

# THÈSE

présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir  
le titre de DOCTEUR  
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Olaf Gainville

## MODÉLISATION DE LA PROPAGATION ATMOSPHERIQUE DES ONDES INFRASONORES PAR UNE MÉTHODE DE TRACÉ DE RAYONS NON LINÉAIRE

Soutenue le 25 Avril 2008 devant la Commission d'Examen

### JURY

Examineurs : M. Ph. BLANC-BENON (Directeur de thèse)  
M. F. COULOUVRAT (Rapporteur)  
M. Ph. DELORME  
M. V. GUSEV  
M. D. JUVÉ (Président)  
M. P.-F. PISERCHIA (Co-encadrant)  
M. J. SCOTT  
M. J. VIRIEUX (Rapporteur)

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509  
École Centrale de Lyon  
Département Analyse et Surveillance de l'Environnement  
C.E.A. / D.A.M.



# Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Département Analyse et Surveillance de l'Environnement au sein du laboratoire de Détection et de Géophysique dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Je suis reconnaissant à Jacques Bouchez, Bruno Feigner et Jean-Louis Plantet de m'avoir accueilli au sein de leur équipe et de l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Je remercie Daniel Juvé, directeur du Centre Acoustique du LMFA, de m'avoir accueilli à plusieurs reprises et de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie vivement mes rapporteurs, François Coulouvrat et Jean Virieux, d'avoir accepté de relire ce manuscrit et de juger mon travail de thèse. Leurs remarques m'ont permis d'enrichir ce manuscrit.

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de thèse, Philippe Blanc-Benon, de m'avoir guidé dans mes recherches, pour son soutien et pour sa confiance. Mes remerciements vont à Pierre-Franck Piserchia pour son encadrement au quotidien et ses nombreux conseils scientifiques et personnels. Les discussions très enrichissantes avec Julian Scott ont été fondamentales pour mon travail. Je tiens à lui témoigner ma profonde gratitude. Je souhaite le remercier ainsi que Vitali Gusev et Philippe Delorme d'avoir accepté d'évaluer mon travail et de participer à mon jury.

Je voudrais remercier toute l'équipe du Laboratoire de Simulation des Effets dans la Géosphère pour les échanges fructueux et l'ambiance sympathique qui m'ont accompagné durant ces années de thèse. Les contributions à mon travail de Roger Roche, Elisabeth Blanc et Alexis Le Pichon ont été d'un apport considérable et je leur en suis reconnaissant. Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse au DASE. J'adresse mes remerciements aux participants du groupe de travail MOPA, en particulier à Christophe Bailly et Bruno Després pour les nombreuses discussions en simulation numérique.

Je remercie les étudiants de SEG, du Bus et du LMFA qui ont contribué à la dynamique scientifique sur des sujets variés, Pierrick et Sébastien pour leurs critiques constructives, Olivier, Etienne et Nathan pour leurs brillantes idées, Jean, Carole et Antoine pour la relecture de ce manuscrit.



# Résumé

Dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires, nous souhaitons, afin d'aider à l'analyse et à l'interprétation des mesures barométriques effectuées par le réseau infrason du Système de Surveillance International, établir des relations entre les signaux mesurés et les caractéristiques de la source (nature, puissance, mouvement, ...). Étant donnée la complexité de l'atmosphère et sa variabilité dans le temps, la modélisation occupe une place privilégiée en propagation atmosphérique.

L'objectif de ce travail de thèse est de modéliser la propagation atmosphérique des ondes infrasonores à grande distance émises par différents types de sources. Cette modélisation passe par un approfondissement des connaissances dans le domaine de la propagation atmosphérique et par l'identification des principaux mécanismes influençant la propagation des ondes. Notre travail vise à quantifier l'importance de la convection, de la diffraction, du scattering, des effets non linéaires et de l'absorption atmosphérique sur la répartition du niveau de pression acoustique et sur les formes d'onde.

Nous développons un modèle de propagation des ondes infrasonores basé sur la méthode de tracé de rayons. Ce modèle est obtenu à partir d'une analyse asymptotique des équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire basé sur les hypothèses de milieu lentement variable et de front d'onde localement plan. L'évolution de la forme d'onde vérifie une équation de Burgers généralisée intégrant les effets non linéaires, pour les chocs faibles, et l'absorption atmosphérique. Le modèle tient compte du déphasage au passage des caustiques. Les méthodes numériques nécessaires à la résolution du modèle physique sont développées. Une méthode de recherche des rayons propres en 3D reliant la source au capteur est proposée. L'équation de Burgers généralisée est intégrée à l'aide d'une méthode spectrale de Fourier Galerkin à pas variable et maillage adaptatif.

Enfin, nous étudions deux cas de propagation des ondes infrasonores. L'expérience Misty Picture consiste en l'explosion de 4684 tonnes d'ANFO en 1987 dans le Nouveau Mexique (États-Unis). Cette expérience particulièrement bien instrumentée permet de construire un cas d'étude de référence pour la propagation des ondes infrasonores à très basse fréquence (0,1 Hz). Cette étude montre en particulier que l'énergie acoustique arrivant dans les zones d'ombre est essentiellement due au scattering. Les enregistrements quotidiens du Concorde réalisés entre 1998 et 2003 à la station de Flers (France) offrent un grand nombre de cas d'étude. Les différentes phases mesurées sont identifiées malgré la complexité du champ de pression acoustique. L'année 2002 est étudiée systématiquement afin d'évaluer l'importance des variations de l'atmosphère sur la propagation des infrasons ainsi que la fidélité des méthodes numériques. Les simulations par la méthode de tracé de rayons, en accord avec les mesures, mettent en évidence l'importance des effets non linéaires et du scattering sur la signature en pression. Ces études sont également utilisées afin de caractériser et de quantifier les limites de la méthode de tracé de rayons. Malgré une forte sensibilité des résultats aux conditions météorologiques, nous estimons que la méthode de tracé de rayons est adaptée pour simuler la propagation d'ondes de fréquence centrale supérieure à 1 Hertz.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Propagation atmosphérique des ondes infrasonores</b>	<b>5</b>
1.1 Description de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores . . . . .	5
1.1.1 Atmosphère et ondes atmosphériques . . . . .	5
1.1.2 Propagation des ondes infrasonores à grande distance . . . . .	7
1.1.3 Nomenclature des phases infrasonores . . . . .	8
1.1.4 Sources d'infrasons . . . . .	11
1.1.5 Variations temporelles des caractéristiques de la propagation des infrasons	12
1.2 Mécanismes influençant la propagation des ondes infrasonores . . . . .	13
1.2.1 Caustiques . . . . .	13
1.2.2 Zones d'ombre . . . . .	14
1.2.3 Stratification de l'atmosphère . . . . .	15
1.2.4 Absorption et dispersion atmosphérique . . . . .	16
1.2.5 Non linéarités . . . . .	18
1.2.6 Réflexion sur la surface de la Terre . . . . .	19
1.2.7 « Scattering » par les petites structures de l'atmosphère . . . . .	20
1.3 Simulation numérique de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores .	21
1.3.1 Acoustique géométrique . . . . .	22
1.3.2 Résolution directe des équations de la mécanique des fluides . . . . .	24
1.3.3 Équations paraboliques . . . . .	25
1.4 Objectifs de la thèse . . . . .	26
<b>2 Modélisation de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores</b>	<b>29</b>
2.1 Les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire . . . . .	29
2.1.1 Équations du mouvement . . . . .	30
2.1.2 Équation d'état et relation thermodynamique . . . . .	31
2.1.3 Coefficients thermodynamiques pour un mélange de gaz parfaits . . . . .	32
2.1.4 Formulation perturbative des équations du mouvement . . . . .	32
2.2 Développement asymptotique . . . . .	33
2.2.1 Analyse asymptotique au premier ordre . . . . .	34
2.2.2 Analyse asymptotique au deuxième ordre . . . . .	36
2.3 Tracé de rayons . . . . .	39
2.3.1 Équations des rayons . . . . .	39
2.3.2 Conservation de l'action d'onde et éléments géodésiques . . . . .	41
2.3.3 Équation de Burgers généralisée . . . . .	43
2.3.4 Conditions initiales des rayons . . . . .	46
2.3.5 Réflexion sur une surface . . . . .	52
2.3.6 Déphasage au passage des caustiques . . . . .	53
2.3.7 Rayons propres . . . . .	54

2.3.8	Calcul linéaire de la forme d'onde . . . . .	55
2.3.9	Calcul non-linéaire de la forme d'onde . . . . .	56
2.3.10	Mise en œuvre de la méthode de tracé de rayons . . . . .	56
2.4	Modélisation de l'atmosphère . . . . .	57
2.4.1	Modèle d'atmosphère stratifiée . . . . .	57
2.4.2	Données atmosphériques . . . . .	61
2.5	Conditions d'application du modèle de propagation . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques pour l'acoustique géométrique</b>	<b>67</b>
3.1	Tracé de rayons . . . . .	67
3.1.1	Calcul des rayons acoustiques . . . . .	67
3.1.2	Recherche des rayons propres pour un problème 3D . . . . .	70
3.2	Intégration de l'équation de Burgers généralisée . . . . .	75
3.2.1	Analyse de l'équation de Burgers généralisée . . . . .	77
3.2.2	Méthode spectrale Fourier Galerkin . . . . .	82
3.2.3	Optimisation de la méthode spectrale Fourier Galerkin . . . . .	89
3.2.4	Déphasages au passage des caustiques . . . . .	96
3.2.5	Performances du schéma d'intégration de l'équation de Burgers . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Étude de la propagation des infrasons émis par une source ponctuelle fixe</b>	<b>103</b>
4.1	Propagation des ondes émises par des explosions . . . . .	103
4.2	Une explosion chimique de forte puissance : l'expérience Misty Picture . . . . .	105
4.2.1	Présentation de l'expérience Misty Picture . . . . .	105
4.2.2	Modélisation de l'expérience Misty Picture . . . . .	111
4.2.3	Interprétation des mesures barométriques . . . . .	119
4.2.4	Comparaison des codes de simulation . . . . .	126
4.3	Conclusion . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Étude de la propagation des infrasons émis par un avion supersonique</b>	<b>135</b>
5.1	Modélisation du Concorde . . . . .	136
5.1.1	Trajectoire . . . . .	137
5.1.2	Forme d'onde à la source . . . . .	137
5.1.3	Champs de vents . . . . .	140
5.2	Mesures barométriques réalisées à la station de Flers . . . . .	140
5.3	Étude d'une détection . . . . .	141
5.3.1	Arrivées détectées à la station de Flers . . . . .	142
5.3.2	Modélisation de la propagation du front d'onde . . . . .	142
5.3.3	Comparaison des arrivées modélisées et mesurées . . . . .	144
5.3.4	Analyse des formes d'onde . . . . .	148
5.4	Variations saisonnières . . . . .	149
5.5	Conclusion . . . . .	152
	<b>Conclusion</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>
	<b>Annexes</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Éléments de géométrie différentielle pour l'acoustique géométrique</b>	<b>175</b>
A.1	Développement des équations des rayons . . . . .	175
A.2	Développement des équations des éléments géodésiques . . . . .	176

