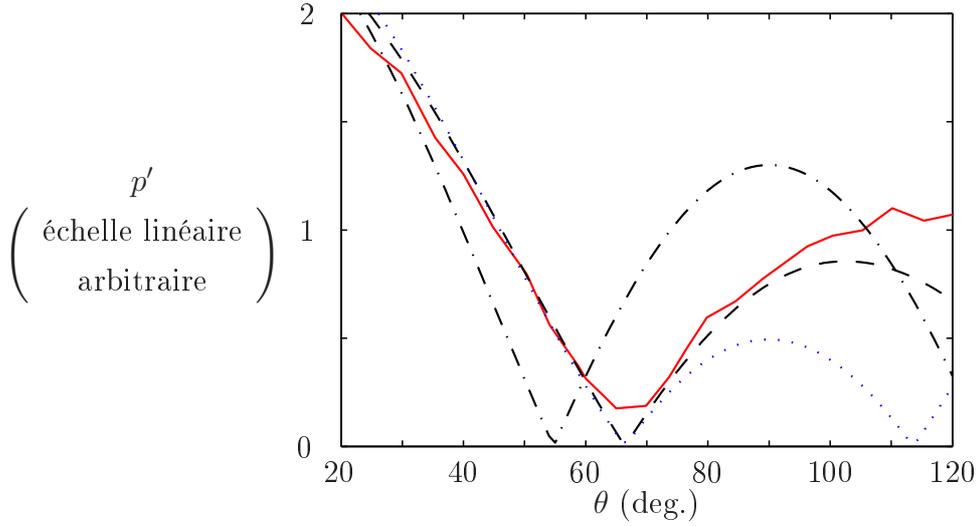


FIG. 1.3: Modélisation du bruit d'appariement tourbillonnaire mesuré par Bridges (—). Ces données sont issues de la figure 2.4 de la référence [19] et concernent le rayonnement du deuxième appariement c'est-à-dire le second sous-harmonique de l'excitation p'_{fs2} . Le facteur de rayonnement quadrupolaire $|3 \cos^2 \theta - 1|$ est aussi tracé (- · -), ainsi que la directivité pour une source non axisymétrique (· · ·), voir l'expression (1.4) avec $a_0 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -1.13$. Le rayonnement prévu par le développement multipolaire (1.5) tenant compte de la diffraction par la buse est aussi représenté (- - -).

où a_0 , a_1 et a_2 sont les trois premières composantes de la série de Fourier de ω_ϕ et :

$$P(t) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_S r(x^2 - r^2) \omega_S(x, r, t) dS$$

La présence de ces deux termes modifie certainement la position de l'angle d'extinction θ^* . Pour s'en convaincre, prenons par exemple $a_1 = 0$ et $a_0 = 1$. L'expression (1.4) se résume alors à :

$$|p'(r, \theta)| = \frac{\rho_0}{12c_0^2} \frac{|Q|}{R} \left| \left(3 + \frac{a_2}{2} \right) \cos^2 \theta - \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) \right|$$

Un choix judicieux du paramètre a_2 permet d'obtenir n'importe quel angle d'extinction θ^* . En particulier, pour que $\theta^* = 65^\circ$, il suffit de prendre $a_2 \approx -1.13$ (voir la figure 1.3), ce qui sup-

pose néanmoins une très grande déformation azimutale de l’anneau de vorticité, probablement irréaliste.

Diffraction par la buse L’expression (1.3) ne prend pas en compte les éventuels effets de diffraction acoustique d s à la présence de parois. En particulier, Bridges [19] suggère que la buse puisse diffracter le champ acoustique de manière notable, et propose d’en tenir compte en introduisant un terme supplémentaire de nature dipolaire :

$$p'_{\text{dip}} = \frac{P_{\text{dip}}}{z} \cos \theta$$

Sans prendre en compte l’éventuel déphasage avec le champ acoustique incident quadrupolaire, Bridges [19] propose la décomposition suivante :

$$p' = \frac{P_{\text{quad}}}{R} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{P_{\text{dip}}}{R} \cos \theta \quad (1.5)$$

  nouveau, l’introduction d’un terme de rayonnement supplémentaire permet de retrouver la présence de l’angle d’extinction à 65 , voir la figure 1.3. Cet effet d’installation a été également suggéré par Bridges [19] pour expliquer l’absence d’angle d’extinction observé par Laufer & Yen [54].

Source non compacte L’hypothèse d’un écoulement à faible nombre de Mach conduit généralement à négliger la variation du terme source en fonction du temps retardé $t - |\vec{R} - \vec{y}|/c_0$. Dans ce cas, on fixe un temps retardé identique pour tous les points \vec{y} dans le volume source et égale à $t - R/c_0$. En effet, à faible nombre de Mach, la différence de temps retardé entre deux points \vec{y} séparés de la distance l , soit l/c_0 , est très inférieure au temps de convection de la source entre ces deux points, soit l/v_ϕ , v_ϕ étant la vitesse de phase du terme source. Le rapport de ces deux temps caractéristiques $(l/c_0)/(l/v_\phi) = v_\phi/c_0$ représente le nombre de Mach de convection de la structure émettrice M_p , également très faible.

Comme le font remarquer Crighton et Huerre [36, 26], l’observation d’un rayonnement superdirectif par Laufer & Yen [54] remet en cause la validité d’une hypothèse de compacité, malgré le faible nombre de Mach du jet. En effet, le modèle proposé par Laufer & Yen [54] pour décrire le rayonnement superdirectif des appariements tourbillonnaires ne peut se décomposer en une série de termes quadrupolaires comme attendu dans ce cas, voir Huerre & Crighton [36] :

$$p' \sim \exp(45M_p \cos \theta) \quad (1.6)$$

Pour expliquer ce facteur d’antenne exponentiel, Huerre & Crighton [36] proposent de tenir compte de la variation du temps retardé le long de la source acoustique. Cette approche est analys e au paragraphe suivant, mais les développements présentés ne suivent pas fidèlement la démarche de ces auteurs.

Rayonnement d'une source axisymétrique non compacte

Théorie de Lighthill dans l'espace (\vec{R}, ω) Considérons l'analogie de Lighthill [57] :

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.7)$$

où T_{ij} est le tenseur de Lighthill qui, à faible nombre de Mach, à grand nombre de Reynolds, et en l'absence de fluctuations entropiques, se réduit à :

$$T_{ij} = \rho_0 u_i u_j$$

Une formulation possible de la solution de cette analogie en champ lointain $R \gg l$ est :

$$p'(\vec{R}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{R_i R_j}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{R} - \vec{y}|}{c_0} \right) d\vec{y} \quad (1.8)$$

Pour pouvoir tenir compte analytiquement de la non-compacité du volume source, simplifions la variation de T_{ij} en fonction du temps retardé à l'ordre 1 en y uniquement (approximation de Fraunhofer), voir Crighton [24] :

$$t - \frac{|\vec{R} - \vec{y}|}{c_0} \approx t - \frac{R}{c_0} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{y}}{R c_0}$$

L'expression de la composante de Fourier $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ de la pression acoustique $p'(\vec{R}, t)$:

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int p'(\vec{R}, t) \exp(-i\omega t) dt$$

possède dans ce cas un développement commode :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\vec{R}, \omega) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{4\pi c_0^2} \frac{R_i R_j}{R^3} \int \int T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{R}{c_0} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{y}}{R c_0} \right) \exp(-i\omega t) dt d\vec{y} \\ &= -\frac{\omega^2}{4\pi c_0^2} \frac{R_i R_j}{R^3} \int \hat{T}_{ij}(\vec{y}, \omega) \exp \left(-i\omega \left\{ \frac{R}{c_0} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{y}}{R c_0} \right\} \right) d\vec{y} \end{aligned}$$

En introduisant le nombre d'onde acoustique $\vec{k}_{ac} = (\omega/c_0)\vec{R}/R$, $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ s'écrit alors :

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = -\frac{k_{ac}^2}{4\pi} \frac{\exp(-i\vec{k}_{ac} \cdot \vec{R})}{R} \frac{R_i R_j}{R^2} \int \hat{T}_{ij}(\vec{y}, \omega) \exp(i\vec{k}_{ac} \cdot \vec{y}) d\vec{y} \quad (1.9)$$

où l'on reconnaît la transformée de Fourier spatiale de $T_{ij}(\vec{y}, t)$:

$$\hat{T}_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int T_{ij}(\vec{y}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{y}) d\vec{y}$$

L'expression (1.9) peut ainsi s'écrire de façon plus condensée comme :

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = -\frac{k_{ac}^2}{2} \frac{\exp(-i\vec{k}_{ac} \cdot \vec{R})}{R} \frac{R_i R_j}{R^2} \hat{T}_{ij}(\vec{k}_{ac}, \omega) \quad (1.10)$$

Cette formulation est analogue à l'expression (4.3) obtenue par Crighton [24]. L'amplitude de $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ est directement reliée à l'amplitude de la composante (\vec{k}_{ac}, ω) du terme source T_{ij} , la vitesse de phase de cette composante étant égale à la vitesse du son dans la direction de l'observateur $\omega/k_{ac} = c_0$.

Distribution axisymétrique du terme source Explicitons l'expression (1.9) dans le cas d'une distribution axisymétrique du champ de vitesse, $\vec{u} = u_x(x, r)\vec{e}_x + u_r(x, r)\vec{e}_r$. Il s'agit pour cela d'évaluer le terme :

$$a = \int \int_{\phi=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{R_i R_j}{R^2} \hat{T}_{ij}(\vec{y}, \omega)}_{=b} \underbrace{\exp(i\vec{k}_{ac} \cdot \vec{y})}_{=c} r d\phi dS \quad (1.11)$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse (u_i) sont reliées aux composantes cylindriques ($u_x, u_r, u_\phi = 0$) par :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_r \cos \phi \\ u_r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Le tenseur de Lighthill $T_{ij} = \rho_0 u_i u_j$ s'écrit donc comme suit en fonction des composantes cylindriques ($u_x, u_r, u_\phi = 0$) :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xr} \cos \phi & T_{xr} \sin \phi \\ T_{xr} \cos \phi & T_{rr} \cos^2 \phi & T_{rr} \cos \phi \sin \phi \\ T_{xr} \sin \phi & T_{rr} \cos \phi \sin \phi & T_{rr} \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

avec $T_{xx} = \rho_0 u_x^2$, $T_{xr} = \rho_0 u_x u_r$ et $T_{rr} = \rho_0 u_r^2$. Par ailleurs :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_{ac} = \begin{pmatrix} k_{ac} \cos \theta \\ k_{ac} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les termes b et c dans l'expression (1.11) s'écrivent donc :

$$b = \underbrace{\cos^2 \theta \hat{T}_{xx}(x, r, \omega)}_{b_1} + \underbrace{2 \cos \phi \times \cos \theta \sin \theta \hat{T}_{xr}(x, r, \omega)}_{b_2} + \underbrace{\cos^2 \phi \times \sin^2 \theta \hat{T}_{rr}(x, r, \omega)}_{b_3}$$

$$c = \exp\{i(k_{ac} r \sin \theta) \cos \phi\} \times \exp(ik_{ac} x \cos \theta)$$

Après intégration sur $\phi \in [0, 2\pi]$ du produit $c \times b_1$, on obtient :

$$I_1 = \int cb_1 d\phi = 2\pi J_0(rk_{ac} \sin \theta) \times \cos^2 \theta \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) \times \exp(ik_{ac} x \cos \theta)$$

quant au produit $c \times b_2$:

$$I_2 = \int cb_2 d\phi = 4i\pi J_1(rk_{ac} \sin \theta) \times \cos \theta \sin \theta \hat{T}_{xr}(x, r, \omega) \times \exp(ik_{ac} x \cos \theta)$$

et pour $c \times b_3$:

$$I_3 = \int cb_3 d\phi = \pi \{J_0(rk_{ac} \sin \theta) + J_2(rk_{ac} \sin \theta)\} \times \sin^2 \theta \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) \times \exp(ik_{ac} x \cos \theta)$$

où J_0 , J_1 et J_2 sont les fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre 0, 1 et 2 respectivement :

$$J_n(u) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \exp(iu \cos \phi) d\phi$$

La difficulté du calcul de la pression $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ à partir de l'expression (1.9) consiste alors à intégrer les termes I_i sur S . À notre connaissance, aucune solution explicite de ce problème n'a été proposée et seules quelques approches asymptotiques semblent accessibles par calcul analytique.

• Vérifions tout d'abord, que le facteur de rayonnement $(3 \cos^2 \theta - 1)$ est bien retrouvé dans le cas d'une source compacte, c'est-à-dire pour $k_{ac}r \ll 1$ et $k_{ac}x \ll 1$. En utilisant le développement des fonctions J_n à l'ordre dominant en zéro :

$$J_n(u) \approx \frac{u^n}{2^n n!}$$

les termes I_i se réduisent à :

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \cos^2 \theta \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) + O\{(k_{ac}r)^2, k_{ac}x\} \\ I_2 &= O\{k_{ac}r, (k_{ac}x)^0\} \\ I_3 &= \pi \sin^2 \theta \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) + O\{(k_{ac}r)^2, k_{ac}x\} \end{aligned}$$

L'intégration sur S de l'ordre dominant de la somme de ces trois termes fournit alors une bonne estimation de a (*i.e.* l'ordre dominant) :

$$\begin{aligned} a &\approx 2\pi \cos^2 \theta \int \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) r dS + \pi \sin^2 \theta \int \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) r dS \\ &\approx \cos^2 \theta \int \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) d\vec{y} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \int \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) d\vec{y} \end{aligned}$$

Or :

$$\int \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) d\vec{y} + \int \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) d\vec{y} = \rho_0 \int (\hat{u}_x^2 + \hat{u}_r^2) d\vec{y} = 2\rho_0 \hat{E}_c(\omega)$$

où $\hat{E}_c(\omega)$ est la composante ω de l'énergie cinétique de la source. En supposant que cette énergie se conserve parfaitement ($\hat{E}_c(\omega) = 0$), on obtient :

$$a = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \int \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) d\vec{y} \quad (1.12)$$

L'expression (1.9) se réduit alors à :

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{8\pi c_0^2 R} (i\omega)^2 \exp\left(-i\frac{\omega}{c_0} \vec{R}\right) \times (3 \cos^2 \theta - 1) \int \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) d\vec{y}$$

et par transformée de Fourier inverse, on obtient finalement :

$$p'(\vec{z}, t) = \frac{1}{8\pi c_0^2 R} (3 \cos^2 \theta - 1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{xx}\left(x, r, t - \frac{R}{c_0}\right) d\vec{y}$$

Cette formulation est analogue à l'expression calculée par Bastin [3], et l'on retrouve bien le facteur de rayonnement quadrupolaire ($3 \cos^2 \theta - 1$).

• L'intégration de l'expression (1.9) peut être également déterminée explicitement dans le cas d'une distribution quelconque du terme source dans la direction axiale, mais compacte dans la direction radiale, $k_{ac}r \ll 1$. Ce cas d'étude est similaire au problème traité par Huerre & Crighton [36]. Les termes I_i se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \cos^2 \theta \hat{T}_{xx}(x, r, \omega) \exp(ik_{ac}x \cos \theta) + O\{(k_{ac}r)^2\} \\ I_2 &= O(k_{ac}r) \times \exp(ik_{ac}x \cos \theta) \\ I_3 &= \pi \sin^2 \theta \hat{T}_{rr}(x, r, \omega) \exp(ik_{ac}x \cos \theta) + O\{(k_{ac}r)^2\} \end{aligned}$$

et dans ce cas, a est approximativement égale à :

$$a \approx 2\pi \cos^2 \theta \int \hat{T}_{xx}(k_{ac} \cos \theta, r, \omega) r dr + \pi \sin^2 \theta \int \hat{T}_{rr}(k_{ac} \cos \theta, r, \omega) r dr$$

En supposant comme précédemment que :

$$\int \hat{T}_{xx}(k_{ac} \cos \theta, r, \omega) + \hat{T}_{rr}(k_{ac} \cos \theta, r, \omega) r dr = 0$$

on obtient :

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = -\frac{k_{ac}^2}{4} \frac{\exp(-i\vec{k}_{ac} \cdot \vec{R})}{R} (3 \cos^2 \theta - 1) \int \hat{T}_{xx}(k_{ac} \cos \theta, r, \omega) r dr \quad (1.13)$$

Sur la base d'une étude de stabilité au voisinage de l'appariement tourbillonnaire, Huerre et Crighton [36, 26] modélisent l'évolution spatio-temporelle des termes du tenseur de Lighthill sous la forme d'une onde convectée dans la direction x et modulée spatialement. De la même manière, écrivons le terme $T_{xx}(x, r, t)$ sous la forme suivante :

$$T_{xx}(x, r, t) = T_{xx}^r(r) \times T_{xx}^x(x) \exp(i\Omega t - ik_x x)$$

où Ω est la pulsation liée à l'appariement et k_x est un nombre d'onde, supposé constant pour simplifier. La transformée de $T_{xx}(x, r, t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{xx}(k, r, \omega) &= T_{xx}^r(r) \times \frac{1}{2\pi} \int T_{xx}^x(x) \exp\{i(k - k_x)x\} dx \times \delta(\Omega - \omega) \\ &= T_{xx}^r(r) \times \hat{T}_{xx}^x(k - k_x) \delta(\Omega - \omega) \end{aligned}$$

et l'expression (1.13) de la pression acoustique $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ se réduit donc à :

$$\hat{p}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{4c_0^2 R} \int T_{xx}^r(r) r dr \times (3 \cos^2 \theta - 1) \times (i\omega)^2 \exp(-i\frac{\omega}{c_0} R) \hat{T}_{xx}^x(\frac{\omega}{c_0} \cos \theta - k_x) \delta(\Omega - \omega)$$

Après transformée de Fourier inverse, la pression acoustique $p'(\vec{R}, t)$ s'écrit finalement :

$$p'(\vec{R}, t) = \frac{1}{4c_0^2 R} \int T_{xx}^r(r) r dr \times (3 \cos^2 \theta - 1) \hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) \times (i\Omega)^2 \exp\left\{i\Omega \left(t - \frac{R}{c_0}\right)\right\} \quad (1.14)$$

où $D_\theta = 1 - M_p \cos \theta$ est le facteur Doppler, avec $M_p = (\Omega/k_x)/c_0$ le nombre de Mach de phase du terme source. La directivité $|p'(R, \theta)|$ s'obtient alors aisément :

$$|p'(R, \theta)| \sim \frac{1}{R} \times |3 \cos^2 \theta - 1| \times |\hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta)| \quad (1.15)$$

Contrairement au cas de la source parfaitement compacte, le rayonnement acoustique lointain est influencé par la forme de la distribution axiale de la source, à travers le facteur d'antenne $\hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta)$. Signalons que cette formulation de la directivité n'est pas en accord avec le résultat donné par Huerre & Crighton. À très faible nombre de Mach $M_p \ll 1$, l'expression (1.15) dégénère bien vers le facteur quadripolaire $(3 \cos^2 \theta - 1)$ pour une source compacte, ce que la formulation proposée par Huerre & Crighton ne semble pourtant pas retrouver.

À partir d'une analyse de stabilité linéaire, Huerre & Crighton montrent par ailleurs que la croissance des fluctuations de vitesse obéit à une évolution gaussienne au voisinage de la saturation :

$$u_x = u_m \times \xi(r) \times \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \times \exp(i\Omega t - ik_x x)$$

où $\xi(r)$ est le mode propre neutre de l'équation de dispersion pour une fréquence sous-harmonique f_{si} du mode le plus instable. Bien que l'hypothèse d'un faible niveau de fluctuation soit discutable au voisinage d'un appariement, cette distribution gaussienne est néanmoins en bon accord avec les observations de Laufer & Yen concernant le champ de pression au voisinage des appariements.

Considérons donc de la même manière une distribution gaussienne du terme source :

$$T_{xx}^x = \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_e^2}\right) \quad (1.16)$$

Le facteur d'antenne correspondant $\hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta)$ s'écrit alors :

$$\hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) = \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{4} D_\theta^2\right)$$

et, à très faible nombre de Mach $M_p \ll 1$:

$$\hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) \sim \exp\left(\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{4} M_p \cos \theta\right)$$

Cette expression du facteur d'antenne est analogue au modèle superdirectif (1.6) donné par Laufer & Yen.

Toutefois, la présence des angles d'extinction θ^* et θ^{**} due à l'annulation du terme quadripolaire $(3 \cos^2 \theta - 1)$ (voir l'expression (1.14)) n'a pas été constatée par Laufer & Yen. La formulation donnée par Huerre & Crighton prévoit elle aussi la présence d'angles d'extinctions, ce que ces auteurs attribuent à la nature quadripolaire des sources aéroacoustiques, et à l'axisymétrie du volume source. Huerre & Crighton soupçonnent un effet de masquage des

termes sources situés à l'opposé de l'observateur par rapport au jet, et ils préconisent donc de restreindre l'intégration dans le volume source aux angles ϕ compris entre 0° et 180° , ou du moins de pondérer les termes sources en fonction de l'angle d'azimuth. Tout comme l'ont suggéré Bridges & Hussain, on peut par ailleurs supposer que l'axisymétrie imparfaite et la non-compacité dans la direction radiale de la source puissent également expliquer la possibilité d'un décalage de la position de θ^* vers des (grands) angles non explorés par Laufer & Yen ($15^\circ < \theta < 90^\circ$).

• Analysons le cas d'une source non-compacte dans le sens radial, mais confinée dans un mince volume autour de l'axe de symétrie (dans la couche de cisaillement par exemple), aucune limitation n'étant imposée dans la direction axiale. Posons pour cela :

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, r, t) &= \delta(r - r_j) \times T_{xx}^x(x) \exp(i\Omega t - ik_x) \\ T_{xr}(x, r, t) &= \delta(r - r_j) \times T_{xr}^x(x) \exp(i\Omega t - ik_x) \\ T_{rr}(x, r, t) &= \delta(r - r_j) \times T_{rr}^x(x) \exp(i\Omega t - ik_x) \end{aligned}$$

où r_j représente le rayon du jet, $r_j = D/2$. Dans ce cas limite aussi, l'intégration sur S des termes I_i peut être calculée explicitement :

$$\begin{aligned} \int_S I_1 r dS &= 2\pi r_j J_0(k_{ac} r_j \sin \theta) \times \cos^2 \theta \hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) \times \delta(\Omega - \omega) \\ \int_S I_2 r dS &= 2i\pi r_j J_1(k_{ac} r_j \sin \theta) \times \sin(2\theta) \hat{T}_{xr}^x(-k_x D_\theta) \times \delta(\Omega - \omega) \\ \int_S I_3 r dS &= \pi r_j \{J_0(k_{ac} r_j \sin \theta) + J_2(k_{ac} r_j \sin \theta)\} \times \sin^2 \theta \hat{T}_{rr}^x(-k_x D_\theta) \times \delta(\Omega - \omega) \end{aligned}$$

En se limitant à un développement des fonctions de Bessel à l'ordre $(k_{ac} r_j)^1$, et en utilisant la conservation de l'énergie $\hat{T}_{xx}(\omega) + \hat{T}_{rr}(\omega) = 0$, l'expression (1.9) de $\hat{p}(\vec{R}, \omega)$ devient :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\vec{R}, \omega) \approx \frac{r_j}{4c_0^2 R} \times (i\omega)^2 \exp\left(-i\frac{\omega R}{c_0}\right) \times \left\{ (3\cos^2 \theta - 1) \hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) \right. \\ \left. + 2i\frac{\omega}{c_0} r_j \sin \theta \sin(2\theta) \hat{T}_{xr}^x(-k_x D_\theta) \right\} \times \delta(\Omega - \omega) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} p'(\vec{R}, t) \approx \frac{r_j}{4c_0^2 R} \times \left\{ (3\cos^2 \theta - 1) \hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) + 2i\frac{\Omega}{c_0} r_j \sin \theta \sin(2\theta) \hat{T}_{xr}^x(-k_x D_\theta) \right. \\ \left. \times (i\Omega)^2 \exp\left\{i\Omega\left(t - \frac{R}{c_0}\right)\right\} \right\} \end{aligned}$$

On obtient finalement la directivité suivante :

$$|p'(R, \theta)| \sim \frac{1}{R} \left| (3\cos^2 \theta - 1) \hat{T}_{xx}^x(-k_x D_\theta) + \underbrace{i \times 2\pi H_m \sin \theta \sin(2\theta) \hat{T}_{xr}^x(-k_x D_\theta)}_{iT_\theta} \right|$$

où $H_m = \Omega D / (2\pi c_0)$ est le nombre de Helmholtz. Comme précédemment, l'introduction d'un terme supplémentaire, iT_θ , peut expliquer le décalage de l'angle d'extinction θ^* vers une valeur non explorée par Laufer & Yen.

1.2.2 Modélisation du champ de pression proche et de son rayonnement

Crighton & Huerre [26] ont proposé une approche alternative pour expliquer le facteur d'antenne observé par Laufer & Yen. Cette méthode permet de s'affranchir de la description de la source aéroacoustique, en utilisant comme donnée d'entrée le champ de pression produit par l'appariement à la périphérie du jet. La pression acoustique rayonnée par cette frontière est alors calculée en résolvant une équation d'onde. Bien que ce modèle n'explique pas les mécanismes aéroacoustiques à l'origine du bruit, il facilite l'interprétation du champ acoustique qui résulte de l'interférence des ondes de pression issues du champ proche. Cette approche s'apparente à celle utilisée par Tam & Burton [72] pour expliquer le rayonnement d'ondes de Mach produit par un jet supersonique.

- Détaillons l'approche de Tam & Burton [72]. La condition aux limites du problème de rayonnement est obtenue par une étude de stabilité linéaire de l'écoulement, supposé être lentement divergent. La solution à ce problème de stabilité est cherchée sous la forme d'une onde de pression modulée spatialement en amplitude :

$$p'(\epsilon x, r, t) \approx A_0(\epsilon x) \xi(r; \epsilon x) \exp\left(\frac{i}{\epsilon} Q(\epsilon x) - i\omega t\right) \quad (1.17)$$

Le paramètre ϵ prend en compte l'évasement du jet $\epsilon = d\delta_\theta/dx \sim \delta_\theta/D$ que l'on suppose faible ($\epsilon \ll 1$). La pulsation ω est réelle (et fixée), et $Q(\epsilon x) = \int^{\epsilon x} k_x(X', \omega) dX'$ représente l'évolution spatiale de la phase de la fluctuation. Le nombre d'onde k_x est déterminé en résolvant une équation de dispersion locale, pour chaque position axiale ϵx fixée. Par ailleurs, $\xi(r; \epsilon x)$ est la fonction propre bornée à l'infinie ($r \rightarrow \infty$) de ces équations de dispersion, avec $\xi_1(r = 0, \epsilon x) = 1$ par convention. Enfin, l'évolution axiale de l'amplitude A_0 est donnée par une condition de solvabilité.

Cette fluctuation de pression évolue beaucoup plus rapidement dans la direction radiale (variable r dimensionnée par δ_θ) que dans la direction axiale (variable ϵx dimensionnée par $D \sim \epsilon \delta_\theta$), et s'atténue exponentiellement dans la direction radiale. En revanche, dans le champ acoustique la fluctuation de pression varie avec la même longueur caractéristique dans les directions axiale et radiale (la longueur d'onde acoustique λ_{ac}) et une formulation adéquate de p' fait intervenir les variables $(\mu x, \mu r)$, avec $\mu = \delta_\theta/\lambda_{ac}$. Tam & Burton identifient μ et ϵ pour simplifier, soit $\lambda_{ac} \sim D$, ce qui est réaliste dans le cas du rayonnement haute-fréquence pour un jet supersonique (mais pas pour un jet subsonique). Avec les variables $(\mu x, \mu r)$, la pression

acoustique vérifie une équation d'ondes à l'extérieur du jet (milieu supposé au repos). La forme générale de la solution de cette équation peut s'exprimer ainsi :

$$p'(\epsilon x, \epsilon r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) H_n^1\{i\lambda(k)r\} \exp(ikx + in\phi - i\omega t) dk \quad (1.18)$$

où $\lambda(k) = (k^2 - \omega^2/c_0^2)^{1/2}$. Cette formulation suppose que la densité volumique dans le jet ρ_j soit égale à la densité volumique à l'extérieur ρ_∞ , soit $\bar{\rho}_\infty = \rho_\infty/\rho_j = 1$, voir l'expression (5.1) dans Tam & Burton [72].

Les composantes $g(k)$ sont alors déterminées "en raccordant" l'expression de la pression acoustique (1.18) et l'expression de l'onde d'instabilité de pression dans l'écoulement (1.17), ce qui fournit :

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\epsilon x) \exp\left(\frac{i}{\epsilon} Q(\epsilon x)\right) \exp(-ikx) dx$$

où l'on reconnaît la transformée de Fourier de l'évolution axiale de la fluctuation de pression dans le jet, $A_0(\epsilon x) \exp(iQ(\epsilon x)/\epsilon)$. En introduisant les coordonnées polaires $\vec{R} := (R, \theta)$ pour repérer l'observateur, Tam & Burton estiment alors l'intégrale (1.18) en champ lointain à l'aide de la méthode de la phase stationnaire, ce qui fournit la directivité suivante :

$$|p'(R, \theta)| \sim \frac{1}{R} g\left(\frac{\omega}{c_0} \cos \theta\right) \quad (1.19)$$

• Dans l'approche suivie par Crighton & Huerre [26], l'évolution des fluctuations de pression dans le jet est imposée, et l'évolution axiale est relativement analogue à celle de l'expression (1.17) :

$$p'(\epsilon x, t) = E(\epsilon x) \exp(ix - it) \quad (1.20)$$

la variable spatiale x étant normalisée par $1/k_x$ et le temps t par $1/\omega$. L'expression (1.20) constitue la condition aux limites d'une équation d'onde (étudiée en 2-D) pour la pression acoustique à l'extérieur de l'écoulement :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

Ce problème est résolu par une méthode très similaire à celle utilisée par Tam & Burton [72], et l'expression suivante de la directivité est alors obtenue, voir l'expression (3.4) dans Crighton & Huerre [26] :

$$|p'(R, \theta)| \sim \frac{\sin \theta}{\sqrt{R}} \hat{E}\left(-\frac{1}{\epsilon} D_\theta\right)$$

On retrouve un facteur d'antenne analogue à ce qui a été prévu par une analogie aéroacoustique. Le terme dipolaire $\sin \theta$ est attribué uniquement au caractère bidimensionnel du problème de rayonnement, celui-ci n'étant pas présent en 3-D, voir l'expression (1.19) obtenue par Tam & Burton [72], et les calculs menés en annexe B (et commentés par la suite). Plusieurs fonctions

type pour l'enveloppe $E(x)$ sont considérées par Crighton & Huerre. En particulier, pour une distribution gaussienne :

$$E(\epsilon x) = \exp(-\epsilon^2 x^2)$$

le champ acoustique lointain s'écrit, pour $M_p \ll 1$:

$$|p'(R, \theta)| \sim \frac{\sin \theta}{\sqrt{R}} \exp\left(\frac{M_p}{4\epsilon^2} \cos \theta\right) \quad (1.21)$$

Comme précédemment, le facteur d'antenne est analogue au modèle superdirectif (1.6) proposé par Laufer & Yen. Toutefois, l'estimation du facteur multiplicatif $\sigma_e^2 k_x^2 / 4$ faite par Huerre & Crighton à partir des données de Laufer & Yen, n'est pas en accord avec la valeur empirique de 45 (au lieu d'une valeur prévue autour de 20). Comme nous le verrons, ce désaccord résulte du choix de la fonction utilisée pour modéliser la distribution du champ proche, et d'autres fonctions décrivant le champ proche tout aussi convenablement qu'une gaussienne permettent de retrouver le coefficient de 45.

1.3 Conditions expérimentales

1.3.1 Installation expérimentale

L'étude aéroacoustique du jet a été menée dans une installation spécialement conçue pour les écoulements à faible nombre de Mach ($M < 0.5$) et de section modérée (quelques cm^2). Deux vitesses de jet ont été considérées, $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, correspondant à des nombres de Reynolds Re_D de 6.7×10^4 et 1.3×10^5 respectivement, le diamètre du jet étant de $D = 5 \text{ cm}$.

L'air est alimenté par un ventilateur de vitesse contrôlable, séparé de la chambre de mesure par environ 30 m de tuyauterie constituée de parties souples et rigides en alternance pour éviter la propagation des vibrations mécaniques, voir le schéma 1.4. La vitesse de l'écoulement dans cette canalisation de grande section ($\approx 1 \times 1 \text{ m}^2$) est relativement faible ($< 6 \text{ m.s}^{-1}$) afin de minimiser le bruit d'origine aérodynamique. Deux silencieux constitués de quatre panneaux de laine de verre de 2.6 m de long sont disposés aux 2 extrémités de la canalisation pour atténuer les éventuels modes de conduit. L'écoulement est ensuite conditionné par un nid d'abeille de section environ $1 \times 1 \text{ cm}^2$ et un grillage de maille carrée de 1 mm de côté. Un premier convergent réduit ensuite la section de la canalisation d'un facteur 7 approximativement, et la buse plus en aval d'un facteur 46. Le profil de la tuyère est défini par une fonction polynomiale dont l'extrémité aval est parallèle à l'ordre deux à l'axe du jet, voir la figure 1.5. Dans le plan de sortie de la buse, la vitesse du jet est stable avec moins de 1% de variations et le taux de turbulence est inférieur à 0.3%. Par ailleurs, quatre haut-parleurs sont disposés autour de la tuyère pour

exciter la couche de cisaillement. La perturbation acoustique est guidée à travers des cavités débouchant en sortie de buse par un fin canal de 2 mm d'épaisseur et orienté à $\theta = 110^\circ$ de l'axe du jet. L'étude de réceptivité menée par Tam [70] pour une couche cisaillement plane excitée par une onde acoustique montre en effet que cet angle assure un contrôle optimal des fluctuations. L'alimentation électrique des haut-parleurs est fournie par deux amplificateurs de puissance (B&K) commandés par un générateur de signal à quartz de grande précision (Schlumberger).

Le jet est étudié dans un environnement anéchoïque (6.10 m \times 4.60 m \times 3.80 m) dont la fréquence de coupure est de 100 Hz, ce qui est bien inférieure à toutes les fréquences acoustiques considérées dans cette étude (>750 Hz). Les caractéristiques de cette salle sont détaillées par Berhault & *et al.* [7]. Un soin particulier a été pris pour minimiser l'influence des parois rigides (notamment la buse et le chariot de mesure) en les recouvrant de matériaux absorbants.

Le chariot utilisé pour le déplacement des instruments de mesure possède trois axes automatisés. La précision du déplacement est estimée à quelques 1/10 mm. Pour obtenir un positionnement plus précis, notamment dans les zones cisillées très minces en sortie de buse, un chariot manuel à vis gradué au 1/10 mm a été utilisé. Le champ acoustique lointain a été exploré à l'aide d'un bras de directivité automatisé de 2 m = $40D$ de long, et précis à environ 1° près. À cette distance, la condition de champ lointain géométrique est bien satisfaite pour toutes les ondes acoustiques considérées, la fréquence la plus faible étant de 750 Hz.

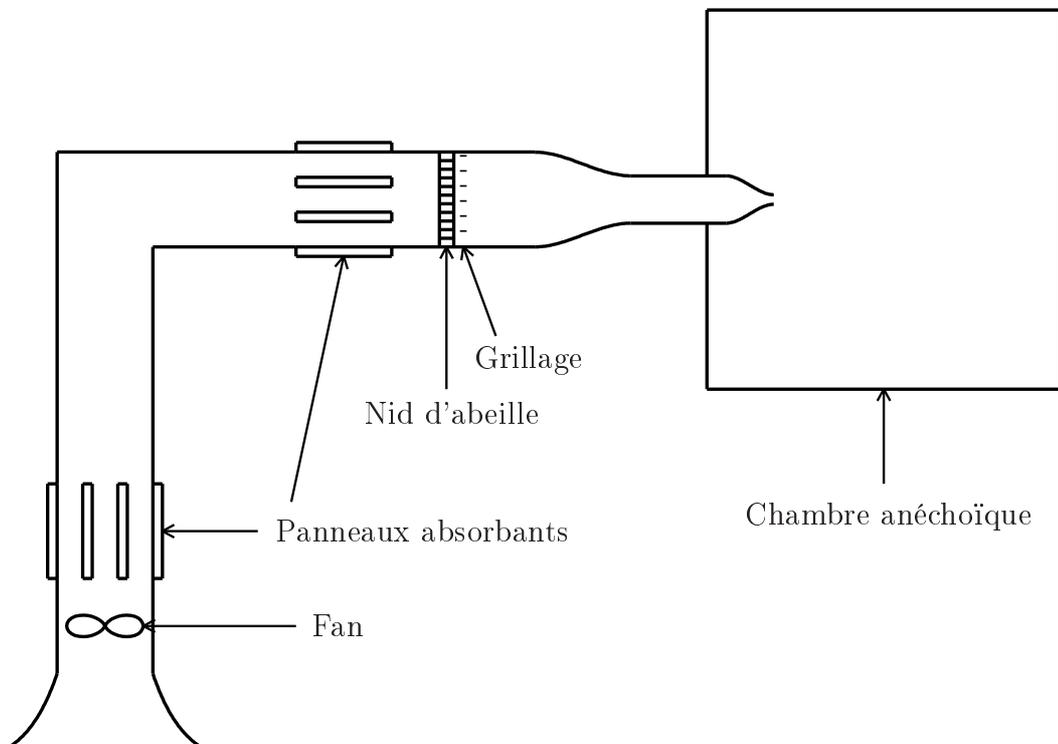


FIG. 1.4: Schéma de l'installation expérimentale.

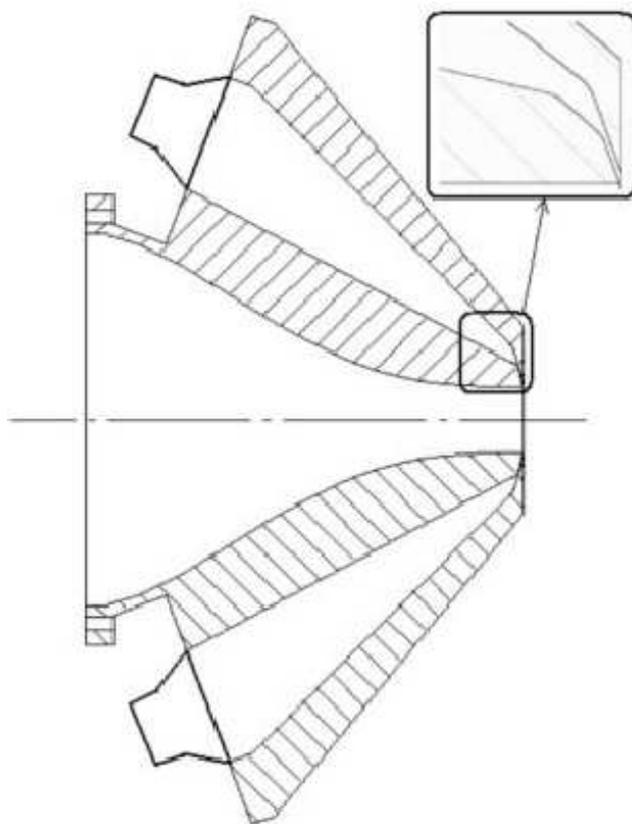


FIG. 1.5: Tuyère et dispositif d'excitation.

1.3.2 Instrumentation

Les vitesses ont été mesurées à l'aide d'un fil chaud de 1.25 mm de long et de 5 μm de diamètre conditionné par un anémomètre à température constante de type Dantec Streamline. Le coefficient de surchauffe est de 0.8 et la fréquence de réponse est de 20 kHz environ, ce qui assure une mesure optimale des fluctuations de vitesse pour toutes les fréquences considérées dans cette étude (< 4 kHz). Le fil chaud est monté sur un support droit placé à 45° de l'axe du jet.

Le champ de pression proche a été mesuré à l'aide d'un microphone 1/8" (B&K), et orienté normalement à l'axe du jet. Le champ acoustique lointain a été mesuré par un microphone 1/2" de type champ libre (B&K). Ce microphone est placé à l'extrémité du bras de directivité en direction de la sortie de buse. Selon les caractéristiques fournies par le constructeur B&K, la fréquence de coupure à 3 dB est de 70 kHz environ.

Les spectres de vitesse u'_f ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et de pression p'_f (Pa) ont été mesurés par un analyseur HP35652B, avec une résolution fréquentielle de 8 Hz. Environ 1000 blocs de signaux temporels ont été acquis pour obtenir les spectres moyens, ce qui assure une convergence des résultats à 3% environ.

1.4 Caractérisation du jet naturel

1.4.1 Conditions initiales

Nous nous intéressons ici aux conditions initiales du jet pour les deux vitesses U_j , l'excitation n'étant pas utilisée. La couche limite en sortie de buse présente un profil de vitesse moyenne en bon accord avec le profil théorique de Blasius, voir la figure 1.6(a), et le facteur de forme H est proche de la valeur couramment mesurée pour des conditions laminaires ($H \approx 2.6$), voir le tableau 1.1. Comme le montre la figure 1.6(b), le taux de turbulence u'/U_j n'est pourtant pas faible à $40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et est même d'un ordre de grandeur plus élevé qu'à $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cet accroissement significatif de l'intensité des fluctuations indique une transition de la couche limite, passant d'un état laminaire à $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\text{Re}_D < 10^5$), à un état nominalement laminaire à $40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\text{Re}_D > 10^5$). Cette terminologie est empruntée à Zaman [77], dont l'étude a montré la présence d'un nombre de Reynolds Re_D critique, autour de 10^5 , pour l'état de la couche limite en sortie de buse. Comme le révèlent les spectres de vitesses tracés à la figure 1.6(c), les fluctuations au centre de la couche limite sont principalement constituées de composantes très basses fréquences ($f < 100$ Hz ou $\text{St}_{\delta_{\theta cl}} < 0.001$) dont l'origine est attribuée au bruit parasite de l'installation, voir Husain & Hussain [39]. Les quelques composantes discrètes de nombres de Strouhal $\text{St}_{\delta_{\theta cl}}$ entre 0.003 et 0.012 résultent des fluctuations plus en aval dans la couche de cisaillement (voir

ce qui suit). Enfin, l'augmentation du taux de turbulence pour $St_{\delta_{ocl}} > 0.01$ est attribuée au bruit électronique introduit par le système d'acquisition, celui-ci dominant les fluctuations aérodynamiques de très faible amplitude.

La région cisailée légèrement plus en aval a été également étudiée, à $x = 3.5$ mm de la sortie de buse. Les profils radiaux de la vitesse moyenne sont reportés à la figure 1.6(d). Pour $U_j = 40$ m.s⁻¹, la distribution de la vitesse obéit à un profil en tangente hyperbolique, représentatif d'une couche de cisaillement mince. Pour $U_j = 20$ m.s⁻¹, l'évolution de la vitesse à l'intérieur du jet ($r < r_j$) est en revanche mieux décrite par le profil de couche limite de Blasius. Pour les deux vitesses de jet, les profils expérimentaux présentent néanmoins tous deux un point d'inflexion caractéristique d'un écoulement instable. Les spectres de fluctuations de vitesses indiquent la présence d'une instabilité dont le nombre de Strouhal $St_{\delta_{\theta_0}} = St_{\delta_{\theta}}(f_0)$ est voisin de 0.014 pour les deux jets. Cette fluctuation est associée au mode axisymétrique le plus instable comme le prévoit la théorie de la stabilité (voir Michalke [60] et Freymuth [32]). Dans le cas du jet à 40 m.s⁻¹, une seconde fluctuation est également observée pour un nombre de Strouhal $St_{\delta_{\theta_1}} = St_{\delta_{\theta}}(f_1)$ légèrement plus élevé. Celle-ci est attribuée au premier mode tournant d'instabilité. La présence de ce mode hélicoïdal a été aussi mise en évidence par Drubka, Reisenhel & Nagib [30] à partir de visualisations d'écoulement. Ces auteurs constatent par ailleurs que la fréquence f_1 est 20% plus élevée que f_0 , ce que nous retrouvons aussi. Cette relation n'est toutefois pas générale comme l'indique la théorie de la stabilité linéaire, mais est fonction du paramètre δ_{θ}/D notamment. Le premier sous-harmonique du mode axisymétrique ($St_{\delta_{\theta}}(f_{s1}) = St_{\delta_{\theta_0}}/2$) est aussi détecté pour les deux vitesses de jet. La présence de cette fluctuation est généralement interprétée comme un effet du bruit d'appariement tourbillonnaire plus en aval, voir Laufer & Monkewitz [53] et Husain & Hussain [39]. Les caractéristiques quantitatives de la couche de cisaillement sont fournies au tableau 1.1.

1.4.2 Fluctuations dans la couche de cisaillement

Analyse des signaux temporels

Les conditions initiales de l'écoulement étant différentes selon la vitesse du jet considérée, on peut s'attendre à ce que le développement aval de la couche de cisaillement diffère aussi, ce qui est étudié dans cette section.

Dans le cas du jet initialement laminaire pour $U_j = 20$ m.s⁻¹, quelques signaux temporels de la fluctuation de vitesse au centre de la couche de cisaillement sont représentés à la figure 1.7(a). Ils ont été mesurés tous les $\Delta x = 5$ mm ($D/10$), de $x \approx 0$ mm à $x = D$. Pour en faciliter l'interprétation, l'analyse spectrale de ces signaux est montrée à la figure 1.7(b). On constate ainsi que le mode axisymétrique u'_{f_0} croît très rapidement depuis la sortie de buse et domine

Couche limite								
U_j (m.s ⁻¹)	$\delta_{\theta cl}/D$	$Re_{\delta_{\theta cl}}$	H	u'_{Mcl}/U_j (%)				
20	0.0023	157	2.62	0.14				
40	0.0026	371	2.53	3.34				

Couche de cisaillement								
U_j (m.s ⁻¹)	δ_{θ}/D	$Re_{\delta_{\theta}}$	$\sqrt{Re_D}\delta_{\theta}/D$	u'_M/U_j (%)	f_0 (Hz)	f_1 (Hz)	$St_{\delta_{\theta_0}}$	$St_{\delta_{\theta_1}}$
20	0.0042	280	1.09	0.18	1283	1520	0.0135	0.0160
40	0.0028	373	1.02	3.36	4144	4950	0.0144	0.0172

TAB. 1.1: Caractéristiques de la couche limite en sortie de buse et de la couche de cisaillement initiale.

L'indice cl indique que la grandeur concerne une quantité de la couche limite, δ_{θ} est l'épaisseur de quantité de mouvement, u'_M est le taux de fluctuations maximal dans la zone cisailée, H est le facteur de forme de la couche limite, f_0 et f_1 sont les fréquences associées au mode axisymétrique et au premier mode tournant de la couche de cisaillement, et $f_{s1} = f_0/2$ est le premier sous-harmonique de f_0 .

le premier sous-harmonique $u'_{f_{s1}}$ en aval de $x = 15$ mm. Tout comme pour $U_j = 40$ m.s⁻¹, la présence d'une fluctuation de nombre de Strouhal $St_{\delta_{\theta_1}} > St_{\delta_{\theta_0}}$ est attribuée au premier mode tournant d'instabilité. Le taux de croissance de ce mode hélicoïdal est comparable à celui de u'_{f_0} . Plusieurs autres composantes issues de l'interaction non-linéaire entre u'_{f_0} et u'_{f_1} sont aussi repérées, entre $x = 15$ mm et $x = 25$ mm. La saturation des modes axisymétrique et hélicoïdal se produit à $x = 25$ mm = $105\delta_{\theta}$, où l'on observe la distortion du signal de vitesse. Le premier sous-harmonique $u'_{f_{s1}}$ est alors renforcé plus en aval et domine à nouveau u'_{f_0} . Quelques pics de vitesses négatives associés à une signature temporelle relativement cohérente sont aussi observées, à $x = 30$ mm et à $x = 35$ mm. Les caractéristiques de ces fluctuations seront étudiées au paragraphe 1.4.2. Bien que pour $x \geq 40$ mm, les fluctuations dans la couche de cisaillement ne présentent pas une organisation facilement apparente, l'analyse spectrale indique cependant la présence du second sous-harmonique $u'_{f_{s2}} = u'_{f_0/4}$. Cette fluctuation retarde le mélange turbulent et, comme le montre la figure 1.8, le niveau de fluctuation n'atteint dans ce cas un état asymptotique $u'_{\infty}/U_j \approx 15$ % qu'à partir de $x = x_{\infty} = 4D$, soit approximativement $950\delta_{\theta}$. Dans la littérature, u'_{∞}/U_j varie entre 13 % (Bradshaw [15]) et 18 % (Hussain & Zedan [41]) et $x_{\infty}/\delta_{\theta}$ entre 250 (Hussain & Zedan [41]) et 1500 (Batt [5]). Comme l'ont montré Hussain & Zedan [42, 41], ces disparités résultent des conditions différentes de la couche de cisaillement initiale.

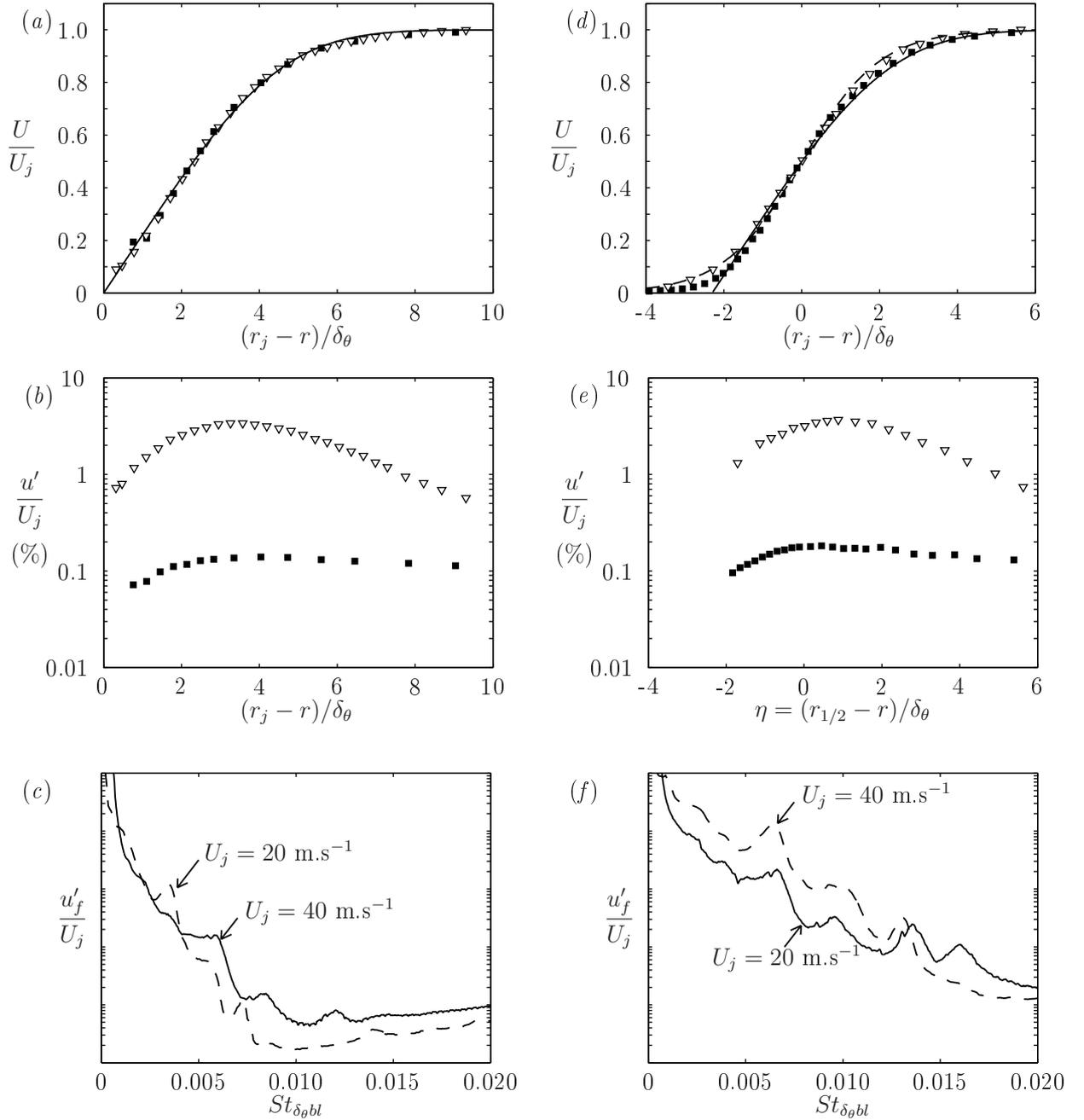


FIG. 1.6: Vitesse dans la couche limite en sortie de buse (à gauche) et dans la couche de cisaillement initiale (à droite) en l'absence d'excitation et pour les deux vitesses $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ (■) et $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$ (▽). Les profils de la vitesse axiale moyenne (a,d) sont comparés au profil de Blasius (—) et au profil en tangente hyperbolique $U/U_j = 0.5 [1 + \tanh(\eta)]$ (- - -), avec $\eta = (r_{1/2} - r)/\delta_\theta$, $r_{1/2}$ étant la position radiale de vitesse $U_j/2$. Les profils radiaux du taux de turbulence u'/U_j sont représentés sur les figures (b) et (e) et les spectres de la vitesse au centre de la zone cisailée sur les figures (c) et (f).