A.3	Volume convecté . . . . .	177
A.4	Notations des opérateurs de dérivation spatiale . . . . .	179
A.5	Réflexion spéculaire sur une surface paramétrique . . . . .	179
<b>B</b>	<b>Analyse asymptotique des équations du mouvement</b>	<b>183</b>
B.1	Équations du mouvement . . . . .	183
B.2	Développement asymptotique au premier ordre . . . . .	184
B.3	Développement asymptotique au deuxième ordre . . . . .	185
B.3.1	Équation de conservation de la masse . . . . .	185
B.3.2	Équation de Navier Stokes . . . . .	186
B.3.3	Équation d'évolution de la masse volumique . . . . .	187
B.3.4	Équation de l'entropie . . . . .	188
B.3.5	Équation de conservation des espèces du milieu . . . . .	189
B.3.6	Système d'équations décrivant l'évolution de la masse volumique . . . . .	190
B.3.7	Intégration des équations de relaxation . . . . .	192
B.3.8	Équation de Burgers généralisée . . . . .	194
B.3.9	Transformée de Fourier de l'équation de Burgers généralisée . . . . .	195
B.3.10	Identification des coefficients d'atténuation . . . . .	196
<b>C</b>	<b>Données atmosphériques</b>	<b>199</b>
C.1	Atténuation atmosphérique . . . . .	199
<b>D</b>	<b>Données de l'expérience Misty Picture</b>	<b>203</b>
D.1	Positions des sources et des stations . . . . .	203
D.2	Caractéristiques des signaux barométriques mesurés . . . . .	204
<b>E</b>	<b>Données du Concorde</b>	<b>207</b>



# Introduction

Le Système de Surveillance International (SSI) est chargé de veiller au respect du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires. Pour détecter tout essai d'une charge supérieure à 1 kilotonne de TNT réalisé notamment dans l'atmosphère, le SSI se dote, entre autres, d'un réseau de 60 stations barométriques réparties sur l'ensemble de la Terre. Les stations, en mesurant les infrasons, détectent à la fois des explosions mais également de multiples sources naturelles comme les météorites ou les éruptions volcaniques ou encore des sources artificielles comme les avions supersoniques. Afin d'analyser et d'interpréter les mesures de ces stations, le Département Analyse Surveillance Environnement du Commissariat à l'Énergie Atomique en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique développent des méthodes spécifiques basées sur des expériences, l'analyse de données et la simulation numérique. L'objectif est d'établir les relations entre les signaux mesurés et les caractéristiques de la source telles que sa nature, sa position ou sa fréquence. Au delà de la détection des essais nucléaires, les mesures des ondes infrasonores sont utilisées pour la collecte d'informations en cas de crises (catastrophes naturelles, accidents industriels, ...). Ces activités opérationnelles nécessitent une grande réactivité lors de l'analyse des mesures.

L'atmosphère est un milieu favorable à la propagation des ondes infrasonores. Celles-ci, piégées entre la surface de la Terre et la thermosphère et peu dissipées par le milieu, peuvent se propager sur des milliers de kilomètres. La propagation atmosphérique des ondes à grande distance ne se limite pas au cas des ondes infrasonores. À plus haute fréquence, le bruit lié aux activités aéronautiques, aux transports ferroviaire et routier ou encore aux installations industrielles se propage à grande distance. Un facteur d'échelle existe entre ces applications mais les phénomènes physiques ainsi que leur modélisation sont identiques. La propagation acoustique dans l'atmosphère se distingue de l'hydroacoustique (acoustique sous marine), de la sismique ou encore de l'électromagnétisme pour deux aspects fondamentaux. D'abord, la vitesse de convection du milieu, *i.e.* la vitesse du vent dans l'atmosphère, n'est pas faible par rapport à la vitesse de propagation des ondes acoustiques. De plus, l'évolution de l'atmosphère dans le temps modifie significativement les conditions de propagation des ondes. Cette évolution rend l'étude des mesures infrasonores délicate et les résultats des simulations dépendant des modèles d'atmosphère. La variabilité des conditions de propagation et la complexité du milieu rendent utile, voire indispensable, la simulation des ondes infrasonores pour l'analyse fine de mesures barométriques, notamment dans un cadre opérationnel.

L'objectif de notre travail est de modéliser la propagation atmosphérique des ondes infrasonores à grande distance émises par des sources de différents types. Cette modélisation passe par un approfondissement des connaissances dans le domaine de la propagation atmosphérique. Il est nécessaire d'identifier les mécanismes influençant la propagation des ondes et de quantifier leur importance. La modélisation de la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère a fait, pour sa part, l'objet de nombreuses études. Certaines approches telles que les méthodes paraboliques, les différences finies, le tracé de rayons ou encore la sommation de modes sont communément utilisées. Cependant, la modélisation de la propagation à très grande distance dans un milieu inhomogène et convecté reste une tâche délicate, en particulier lorsque le problème

est à trois dimensions. Un compromis entre le coût de calcul et les phénomènes modélisés doit être trouvé. L'étude des différentes méthodes numériques de modélisation de la propagation acoustique met en avant l'efficacité de la méthode de tracé de rayons pour des applications opérationnelles. Cependant, les méthodes paraboliques et les méthodes de résolution directe des équations de la mécanique des fluides, qui demandent plus de ressources informatiques, peuvent être utilisées pour des études particulières. L'enjeu de notre travail est d'évaluer ce qui peut être réalisé en terme de simulation numérique que ce soit pour des études particulières ou de manière opérationnelle.

Dans le premier chapitre, nous introduisons la problématique de la propagation atmosphérique à grande distance des ondes infrasonores. Après une description générale de la propagation des infrasons dans l'atmosphère, les différents phénomènes physiques influençant leur propagation sont rappelés. Pour chacun d'eux, les études expérimentales et théoriques existantes sont indiquées. Leur importance relative est également discutée ainsi que la difficulté pour les intégrer dans des modèles physiques. Le dernier point concerne les différentes approches numériques permettant de simuler la propagation des ondes à grande distance. Les limites et les capacités des méthodes de tracé de rayons, des méthodes paraboliques et des méthodes de résolution directe des équations de la mécanique des fluides sont discutées. Sur la base de cette étude bibliographique, nous justifions notre choix de la méthode de tracé de rayons pour simuler la propagation des ondes infrasonores.

Dans le chapitre 2, nous développons un modèle de propagation des ondes infrasonores basé sur la méthode de tracé de rayons. Dans un premier temps, les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire sont reformulées. Les coefficients thermodynamiques pour l'atmosphère sont donnés, ce qui permet d'envisager la résolution directe de ces équations. Un développement asymptotique basé sur les hypothèses de milieu lentement variable et de front d'onde localement plan permet de développer le modèle de propagation. Bien que la méthode de tracé de rayons soit classique [157], le formalisme utilisé permet de développer de manière rigoureuse un modèle incluant le calcul non linéaire de la forme d'onde à partir d'un nombre restreint d'hypothèses physiques. Ce modèle s'applique à différents types de sources telles que les explosions ou les avions supersoniques. Enfin, pour compléter ce modèle, différentes approches permettant de définir un modèle réaliste d'atmosphère sont données.

Dans le chapitre 3 sont regroupées les méthodes numériques nécessaires à la résolution du problème de propagation défini au chapitre 2. Dans un premier temps, différentes méthodes permettant de calculer les rayons sont d'abord rappelées. Une méthode innovante de recherche de rayons propres en 3D est également décrite. Cette méthode est efficace pour des sources complexes. Dans un second temps, nous nous attachons à la résolution de l'équation de Burgers généralisée qui régit l'évolution non linéaire de la forme d'onde le long des rayons. La méthode spectrale Fourier Galerkin est optimisée pour répondre à notre problème. Elle est automatisée afin de s'adapter à l'évolution de la forme d'onde notamment au passage des caustiques. Des tests numériques permettant de valider la méthode de tracé de rayons et l'intégration de l'équation de Burgers sont également réalisés.

Les deux derniers chapitres concernent des cas d'études construits à partir de mesures. Ces études permettent de mieux connaître la propagation atmosphérique des ondes infrasonores et d'éprouver les modèles de propagation. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la propagation des ondes infrasonores émises par une explosion de forte puissance. Cette expérience, nommée *Misty Picture*, est exceptionnelle de par la quantité et la qualité des mesures barométriques et atmosphériques. Nous disposons d'enregistrement des ondes infrasonores de quelques kilomètres jusqu'à 1000 km de la source. L'ensemble des données disponibles sur cette expérience sont regroupées afin de définir un cas de propagation atmosphérique d'ondes infrasonores de référence. L'étude de ce cas à l'aide de la méthode de tracé de rayons permet d'identifier les phases mesurées

et de simuler les formes d'onde. Nous montrons également l'importance de la diffraction et du scattering des ondes stratosphériques sur la répartition du niveau de pression acoustique. Les simulations montrent le rôle joué par les effets non linéaires sur la signature en pression. Des comparaisons entre notre méthode de tracé de rayons et un code parabolique grand angle permettent de quantifier les limites de chacun d'entre eux. Le dernier chapitre concerne la propagation des infrasons émis par le Concorde lors de son arrivée en France. Les enregistrements réalisés à la station de Flers offrent un grand nombre de cas d'étude dépendant de la saison. La méthode de tracé de rayons permet d'identifier les phases mesurées à la station de Flers malgré la complexité du champ de pression acoustique. L'importance des effets non linéaires et de l'absorption atmosphérique sur la forme d'onde est également évaluée. L'influence des variations saisonnières et diurnes de l'atmosphère sur la propagation des ondes infrasonores est quantifiée à partir de simulations et de mesures.

Finalement, nous concluons sur les principaux mécanismes influençant la propagation des ondes infrasonores ainsi que sur les limites de la méthode de tracé de rayons développée. Nous explicitons également les différentes perspectives opérationnelles qu'offre une telle méthode ainsi que des axes de recherche à poursuivre.



# Chapitre 1

## Propagation atmosphérique des ondes infrasonores

Dans ce premier chapitre, nous faisons un état des connaissances dans le domaine de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores à grande distance. La propagation atmosphérique des ondes infrasonores est décrite dans la partie 1.1 d'un point de vue géophysique. Les connaissances issues des observations et des modélisations sont regroupées afin d'identifier les principaux mécanismes influençant la propagation des ondes infrasonores. La partie 1.2 détaille les connaissances acquises sur chacun des mécanismes ainsi que les études menées pour chacun d'eux. Cette synthèse permet d'évaluer l'importance des différents phénomènes physiques et leur complexité. La partie 1.3 porte sur les différentes méthodes numériques pouvant être utilisées en propagation acoustique. Leurs limites et leurs potentiels à reproduire les différents phénomènes physiques sont discutés. L'objet est de déterminer le type de modèle le plus adaptée à la modélisation de la propagation des ondes infrasonores à grande distance en 3D pour des sources fixes ou mobiles.

### 1.1 Description de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores

La propagation des ondes infrasonores à grande distance est étroitement liée à la structure de l'atmosphère. Ce milieu inhomogène et convecté piège les ondes acoustiques qui peuvent alors se propager sur de grandes distances. La propagation en milieu inhomogène est généralement qualifiée d'anormale [157] du fait de l'existence de zones d'ombre et de focalisation. La propagation des ondes infrasonores a fait l'objet de nombreuses études comme le rapporte McKisic [137] et Kulichkov [110]. Ces études ont permis, entre autres, d'identifier différents chemins permettant à des ondes de se propager depuis la source jusqu'à un capteur. Ces chemins sont appelés *phases*.

Nous décrivons dans cette section la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère d'un point de vue géophysique. Les connaissances sur le sujet sont résumées afin de définir les concepts et notions qui seront repris par la suite. L'atmosphère ainsi que les principaux aspects liés à la propagation « anormale » à grande distance des infrasons sont présentés. La nomenclature et une description des phases infrasonores ainsi que différentes sources d'infrasons sont données. Nous terminons par une synthèse sur les études des effets des variations temporelles de l'atmosphère sur la propagation des infrasons.

#### 1.1.1 Atmosphère et ondes atmosphériques

L'atmosphère est un système dynamique complexe faisant intervenir un grand nombre de mécanismes physiques. Lorsque l'atmosphère est perturbée, des forces de rappel vont s'exercer

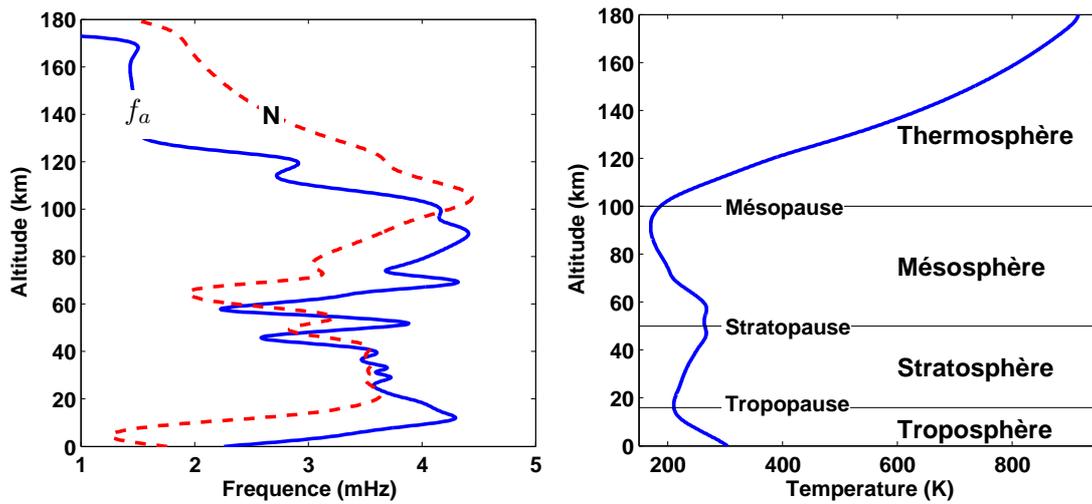


FIGURE 1.1 – Fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  (---) et de coupure acoustique  $f_a$  (—) en fonction de l’altitude. Ces fréquences sont calculées pour un profil de température réaliste (à droite) et dans une atmosphère supposée à l’équilibre hydrostatique. Les différentes couches de l’atmosphère sont également indiquées.

afin de ramener le système à l’équilibre. Les ondes correspondent à un phénomène d’oscillation autour d’un état d’équilibre de l’atmosphère. Les principaux types d’ondes présentes dans l’atmosphère sont : les ondes élastiques (ou ondes acoustiques) dues à la compressibilité, les ondes de gravité liées à la force de flottabilité et les ondes de Rossby provenant de la variation avec la latitude du paramètre de Coriolis [189, 202]. Ces trois types d’ondes se différencient, entre autres, par leur vitesse de phase ( $340 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $20$  à  $50 \text{ m.s}^{-1}$  et  $10$  à  $20 \text{ m.s}^{-1}$ ). Citons également les ondes de Lamb qui correspondent à un mode de propagation mixte dit acoustique-gravité [202]. Les ondes acoustiques sont limitées à des fréquences supérieures à la fréquence de coupure acoustique [202, 19, 148]<sup>1</sup> :

$$f_a = c_0 \sqrt{\frac{3}{4} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}}.$$

Les ondes de gravité sont, quant à elles, limitées à des fréquences inférieures à la fréquence de Brunt-Väisälä [202, 143, 148] :

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \frac{g^2}{c_0^2}}.$$

Les fréquences de coupure acoustique et de Brunt-Väisälä sont de l’ordre de quelques milliHertz comme le montre la figure (1.1). Dans notre étude, nous nous intéressons essentiellement à la propagation des ondes acoustiques de fréquences inférieures au seuil d’audibilité de l’oreille humaine (20 Hz), appelées *ondes infrasonores* ou *infrasons*.

À l’échelle synoptique, la structure thermique de l’atmosphère est divisée en quatre couches comme le montre la figure (1.1) : troposphère, stratosphère, mésosphère et thermosphère. Le vent est, quant à lui, structuré à l’échelle planétaire par les cellules de convection de redistribution de l’énergie thermique entre les tropiques et les pôles. D’un point de vue dynamique deux zones de l’atmosphère se distinguent. Dans la troposphère, la couche limite planétaire est le siège des phénomènes météorologiques locaux. Elle est caractérisée par des petites structures qui

1.  $c_0$  est la vitesse du son,  $\rho_0$  est la masse volumique et  $z$  l’altitude.  $g$  est l’accélération de la pesanteur.

évoluent rapidement dans le temps. Au-dessus de la tropopause, l'atmosphère est essentiellement stratifiée et à l'équilibre hydrostatique et géostrophique<sup>2</sup>. Cependant, de plus petites structures la perturbent telles que les ondes de gravité et la turbulence. De fortes inhomogénéités locales de température ou de vent peuvent exister comme nous le présentons dans la section 2.4.1. L'atmosphère évolue principalement suivant trois grandes échelles de temps : l'échelle saisonnière, les marées diurnes, les variations dites rapides (ondes de gravité, turbulence, ...). L'atmosphère est présentée plus en détails dans la section 2.4.

L'atmosphère apparaît donc comme un milieu de propagation complexe pour les ondes infrasonores. Il est fortement inhomogène dans les trois directions de l'espace, il est constitué de multiples échelles et il peut présenter des discontinuités. Il est convecté et évolue dans le temps. La rotondité de la Terre ainsi que la topographie influencent également la propagation des infrasons.

### 1.1.2 Propagation des ondes infrasonores à grande distance

La propagation des infrasons dans l'atmosphère est principalement influencée par les inhomogénéités grandes échelles de la température et du vent. Les ondes infrasonores sont réfractées par les gradients de la vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$  (somme de la vitesse du son et du vent dans la direction de propagation). Ces mécanismes de réfraction éventuellement combinés avec la réflexion sur la surface de la Terre conduisent à l'existence des *guides d'onde* [21, 78]. Les guides d'onde atmosphériques piègent l'énergie acoustique émise par une source, ces ondes pouvant alors se propager à de grandes distances. Les trois principaux guides d'onde de l'atmosphère sont le guide thermosphérique, le guide stratosphérique et le guide troposphérique. Ces guides sont en contact avec le sol ce qui permet d'observer directement les ondes qui y sont piégées. D'autres guides d'onde existent, notamment autour de la tropopause et de la mésopause. Ceux-ci ne peuvent être observés directement à la surface du sol. Les phases désignent le type de chemin suivi par l'énergie d'une onde lors de sa propagation entre la source et un récepteur. Chacun des trois principaux guides d'onde donnent lieu à des phases du même nom : phases thermosphériques, phases stratosphériques et phases troposphériques. D'autres types de phases existent, associées à la réflexion partielle sur des discontinuités de la vitesse du son effective ou à des phénomènes de diffraction. La nomenclature de l'ensemble des phases infrasonores est présentée dans la section 1.1.3. La présence de vent induit une anisotropie azimutale pour la propagation des infrasons. Ainsi, certaines phases ne sont observées que dans certaines directions de propagation.