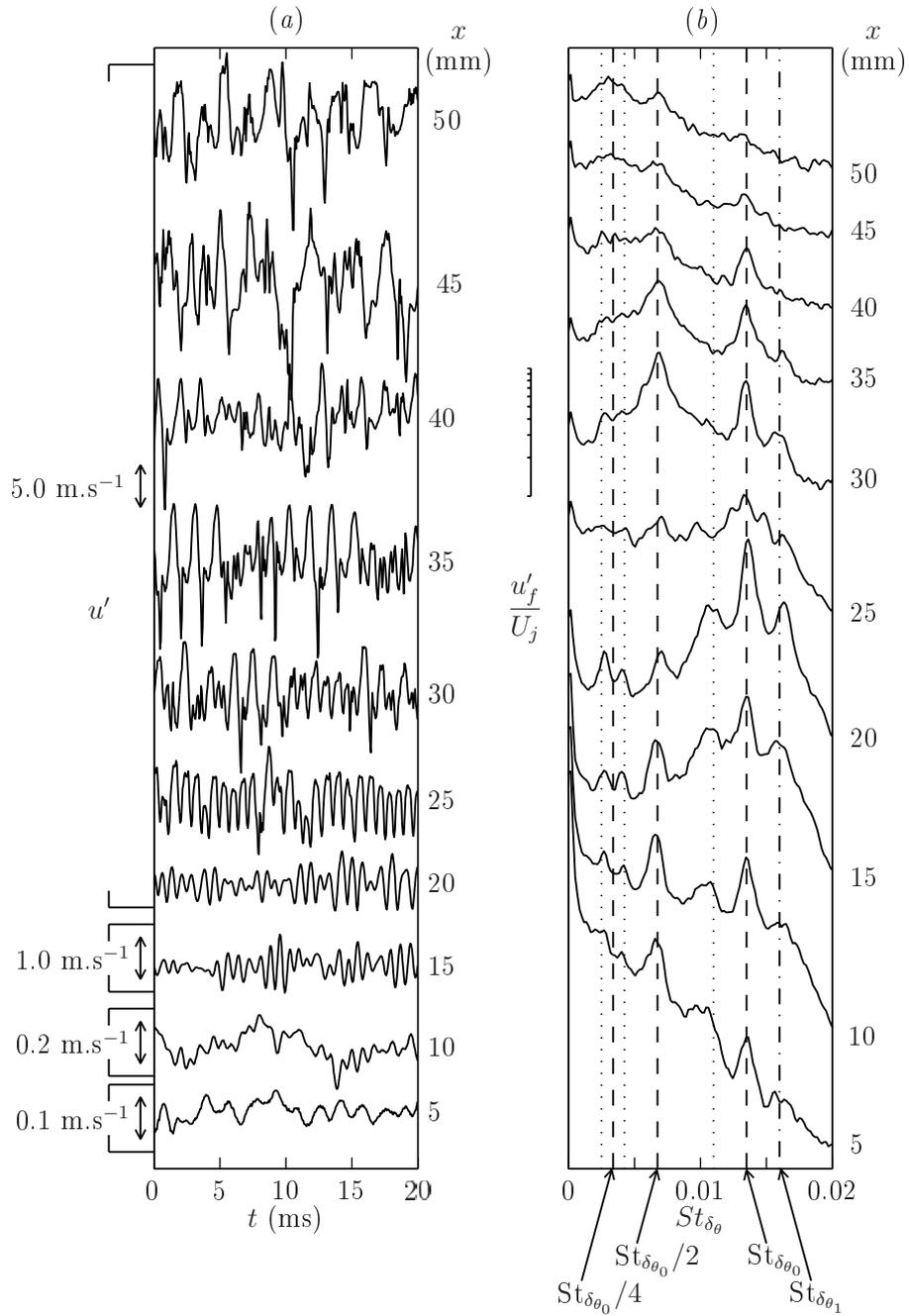


FIG. 1.7: Fluctuations de la vitesse axiale au centre de la couche de cisaillement non-excitée pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. (a) Signaux temporels de vitesse. (b) Spectres correspondants indiquant la présence du mode axisymétrique le plus instable ainsi que ses deux premiers sous-harmoniques (- - -), du premier mode tournant le plus instable (- · -), et des composantes issues de l'interaction non-linéaire entre le mode axisymétrique, son premier sous-harmonique, et le mode tournant (· · ·), à savoir, du plus grand nombre de Strouhal au plus petit, $2St_{\delta_{\theta_0}} - St_{\delta_{\theta_1}}$, $St_{\delta_{\theta_0}}/2 - (St_{\delta_{\theta_1}} - St_{\delta_{\theta_0}})$ et $St_{\delta_{\theta_1}} - St_{\delta_{\theta_0}}$.

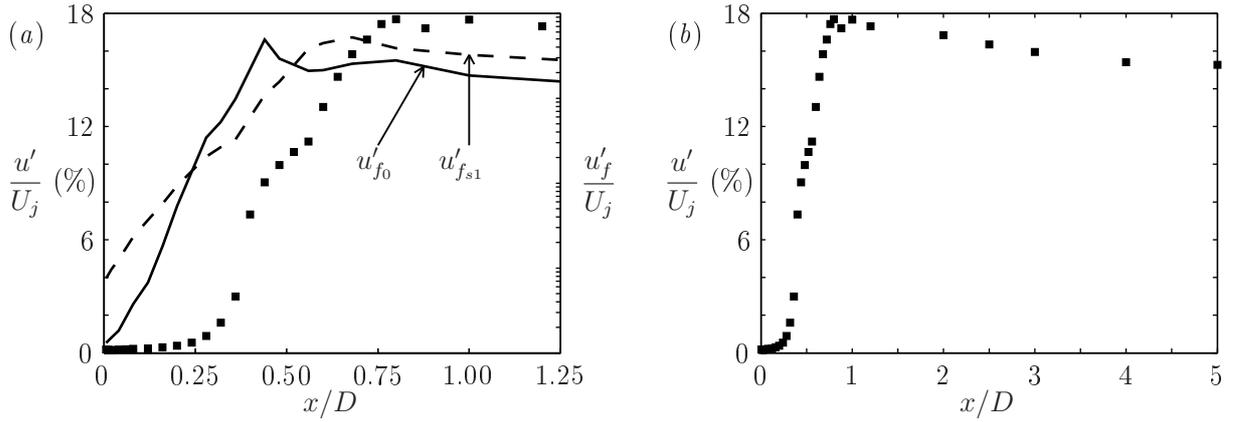


FIG. 1.8: Évolution axiale du taux de turbulence le long de la couche de cisaillement non-excitée pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$.

Dans le cas du jet initialement transitionnel pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, des signaux temporels de vitesses dans la couche de cisaillement ainsi que leur spectre sont montrés à la figure 1.9. Le mode hélicoïdal est clairement détecté et son amplitude est comparable à celle du mode axisymétrique. La couche de cisaillement initiale étant plus fine qu'à 20 m.s^{-1} , la croissance de u'_{f_0} et u'_{f_1} est plus rapide et leur saturation se produit pour une position plus proche de la buse, soit à $x = 15 \text{ mm} \approx 89\delta_\theta$. Légèrement plus en amont, à $x = 10 \text{ mm}$, la fluctuation de vitesse présente une modulation d'amplitude relativement bien organisée avec une période que l'on estime égale à environ 5 fois celle des fluctuations haute fréquence associées à f_0 et f_1 . Ce phénomène existe également à $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, bien qu'il soit moins apparent, voir la figure 1.7(a) à $x = 15 \text{ mm}$ et $x = 20 \text{ mm}$. Les caractéristiques de cette modulation seront étudiées en détail au paragraphe 1.4.2. La présence du premier sous-harmonique en aval de la saturation de u'_{f_0} et u'_{f_1} n'est pas identifiée aussi nettement qu'à 20 m.s^{-1} , ce qui est attribué au manque d'organisation du processus d'appariement tourbillonnaire dans la couche de cisaillement transitionnelle, voir Hussain & Zaman [40]. Les structures de vorticité sont perturbées par les fluctuations turbulentes environnantes et se d estructurent lors de leur appariement (processus de "breakdown"), générant alors des fluctuations aléatoires sur une large bande spectrale, comme on peut le constater sur les spectres pour $x \geq 30 \text{ mm}$. Dans ce cas, l'état asymptotique du taux de turbulence dans la couche de cisaillement est atteint beaucoup plus rapidement, d es $x_\infty = 2.5D \approx 890\delta_\theta$ et avec taux de turbulence u'_∞/U_j de 16% environ, voir la figure 1.10.

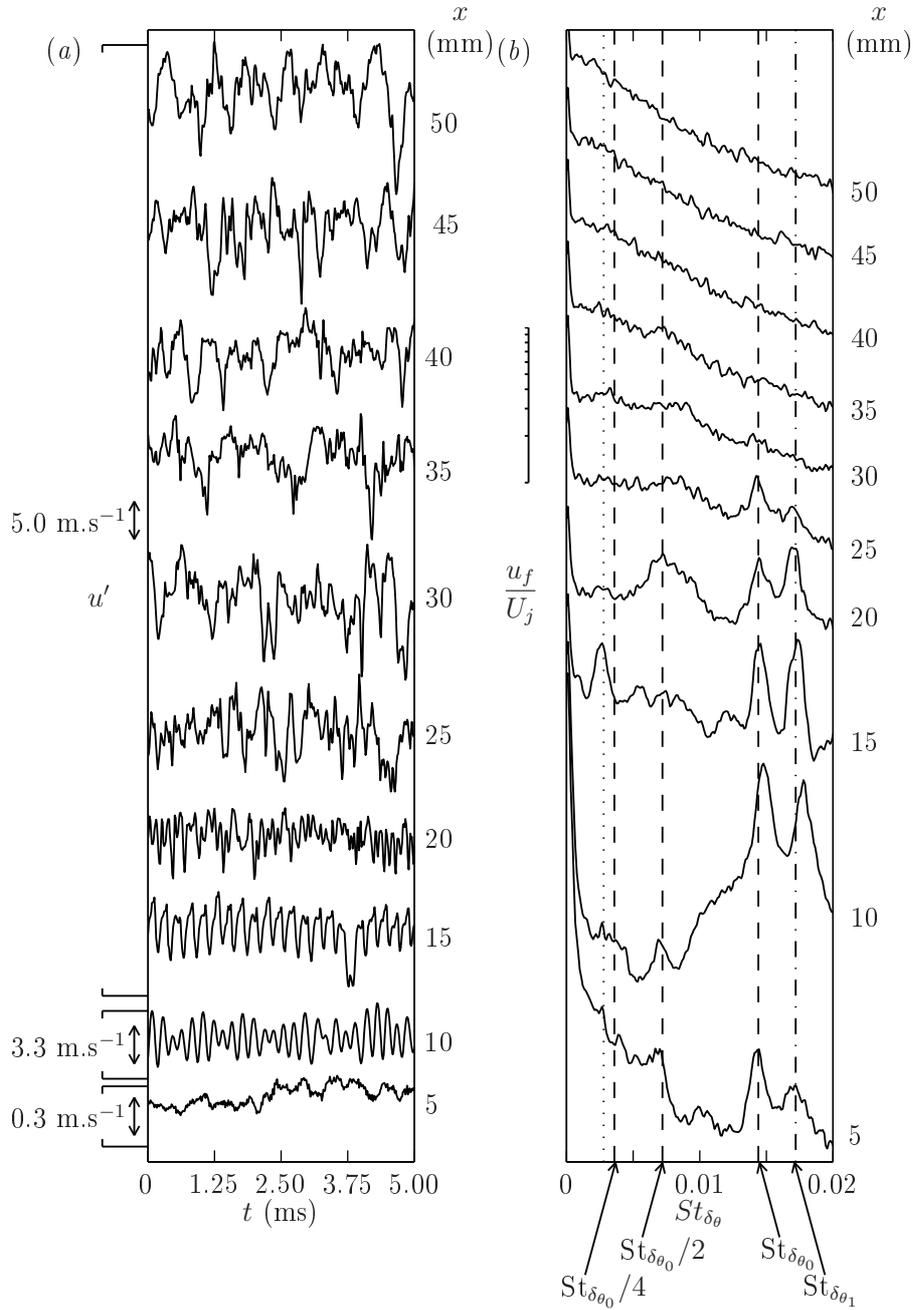


FIG. 1.9: Fluctuations de la vitesse axiale au centre de la couche de cisaillement non-excitée pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. La légende est identique à celle de la figure 1.7, excepté pour les composantes d'interactions non-linéaires (\cdots) pour lesquelles seule la fluctuation associée au battement entre u'_{f_0} et u'_{f_1} est représentée, le nombre de Strouhal de cette interaction étant égale à $St_{\delta_{\theta_1}} - St_{\delta_{\theta_0}}$.

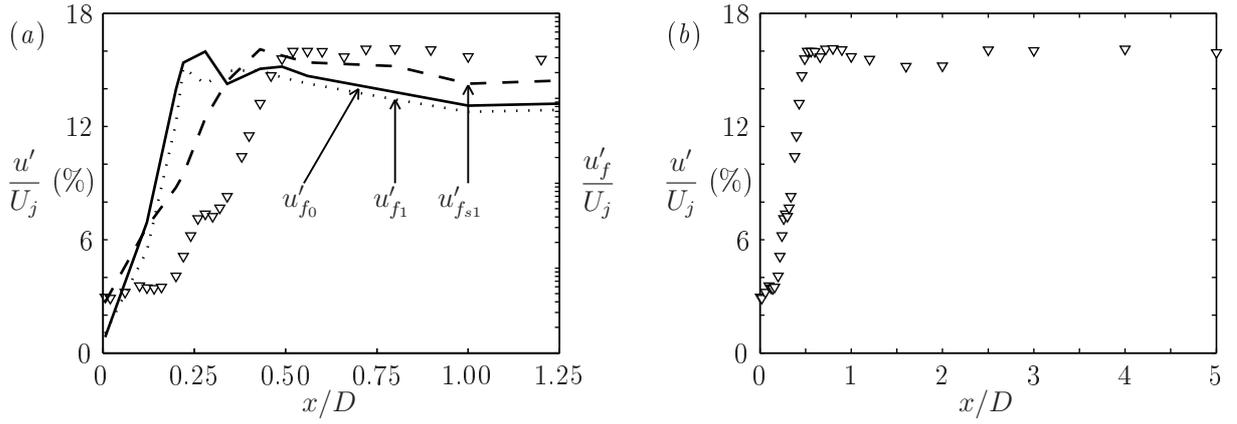


FIG. 1.10: Taux de turbulence au centre de la couche de cisaillement non-excitée pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

Pics de vitesse négative

Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, la présence dans la couche de cisaillement de pics de vitesses négatives associé à une fluctuation relativement bien organisée a été constatée. Une technique de détection similaire à celle utilisée par Kovasznay, Kibens & Blackwelder [49], Bruun [22] et Yule [76] a été mise en oeuvre afin de déterminer la signature moyenne de ces pics, ainsi que leur occurrence.

Cette analyse a été menée à partir d'un signal de vitesse fluctuante u' mesuré à $x = 35 \text{ mm}$. Environ 1200 pics de vitesses inférieures à $-0.25U_j$ ont été détectés pour une durée de signal de 4.5 s. La signature temporelle moyenne de ces fluctuations est tracée à la figure 1.11(a). Bien que le niveau du pic moyen soit sensible au seuil de détection de vitesse choisi, la présence d'un point de rebroussement est une caractéristique intrinsèque à toutes ces fluctuations de vitesse. On observe par ailleurs plusieurs maxima locaux avec une occurrence périodique de 1.5 m.s^{-1} , ce qui correspond à la fréquence du premier sous-harmonique f_{s1} . La signature extraite est donc associée à la structure du premier appariement. L'atténuation de la signature moyenne montre que ces appariements successifs ne se produisent pas de manière parfaitement périodique, ce que l'on peut aussi constater aisément à partir des signaux temporels de vitesse montrés à la figure 1.7(a).

L'occurrence des pics de vitesse est étudiée à la figure 1.11(b), où, pour chaque pic détecté N_p , le retard dt avec le pic successif est représenté. Deux temps caractéristiques sont distingués, à savoir la période correspondant au premier sous-harmonique $2/f_0 = 1/f_{s1}$, et celle du second sous-harmonique $4/f_0 = 1/f_{s2}$. Ceci confirme le caractère quasi-périodique du premier appariement (premier sous-harmonique) et révèle aussi l'influence exercée par le second appariement plus en aval. Ce résultat est conforme à l'interprétation usuelle de la cascade d'appariements dans un jet, voir Laufer & Monkewitz [53] et Husain & Hussain [39].

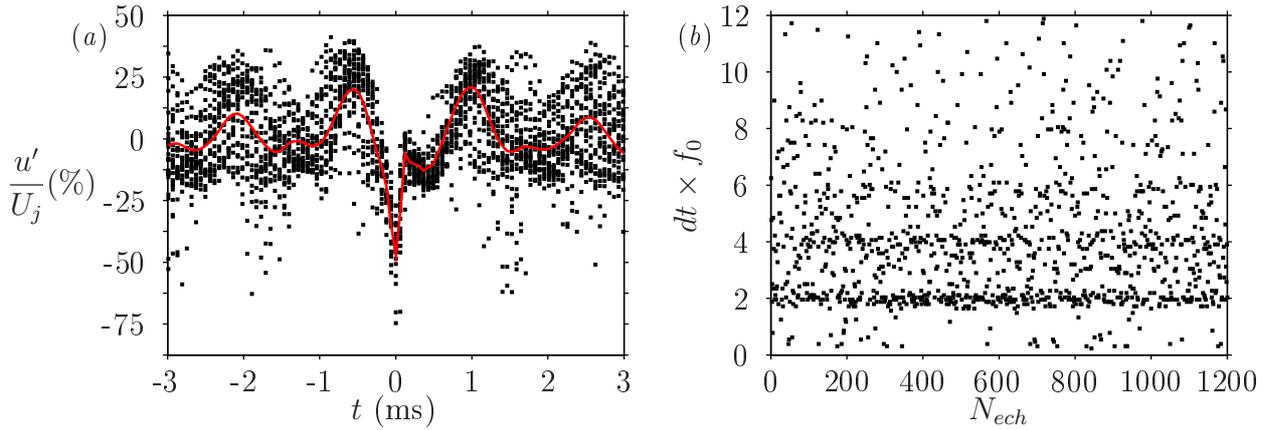


FIG. 1.11: Fluctuations associées aux pics de vitesses négatives dans la couche de cisaillement naturelle pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. La signature moyenne des ces fluctuations est représentée à la figure (a) (—). L'occurrence des pics de vitesses est étudiée à la figure (b), où dt représente la durée entre deux pics successifs.

Modulation d'amplitude

L'exploration de la couche de cisaillement au paragraphe 1.4.2 a aussi révélé la présence d'une modulation d'amplitude de la vitesse fluctuante. Ce phénomène a été également remarqué par Monkewitz [64] mais, à notre connaissance, aucune autre étude dans la littérature ne fait référence à ce sujet. Les caractéristiques de cette modulation sont analysées à partir d'un signal de vitesse typique mesuré au centre de la couche de cisaillement, en $x = 10 \text{ mm}$ et pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, voir la figure 1.12(a). Un changement de phase aléatoire est observé entre deux lobes de modulation successifs.

À partir du spectrogramme de ce signal représenté à la figure 1.12(b), on constate que les fluctuations hautes fréquences associées aux lobes de modulation correspondent soit à l'onde d'instabilité axisymétrique de fréquence f_0 , soit au premier mode hélicoïdal de fréquence $f_1 \approx 1.2f_0$. Ces deux fluctuations ne coexistent pas, et l'alternance des modes ne semble pas obéir à une quelconque loi déterministe, ce qui est en accord avec les conclusions de Drubka & *et al.* [30] données à partir de visualisations d'écoulement.

L'enveloppe du signal de vitesse a été extraite pour étudier les caractéristiques de la modulation d'amplitude. Pour cela, le signal a été filtré afin d'éliminer les fluctuations basses fréquences associées au bruit d'installation. Nous avons vérifié que cette procédure n'altère ni la forme des lobes de modulation, ni la phase de la fluctuation modulée. L'enveloppe du signal a été alors déterminée en utilisant la transformée de Hilbert. L'analyse spectrale de cette enveloppe est montrée à la figure 1.13 pour les deux vitesses de jet U_j . La présence d'une fréquence dominante f_M est confirmée, et f_M se dimensionne par rapport à une fréquence typique de la couche de

cisaillement, par exemple f_0 avec $f_M = 0.2f_0$. Le mécanisme de modulation est donc intrinsèque à la couche de cisaillement, et il semble en fait résulter de l'interaction non-linéaire entre le mode axisymétrique et le mode hélicoïdal. En effet, la fréquence f_M correspond relativement bien à la fréquence de battement $f_1 - f_0 \approx 0.2f_0$ mise en évidence au paragraphe 1.4.2.

Le nombre de Strouhal $St_D(f_M)$ est comparable aux nombres de Strouhal généralement utilisés pour exciter le cône potentiel d'un jet, à savoir 0.3 par Crow & Champagne [27] et 0.85 par Zaman & Hussain [78]. En fait $St_D(f_M) = 0.6$ pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, et $St_D(f_M) = 1.0$ pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. Cette fluctuation basse fréquence est donc relativement bien adaptée pour exciter le cône potentiel. Comme le montre la figure 1.13, le spectre des fluctuations de vitesses au centre du jet présente effectivement un maximum autour de f_M , pour la même position axiale que la modulation dans la couche de cisaillement. Pour étudier plus en détail l'effet de cette excitation basse fréquence sur le cône potentiel, d'autres spectres de la vitesse mesurés sur l'axe du jet sont montrés à la figure 1.14(a), pour x compris entre la sortie de buse $x = 0 \text{ mm}$ et $x = 6D$. La présence de la fluctuation associée à f_M est repérée sur un grand domaine, de $1.5D$ d'étendue axiale pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, et $3D$ pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui démontre bien l'efficacité de la fluctuation de modulation pour perturber le cône potentiel. Dans notre cas, cette fluctuation n'est cependant pas capable de contrôler le mode colonne, dont le nombre de Strouhal St_D se décale vers les basses fréquences dans la direction aval, pour atteindre une valeur proche de 0.3 en $x = 6D$. Pour une valeur adéquate du nombre de Strouhal $St_D(f_M)$, autrement dit pour un rapport δ_θ/D pertinent, il est toutefois envisageable que le mode colonne puisse être piloté par cette excitation basse fréquence dans la couche de cisaillement. Cette configuration semble avoir été rencontrée par Monkewitz [64], celui-ci obtenant un nombre de Strouhal $St_D(f_M)$ autour de 0.47.

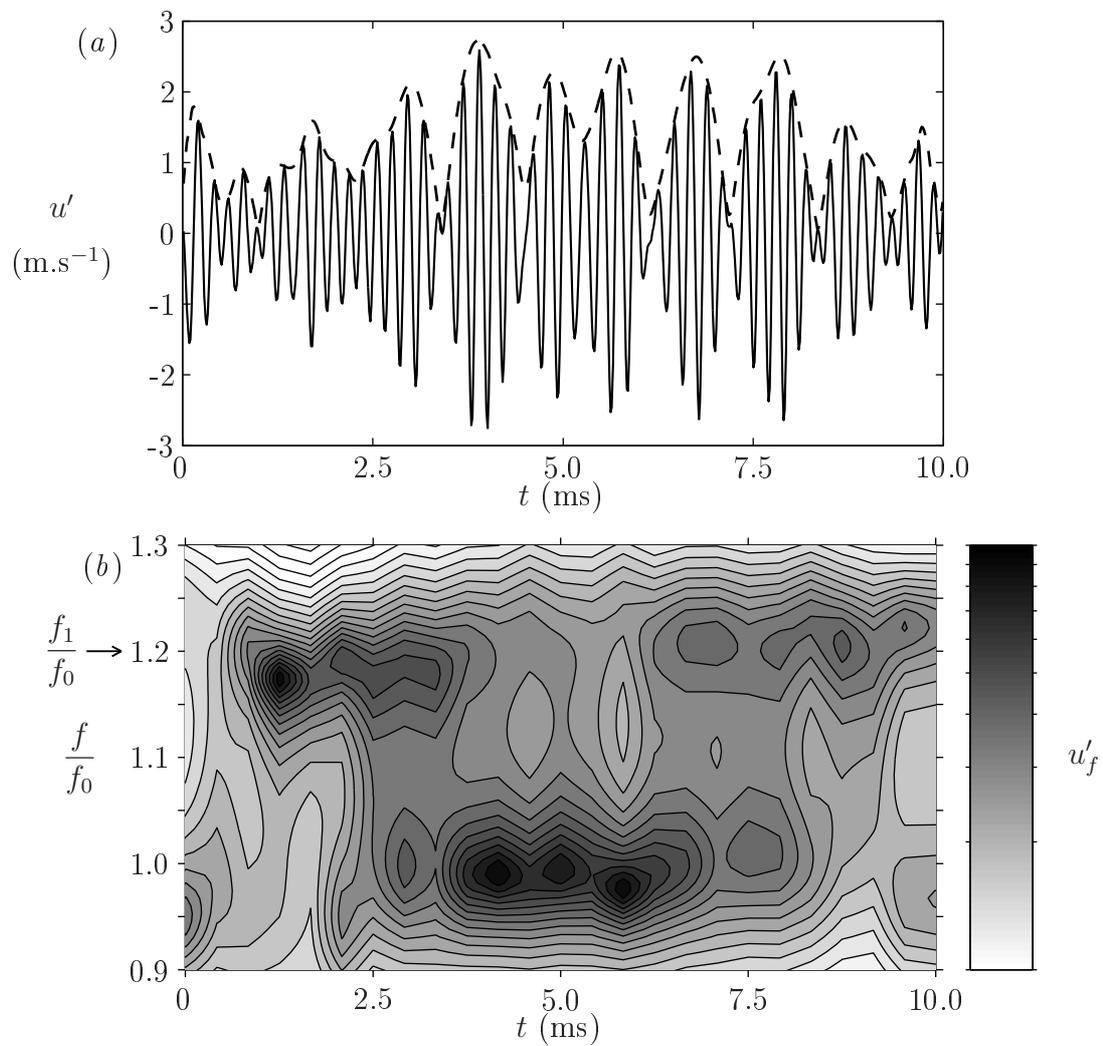


FIG. 1.12: Modulation de l'amplitude des fluctuations de vitesse dans la couche de cisaillement, pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. Un échantillon du signal de vitesse présentant une forte modulation est montré à la figure (a). Il a été mesuré au centre de la couche de cisaillement, en $x = 10 \text{ mm}$. Son spectrogramme est fourni à la figure (b).

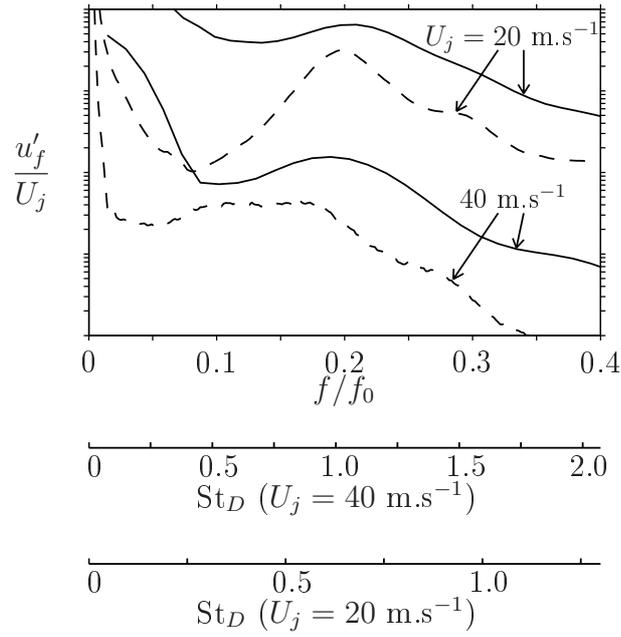


FIG. 1.13: Comparaison du spectre de l'enveloppe des fluctuations dans la couche de cisaillement (—) et du spectre des fluctuations de vitesses au centre du jet (- - -), tous les deux étant mesurés pour une position axiale identique.

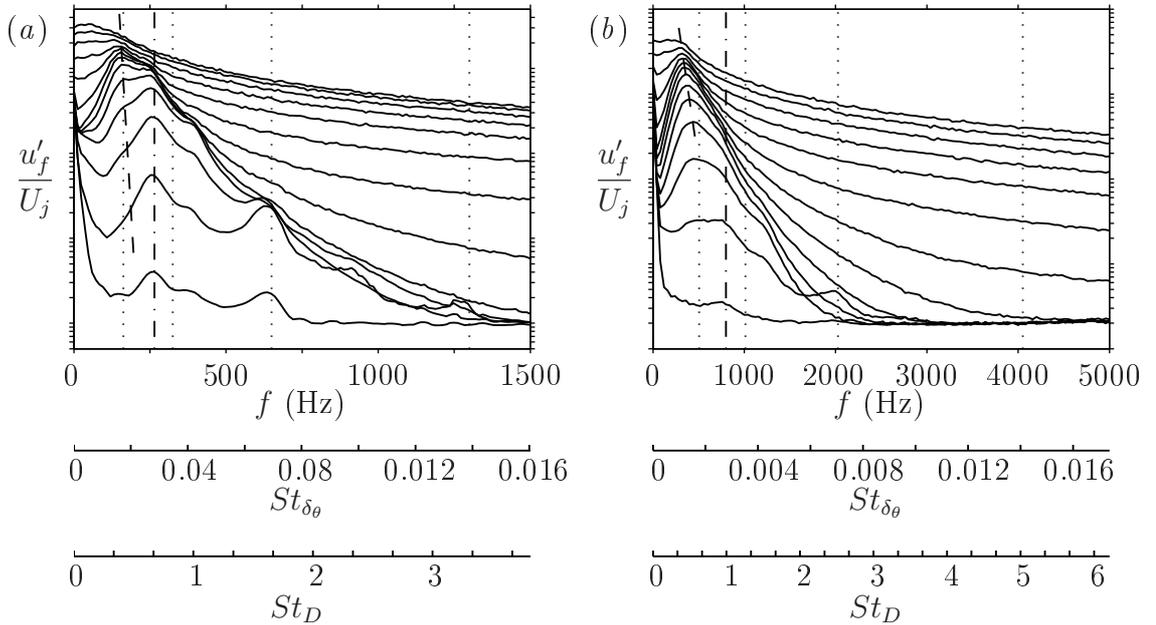


FIG. 1.14: Spectres des fluctuations de vitesses sur l'axe du jet, de $x = 0 \text{ mm}$ (en bas) à $x = 6D$ (en haut) tous les $\Delta x = D/2$, avec en (a), $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et en (b), $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. On distingue la fréquence f_0 du mode axisymétrique et des trois premiers sous-harmoniques f_{s1} , f_{s2} et $f_{s3} = f_0/8$ (\cdots), la fréquence du mode colonne du jet (- - -), et la fréquence f_M associée à l'enveloppe des fluctuations dans la couche de cisaillement ($-\cdot-$).

1.4.3 Fluctuations sur l'axe du jet

L'influence des conditions initiales de l'écoulement sur l'évolution de la vitesse le long de l'axe du jet est étudiée dans cette partie. La figure 1.15 rend compte de l'évolution des vitesses moyennes et fluctuantes pour $x < 12D$. En définissant la zone potentielle comme la région où la vitesse U est supérieure à $0.95U_j$, on détermine alors une taille de cône potentiel quasiment identique pour les deux vitesses de jet, soit environ $5.25D$ pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et $5.5D$ pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. Toutefois, comme le montre la figure 1.15(a), l'évolution de la vitesse moyenne dans la zone potentielle est relativement différente selon l'état initial du jet. Dans le cas du jet initialement laminaire à 20 m.s^{-1} , le profil axial de la vitesse moyenne présente un minimum à environ $1D$ de la sortie de buse, comme également observé par plusieurs expérimentateurs [68, 43, 79]. Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la vitesse moyenne décroît en revanche de façon monotone le long du cône potentiel. Comme le montre la figure 1.15(b), la décroissance de U en aval de la zone potentielle s'opère plus rapidement pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ que pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui est là encore un effet des conditions initiales de la couche de cisaillement d'après l'étude de Hill *et al.* [33]. L'évolution du taux de turbulence le long de l'axe du jet se distingue aussi selon l'état initial du jet, voir la figure 1.15(c). Ainsi, l'intensité turbulente est plus élevée et croît plus rapidement si l'état initial est laminaire que si l'état est transitionnel. On observe en effet un écart du taux de turbulence d'environ 4% à l'extrémité du cône potentiel (en $X = 5D$) alors que le taux de fluctuation en sortie de buse est très similaire pour les deux configurations. Cette distinction résulte probablement de la présence, même intermittente, de structures cohérentes dans la couche de cisaillement (initialement) laminaire. Comme le montre le modèle de Mankbadi [59], l'évolution axiale de la vitesse moyenne résulte de transferts d'énergie entre les fluctuations cohérentes associées aux appariements et les fluctuations turbulentes. Pour les deux vitesses de jet, on peut noter par ailleurs l'accroissement rapide du taux de turbulence lorsque u' atteint environ 4% de U_j , soit à $x \approx 3.75D$ pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et à $x \approx 4.5D$ pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui initie la décroissance de la vitesse moyenne à l'aval du cône potentiel.

La figure 1.16 représente l'évolution de la vitesse moyenne et de la vitesse fluctuante plus en aval, pour $x \leq 45D$. Suffisamment en aval, la décroissance de U/U_j est peu influencée par les conditions initiales de l'écoulement comme le montre la figure 1.16(a). Les deux écoulements présentent par ailleurs un taux de turbulence identique pour $x \geq 15D$, autour de 25% de la vitesse moyenne sur l'axe pour la même position x , ce qui indique une évolution auto-similaire du jet comme le confirme aussi la loi de décroissance de la vitesse moyenne en $1/x$, voir la figure 1.16(a).

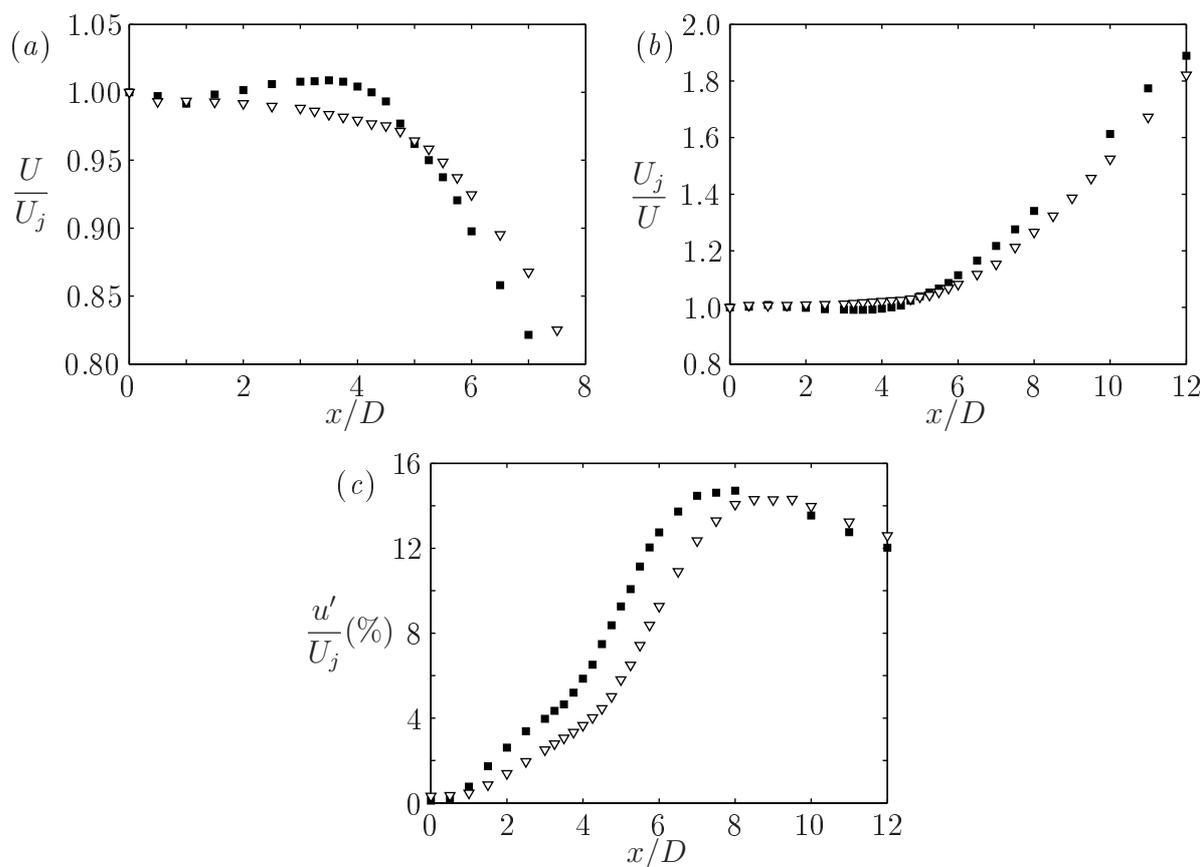


FIG. 1.15: Évolution le long de l'axe de la vitesse moyenne U (a, b) et de la vitesse fluctuante u' (c), pour $x < 12D$ et en l'absence d'excitation. ■ $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et ▽ $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

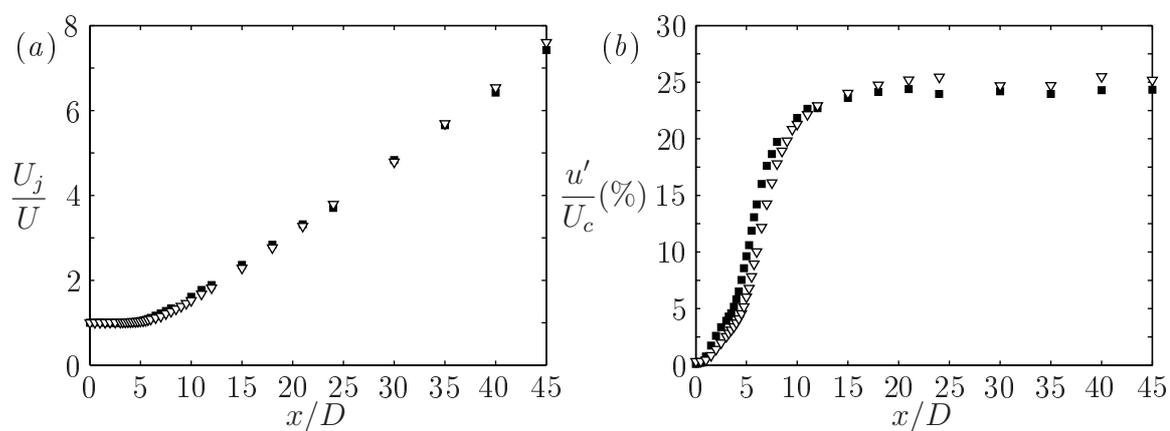


FIG. 1.16: Évolution le long de l'axe de la vitesse moyenne U et de la vitesse fluctuante u' , pour $x \leq 45D$. ■ $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et ▽ $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

1.5 Caractérisation du jet excité

L'excitation acoustique est utilisée pour contrôler le développement du mode axisymétrique dans la couche de cisaillement, et ainsi organiser l'appariement tourbillonnaire. Freymuth [32] et Michalke [60] ont démontré la réceptivité fréquentielle large bande de la couche de cisaillement et ont mis en évidence un nombre de Strouhal $St_{\delta_\theta}(f_{ex})$ (f_{ex} étant la fréquence de l'excitation) pour lequel le taux de croissance de la fluctuation $u'_{f_{ex}}$ est maximal, ce nombre de Strouhal optimal étant voisin de 0.017. Zaman & Hussain [78] ont observé cependant que la saturation maximale de $u'_{f_{ex}}$ dans la couche de cisaillement est atteinte pour un nombre de Strouhal $St_{\delta_\theta}(f_{ex})$ légèrement plus faible, et voisin de 0.012.

Concernant la stabilité de la cascade des appariements tourbillonnaires, Broze & Hussain [21] distinguent une dynamique périodique et une dynamique chaotique en fonction de $St_{\delta_\theta}(f_{ex})$ et du niveau d'excitation en sortie de buse $a_{f_{ex}} = u'_{f_{ex}}/U_j$. Hussain & Zaman [40] ont aussi étudié l'influence des conditions initiales de la couche de cisaillement. Dans une couche limite initialement laminaire, la cascade d'appariements est généralement stable, comme dans Kibens [48] et Bridges & Hussain [20] par exemple. Pour un état initial transitionnel, il est en revanche généralement impossible de contrôler l'appariement loin de la source d'excitation et d'empêcher la déstructuration des tourbillons sous l'effet de la turbulence.

Dans cette section, l'influence de l'excitation sur la stabilité de l'appariement et sur la croissance des fluctuations dans la couche de cisaillement est décrite pour les deux vitesses de jet considérées.

1.5.1 Caractéristiques de l'excitation

La fréquence d'excitation f_{ex} et le niveau d'excitation $a_{f_{ex}}$ sont reportés au tableau 1.2 pour les deux vitesses de jet. À titre de comparaison, le niveau d'excitation utilisé par Husain & Hussain [39] pour contrôler l'instabilité axisymétrique de la couche de cisaillement $a_{f_{ex}}$ et son sous-harmonique $a_{f_{s1}}$ est de 0.1% environ. D'autres paramètres peuvent être aussi utilisés pour caractériser le niveau de l'excitation. Laufer & Yen [54] fournissent par exemple le niveau de saturation maximal de $u'_{f_{ex}}$ le long de la couche de cisaillement. Ils obtiennent un niveau entre 2% et 7.6%, ce qui est légèrement plus faible que les niveaux obtenus dans notre installation, à savoir 7.5% pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et 11 % pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. Cette différence résulte principalement du nombre de Strouhal élevé $St_{\delta_\theta}(f_{ex})$ utilisé par ces auteurs, autour de 0.017 au lieu de la valeur optimale de 0.012.

U_j (conditions initiales)	$f_{ex} (St_{\delta\theta})$	$a_{f_{ex}}$	Stabilité de l'appariement
20 m.s ⁻¹ (laminaires)	1500 Hz (0.0158)	0.05 %	Cascade périodique de trois appariements successifs
40 m.s ⁻¹ (transitionnelles)	3530 Hz (0.0124)	0.1 %	Intermittence et destruction des tourbillons

TAB. 1.2: Caractéristiques de l'excitation et stabilité de la cascade d'appariements.

1.5.2 Effets de l'excitation

Pour évaluer l'influence de l'excitation sur la stabilité des appariements, nous étudions les fluctuations de vitesses au centre couche de cisaillement et sur l'axe du jet.

Pour $U_j = 20$ m.s⁻¹, les fluctuations dans la couche de cisaillement sont très stables et quasi-périodiques, avec pour fréquences principales f_{ex} , f_{s1} et f_{s2} , voir les figures 1.17(a) et 1.17(b). La cascade d'appariements présente donc au moins deux appariements successifs le long de la couche de cisaillement. Un troisième appariement est aussi détecté sur l'axe du jet comme l'indique la figure 1.17(c) où l'on peut noter la présence du troisième sous-harmonique $f_{s3} = f_{ex}/8$. Cette fluctuation cohérente est par ailleurs suffisamment intense et de fréquence bien adaptée pour contrôler le mode colonne du jet, $St_D(f_{s3}) \approx 0.47$. Dans ce cas, les fluctuations du jet sont synchronisées par l'excitation.

Pour $U_j = 40$ m.s⁻¹, les fluctuations dans la couche de cisaillement sont moins bien organisées, voir la figure 1.18(a). Le second appariement n'est pas détecté comme le montre l'absence de la composante $u'_{f_{s2}}$, voir la figure 1.18(b), ce que l'on attribue à la déstructuration des tourbillons lors du premier appariement, comme dans le cas du jet naturel. Les fluctuations sur l'axe du jet indiquent tout de même un second sous-harmonique $u'_{f_{s2}}$, voir la figure 1.18(c), mais cette contribution est mineure et n'a pas été observée dans la couche de cisaillement. Cette fluctuation résulte probablement de quelques tourbillons très stables qui ne se déstructurent pas lors du premier appariement et génèrent alors du second sous-harmonique par interaction mutuelle. Suffisamment loin en aval, les spectres de vitesse sur l'axe du jet sont large bande et n'indiquent donc pas la présence de structures périodiques contrairement au cas du jet initialement laminaire.

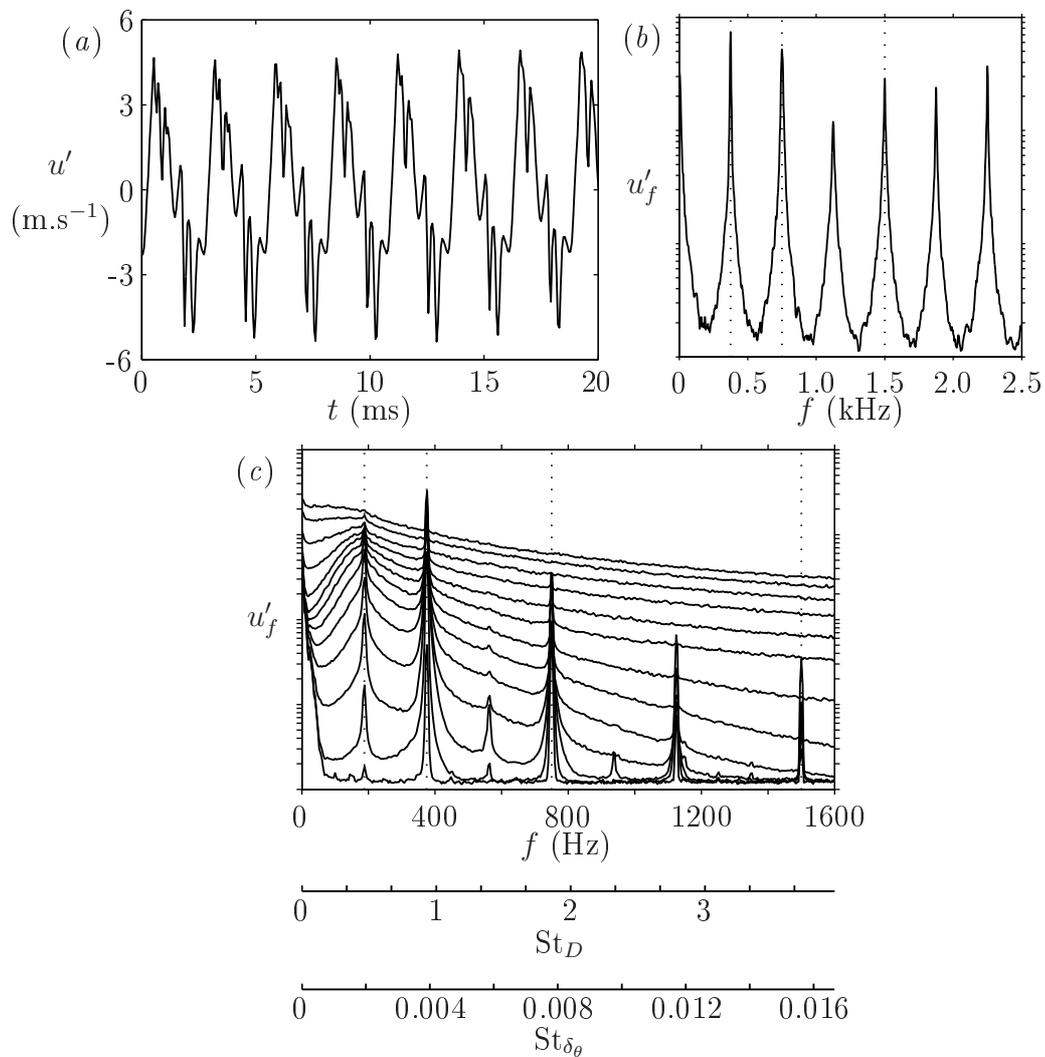


FIG. 1.17: Effet de l'excitation pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. (a) Fluctuations de vitesses dans la couche de cisaillement ($x = D/2, r = D/2$), et (b) analyse spectrale. (c) Spectres des fluctuations sur l'axe du jet, de $x = 0$ (en bas) à $x = 6D$ (en haut), tous les $\Delta x = D/2$. Les fréquences f_0 , f_{s1} , f_{s2} et $f_{s3} = f_0/8$ sont également indiquées (\cdots).

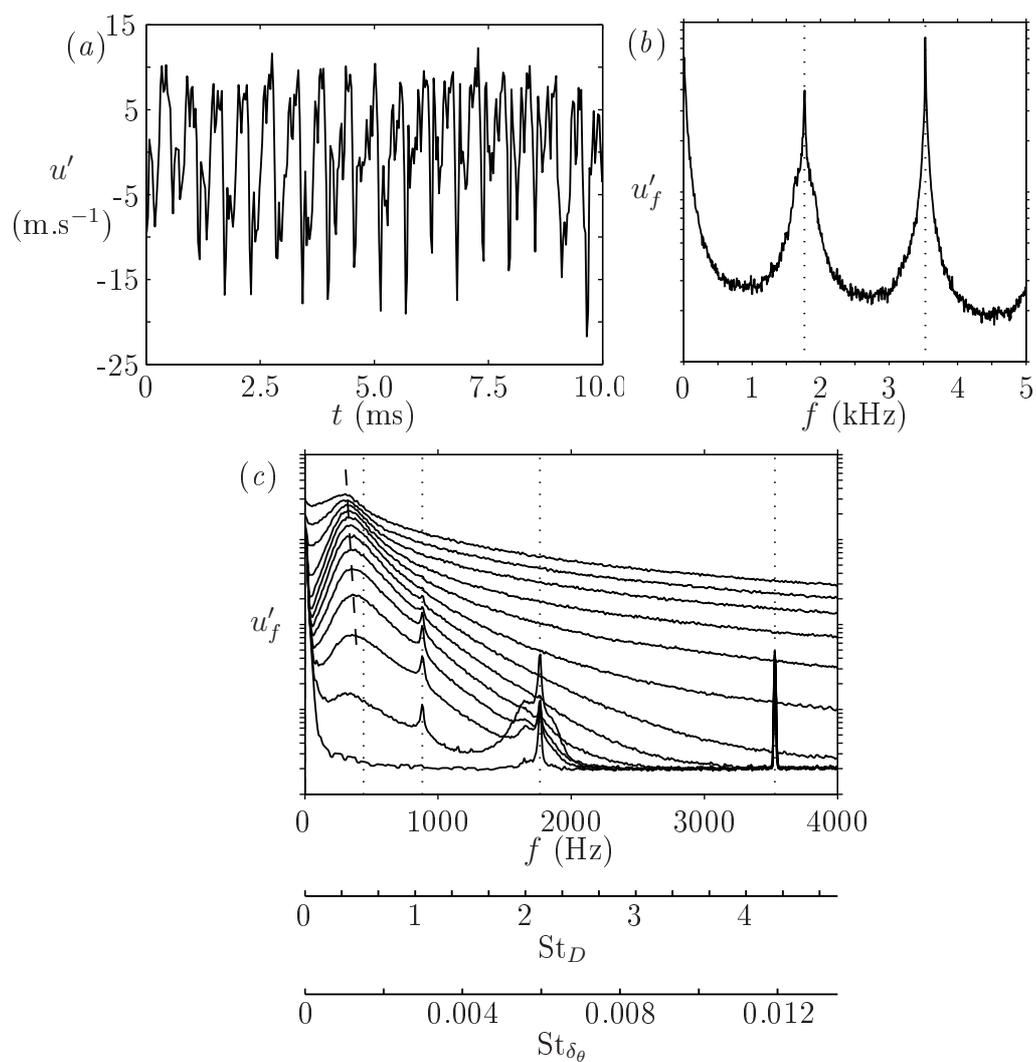


FIG. 1.18: Effets de l'excitation pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. La légende est identique à celle de la figure 1.17. La fréquence du mode colonne est également indiquée (- - -).

1.5.3 Croissance des fluctuations le long de la couche de cisaillement

Lorsque plusieurs composantes u'_f de très faibles amplitudes sont présentes dans la couche de cisaillement, leur évolution peut être déterminée indépendamment pour chacune d'elles. À mesure que l'amplitude de ces composantes croît vers l'aval, leur interaction mutuelle doit être prise en compte. On peut donc penser que la présence ou non du second sous-harmonique $u'_{f_{s2}}$ en fonction de l'état de la couche de cisaillement initiale modifie l'évolution des composantes $u'_{f_{ex}}$ et $u'_{f_{s1}}$. Ceci est étudié dans cette section.

Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, l'évolution axiale des composantes $u'_{f_{ex}}$, $u'_{f_{s1}}$ et $u'_{f_{s2}}$ dans la couche de cisaillement est représentée à la figure 1.19(a). Initialement, la croissance de ces fluctuations est exponentielle et cette croissance est d'autant plus rapide que le nombre de Strouhal St_{δ_θ} est élevé (mais inférieur à 0.017), en accord avec la théorie de la stabilité linéaire. Le ralentissement de la croissance de $u'_{f_{s1}}$ à partir de $x = 0.14D = 33\delta_\theta$ résulte d'une interaction non-linéaire par résonance avec $u'_{f_{ex}}$, voir Husain & Hussain [39]. Le taux de fluctuation de $u'_{f_{ex}}$ est alors de 1.5 % ce qui correspond au niveau prédit par Monkewitz [65] pour une couche de cisaillement plane et parallèle. La croissance du premier sous-harmonique $u'_{f_{s1}}$ s'accélère à nouveau à l'endroit de la saturation de $u'_{f_{ex}}$ à $x_{ex} = 0.22D = 52\delta_\theta$, où $u'_{f_{ex}}/U_j \approx 7.5 \%$. Lorsque $u'_{f_{s1}}$ atteint environ 2% de U_j , le premier sous-harmonique interagit par résonance avec $u'_{f_{s2}}$, ce qui conduit dans ce cas à la décroissance du second sous-harmonique à $x = 0.26D = 62\delta_\theta$. Une atténuation similaire a été constatée par Husain & Hussain [39] lorsque le nombre de Strouhal St_{δ_θ} de la fluctuation dominante est inférieur à 0.01. Dans notre cas, la composante dominante est $u'_{f_{s1}}$ et son nombre de Strouhal vaut environ 0.008. Le premier sous-harmonique $u'_{f_{s1}}$ poursuit sa croissance jusqu'à saturer à $x_{s1} \approx 2x_{ex}$ avec $u'_{f_{s1}}/U_j \approx 16.5 \%$, ce qui indique la position du premier appariement d'après la définition donnée par Ho & Huang [34]. À cet endroit, les deux tourbillons engagés dans l'appariement sont alignés perpendiculairement à l'axe du jet et la production de pression acoustique est alors maximale. La saturation de $u'_{f_{s1}}$ s'accompagne par ailleurs d'un transfert d'énergie en faveur de l'harmonique $2 \times f_{s1} = f_{ex}$, ce qui explique le second maximum de $u'_{f_{ex}}$ en x_{s1} . De la même manière, la distortion du second sous-harmonique $u'_{f_{s2}}$ à $x_{s2} \approx 4x_{ex}$ contribue au second maximum de $u'_{2 \times f_{s2}} = u'_{f_{s1}}$. L'étude menée par Laufer & Zhang montre également la présence de deux maxima pour $u'_{f_{s1}}$ le long de la couche de cisaillement, voir la figure 40 dans la référence [55]. Le taux de fluctuation u'/U_j dans la couche de cisaillement est représenté à la figure 1.19(b). Les fluctuations de vitesses étant essentiellement organisées en fonction des composantes f_{ex} , f_{s1} et f_{s2} (du moins si proche de la buse), u' correspond quasiment à la somme des contributions des composantes $u'_{f_{ex}}$, $u'_{f_{s1}}$ et $u'_{f_{s2}}$.

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la croissance des fluctuations dans la couche de cisaillement est moins complexe car elle n'implique que deux composantes cohérentes, $u'_{f_{ex}}$ et $u'_{f_{s1}}$. La saturation de $u'_{f_{ex}}$ se produit à $x_{ex} = 0.16D = 57\delta_\theta$ avec un taux de turbulence proche de 11 %, voir la

figure 1.19(c). Du fait de l'absence de $u'_{f_{s2}}$, le sous-harmonique $u'_{f_{s1}}$ sature une seule fois à $x_{s1} = 0.5D = 179\delta_\theta$ avec un taux de fluctuation de 2 % seulement. On peut aussi noter que la condition de résonance aéroacoustique $x_{s1} = 2x_{ex}$ n'est pas satisfaite dans ce cas (voir Monkewitz [64]). L'évolution du taux de fluctuation u'/U_j est représentée à la figure 1.19(d). En aval de x_{s1} , le mélange turbulent des fluctuations dans la couche de cisaillement est déjà bien établi et u'/U_j atteint très rapidement un état convergé.