L'absorption atmosphérique joue également un rôle important dans la propagation atmosphérique des ondes infrasonores (cf. section 1.2.4). La figure (1.2) présente l'absorption totale en fonction de la fréquence et de l'altitude. L'absorption, faible en basses fréquences, permet aux infrasons de se propager sur de grandes distances. Cependant, en raison d'une forte absorption dans la haute atmosphère, les ondes passant au-dessus de 140 km sont complètement dissipées.

La propagation des ondes à grande distance est souvent associée à la notion de propagation anormale (Pierce [157, p. 393]) en raison de la présence de zones d'ombre et de caustiques. Les caustiques correspondent aux zones de focalisation des ondes acoustiques. Elles sont engendrées par le phénomène de réfraction ou le mouvement de la source. En propagation atmosphérique deux types de caustiques existent majoritairement : les *caustiques « pli »* et les *caustiques cuspidées*. Les zones d'ombre correspondent aux lieux de l'espace où aucune onde directe (géométrique) n'arrive. Seuls des mécanismes de diffraction, de « scattering »<sup>3</sup>, ou de

---

2. L'équilibre hydrostatique est l'équilibre entre la force de pesanteur et le gradient de pression tandis que l'équilibre géostrophique est l'équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression.

3. Le terme anglais « scattering » regroupe plusieurs phénomènes physiques et ne possède pas d'équivalent exact en français (cf. section 1.2.7).

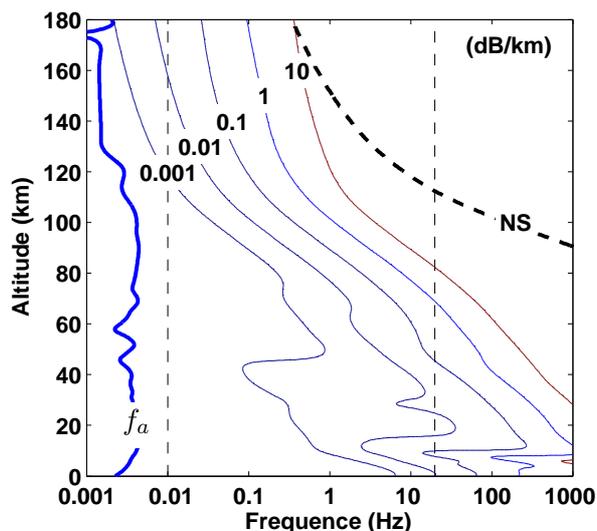


FIGURE 1.2 – Gamme fréquentielle dans laquelle les ondes acoustiques peuvent se propager à grandes distances, limitée par l’absorption atmosphérique (ligne de niveau en dB/km) et la fréquence de coupure acoustique  $f_a$ . La limite de validité des équations de Navier Stokes (NS), correspondant à un nombre de Knudsen de 0,1, est également indiquée. Graphique inspiré de Georges [79].

réflexion partielle permettent à de l’énergie acoustique émise par une source d’être perçue dans ces zones. Les zones d’ombre sont délimitées par les rayons tangents à des obstacles (surface du sol), les rayons tangents aux bords des guides d’onde et les branches des caustiques. Chaque phase infrasonore présente des zones d’ombre différentes.

Le temps de propagation depuis la source jusqu’à une station est généralement différent pour chaque phase infrasonore. Ainsi, la signature infrasonore mesurée au niveau d’une station présente plusieurs temps d’arrivée. La figure (1.5) est un exemple d’enregistrement barométrique d’ondes provenant d’une explosion située à la surface du sol. Cette figure illustre la majorité des phases existantes qui se distinguent clairement par leur temps d’arrivée.

### 1.1.3 Nomenclature des phases infrasonores

L’ensemble des phases mesurées dans le cas d’une source à la surface du sol est donné par Garcès [74] et Kulichkov [110]. La nomenclature des phases infrasonores est indiquée ci-dessous. Les phases les plus couramment observées sont présentées en premier.

- **Phases thermosphériques,  $It$**  : Le fort gradient de température situé dans la thermosphère forme, avec la réflexion sur le sol, le guide d’onde thermosphérique (figure (1.3)). L’altitude de réfraction de ces phases est supérieure à 100 km. Dans le cas d’une source au niveau du sol, on distingue généralement deux phases thermosphériques. La phase  $It_a$  est réfractée à une altitude plus basse que la phase  $It_b$ . En acoustique géométrique, la limite entre les deux phases est la caustique située dans la thermosphère (cf. figure (1.3)). Hors des zones d’ombre, la phase  $It_a$  est toujours observée tandis que la phase  $It_b$  l’est rarement en raison de l’atténuation atmosphérique élevée en haute altitude.
- **Phases stratosphériques,  $Is$**  : Les phases stratosphériques sont réfractées à une altitude d’environ 50 km (figure (1.3)). Le guide d’onde stratosphérique est très sensible aux variations du vent. En effet, le gradient thermique n’est pas suffisant pour réfracter de manière significative les ondes infrasonores vers le sol. Seul un gradient positif de la composante portante du vent permet l’existence de ce guide. Aussi, l’existence de phases associées à

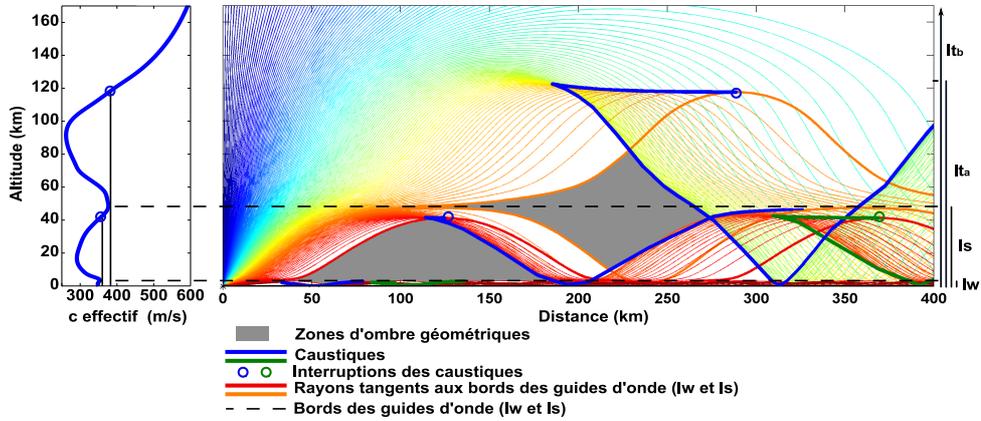


FIGURE 1.3 – Phases troposphériques ( $I_w$ ), stratosphériques ( $I_s$ ) et thermosphériques ( $It_a, It_b$ ) pour une source ponctuelle au sol. Les rayons colorés indiquent les trajets suivis par l'onde. Les parties grises correspondent aux zones d'ombre totales. Le profil de la vitesse du son effective est choisi pour faire apparaître l'ensemble des phases géométriques.

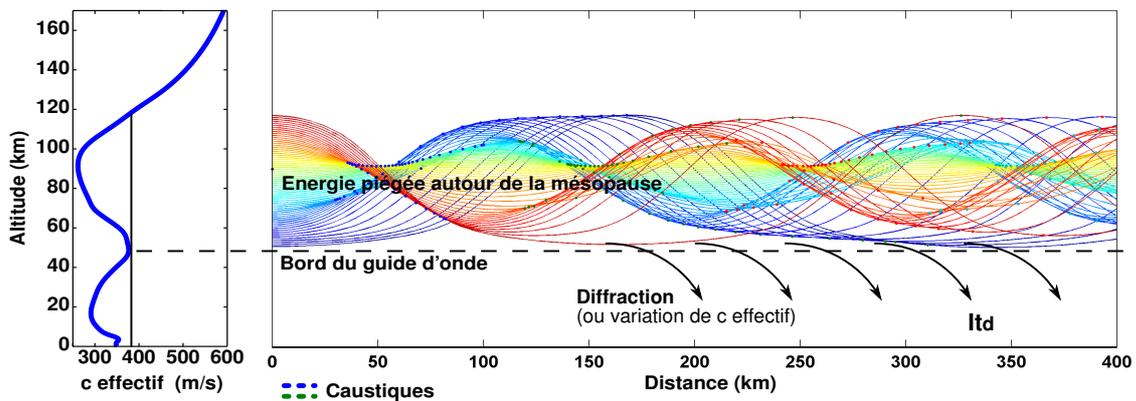


FIGURE 1.4 – Phases thermosphériques diffractées ( $It_d$ ). De l'énergie est supposée piégée dans le guide d'onde centré autour de la mésopause.

ce guide d'onde dépend de la direction de propagation de l'onde.