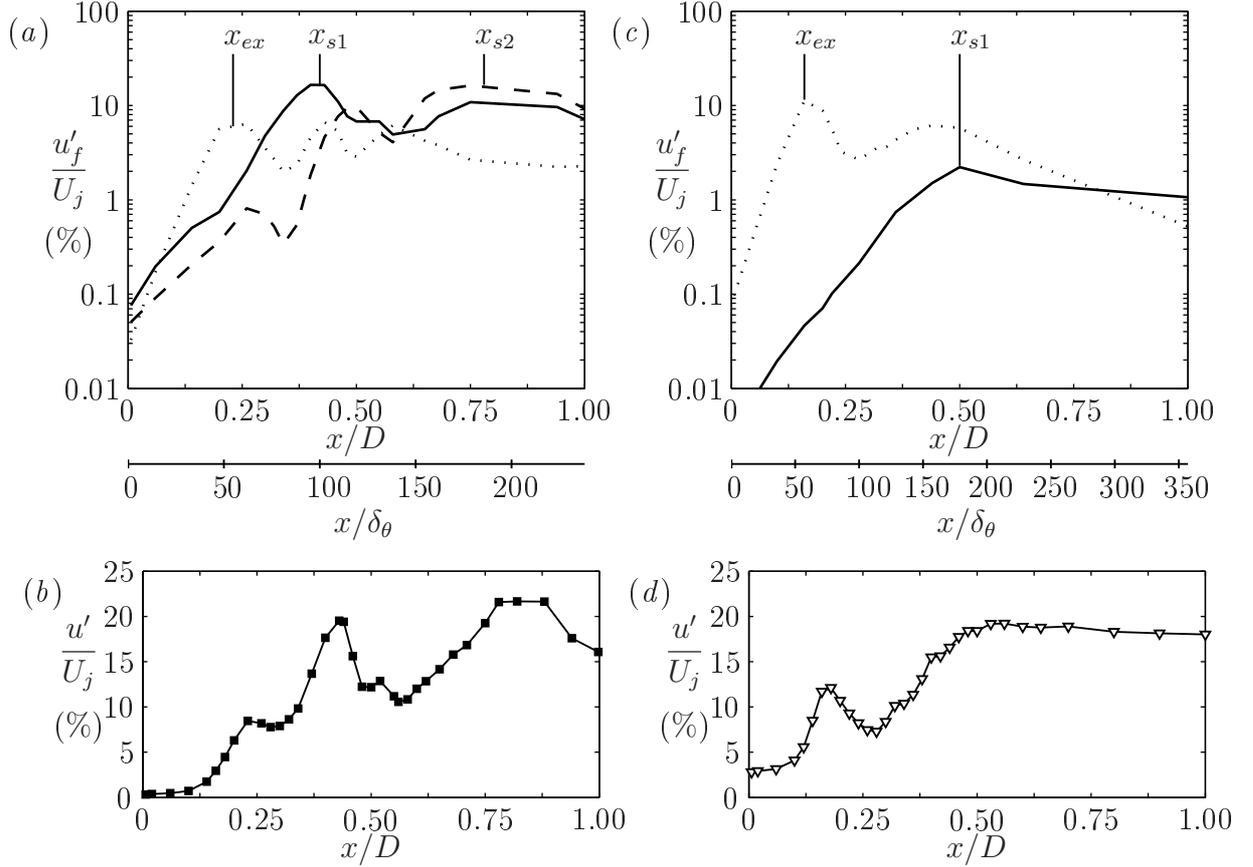


FIG. 1.19: Évolution des fluctuations de vitesse le long de la couche de cisaillement. À gauche, $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et à droite, $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. En (a) et (c), \cdots $u'_{f_{ex}}$, $—$ $u'_{f_{s1}}$ et $- - -$ $u'_{f_{s2}}$. L'évolution du taux de turbulence u'/U_j est montrée en (b) et (d).

La cohérence $C_{u'p'}(f_{s1})$ entre la fluctuation de vitesse $u'_{f_{s1}}$ dans la couche de cisaillement et la fluctuation de pression $p'_{f_{s1}}$ en champ proche a été également analysée. Le microphone délivrant $p'_{f_{s1}}$ est fixe, et placé à $x = D/2$ et $r \approx D/2$, avec un angle d'azimut de 90° par rapport au fil chaud, que l'on déplace axialement au centre de la couche de cisaillement. Comme le montre la figure 1.20(a) pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, $C_{u'p'}(f_{s1})$ est proche de l'unité entre la sortie de buse et x_{s2} , ce qui démontre la très bonne synchronisation entre la vitesse $u'_{f_{s1}}$ et la pression $p'_{f_{s1}}$, même à 90° d'écart en azimut. Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la cohérence $C_{u'p'}(f_{s1})$ présente un niveau plus faible en amont de x_{s1} , autour de 0.5, et $C_{u'p'}(f_{s1})$ s'effondre très rapidement en

aval de x_{s1} comme le montre la figure 1.20(b). Ce résultat est cohérent avec l'analyse menée par Hussain & Zaman [40] de la dynamique des structures tourbillonnaires dans le cas de conditions initiales transitionnelles. Dans ce cas, les tourbillons annulaires dans la couche de cisaillement sont déstabilisés par les fortes perturbations aléatoires environnantes, ce qui initie une instabilité azimuthale (d'où le faible niveau de cohérence entre la pression et la vitesse à 90° d'azimut) et conduit à la déstructuration complète des tourbillons lors de leur appariement (éclatement tourbillonnaire ou "breakdown"), d'où un déphasage aléatoire entre la pression et la vitesse, et l'annulation de la cohérence.

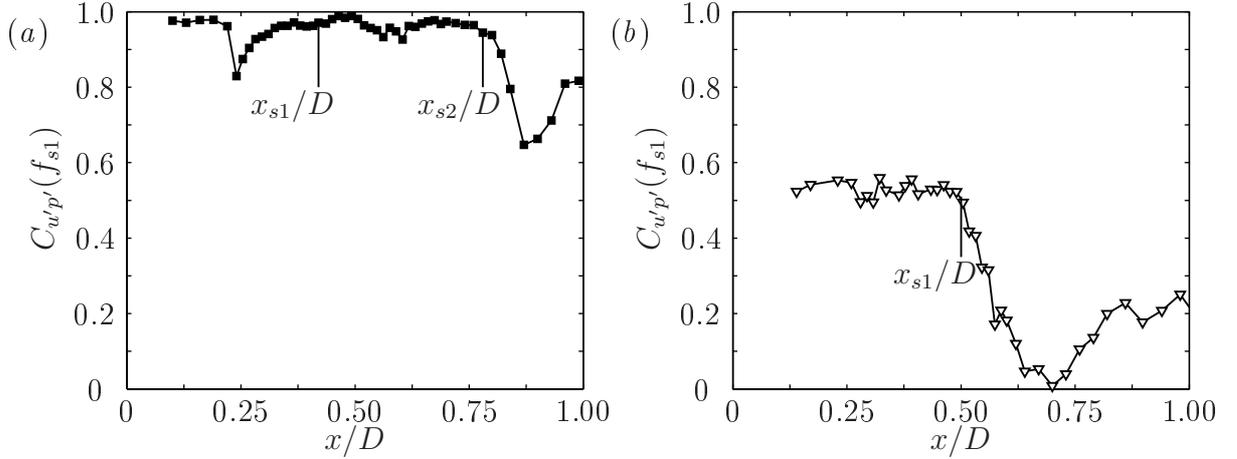


FIG. 1.20: Évolution de la cohérence $C_{u'p'}(f_{s1})$ entre la fluctuation de vitesse $u'_{f_{s1}}(x)$ au centre de la couche de cisaillement et la fluctuation de pression $p'_{f_{s1}}$ à proximité du jet, utilisée comme référence. En (a), $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et en (b), $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

En mesurant la déphasage $\phi(x)$ entre la fluctuation de vitesse $u'_{f_{s1}}(x)$ au centre de la couche de cisaillement et la pression $p'_{f_{s1}}$ en un point fixe, nous avons pu déterminer la vitesse de phase $v_\phi(f_{s1})$ des structures dans la couche de cisaillement associées au premier sous-harmonique f_{s1} . En effet, $v_\phi(f_{s1}) = 2\pi f_{s1}/k_x$ avec $k_x = d\phi/dx$. Pour déterminer le nombre d'onde k_x , l'évolution de $\phi(x)$ a été estimée à l'aide d'une interpolation par une fonction polynomiale au voisinage de chaque point x , comme dans Husain & Hussain [39]. Le résultat est tracé à la figure 1.21 en se limitant à des niveaux de corrélation $C_{u'p'}(f_{s1})$ suffisamment élevés (> 0.2) pour assurer une estimation correcte de $\phi(x)$. Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, l'évolution de la vitesse de phase v_ϕ n'est manifestement pas constante le long de la couche de cisaillement, et l'on constate une forte augmentation de v_ϕ à l'endroit des deux premiers appariements en x_{s1} et x_{s2} . La valeur élevée de v_ϕ en sortie de buse a été aussi constatée par Husain & Hussain [39], ce qui est attribué à la forte contribution de la composante acoustique de $u'_{f_{s1}}$ par rapport à la composante aérodynamique dans cette région. Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, l'évolution de v_ϕ est moins chahutée et v_ϕ se situe autour de $0.6U_j$, comme cela est couramment observé pour une

fluctuation purement aérodynamique.

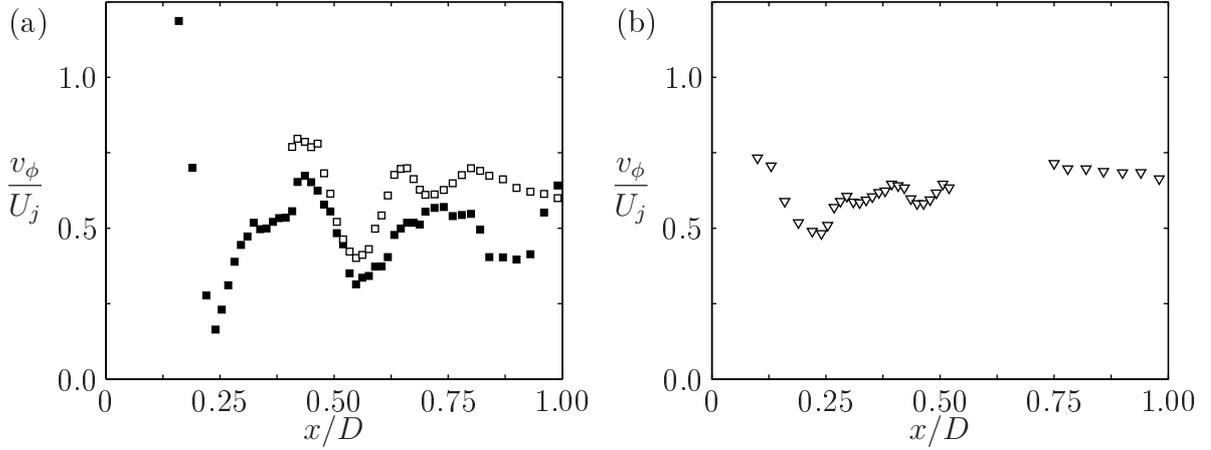


FIG. 1.21: Évolution de la vitesse de phase $v_{f_{s1}}$ associée aux fluctuations de $u'_{f_{s1}}$ au centre de la couche de cisaillement. En (a), $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et en (b), $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse de phase de la composante $u'_{f_{s2}}$ est aussi représentée pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ (□).

1.5.4 Fluctuations sur l'axe du jet

Nous nous intéressons ici à l'influence de l'excitation sur les fluctuations de vitesse au centre du jet. Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, l'excitation accentue le déficit initial de la vitesse moyenne par rapport au jet naturel, voir la figure 1.22(a). Comme le montre la figure 1.22(c), ce minimum est accompagné d'un accroissement de la vitesse fluctuante u' , ce qui est conforme aux observations de Raman & Rice [68]. Pour expliquer cette atténuation de la vitesse moyenne, l'évolution axiale des trois premiers sous-harmoniques $u'_{f_{s1}}$, $u'_{f_{s2}}$ et $u'_{f_{s3}}$ est tracée à la figure 1.22(d), ces composantes représentant la principale contribution aux fluctuations de vitesse sur l'axe du jet (voir les spectres à la figure 1.17(c)). On note à nouveau la présence de la double saturation de $u'_{f_{s1}}$, mais légèrement plus en aval ($x \approx 0.5D$ et $x \approx D$) par rapport à la couche de cisaillement ($x_{s1} = 0.4D$ et $x_{s2} = 0.8D$). Le premier maximum de $u'_{f_{s1}}$ conduit à un ralentissement de la décroissance de U . Lorsque $u'_{f_{s2}}$ sature autour de $x = D$, l'évolution de U s'inverse et U croît alors jusqu'à atteindre une vitesse proche de U_j . La vitesse moyenne reste ensuite relativement constante jusqu'à $x = 5D$. À partir de cette position, la croissance du taux de turbulence u'/U_j s'accélère et la vitesse moyenne U entame alors sa décroissance à l'extrémité du cône potentiel.

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la vitesse moyenne décroît très rapidement en sortie de buse, de façon similaire au jet à 20 m.s^{-1} , voir la figure 1.22(a). La vitesse moyenne continue à décroître en aval de la saturation de $u'_{f_{s1}}$ en x_{s1} , mais plus lentement. Bien que la décroissance de U soit accélérée par l'effet de l'excitation, l'extrémité du cône potentiel ($U = 0.95U_j$) se situe autour de $x = 5.5D$ comme pour le jet naturel. On note également en $x = 5.5D$ l'accélération de la croissance du taux de turbulence u'/U_j , voir la figure 1.22(c).

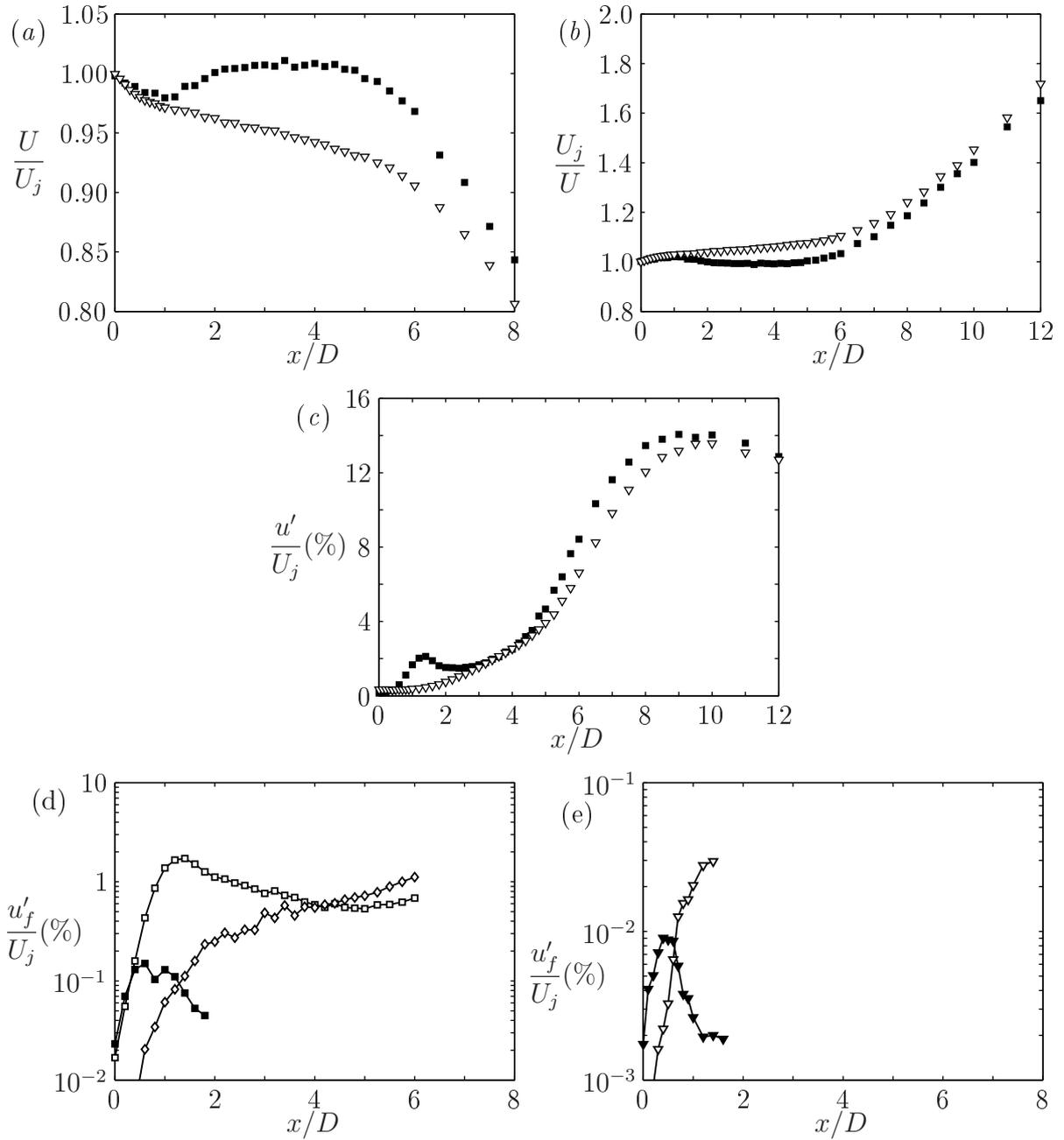


FIG. 1.22: Évolution de la vitesse moyenne U sur l'axe du jet (a, b) et de la vitesse fluctuante u' . Le taux de fluctuations u'/U_j est montré à la figure (c). En (d), $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et l'on représente les composantes u'_{fs1} (■), u'_{fs2} (□), et u'_{fs3} (◇). En (e), $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, u'_{fs1} (▼) et u'_{fs2} (▽).

Plus en aval, le principal effet de l'excitation est de ralentir le mélange turbulent. Par exemple, le taux de décroissance de la vitesse moyenne $d(U_j/U)/d(x/D)$ est plus faible que pour le jet naturel, et proche de 0.11 au lieu de 0.14 pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, et autour de 0.11 au lieu de 0.13 pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. La convergence du taux de turbulence u'/U_c est aussi atteinte plus en aval par rapport au jet naturel, à partir de $x = 20D$ au lieu de $x = 15D$, voir la figure 1.23(b).

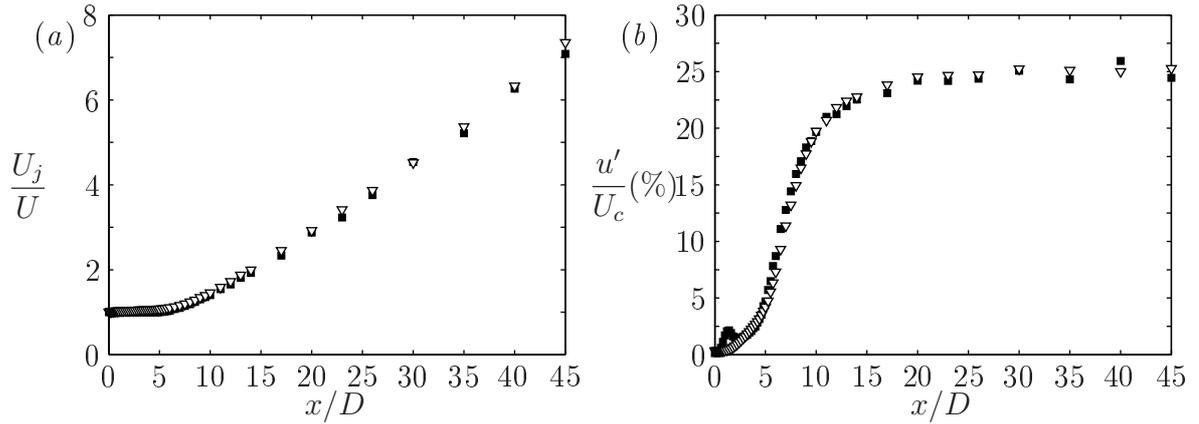


FIG. 1.23: Évolution de la vitesse moyenne U sur l'axe du jet et de la vitesse fluctuante u' , pour $x \leq 45D$. $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ (■) et $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$ (▽).

1.6 Champ de pression

Les spectres de la pression acoustique en champ lointain (montrés dans ce qui suit) indiquent clairement la présence de composantes sous-harmoniques de l'excitation, ce que l'on attribue au bruit produit par les appariements tourbillonnaires dans le jet. La fréquence de ces composantes acoustiques est indépendante de l'angle d'observation θ . Les sources de bruit associées aux appariements sont donc fixes, comme le font remarquer aussi Laufer & Yen [54] et Bridges & Hussain [20]. Dans ce qui suit, nous nous intéressons uniquement au premier sous-harmonique p'_{fs1} , c'est-à-dire au bruit produit par le premier appariement. Bien que cette source soit confinée dans la couche de cisaillement, son étendue dans la direction axiale est comparable à la longueur d'onde des fluctuations dans la zone cisailée. Ainsi, la phase du champ de pression p'_{fs1} n'est pas constante au voisinage des appariements, et le champ acoustique lointain résulte d'un processus d'interférence complexe entre les ondes de pression émises avec des phases différentes depuis la couche de cisaillement. Le diagramme de rayonnement ne peut pas être expliqué à partir de l'analyse locale des fluctuations dans le jet et un modèle de rayonnement doit être utilisé pour prendre en compte l'ensemble de l'évolution des fluctuations.

Le modèle de rayonnement que nous utilisons pour interpréter nos résultats est similaire à celui développé par Tam & Burton [72] et Crighton & Huerre [26], voir la section 1.2.2. La distribution de pression $p'_{f_{s1}}$ mesurée le long de la couche de cisaillement est modélisée de façon analogue à (1.20) :

$$p'_{f_{s1}} = E(x) \exp(ik_x x - i\omega t) \quad (1.22)$$

où le nombre d'onde k_x est supposé constant et $\omega = 2\pi f_{s1}$ est la pulsation. Le rayonnement acoustique de cette frontière de pression est calculé en annexe B dans le cas d'une géométrie 3D et axisymétrique.

Le champ proche $p'_{f_{s1}}$ a été mesuré à proximité du premier appariement. Son analyse est effectuée à la section 1.6.2 pour les deux configurations de jet. Une fonction $E(x)$ et un nombre d'onde k_x sont proposés pour modéliser l'évolution ondulatoire de $p'_{f_{s1}}$ en champ proche. La directivité de $p'_{f_{s1}}$ est étudiée en section 1.6.3. La section 1.6.4 est consacrée à la décroissance radiale de $p'_{f_{s1}}$, en s'éloignant radialement de la couche de cisaillement. Nos résultats expérimentaux sont comparés aux prévisions obtenues en annexe B. Au préalable toutefois, l'influence de l'excitation sur le champ de pression est commentée à la section 1.6.1.

1.6.1 Fluctuations de pression

Des signaux temporels de pression mesurés en champ proche sont montrés à la figure 1.24 pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, et à la figure 1.25 pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. Comme nous l'avons constaté précédemment pour la vitesse, les fluctuations de pression sont organisées principalement en fonction de la fréquence de contrôle f_{ex} et de ses sous-harmoniques. Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, on retrouve en particulier la présence des deux premiers sous-harmoniques $p'_{f_{s1}}$ et $p'_{f_{s2}}$ (en $x = D/2$) et pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, le sous-harmonique $p'_{f_{s1}}$ uniquement. On note aussi le niveau très élevé de $p'_{f_{s1}}$ à proximité du jet, autour de 120 dB pour les deux vitesses de jet. La question qui nous intéresse par la suite est de savoir quelle part de cette pression à proximité du jet est rayonnée en champ lointain et avec quelle directivité.

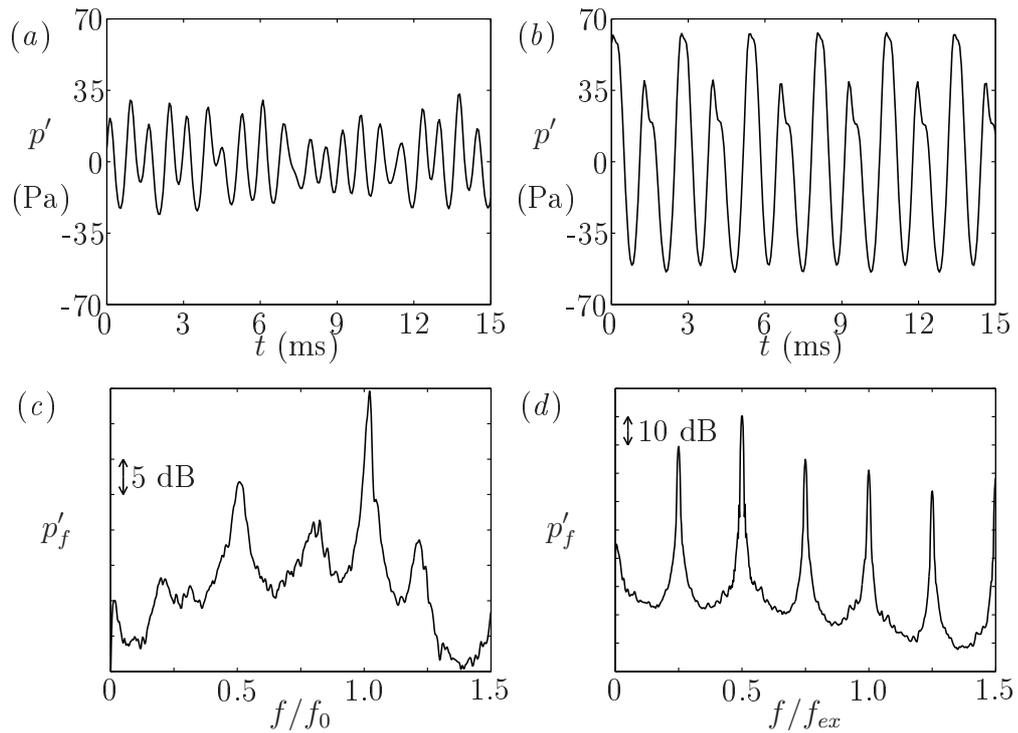


FIG. 1.24: Effets de l'excitation sur les fluctuations de pression en champ proche ($x = D/2, r \approx D/2$) pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. À gauche, la couche de cisaillement est naturelle ; à droite, l'excitation est utilisée. Des signaux temporels des fluctuations de pression sont représentés aux figures (a) et (b), et les spectres correspondant aux figures (c) et (d).

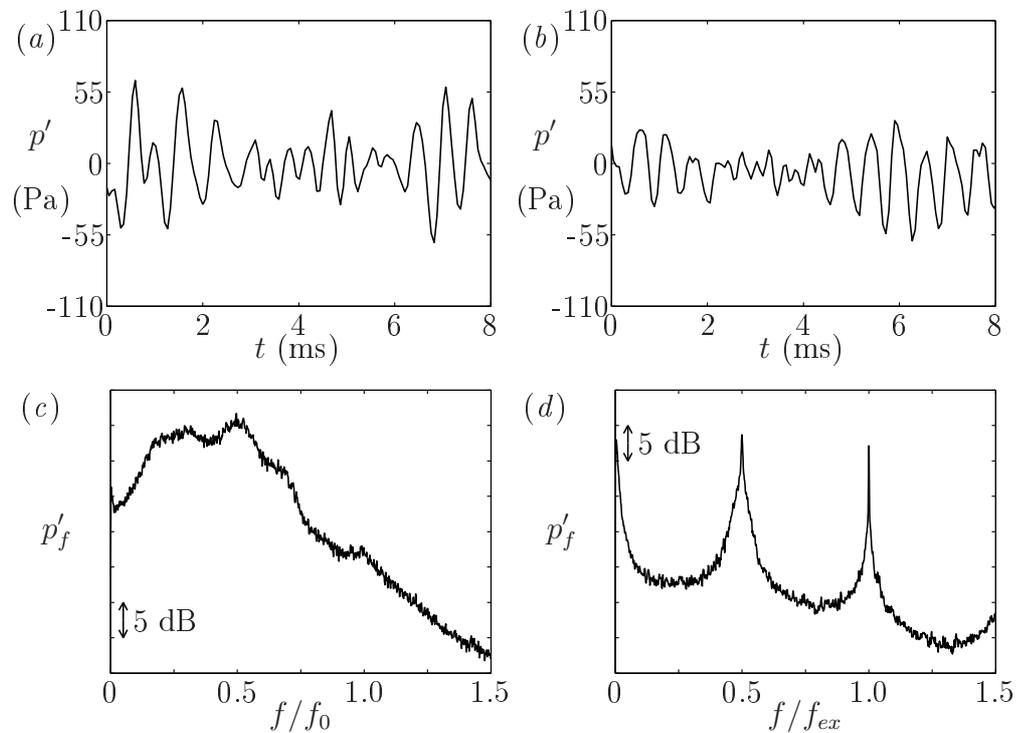


FIG. 1.25: Effets de l'excitation sur les fluctuations de pression en champ proche ($x = D/2, r \approx D/2$) pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. La légende est identique à celle de la figure 1.24.

1.6.2 Distribution de la pression $p'_{f_{s1}}$ le long de la couche de cisaillement

Le champ de pression $p'_{f_{s1}}$ est produit principalement lors de la saturation des fluctuations dans la couche de cisaillement, à l'endroit des appariements tourbillonnaires, voir Laufer & Yen [54]. Compte tenu du changement de l'évolution axiale des fluctuations dans la couche de cisaillement en fonction du jet ($U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ ou $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$), on s'attend à ce que la distribution de $p'_{f_{s1}}$ à proximité du jet diffère également.

Évolution de l'amplitude de $p'_{f_{s1}}$

L'évolution axiale de l'amplitude de la pression a été mesurée à proximité de la couche de cisaillement, en suivant une direction θ de 10° de manière à prendre en compte l'évasement du jet. À l'origine $x = 0$, le microphone se situe à $D/5$ du centre de la couche de cisaillement ($r = D/2$).

Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, le résultat est représenté à la figure 1.26(a). L'évolution de $p'_{f_{s1}}$ présente deux lobes, l'un en x_{s1} à l'endroit du premier appariement, et l'autre en x_{s2} à l'endroit du second appariement, la composante de pression $p'_{f_{s1}}$ résultant dans ce cas de la distortion de $p'_{f_{s2}}$, qui est produit intensément lors du second appariement. Ce résultat est conforme aux observations de Bridges & Hussain, voir la figure 10 à la référence [20]. Pour modéliser cette distribution de pression, nous proposons une fonction d'enveloppe $E(x)$ constituée de deux arches de sinusoides, voir la figure 1.26(a) :

$$E(x) = \cos\left(\pi \frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right) B(x, x_{s1}, \sigma_e) + P_{21} \cos\left(\pi \frac{x - x_{s2}}{\sigma_e}\right) B(x, x_{s2}, \sigma_e) \quad (1.23)$$

où $B(x, x_{si}, \sigma_e)$ est la fonction porte, égale à l'unité pour $|x - x_{si}| < \sigma_e/2$ et zéro ailleurs. Le paramètre P_{21} est le rapport de l'amplitude de $p'_{f_{s1}}$ entre x_{s2} et x_{s1} , $P_{21} = |p'_{f_{s1}}(x_{s2})/p'_{f_{s1}}(x_{s1})|$ et σ_e représente la taille d'une arche de sinusoides. La valeur de σ_e est indiquée au tableau 1.3, et celle de P_{21} dans la légende de la figure 1.26.

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, l'évolution axiale de l'amplitude de $p'_{f_{s1}}$ est radicalement différente comme le montre la figure 1.26(b). On observe un unique maximum situé en x_{s1} , à l'endroit de l'appariement-déstructuration des tourbillons. Dans ce cas, la fonction d'enveloppe gaussienne utilisée par Laufer & Yen [54] est tout à fait adéquate :

$$E(x) \propto \exp\left\{-\left(\frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right)^2\right\} \quad (1.24)$$

Le paramètre d'échelle σ_e représente ici la demi-largeur de la gaussienne, voir le tableau 1.3.

Ces deux distributions de la pression p'_{fs1} se distinguent essentiellement par le nombre de lobes, mais notre analyse montre également une différence de forme entre les lobes, sinusoïde *vs.* gaussienne.

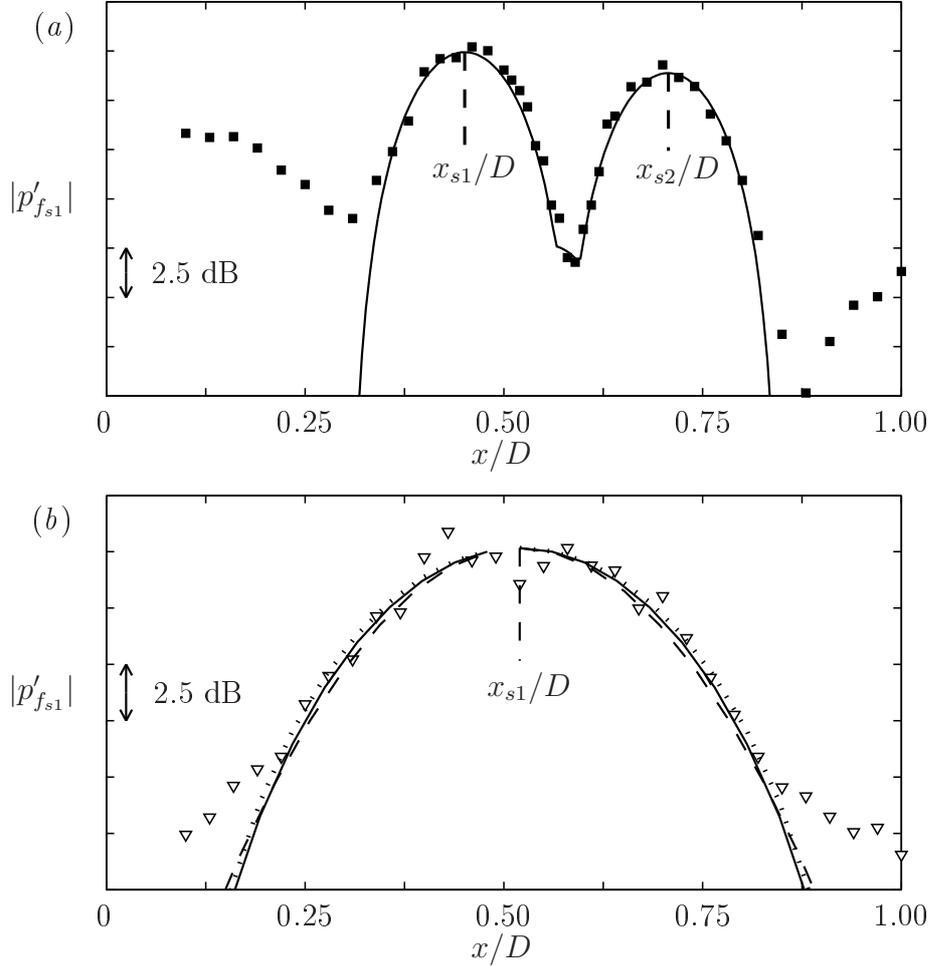


FIG. 1.26: Évolution de l'amplitude de la pression sous-harmonique p'_{fs1} le long de la couche de cisaillement. (a) Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, le champ de pression mesuré est comparé au modèle sinusoïdal défini par l'expression (1.23) avec $P_{21} = 0.957$ (—). (b) Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, plusieurs fonctions sont proposées pour décrire la distribution mesurée, à savoir la distribution gaussienne donnée par les expressions (1.24) et (1.29) pour $n = 2$ (- - -), et les fonctions $E_3(x)$ (—) et $E_4(x)$ (⋯⋯) définies également par l'expression (1.29), pour $n = 3$ et $n = 4$ respectivement. La valeur des paramètres utilisés pour ces différents modèles est fournie au tableau 1.3 ainsi que dans le texte.

U_j (m.s ⁻¹)	σ_e/D	λ_x/D	λ_{ac}/D	σ_e/λ_x	σ_e/λ_{ac}	M_p
20	0.3	0.5	9.1	0.6	30.4	$0.9M_j$
40	0.3	0.3	3.8	1	12.8	$0.7M_j$

TAB. 1.3: Tableau récapitulatif des dimensions caractéristiques du champ de pression proche $p'_{f_{s1}}$. M_p représente le nombre de Mach de phase, $M_p = \lambda_x/\lambda_{ac} = v_\phi/c_\infty$, avec $c_\infty = 340$ m.s⁻¹ la célérité du son.

Nombre d'onde k_x

Pour évaluer k_x , l'évolution de la phase ϕ de $p'_{f_{s1}}$ a été mesurée le long de la couche de cisaillement. Le nombre d'onde est obtenu par dérivation $k_x = d\phi/dx$. Comme précédemment, un microphone de référence de phase est placé en $(x = D/2, r \approx D/2, \phi = 90^\circ)$. La corrélation $C_{p'p'}(f_{s1})$ entre les composantes de pression $p'_{f_{s1}}$ est montrée par la figure 1.27. Pour $U_j = 20$ m.s⁻¹, les annulations de $C_{p'p'}(f_{s1})$ autour de x_{s1} et x_{s2} sont attribuées à des déphasages $\phi(x)$ de 90° [180°]. Pour $U_j = 40$ m.s⁻¹, le niveau de corrélation plus faible résulte de l'intermittence du processus d'appariement.

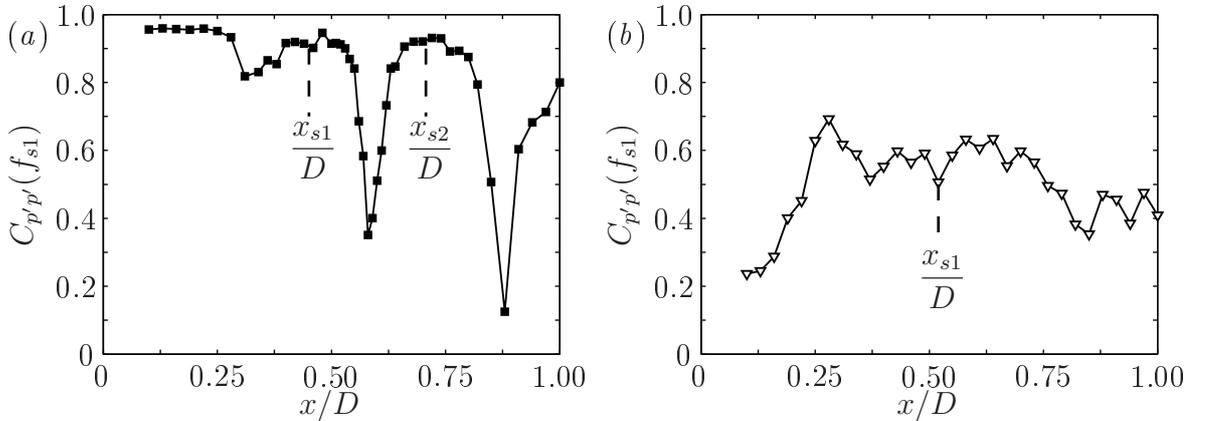


FIG. 1.27: Coefficient de corrélation entre le signal de pression le long de la couche de cisaillement $p'_{f_{s1}}(x)$ et le signal de référence $p'_{f_{s1}}$ à proximité du jet, en $x \approx D/2$, $r \approx D/2$ et à 90° d'azimut. (a) $U_j = 20$ m.s⁻¹ et (b) $U_j = 40$ m.s⁻¹.

L'interprétation du nombre d'onde k_x n'est pas aisée, et nous préférons commenter la vitesse de phase $v_\phi = 2\pi f_{s1}/k_x$, voir la figure 1.28. La vitesse de phase n'est pas constante le long de la couche de cisaillement, et des vitesses supérieures à $0.6U_j$ sont atteintes, ce seuil correspondant à la vitesse généralement mesurée dans la couche de cisaillement pour les structures grandes-échelles purement aérodynamiques. Pour définir le modèle de champ proche (1.22), un nombre

d'onde moyen k_x doit néanmoins être évalué. Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, k_x est estimé de manière à ce que la demi longueur d'onde $\lambda_x/2 = \pi/k_x$ corresponde à la distance entre les deux maxima de pression $|x_{s2} - x_{s1}|$. Autrement dit, le déphasage entre les deux lobes de pression $k_x(x_{s2} - x_{s1})$ est pris égale à π , ce qui est consistant avec les observations de Bridges & Hussain [20], et ce qui correspond également à une vitesse de phase moyenne pertinente, autour de $0.9U_j$. Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, k_x est évalué à partir de la vitesse de phase en x_{s1} , à savoir $0.7U_j$ environ. Pour chacun des jets, la longueur d'onde λ_x associée à k_x est indiquée au tableau 1.3. La longueur d'onde acoustique $\lambda_{ac} = c_\infty/f_{s1}$ y est aussi mentionnée, $c_\infty = 340 \text{ m.s}^{-1}$ étant la célérité du son. Bien que λ_{ac} soit significativement plus grande que l'étendue du champ de pression proche, de l'ordre de σ_e dans la direction axiale et D dans la direction radiale, la compacité du champ de pression ne sera pas supposée par la suite, notamment pour le calcul du rayonnement acoustique effectué en annexe B.

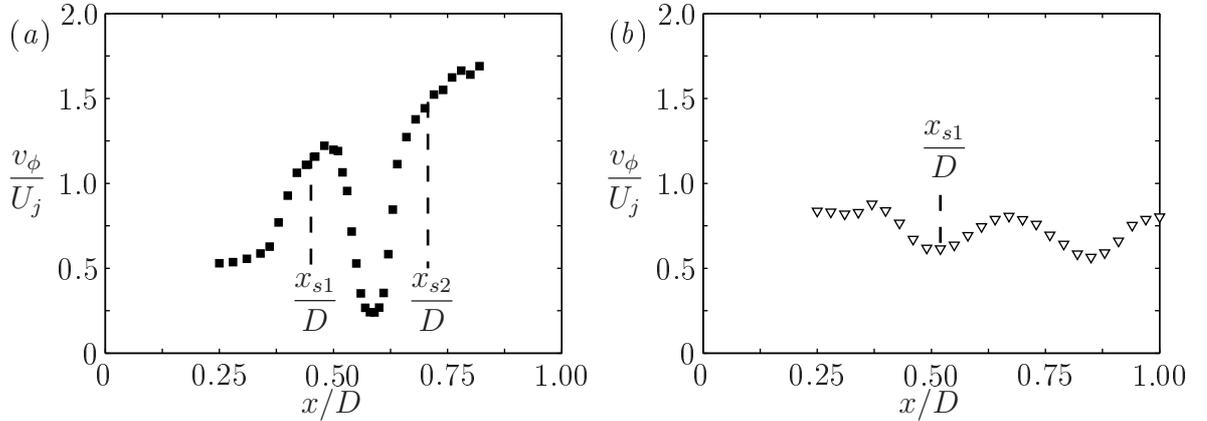


FIG. 1.28: Évolution de la vitesse de phase des fluctuations de pression $p'_{f_{s1}}$ le long de la couche de cisaillement, à proximité du jet. (a) $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$ et (b) $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

1.6.3 Directivité acoustique de $p'_{f_{s1}}$

Nous nous intéressons ici à la directivité acoustique de $p'_{f_{s1}}$. Nos résultats expérimentaux sont interprétés à l'aide du modèle de rayonnement développé en annexe B et en utilisant les caractéristiques du champ proche établies dans la section précédente.

Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, la directivité acoustique de $p'_{f_{s1}}$ est représentée à la figure 1.29(a). Nos mesures sont en bon accord avec les résultats de Bridges [19]. On constate notamment la présence d'un angle d'extinction θ^* autour de 85° . À partir de l'expression théorique du rayonnement acoustique en champ lointain, voir l'expression (B.10) dans le cas général, la directivité a été calculée pour une distribution sinusoïdale du champ proche, voir l'annexe B.4.2. Le résultat est reporté ici :

$$p'(R, \theta) \sim \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac} \sigma_e}{\ln(k_{ac} r_j)} I(\theta) D_a(\theta) \frac{\exp(ik_{ac}R + i\frac{\pi}{4})}{k_{ac}R} \quad (1.25)$$

où D_a est le rayonnement associé à une seule arche de sinusoïde, et centrée autour de $x = 0$:

$$D_a(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{k_x \sigma_e}{2} D_\theta\right)}{1 - \left(\frac{k_x \sigma_e}{\pi}\right)^2 D_\theta^2}$$

et où I est un terme d'interférence prenant en compte la présence des deux lobes de pression centrés autour de x_{s1} et x_{s2} :

$$I(\theta) = \exp(ik_x x_{s1} D_\theta) + P_{21} \exp(ik_x x_{s2} D_\theta) \quad (1.26)$$

La fonction $D_\theta = 1 - M_p \cos \theta$ est le facteur Doppler. Comme le montre la figure 1.29(a), la courbe de directivité prévue par l'expression (1.25) approxime relativement bien la directivité mesurée. En particulier, la présence d'un minimum de pression est retrouvée, avec $\theta^* = 90^\circ$ au lieu de 85° comme obtenu expérimentalement. Cette atténuation est attribuée à l'interférence destructive entre les ondes acoustiques émises depuis la couche de cisaillement par les deux lobes de pression. La position de θ^* est contrôlée par le déphasage de la fluctuation de pression entre les deux lobes, $k_x(x_{s2} - x_{s1})$, voir les figures B.1 et B.2. En prenant ce déphasage égale à π (d'après l'estimation de λ_x faite précédemment), l'atténuation est maximale dans la direction transverse $\theta^* = 90^\circ$. L'intensité de l'atténuation en θ^* est pilotée par le paramètre P_{21} , voir la figure B.1. En imposant une amplitude identique pour les deux lobes de pression, $P_{21} = 1$, le rayonnement acoustique s'annule parfaitement dans la direction θ^* .

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la directivité acoustique de p'_{fs1} est foncièrement différente, voir la figure 1.29(b). Dans ce cas, le rayonnement acoustique est fortement orienté vers l'aval, avec une dynamique de 25 dB par rapport à la direction transverse. À titre de comparaison, l'atténuation n'est que d'environ 13 dB dans la configuration précédente. Ces mesures sont en bon accord avec le modèle de rayonnement superdirectif proposé par Laufer & Yen [54] :

$$|p'_{fs1}| \propto \exp(45 \times M_p \cos \theta) \quad (1.27)$$

Le rayonnement prévu pour une distribution gaussienne de la pression en champ proche a été calculé en annexe B.4.1. Pour $M_p \ll 1$, une expression très similaire à (1.27) est trouvée :

$$|p'(R, \theta)| \propto \frac{1}{k_{ac} R} \exp\left(\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{2} \times M_p \cos \theta\right) \quad (1.28)$$

Avec les valeurs de σ_e et k_x obtenues précédemment (voir le tableau 1.3), le paramètre $\sigma_e^2 k_x^2 / 2$ est évalué autour de 20, ce qui sous-estime grandement la valeur empirique de 45. L'expression (1.28) fournit donc une approximation médiocre de la directivité mesurée, comme on peut le constater à la figure 1.29(b). Crighton & Huerre [26] suggèrent d'autres fonctions types

pour décrire l'allure gaussienne du champ proche, et en particulier les fonctions $E_n(x)$ dont la transformée de Fourier $\hat{E}_n(x)$ s'écrit :

$$\hat{E}_n(k) = \exp(-\sigma_n^n |k|^n) \quad (1.29)$$

Pour $n = 2$, on retrouve la gaussienne (1.24) avec $\sigma_2 = \sigma_e/2$. Comme le montre la figure 1.26, les distributions $E_3(x)$ et $E_4(x)$ approximent en effet bien le champ proche de pression p'_{fs1} . Pour $n = 3$ et $n = 4$, $E_n(x)$ a été calculé numériquement et les valeurs optimales trouvées pour σ_3 et σ_4 sont toutes deux proche de $0.125D$. Le champ acoustique associé à ces distributions E_n diffère en revanche grandement selon la valeur de n . Pour $M_p \ll 1$, l'expression (B.10) fournit la directivité suivante :

$$|p'_n(R, \theta)| \propto \frac{1}{k_{ac}R} \exp(n\sigma_n^n k_x^n \times M_p \cos \theta) \quad (1.30)$$

Pour $n = 4$, un coefficient d'atténuation $n\sigma_n^n k_x^n$ d'environ 150 est trouvé, ce qui prédit un diagramme d'émission p'_4 trop directif pour décrire correctement la directivité mesurée. Le coefficient empirique de 45 est en revanche retrouvé pour $n = 3$, et $p'_3(\theta)$ est dans ce cas en très bon accord avec nos mesures, voir la figure 1.29(b).

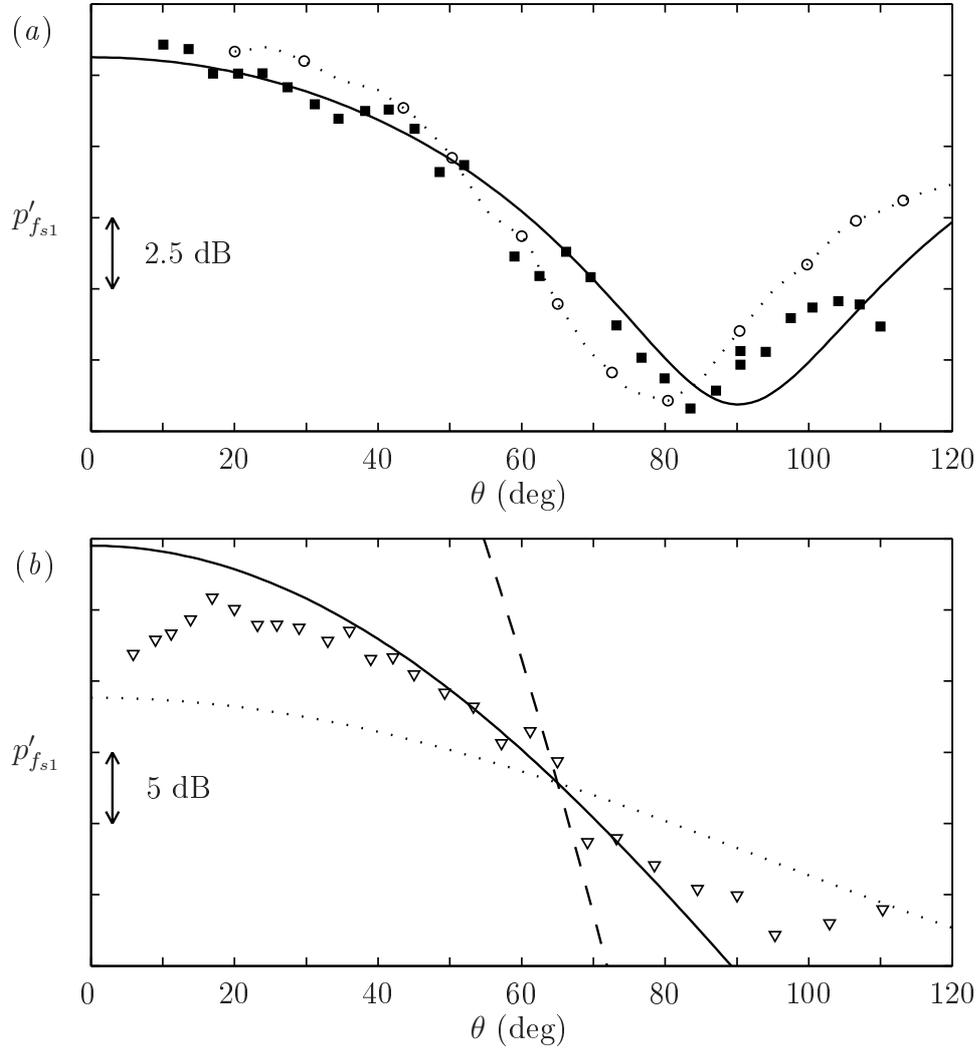


FIG. 1.29: Directivité acoustique de p'_{fs1} . (a) $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. Les symboles ■ représentent nos mesures et les symboles $\cdot \cdot \circ \cdot \cdot$ les mesures de Bridges, voir la figure 2.7 de la référence [19] dans la configuration de deux appariements stables successifs et pour la composante de pression sous-harmonique $f_{ex}/2$. La courbe du modèle (1.25) est tracée en trait plein (—). (b) $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$; (—) facteur d'antenne superdirectif (1.27) observé par Laufer & Yen [54] et retrouvé par le modèle de rayonnement défini par l'expression (1.30) pour la distribution $p'_3(x)$ du champ proche, voir l'expression (1.29), les valeurs des paramètres σ_e et k_x étant fournies au tableau 1.3. Le rayonnement prévu pour la distribution gaussienne (1.24), c'est-à-dire p'_2 , est aussi représenté ($\cdot \cdot \cdot$) ainsi que la directivité de p'_4 (- - -).

1.6.4 Décroissance du champ de pression $p'_{f_{s1}}$

La décroissance du champ de pression $p'_{f_{s1}}$ a été étudiée en éloignant le microphone de mesure en suivant une direction θ fixe, à partir de la position $(x = r_j, r = r_j)$. Deux directions ont été considérées, $\theta = 90^\circ$ et $\theta = 20^\circ$. Nos résultats expérimentaux sont interprétés à l'aide du modèle de rayonnement incompressible développé également en annexe B.

Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, la décroissance initiale de la pression $p'_{f_{s1}}$ est exponentielle en fonction du déplacement du microphone $|z| = |x - r_j + i(r - r_j)|$, avec plus de 40 dB d'atténuation, voir la figure 1.30(a). La décroissance théorique fournie par l'expression (B.13) à partir du champ proche sinusoïdal (1.23) est relativement en bon accord avec ces mesures, mais à proximité de la couche de cisaillement uniquement. Une atténuation classique en $1/|z|$ est observée plus loin de l'écoulement, pour $|z| > 2D$ dans la direction transverse, et pour $|z| > 4D$ à $\theta = 20^\circ$, voir la figure 1.30(b). L'évolution théorique du champ proche est tracée à la figure 1.30(c).

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, la décroissance initiale de $p'_{f_{s1}}$ est très similaire, avec une dynamique exponentielle de 40 dB également, voir la figure 1.31(a). L'atténuation radiale de la pression $p'_{f_{s1}}$ à proximité du jet ne semble donc pas être très sensible à la forme précise de la distribution axiale de $p'_{f_{s1}}$ le long de la couche de cisaillement. Cette conclusion peut être justifiée théoriquement pour un champ de pression très faiblement modulé $\sigma_e k_x \gg 1$, ce qui est le cas ici. Dans ce cas limite, l'analyse du rayonnement en champ proche effectuée en annexe B montre effectivement la décroissance exponentielle du champ de pression, indépendamment de $E(x)$, voir l'expression (B.16) :

$$|p'(x, r)| \sim \exp \{-k_x(r - r_j)\}$$

Cette expression montre par ailleurs que l'atténuation s'opère en fonction de la position radiale uniquement, avec un taux de décroissance basé sur k_x . Ce modèle asymptotique décrit relativement bien nos observations, mais il sous-estime le taux de décroissance du champ proche mesuré, et l'expression empirique suivante est préférée :

$$|p'_{f_{s1}}| \propto \exp \{-\alpha k_x(r - r_j)\} \quad (1.31)$$

Pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$, α est proche de deux, indépendamment de la direction θ . Pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$, α varie légèrement en fonction de θ , avec $\alpha \approx 3$ pour $\theta = 90^\circ$ et $\alpha \approx 4$ pour $\theta = 20^\circ$. Pour retrouver l'atténuation de $p'_{f_{s1}}$ observée expérimentalement dans le cas du jet à 40 m.s^{-1} , sans introduire de modèle empirique paramétré (tel que le paramètre α), l'expression (B.13) a été calculée numériquement en utilisant les gaussiennes généralisées $E_n(x)$ trouvées précédemment. Comme le montre la figure 1.31(a), la prévision obtenue à partir de l'enveloppe gaussienne $E_2(x)$ n'est pas en accord avec les mesures. Pour des valeurs de n plus élevées, $n = 3$ et $n = 4$, l'atténuation calculée retrouve les résultats expérimentaux avec un bon accord, du moins pour des déplacements $|z|$ suffisamment grands. Le tracé de $|p'_3(x, r)|$ à la figure 1.31(c)

confirme par ailleurs la décroissance du champ proche de pression en fonction de la distance au centre de la couche de cisaillement. La loi de décroissance en $1/|z|$ est retrouvée pour $|z| > 3D$, voir la figure 1.31(b).

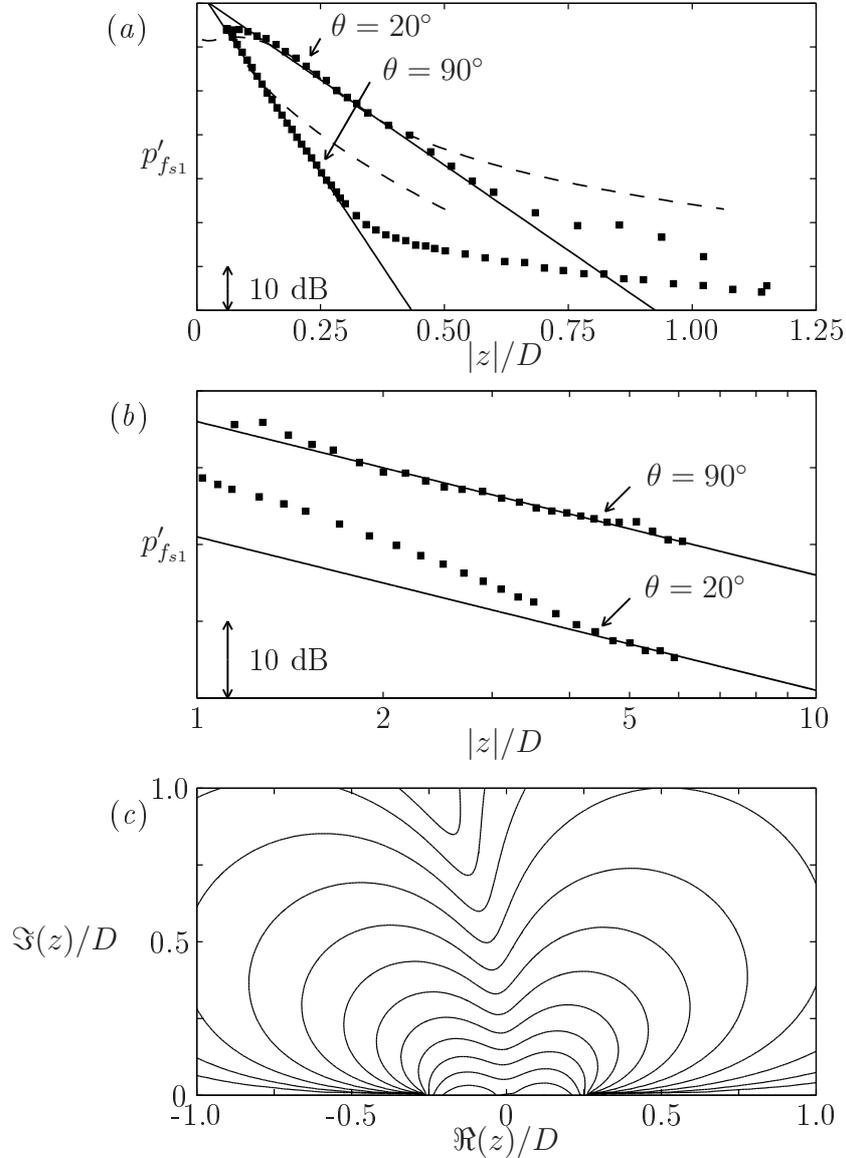


FIG. 1.30: Décroissance radiale du champ de pression p'_{fs1} pour $U_j = 20 \text{ m.s}^{-1}$. La figure (a) concerne l'atténuation de p'_{fs1} à proximité de la couche de cisaillement, selon deux directions $\theta = 20^\circ$ et $\theta = 90^\circ$; le modèle empirique (1.31) est aussi représenté (—) ainsi que la prévision fournie par l'expression (B.13) (- - -) pour la distribution sinusoïdale définie par l'expression (1.23) et avec les paramètres du tableau 1.3. (b) L'atténuation de la pression plus loin de la couche de cisaillement est comparée à la loi de décroissance en $1/|z|$ (—). (c) Iso-contours du champ de pression prévu à partir de l'expression (B.13) pour l'enveloppe sinusoïdale.

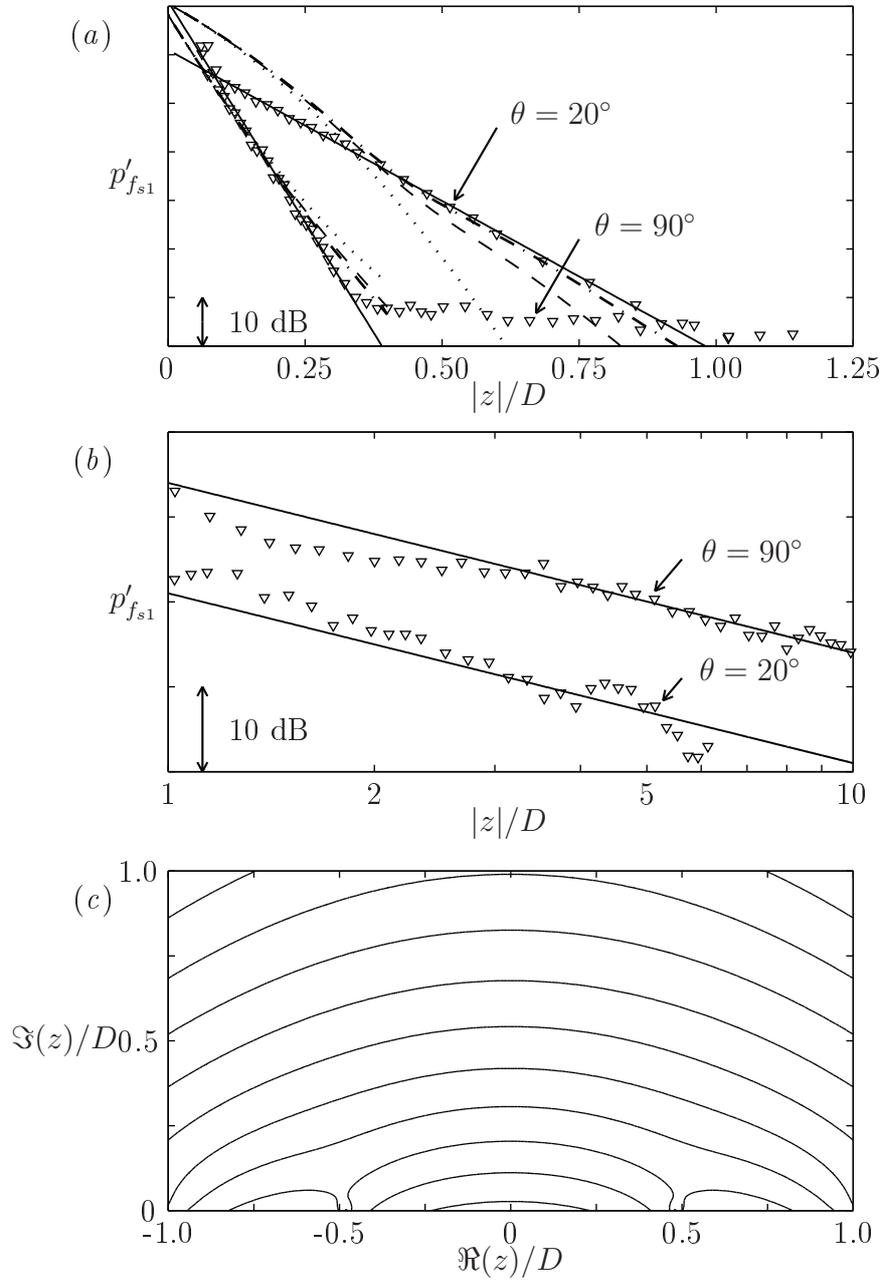


FIG. 1.31: Décroissance radiale du champ de pression p'_{fs1} pour $U_j = 40 \text{ m.s}^{-1}$. (a) Atténuation de p'_{fs1} à proximité de la couche de cisaillement; (—) modèle empirique (1.31); prévisions à partir de l'expression (B.13) pour la distribution gaussienne (1.24) (\cdots), la fonction $\hat{E}_3(k)$ (- - -), et la fonction $\hat{E}_4(k)$ (- · - ·). (b) L'atténuation de la pression plus loin de la couche de cisaillement est comparée à la loi de décroissance en $1/|z|$ (—). (c) Iso-contours du champ de pression prévu par l'expression (B.13) en utilisant $\hat{E}_3(k)$.

1.7 Conclusion

Le rayonnement acoustique produit par l'appariement des tourbillons issus de l'enroulement de la couche de cisaillement initiale d'un jet subsonique a été étudié. Une excitation acoustique a été utilisée pour contrôler le développement de la couche de cisaillement. Deux conditions initiales ont été considérées, l'une étant laminaire pour une vitesse de jet U_j de 20 m.s⁻¹ ($Re_D < 10^5$), l'autre étant nominale laminaire pour $U_j = 40$ m.s⁻¹ ($Re_D > 10^5$).

En l'absence d'excitation, l'évolution des fluctuations dans la couche de cisaillement initiale est gouvernée par le mode axisymétrique le plus instable (fréquence f_0) et le premier mode tournant (fréquence $f_1 > f_0$), indépendamment de l'état initial de l'écoulement. Ces deux ondes d'instabilité ne coexistent pas spatialement. Par ailleurs, ces fluctuations émergent sous la forme de bouffées de durée $1/(f_1 - f_0)$ typiquement, soit la période associée à l'interaction de battement entre ces modes. La fluctuation basse fréquence produite par cette interaction perturbe efficacement le cône potentiel. En aval de la saturation du mode axisymétrique, le premier sous-harmonique de fréquence $f_{s1} = f_0/2$ émerge nettement. Pour $U_j = 20$ m.s⁻¹, cette fluctuation présente une signature caractéristique marquée par un fort pic de vitesse négative et un point de rebroussement. La présence de ce pic est quasi-périodique, avec comme fréquence principale f_{s1} et comme fréquence secondaire f_{s2} . Pour $U_j = 40$ m.s⁻¹, le premier sous-harmonique de la fluctuation de vitesse est aussi détecté dans la couche de cisaillement, mais sa présence est très intermittente. Lorsque le premier sous-harmonique sature à l'endroit de l'appariement, les tourbillons se déstructurent, ce qui conduit à une transition rapide de la couche de cisaillement vers un état turbulent.

En présence de l'excitation, et pour la couche de cisaillement initialement laminaire, une cascade d'appariements stables est obtenue. Dans ce cas, le premier sous-harmonique de vitesse sature en deux positions le long de la couche de cisaillement, une première fois à la suite d'une croissance exponentielle rapide depuis la sortie de buse, et une seconde fois due à la saturation du second sous-harmonique plus en aval. Ces deux saturations sont associées aux deux premiers appariements tourbillonnaires dans la couche de cisaillement. Une pression acoustique intense est produite à l'endroit de ces appariements. La distribution axiale du premier sous-harmonique de pression le long de la couche de cisaillement présente également deux lobes, de forme sinusoïdale. Dans ce cas la directivité acoustique en champ lointain est en très bon accord avec les mesures de Bridges [19], et une direction d'extinction θ^* est constatée, autour de 85° . La présence de cette annulation dans une direction relativement transverse résulte de l'interférence destructive des ondes de pression émises approximativement en opposition de phase depuis les deux lobes de pression le long de la couche de cisaillement. Dans la couche de cisaillement nominale laminaire, l'éclatement tourbillonnaire persiste malgré l'excitation. Dans ce cas, le premier sous-harmonique de vitesse sature en une unique position le long de

la couche de cisaillement, à l'endroit du premier appariement–éclatement tourbillonnaire. Le champ de pression produit à proximité de la couche de cisaillement présente un seul lobe, de forme gaussienne, et le champ acoustique lointain possède un facteur d'antenne superdirectif, en accord avec les mesures de Laufer & Yen [54]. Pour les deux jets ($U_j = 20 \text{ m.s}^{(-1)}$ et $U_j = 40 \text{ m.s}^{(-1)}$), l'atténuation radiale du champ de pression produit par les appariements est exponentielle à proximité de la couche de cisaillement. Enfin, l'évolution de la pression en champ proche et en champ lointain a pu être expliquée en utilisant un modèle de rayonnement basé sur la distribution axiale de la pression le long de la couche de cisaillement.

Chapitre 2

Rayonnement acoustique des instabilités absolues dans un jet subsonique

2.1 Introduction

Dans un jet supersonique, le rayonnement d'ondes de Mach est l'une des principales composantes de bruit. Le mécanisme acoustique est associé à la vitesse de phase supersonique des ondes d'instabilités convectives, voir Tam & Burton [72], et Tam [71] pour une synthèse. Un tel rayonnement n'est pas observé pour un jet subsonique, la vitesse de phase des instabilités convectives étant également subsonique dans ce cas. En régime subsonique, l'utilisation du concept d'ondes d'instabilités a toutefois montré son efficacité pour expliquer certaines contributions acoustiques. Par exemple, le diagramme de rayonnement superdirectif observé par Laufer & Yen [54] a été expliqué à l'aide d'une description ondulatoire des fluctuations, voir Huerre et Crighton [36, 26] et le chapitre précédent. La vitesse de phase de ces fluctuations est subsonique, mais la lente modulation spatiale de l'amplitude introduit des composantes supersoniques contribuant efficacement (algébriquement) au rayonnement lointain. Pour une fonction d'enveloppe gaussienne, un rayonnement superdirectif est retrouvé. L'étude menée par Cooper & Crighton [23] du mode global dans un jet subsonique a également montré la possibilité d'un rayonnement acoustique. Par définition, l'étendue d'un tel mode de fluctuation ondulatoire est grande, ce qui en fait donc une source acoustique privilégiée *a priori*. Toutefois, le mode global est stable dans le cas d'un jet isotherme, et sa présence n'est donc pas attendue. Cooper & Crighton suggèrent néanmoins qu'un forçage externe adapté peut en initier la croissance. Dans ce cas, une fonction d'enveloppe gaussienne est prévue au voisinage de la saturation, ce qui conduit donc également à un rayonnement superdirectif. La présence d'un tel rayonnement n'a été pour l'instant ni confirmée, ni infirmée. Signalons que ce mécanisme acoustique est à distinguer du bruit d'appariement tourbillonnaire.

Nous nous intéressons ici à la contribution des instabilités absolues pour le bruit de jet, voir Bers [8] et Huerre & Monkewitz [37] pour une introduction à ce type d'instabilité. L'analyse de ces ondes est la démarche préliminaire à l'étude du mode global, et l'on peut donc penser que nos résultats ne permettent au mieux que de retrouver les conclusions de Cooper & Crighton [23]. Nous nous sommes toutefois efforcé d'adopter un point de vue différent. Par ailleurs, notre étude de stabilité utilise des profils de vitesse issus de la simulation numérique de Bogey & Bailly [10] pour un jet subsonique à grand nombre de Mach, et dont le rayonnement acoustique a également été calculé ce qui permet la comparaison de nos prévisions. Le problème de stabilité et sa résolution numérique sont présentés au chapitre 2.2. Les résultats obtenus pour des profils de vitesse moyenne du type "tangente hyperbolique" sont montrés au chapitre 2.3. Le chapitre 2.4 est consacré à l'analyse du jet calculé numériquement par Bogey & Bailly [10].

2.2 Présentation du problème de stabilité et de sa résolution numérique

Ce paragraphe a pour seule prétention de rappeler brièvement le formalisme de la théorie de la stabilité linéaire locale et de présenter la procédure de résolution numérique. Pour plus de justifications théoriques, le lecteur pourra consulter les travaux de Bers [8], Huerre & Monkewitz [37], et la référence [38] pour une synthèse.

Nous étudions la stabilité linéaire d'un champ de vitesse moyenne représentatif d'un jet subsonique et axisymétrique dans la région potentielle :

$$U(r, \phi, x) = \frac{U_j}{2} \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{R}{4\delta_\theta(x)} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \right] \right\} \quad (2.1)$$

où r est la coordonnée radiale, x la coordonnée axiale, et ϕ l'angle azimuthal. Par ailleurs, U_j dénote la vitesse du jet, R le rayon du jet, et δ_θ l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de cisaillement. Dans le cas d'un jet à grand nombre de Reynolds, l'évolution axiale de la vitesse U est généralement très lente par rapport à son évolution radiale à travers la zone cisailée, et l'on peut donc considérer la variable x (et $\delta_\theta(x)$) comme un paramètre.

Les variables de l'écoulement sont décomposées en une grandeur moyenne et une grandeur fluctuante. Par exemple, pour la pression :

$$P(r, \phi, t; x) = P_j + p(r, \phi, t; x)$$

où l'amplitude de p est supposée très inférieure à la pression statique du jet P_j . Les fluctuations sont cherchées sous la forme de modes normaux dans les directions x et ϕ , ainsi qu'en fonction du temps t . Par exemple :

$$p(r, \phi, t; x) = p(r; x) \exp(ikx + in\phi - i\omega t)$$

où ω et k représentent la pulsation et le nombre d'onde de p respectivement, ces deux grandeurs étant complexes *a priori*, et n , un entier, est le nombre azimuthal de la fluctuation. Les variables à la droite du séparateur ";" sont considérées comme des paramètres. Par la suite, seul le mode axisymétrique $n = 0$ est étudié. En linéarisant les équations d'Euler incompressibles, on obtient une équation de dispersion reliant ω et k . En choisissant comme vitesse de référence U_j , comme longueur de référence R , et comme pression de référence P_j , les modes propres de la pression fluctuante $\tilde{p}(\tilde{r}; \tilde{x})$ vérifient l'équation de dispersion suivante, paramétrée par δ_θ/R uniquement (via \tilde{U} et \tilde{U}' , le symbole $\tilde{}$ indiquant que la quantité accentuée est sans dimension) :

$$\frac{d^2\tilde{p}}{d\tilde{r}^2} + \left[\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{2\tilde{U}'(\tilde{r})}{\tilde{U}(\tilde{r}) - \tilde{\omega}/\tilde{k}} \right] \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{r}} - \tilde{k}^2\tilde{p} = 0 \quad (2.2)$$

où \tilde{U}' représente la dérivée de \tilde{U} par rapport à \tilde{r} . Il convient d'ajouter à cette équation une condition de décroissance pour $\tilde{k}\tilde{r} \gg 1$, ainsi que de fixer la valeur de la pression en un point, $\tilde{p}(\tilde{r} = 0) = 1$ par exemple.

Pour une pulsation $\tilde{\omega}$ donnée, ce problème possède généralement plusieurs solutions \tilde{k} . On distingue les solutions $\tilde{k}^+(\tilde{\omega})$ définissant une fluctuation $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t})$ valable sur le domaine $\tilde{x} < 0$, et les solutions $\tilde{k}^-(\tilde{\omega})$ pour $\tilde{x} > 0$. Les solutions telles que $\tilde{k}^+(\tilde{\omega}_0) = \tilde{k}^-(\tilde{\omega}_0) = \tilde{k}_0$ déterminent une fluctuation \tilde{p} uniformément valable pour $-\infty < \tilde{x} < +\infty$. Si ce mode est instable $\tilde{\omega}_{0i} > 0$ (l'indice i indique la partie imaginaire de $\tilde{\omega}_0$), sa croissance est initiée naturellement, sans forçage externe. Pour cette raison, ce mode est dit absolu par opposition aux ondes d'instabilités convectives. La vitesse de groupe d'une instabilité absolue est nulle :

$$\left. \frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{k}} \right|_0 = 0$$

Numériquement, l'équation de dispersion est résolue par une méthode de tir. À l'origine $\tilde{r} = 0$, la solution \tilde{p} est initiée par une relation dérivée de l'équation (2.2) pour $\tilde{U}'(\tilde{k}\tilde{r} \ll 1) = 0$:

$$\tilde{p} \approx I_0(\tilde{k}\tilde{r})$$

où I_0 est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0. L'expression (2.2) est intégrée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 jusqu'à une valeur de \tilde{r} suffisamment grande pour assurer l'annulation de $\tilde{U}'(\tilde{r})$. Par ailleurs, le chemin d'intégration est éventuellement déformé dans le plan complexe de la variable \tilde{r} pour éviter la singularité rencontrée par l'annulation du terme $\tilde{U}(\tilde{r}) - \tilde{\omega}/\tilde{k}$. Par ailleurs, on contourne ce point critique de manière à ne pas croiser de ligne de coupure, voir Boyd [14]. Pour une valeur fixée de la pulsation $\tilde{\omega}$, le nombre d'onde \tilde{k} est alors recherché numériquement pour assurer la décroissance de la fonction propre \tilde{p} à l'extrémité du domaine de calcul $\tilde{k}\tilde{r} \gg 1$:

$$\tilde{p} \propto \frac{\exp(-\tilde{k}\tilde{r})}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{r}}}$$

Pour une valeur fixée du paramètre δ_θ/R , les branches de solutions \tilde{k}^+ et \tilde{k}^- ont pu ainsi être calculées, et $\tilde{\omega}_0$ et \tilde{k}_0 ont été déterminés en recherchant le point de pincement (uniquement le mode pour $\tilde{\omega}_{0i}$ maximum). Pour d'autres valeurs de δ_θ/R , $\tilde{\omega}_0$ et \tilde{k}_0 ont été obtenus de manière récursive, en déterminant la solution $\tilde{k}(\tilde{\omega})$ associée à une vitesse de groupe nulle. Pour quelques valeurs de δ_θ/R , nous avons pris soin de vérifier que \tilde{k}_0 constitue bien un point de pincement.

2.3 Profils de vitesse en tangente hyperbolique d'épaisseur variable

Pour les profils de vitesse en tangente hyperbolique (2.1), le résultat du calcul de ω_0 et de k_0 est montré à la figure 2.1. Le diamètre du jet $D = 2R$ est ici choisi comme longueur de référence. Nos résultats sont en très bon accord avec les données calculées par Cooper & Crighton [23], ce qui valide notre démarche. En particulier, on retrouve la stabilité des modes absolus ($\tilde{\omega}_{0i} < 0$), quelque soit le paramètre d'épaisseur δ_θ/D . Le mode global associé au champ de vitesse $\tilde{U}(\tilde{r}, \tilde{x})$ est donc également stable, voir Huerre & Monkewitz [38].

Étant donné le nombre de Mach du jet $M_j = U_j/c_\infty$, le nombre de Mach de phase des modes absolus peut être calculé $M_p = (\omega_{0r}/k_{0r})/c_\infty = M_j(\omega_{0r}/k_{0r})/U_j$. Le résultat est montré à la figure 2.2. Pour M_j supérieur à environ 0.4, il existe des modes absolus dont la vitesse de phase est supersonique pour des valeurs du paramètre d'épaisseur δ_θ/D suffisamment faibles. Bien qu'un rayonnement acoustique soit alors attendu, la réalité de ce rayonnement reste toutefois à démontrer compte tenu de la stabilité des modes absolus.

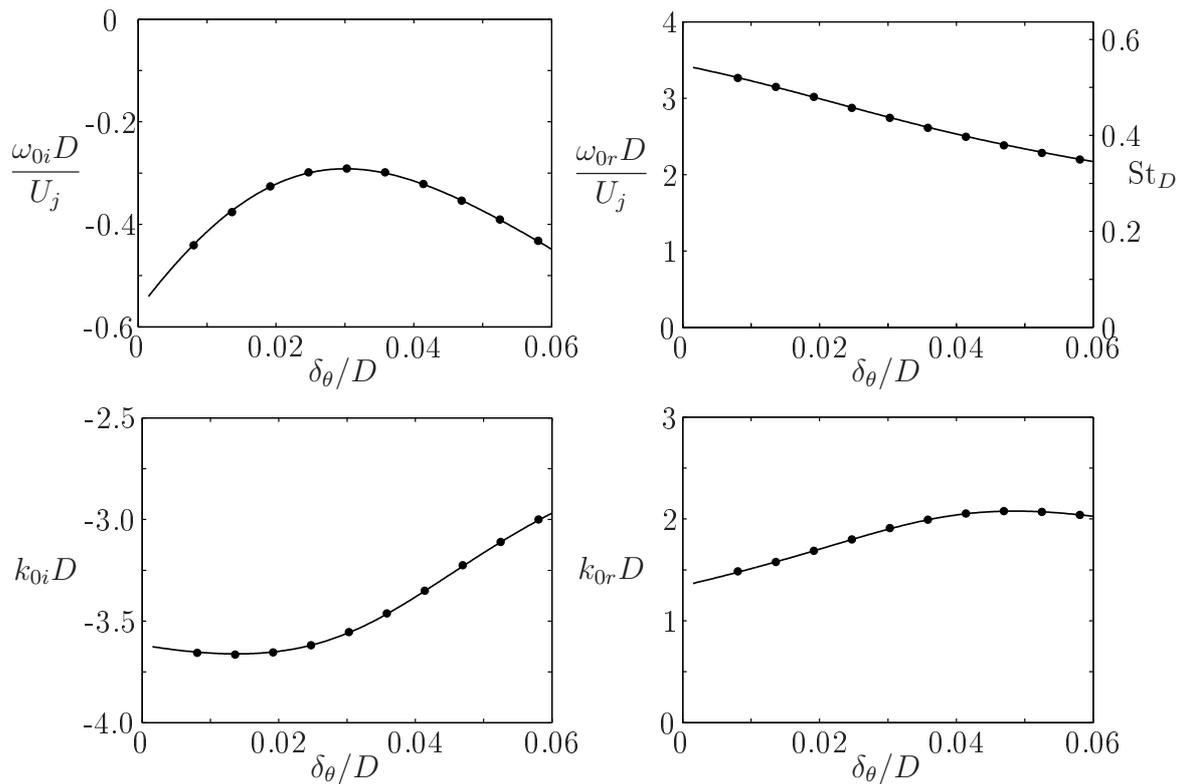


FIG. 2.1: Caractéristiques ω_0 et k_0 des ondes d'instabilités absolues pour le profil de vitesse en tangente hyperbolique (2.1) en fonction du paramètre δ_θ/D . Les indices r et i indiquent qu'il s'agit des parties réelles et imaginaires. Le nombre de Strouhal St_D est défini comme suit : $St_D = \omega_{0r}D/(2\pi U_j)$. Les résultats de Cooper & Crighton [23] sont représentés par les symboles \bullet .

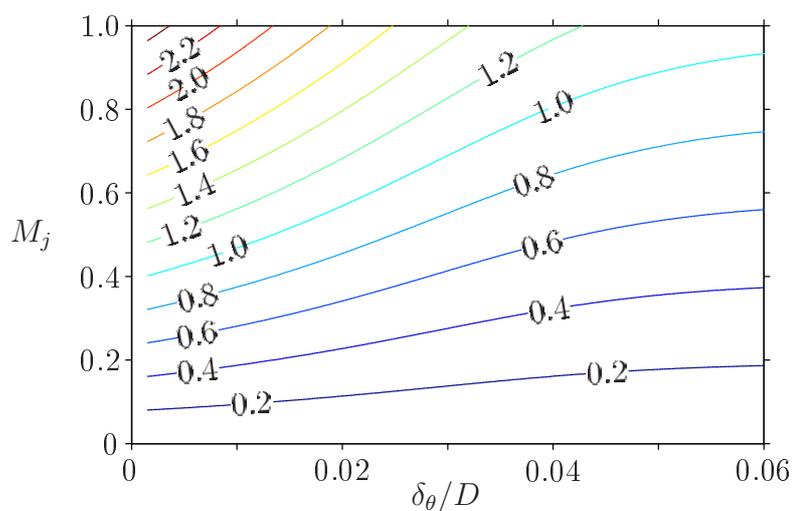


FIG. 2.2: Iso-valeurs du nombre de Mach de phase $M_p = (\omega_{0r}/k_{0r})/c_\infty$ en fonction du paramètre d'épaisseur δ_θ/D et du nombre de Mach du jet $M_j = U_j/c_\infty$.

2.4 Profils de vitesse d'une simulation de jet subsonique par LES

Nous nous intéressons ici à des profils de vitesse fournis par une simulation numérique par LES d'un jet à un nombre de Mach M_j de 0.9. Ces données sont extraites de l'étude menée par Bogey & Bailly [10]. Les résultats obtenus pour deux nombres de Reynolds Re_D sont étudiés, l'un pour $Re_D = 1700$, et l'autre pour $Re_D = 4 \times 10^5$.

Des profils de vitesse du jet à faible nombre de Reynolds sont tracés à la figure 2.3(a). Les profils initiaux ($x \approx 0$) sont relativement similaires à des tangentes hyperboliques. Plus en aval, la distribution radiale de la vitesse est en revanche gaussienne. La figure 2.3(b) présente l'évolution axiale de ω_{0i} calculée pour un grand nombre de profils de vitesse. À l'origine $x = 0$, l'épaisseur de la couche de cisaillement est relativement élevée, ce qui explique l'évolution initialement décroissante de ω_{0i} lorsque δ_θ/D augmente, en accord avec les résultats précédents, voir la figure 2.1. Plus en aval $x > 5D$, pour les profils gaussiens, ω_{0i} croît avec l'élargissement de la zone cisailée. Le taux de croissance ω_{0i} est négatif quelque soit la position axiale x . Les fluctuations absolues sont donc stables, ainsi que le champ de vitesse $U(x, r)$ au sens du mode global linéaire. Le nombre de Mach de phase des ondes d'instabilités absolues est montré à la figure 2.3(c). Compte tenu de la valeur élevée de M_j , on constate la présence de vitesses de phase supersoniques pour les profils de vitesses en tangente hyperbolique à proximité de l'origine. On observe également un domaine de vitesses de phase supersoniques en aval du cône potentiel, autour de $x = 9.5D$. Ces fluctuations supersoniques rayonnent dans une direction θ que l'on estime à l'aide de la relation suivante :

$$\cos \theta = \frac{1}{M_p}$$

l'angle θ étant compté par rapport à l'axe du jet. L'angle de rayonnement est représenté à la figure 2.3(d). On constate un confinement du rayonnement acoustique vers l'aval, dans un secteur angulaire d'environ 37° par rapport à l'axe du jet, pour les ondes émises depuis la région autour de $x = 9.5D$.

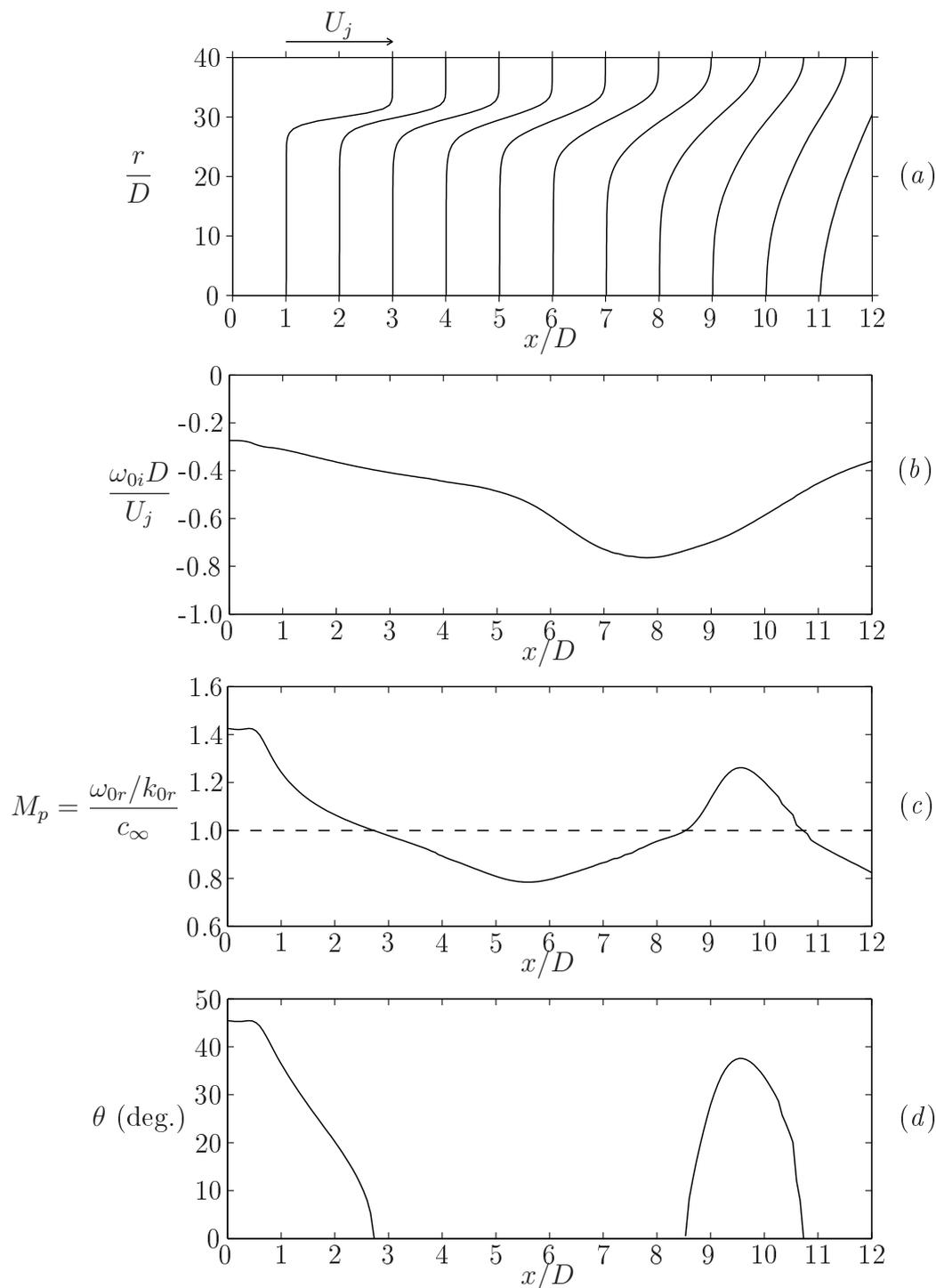


FIG. 2.3: Caractéristiques des instabilités absolues pour les profils du jet à faible nombre de Reynolds obtenus par LES, voir la référence [10]. Les profils de vitesse moyenne sont présentés à la figure (a). Les figures (b) et (c) représentent l'évolution axiale du taux de croissance temporelle ω_{0i} , et du nombre de Mach de phase des instabilités M_p . L'angle de rayonnement θ des ondes supersoniques est indiqué à la figure (d).

À titre de comparaison, le champ acoustique calculé numériquement par Bogey & Bailly [10] est reproduit à la figure 2.4. Le rayonnement acoustique dominant est très organisé et également confiné dans un secteur angulaire vers l'aval, ce qui présente certaines similitudes avec le rayonnement potentiel des instabilités absolues.

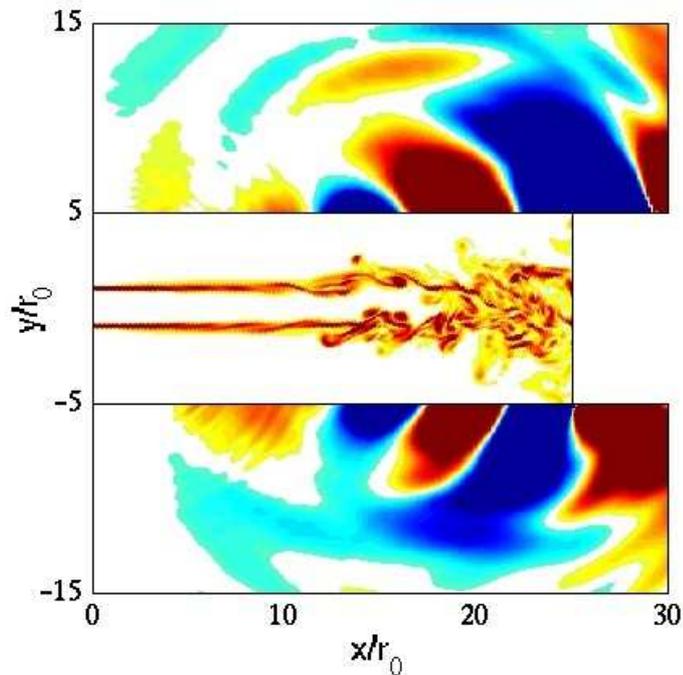


FIG. 2.4: Rayonnement acoustique du jet à faible nombre de Reynolds calculé par Bogey & Bailly [10]. La longueur de référence r_0 correspond au rayon du jet R .

L'analyse du jet à grand nombre de Reynolds est présentée à la figure 2.5. Dans ce cas également, un domaine de vitesses de phase supersoniques est constaté en aval de la zone potentielle, autour de $4.5D$. Le rayonnement acoustique que l'on peut en attendre est confiné dans un secteur angulaire $\theta < 30^\circ$ environ, ce qui est également compatible avec la simulation de Bogey & Bailly [10] dans ce cas, voir la figure 2.6.

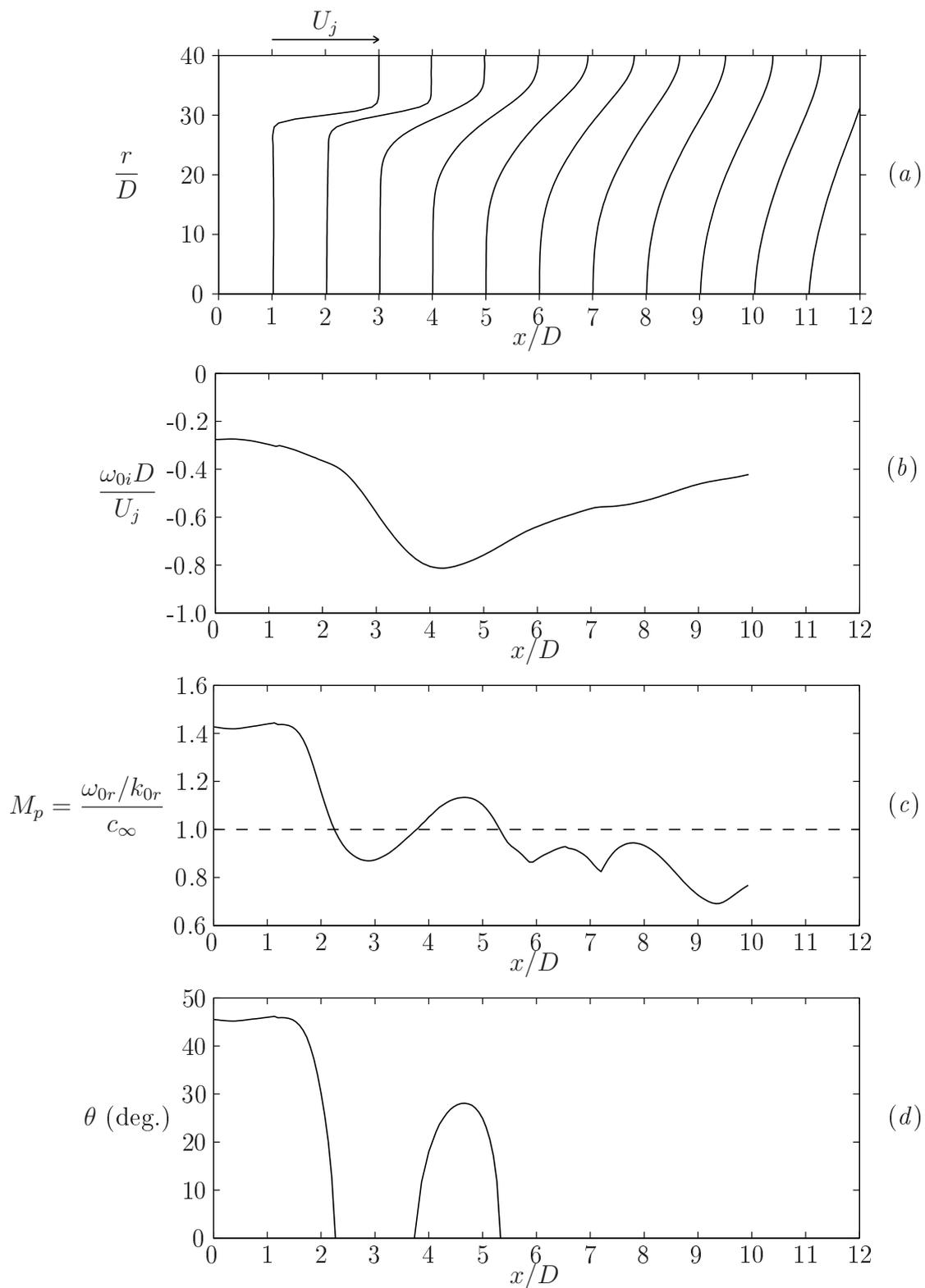


FIG. 2.5: Caractéristiques des instabilités absolues pour les profils du jet à grand nombre de Reynolds calculé par LES, voir la référence [10]. La légende des figures est identique à celle du graphique 2.3.

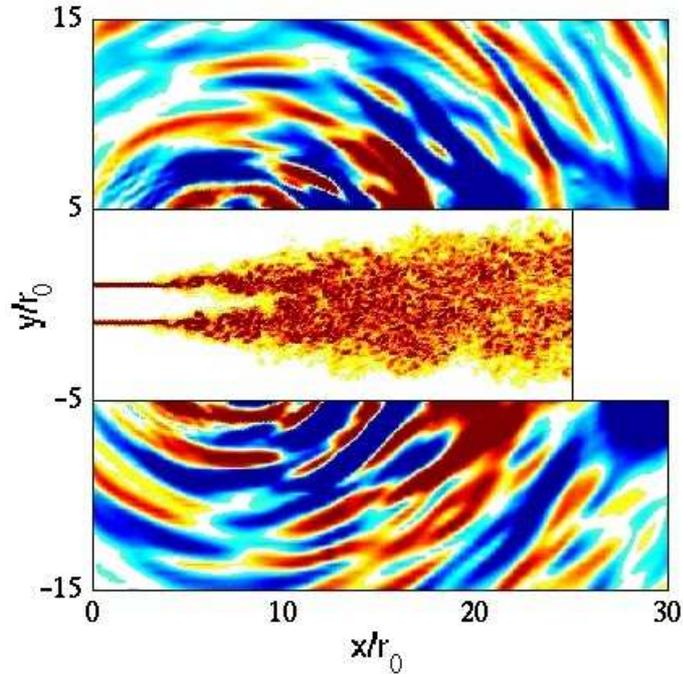


FIG. 2.6: Rayonnement acoustique du jet à grand nombre de Reynolds calculé par Bogey & Bailly [10].

2.5 Conclusion

Cette étude a montré la possibilité de l'existence de fluctuations ondulatoires supersoniques dans un jet subsonique. Ces ondes sont les instabilités absolues des profils radiaux. Dans le cas de profils de vitesse en tangente hyperbolique, ces fluctuations supersoniques sont détectées pour un nombre de Mach du jet M_j supérieur à 0.4 environ, et pour des paramètres d'épaisseur δ_θ/D suffisamment faibles. L'analyse des profils de vitesse d'un jet subsonique calculé par LES (Bogey & Bailly [10]) a également révélé la présence de vitesses de phase supersoniques, notamment en aval du cône potentiel. Dans ce cas, la direction du rayonnement acoustique est prévue entre 30° et 40° de l'axe du jet selon le nombre de Reynolds de l'écoulement. Ce rayonnement acoustique est compatible avec les caractéristiques du champ acoustique calculé numériquement dans ce cas. Toutefois, les modes de fluctuation absolus sont stables et leur présence dans un jet naturel n'est donc pas attendue.

Chapitre 3

Caractérisation par P.I.V. des corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points dans un jet subsonique

3.1 Introduction

Des informations très précieuses peuvent être déduites de l'analyse des corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points. Des échelles intégrales de longueur sont associées à la fonction de corrélation spatiale. Ces échelles caractérisent la taille du domaine corrélé. De même, les échelles intégrales de temps associées à la fonction de corrélation temporelle représentent le temps d'extinction de la turbulence. De nombreux travaux théoriques et expérimentaux sont consacrés à l'étude de ces échelles intégrales dans le cas d'écoulements simples, voir Batchelor [4] et Townsend [73] par exemple. Malgré les quelques travaux existants pour les jets, un examen détaillé est encore actuellement nécessaire. Pour le bruit d'origine aérodynamique, la connaissance des corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points est également d'un grand intérêt. L'intensité acoustique rayonnée par un écoulement turbulent peut être relié à l'intégrale des corrélations d'ordre quatre sur le domaine de l'écoulement. Comme l'a montré Ribner [69], le rayonnement peut être décomposé en deux contributions, à savoir le bruit de cisaillement (shear-noise) et le bruit d'interaction de la turbulence (self-noise). La première composante implique les corrélations spatio-temporelles d'ordre deux. La seconde est un moment d'ordre quatre. En faisant l'hypothèse d'une distribution normale de la densité de probabilité de vitesse, ce terme peut être décomposé en fonction des corrélations d'ordre deux. Ce formalisme est très intéressant dans le cadre de problèmes industriels, notamment pour des approches numériques nécessitant un faible temps de calcul, voir Béchara *et al.* [6], Bailly *et al.* [1], Khavaran [47] et Héron *et al.* [35] pour des exemples de bruit de jet. Compte tenu du manque de données

expérimentales, une caractérisation systématique et précise des corrélations spatio-temporelles d'ordre deux et des échelles intégrales est donc d'un grand intérêt.

L'exploration expérimentale des corrélations de vitesse dans les jets a débuté dans les années 60 avec les travaux de Laurence [56], Davies, Fisher & Barratt [28], Fisher & Davies [31] et Bradshaw, Ferriss & Johnson [16]. La technique de mesure utilisée à cette époque est celle du fil chaud. Il est actuellement reconnu que l'interaction du support d'instrumentation avec l'écoulement limite sérieusement ces approches. L'apparition de la Vélocimétrie Laser Doppler dans les années 80 (Laser Doppler Velocimetry, LDV) a permis une mesure plus fiable des corrélations de vitesse. La détermination des échelles spatio-temporelles nécessite toutefois une exploration fastidieuse de l'écoulement et seuls quelques points de mesures obtenus par LDV sont trouvés dans la littérature, voir Lau [50] par exemple. Avec la Vélocimétrie par Image de Particules (Particule Image Velocimetry, PIV) et l'accroissement des capacités de stockage des données, l'exploration exhaustive des corrélations de vitesse est actuellement envisageable. Plusieurs équipes se sont déjà investies dans ce problème : par exemple Bridges [17] à la NASA, Ukeiley *et al.* [74] à l'université du Mississippi et Jordan et Gervais [44] au LEA de Poitiers. Notre travail s'insère parmi ces récentes contributions. Nous étudions deux jets subsoniques à grands nombres de Mach, $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$, le diamètre D étant de 3.8 cm.

L'installation et l'instrumentation sont décrites à la section 3.2. La section 3.3 est consacrée à la validation de la technique de mesure par PIV et à la caractérisation du jet. Les vitesses moyennes et fluctuantes sont comparées à des résultats obtenus par LDV et par tube de Pitot dans la même installation, ainsi qu'à plusieurs données trouvées dans la littérature (voir le paragraphe suivant). Les résultats de mesures des corrélations de vitesse sont présentés à la section 3.4. Les échelles spatiales et temporelles sont calculées pour de nombreux points au centre de la couche de cisaillement et sur l'axe du jet. Un effort important a été réalisé pour assurer la bonne convergence statistique des corrélations doubles. Environ 2000 paires de champs de vitesses instantanées ont été acquises pour chaque décalage temporel des fonctions de corrélations, ce qui constitue un nombre de d'échantillons supérieur à ce qui est généralement mesuré par PIV : 200 paires pour Bridges [18, 17] et 1000 paires pour Ukeiley *et al.* [74].

Travaux comparatifs

Concernant les vitesses moyennes et fluctuantes, les données comparatives sont extraites de :

- **Lau, Morris & Fisher [52]** (mesures par fil chaud) concernant un jet de diamètre $D = 5.1$ cm, et un nombre de Mach M_j de 0.9.
- de l'étude du **LEA** dans le cadre du projet européen JEAN [45] (mesures LDV) pour un jet de diamètre $D = 5$ cm et un nombre de Mach de 0.9 (cas d'étude référencé "jet 3").
- de la simulation numérique LES effectuée par **Barré [2]**, avec $D = 2.45$ cm, $M_j = 0.9$, et des conditions turbulentes de la couche limite en sortie de buse.

Concernant les corrélations de vitesse, sont utilisés :

- les mesures par fil chaud de **Laurence [56]** pour un jet de diamètre $D \approx 9$ cm et un nombre de Mach compris entre 0.2 et 0.7.
- les résultats de **Lau [50]** obtenus par LDV dans un jet similaire à celui de Lau *et al.* [52].
- les données de **Jordan & Gervais [44]** pour un jet de diamètre $D = 5$ cm et un nombre de Mach de 0.75.
- les résultats PIV de **Bridges [17]** pour un jet de diamètre $D = 5.1$ cm et un nombre de Mach de 0.9.

Bien que l'effet d'un gradient de température soit étudié dans certains de ces travaux, seuls les résultats relatifs à un jet isotherme sont utilisés.

Liste des symboles récurrents

M_j	PIV	LDV
0.6	▼	▽
0.9	■	□

TAB. 3.1: Symboles associés à nos résultats de mesures PIV et LDV.

3.2 Conditions expérimentales

3.2.1 Installation

Cette étude a été menée dans la soufflerie anéchoïque haute-vitesse du Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Deux jets ont été considérés, l'un à un nombre de Mach M_j de 0.6 et un nombre de Reynolds Re_D de 5.2×10^5 , et l'autre à $M_j = 0.9$ et $Re_D = 7.5 \times 10^5$, $D = 38$ mm étant le diamètre du jet. Ces deux jets sont isothermes.

L'air est alimenté par un compresseur centrifuge, voir le schéma 3.1. L'écoulement est asséché pour éviter la formation de gouttelettes d'eau lors de la détente en sortie de tuyère. La pression totale p_t et la température totale T_t sont contrôlées par une vanne et un système de résistances chauffantes. Ces deux grandeurs p_t et T_t , sont mesurées par un tube de Pitot et un thermocouple placés dans la tuyère. Le nombre de Mach M_j et la température statique du jet T_j sont déterminés à l'aide des relations suivantes :

$$p_t = p_j \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$
$$T_t = T_j \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 \right)$$

La pression statique du jet p_j est supposée égale à la pression atmosphérique p_∞ , et $\gamma = 1.4$ est la constante des gaz parfaits. Le nombre de Mach de consigne, $M_j = 0.6$ ou $M_j = 0.9$, est obtenu à 3% près. Par ailleurs, l'écart entre la température statique du jet T_j et la température ambiante T_∞ est inférieur à 2°, T_∞ fluctuant d'environ 5° au cours d'une journée de mesures (campagne effectuée aux mois de novembre et décembre).

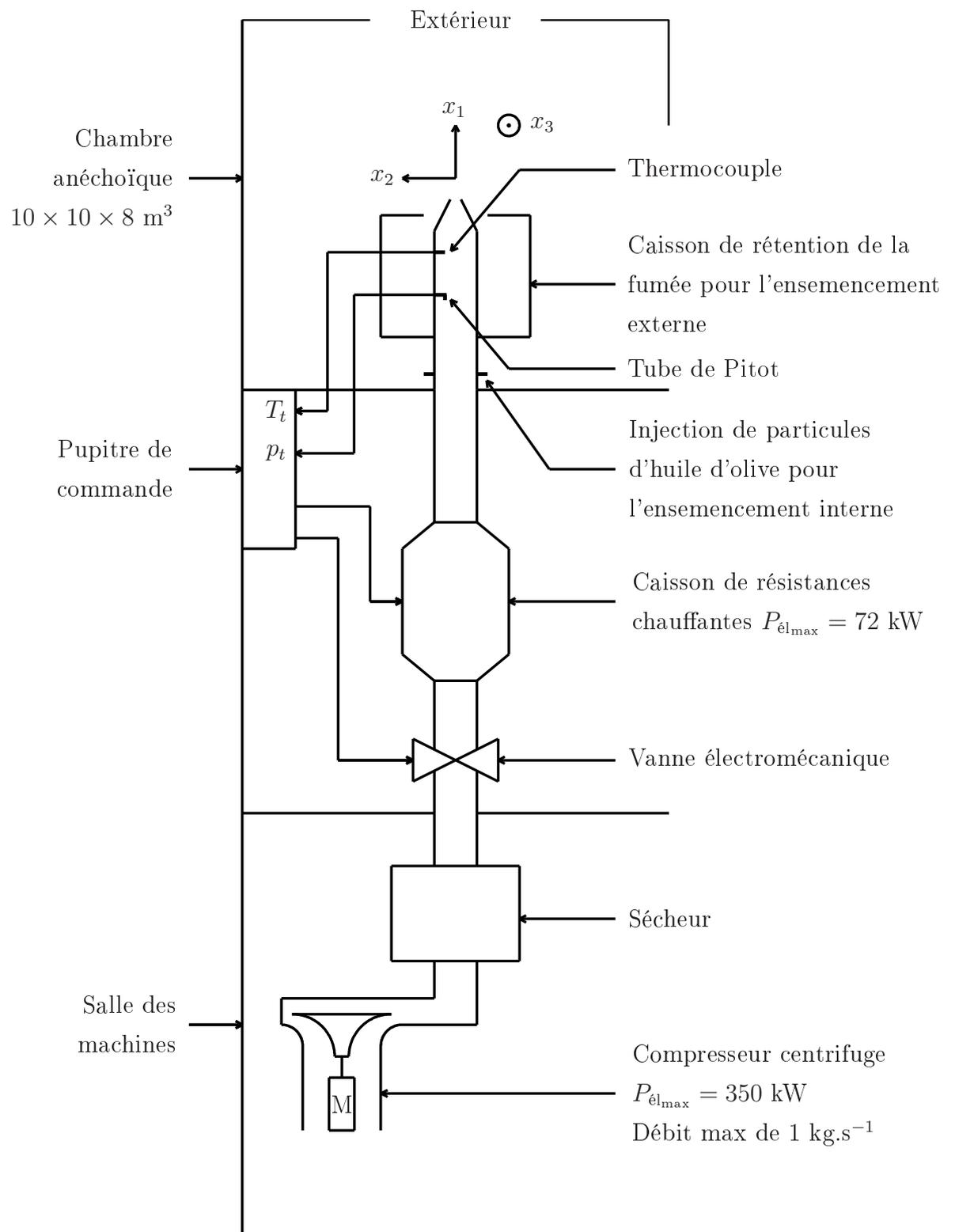


FIG. 3.1: Organisation de l'installation.