- **Phases Troposphériques**,  $Iw$  : L'altitude de réfraction des phases troposphériques est inférieure à 20 km (figure (1.3)). Ces phases existent uniquement en présence d'un fort vent dans la basse atmosphère et dans sa direction portante. La décroissance de ces phases en fonction de la distance est généralement rapide.
- **Phases mésosphériques**,  $Im$  : Les phases mésosphériques sont formées par la réflexion partielle des ondes sur de forts gradients locaux de vitesse du son effective situés entre 50 et 100 km d'altitude dans la mésosphère [113]. Ces gradients peuvent être associés aux couches « wind-corner » correspondant à une variation rapide avec l'altitude de la direction du vent (cf. sec. 2.4.1) ou à des inversions de températures (cf. sec. 2.4.1). Un exemple de signature en pression d'une phase  $Im$  est donné à la figure (1.5). Les signatures en pression sont similaires à celles obtenues pour les phases thermosphériques. Ces phases peuvent être mesurées dans les zones d'ombre géométrique des phases thermosphériques.
- **Réflexions partielles troposphériques, stratosphériques et mésosphériques**,  $P$  : Les petites inhomogénéités de la troposphère, de la stratosphère et de la mésosphère sont susceptibles de réfléchir partiellement les ondes infrasonores. Ces multiples réflexions partielles créent au sol un signal aléatoire en temps mais cohérent en espace [110]. La cohérence spatiale suggère que les inhomogénéités forment des couches étendues et relativement stables. Ces structures sont appelées en climatologie des feuillets (cf. section 2.4.1). Les signaux  $P$  sont essentiellement mesurés dans les zones d'ombre proches de la source. Ces réflexions partielles sont à associer aux mécanismes de scattering des ondes acoustiques par une turbulence inhomogène et anisotrope (cf. section 1.2.7). Ces deux approches sont des interprétations et des modélisations différentes du même mécanisme physique. Les phases  $P$  sont associées à des discontinuités du milieu de propagation.
- **Ondes rampantes** (« Creeping waves ») : Un gradient négatif de vitesse du son effective au voisinage de la surface de la Terre engendre une zone d'ombre. Cette zone d'ombre est comprise entre le sol et le rayon limite qui tangente le sol. L'existence de ces zones d'ombre peut être également liée à la courbure de la Terre et au relief. Les ondes rampantes sont des ondes acoustiques qui longent la surface du sol et pénètrent dans ces zones d'ombre. Elles sont caractérisées par une faible atténuation en fonction de la distance (Pierce [157] p.475) qui dépend de la fréquence. Ces ondes vérifient le principe de Fermat généralisé du minimum du temps de propagation et peuvent être modélisées à l'aide de la *théorie géométrique de la diffraction* [103]. Ces ondes jouent un rôle particulièrement significatif dans l'évaluation du champ acoustique dans la zone d'ombre, par exemple, au voisinage de la carapette primaire d'un avion supersonique (Coulouvrat [53]).
- **Phases diffractées**,  $Isd$ ,  $Itd$  : Les profils de température et du vent créent également des guides d'onde centrés autour de la tropopause et de la mésopause (figure (1.4)). Les stations barométriques situées sur la surface de la Terre ne peuvent pas mesurer les ondes acoustiques piégées dans ces guides. Cependant, deux mécanismes permettent à de l'énergie de sortir du guide. Le premier mécanisme consiste en la déformation du guide d'onde avec la distance. Cette déformation est généralement liée à une évolution spatiale du profil de vent. Le deuxième mécanisme est la perte d'énergie du guide d'onde connue en hydroacoustique sous le terme de « Leakage » [2, 195, 97, 113]. Le champ acoustique à l'intérieur d'un guide d'onde peut être délimité par une caustique. Les caustiques étant le siège de phénomènes de diffraction, de l'énergie acoustique peut sortir du guide d'onde et entrer dans un guide d'onde voisin. Lorsque celui-ci est en contact avec la surface du sol, une phase est observée. Les temps de propagation des ondes suivant ces guides sont généralement différents de ceux des guides standards. Ce type d'onde a été observé lors de l'éruption du mont Pinatubo en 1991 [186] par exemple.
- **Ondes de Lamb**,  $L$  : Afin d'être complet, nous citons également les ondes de Lamb qui

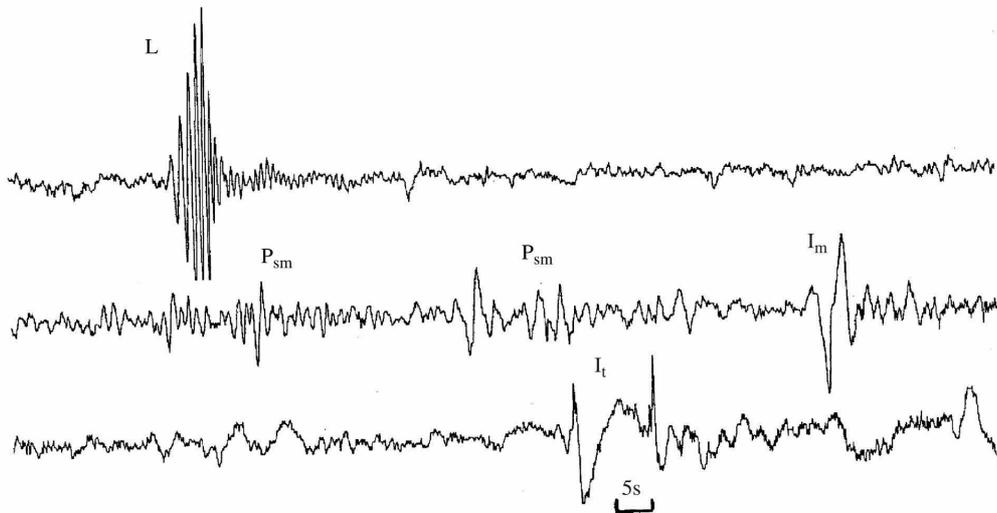


FIGURE 1.5 – Signature en pression mesurée à une distance de 300 km d’une explosion de quelques dizaines de tonnes de TNT sur la surface du sol. Cette figure est extraite de Kulichkov [110]. Les trois lignes se succèdent dans le temps.

sont des ondes externes se propageant à la vitesse du son et horizontalement par rapport à la stratification du milieu [78, 202, 169]. Leur amplitude est exponentiellement décroissante en fonction de l’altitude.

Cette nomenclature des phases peut être utilisée pour des sources situées en altitude à condition d’y ajouter le trajet direct entre la source et la station appelé **phase directe**. Dans le cas des avions supersoniques, cette phase et les ondes rampantes sont associées à la carquette primaire tandis que les autres phases sont associées aux carquettes secondaires [160].

#### 1.1.4 Sources d’infrasons

McKisic [137] fait une revue de la majorité des sources connues d’ondes infrasonores. Il présente en détails les observations et les études réalisées sur ces différentes sources jusqu’en 1997. Peu de nouvelles sources ont été découvertes depuis mais toutes font encore l’objet d’études. Les mesures et les modélisations permettent de comprendre les mécanismes d’émission d’infrasons et leur propagation atmosphérique. C’est également un moyen d’étudier la structure et l’évolution de l’atmosphère.

Les ondes infrasonores peuvent être générées par des sources continues ou des sources explosives (figure (1.6)). Les sources telles que le jet stream, la houle océanique, les tsunamis, les ondes de montagnes et les fortes tempêtes produisent des infrasons avec un niveau d’énergie continu dans le temps. La majorité de ces phénomènes est observée sur de longues durées qui dépendent de la météorologie. Les sources explosives telles que les orages atmosphériques, les sprites<sup>4</sup>, les météorites et autres corps entrant dans l’atmosphère, les explosions nucléaires, les explosions chimiques et le bang supersonique émettent des signaux courts sur une large bande de fréquences. Les aurores boréales et les éruptions volcaniques émettent des impulsions de manière répétée sur de grandes durées. Un grand nombre d’autres sources existent dans la gamme haute des infrasons ( $>5$  Hz) comme les avalanches ou les ponts en présence de fort vents. Différents classements des sources d’infrasons ont pu être réalisés [137] en fonction de leurs fréquences, de leur durée d’observation ou encore de leur amplitude.

4. Les sprites sont des flash lumineux se produisant dans l’atmosphère moyenne lors d’orages de forte puissance.

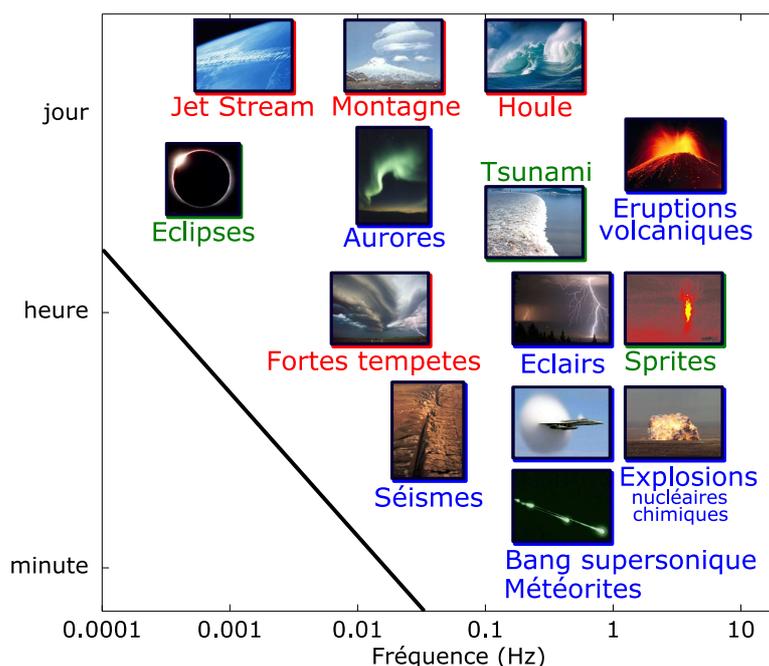


FIGURE 1.6 – Sources d’ondes infrasonores classées en fonction de la fréquence centrale des signaux émis et de leur durée d’observation. On différencie également les sources émettant plutôt de manière discrète et éventuellement répétée (bleu) des sources qui émettent en continue (rouge). Le comportement des sources en vert est difficile à classer.

Nos études portent essentiellement sur les sources explosives de fréquences situées autour de 1 Hz. Ces sources sont les avions supersoniques, les météorites, les explosions et les volcans.

### 1.1.5 Variations temporelles des caractéristiques de la propagation des infrasons

La propagation des ondes infrasonores est sensible aux changements de conditions atmosphériques pour lesquelles on peut mettre en évidence trois échelles temporelles [110] : les variations saisonnières, les variations diurnes et les variations dites rapides (quelques minutes à une heure). La propagation des infrasons est modifiée qualitativement et quantitativement par les variations de température et du vent.

Les variations saisonnières et diurnes ont pu être étudiées expérimentalement à l’aide de sources dont la durée d’observation est longue telles que la houle océanique [75] et les volcans [117] ou pour lesquelles les événements se répètent dans le temps tel que le Concorde [118]. Des études théoriques et numériques existent également [80, 74, 81]. Dans l’ensemble des cas des tendances saisonnières sont observées. Ces tendances sont reproduites par les modèles de propagation couplés aux modèles statistiques de météorologie. Le vent zonal a un effet dominant sur la propagation des infrasons. Dans l’hémisphère nord, le vent forme le guide d’onde stratosphérique vers l’est en hiver et vers l’ouest en été. Ainsi, pour des ondes se propageant vers l’est, seules des phases thermosphériques sont observées en été et les deux types de phases sont observées en hiver [81]. En plus de la variation du nombre d’arrivées, l’azimut d’arrivée des différentes phases évolue dans le temps. Sur une année, l’amplitude des variations d’azimut peut atteindre  $15^\circ$  [118, 117] lorsque la propagation des ondes s’effectue suivant les méridiens. Les variations diurnes de l’azimut, dues entre autres aux marées atmosphériques, peuvent quant à elles atteindre  $2,5^\circ$  [74, 117].

Les variations rapides sont plus difficiles à étudier. Les études réalisées par Kulichkov [112] mettent en évidence de fortes variations du type de phases, de leur amplitude, de leur signature en pression et de leur temps d'arrivée sur des durées inférieures à 15 minutes. Les phases  $P$  dues aux réflexions partielles sont les plus sensibles. Ces variations sont dues au déplacement des structures par la convection du milieu et à l'évolution de ces structures dans le temps (ex. propagation des ondes de gravité).

## 1.2 Mécanismes influençant la propagation des ondes infrasonores

Dans la partie précédente, nous avons mentionné les mécanismes et les phénomènes physiques qui influencent la propagation atmosphérique des ondes infrasonores. Nous avons identifié les caustiques et les zones d'ombre qui sont deux phénomènes caractéristiques de la propagation en milieu inhomogène. Les effets de la variation de la masse volumique et de l'absorption atmosphérique peuvent également intervenir ainsi que les effets non linéaires. La réflexion des ondes sur la surface de la Terre a également de l'influence. Nous avons aussi mentionné le scattering par la turbulence atmosphérique. Dans cette partie, nous détaillons les effets de ces mécanismes sur la propagation des ondes ainsi que les différents modèles développés dans la littérature pour les caractériser. L'objet est d'identifier l'importance de chaque mécanisme pour la propagation atmosphérique et de discuter de la validité des différents modèles physiques développés.

### 1.2.1 Caustiques

Les caustiques sont définies dans la théorie des catastrophes comme des singularités d'amplitude du champ acoustique. Ce sont des surfaces de focalisation des ondes. En acoustique géométrique, elles correspondent aux zones de convergence de rayons voisins et définissent des enveloppes de rayons. Les différents types de caustiques (« pli », cuspidée, papillon, ...) sont classifiés dans la théorie des catastrophes [107]. Les caustiques formées dans l'atmosphère par la réfraction à grande échelle sont essentiellement des caustiques « pli » et des caustiques cuspidées. Des zones de focalisation peuvent également être créées par le mouvement de la source [100, 130]. Le phénomène le plus connu est le super bang associé à l'accélération d'un avion supersonique [160]. Les petites échelles du milieu telles que la turbulence atmosphérique créent également des caustiques pouvant avoir des formes plus complexes [31]. Dans le cadre de l'étude de la propagation des infrasons à grande distance, nous nous intéresserons uniquement aux caustiques « pli » et cuspidées.

Le comportement des ondes au voisinage d'une zone de focalisation dépend de l'amplitude de l'onde. Principalement trois types de régimes existent [42] : le régime linéaire pour les ondes acoustiques de faibles amplitudes, le régime des chocs faibles et le régime des chocs forts. La théorie des catastrophes discute de l'ensemble des singularités dans le régime linéaire [107]. Le régime des chocs faibles a largement été étudié pour les caustiques « pli » [86, 173, 7, 8] et les résultats ont été étendus aux caustiques cuspidées [136, 130, 132] ainsi qu'au cas des caustiques « pli » interrompues [130]. Le régime choc fort appartient au cadre de la *dynamique des chocs* [199].

En régime linéaire, la singularité d'amplitude est régularisée par les mécanismes de diffraction. La théorie des catastrophes donne l'évolution du champ de pression au voisinage des caustiques dans la limite haute fréquence [107]. Pour les caustiques « pli », le champ de pression est donné par la fonction de Airy [107, 130]. L'onde avant la caustique est généralement appelée incidente tandis que l'onde après la caustique est appelée réfléchie. En régime linéaire, l'onde réfléchie est donnée par la transformée de Hilbert de l'onde incidente [173, 130]. Pour les caustiques cuspidées, le champ de pression est donnée par la fonction de Piercey [107, 130]. Notons

que suffisamment loin du point de rebroussement de la caustique cuspidée, ses branches sont des caustiques « pli ». Les caustiques peuvent être traitées globalement dans le régime linéaire à l'aide de la méthode de Maslov [107, 159].

Dans le cas des chocs faibles, les effets non linéaires s'ajoutent à la diffraction pour régulariser le champ de pression. La transformée de Hilbert obtenue dans le cas linéaire appliquée à un signal discontinu (tel qu'une onde en  $N$ ) donne une singularité logarithmique. Guiraud [86] est le premier à montrer que cette nouvelle singularité est régularisée par les effets non linéaires. Rosales & Tabak [173] étudient la focalisation de chocs faibles à l'aide de développements par ordres de grandeurs. Cette approche générale permet d'introduire les effets de viscosité également. Contrairement au cas linéaire, le champ de pression dans le cas de la focalisation de chocs faibles ne possède pas de solution analytique. Pour une caustique « pli », le champ de pression vérifie au voisinage de la caustique une équation de Tricomi non linéaire [7, 130]. Différentes approches numériques permettent de résoudre cette équation [130]. Il est également possible d'utiliser les équations paraboliques non linéaires (NPE, KZK, cf. section 1.3.3) afin d'étudier la focalisation d'un choc faible sur une caustique cuspidée [155, 31].

La réfraction des ondes dans la thermosphère fait apparaître une caustique cuspidée (cf. figure (1.3)). Cette caustique a été étudiée en tant que telle dans le cas des chocs faibles [172] et des chocs forts [21, 22]. Cependant, aucune comparaison ni étude précise n'a permis de conclure sur le régime de la focalisation. La contribution de cette caustique sur l'énergie arrivant dans la zone d'ombre n'a pas été évaluée. Les autres caustiques de l'atmosphère peuvent être importantes notamment lorsqu'une station barométrique se situe à leur voisinage. Cette situation se produit notamment lorsqu'une caustique touche la surface du sol.

### 1.2.2 Zones d'ombre

La notion de zones d'ombre vient de l'acoustique géométrique, les zones d'ombre étant les régions de l'espace où aucun rayon acoustique ne passe. Les zones d'ombre sont délimitées par les rayons tangents à des obstacles, les rayons tangents aux bords des guides d'onde et les branches des caustiques (ex. figure (1.3)). Dans le cadre de l'acoustique géométrique, le champ de pression serait discontinu au bord des zones d'ombre. En acoustique physique, la diffraction des ondes raccorde continûment le champ de pression géométrique à la zone d'ombre. Les zones d'ombre ont cependant une réalité physique puisque l'énergie du champ de pression y est plus faible. La zone d'ombre la plus simple et la plus étudiée est liée à la diffraction de Fresnel [157, 103, 104, 54] par un écran semi infini. Coulouvrat & Marchiano [54] étudie en particulier la diffraction de Fresnel de chocs faibles. Ils montrent que, comme dans le cas des caustiques, les effets non linéaires interviennent, en particulier sur la pénétration du choc dans la zone d'ombre. Cependant, la diffraction de Fresnel s'applique à des écrans étroits. En propagation atmosphérique des ondes infrasonores, seule la topographie (montagnes) peut être assimilée à de tel écran.

Dans le cas où l'obstacle est non anguleux, des ondes rampantes existent [157]. L'étude de la propagation de ces ondes est généralement réalisée dans le cadre de la théorie géométrique de la diffraction [179, 178, 53]. En propagation atmosphérique, le principal obstacle est la surface du sol. La zone d'ombre formée par un gradient négatif de vitesse du son entraîne l'existence d'ondes rampantes qui longent la surface de la Terre. Coulouvrat [53] étudie ces ondes à la limite de la carapette primaire d'un avion supersonique. Il montre que l'impédance du sol est importante contrairement aux effets non linéaires. Ces travaux s'appliquent également aux cas d'une source ponctuelle située à la surface du sol. Les travaux de Chambers & Whelan [45], réalisés pour une gamme de fréquences supérieures à celle des infrasons, montrent que la rugosité du sol (topographie) peut également influencer la propagation des ondes rampantes.

Un rayon tangent au bord d'un guide d'onde va être divisé en deux parties, chaque partie partant dans un des guides d'onde (cf. figure (1.3), [137] et [199, p. 252]). Le front d'onde est alors

divisé en deux parties et l'amplitude du champ de pression est très faible entre les deux rayons divergeant. Cette zone n'est pas une zone d'ombre au sens strict pour l'acoustique géométrique et le champ acoustique pourrait y être calculé dans le cadre de cette approximation. Cependant, les maxima de la vitesse du son effective apparaissent comme des points chaotiques pour les trajectoires des rayons.