3.2.2 Instrumentation

L'évolution spatio-temporelle des corrélations de vitesse est obtenue par PIV en mesurant le champ de vitesse du jet à deux instants différents t et $t + \tau$, le retard τ représentant la variable temporelle de la fonction de corrélation. Le décalage temporel requis ($\tau \sim D/U_j \sim 0.1$ ms) étant très inférieur à la période d'acquisition minimale pour un système PIV standard (fréquence d'acquisition d'environ 4 Hz), deux systèmes couplés ont été utilisés. Chaque dispositif PIV est constitué d'un laser pulsé Nd :Yag produisant des rayons lumineux de 50 mJ à une longueur d'onde de 532 nm, voir la figure 3.2. La lumière émise est conditionnée par un ensemble optique de manière à obtenir un plan lumineux passant par l'axe du jet avec une ouverture de 14° environ. Deux caméras double trame de 1280×1024 pixels visualisent les plans lumineux sur une étendue axiale de $L_{x_1} \approx 2.25D$ et de $L_{x_2} \approx 1.77D$ dans la direction radiale, le champ étant centré radialement par rapport à l'axe du jet. Ces deux caméras sont placées côte-à-côte. Grâce à un ensemble de miroirs, celles-ci visualisent deux domaines quasiment confondus, voir la figure 3.3. En translatant l'ensemble optique et les caméras, le jet peut être visualisé entre $x_1 = 0$ et $x_1 = 11D$. Un logiciel de mesure PIV (Davies v7.1) synchronise l'acquisition des caméras avec l'émission des plans lumineux. La première caméra visualise les deux plans lumineux émis par le premier laser avec un décalage temporel δ_t de $2.6 \mu s$. Après post-traitement PIV, ces acquisitions fournissent le premier champ de vitesses instantanées. Soit t l'instant t relatif à ce champ de vitesses. À l'instant $t + \tau$, la seconde caméra visualise les deux plans lumineux émis par le second laser avec le même décalage temporel $\delta_t = 2.6 \mu s$, ce qui fournit le second champ de vitesses relatif à l'instant $t + \tau$. Pour des raisons technologiques, l'ouverture des caméras après acquisition est relativement long (12 ms) et supérieur à τ dans notre cas. La première caméra doit donc être masquée de la lumière émise par le second laser, ce qui est réalisé à l'aide d'un "shutter" placé devant l'optique de réception de cette caméra. Le calcul des champs de vitesses est effectué à l'aide du logiciel d'acquisition (Davies v7.1). Le déplacement maximal des particules entre les deux images visualisées par une caméra est approximativement de $(M_j \times c_\infty \times \delta t) \times 1280/L_{x_1} = 8$ pixels pour $M_j = 0.6$ et de 12 pixels pour $M_j = 0.9$, soit $1/4$ de la taille de la fenêtre d'interrogation pour $M_j = 0.6$ (fenêtres de 32×32 pixels) et environ $1/3$ pour $M_j = 0.9$. Dans les régions de faibles vitesses, à l'extérieur du jet, le déplacement des particules est néanmoins beaucoup plus petit et l'on peut craindre une forte incertitude sur l'estimation du déplacement des particules. Comme le montrent les résultats présentés par la suite, cette difficulté ne semble toutefois pas être pénalisante pour le logiciel de calcul PIV. La procédure de calcul utilise une méthode recursive qui consiste à diminuer successivement la taille de la fenêtre d'interrogation, de 124×124 pixels à 32×32 pixels. En utilisant un recouvrement des fenêtres d'interrogation de 50%, un vecteur vitesse est déterminé tous les $0.5 \times 32 = 16$ pixels, soit $L_x \times 16/1280 = 1.07$ mm = $0.028D$.

Le jet estensemencé par des particules d'huile d'olive produites par deux générateurs conçus au Centre Acoustique. Le diamètre de ces particules a été estimé par Granulométrie Phase Doppler, hors écoulement. Bien que cette technique ne soit pas adaptée à la mesure de particules de tailles micrométriques, on estime leur diamètre à environ $1 \mu\text{m}$. Un second système a été utilisé pourensemencer l'air extérieur. Dans ce cas, la fumée est produite par un générateur du commerce et collectée dans un vaste caisson disposé autour de la tuyère. Une ouverture circulaire située en amont de la sortie de buse permet à la fumée de s'échapper du caisson, pour être ensuite entraînées par le jet, voir la figure 3.2. L'ajustement de l'ensemencement externe est toutefois très délicat du fait des fluctuations de vitesse à la périphérie du jet. La qualité de l'ensemencement peut être jugée à partir des visualisations de particules montrées à la figure 3.4. Par ailleurs, un champ de vitesse instantané est montré à la figure 3.5.

Pour comparer les résultats PIV, des mesures par Vélocimétrie Laser Doppler ont également été effectuées dans des conditions expérimentales identiques et avec le même dispositif d'ensemencement. Le système LDV est utilisé en diffusion avant. Pour chaque point de mesure, environ 4×10^6 échantillons de vitesses instantanées (axiales et radiales) ont été acquis, à une fréquence d'environ 15 kHz.

Des mesures par tube de Pitot (tube de 1 mm de diamètre) sont également utilisées pour la comparaison des vitesses moyennes axiales.



FIG. 3.2: Système de couplage des lasers.



FIG. 3.3: Caisson d'ensemencement externe et système de couplage des caméras.

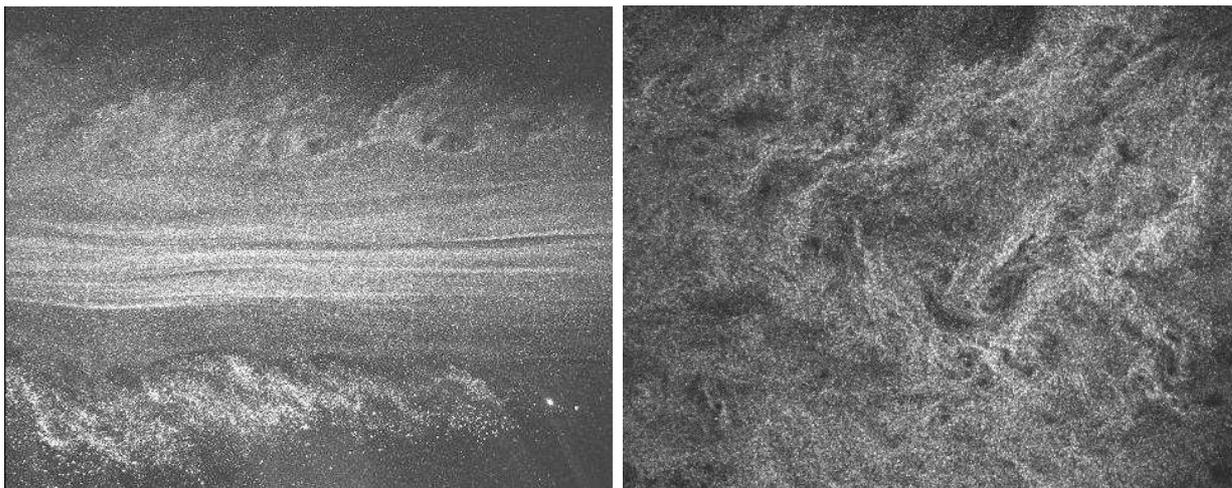


FIG. 3.4: Visualisations de l'ensemencement ($M_j = 0.9$). À gauche : $D < x_1 < 3D$. À droite : $9D < x_1 < 11D$. Le jet va de la droite vers la gauche.

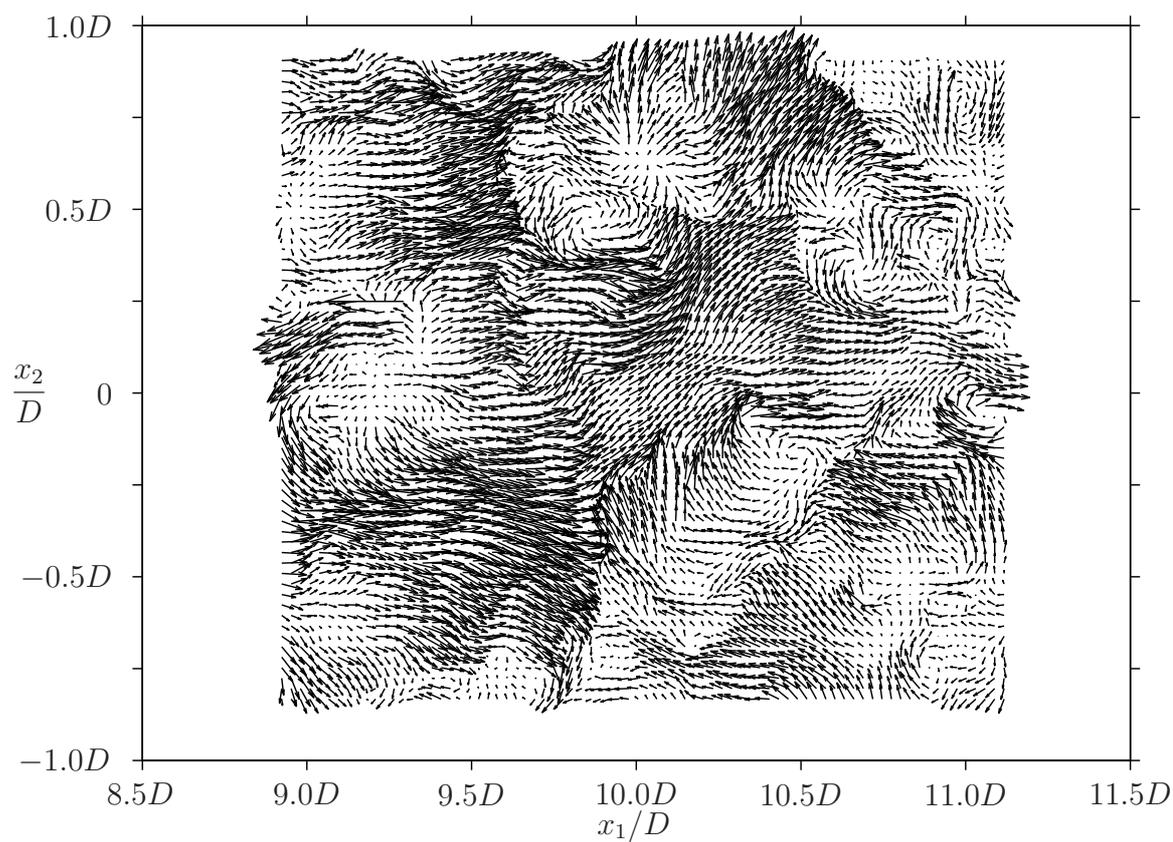


FIG. 3.5: Exemple de champ de vitesse instantanée ($M_j = 0.9$). Le champ moyen est soustrait au champ instantané.

3.3 Vitesses moyennes et fluctuantes

Les vitesses moyennes et fluctuantes sont mesurées à l'aide d'un seul des deux systèmes PIV. Pour explorer le champ de vitesse sur une étendue axiale de $11D$, six déplacements sont effectués. Un domaine de recouvrement est assuré entre deux champs consécutifs pour pouvoir raccorder les statistiques.

3.3.1 Vitesse dans la couche de cisaillement

Pour caractériser la couche de cisaillement du jet, l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ a été déterminée pour plusieurs positions axiales x_1 :

$$\delta_\theta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{U_1}{U_j} \left(1 - \frac{U_1}{U_j}\right)}_{T_\theta} dx_2 \quad (3.1)$$

La procédure de calcul de δ_θ est illustrée par la figure 3.6. Le résultat est fourni à la figure 3.7. L'évolution axiale de δ_θ est relativement linéaire et présente un taux de croissance $d\delta_\theta/dx$ de 0.029 pour $M_j = 0.6$ et de 0.026 pour $M_j = 0.9$. La comparaison avec les résultats obtenus par LDV en $x_1 = 3D$ et en $x_1 = 6D$ présente un bon accord. À proximité de la buse, la résolution spatiale de la PIV ne permet pas de déterminer δ_θ . L'épaisseur de quantité de mouvement initiale ($x_1 = 0$) est obtenue en extrapolant linéairement l'évolution de $\delta_\theta(x_1)$. On trouve une valeur voisine de $10^{-3} \times D$ pour les deux nombres de Mach.

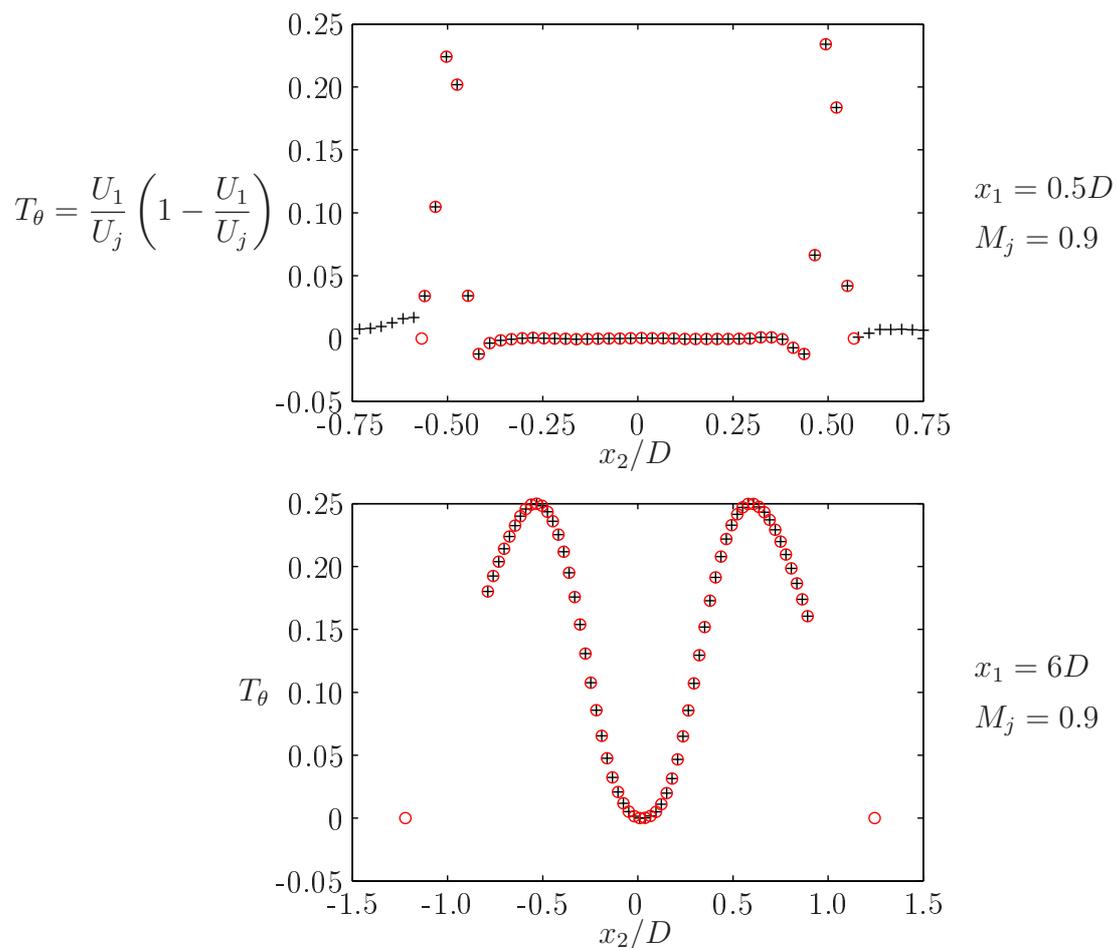


FIG. 3.6: Calcul de la quantité de mouvement δ_θ . L'intégration de T_θ est effectuée à partir des points indiqués par les symboles en rouge. À l'extérieur du jet $|x_2| > D/2$, les points expérimentaux sont limités aux valeurs de T_θ supérieures à 0.02. L'annulation de T_θ est extrapolée linéairement.

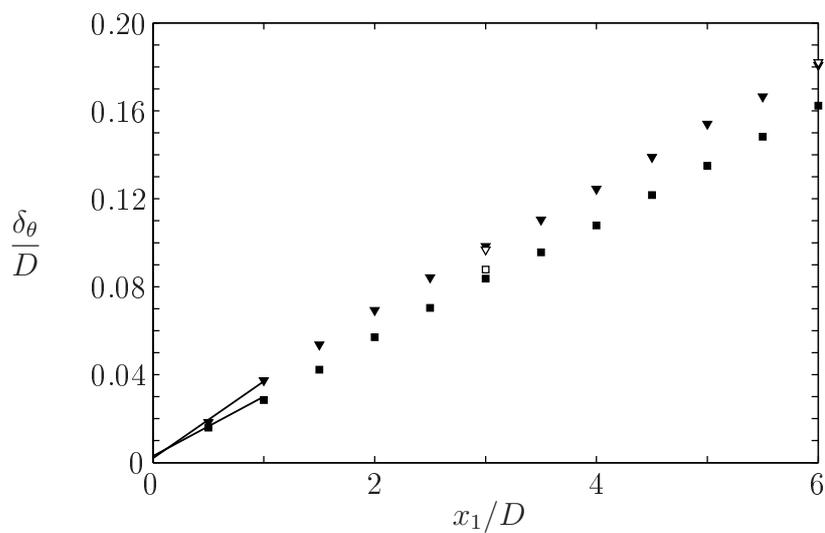


FIG. 3.7: Évolution axiale de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ .

Pour comparer les profils radiaux de la vitesse U_1 entre différentes positions axiales x_1 le long du cône potentiel et différentes configurations de jet, la coordonnée adimensionnée $\eta = [x_2 - (x_2)_{1/2}]/\delta_\theta$ est utilisée, la position $(x_2)_{1/2}$ représentant la coordonnée radiale de vitesse $U_j/2$. Les profils de $U_1(\eta)$ sont tracés à la figure 3.8. Les mesures PIV sont conformes aux résultats obtenus par LDV et par tube de Pitot. La comparaison avec les données du LEA et les résultats de la simulation numérique de Barré [2] est également satisfaisante. Les mesures de Lau *et al.* [52] sont aussi superposées. Celles-ci sont extraites de la figure 22 de la référence [52], où le profil de vitesse U_1/U_j est représenté en fonction de la variable radiale $\sigma\eta^*$, où σ est le paramètre d'évasement de Görtler et $\eta^* = [x_2 - (x_2)_{1/2}]/x_1$. Pour pouvoir exprimer ces données en fonction de la variable η , on utilise la relation rappelée dans [52] : $\sigma = \sqrt{\pi}/\delta_\eta$, δ_η étant défini comme l'inverse du gradient maximal de $U_1(\eta^*)/U_j$. Avec le profil de vitesse suivant :

$$\frac{U_1}{U_j} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{D}{4\delta_\theta} \left(\frac{2x_2}{D} - 1 \right) \right] \right\} \quad (3.2)$$

on montre que $\delta_\eta x_1 = 4\delta_\theta$ et on obtient finalement la relation suivante :

$$\sigma\eta^* = 4\eta/\sqrt{\pi}$$

ce qui nous permet d'utiliser les données fournies par Lau. Comme le montre la figure 3.8, le profil de Lau *et al.* [52] obéit effectivement à l'évolution en tangente hyperbolique (3.2)¹. Une autre modélisation des profils de vitesse peut également être utilisée, notamment dans le cas d'une couche de cisaillement épaisse, voir Morris [66] :

$$\frac{U_1}{U_j} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{D}{8\delta_\theta} \left(\frac{2x_2}{D} - \frac{D}{2x_2} \right) \right] \right\} \quad (3.3)$$

Ce profil est tracé à la figure 3.8 pour $\delta_\theta/D = 0.2$. On constate un meilleur accord avec nos résultats. Les profils de vitesse mesurés par PIV en $x_1 = 6D$ et $x_1 = 10D$ (en aval du cône potentiel) sont également validés par LDV, voir la figure 3.9.

¹La présentation de ce résultat n'est pas logique puisque le profil (3.2) est utilisé pour représenter les données de Lau *et al.* [52]. Pour introduire ce résultat différemment, on affirme que le paramètre $\alpha = \sigma\eta^*/\eta$ faisant correspondre au mieux (au sens des moindres carrés) les données de Lau *et al.* avec nos résultats, est bien voisin de $4/\sqrt{\pi}$, ce qui justifie notre représentation des mesures de Lau, et ce commentaire.

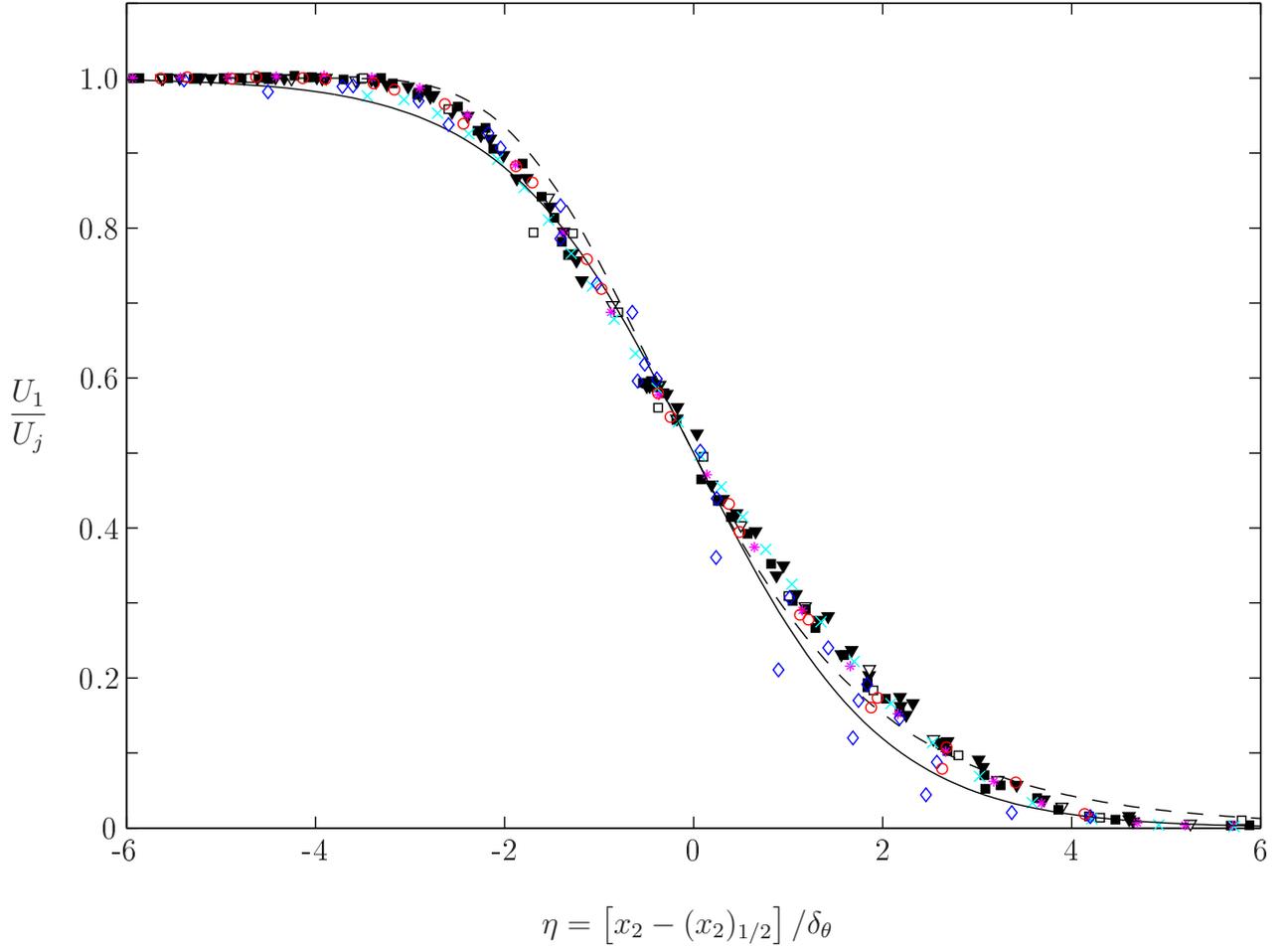


FIG. 3.8: Profils radiaux de la vitesse axiale moyenne U_1 , pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Les profils mesurés par PIV sont tracés tous les $\Delta x_1 = D/2$, de $x_1 = D$ à $x_1 = 4D$. Les profils obtenus par LDV ont été mesurés en $x_1 = 3D$. Pour le tube de Pitot (*), le profil concerne la position $x_1 = 2D$. Les données du LEA (\circ) sont relatives aux positions $x_1 = D$ et $x_1 = 2.5D$. Le profil fourni par Lau *et al.* (\diamond) a été mesuré pour une position x_1 entre $2D$ et $8D$, voir la figure 22 de la référence [52]. La distribution obtenue numériquement par Barré [2] (\times) concerne la position $x_1 = 3D$. Le profil modèle donné par l'expression (3.2) est tracé en trait plein (—). Le profil (3.3) est également représenté (- - -), pour $\delta_\theta/D = 0.2$.

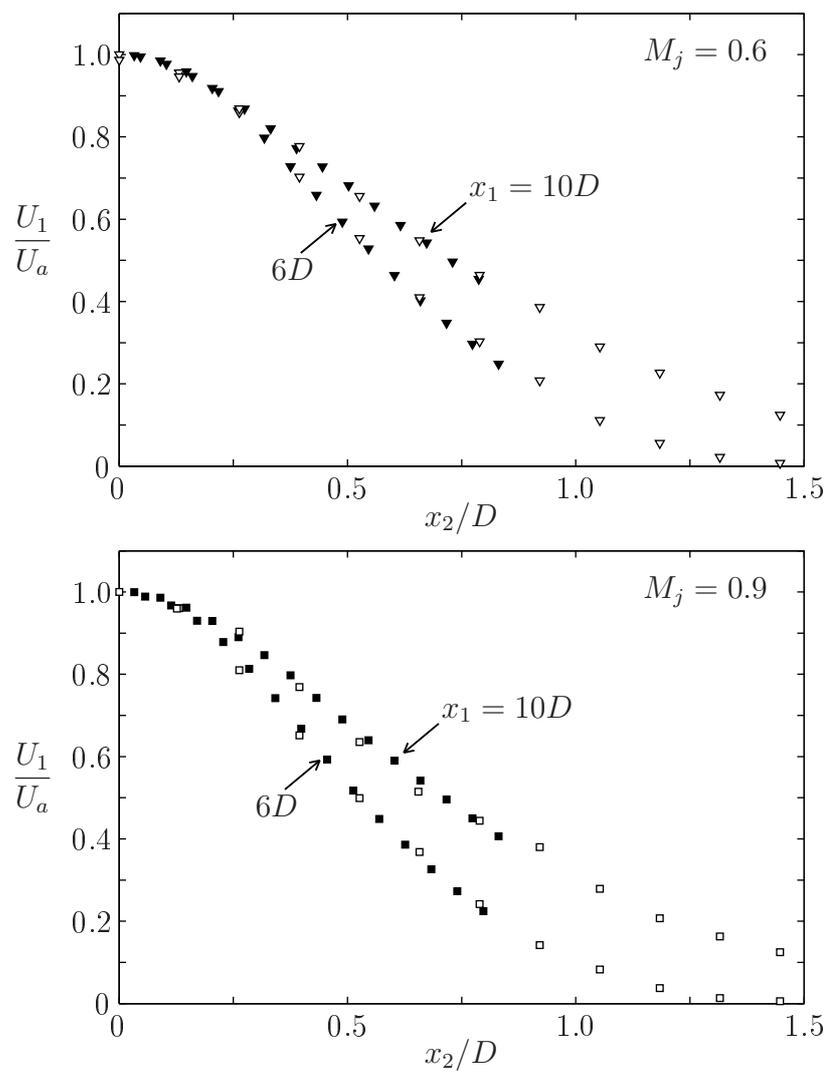


FIG. 3.9: Profils radiaux de la vitesse axiale moyenne U_1 pour $x_1 = 6D$ et $x_1 = 10D$. La vitesse U_a est la vitesse sur l'axe du jet, en $x_2 = 0$ et en la position x_1 considérée.

Les profils radiaux des vitesses fluctuantes u_1 et u_2 sont présentés à la figure 3.10 pour $2D < x_1 < 5D$. La normalisation de u_1 et u_2 par les maxima de fluctuations dans la couche de cisaillement ($u_{1M}(x_1)$ et $u_{2M}(x_1)$) permet de confronter les distributions mesurées avec des données de référence. Concernant la vitesse u_1 , les mesures par PIV se comparent favorablement aux données obtenues par LDV ainsi qu'aux résultats du LEA et de la simulation numérique de Barré [2]. Le profil analytique proposé par Lau [51] est également superposé : $u_1/u_{1M} = \exp(-0.70[\sigma\eta^{**}]^2)$. La variable spatiale η^{**} correspond à $(x_2 - x_{2M})/x_1$, où x_{2M} est la position x_2 du maximum de fluctuation $u_1(x_{2M}) = u_{1M}$. En confondant x_{2M} et $(x_2)_{1/2}$, on obtient comme précédemment la relation $\eta = \eta^{**}\sqrt{\pi}/4$. Ainsi :

$$\frac{u_1}{u_{1M}} = \exp\left(-0.70\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta^2\right) \quad (3.4)$$

Comme le montre la figure 3.10, cette expression fournit une bonne représentation de l'évolution de la vitesse fluctuante dans la région interne de la couche de cisaillement $\eta < 0$. À l'extérieur $\eta > 0$, ce modèle sous-estime en revanche fortement les niveaux mesurés. Concernant la vitesse fluctuante u_2 , la comparaison des mesures PIV et LDV montre un très bon accord. Ces mesures sont également confirmées par les données du LEA, du moins dans la zone de cisaillement. Comme pour le profil radial de la vitesse u_1 , on propose de modéliser la distribution de u_2/u_{2M} par un profil gaussien pour $\eta < 0$. Dans ce cas, on trouve empiriquement :

$$\frac{u_2}{u_{2M}} = \exp\left(-0.50\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta^2\right) \quad (3.5)$$

Dans la région externe $\eta > 0$, cette loi d'évolution présente néanmoins les mêmes lacunes que pour la vitesse u_1 .

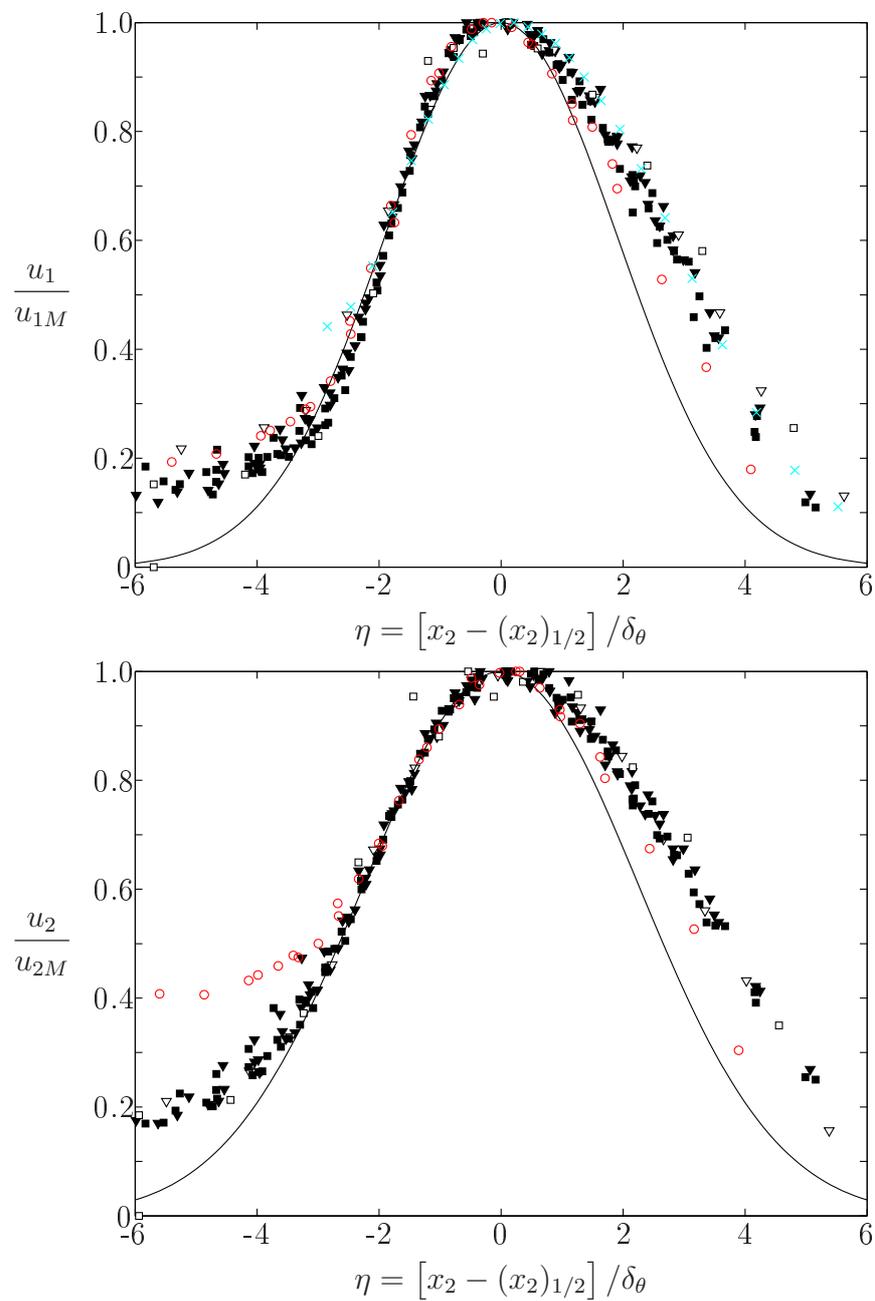


FIG. 3.10: Profils radiaux des vitesses fluctuantes u_1 et u_2 ($M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$). Pour la PIV, les profils sont tracés tous les $\Delta x = D/2$, de $x_1 = 2D$ à $x_2 = 5D$. Pour la LDV, les profils ont été mesurés en $x_1 = 3D$. Les données du LEA (\circ) concernent les positions $x_1 = 2.5D$ et $x_1 = 5D$. Les profils gaussiens (3.4) et (3.5) sont également tracés (—), pour u_1 et u_2 respectivement.

L'évolution axiale de l'intensité maximale des fluctuations de vitesse dans la couche de cisaillement u_{1M} et u_{2M} est présentée à la figure 3.11. Le taux de turbulence u_{1M}/U_j est relativement constant pour $x_1 > D/2$ et proche 16%. Les résultats du LEA indiquent un niveau légèrement plus élevé, autour de 18%. Cette grandeur est toutefois relativement sensible aux conditions initiales de la couche de cisaillement, voir par exemple Hussain & Zedan [42, 41]. L'intensité de la vitesse fluctuante u_{2M}/U_j converge plus en aval que pour la vitesse axiale u_1 . Pour $M_j = 0.6$, u_{2M}/U_j croît rapidement depuis la sortie de buse, jusqu'à atteindre un (léger) maximum en $x_1 \approx D$ et converger plus en aval autour d'une valeur proche de 10%. Cette évolution est typique de conditions initiales laminares. Ce résultat est toutefois surprenant compte tenu du nombre de Reynolds élevé de l'écoulement. Pour $M_j = 0.9$, la croissance initiale de u_{2M} est beaucoup plus lente et le taux de turbulence ne converge qu'en aval de $x_1 = 2.5D$, autour de 10% aussi.

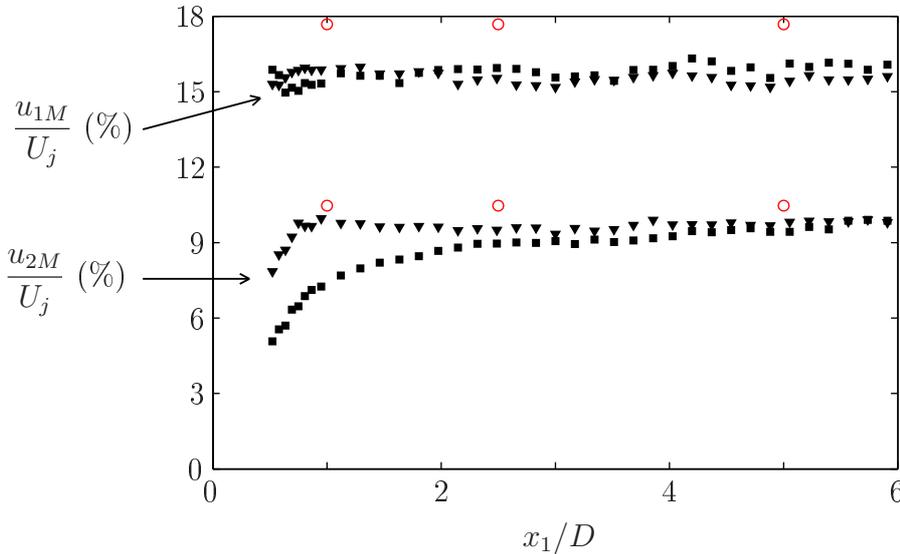


FIG. 3.11: Évolution axiale du niveau maximal des fluctuations de vitesses u_1 et u_2 dans la couche de cisaillement. Les données obtenues par le LEA (\circ) sont également représentées.

3.3.2 Vitesse sur l'axe du jet

En définissant la taille du cône potentiel L_c comme la distance pour laquelle la vitesse moyenne U_1 sur l'axe du jet est inférieure à 95% de la vitesse en sortie de buse U_j , on obtient une longueur L_c voisine de $6.5D$ pour $M_j = 0.6$ et de $7D$ pour $M_j = 0.9$. Suffisamment en aval du cône potentiel, la vitesse U_1 sur l'axe décroît généralement selon une loi de la forme $U_1 = U_j bD/(x_1 - x_{10})$. Afin de mettre aisément en évidence cette évolution pour nos résultats, l'inverse de U_1/U_j est représenté à la figure 3.12. On en déduit effectivement le bon accord avec

cette loi de décroissance algébrique et l'on trouve des valeurs de b et x_{10} voisines de 9 et $-2D$ respectivement pour $M_j = 0.6$ et autour de 10 et $-3D$ respectivement pour $M_j = 0.9$. Comme le montre par ailleurs la figure 3.12, les résultats obtenus par PIV sont validés par les autres techniques expérimentales utilisées (LDV et tube de Pitot) ainsi que par les données du LEA, de Lau *et al.* [52] et les résultats numériques de Barré [2].

L'évolution des vitesses fluctuantes u_1 et u_2 au centre du jet est représentée à la figure 3.13. La comparaison des données PIV et LDV est très satisfaisante, excepté pour u_1 en aval du cône potentiel lorsque $M_j = 0.9$. Dans ce cas, les niveaux obtenus par LDV indiquent un taux de turbulence anormalement faible. Nos mesures PIV sont par ailleurs validées par les données de Lau *et al.* [52] pour u_1 et u_2 . La comparaison avec les mesures du LEA pour u_1 présente également un bon accord. On note un écart significatif concernant la composante u_2 pour $(x_1 - L_c)/D < -2$, les niveaux obtenus plus en aval étant relativement proches de nos résultats.

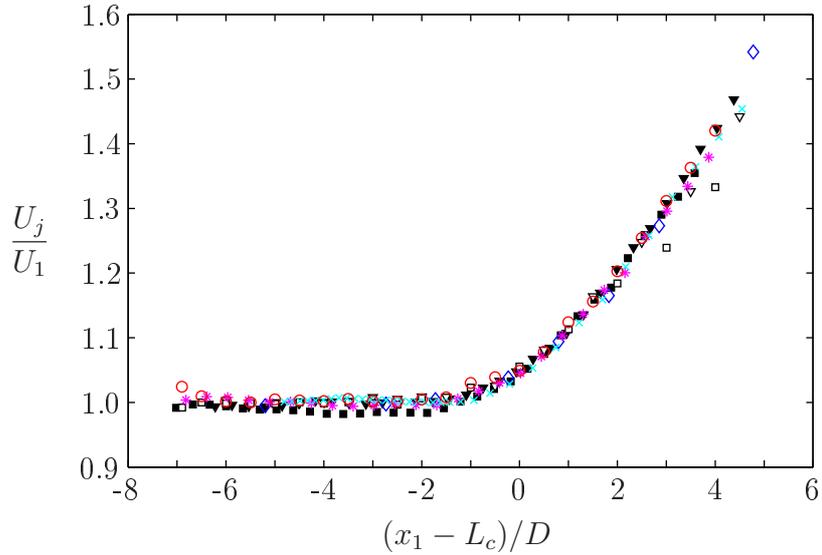


FIG. 3.12: Évolution axiale de la vitesse moyenne U_1 au centre du jet, pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. La grandeur L_c représente la taille du cône potentiel. Sont tracés, nos résultats obtenus par PIV, LDV et par tube de Pitot ($*$) ainsi que les données du LEA (\circ), de Lau *et al.* (\diamond) (voir la figure 15 à la référence [52]) et de Barré [2] (\times).

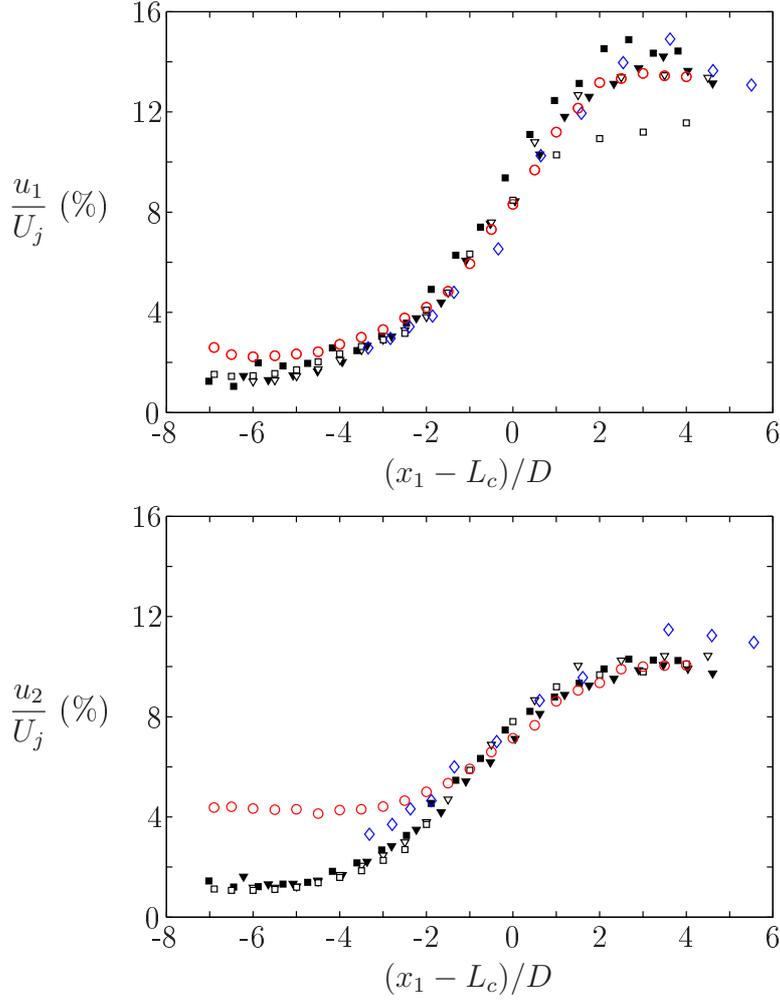


FIG. 3.13: Évolution axiale des vitesses fluctuantes u_1 et u_2 au centre du jet, pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Nos résultats sont comparés aux mesures du LEA (\circ) et de Lau *et al.* [52] (\diamond).

3.3.3 Champs de vitesse

Pour obtenir le champ de la vitesse moyenne U_1 sur toute l'étendue x_1 entre 0 et $11D$, les six champs PIV mesurés en différentes positions x_1 ont été raccordés deux à deux. Un écart d'environ 2% est constaté dans la zone de recouvrement de deux champs consécutifs. Pour compenser ce biais, les six champs de vitesse ont été déformés très légèrement selon une loi linéaire :

$$U_1(x_1, x_2) \leftarrow (Ax_1 + B) \times U_1(x_1, x_2)$$

Le résultat est présenté à la figure 3.14.

Concernant les vitesses fluctuantes u_1 et u_2 , aucun écart significatif n'a été détecté entre deux champs consécutifs. Dans ce cas, le raccord des statistiques a été effectué en moyennant les données des champs PIV dans la zone de recouvrement. Le résultat est montré aux figures 3.15 et 3.16 pour u_1 et u_2 respectivement.

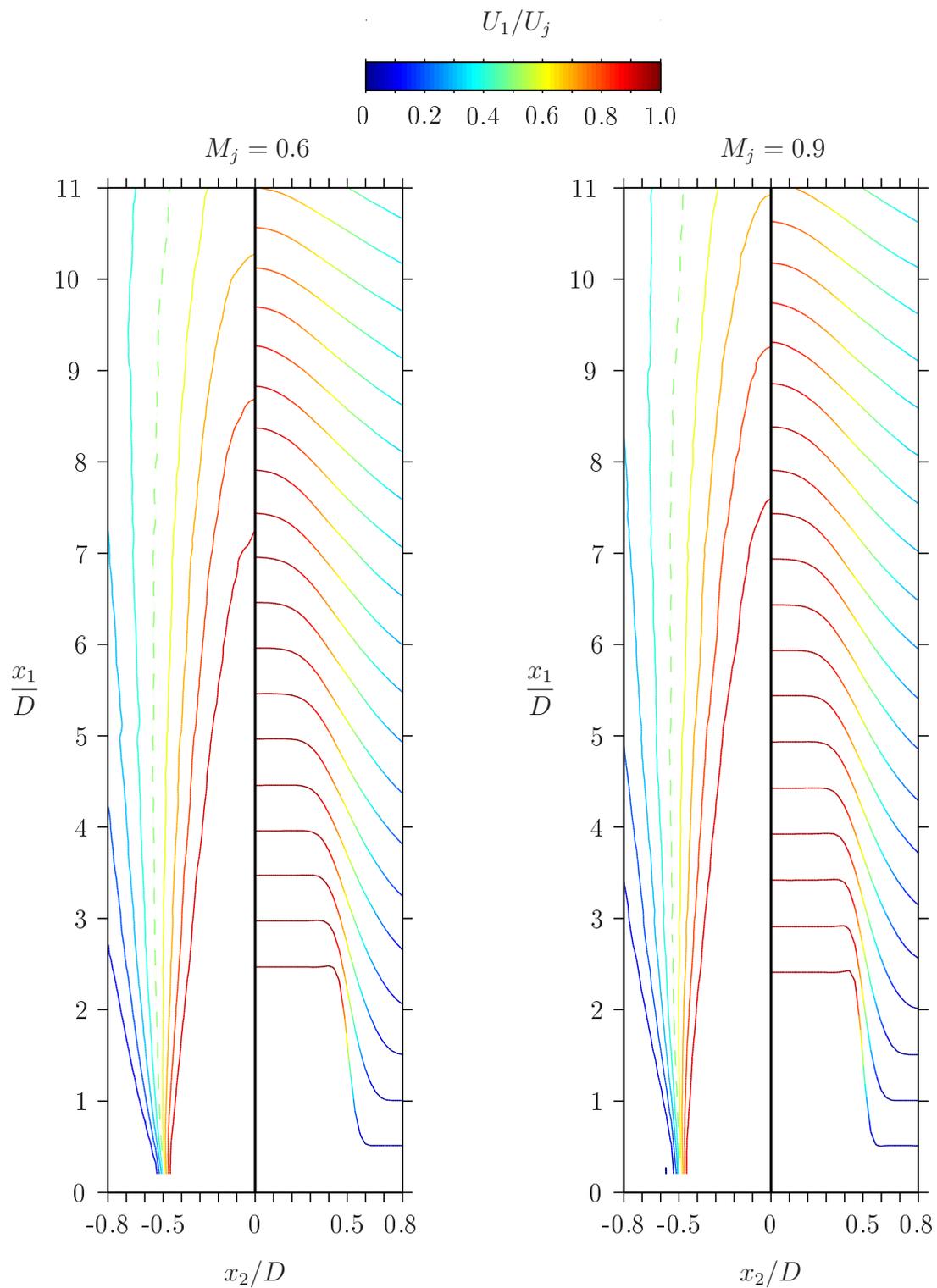


FIG. 3.14: Cartographies de la vitesse axiale moyenne U_1 pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Le niveau des contours d'iso-vitesses U_1/U_j varie avec un pas de 10%. Les courbes en pointillés représentent l'iso-vitesse $U_1/U_j = 0.5$. Les profils radiaux sont tracés tous les $\Delta x_1 = D/2$, de $x_1 = D/2$ à $x_1 = 11D$.

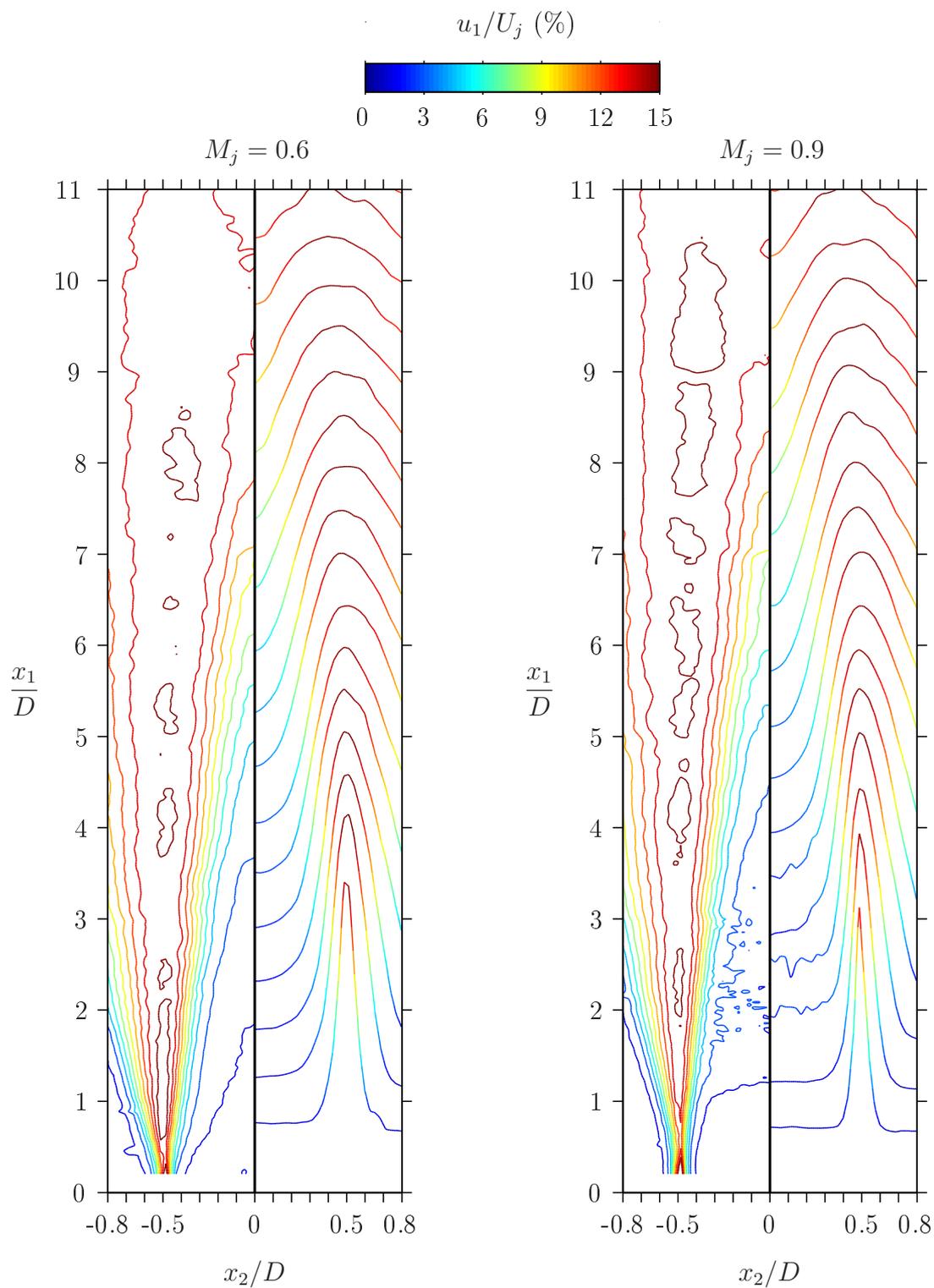


FIG. 3.15: Cartographies de la vitesse axiale fluctuante u_1 pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Le niveau des iso-contours de fluctuations u_1/U_j varie avec un pas de 1.5%, le niveau maximal représenté étant de 15%. Les profils radiaux sont tracés tous les $\Delta x_1 = D/2$, de $x_1 = D/2$ à $x_1 = 11D$.

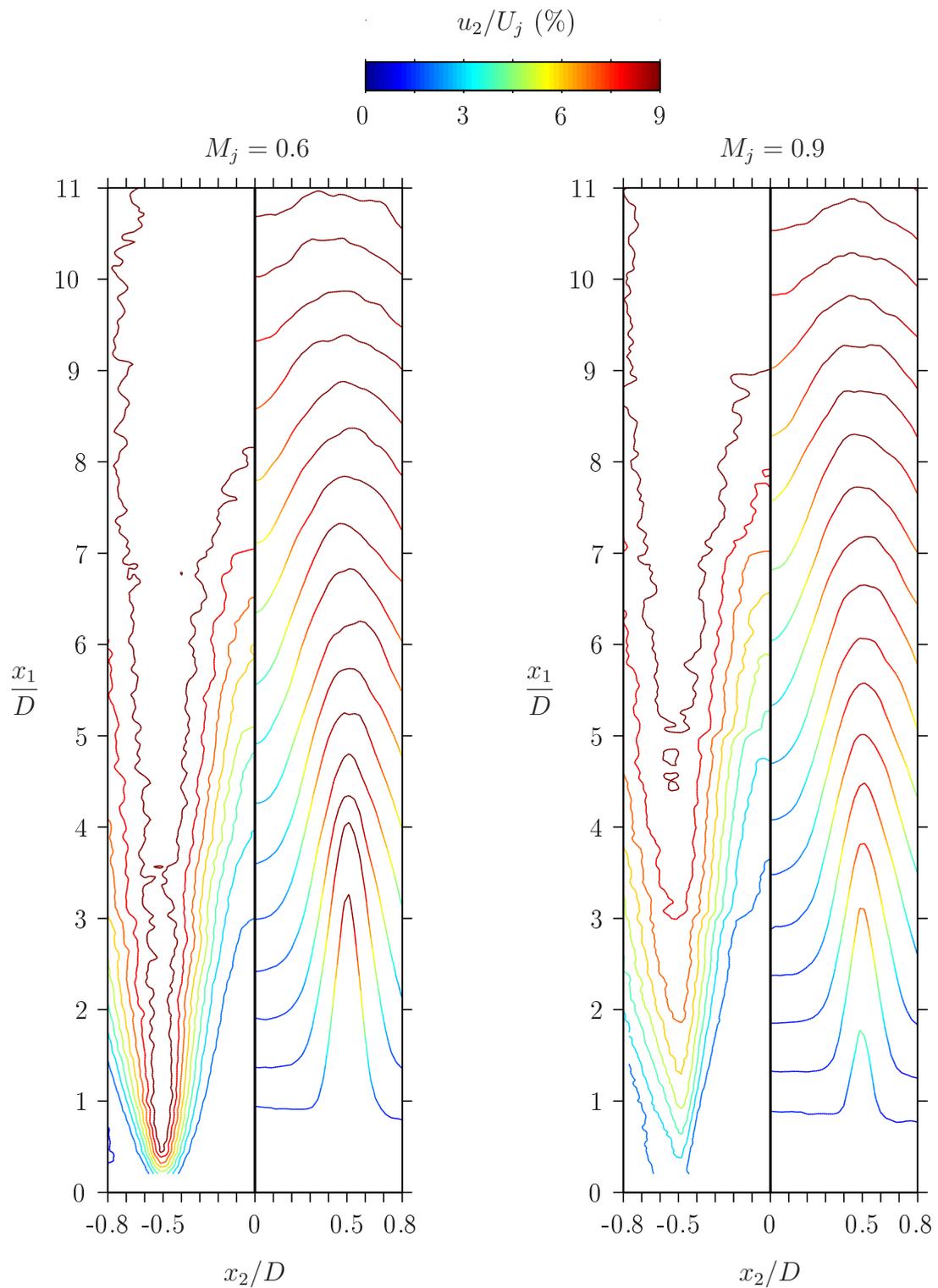


FIG. 3.16: Cartographies de la vitesse axiale fluctuante u_2 pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Le niveau des iso-contours de fluctuations u_2/U_j varie avec un pas de 1%, le niveau maximal représenté étant de 9%. Les profils radiaux sont tracés tous les $\Delta x_1 = D/2$, de $x_1 = D/2$ à $x_1 = 11D$.

3.4 Corrélations spatio-temporelles des vitesses en deux points

Nous nous intéressons ici à la corrélation des composantes de vitesses mesurées en deux points et à deux instants (éventuellement) différents. On définit le coefficient de corrélation spatio-temporelle R_{ij} entre les vitesses fluctuantes u_i et u_j de la façon suivante :

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}, \tau) = \frac{\langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{\xi}, t + \tau) \rangle}{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{\xi})} \quad (3.6)$$

L'opérateur $\langle \cdot \rangle$ est la moyenne par rapport à la variable temporelle t ou au nombre d'échantillons mesurés, en supposant la turbulence stationnaire et ergodique. Comme précédemment, lorsque la variable temporelle est omise, $u_i(\vec{x})$ représente la valeur efficace de la fluctuation temporelle $u_i(\vec{x}, t)$: $u_i(\vec{x}) = \sqrt{\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle^2}$. Pour un retard nul $\tau = 0$ et un déplacement nul $|\vec{\xi}| = 0$, R_{ij} est égale à +1. Nous nous intéressons uniquement aux composantes normales R_{ii} (sans sommation implicite dans ce qui suit).

Dans un écoulement turbulent, la région de corrélation non nulle est compacte et l'on peut caractériser son étendue dans la direction x_k par une échelle intégrale de longueur $L_{ii}^{(k)}$ définie comme suit :

$$L_{ii}^{(k)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ii}(\vec{x}, \xi_k, \tau = 0) d\xi_k$$

De même, dans un écoulement turbulent, la durée $\tau < \tau_{\max}$ pour laquelle le niveau de corrélation est non nul est limitée et l'on peut associer une échelle intégrale de temps $\tau_{c_{ii}}$ à la décroissance du maximum de corrélation $R_{ii_M}(\vec{x}, \tau) = \max_{\vec{\xi}} (R_{ii}[\vec{x}, \vec{\xi}, \tau])$:

$$\tau_{c_{ii}}(\vec{x}) = \int_0^{+\infty} R_{ii_M}(\vec{x}, \tau) d\tau$$

L'interprétation de ces échelles intégrales est généralement liée aux caractéristiques de la turbulence, notamment à l'étendue du domaine corrélé et à la durée de vie de la turbulence.

L'analyse des corrélations spatio-temporelles permet également d'estimer la vitesse de convection de la turbulence :

$$\vec{U}_c = \frac{\partial \vec{\xi}_{M_{ii}}}{\partial \tau}$$

où $\vec{\xi}_{M_{ii}}$ est la position du maximum de corrélation $R_{ii}(\vec{x}, \vec{\xi}_{M_{ii}}, \tau) = R_{ii_M}(\vec{x}, \tau)$. La vitesse de convection \vec{U}_c est indépendante de la composante de corrélation R_{ii} choisie et la définition précédente est donc licite. La longueur formée à partir de la vitesse U_c et du temps $\tau_{c_{ii}}$:

$$l_{ii} = U_c \tau_{c_{ii}}$$

représente l'étendue parcourue par la turbulence lors de sa convection. Entre deux points séparés d'une distance supérieure à l_{ii} , les fluctuations turbulentes sont relativement indépendantes quelque soit le retard de convection.

L'objectif de cette étude est de déterminer les grandeurs intégrales $L_{ii}^{(k)}$ et τ_{ii} ainsi que les vitesses de convection \vec{U}_c et les distances d'extinction de la turbulence l_{ii} . Le point de référence \vec{x} est choisi soit au centre de la couche de cisaillement soit sur l'axe du jet. Dans les études trouvées dans la littérature offrant des données de comparaisons, d'autres définitions du coefficient de corrélation R_{ij} peuvent être utilisées. On peut trouver en particulier :

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}, \tau) = \frac{\langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{\xi}, t + \tau) \rangle}{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x})} \quad (3.7)$$

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}, \tau) = \frac{\langle u_i(\vec{x} - \vec{\xi}/2, t) u_j(\vec{x} + \vec{\xi}/2, t + \tau) \rangle}{u_i(\vec{x} - \vec{\xi}/2) u_j(\vec{x} + \vec{\xi}/2)} \quad (3.8)$$

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}, \tau) = \frac{\langle u_i(\vec{x} - \vec{\xi}/2, t) u_j(\vec{x} + \vec{\xi}/2, t + \tau) \rangle}{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x})} \quad (3.9)$$

Pour pouvoir malgré tout utiliser comme données de référence les résultats mentionnés dans la littérature, les échelles de longueurs et de temps fournies par les différentes définitions de R_{ij} sont comparées. Les écarts constatés ne sont fort heureusement pas significatifs. À la suite de cette vérification, la définition de R_{ij} utilisée dans cette étude est celle donnée par l'expression (3.6).

3.4.1 Corrélations spatiales

Corrélations au centre de la couche de cisaillement

Pour expliquer le protocole utilisé pour calculer les échelles intégrales, un exemple de résultat de mesure du coefficient de corrélation R_{11} est présenté à la figure 3.17. Le point de référence \vec{x} est situé au centre de la couche de cisaillement et en $x_1 = 6D$. Pour limiter le biais dû à l'étendue nécessairement restreinte du domaine de mesure, l'intégration de R_{11} est réduite aux valeurs positives du coefficient de corrélation. Si néanmoins, pour certains points, l'annulation du coefficient de corrélation n'est pas mesurée, celle-ci est estimée par extrapolation linéaire des données obtenues au bord du domaine de mesure. Dans ce cas, nous avons pris soin de vérifier que l'estimation fournie est acceptable. Signalons par ailleurs que les échelles de longueurs $L_{ii}^{(k)}$ sont obtenues en intégrant uniquement les points mesurés, sans recourir à un quelconque modèle de décroissance de R_{ii} . L'intégration est effectuée par la méthode des trapèzes. La valeur des échelles intégrales indiquées à la figure 3.17 a été obtenue avec la définition (3.6).

Cette démarche a été appliquée de manière identique pour les définitions (3.6) à (3.9) du coefficient de corrélation. La comparaison des échelles de longueurs obtenues au centre de la

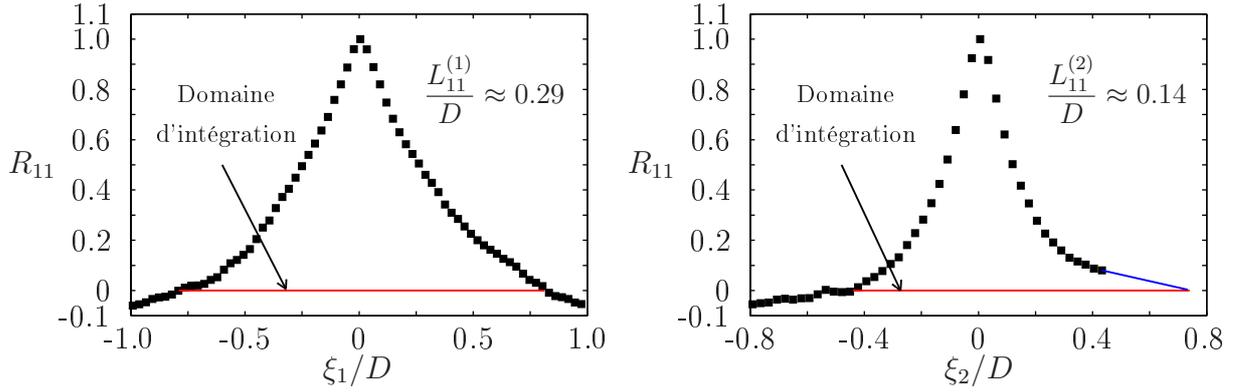


FIG. 3.17: Illustration de la procédure de calcul des échelles intégrales : exemple des échelles $L_{11}^{(k)}$. Le point de référence \vec{x} est situé au centre de la couche de cisaillement, en $x_1 = 6D$. Le nombre de Mach du jet M_j est de 0.9. L'intégration de R_{11} est effectuée sur le domaine ξ_k tel que $R_{11} > 0$. Si la position de l'annulation du coefficient de corrélation n'est pas mesurée, celle-ci est extrapolée linéairement.

couche de cisaillement est présentée à la figure 3.18 pour quelques points de référence. Les résultats concernant $L_{11}^{(1)}$, $L_{11}^{(2)}$ et $L_{22}^{(1)}$ sont relativement indépendants de la définition choisie. L'échelle $L_{22}^{(2)}$ présente en revanche des disparités significatives. Les définitions (3.6) et (3.8) d'une part, et (3.7) et (3.9) d'autre part, fournissent toutefois des échelles de longueurs $L_{22}^{(2)}$ relativement similaires. Le désaccord entre ces définitions est attribué à la différence des niveaux de fluctuations mesurés en $\vec{x} + \vec{\xi}$ ou en $\vec{x} \pm \vec{\xi}/2$ et utilisés, selon la définition, pour la normalisation de la variance des vitesses. Les résultats présentés dans ce qui suit sont obtenus avec la définition (3.6) uniquement.

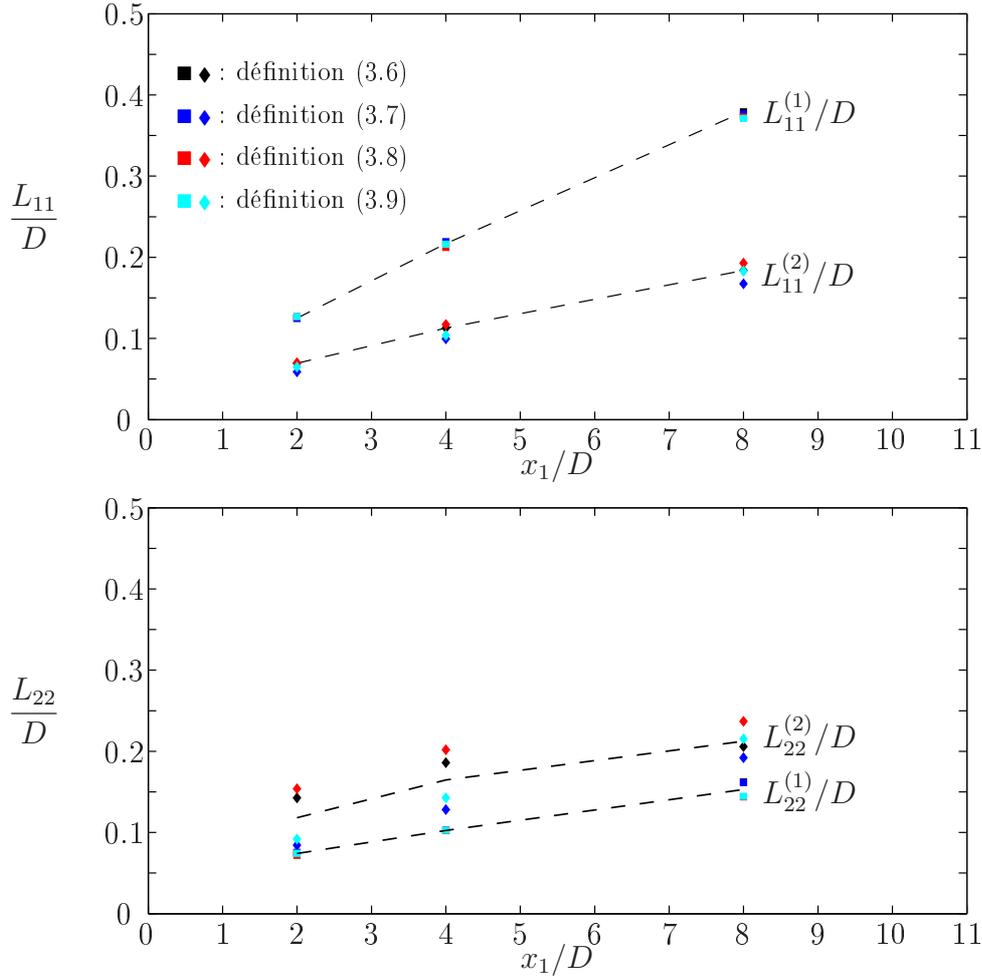


FIG. 3.18: Comparaison des échelles de longueurs $L_{ii}^{(k)}$ en fonction de la définition de R_{ii} . Le point de référence \vec{x} est situé au centre de la couche de cisaillement et le nombre de Mach du jet est de 0.9.

Des cartographies de corrélations spatiales mesurées au centre de la couche de cisaillement sont présentées aux figures 3.19 et 3.20 concernant R_{11} et aux figures 3.21 et 3.22 pour R_{22} , le nombre de Mach du jet M_j étant de 0.9. Concernant R_{11} , les courbes d'iso-niveaux sont relativement ellipsoïdales au voisinage du point de référence et les axes principaux de ces ellipses sont légèrement inclinés par rapport aux directions caractéristiques du jet x_1 et x_2 . En revanche, pour les faibles niveaux de corrélation (mais positifs), les iso-contours ont une forme de parallélogramme. On observe également la présence de régions de corrélation R_{11} négative, positionnées au centre de la couche de cisaillement. Concernant R_{22} , les courbes d'iso-contours positifs sont également ellipsoïdales. Les axes principaux sont tournés de quasiment 90° par rapport à ceux de R_{11} et correspondent dans ce cas aux directions x_1 et x_2 du jet. On constate aussi la présence de régions de corrélation R_{22} négative localisées au centre de la couche de cisaillement. La modélisation des coefficients de corrélations utilisée par Jordan & Gervais [44]

(turbulence isotrope ou anisotrope) pour prévoir le rayonnement acoustique d'un jet est reproduite à la figure 3.23. On constate un bon accord de forme avec nos résultats mais cette modélisation ne retrouve pas l'inclinaison des axes principaux de R_{11} par rapport aux directions x_1 et x_2 .

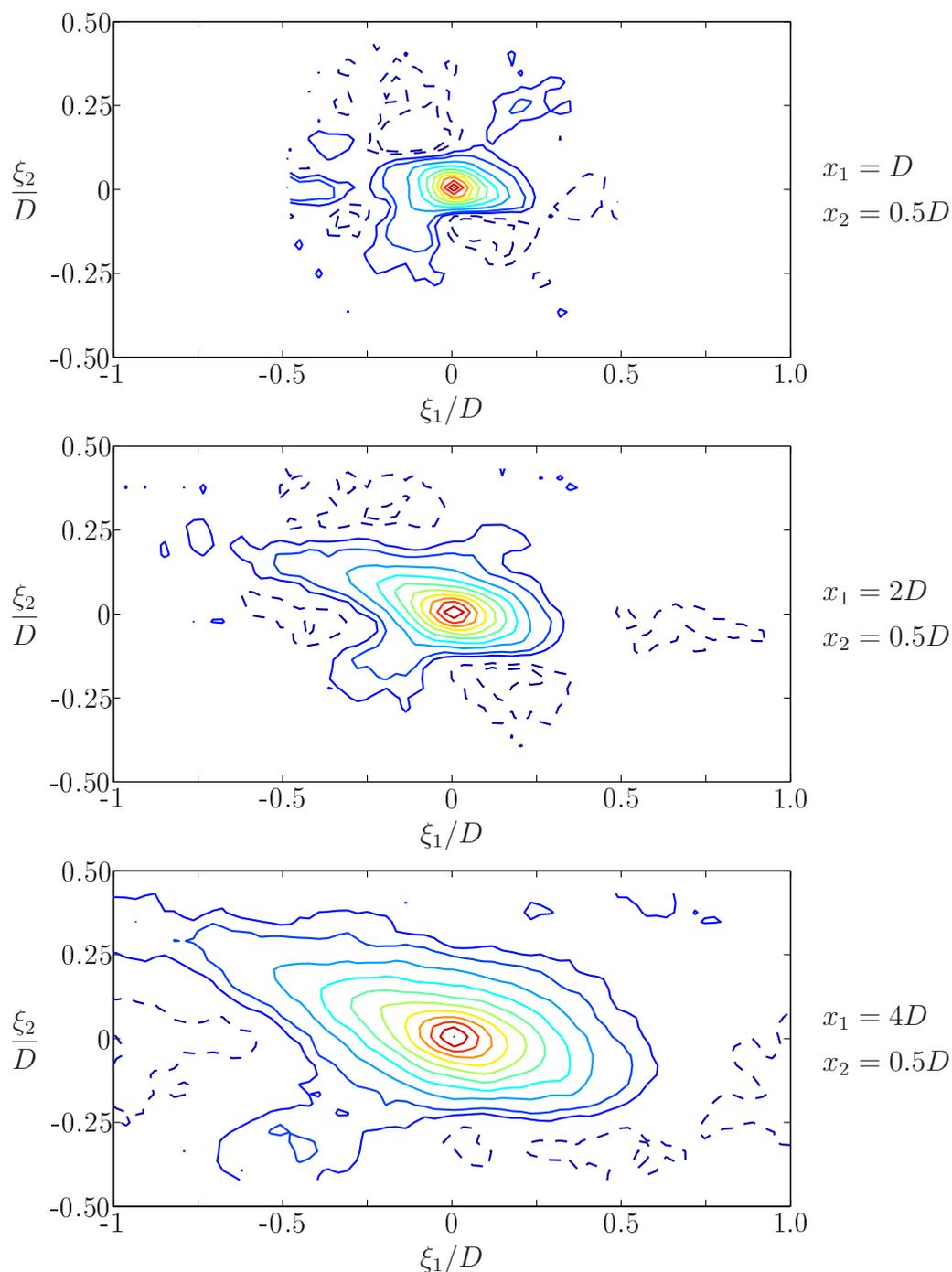


FIG. 3.19: Corrélation spatiale R_{11} au centre de la couche de cisaillement. Le coefficient de corrélation est défini par l'expression (3.6). Le nombre de Mach du jet est de 0.9. Les iso-contours en traits pleins représentent les niveaux de corrélations 0.05 et de 0.1 à 1 par pas de 0.1. En traits pointillés : $R_{11} = -0.05$ et $R_{11} = -0.1$.

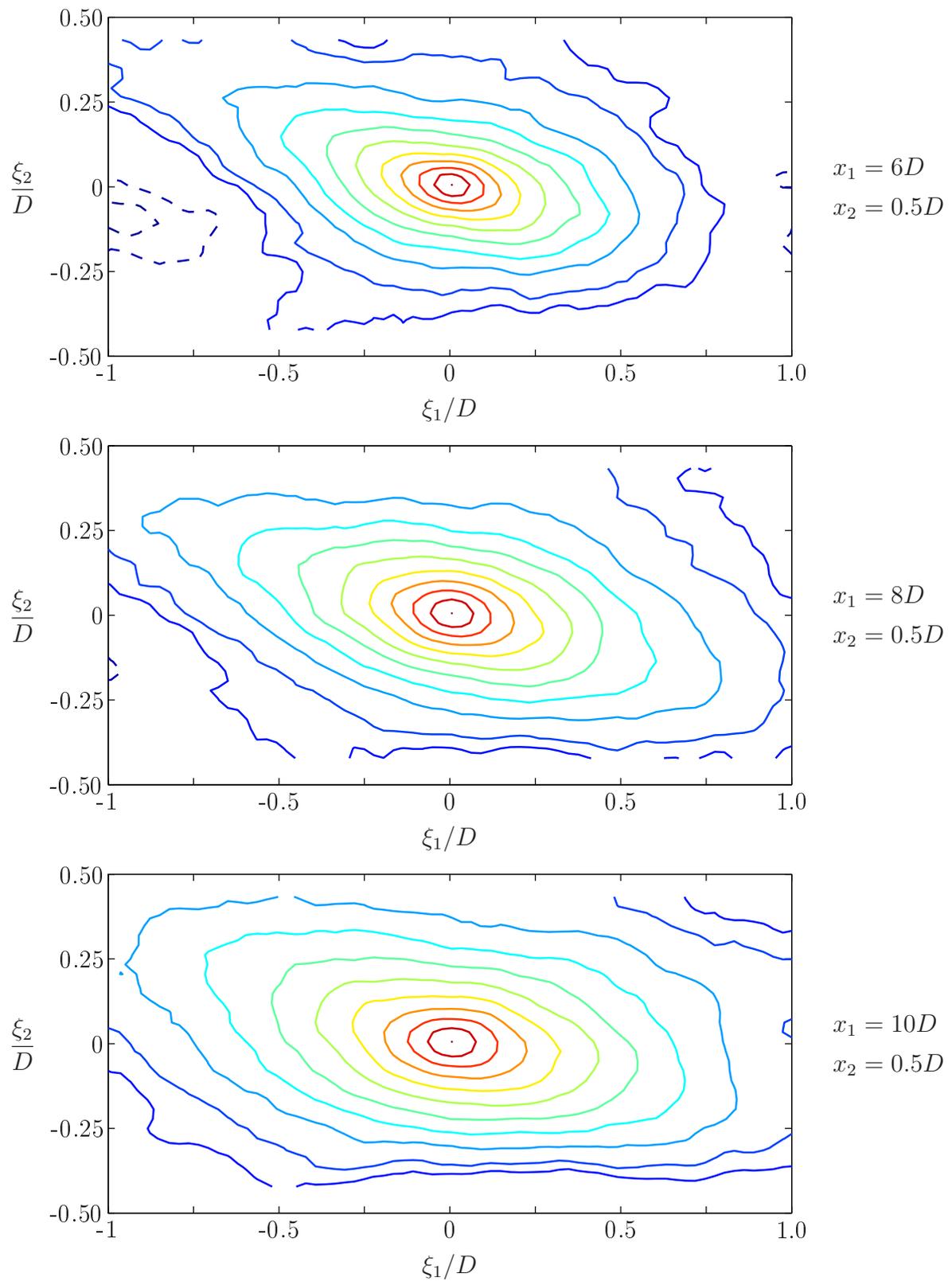


FIG. 3.20: Corrélacion spatiale R_{11} au centre de la couche de cisaillement. La légende est identique à celle de la figure 3.19.

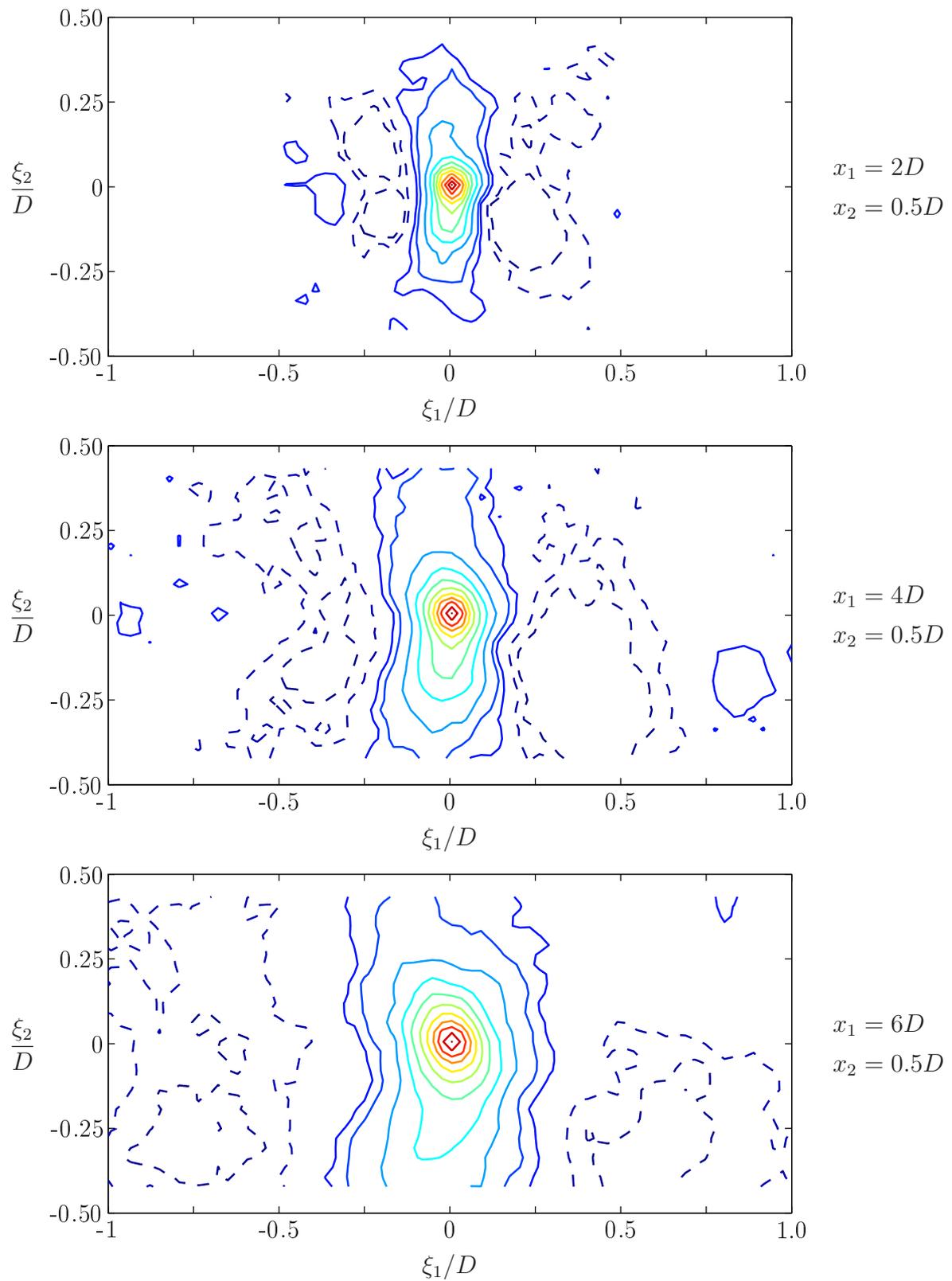


FIG. 3.21: Corrélacion spatiale R_{22} au centre de la couche de cisaillement. La légende est identique à celle de la figure 3.19.

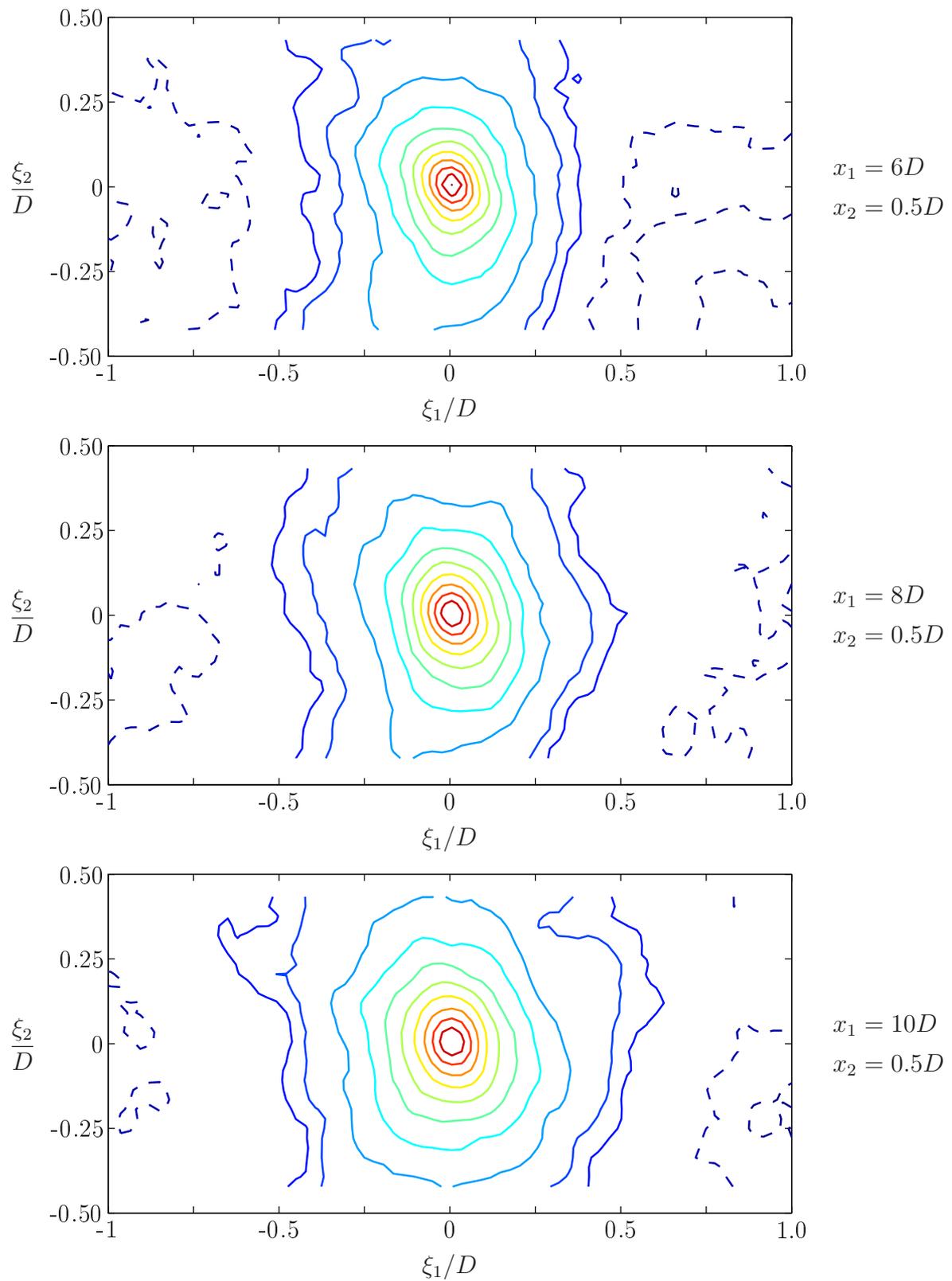


FIG. 3.22: Corrélacion spatiale R_{22} au centre de la couche de cisaillement. La légende est identique à celle de la figure 3.19.

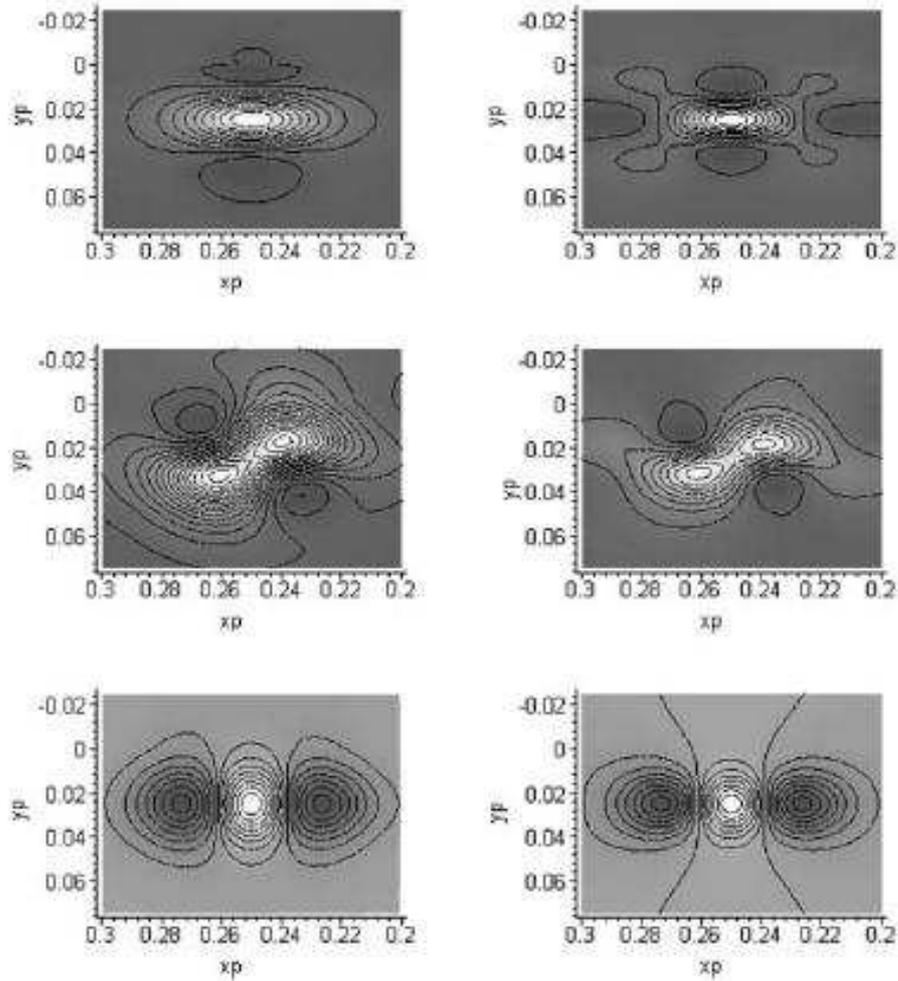


Fig. 15. Two-point velocity correlation tensor components, R_{11} , R_{12} and R_{22} —top, middle and bottom. Left hand column—*isotropic*, right hand column—*anisotropic*.

FIG. 3.23: Résultats tirés de Jordan & Gervais [44].

La figure 3.24 montre l'évolution axiale des échelles intégrales $L_{ii}^{(k)}$ obtenues au centre de la couche de cisaillement. Les deux nombres de Mach sont étudiés ($M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$) et l'on peut constater la faible influence jouée par ce paramètre sur la croissance des échelles de longueur. Par ailleurs, l'évolution des échelles intégrales est relativement linéaire, ce qui est en bon accord avec les conclusions obtenues par Laurence [56], Davies, Fisher & Barratt [28] et plus récemment par Bridges & Wernet [18]. La loi d'évolution de $L_{11}^{(1)}$ déterminée par ces deux premiers est reproduite à la figure 3.24. Ce modèle surestime fortement nos valeurs dans ce cas. À l'inverse, les résultats fournis par Bridges & Wernet [18] indiquent des valeurs d'échelles intégrales $L_{11}^{(1)}$ inférieures à celles que nous avons obtenues. La valeur de $L_{11}^{(1)}$ calculée à partir des résultats de Jordan & Gervais [44] est en revanche en bon accord avec nos mesures. De même, les échelles intégrales déterminées par Lau [50] se comparent relativement bien à nos données, notamment pour $L_{11}^{(k)}$.

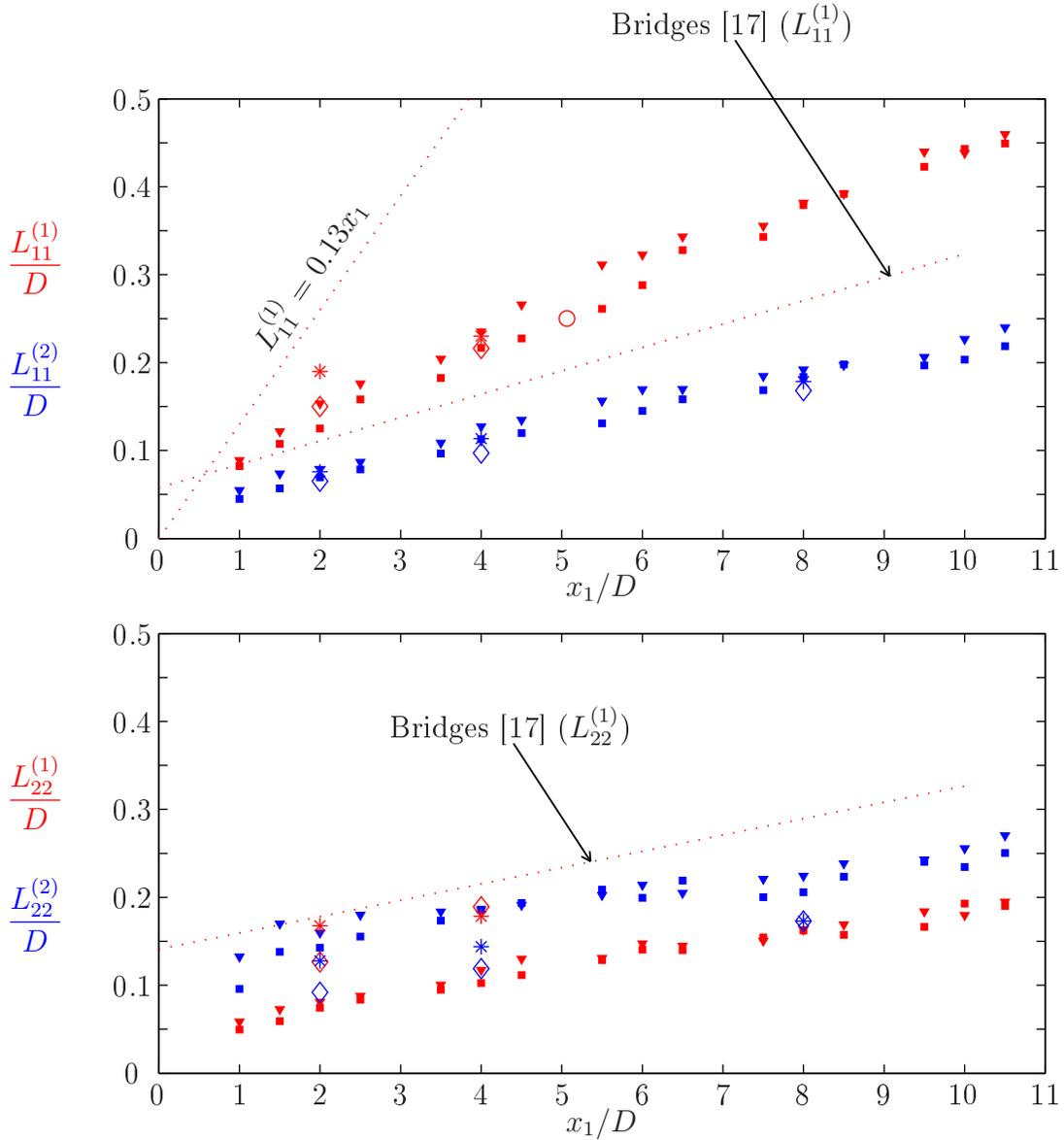


FIG. 3.24: Évolution axiale des échelles spatiales $L_{ii}^{(k)}$ au centre de la couche de cisaillement pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$. Les symboles de couleur rouge sont relatifs à la direction x_1 , soit $L_{ii}^{(1)}$. Les symboles bleus concernent la direction x_2 , soit $L_{ii}^{(2)}$. Le résultat du LEA (\circ) est obtenu par l'intégration du coefficient R_{11} fourni à la figure 16 de la référence [44]. La procédure d'intégration est identique à celle utilisée pour nos données. La loi d'évolution $L_{11}^{(1)} = 0.13x_1$ résume les résultats obtenus par Laurence [56] et Davis *et al.* [28]. Les résultats de Bridges & Wernet sont extraits de la référence [17]. Les données de Lau [50] sont représentées par les symboles \diamond pour $M_j = 0.5$ et par les symboles $*$ pour $M_j = 0.9$.

L'évolution linéaire des échelles de longueurs au centre de la couche de cisaillement suggère une relation de proportionnalité entre $L_{ii}^{(k)}$ et δ_θ . Cette relation est étudiée à la figure 3.25. Suffisamment loin en aval, on constate effectivement que $L_{11}^{(1)} \approx 2\delta_\theta$ et que $L_{11}^{(2)} \approx \delta_\theta$. De même, $L_{22}^{(1)} \approx \delta_\theta$.

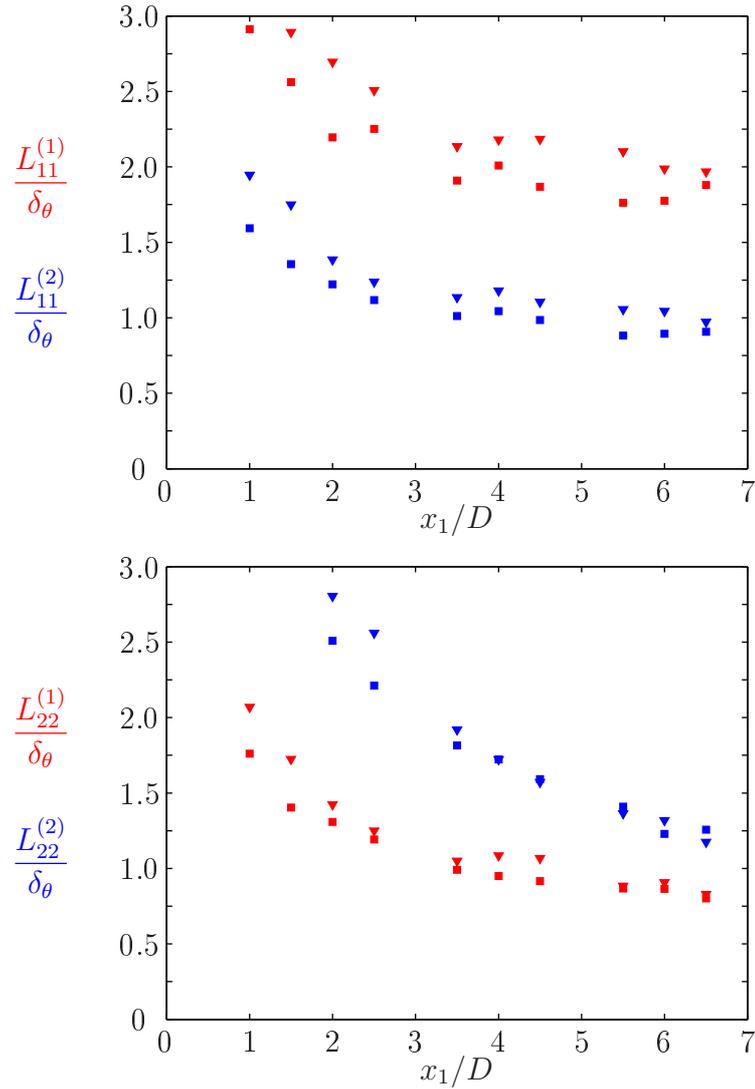


FIG. 3.25: Comparaison des échelles spatiales au centre de la couche de cisaillement par rapport à l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ .

Pour une turbulence isotrope, l'échelle de longueur de la vitesse longitudinale u_1 dans la direction x_1 est identique à l'échelle de longueur de la vitesse radiale u_2 dans la direction x_2 , soit $L_{11}^{(1)}/L_{22}^{(2)} = 1$. De même, $L_{11}^{(2)}/L_{22}^{(1)} = 1$. Ces rapports d'échelles de longueurs sont analysés à la figure 3.26 pour les fluctuations au centre de la couche de cisaillement. Les échelles $L_{11}^{(2)}$ et $L_{22}^{(1)}$ satisfont relativement bien à ce critère d'isotropie tout le long de la zone de cisaillement ; concernant $L_{11}^{(1)}$ et $L_{22}^{(2)}$ également, du moins pour $x_1 < 5D$. L'hypothèse d'une turbulence isotrope (et incompressible) conduit également à une valeur théorique du rapport $L_{11}^{(2)}/L_{11}^{(1)}$ égale à $1/2$, voir von Kármán & Howarth [75]. Cette relation est relativement bien vérifiée comme on peut le déduire de la figure 3.25.

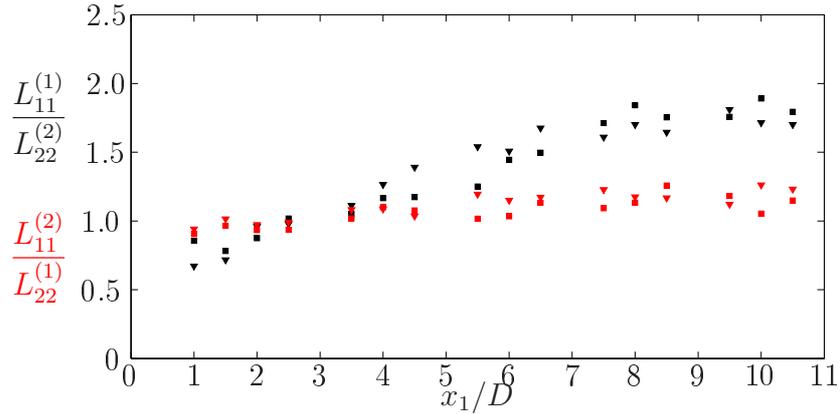


FIG. 3.26: Rapports d'isotropie des échelles spatiales au centre de la couche de cisaillement.

Corrélations sur l'axe du jet

L'influence de la définition du coefficient de corrélation pour les fluctuations sur l'axe du jet est étudiée à la figure 3.27. Le choix d'une des définitions (3.6) à (3.9) porte peu à conséquence en aval du cône potentiel. En amont ($x_1 = 6D$), il existe en revanche une ambiguïté pour $L_{22}^{(2)}$, les autres échelles étant peu dépendantes de la définition choisie. Les résultats présentés dans ce qui suit sont obtenus avec la définition (3.6) uniquement.

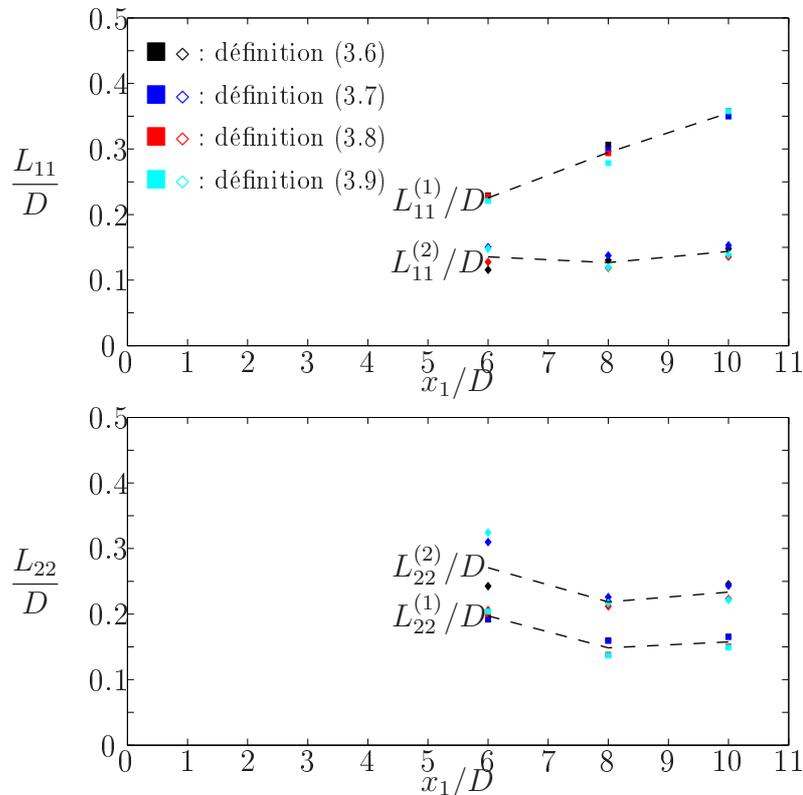


FIG. 3.27: Comparaison des échelles de longueur $L_{ii}^{(k)}$ en fonction de la définition de R_{ii} . Le point de référence \vec{x} est situé sur l'axe du jet $x_2 = 0$ et le nombre de Mach du jet est de 0.9.

Des cartographies de la corrélation R_{11} ont été calculées pour deux points dans la zone potentielle ($x_1 = 4D$ et $x_1 = 6D$) voir la figure 3.28 et pour deux points en aval ($x_1 = 8D$ et $x_1 = 10D$) voir la figure 3.29. La distribution spatiale de R_{11} est fortement modifiée entre $x_1 = 4D$ et $x_1 = 6D$. On observe une rotation de 90° des axes principaux des ellipses d'iso-niveaux positifs. En aval du cône potentiel ($x_1 = 8D$ et $x_1 = 10D$), la distribution des corrélations spatiales R_{11} évolue en revanche de manière progressive et présente un allongement régulier dans la direction axiale et un élargissement quasiment nul dans la direction radiale. De même, des cartographies de la corrélation R_{22} sont montrées aux figures 3.30 et 3.31. La région $R_{22} > 0$ évolue très peu entre les différents points de référence. En revanche, les zones négatives $R_{22} < 0$ s'écartent du point de référence et diminuent d'intensité de $x_1 = 4D$ à $x_1 = 10D$.

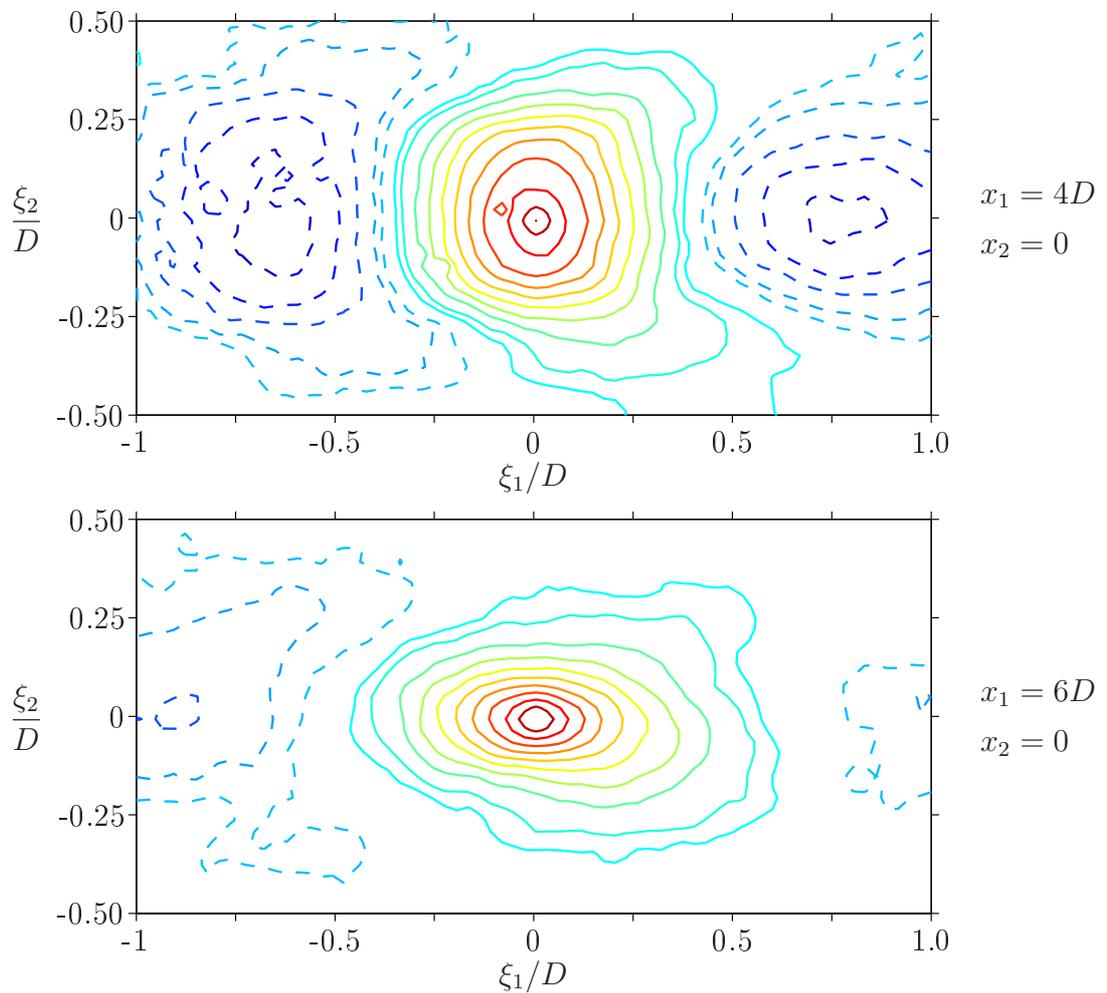


FIG. 3.28: Corrélation spatiale R_{11} sur l'axe du jet. Le coefficient de corrélation est défini par l'expression (3.6). Le nombre de Mach du jet est de 0.9. Les iso-contours en traits pleins représentent les niveaux de corrélations 0.05 et de 0.1 à 1 par pas de 0.1. En traits pointillés, R_{11} varie de -0.5 à -0.1 par pas de 0.1 avec aussi $R_{11} = -0.05$.

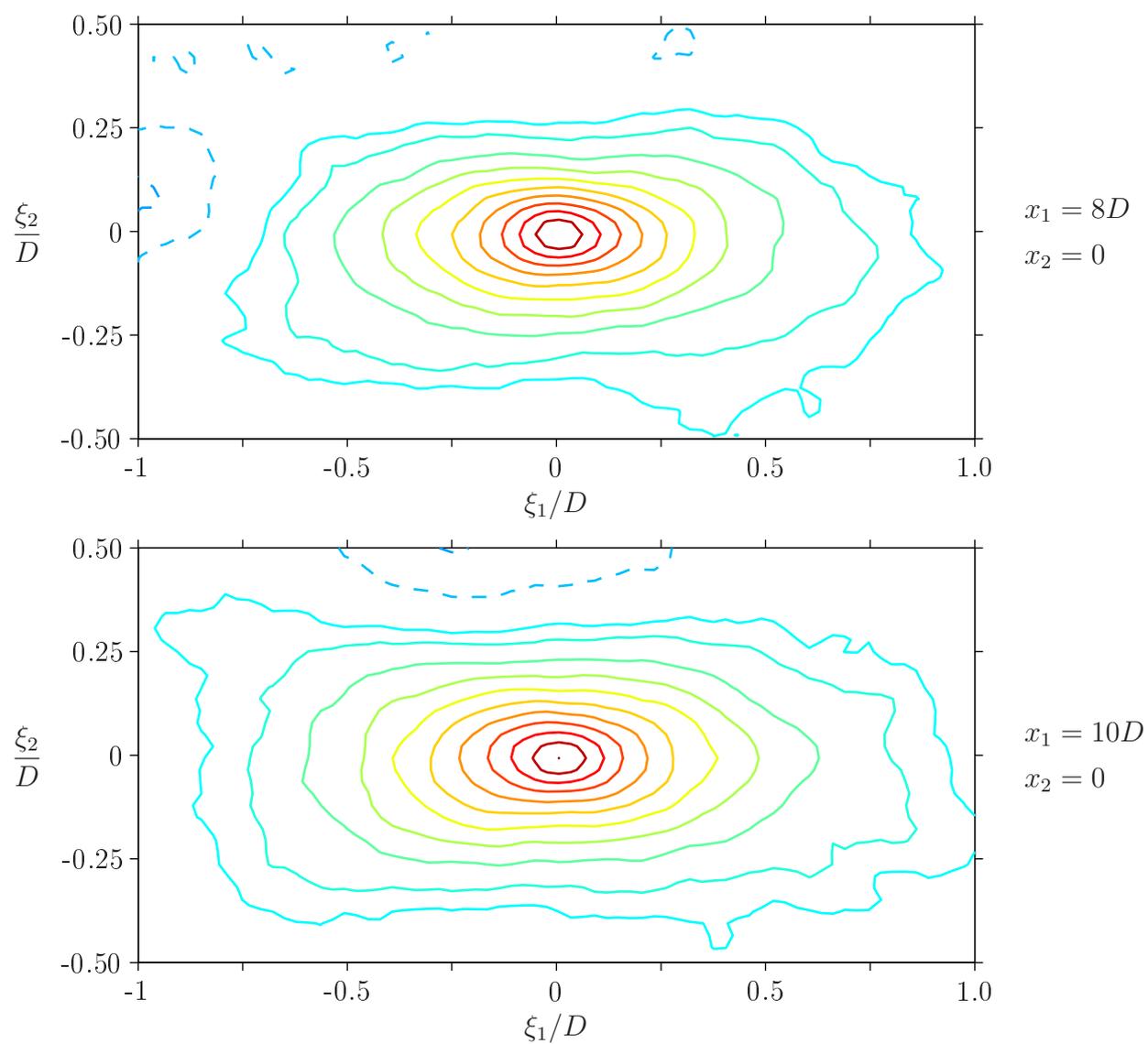


FIG. 3.29: Corrélacion spatiale R_{11} sur l'axe du jet. La légende est identique à celle de la figure 3.28.