Cependant, la diffraction n'est pas le seul phénomène à considérer au voisinage des zones d'ombre. Il est d'abord nécessaire de faire la différence entre une zone d'ombre totale (telle qu'elle est présentée à la figure (1.3)) où aucune phase géométrique n'est observée et les zones d'ombre de chaque phase géométrique. La zone d'ombre des phases thermosphériques peut être considérée de manière indépendante des phases stratosphériques qui s'y propage. Ceci est d'autant plus vrai que les temps d'arrivée des différentes phases est généralement différent. Les mécanismes de réflexion partielle et le scattering des ondes infrasonores par les petites inhomogénéités de l'atmosphère, en particulier la turbulence permettent à de l'énergie de pénétrer dans les zones d'ombre géométrique.

### 1.2.3 Stratification de l'atmosphère

L'équilibre hydrostatique de l'atmosphère engendre une décroissance exponentielle de la masse volumique et de la pression en fonction de l'altitude. Cette propriété a pour conséquence de faire diminuer l'amplitude des perturbations de masse volumique et de pression d'une onde se propageant vers la haute atmosphère et inversement. L'énergie de l'onde reste constante quant à elle. Bergmann [19] et Blokhintzev [32] utilisent un changement de variable permettant de s'affranchir dans les équations de ces effets d'amplification :

$$P = \frac{p'}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (1.1)$$

où  $p'$  représente la perturbation acoustique en pression et  $\rho_0$  la masse volumique de l'atmosphère. Bergmann montre que cette normalisation permet de revenir à l'équation d'onde standard et qu'elle apparaît également dans l'équation de conservation de l'action d'onde en acoustique géométrique. Ainsi, l'amplitude du rapport des perturbations de masse volumique sur la masse volumique moyenne, l'amplitude du rapport des perturbation de pression sur la pression atmosphérique et l'amplitude des perturbations de vitesse sont inversement proportionnels à  $\sqrt{\rho_0}$  et augmentent avec l'altitude. Bergmann [19] montre également que la vitesse de phase  $c_\phi$  et la vitesse de groupe  $c_g$  des ondes acoustiques sont modifiées par la stratification suivant les relations :

$$c_\phi(\omega) = c_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad c_g(\omega) = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)^2},$$

où  $c_0$  est la vitesse du son et  $\omega_a = 2\pi f_a$  la pulsation de coupure acoustique.  $f_a$  est de l'ordre de quelques milliHertz dans l'atmosphère. La figure (1.7) illustre la dispersion des ondes par la stratification. La vitesse de phase des ondes en basses fréquences est plus élevée que la vitesse du son en absence de stratification. Cet effet est significatif en dessous de 0,05 Hz.

La dispersion modifie la signature en pression des ondes infrasonores. Comme la pulsation  $\omega_a$  varie en fonction de l'altitude, la réfraction d'une onde basse fréquence est modifiée de manière inhomogène par la stratification. Les guides d'onde effectifs sont modifiés. Les équations obtenues par Bergmann [19] ont depuis été reprises notamment par Ostashev [148] dans des contextes plus généraux. Une étude complète du comportement des ondes acoustiques en basses fréquences est effectuée par Georges [78].

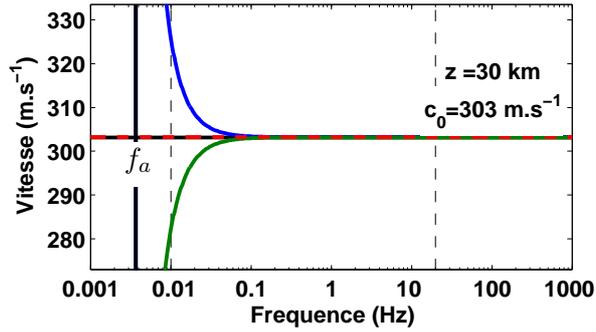


FIGURE 1.7 – Dispersion des ondes infrasonores due à la stratification du milieu. La vitesse de phase (bleu) tend vers l’infini tandis que la vitesse de groupe (vert) tend vers 0 quand  $f \rightarrow f_a$ . La vitesse de référence  $c_0$  (rouge) et la fréquence de coupure acoustique  $f_a$  sont prises à une altitude de 30 km.

### 1.2.4 Absorption et dispersion atmosphérique

L’absorption atmosphérique modifie à la fois l’énergie des ondes infrasonores et leur forme d’onde lors de leur propagation. Les mécanismes d’absorption dans un gaz sont généralement classés en trois catégories [185] : l’absorption classique, l’absorption rotationnelle et l’absorption par relaxation moléculaire. L’absorption classique tient compte de la viscosité de cisaillement et des mécanismes de diffusion thermique et de diffusion moléculaire. La viscosité de cisaillement est la conséquence d’un déséquilibre entre les degrés de liberté en translation des molécules. L’absorption rotationnelle (ou de volume) traduit un déséquilibre entre les mouvements de rotation et de translation des molécules. Enfin, la relaxation moléculaire tient compte des mouvements internes de vibration des molécules auxquels on peut ajouter les réactions chimiques entre les molécules. Une description physique de ces différents mécanismes est donnée dans Lighthill [122] et Vincenti & Kruger [192]. Les développements présentés dans le chapitre 2 et en annexe B permettent également de comprendre l’influence de ces mécanismes sur la propagation des ondes.

Le modèle d’absorption allant de la troposphère jusqu’à la thermosphère le plus pertinent est celui de Bass & Sutherland [185]. Il est basé sur des modèles physiques réajustés empiriquement. L’ensemble des mécanismes d’absorption listés ci-dessus est incorporé dans ce modèle. Les mécanismes de relaxation présents en propagation atmosphérique sont associés aux énergies de vibration des molécules de  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  et  $O_3$ . Leur fréquence de vibration  $f_i$  est globalement comprise dans la gamme des infrasons comme le montre la figure (1.8). Les temps de changement d’état d’excitation des autres molécules et ceux de réaction entre molécules sont très grands par rapport à la période de l’onde  $\mathcal{T}_w$ . La propagation de l’onde est supposée gelée pour l’ensemble de ces mécanismes. Les temps de relaxation  $\tau_i = 1/f_i$  associés aux molécules de  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  et  $O_3$  regroupent plusieurs mécanismes physiques d’échange d’énergie vibratoire (excitation d’une molécule, transfert d’excitation entre molécules) [15]. Le modèle d’absorption de Bass & Sutherland est approximatif au-dessus de 90 km du fait d’une plus grande incertitude sur les données atmosphériques [185]. La figure (1.9) présente l’absorption des différents mécanismes pour la fréquence de 1 Hz. L’absorption associée aux mécanismes de relaxation est prépondérante dans la basse atmosphère tandis que l’absorption dans la haute atmosphère est dominée par la viscosité.

La relaxation de translation (associé à la viscosité de cisaillement), la relaxation de rotation et la relaxation de vibration des molécules ont également un effet dispersif sur les ondes [185]. En basses fréquences, la vitesse des ondes est la vitesse du son à l’équilibre  $c_0$ . À plus hautes fréquences mais pour un nombre de Knudsen petit, les effets de relaxation moléculaire interviennent. La vitesse des ondes augmente jusqu’à la vitesse du son dite gelée  $c_\infty$  [157]. En très

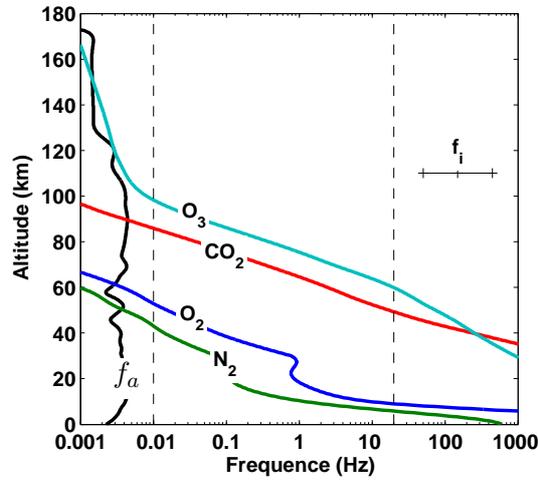


FIGURE 1.8 – Fréquences de relaxation  $f_i$  des mécanismes de vibration interne des molécules de  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  et  $O_3$ . Ces fréquences sont les inverses des temps de relaxation  $\tau_i$  [192]. L'absorption est maximale à la fréquence de relaxation  $f_i$ . L'échelle à droite indique la largeur fréquentielle d'efficacité à 10% de l'absorption des mécanismes de relaxation.