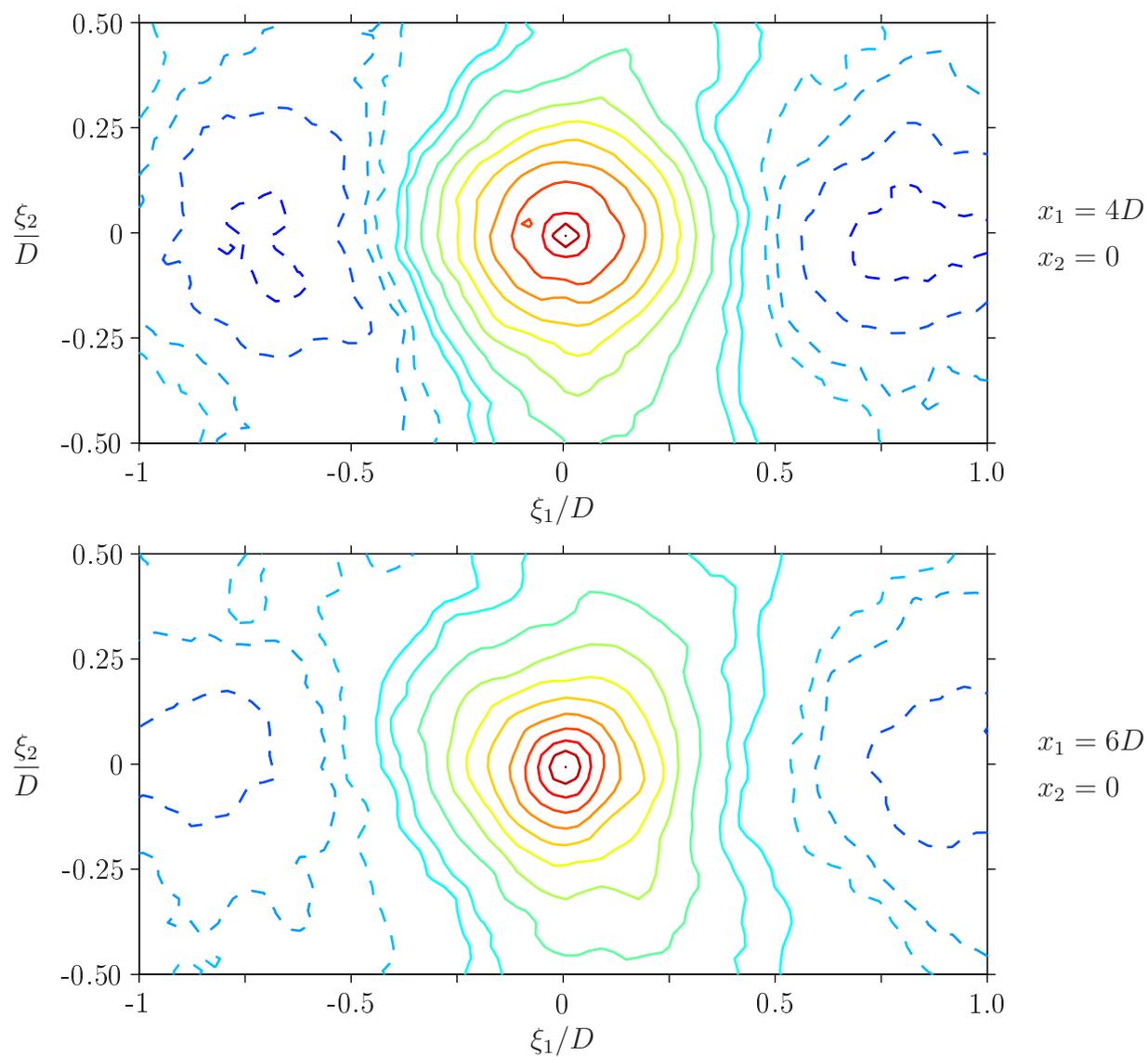


FIG. 3.30: Corrélacion spatiale R_{22} sur l'axe du jet. La légende est identique à celle de la figure 3.28.

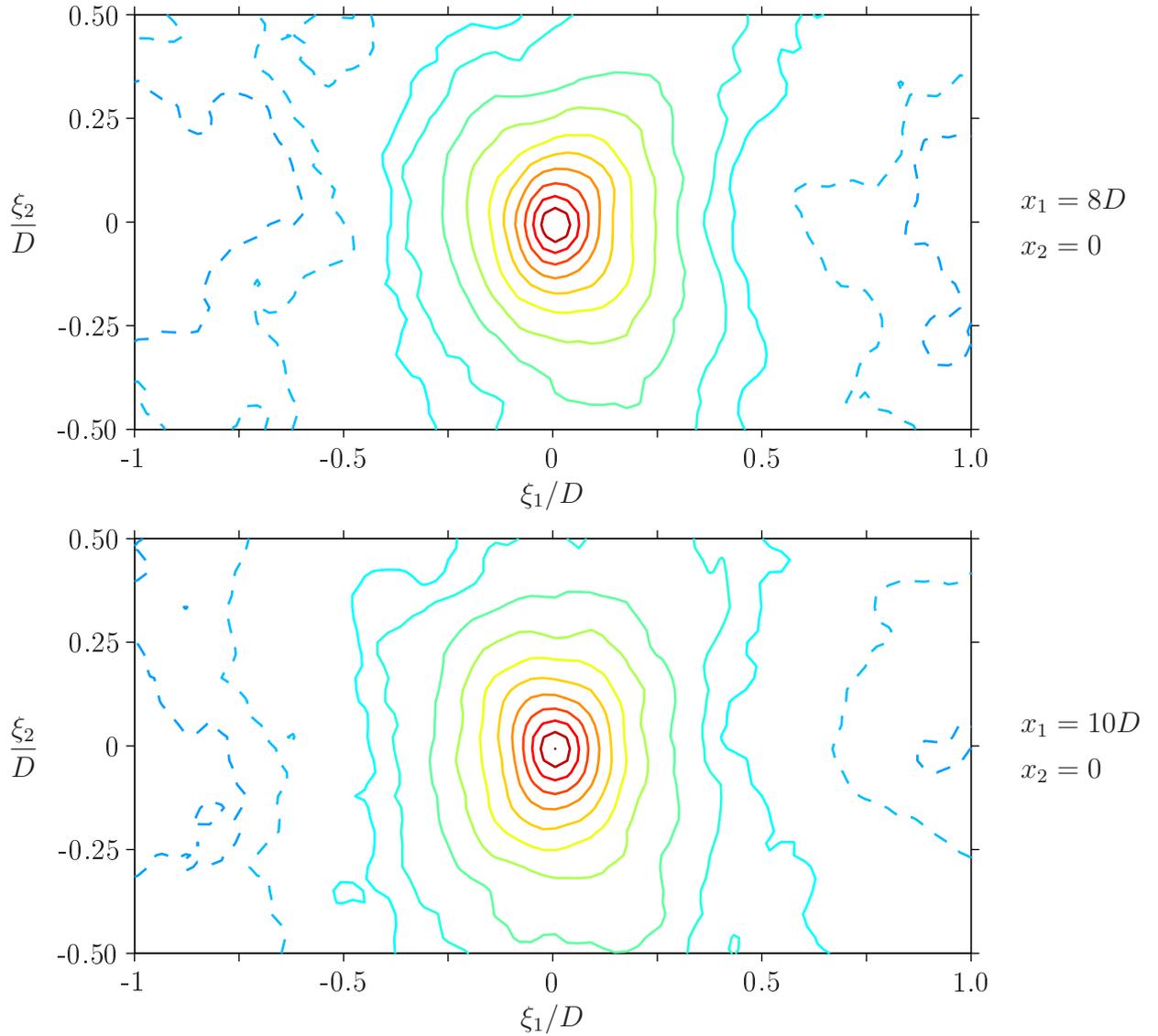


FIG. 3.31: Corrélation spatiale R_{22} sur l'axe du jet. La légende est identique à celle de la figure 3.28.

Les échelles intégrales associées aux corrélations sur l'axe du jet sont présentées à la figure 3.32. Ces résultats confirment les observations qualitatives constatées à partir des cartographies de corrélations spatiales. Malheureusement, aucune mesure comparative n'a été trouvée dans la littérature. Les rapports d'échelles de longueurs $L_{11}^{(1)}/L_{22}^{(2)}$ et $L_{11}^{(2)}/L_{22}^{(1)}$ permettent de juger de la relative isotropie des fluctuations sur l'axe du jet, notamment à l'extrémité du cône potentiel ($6D < x_1 < 7D$).

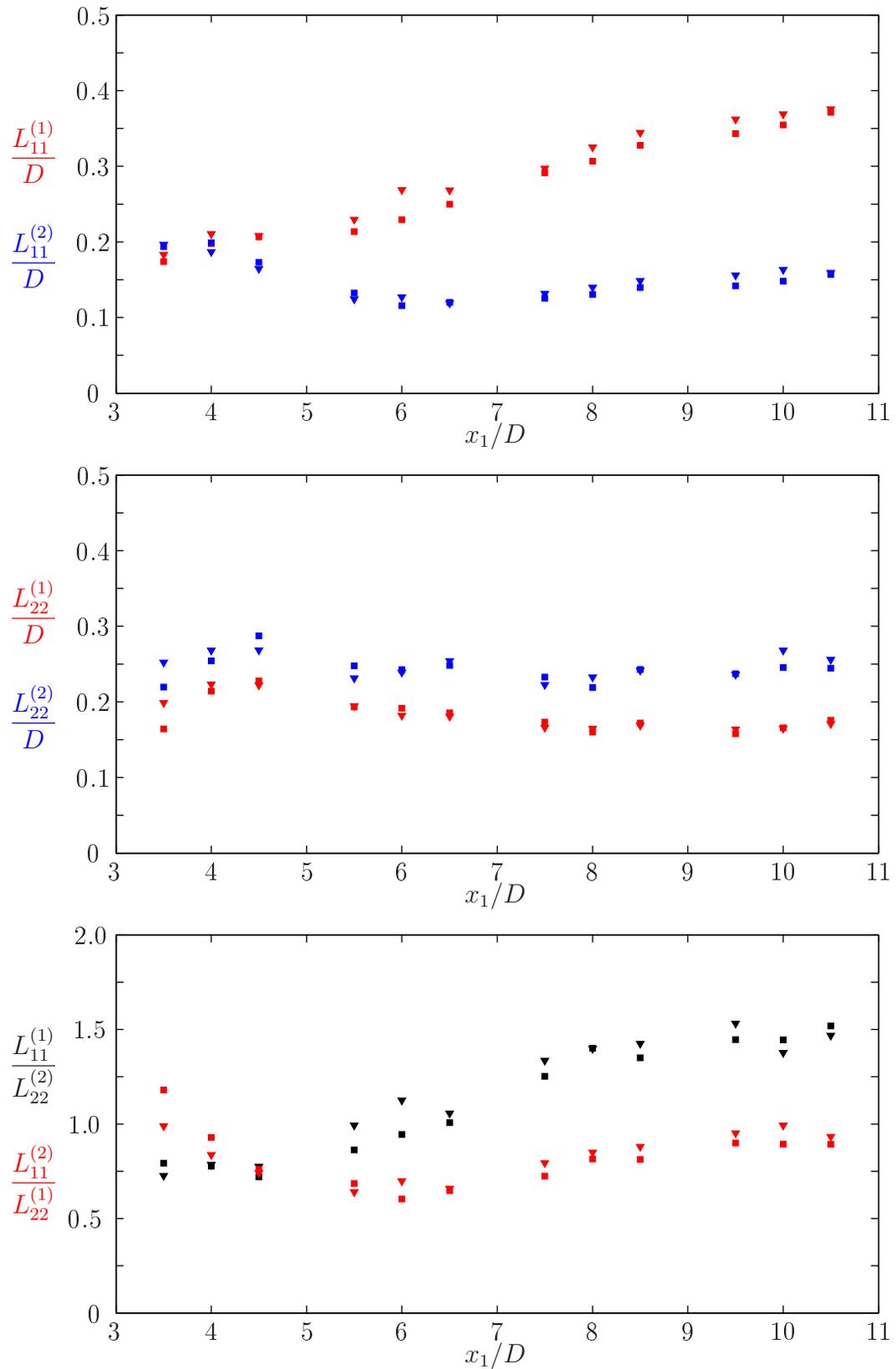


FIG. 3.32: Évolution axiale des échelles spatiales $L_{ii}^{(k)}$ sur l'axe du jet, pour $M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$.

3.4.2 Corrélations spatio-temporelles

Compte tenu du grand nombre de données nécessaires à l'obtention des corrélations spatio-temporelles (2×2000 paires d'images pour chaque retard τ), seules trois positions ont été étudiées : $x_1 = 4.5D$, $x_1 = 6.5D$ et $x_1 = 10.5D$. Pour chacune de ces positions, le point de référence \vec{x} a été choisi au centre de la couche de cisaillement et sur l'axe du jet. Douze décalages temporels τ ont été enregistrés, de 0 à 330 μs pour $M_j = 0.6$ et de 0 à 250 μs pour $M_j = 0.9$.

Concernant la couche de cisaillement, l'évolution spatio-temporelle de la corrélation R_{11} pour $x_1 = 6.5D$ est présentée à la figure 3.33. Cette figure illustre les effets de convection et d'extinction de la turbulence dans l'écoulement. Pour le retard maximum $\tau = 250 \mu s$, l'empreinte de la corrélation est déplacée d'un diamètre D environ par rapport au point de référence et le niveau de corrélation maximum chute à une valeur de 0.4 approximativement. L'évolution spatio-temporelle de la corrélation R_{22} est représentée à la figure 3.34. Pour le retard maximum τ , le déplacement de la tache de corrélation est quasiment identique à celui de R_{11} . Les vitesses de convection associées à R_{11} et R_{22} sont donc effectivement identiques comme il a été supposé au paragraphe 3.4.

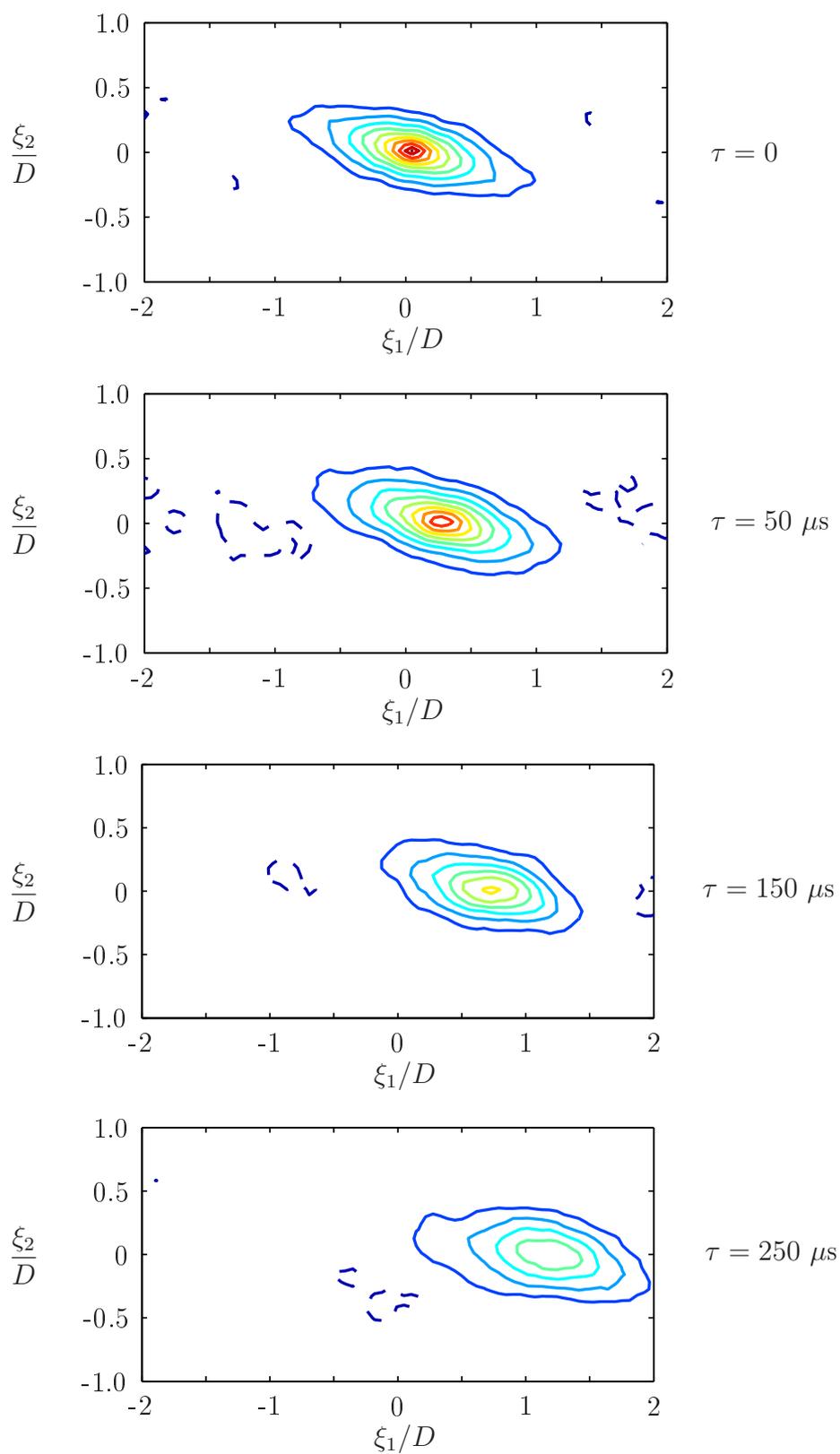


FIG. 3.33: Évolution spatio-temporelle du coefficient de corrélation R_{11} au centre de la couche de cisaillement, pour $x_1 = 6.5D$, et $M_j = 0.9$.

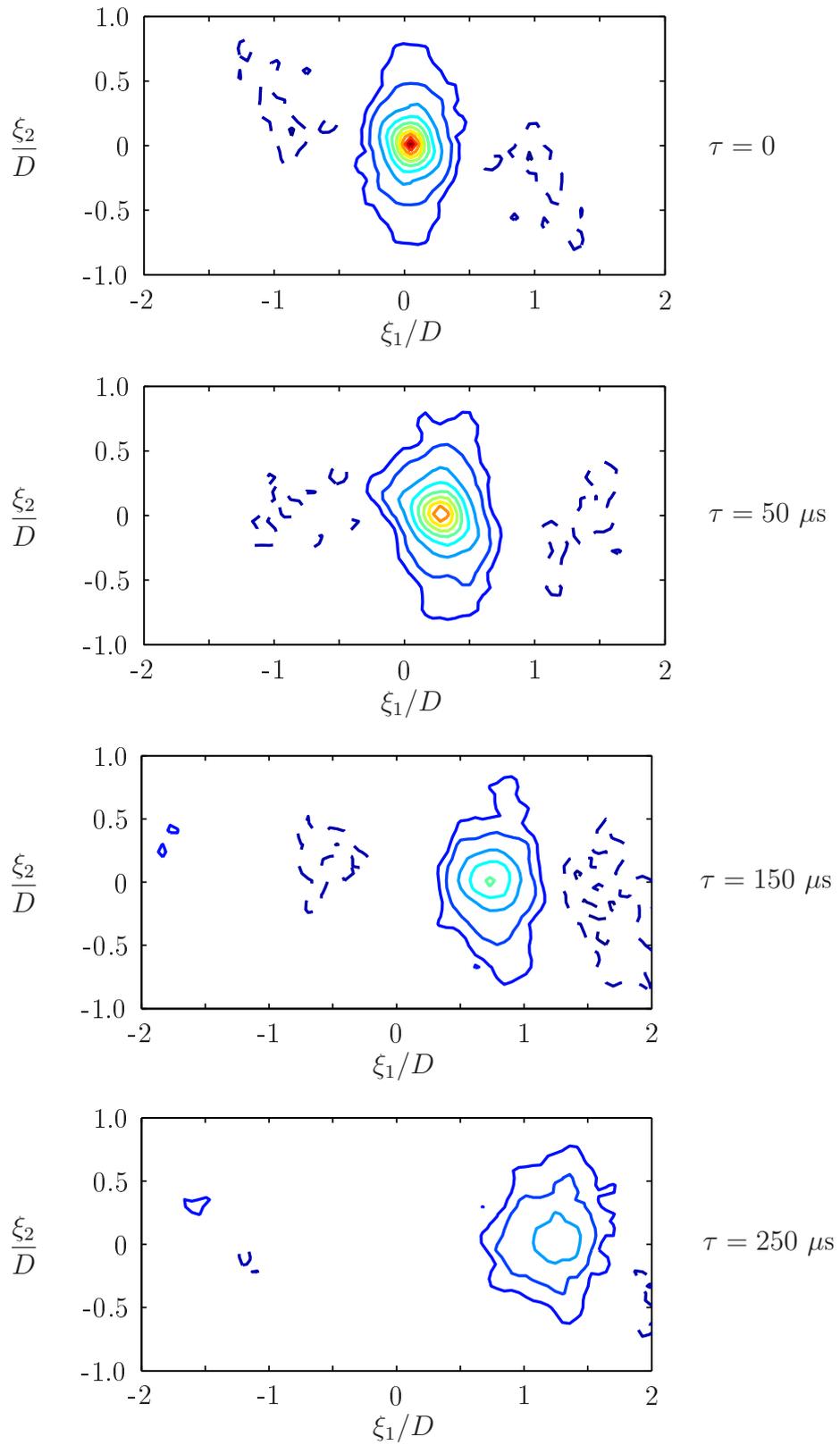


FIG. 3.34: Évolution spatio-temporelle du coefficient de corrélation R_{22} au centre de la couche de cisaillement, pour $x_1 = 6.5D$, et $M_j = 0.9$.

Les profils axiaux des corrélations $R_{11}(\xi_1, \xi_2 = 0, \tau)$ et $R_{22}(\xi_1, \xi_2 = 0, \tau)$ sont tracés à la figure 3.35 pour les douze retards τ étudiés. La corrélation R_{22} décroît plus vite que la corrélation R_{11} en fonction du retard τ . Pour justifier quantitativement ce résultat, les temps intégraux τ_{11} et τ_{22} sont calculés à partir de la décroissance de $R_{11_M}(\tau)$ et $R_{22_M}(\tau)$ présentée à la figure 3.36.

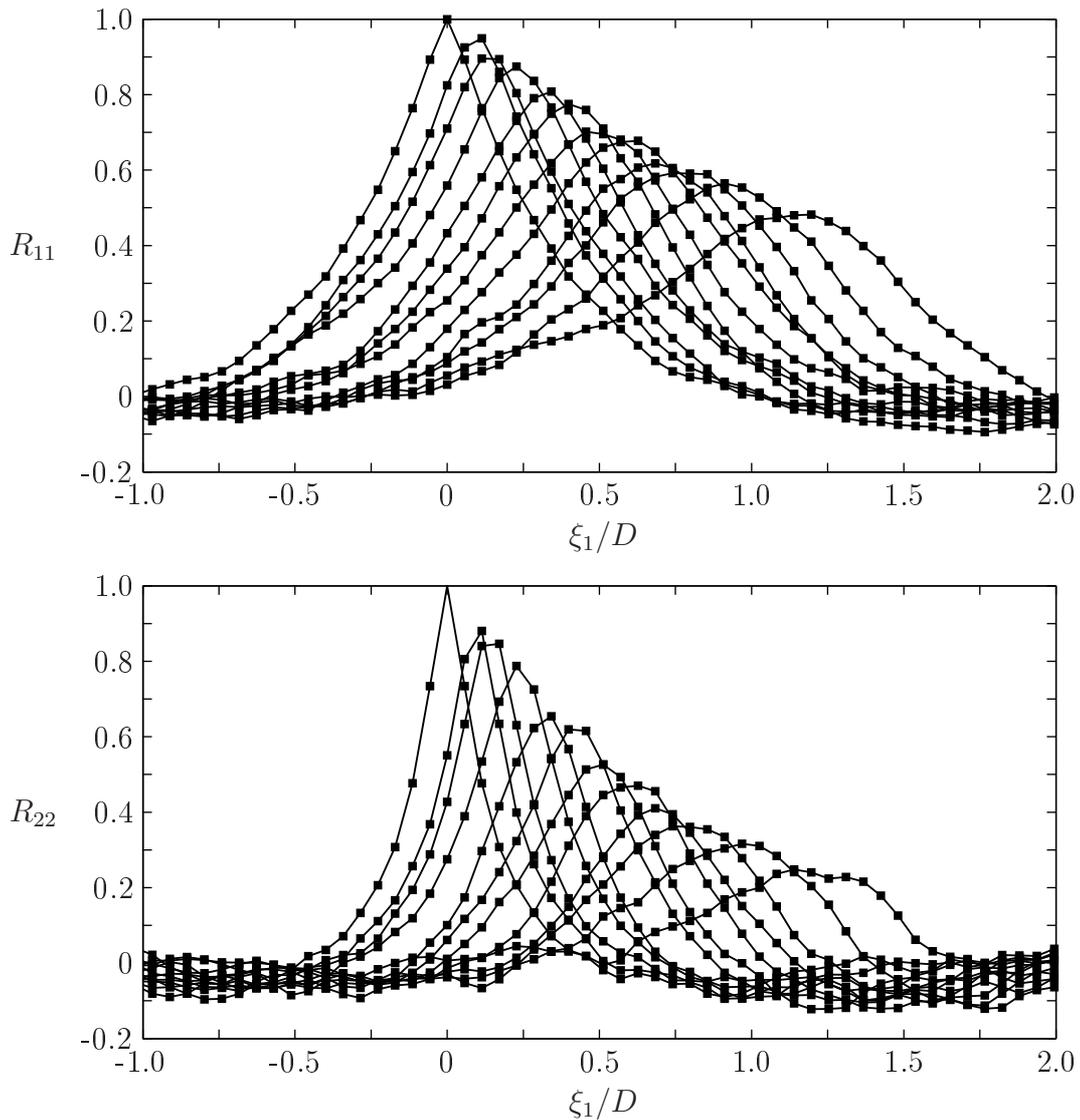


FIG. 3.35: Profils longitudinaux de R_{ii} au centre de la couche de cisaillement ($x_1 = 6.5D$, $x_2 = D/2$ et $\xi_2 = 0$) pour les différents retards τ étudiés : $\tau = 0$ à $170 \mu s$ par pas de $20 \mu s$ ainsi que $\tau = 200 \mu s$ et $\tau = 250 \mu s$. Le nombre de Mach du jet est de 0.9.

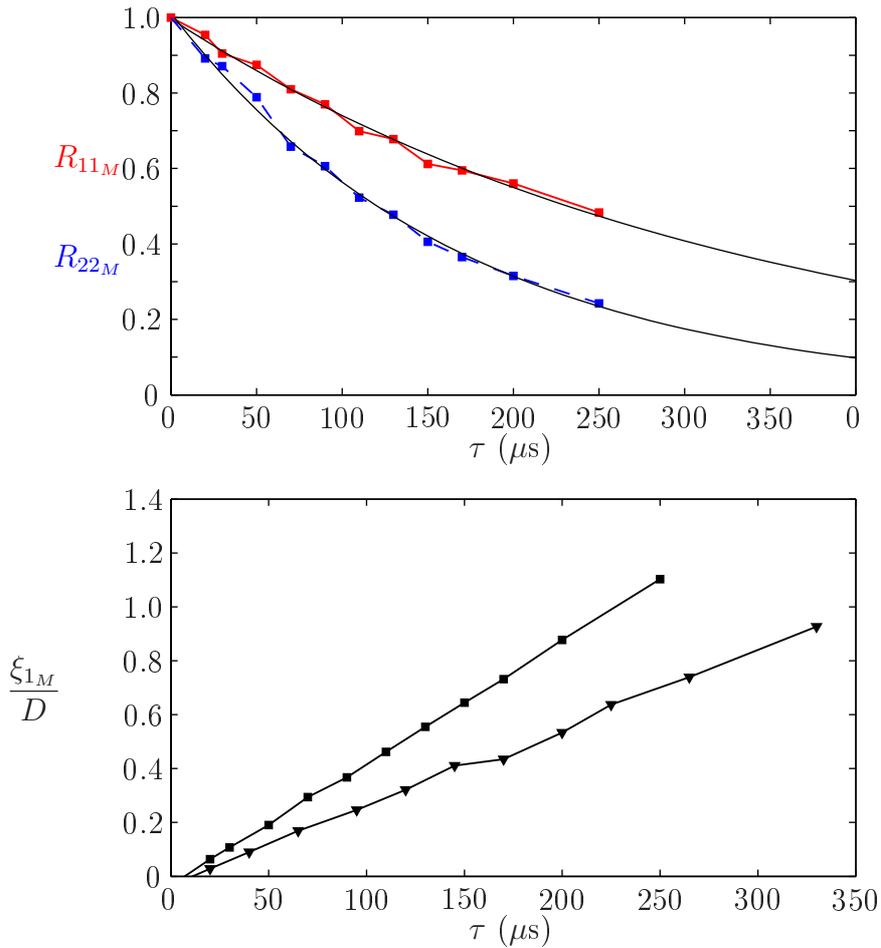


FIG. 3.36: Décroissance temporelle de la corrélation R_{ii_M} et évolution du déplacement ξ_{1_M} . Le point de référence est situé au centre de la couche de cisaillement en $x_1 = 6.5D$.

Les échelles temporelles sont estimées en utilisant une loi classique de décroissance exponentielle :

$$R_{ii_M}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{ii}}\right)$$

Les résultats sont fournis au tableau 3.2 où sont également collectées les échelles de temps obtenues pour les autres points de référence dans la couche de cisaillement. On constate effectivement que $\tau_{22} < \tau_{11}$, ce qui démontre la décorrélation plus rapide des vitesses radiales u_2 que des vitesses axiales u_1 . Le rapport des échelles de temps τ_{22}/τ_{11} est d'ailleurs voisin de 1/2. On vérifie également que l'échelle de temps τ_{11} s'apparente au temps caractéristique de la dissipation de la turbulence $\Theta = L_{11}^{(1)}u_{1_M} = k/\epsilon$, ϵ étant le taux de dissipation de l'énergie cinétique des fluctuations de vitesses k . L'évolution temporelle du déplacement de la tache de corrélation $\xi_{1_M}(\tau)$ est présentée également à la figure 3.36. La vitesse de convection U_c que l'on déduit est effectivement bien constante et l'on retrouve la valeur classique de $0.6 \times U_a$ obtenue pour les fluctuations dans la couche de cisaillement, U_a étant la vitesse locale sur l'axe du jet

en x_1 , voir le tableau 3.2. Par ailleurs, les longueurs d'extinction de la turbulence $l_{ii} = U_c \tau_{ii}$ sont effectivement de l'ordre du diamètre D , plus précisément entre $1D$ et $2D$, l_{ii} augmentant vers l'aval, voir le tableau 3.2.

	M_j	$\tau_{11} \left(\frac{\tau_{11}}{\Theta} \right)$	$\tau_{22} \left(\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}} \right)$	$\frac{U_c}{U_a}$	l_{11}	l_{22}
$x_1 = 4.5D$	0.6	×	×	×	×	×
	0.9	257 (1.4)	154 (0.6)	0.6	$1.2D$	$0.7D$
$x_1 = 6.5D$	0.6	542 (1.3)	284 (0.5)	0.6	$1.6D$	$0.8D$
	0.9	336 (1.4)	171 (0.5)	0.6	$1.5D$	$0.8D$
$x_1 = 10.5D$	0.6	747 (1.2)	439 (0.6)	0.7	$1.9D$	$1.1D$
	0.9	463 (1.3)	243 (0.5)	0.7	$1.9D$	$1.0D$

TAB. 3.2: Échelles de temps τ_{11} et τ_{22} (μs), vitesses de convection U_c et distances d'extinction $l_{ii} = U_c \tau_{ii}$ associées aux corrélations R_{ii} au centre de la couche de cisaillement et pour trois positions axiales : $x_1 = 4.5D$, $x_1 = 6.5D$ et $x_1 = 10.5D$. Le temps $\Theta = L_{11}^{(1)}/u_{1M}$ est le temps caractéristique associé à la dissipation de la turbulence.

Concernant les corrélations sur l'axe du jet, un exemple d'évolution spatio-temporelle de R_{11} et R_{22} est montré aux figures 3.37 et 3.38 respectivement. Comme précédemment, les profils axiaux $R_{11}(\xi_1, \xi_2 = 0, \tau)$ et $R_{22}(\xi_1, \xi_2 = 0, \tau)$ sont tracés pour plusieurs retards τ , voir la figure 3.39. La décroissance et le déplacement des maxima des corrélations $R_{11M}(\tau)$ et $R_{22M}(\tau)$ sont également fournis, voir la figure 3.40. Les échelles intégrales τ_{11} et τ_{22} que l'on déduit sont indiquées au tableau 3.3.

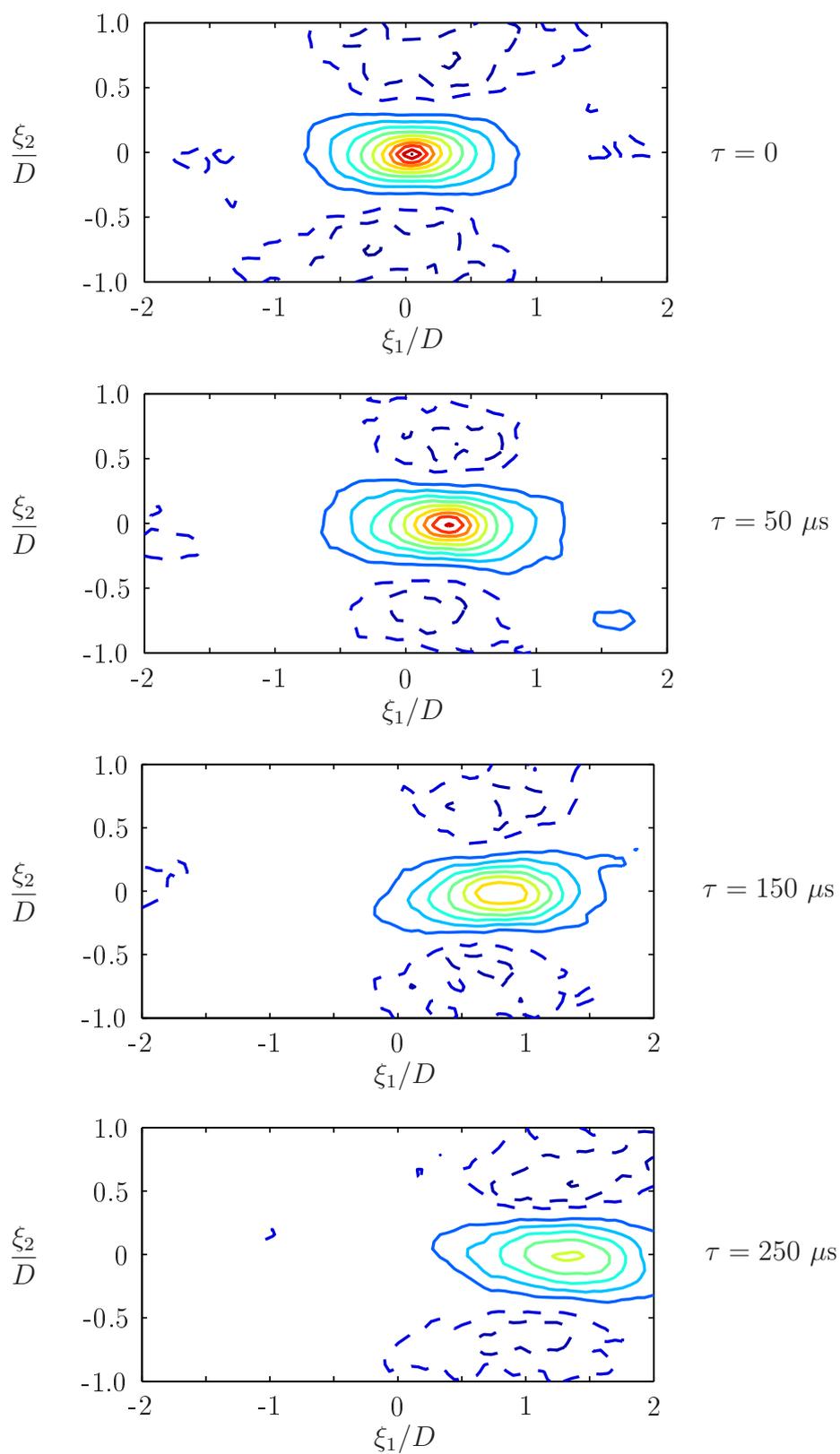


FIG. 3.37: Évolution spatio-temporelle du coefficient de corrélation R_{11} sur l'axe du jet, pour $x_1 = 10.5D$ et $M_j = 0.9$.

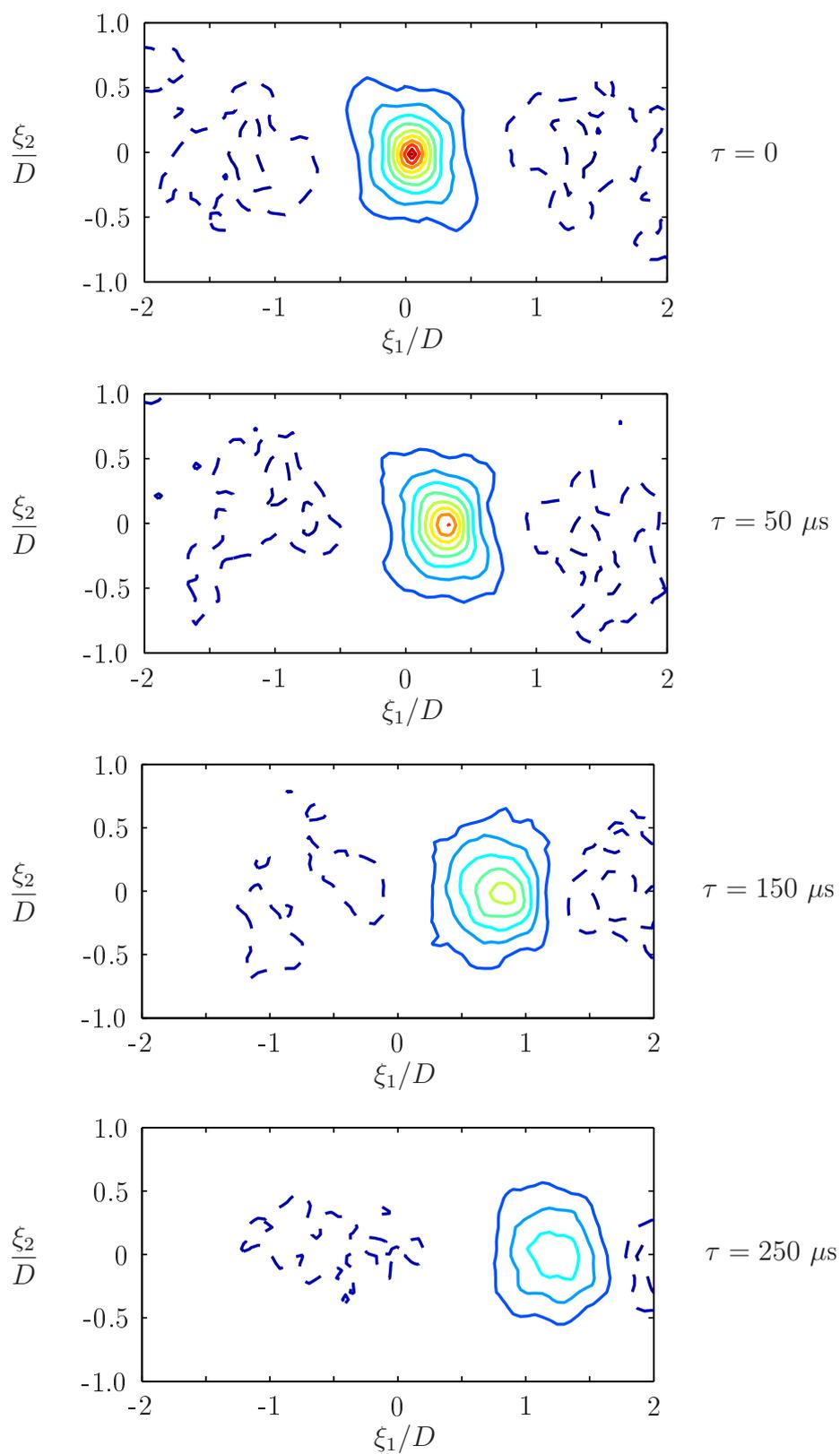


FIG. 3.38: Évolution spatio-temporelle du coefficient de corrélation R_{22} sur l'axe du jet, pour $x_1 = 10.5D$ et $M_j = 0.9$.

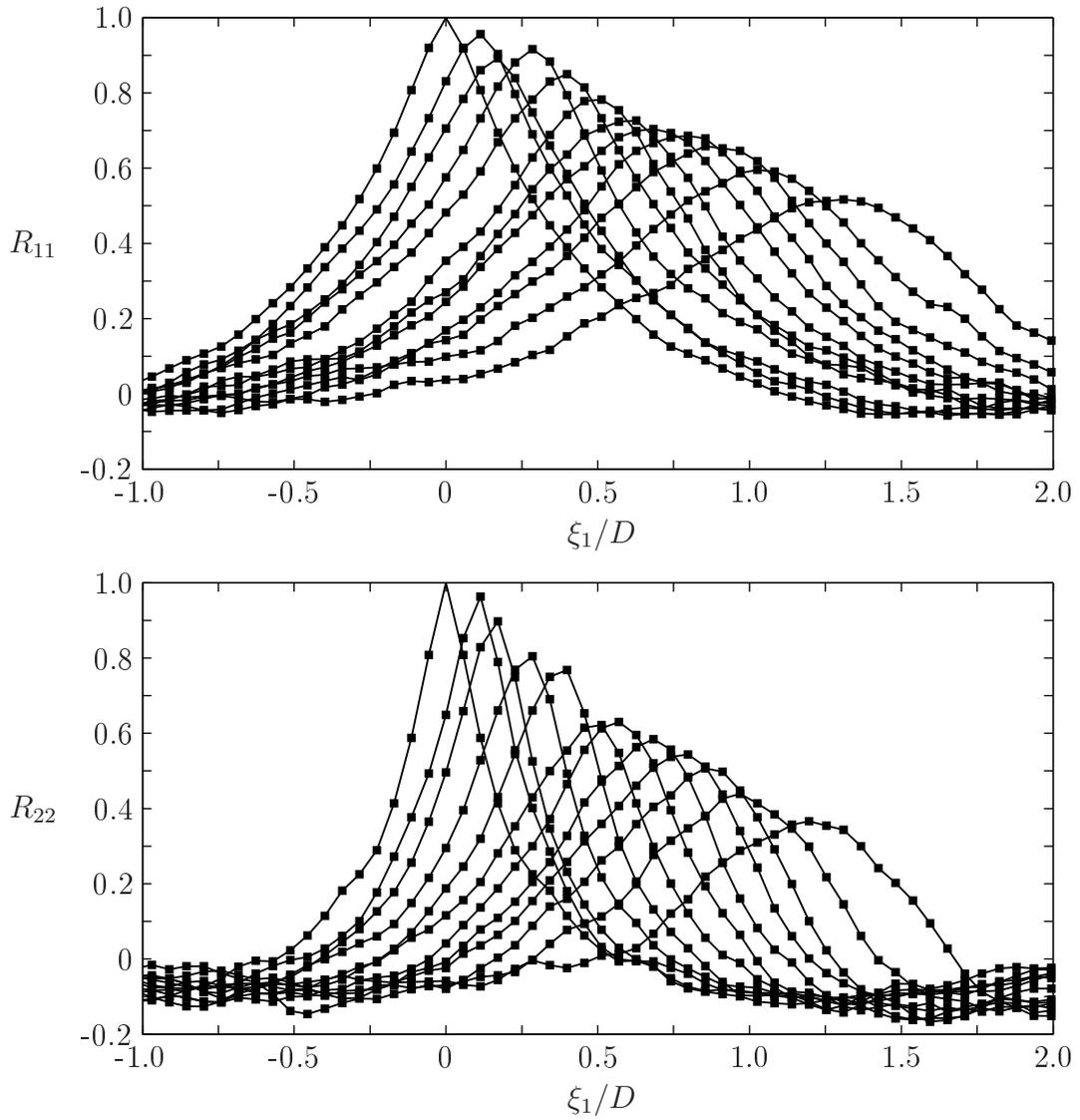


FIG. 3.39: Profils longitudinaux de R_{ii} sur l'axe du jet ($x_1 = 10.5D$, $x_2 = 0$ et $\xi_2 = 0$) pour les différents retards τ étudiés : $\tau = 0$ à $170 \mu s$ par pas de $20 \mu s$ ainsi que $\tau = 200 \mu s$ et $\tau = 250 \mu s$. Le nombre de Mach du jet est de 0.9.

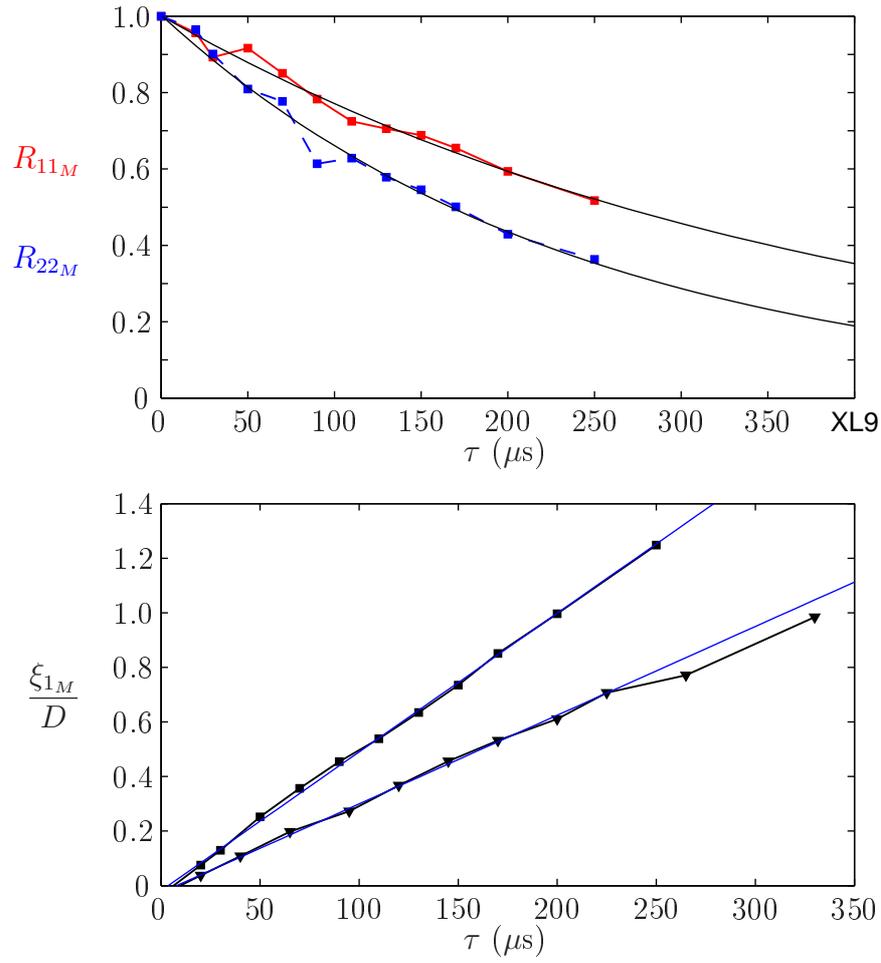


FIG. 3.40: Décroissance temporelle de la corrélation R_{ii_M} et évolution du déplacement ξ_{1_M} . Le point de référence est situé au centre de la couche de cisaillement en $x_1 = 10.5D$.

	M_j	τ_{11}	τ_{22}	$(\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}})$	$\frac{U_c}{U_a}$	l_{11}	l_{22}
$x_1 = 6.5D$	0.6	399	410	(1.0)	0.8	$1.5D$	$1.6D$
	0.9	218	321	(1.5)	0.8	$1.3D$	$2.0D$
	M_j	τ_{11}	τ_{22}	$(\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}})$	$\frac{U_c}{U_a}$	l_{11}	l_{22}
$x_1 = 10.5D$	0.6	571	413	(0.7)	0.9	$1.8D$	$1.3D$
	0.9	383	240	(0.6)	0.9	$2.0D$	$1.3D$

TAB. 3.3: Échelles de temps τ_{11} et τ_{22} (μs), vitesses de convection U_c et longueurs d'extinction $l_{ii} = U_c \tau_{ii}$ associées aux corrélations R_{ii} sur l'axe du jet, pour deux positions axiales : $x_1 = 6.5D$ et $x_1 = 10.5D$.

3.5 Conclusion

Les corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points ont été mesurées dans un jet subsonique à grand nombre de Mach ($M_j = 0.6$ et $M_j = 0.9$) grâce à une technique expérimentale moderne, la PIV.

Le protocole de mesure PIV a été validé par l'analyse des vitesses moyennes et fluctuantes pour lesquelles un certain nombre de données comparatives sont disponibles dans la littérature. Des mesures obtenues dans la même installation par LDV et par tube de Pitot ont été également utilisées et ont confirmé les résultats PIV.

L'exploration du jet par PIV a permis de déterminer l'évolution spatio-temporelle des corrélations de vitesse pour un grand nombre de points de référence au centre de la couche de cisaillement et sur l'axe du jet. De ces données, les échelles intégrales spatiales et temporelles ont été déduites, et la confrontation avec les quelques résultats trouvés dans la littérature s'est révélée satisfaisante.

Ce travail de validation montre la qualité des mesures obtenues et présente la base de données ainsi constituée. Ces résultats enrichissent et complètent les quelques mesures de corrélations fournies dans la littérature. Leur utilisation peut servir par exemple à la validation de résultats de simulations numériques ou à tester des modèles statistiques de prévision acoustique. À ce titre, de nombreux spectres de pression acoustique ont également été acquis dans cette même installation et pour des configurations d'écoulement identiques, voir la thèse de Barré [2]. L'utilisation de ces données peut également aider à l'analyse de la turbulence dans les jets. En particulier, le présent travail a permis de montrer les points suivants :

- le caractère quasi-isotrope des corrélations au centre de la couche de cisaillement et sur l'axe du jet ;
- le non-alignement des ellipses d'iso-corrélation R_{11} dans la couche de cisaillement avec les axes principaux du jet ;
- la relation de proportionnalité entre les échelles intégrales dans la couche de cisaillement $L_{ii}^{(k)}$ et l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ , les échelles intégrales calculées étant peu dépendantes du choix de la définition du coefficient de corrélation (expressions (3.6) à (3.9)) ;
- la croissance quasiment nulle de l'étendue de la corrélation R_{22} sur l'axe du jet ainsi que pour R_{11} dans la direction radiale, R_{11} s'allongeant très légèrement dans la direction axiale ;
- un temps de décorrélation τ_{11} relativement similaire au temps de la dissipation des fluctuations turbulentes Θ ;
- une longueur d'extinction de la turbulence l_{ii} de l'ordre de $1D$ à $2D$;
- la faible influence de ces conclusions par rapport au nombre de Mach du jet M_j .

Conclusion générale

Dans cette thèse trois sujets relatifs au bruit de jet subsonique ont été abordés.

Le premier sujet concerne le bruit d'appariement tourbillonnaire dans la couche de cisaillement d'un jet excité. Dans un premier temps, le jet naturel a été caractérisé de manière très détaillée afin de justifier l'absence de tout biais introduit par l'installation. Les résultats classiques obtenus pour un jet dans la gamme de nombre de Mach et de nombre de Reynolds étudiés ont été retrouvés. Par ailleurs, un phénomène de modulation des fluctuations dans la couche de cisaillement a été mis en évidence. Cet effet a été également observé par Laufer et Monkewitz [53, 64], mais ce qu'aucune autre étude n'avait pourtant confirmé depuis. L'interprétation proposée dans cette thèse repose sur l'interaction de battement entre le mode axisymétrique et le premier mode hélicoïdal des instabilités dans la couche de cisaillement. Dans un second temps, une excitation acoustique a été utilisée pour contrôler l'appariement des tourbillons dans la couche de cisaillement. Les deux formes de directivité généralement associées à ce phénomène ont été reproduites. En particulier, le rayonnement superdirectif a été observé pour la seconde fois seulement depuis l'expérience de Laufer & Yen [54]. Par ailleurs, les conditions aérodynamiques à l'origine de ces deux émissions ont été isolées. Il s'agit de l'état de la couche de cisaillement initiale. Dans le cas de conditions parfaitement laminares, on observe une cascade d'appariements très organisés. Ces appariements constituent des sources acoustiques relativement cohérentes le long de l'écoulement. Le rayonnement sous-harmonique émis par les deux premiers appariements présente un angle d'extinction autour de 90° de l'axe du jet, dans notre cas. Ce diagramme de directivité a été interprété en calculant le rayonnement acoustique du champ proche constitué d'une onde de pression modulée par deux lobes sinusoïdaux au voisinage des appariements et oscillant en opposition de phase. Dans le cas d'une couche de cisaillement nominale laminaire, les tourbillons se déstructurent lors de leur appariement. Dans ce cas, on obtient une seule source acoustique, produisant un champ proche gaussien et un champ lointain superdirectif.

Le rayonnement acoustique par des ondes d'instabilité dans un jet subsonique est discuté dans la deuxième partie. Dans le cadre d'une analyse linéaire et locale, on s'intéresse en particulier aux modes d'instabilité absolue. À partir des profils d'un jet calculé numériquement par LES, on montre que ces instabilités peuvent avoir une vitesse de phase supersonique, notam-

ment à l'extrémité aval du cône potentiel. La direction de leur rayonnement se situe dans un secteur angulaire entre 30° à 40° par rapport à l'axe du jet. Toutefois, les fluctuations absolues sont stables et leur présence dans le jet n'est donc pas attendue. On constate néanmoins une certaine pertinence de cette prévision acoustique par rapport au rayonnement obtenu par la simulation LES.

Dans la troisième partie, le résultat des mesures par PIV des corrélations spatio-temporelles de vitesse en deux points dans un jet subsonique à grand nombre de Mach sont fournis. La comparaison de ces données avec les quelques résultats trouvés dans la littérature a permis de valider nos mesures. Une base de données relativement exhaustive a été obtenue. De ces mesures, un certain nombre de résultats concernant la turbulence ont été établis, notamment les échelles intégrales spatiales et temporelles des fluctuations dans la couche de cisaillement et sur l'axe du jet. Le caractère quasi-isotrope de la turbulence a été également montré.

Perspectives

À la suite de ce travail, plusieurs questions concernant le bruit de jet subsonique ont été résolues et un certain nombre de données expérimentales utiles ont été obtenues. Il serait intéressant à présent d'approfondir certaines questions posées par les résultats de cette étude.

Concernant le bruit d'appariement, le rayonnement associé aux différents sous-harmoniques de l'excitation pourrait être analysé dans le cas d'une cascade de plusieurs appariements consécutifs. En particulier, pour le sous-harmonique dont la saturation se produit à l'extrémité aval du cône potentiel, il est très probable que les structures se décorrèlent lors de leur appariement, la question étant alors de savoir si le rayonnement est superdirectif ou non. Du point de vue de la modélisation théorique, l'obtention d'un champ proche gaussien ou sinusoïdal en fonction de la stabilité de l'appariement reste également à éclaircir. Il s'agit pour cela de mieux comprendre les mécanismes en jeu dans la dynamique de l'appariement. L'analyse menée par Mankbadi [59] fournit certains éléments de réponse. En prenant en compte les différents échanges énergétiques entre les composantes sous-harmoniques, celui-ci décrit convenablement la croissance de ces fluctuations. Mankbadi se limite toutefois aux fluctuations basse-fréquence au centre du jet. Sa démarche pourrait être poursuivie pour le mode le plus instable de la couche de cisaillement et ses sous-harmoniques. Dans le cas d'un éclatement tourbillonnaire lors de l'appariement, le mécanisme de la déstabilisation reste également à comprendre. L'analyse expérimentale de Hussain & Zaman [40] montre par exemple la présence de lobes azimutaux précédant l'éclatement des tourbillons. S'agit-il d'une instabilité secondaire dans l'évolution d'anneaux de vorticité en interaction (la première instabilité étant leur appariement)? Pour expliquer la dégénérescence vers la turbulence, les travaux de Pier [67] concernant la stabilité de la couche limite sur un plateau tournant fournissent peut être une analogie intéressante. De manière analogue, on peut penser que la présence de nombreux points d'inflexion introduits par les lobes azimutaux conduirait à une nouvelle déstabilisation de cet état limite, ce processus se répétant ainsi de suite jusqu'à la déstabilisation complète des structures annulaires. Enfin, on peut également envisager de reproduire l'analyse expérimentale menée dans cette thèse par une simulation numérique. Dans ce cas, il convient de pouvoir simuler des conditions initiales laminares et transitionnelles, ce qui a été fait dans le cadre de la thèse de Barré [2] par exemple.

Concernant le rayonnement des instabilités absolues, il convient d'examiner avant tout la

réalité de ces fluctuations. Le rayonnement très organisé et quasi mono-fréquentiel obtenu par Bogey & Bailly [10] dans le cas du jet à très faible nombre de Reynolds indique toutefois la présence d'une fluctuation également très organisée et de type onde d'instabilité. Il ne s'agit probablement pas d'un mode global linéaire compte tenu de l'évolution non-parabolique de $\omega_{0i}(x)$ (et négatif $\omega_{0i} < 0$) à l'extrémité aval du cône potentiel. Dans cette zone de mélange et d'intenses niveaux de fluctuations, il faudrait pouvoir prendre en compte la dynamique non-linéaire des fluctuations et décrire les échanges d'énergie avec la turbulence.

Concernant les corrélations spatio-temporelles de vitesse, un certain nombre d'utilisations des données collectées ont déjà été mentionnées. Ajoutons également, l'étude de la pertinence des simulations numériques de type RANS pour prévoir les échelles intégrales. Par ailleurs, dans le but d'améliorer de futures campagnes de mesures, il serait judicieux de considérer des retards τ plus grands afin d'obtenir la totalité de la décroissance temporelle des corrélations. Ceci doit se faire en augmentant la taille du domaine de mesure PIV, ou en déplaçant la seconde caméra en fonction de τ de manière à suivre la convection de l'empreinte de corrélation. Pour pouvoir estimer le retard maximal nécessaire *a priori*, on peut utiliser la relation obtenue dans cette thèse $\tau_{11} u_{1M} / L_{11}^1 \sim 1$ et prendre alors un décalage temporel maximal voisin de $1 \times \tau_{11}$, la distance parcourue lors de la convection étant voisine de $0.6U_j\tau_{11}$ dans la couche de cisaillement.

Annexe A

Rayonnement d'une source aéroacoustique annulaire et compacte

A.1 Cas d'une distribution parfaitement axisymétrique

On considère la répartition annulaire de vorticité suivante, voir également la figure A.1 :

$$\vec{\omega} = \omega(r, x, t)\vec{e}_\phi$$

En supposant l'étendue de ce domaine acoustiquement compacte, on peut utiliser la formulation de M ohring pour calculer le rayonnement acoustique :

$$p'(\vec{R}, t) = \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2 R^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_V \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{y})}_{c} \underbrace{\vec{R} \cdot \left\{ \underbrace{\vec{\omega} \left(\vec{y}, t - \frac{R}{c_0} \right) \wedge \vec{y}}_a \right\}}_b d\vec{y}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_d$

où $\vec{R} = R\vec{e}_R$ dénote la position de l'observateur et $\vec{y} = r\vec{e}_r + x\vec{e}_x$ est un point dans la zone de vorticité. L'observateur est situé dans le plan formé par les directions 1 et 2. On calcule alors :

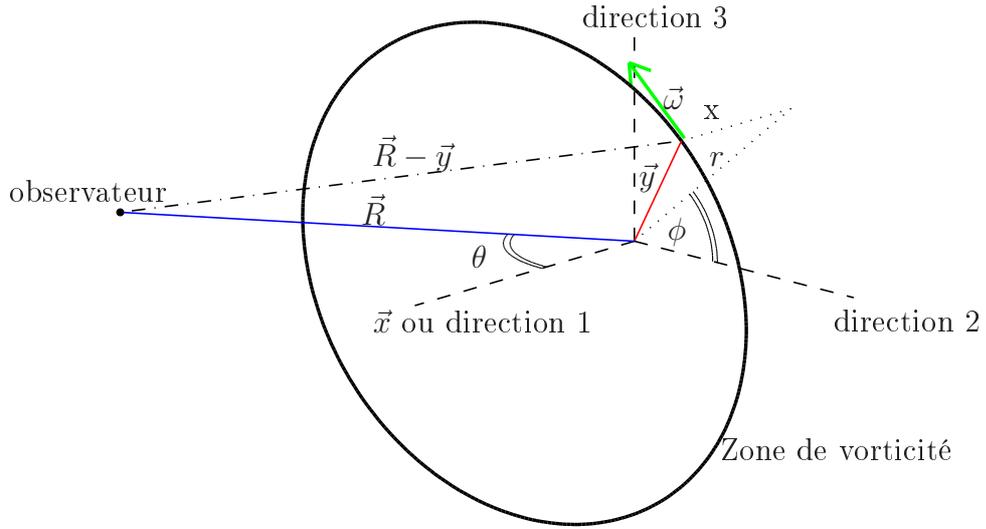
$$\begin{aligned} a &= \omega\vec{e}_\phi \wedge (r\vec{e}_r + x\vec{e}_x) \\ &= -\omega r\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_r \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} b &= R\vec{e}_R \cdot (-\omega r\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_r) \\ &= -\omega Rr \cos \theta + \omega Rx \sin(\theta) \cos(\phi) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} c &= R\vec{e}_R \cdot (r\vec{e}_r + x\vec{e}_x) \\ &= Rr \sin(\theta) \cos(\phi) + Rx \cos(\theta) \end{aligned}$$

FIG. A.1: Distribution annulaire de vorticit   $\vec{\omega}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 d &= R^2 \omega \left[-r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi + r x \sin^2 \theta \cos^2 \phi - r x \cos^2 \theta + x^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \right] \\
 &= R^2 \left[\underbrace{(x^2 - r^2) \omega \frac{\sin(2\theta)}{2} \cos \phi}_{T_1} + \underbrace{r x \omega (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta)}_{T_2} \right]
 \end{aligned}$$

L'int  gration du terme T_1 pour $\phi \in [0, 2\pi]$ fournit une contribution nulle et p' se r  sume donc    :

$$\begin{aligned}
 p'(R, \theta, t) &= \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2 R} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \int \int \omega r x (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta) r d\phi dr dx \\
 &= \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2 R} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \underbrace{\int \int r^2 x \omega dr dx}_{Q\left(t - \frac{R}{c_0}\right)} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta d\phi \\
 &= \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2} \frac{Q\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{R} (\pi \sin^2 \theta - 2\pi \cos^2 \theta)
 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$p'(R, \theta, t) = \frac{\rho_0}{12c_0^2} \frac{Q\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{R} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

A.2 Cas d'une distribution non-axisymétrique

On s'intéresse ici au rayonnement d'une distribution de vorticité annulaire dont la répartition peut varier azimutalement :

$$\vec{\omega} = \omega_\phi(\phi)\omega_\perp(r, x, t)\vec{e}_\phi$$

Le calcul du terme précedent d est identique, mais dans ce cas, l'intégration de T_1 selon ϕ n'est pas forcément nulle. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} p'(R, \theta, t) &= \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2 R} \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \int r (x^2 - r^2) \omega_\perp dr dx \int \frac{\sin(2\theta)}{2} \omega_\phi \cos \phi d\phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \int \omega_\perp r^2 x dx dr \int \omega_\phi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta) d\phi \right] \\ &= \frac{-\rho_0}{12\pi c_0^2 R} \left[P \frac{\sin(2\theta)}{2} \underbrace{\int \omega_\phi \cos \phi d\phi}_{T_5} + Q \underbrace{\int \omega_\phi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta) d\phi}_{T_6} \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P &= P \left(t - \frac{R}{c_0} \right) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \int r (x^2 - r^2) \omega_\perp \left(t - \frac{R}{c_0} \right) dx dr \\ Q &= Q \left(t - \frac{R}{c_0} \right) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int \int r^2 x \omega_\perp \left(t - \frac{R}{c_0} \right) dx dr \end{aligned}$$

En utilisant la décomposition de ω_ϕ en série de Fourier :

$$\omega_\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)$$

le terme T_5 se réduit à :

$$\int \omega_\phi \cos \phi d\phi = \pi a_1$$

et le terme T_6 à :

$$\begin{aligned} \int \omega_\phi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta) d\phi &= \int \omega_\phi \left(\sin^2 \theta \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} - \cos^2 \theta \right) d\phi \\ &= \pi a_0 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \pi a_2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$p'(R, \theta, t) = \frac{\rho_0}{12c_0^2 R} \left[a_0 Q \times (3 \cos^2 \theta - 1) - a_1 P \frac{\sin(2\theta)}{2} - a_2 Q \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]$$

Annexe B

Rayonnement acoustique d'une frontière cylindrique de pression

B.1 Position du problème

Dans cette, le rayonnement acoustique d'une frontière cylindrique de pression est étudié. Sur cette frontière (de rayon $r = r_j$) la pression $p'(x, r = r_j, \phi, t)$ est prescrite sous la forme d'une onde convectée dans la direction x et modulée par une enveloppe $E(x)$:

$$p'(x, r = r_j, \phi, t) = E(x) \exp \{i(k_x x - \omega t)\} \quad (\text{B.1})$$

Les paramètres ω et k_x représentent respectivement la pulsation et le nombre d'onde axial de la fluctuation. Le milieu environnant $r \geq r_j$ est supposé au repos et homogène. Dans ce milieu, la pression rayonnée est cherchée sous la forme :

$$p'(x, r, \phi, t) = p(x, r) \exp(-i\omega t)$$

et l'équation vérifiée par $p(x, r)$ s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) p + k_{ac}^2 p = 0 \quad (\text{B.2})$$

où $k_{ac} = \omega/c_\infty$ est le nombre d'onde acoustique et c_∞ la célérité du son.

Pour résoudre l'équation de propagation (B.2) avec la condition aux limites (B.1) on utilise la transformée de Fourier de $p(x, r)$ selon x :

$$\hat{p}(k, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, r) \exp(-ikx) dx$$

Dans l'espace (k, r) , la solution de l'équation (B.2) s'écrit sous la forme :

$$\hat{p}(k, r) = \begin{cases} C(k) H_0^1(ik_r r) & \text{si } |k| \geq k_{ac} \\ C(k) H_0^1(k_r r) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

avec $k_r = \sqrt{|k_{ac}^2 - k^2|}$ et H_0^1 la fonction d'Hankel de première espèce et d'ordre 0. Cette solution s'atténue exponentiellement dans la direction radiale pour $|k| > k_{ac}$ ($H_0^1(ik_r r) \sim \exp(-k_r r)/\sqrt{k_r r}$) et algébriquement pour $|k| < k_{ac}$ ($H_0^1(k_r r) \sim \exp(ik_r r)/\sqrt{k_r r}$).

Le coefficient $C(k)$ est déterminé par la condition aux limites (B.1) dont la transformée de Fourier est :

$$\hat{p}(k, r = r_j) = \hat{E}(k - k_x)$$

En évaluant $\hat{p}(k, r)$ pour $r = r_j$ dans l'équation (B.3), on obtient :

$$C(k) = \begin{cases} \hat{E}(k - k_x)/H_0^1(ik_r r_j) & \text{si } |k| \geq k_{ac} \\ \hat{E}(k - k_x)/H_0^1(k_r r_j) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

La solution au problème (B.1) et (B.2) est alors obtenue par la transformée de Fourier inverse de l'expression (B.3), en utilisant l'expression (B.4) pour obtenir $C(k)$. À notre connaissance, aucune formulation explicite de cette solution n'a été proposée. Par la suite, seules quelques solutions asymptotiques obtenues en champ lointain et en champ proche sont étudiées.

B.2 Champ lointain

En champ lointain ($k_r r \gg 1$), la partie algébrique de l'expression (B.3) (pour $|k| < k_{ac}$) contribue majoritairement à la solution du problème de rayonnement. Dans ce cas, la pression $p(x, r)$ se réduit à :

$$p(x, r) \sim \int_{-k_{ac}}^{+k_{ac}} \frac{\hat{E}(k - k_x)}{H_0^1(k_r r_j)} H_0^1(k_r r) \exp(ikx) dk \quad (\text{B.5})$$

$$\sim \int_{-k_{ac}}^{+k_{ac}} \frac{\hat{E}(k - k_x)}{H_0^1(k_r r_j)} \frac{\exp(ik_r r)}{\sqrt{k_r r}} \exp(ikx) dk \quad (\text{B.6})$$

Pour évaluer cette expression avec $k_r r \gg 1$, on utilise la méthode de la phase stationnaire. Pour cela, on introduit les coordonnées sphériques (R, θ) :

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ r &= R \sin \theta \end{aligned}$$

et l'on exprime l'équation (B.6) à l'aide de ce système de coordonnées :

$$p(R, \theta) \sim \int_{-k_{ac}}^{+k_{ac}} \frac{\hat{E}(k - k_x)}{H_0^1(k_r r_j)} \frac{1}{\sqrt{k_r R \sin \theta}} \exp\{i\Psi(k)R\} dk \quad (\text{B.7})$$

où $\Psi(k) = k \cos \theta + k_r \sin \theta$. Le nombre d'onde critique k_c vérifie l'équation :

$$\Psi'(k_c) = \cos \theta - \frac{k_c}{\sqrt{k_{ac}^2 - k_c^2}} \sin \theta = 0 \quad (\text{B.8})$$

soit :

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{k_c^2/k_{ac}^2}{1 - k_c^2/k_{ac}^2}$$

d'où :

$$k_c = k_{ac} \cos \theta$$

la solution $k_c = -k_{ac} \cos \theta$ ne vérifiant pas l'expression (B.8). Pour $k_c R \gg 1$, l'expression (B.7) se réduit alors à :

$$p(R, \theta) \sim \left(\frac{2\pi}{R|\Psi''(k_c)|} \right)^{1/2} \frac{\hat{E}(k_c - k_x)}{H_0^1(k_r(k_c)r_j)} \frac{1}{\sqrt{k_r(k_c)R \sin \theta}} \exp \{i\Psi(k_c)R\} i \exp(-i\pi/4) \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$k_r(k_c) = \sqrt{k_{ac}^2 - k_c^2} = k_{ac} \sin \theta$$

et :

$$\Psi(k_c) = k_c \cos \theta + k_r(k_c) \sin \theta = k_{ac}$$

Par ailleurs :

$$\Psi''(k_c) = -\frac{\sqrt{k_{ac}^2 - k_c^2} + k_c^2/\sqrt{k_{ac}^2 - k_c^2}}{k_{ac}^2 - k_c^2} \sin \theta$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Psi''(k_c) &= -\frac{k_{ac} \sin \theta + k_{ac}^2 \cos^2 \theta / (k_{ac} \sin \theta)}{k_{ac}^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{k_{ac} \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

et l'expression (B.9) s'écrit donc explicitement comme suit :

$$p(R, \theta) \sim \left(\frac{2\pi k_{ac} \sin^2 \theta}{R} \right)^{1/2} \frac{\hat{E}(k_{ac} \cos \theta - k_x)}{H_0^1(k_{ac} r_j \sin \theta)} \frac{1}{\sqrt{k_{ac} R \sin^2 \theta}} \exp \left\{ i k_{ac} R + i \frac{\pi}{4} \right\}$$

Après simplifications :

$$p(R, \theta) \sim \sqrt{2\pi} \frac{1}{k_{ac} R} \frac{k_{ac} \hat{E}(-k_x D_\theta)}{H_0^1(k_{ac} r_j \sin \theta)} \exp \left\{ i k_{ac} R + i \frac{\pi}{4} \right\}$$

où $D_\theta = 1 - M_p \cos \theta$ est le facteur Doppler et $M_p = k_{ac}/k_x$ est le nombre de Mach de phase. En faisant l'hypothèse supplémentaire de la compacité du champ proche de pression dans la direction radiale $k_{ac} r_j \ll 1$, le terme $H_0^1(k_{ac} r_j \sin \theta)$ peut être remplacé par $\ln(k_{ac} r_j)$ et l'on obtient finalement :

$$p(R, \theta) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\ln(k_{ac} r_j)} k_{ac} \hat{E}(-k_x D_\theta) \frac{\exp(i k_{ac} R + i \frac{\pi}{4})}{k_{ac} R} \quad (\text{B.10})$$

Pour évaluer la fraction α d'énergie acoustique rayonnée en champ lointain E_{cl} par rapport à l'énergie totale E_t du champ de pression sur la frontière $r = r_j$, calculons chacun des termes E_t et E_{cl} :

$$\begin{aligned} E_t &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} |p(x, r = r_j)|^2 r_j d\phi dx \\ &= 2\pi r_j \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(x) dx \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_{cl} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=-\pi}^{+\pi} |p(R, \theta)|^2 R \sin \theta d\phi R d\theta \\ &= \frac{4\pi^2}{\ln^2(k_{ac} r_j)} \int_0^{\pi} \hat{E}^2(k_{ac} \cos \theta - k_x) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

En remarquant que : (à l'aide du changement de variable $k_{ac} \cos \theta = u k_x$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \hat{E}^2(k_{ac} \cos \theta - k_x) k_{ac} \sin \theta d\theta &= k_{ac} \frac{1}{k_{ac}/k_x} \int_{-k_{ac}/k_x}^{k_{ac}/k_x} \hat{E}^2 \{k_x(u - 1)\} du \\ &\sim 2k_{ac} \hat{E}^2(-k_x) \quad \text{pour } M_p = k_{ac}/k_x \ll 1 \end{aligned}$$

l'expression E_{cl} peut se réduire à :

$$E_{cl} = \frac{8\pi^2 k_{ac}}{\ln^2(k_{ac} r_j)} \hat{E}^2(-k_x)$$

Finalement :

$$\alpha = \frac{4\pi}{k_{ac} r_j \ln^2(k_{ac} r_j)} / \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E^2(x)}{\hat{E}^2(-k_x)} \frac{dx}{k_{ac}} \right) \quad (\text{B.11})$$

ou bien encore :

$$\alpha \sim \frac{4\pi}{k_{ac} r_j \ln^2(k_{ac} r_j)} / \left(\int_{-k_{ac}}^{+k_{ac}} \frac{\hat{E}^2(k)}{\hat{E}^2(-k_x)} \frac{dk}{k_{ac}} \right)$$

L'efficacité du rayonnement de la frontière de pression est évaluée à la section B.4 pour une fonction d'enveloppe sinusoïdale et une fonction d'enveloppe gaussienne.

B.3 Champ proche

Nous cherchons à présent à évaluer la solution du problème (B.1) et (B.2) en champ proche. En se limitant à un domaine à proximité de la frontière ($r = r_j$) dont l'étendue radiale est très petite vis-à-vis de la longueur d'onde acoustique ($k_{ac}|r - r_j| \ll 1$), les effets de la propagation acoustique peuvent être omis. Le champ de pression est quasiment incompressible. La solution

à ce problème est obtenue en imposant simplement $k_{ac} = 0$ dans les expressions (B.3) et (B.4) (problème régulier) :

$$\hat{p}(k, r) \sim \frac{\hat{E}(k - k_x)}{H_0^1(i|k|r_j)} H_0^1(i|k|r), \forall k \quad (\text{B.12})$$

et par transformée de Fourier inverse, on obtient finalement :

$$p(x, r) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{E}(k - k_x)}{H_0^1(i|k|r_j)} H_0^1(i|k|r) \exp(ikx) dk \quad (\text{B.13})$$

À notre connaissance, aucune formulation plus explicite ne peut être exprimée pour une enveloppe $E(x)$ quelconque et seules quelques approches asymptotiques permettent de continuer le calcul analytique. Par exemple, en l'absence de modulation de la pression de frontière :

$$\hat{E}(k - k_x) = \delta(k - k_x)$$

l'expression (B.13) se réduit à :

$$p(x, r) \sim \frac{H_0^1(ik_x r)}{H_0^1(ik_x r_j)} \exp(ik_x x)$$

Pour $k_x r \gg 1$, et avec une hypothèse supplémentaire de compacité dans la direction radiale $k_x r_j \gg 1$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} p(x, r) &\sim \frac{\exp(-k_x r) / \sqrt{k_x r}}{\exp(-k_x r_j) / \sqrt{k_x r_j}} \exp(ik_x x) \\ &\sim \left(\frac{r}{r_j}\right)^{1/2} \exp\{ik_x(z + r_j)\} \end{aligned}$$

avec $z = x - r_j + i(r - r_j)$.

Supposons plus généralement le cas d'une échelle caractéristique σ_e très grande devant la longueur d'onde de la fluctuation de pression, soit $\sigma_e k_x \gg 1$. En posant le changement de variable $k - k_x = u/\sigma_e$ et en distinguant les nombres d'ondes k positifs et négatifs, l'intégrale (B.13) se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} p(x, r) &= \exp(ik_x x) \int_{-\sigma_e k_x}^{+\infty} \frac{\hat{E}\left(\frac{u}{\sigma_e}\right)}{H_0^1\left\{i(\sigma_e k_x + u)\frac{r_j}{\sigma_e}\right\}} H_0^1\left\{i(\sigma_e k_x + u)\frac{r}{\sigma_e}\right\} \exp\left(i\frac{u}{\sigma_e}x\right) \frac{du}{\sigma_e} \\ &+ \exp(ik_x x) \int_{-\infty}^{-\sigma_e k_x} \frac{\hat{E}\left(\frac{u}{\sigma_e}\right)}{H_0^1\left\{-i(\sigma_e k_x + u)\frac{r_j}{\sigma_e}\right\}} H_0^1\left\{-i(\sigma_e k_x + u)\frac{r}{\sigma_e}\right\} \exp\left(i\frac{u}{\sigma_e}x\right) \frac{du}{\sigma_e} \end{aligned}$$

Pour $\sigma_e k_x \gg 1$, la seconde intégrale s'annule et la première se réduit à :

$$\begin{aligned} p(x, r) &\sim \exp(ik_x x) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}\left(\frac{u}{\sigma_e}\right) \frac{\exp\left(-k_x r - \frac{u}{\sigma_e} r\right) / \sqrt{(\sigma_e k_x + u) \frac{r}{\sigma_e}}}{\exp\left(-k_x r_j - \frac{u}{\sigma_e} r_j\right) / \sqrt{(\sigma_e k_x + u) \frac{r_j}{\sigma_e}}} \exp\left(i \frac{u}{\sigma_e} x\right) \frac{du}{\sigma_e} \\ &\sim \left(\frac{r_j}{r}\right)^{1/2} \exp\{k_x [ix - (r - r_j)]\} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}\left(\frac{u}{\sigma_e}\right) \exp\left\{[ix - (r - r_j)] \frac{u}{\sigma_e}\right\} \frac{du}{\sigma_e} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

En utilisant le changement de variable $K = u/\sigma_e$, on obtient alors :

$$p(x, r) \sim \left(\frac{r_j}{r}\right)^{1/2} E(z + r_j) \exp\{ik_x(z + r_j)\} \quad (\text{B.15})$$

Cette expression montre que la distribution de pression sur la frontière $r = r_j$ se prolonge analytiquement en champ proche $r \geq r_j$ avec un facteur supplémentaire d'atténuation en $1/\sqrt{r}$. L'expression (B.15) peut être simplifiée d'avantage en comparant les longueurs caractéristiques pour chacun des facteurs : $E(z + r_j)$, $(r_j/r)^{1/2}$ et $\exp\{ik_x(z + r_j)\}$. À l'aide de la variable $\eta = k_x z$, l'expression (B.15) se réduit à (pour $\sigma_e k_x \gg 1$) :

$$\begin{aligned} p(x, r) &\sim \left(\frac{r_j}{r_j + \Im(\sigma_e \eta) / (\sigma_e k_x)}\right)^{1/2} E\left(\frac{1}{\sigma_e k_x} \sigma_e \eta + r_j\right) \exp(i\eta + ik_x r_j) \\ &\sim E(r_j) \exp\{ik_x(z + r_j)\} \end{aligned}$$

Finalement, l'atténuation du champ de pression proche est exponentielle et fonction de la variable radiale r uniquement :

$$|p(x, r)| \sim E(r_j) \exp\{-k_x(r - r_j)\} \quad (\text{B.16})$$

B.4 Applications

B.4.1 Fonction d'enveloppe gaussienne

Supposons la fonction d'enveloppe $E(x)$ gaussienne :

$$E(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right)^2\right\}$$

Le champ acoustique lointain fourni par l'expression (B.10) requiert le calcul de la transformée de Fourier de $E(x)$:

$$\hat{E}(k) = \widehat{\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_e^2}\right)} \times \exp(-ikx_{s1})$$

Or :

$$\begin{aligned} \widehat{\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_e^2}\right)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/\sigma_e^2) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x + \frac{ik\sigma_e^2}{2})^2}{\sigma_e^2} - \frac{k^2\sigma_e^2}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{k^2\sigma_e^2}{4}\right) \frac{1}{\sigma_e} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx}_{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\hat{E}(k) = \frac{\sigma_e}{2\sqrt{\pi}} \times \exp(-ikx_{s1}) \times \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k^2}{4}\right)$$

Le champ de pression acoustique est donc donné par :

$$p(R, \theta) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac}\sigma_e}{\ln(k_{ac}r_j)} \exp(ik_x D_\theta) \times \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{4} D_\theta^2\right) \frac{\exp(ik_{ac}R + i\frac{\pi}{4})}{k_{ac}R}$$

La directivité acoustique s'écrit :

$$|p(R, \theta)| \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac}\sigma_e}{\ln(k_{ac}r_j)} \times \frac{1}{k_{ac}R} \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{4} D_\theta^2\right)$$

et pour $M_p \ll 1$:

$$|p(R, \theta)| \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac}\sigma_e}{\ln(k_{ac}r_j)} \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{4}\right) \times \frac{1}{k_{ac}R} \exp\left(\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{2} M_p \cos \theta\right) \quad (\text{B.17})$$

Le rayonnement acoustique est d'autant plus directif (dans la direction x) que le paramètre $\sigma_e^2 k_x^2/4$ est élevé, c'est-à-dire que la taille caractéristique σ_e du champ proche est grande devant la longueur d'onde de la fluctuation de pression $\lambda_x = 2\pi/k_x$.

Pour estimer l'efficacité du rayonnement acoustique de la distribution de pression gaussienne, évaluons le terme α donné par l'expression (B.11) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4\pi}{k_{ac}r_j \ln^2(k_{ac}r_j)} \hat{E}^2(-k_x) / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-2\left(\frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right)^2\right\} \frac{dx}{k_{ac}} \\ &= \frac{4\pi}{k_{ac}r_j \ln^2(k_{ac}r_j)} \hat{E}^2(-k_x) / \left(\frac{\sigma_e}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{ac}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx}_{\sqrt{\pi}} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_e/r_j}{\ln^2(k_{ac}r_j)} \exp\left(-\frac{\sigma_e^2 k_x^2}{2}\right)$$

Ce résultat montre que plus le champ proche de pression est étendu par rapport à la longueur d'onde $\lambda_x = 2\pi/k_x$ ($\sigma_e k_x \gg 1$), moins le rayonnement est efficace. L'influence du paramètre $\sigma_e k_x$ sur l'efficacité du rayonnement α est gaussienne ($\exp[-\sigma_e^2 k_x^2/2]$) et est prépondérante sur toutes les autres caractéristiques géométriques du champ de pression. On remarque également que plus l'étendue du champ proche est grande dans la direction x par rapport à la direction radiale, meilleure est l'efficacité du rayonnement (terme algébrique : σ_e/r_j). Enfin, le paramètre de compacité radiale $k_{ac} r_j$ est défavorable au rayonnement acoustique, plus celui-ci est grand (terme en $1/\ln^2[k_{ac} r_j]$).

B.4.2 Fonction d'enveloppe sinusoïdale

On considère ici la fonction d'enveloppe sinusoïdale suivante :

$$E(x) = \cos\left(\pi \frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right) \times B(x_{s1}, \sigma_e) + P_{21} \cos\left(\pi \frac{x - x_{s2}}{\sigma_e}\right) \times B(x_{s2}, \sigma_e)$$

Le calcul de la transformée de Fourier de $E(x)$ est mené en remarquant au préalable le développement suivant :

$$\hat{E}(k) = \{\exp(-ikx_{s1}) + P_{21} \exp(-ikx_{s2})\} \times \widehat{\cos\left(\pi \frac{x}{\sigma_e}\right) B(0, \sigma_e)}$$

Il s'agit alors d'évaluer la transformée suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\cos\left(\pi \frac{x}{\sigma_e}\right) B(0, \sigma_e)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\pi \frac{x}{\sigma_e}\right) B(0, \sigma_e) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_e/2}^{+\sigma_e/2} \cos\left(\pi \frac{x}{\sigma_e}\right) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\sigma_e/2}^{+\sigma_e/2} \exp\left(i\pi \frac{x}{\sigma_e} - ikx\right) + \exp\left(-i\pi \frac{x}{\sigma_e} - ikx\right) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\left[\exp\left(i\pi \frac{x}{\sigma_e} - ikx\right)\right]_{-\sigma_e/2}^{+\sigma_e/2}}{\frac{i\pi}{\sigma_e} - ik} + \frac{1}{4\pi} \frac{\left[\exp\left(-i\pi \frac{x}{\sigma_e} - ikx\right)\right]_{-\sigma_e/2}^{+\sigma_e/2}}{-\frac{i\pi}{\sigma_e} - ik} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{k\sigma_e}{2}\right)}{\frac{\pi}{\sigma_e} - k} + \frac{1}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{k\sigma_e}{2}\right)}{\frac{\pi}{\sigma_e} + k} \\ &= \frac{\sigma_e}{2\pi^2} \frac{\cos\left(\frac{k\sigma_e}{2}\right)}{1 - \left(\frac{k\sigma_e}{\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\hat{E}(k) = \frac{\sigma_e}{2\pi^2} \{ \exp(-ikx_{s1}) + P_{21} \exp(-ikx_{s2}) \} \times \frac{\cos\left(\frac{k\sigma_e}{2}\right)}{1 - \left(\frac{k\sigma_e}{\pi}\right)^2}$$

Le champ lointain acoustique est alors donné par l'expression (B.10) :

$$p(R, \theta) \sim \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac}\sigma_e}{\ln(k_{ac}r_j)} I(\theta) D_a(\theta) \frac{\exp(ik_{ac}R + i\frac{\pi}{4})}{k_{ac}R}$$

D_a étant le rayonnement acoustique émis par un seul lobe de pression centré en $x = 0$:

$$D_a(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{k_x\sigma_e}{2} D_\theta\right)}{1 - \left(\frac{k_x\sigma_e}{\pi}\right)^2 D_\theta^2}$$

et I étant un terme d'interférence prenant en compte la présence des deux lobes de pression centrés en x_{s1} et x_{s2} :

$$I(\theta) = \exp(ik_x x_{s1} D_\theta) + P_{21} \exp(ik_x x_{s2} D_\theta)$$

La directivité acoustique s'obtient aisément :

$$|p(R, \theta)| \sim \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{k_{ac}\sigma_e}{\ln(k_{ac}r_j)} \times \frac{1}{k_{ac}R} |I(\theta) D_a(\theta)| \quad (\text{B.18})$$

Le diagramme de directivité est représenté à la figure B.1 pour différentes valeurs du paramètre P_{21} et du déphasage $k_x(x_{s2} - x_{s1})$. Ces courbes de directivité indiquent toutes la présence d'un minimum de pression. Ce minimum résulte du terme d'interférence :

$$|I(\theta)| = \left\{ 1 + P_{21}^2 + 2P_{21} \cos[k_x(x_{s2} - x_{s1})D_\theta] \right\}^{1/2}$$

Pour déterminer la direction θ^* de ce minimum, dérivons $|I(\theta)|$:

$$|I(\theta)|' = -P_{21} k_x (x_{s2} - x_{s1}) M_p \times \sin \theta \times \sin\{k_x(x_{s2} - x_{s1})D_\theta\} / |I(\theta)|$$

L'annulation de $|I(\theta)|'$ en $\theta = 0$ et $\theta = 180^\circ$ (terme en $\sin \theta$) correspond en fait à des maxima. L'angle θ^* est donné par l'annulation du terme :

$$\sin\{k_x(x_{s2} - x_{s1})D_{\theta^*}\}$$

soit :

$$\cos \theta^* = \frac{1}{M_p} \left\{ 1 - \frac{n\pi}{k_x(x_{s2} - x_{s1})} \right\} \quad (\text{B.19})$$

où n est un entier relatif. La position de θ^* est fonction du déphasage $k_x(x_{s2} - x_{s1})$. Si les lobes de pression oscillent en opposition de phase, c'est-à-dire $k_x(x_{s2} - x_{s1}) = \pi$, l'interférence des ondes émises par les deux lobes de pression est destructive dans la direction $\theta = 90^\circ$. La figure B.2 présente l'évolution de θ^* en fonction du déphasage $k_x(x_{s2} - x_{s1})$. L'angle d'extinction peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0° et 180° avec des variations pourtant faibles du déphasage de la fluctuation de pression, ce qui montre l'extrême sensibilité du modèle (B.18). L'influence du paramètre P_{21} est illustrée par la figure B.1. Ce paramètre contrôle principalement l'atténuation de la pression en θ^* . Pour $P_{21} = 1$, autrement dit lorsque les deux lobes de pression ont la même amplitude, l'extinction de la pression acoustique en θ^* est parfaite.

Pour estimer la fraction d'énergie acoustique rayonnée α , nous supposons que les deux arches de pression ne se recouvrent pas. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\pi \frac{x - x_{s1}}{\sigma_e}\right)^2 \times B(x_{s1}, \sigma_e) + P_{21}^2 \cos\left(\pi \frac{x - x_{s2}}{\sigma_e}\right)^2 \times B(x_{s2}, \sigma_e) dx \\ &= \frac{\sigma_e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(x) B(0, \pi) dx + P_{21}^2 \frac{\sigma_e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(x) B(0, \pi) dx \\ &= \frac{\sigma_e}{2} (1 + P_{21}^2) \end{aligned}$$

L'expression (B.11) fournit alors :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\pi^3} \frac{k_{ac}\sigma_e}{k_{ac}r_j \ln^2(k_{ac}r_j)} \frac{|\exp(ik_x x_{s1}) + P_{21} \exp(ik_x x_{s2})|^2}{1 + P_{21}^2} \times \frac{\cos^2\left(\frac{k_x \sigma_e}{2}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{k_x \sigma_e}{\pi}\right)^2\right\}^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \frac{\sigma_e/r_j}{\ln^2(k_{ac}r_j)} \left\{1 + \frac{2P_{21}}{1 + P_{21}^2} \cos[k_x(x_{s2} - x_{s1})]\right\} \times \frac{\cos^2\left(\frac{k_x \sigma_e}{2}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{k_x \sigma_e}{\pi}\right)^2\right\}^2} \end{aligned}$$

L'influence des paramètres σ_e/r_j et $k_{ac}r_j$ est similaire au cas de l'enveloppe gaussienne. De même, plus le paramètre géométrique $k_x \sigma_e$ est élevé, moins le rayonnement acoustique est efficace. Cet effet est algébrique (terme en $(k_x \sigma_e)^{-4}$) et n'est donc pas aussi influent que pour la distribution gaussienne. Par ailleurs, l'efficacité α peut être rigoureusement nulle pour certaines valeurs de $k_x \sigma_e$ comme le montre la figure B.3 tracée pour $(x_{s2} - x_{s1}) = \sigma_e$ et $P_{21} = 1$. La première annulation résulte du terme d'interférence pour $k_x(x_{s2} - x_{s1}) = \pi$!!

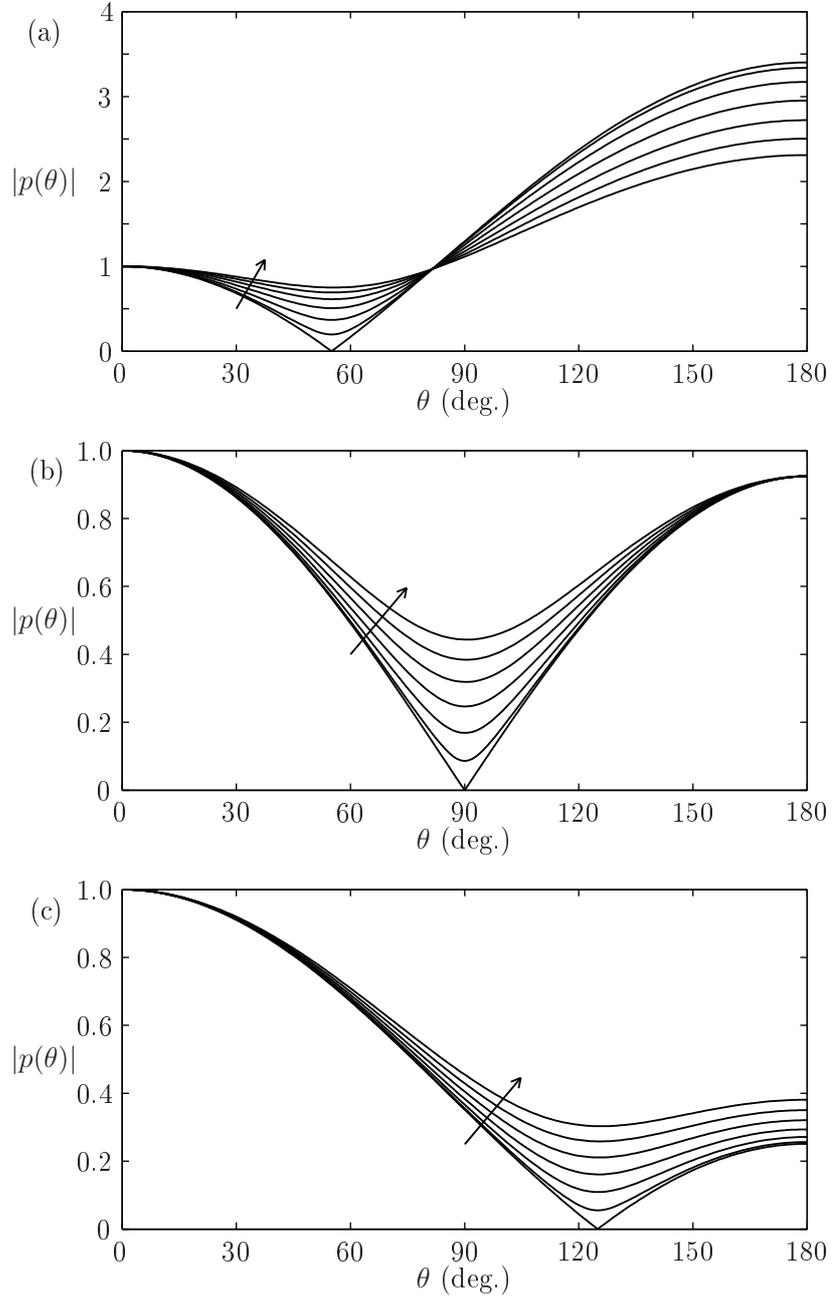


FIG. B.1: Directivités d'une enveloppe sinusoïdale en fonction de $k_x(x_{s2} - x_{s1})$ et P_{21} . Le paramètre $k_x(x_{s2} - x_{s1})$ est choisi pour que $\theta^* = 55^\circ$ (a), $\theta^* = 90^\circ$ (b) et $\theta^* = 125^\circ$ (c). Les flèches indiquent le sens croissant de P_{21} , de $P_{21} = 1$ à $P_{21} = 1.09$ par pas de 0.015.

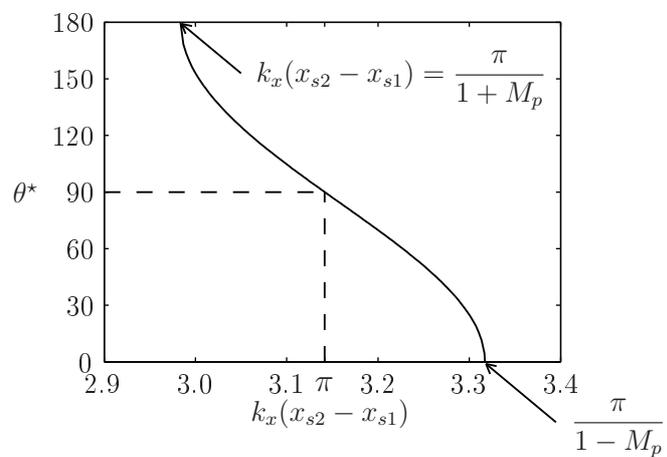


FIG. B.2: Position de l'angle d'extinction θ^* en fonction du déphasage $k_x(x_{s2} - x_{s1})$.

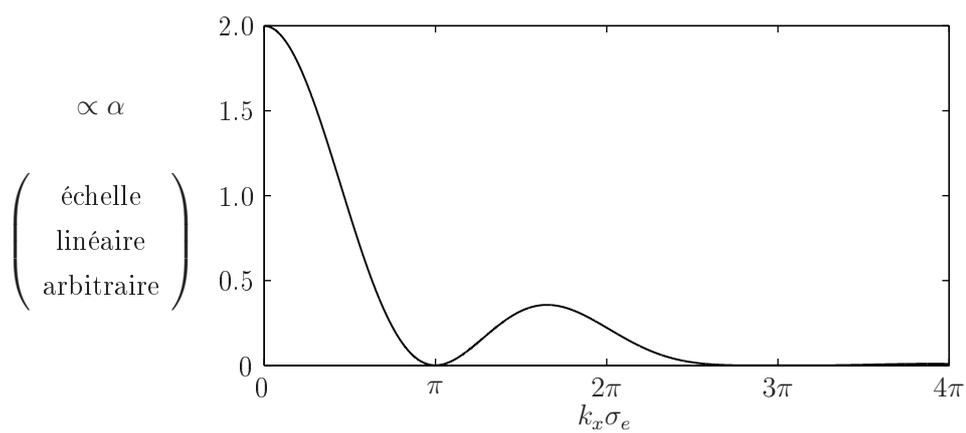


FIG. B.3: Efficacité de rayonnement de l'enveloppe sinusoïdale en fonction du paramètre de compacité axial $k_x \sigma_e$.

Bibliographie

- [1] BAILLY, C., LAFON, P., AND CANDEL, S. Subsonic and supersonic jet noise predictions from statistical source models. *AIAA Journal* 35, 11 (1997), 1688–1696.
- [2] BARRÉ, S. *Étude numérique et expérimentale du bruit aérodynamique : application aux jets subsoniques à nombre de Reynolds élevé*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.
- [3] BASTIN, F., LAFON, P., AND CANDEL, S. Computation of jet mixing noise due to coherent structures : the plane jet case. *J. Fluid Mech.* 335 (1997), 261–304.
- [4] BATCHELOR, G. K. *The theory of homogeneous turbulence*. 1953.
- [5] BATT, R. G. Some measurements on the effect of tripping the two-dimensional shear layer. *AIAA Journal* 13 (1975), 245–247.
- [6] BÉCHARA, W., LAFON, P., BAILLY, C., AND CANDEL, S. Application of a $k - \epsilon$ model to the prediction of noise for simple and coaxial free jets. *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 6 (1995), 3518–3531.
- [7] BERHAULT, J. M., SUNYACH, M., ARBEY, H., AND COMTE-BELLOT, G. Réalisation d’une chambre anéchoïque revêtue de panneaux et destinée à l’étude des bruits d’origine aérodynamique. *Acustica* 29, 2 (1973), 69–78. in French.
- [8] BERS, A. *Handbook of Plasma Physics. Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective*, vol. 335. Eds. M.N. Rosenbluth and R.Z. Sagdeev, North-Holland, 1983.
- [9] BOGEY, C. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2000.
- [10] BOGEY, C., AND BAILLY, C. Investigation of downstream and sideline subsonic jet noise using large eddy simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 20, 1 (2006), 23–40.
- [11] BOGEY, C., BAILLY, C., AND JUVÉ, D. Numerical simulation of the sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal* 38, 12 (2000), 2210–2218.
- [12] BOGEY, C., BAILLY, C., AND JUVÉ, D. Computation of flow noise using source terms in linearized euler’s equations. *AIAA Journal* 40, 2 (2002), 235–243.

- [13] BOGEY, C., GLOERFELT, X., AND BAILLY, C. Illustration of the inclusion of sound-flow interactions in lighthill's equation. *AIAA Journal* 41, 8 (2002), 1604–1606.
- [14] BOYD, J. P. Complex coordinates methods for hydrodynamic instabilities and sturm-liouville eigenproblems with an interior singularity. *J. Comput. Phys.* 57 (1985), 454–471.
- [15] BRADSHAW, P. The effect of initial conditions on the development of a free shear layer. *J. Fluid Mech* 26, 2 (1966), 225–236.
- [16] BRADSHAW, P., FERRISS, D. H., AND JOHNSON, R. F. Turbulence in the noise-producing region of a circular jet. *J. Fluid Mech.* 19 (1963), 591–624.
- [17] BRIDGES, J. Effect of heat on space-time correlations in jets. *AIAA Paper* (8–10 may 2006).
- [18] BRIDGES, J., AND WERNET, M. P. Measurements of the aeroacoustic sound source in hot jets. *AIAA Paper* (12–14 may 2003).
- [19] BRIDGES, J. E. *Application of coherent structure and vortex sound theories to jet noise*. PhD thesis, University of Houston, 1990.
- [20] BRIDGES, J. E., AND HUSSAIN, F. Direct evaluation of aeroacoustic theory in a jet. *J. Fluid Mech* 240 (1992), 469–501.
- [21] BROZE, G., AND HUSSAIN, F. Nonlinear dynamics of forced transitional jets : periodic and chaotic attractors. *J. Fluid Mech.* 263 (1994), 93–132.
- [22] BRUUN, H. H. A time-domain analysis of the large-scale flow structure in a circular jet. part 1. moderate reynolds number. *J. Fluid Mech.* 83, 4 (1977), 641–671.
- [23] COOPER, A. J., AND CRIGHTON, D. G. Global modes and superdirective acoustic radiation in low-speed axisymmetric jets. *Eur. J. Mech. B-Fluids* 19 (2000), 559–574.
- [24] CRIGHTON, D. G. Basic principles of aerodynamic noise generation. *Prog. Aerospace Sci.* 16, 1 (1975), 31–96.
- [25] CRIGHTON, D. G. Acoustics as a branch of fluid mechanics. *J. Fluid Mech* 106 (1981), 261–298.
- [26] CRIGHTON, D. G., AND HUERRE, P. Shear-layer fluctuating pressure and superdirective acoustic sources. *J. Fluid Mech* 220 (1990), 355–368.
- [27] CROW, S. C., AND CHAMPAGNE, F. H. Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech* 48 (1971), 547–591.
- [28] DAVIES, P. O. A. L., FISHER, M. J., AND BARRATT, M. J. The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet. *J. Fluid Mech.* 15 (1962), 337–367.
- [29] DOWLING, A. P. *Modern methods in analytical acoustics*. Springer-Verlag, 1992.

- [30] DRUBKA, R. E., REISENTHHEL, P., AND NAGIB, H. M. The dynamics of low initial disturbance turbulent jets. *Phys. Fluids A1*, 10 (1989), 1723–1734.
- [31] FISHER, M. J., AND DAVIS, P. O. A. L. Correlation measurements in a non-frozen pattern of turbulence. *J. Fluid Mech.* 18 (1963), 97–116.
- [32] FREYMUTH, P. On the transition in a separated laminar boundary layer. *J. Fluid Mech.* 25 (1966), 683–704.
- [33] HILL, W. G. J., JENKINS, R. C., AND GILBERT, B. L. Effect of the initial boundary layer state on turbulent jet mixing. *AIAA Journal* 17 (1976), 1055–1060.
- [34] HO, C.-M., AND HUANG, L.-S. Subharmonics and vortex merging in mixing layers. *J. Fluid Mech.* 119 (1982), 443–473.
- [35] HÉRON, N., RAVACHOL, M., CANDEL, S., AND BAILLY, C. Hot-jet-noise predictions from statistical source models. *AIAA Paper* (17–19 june 2002).
- [36] HUERRE, P., AND CRIGHTON, D. G. Sound generation by instability waves in a low mach number jet. *AIAA Paper* (11–13 april 1983), 1–8.
- [37] HUERRE, P., AND MONKEWITZ, P. A. Absolute and convective instabilities in free shear-layers. *J. Fluid Mech.* 159 (1985), 151–168.
- [38] HUERRE, P., AND MONKEWITZ, P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990), 473–537.
- [39] HUSAIN, H. S., AND HUSSAIN, F. Experiments on subharmonic resonance in a shear layer. *J. Fluid Mech.* 304 (1995), 343–372.
- [40] HUSSAIN, A. K. M. F., AND ZAMAN, K. B. M. Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. part 2. coherent structure dynamics. *J. Fluid Mech.* 101 (1980), 493–544.
- [41] HUSSAIN, A. K. M. F., AND ZEDAN, M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear-layer : effect of the initial fluctuation level. *Phys. Fluids* 21, 9 (1978), 1475–1481.
- [42] HUSSAIN, A. K. M. F., AND ZEDAN, M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear-layer : effects of the initial momentum thickness. *Phys. Fluids* 21, 7 (1978), 1100–1112.
- [43] ISLAM, M. T., AND ALI, M. A. T. Mean velocity and static pressure distributions of a circular jet. *AIAA Journal* 35, 1 (1997), 196–197.
- [44] JORDAN, P., AND GERVAIS, Y. Modelling self- and shear-noise mechanisms in inhomogeneous, anisotropic turbulence. *J. Sound Vib.* 279 (2005), 529–555.

- [45] JORDAN, P., GERVAIS, Y., VALIÈRE, J. C., AND FOULON, H. Jet exhaust aerodynamics and noise. *E.U. Research Program Jean Deliverable 3.4, Contract No. G4RD-CT-2000-00313* (2002).
- [46] JUVÉ, D. *Contribution à l'aéroacoustique des jets subsoniques excités*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1979.
- [47] KHAVARAN, A. Role of anisotropy in turbulent mixing layer. *AIAA Journal* 37, 7 (1999), 832–841.
- [48] KIBENS, V. Discrete noise spectrum generated by an acoustically excited jet. *AIAA Journal* 18, 4 (1979), 434–441.
- [49] KOVASZNAY, L. S. G., KIBENS, V., AND BLACKWELDER, R. F. Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 41 (1970), 283–325.
- [50] LAU, J. C. Laser velocimeter correlation measurements in subsonic and supersonic jets. *J. Sound Vib.* 70, 1 (1980), 85–101.
- [51] LAU, J. C. Effects of exit mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets. *J. Fluid Mech.* 105 (1981), 193–218.
- [52] LAU, J. C., MORRIS, P. J., AND FISHER, M. J. Measurements in subsonic and supersonic free jets using laser velocimeter. *J. Fluid Mech.* 93, 1 (1979), 1–27.
- [53] LAUFER, J., AND MONKEWITZ, P. On turbulent jet flows : a new perspective. *AIAA paper 0962* (1980), 1–6.
- [54] LAUFER, J., AND YEN, T.-C. Noise generation by a low-mach-number jet. *J. Fluid Mech.* 134 (1983), 1–31.
- [55] LAUFER, J., AND ZHANG, J. X. Unsteady aspects of a low mach number jet. *Phys. Fluids* 26, 7 (1983), 1740–1750.
- [56] LAURENCE, J. C. Intensity, scale, and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. *NACA Report 1292* (1957).
- [57] LIGHTHILL, M. J. On sound generated aerodynamically. i. general theory. *Proc. Roy. Soc. London A211* (1952), 564–587.
- [58] LIGHTHILL, M. J. On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound. *Proc. Roy. Soc. London A222* (1954), 1–32.
- [59] MANKBADI, R. R. On the interaction between fundamental and subharmonic instability waves in a turbulent round jet. *J. Fluid Mech.* 160 (1985), 385–419.
- [60] MICHALKE, A. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.* 23 (1965), 521–544.

- [61] MITCHELL, B. E., LELE, S. K., AND MOIN, P. Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.* 383 (1999), 113–142.
- [62] MÖHRING, W. On vortex sound at low mach number. *J. Fluid Mech.* 85 (1978), 685–691.
- [63] MOLLO-CHRISTENSEN, E. L., KOLPIN, M. A., AND MARTUCCELLI, J. R. Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. *J. Fluid Mech.* 18 (1964), 285–301.
- [64] MONKEWITZ, P. A. On the nature of the amplitude modulation of jet shear layer instability waves. *Phys. Fluids* 26, 11 (1983), 3180–3184.
- [65] MONKEWITZ, P. A. Subharmonic resonance, pairing and shredding in the mixing layer. *J. Fluid Mech.* 188 (1988), 223–252.
- [66] MORRIS, P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* 77, 3 (1976), 511–529.
- [67] PIER, B. Finite amplitude crossflow vortices, secondary instability and transition in the rotating disk boundary layer. *J. Fluid Mech.* 487 (2003), 315–343.
- [68] RAMAN, G., AND RICE, E. J. Subharmonic and fundamental high amplitude excitation of an axisymmetric jet. *AIAA Journal* 29 (1991), 1114–1122.
- [69] RIBNER, H. S. Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. *J. Fluid Mech.* 77, 3 (1976), 511–529.
- [70] TAM, C. K. W. Excitation of instability waves in a two-dimensional shear-layer by sound. *J. Fluid Mech.* 89 (1978), 357–371.
- [71] TAM, C. K. W. Supersonic jet noise. *Annu. Rev. Fluid Mech* 27 (1995), 17–43.
- [72] TAM, C. K. W., AND BURTON, D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. part 2, axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* 138 (1984), 273–295.
- [73] TOWNSEND, A. A. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 43 (1947), 560–570.
- [74] UKEILEY, L., MANN, R., TINNEY, C., AND GLAUSER, M. Spatial correlations in a transonic jet. *AIAA Paper* (28 june – 1 july 2004).
- [75] VON KÁRMÁN, T., AND HOWARTH, L. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. roy. Soc.* 164, A (1938), 192–215.
- [76] YULE, A. J. Large-scale structure in the mixing layer of a round jet. *J. Fluid Mech.* 89, 3 (1978), 413–432.
- [77] ZAMAN, K. B. M. Q. Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation. *J. Fluid Mech.* 152 (1985), 83–111.

- [78] ZAMAN, K. B. M. Q., AND HUSSAIN, A. K. M. F. Vortex pairing in a circular jet under controlled excitation. part 1. general response. *J. Fluid Mech.* 101 (1980), 449–491.
- [79] ZAMAN, K. B. M. Q., AND RAMAN, G. Reversal in spreading of a tabbed circular jet under controlled excitation. *Phys. Fluids* 9, 12 (1997).