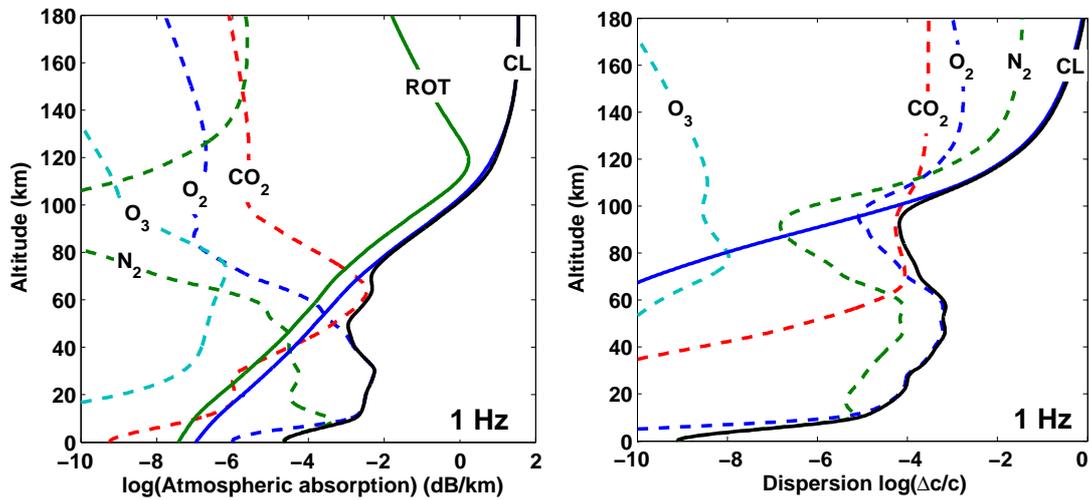


FIGURE 1.9 – a – Absorption atmosphérique  $\alpha$  en fonction de l'altitude pour une fréquence de 1 Hz. L'absorption totale, l'absorption classique (CL), l'absorption rotationnelle (ROT) et l'absorption vibratoire associées aux molécules de  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  et  $O_3$  sont représentées. Figure inspirée de Sutherland & Bass [185]. b – Dispersion atmosphérique  $\Delta c/c$  en fonction de l'altitude pour une fréquence de 1 Hz. CL combine ici la dispersion classique et rotationnelle.

hautes fréquences, lorsque le nombre de Knudsen s'approche de 0,1, les mécanismes de dispersion liés aux mouvements de translations et de rotations des molécules interviennent. Pour la fréquence de 1 Hz, la vitesse des ondes est  $c_0$  au niveau du sol et la dispersion due à la relaxation moléculaire domine jusqu'à 100 km d'altitude. En haute altitude, la dispersion classique et rotationnelle augmente de manière importante la vitesse des ondes. La figure (1.9) illustre ces effets de dispersion.

Les mécanismes d'absorption et de dispersion modifient la signature en pression des ondes. Une modélisation fidèle de ces mécanismes est importante lors de l'étude du temps de montée pour des sources explosives [165, 16] ou pour le bang supersonique [89, 160, 31, 98]. Bass & al. [14] montrent que la dispersion a une influence particulière sur les phases thermosphériques. L'altitude de réfraction des ondes dans la thermosphère est affectée par la dispersion. La vitesse des ondes hautes fréquences étant légèrement plus grande que la vitesse du son  $c_0$ , celles-ci sont réfractées à des altitudes légèrement plus basses. L'absorption des ondes augmentant exponentiellement avec l'altitude, une petite diminution de l'altitude de réfraction entraîne une augmentation de l'amplitude de l'onde réfractée. Les calculs paraboliques et de tracé de rayons montrent que l'augmentation d'amplitude est significative dès 0,5 Hz [14]. Cette réfraction diminue également la taille de la zone d'ombre et le temps de propagation des ondes.

### 1.2.5 Non linéarités

Lorsque l'amplitude d'une perturbation n'est pas négligeable devant la pression atmosphérique, la perturbation affecte sa propre propagation. Ces phénomènes sont appelés effets non linéaires. Pour les perturbations de très forte amplitude, les effets non linéaires dominent les phénomènes de dissipation. Les perturbations peuvent alors créer des discontinuités de masse volumique  $\rho$ , de pression  $p$  et de vitesse  $\vec{v}$ . On parle alors d'ondes de choc. Deux régimes de chocs existent : les chocs faibles et les chocs forts. La notion de choc faible inclut les ondes linéaires. Nous recommandons au lecteur les ouvrages de Whitham [199] et de Landau & Lifshitz [116] pour une présentation détaillée de la propagation non linéaire des ondes acoustiques et des chocs. Pierce [157, chap. 11] discute également des effets non linéaires dans le cadre de la propagation atmosphérique. D'autres ouvrages sont consacrés aux effets non linéaires en acoustique [88, 152].

Les effets non linéaires sont importants en propagation atmosphérique des ondes infrasonores pour plusieurs raisons. (1) Les sources d'infrasons peuvent être puissantes (explosions nucléaires mégatoniques, éruption volcaniques, ...). (2) Les effets non linéaires, étant cumulatifs avec la distance de propagation, distordent la signature en pression de l'onde. (3) La variation de la masse volumique qui amplifie les ondes acoustiques lorsqu'elles se propagent vers la haute atmosphère augmente également l'importance des effets non linéaires. L'amplitude et les effets non linéaires augmentent tous deux en  $1/\sqrt{\rho_0}$ . Cette raison est généralement invoquée pour expliquer l'importance des effets non linéaires dans la haute atmosphère [22]. (4) Les effets de focalisation des ondes notamment au niveau des caustiques augmentent l'amplitude de l'onde et les effets non linéaires.

Les effets non linéaires déforment la signature en pression des ondes et la choquent [157]. Cette déformation produit généralement une onde dite en « N ». Ce raidissement des fronts se traduit d'un point de vue fréquentielle par une génération d'harmoniques. L'atténuation des hautes fréquences étant plus élevée, une conséquence indirecte des effets non linéaire est une augmentation de l'atténuation des ondes. Dans certaines configurations (exemple des ondes en dents de scies [157, section 11-5]), les effets non linéaires dissipent directement de l'énergie. De plus, des effets de réfraction non linéaire peuvent exister notamment pour les chocs forts [175, 22, 13].

Dans le cadre général, la propagation non linéaire d'une perturbation est un phénomène difficile à modéliser. Une modélisation complète nécessite le recours à la résolution directe des

équations de Navier-Stokes à l'aide de schéma permettant de capturer les chocs. Ces techniques sont très coûteuses en temps de calcul. Deux approches permettent de simplifier le problème. La *dynamique des chocs* [199, chap. 8] modélise la propagation des chocs forts sous l'hypothèse que les non linéarités dominent la propagation. La seconde approche s'intéresse au cas des chocs faibles [199, chap. 9] pour lesquels les effets non linéaires n'apparaissent qu'au deuxième ordre comme une correction de l'acoustique linéaire. Les conditions d'application de la théorie des chocs faibles et des chocs forts sont présentés dans Whitham [199, p. 170]. La dynamique des chocs est valable pour  $p'/p_0 \gg 1$  tandis que l'approximation choc faible est valable pour  $p'/p_0 \ll 1$ . Des approches permettent de regrouper les deux approximations telle que celle proposée par Baskar & Prasad pour le bang supersonique [13].

La modélisation de la propagation atmosphérique des ondes émises par une explosion en tant que chocs forts a été menée par Blanc avec Besset [22], Peyret [154] et Garnier [77] au CEA. Ces modélisations montrent essentiellement des effets de réfraction non linéaires.

En propagation atmosphérique à grande distance, l'approximation choc faible est généralement faite. Lorsque la diffraction est négligée, autrement dit, dans le cadre de l'acoustique géométrique, l'évolution de la signature en pression de l'onde suit une équation de Burgers généralisée [199, 23, 157, 48, 50, 6, 88]. Cette équation généralisée tient compte de l'absorption classique, des mécanismes de relaxation moléculaire et des effets géométriques de convergence et de divergence du front d'onde. L'équation de Burgers peut être augmentée en une équation KZK (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov) qui tient compte de la diffraction [120, 50, 88, 31] ou de manière équivalente en une équation NPE (Nonlinear Parabolique Equation) [136]. Ces équations paraboliques non linéaires permettent de modéliser la focalisation des ondes au niveau de caustiques et la diffraction au niveau des zones d'ombres dans la limite des chocs faibles. D'autres termes peuvent être ajoutés à ces équations afin de modéliser les effets de la turbulence scalaire ou vectorielle [31, 27].

L'influence des non linéarités sur la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère a été observée notamment pour les météorites [168], les explosions de fortes puissances [26, 38, 67, 66, 65] et le bang supersonique [160]. La conséquence des non linéarités la plus visible est la forme d'onde en « N » observée pour le bang supersonique. Cette forme d'onde se crée au fur et à mesure de la propagation de l'onde. Les effets non linéaires ont été observés à plus basses fréquences pour des sources de très fortes puissances telles que les essais nucléaires ou des explosions chimiques de très fortes puissances. Broche [38] montre à partir des mesures ionosphériques réalisées lors d'explosions nucléaires atmosphériques que le délai d'occurrence – durée qui sépare l'instant de l'explosion du début de la manifestation de la perturbation sur l'ionosphère – est fonction de la puissance de la source. Ce délai diminue quand la puissance de la source augmente. Ces observations sont confirmées par la différence de délai mesurée pour deux explosions chimiques successives de puissances différentes [26]. Les effets des non linéarités sur la durée et la signature de la perturbation dans l'ionosphère ont également été observés et modélisés [67, 66, 65].

### 1.2.6 Réflexion sur la surface de la Terre

L'influence de la surface des océans et des continents sur la propagation des ondes infrasonores a fait l'objet de peu d'études. Bien que la surface des continents et des océans soit complexe (topographie, rugosité, porosité, ...), la réflexion des infrasons est généralement supposée totale et spéculaire. Des résultats obtenus pour des fréquences supérieures à 10 Hz peuvent être étendus au cas des infrasons. Un modèle d'impédance de la surface du sol de la Terre est donné par Attenborough [3, 4]. Madshus & al. [128] étudient expérimentalement l'impédance du sol en basses fréquences acoustiques (quelques Hertz) ainsi que la conversion acoustique – sismique jusqu'à 0,1 Hz. Ces études montrent des effets de couplage entre les ondes acoustiques et les ondes

sismiques. L'impédance du sol ou des océans et le coefficient de conversion dépendent de la fréquence, de l'angle d'incidence des ondes acoustiques et des propriétés du sol en particulier de la vitesse des ondes de cisaillement. La conversion des ondes infrasonores en ondes hydroacoustiques ou en ondes sismiques ont été étudiées notamment dans le cas du bang primaire d'avions supersoniques [160, 43]. Des études de l'effet de la rugosité d'une surface sur la propagation des ondes peuvent être appliquées au cas des infrasons. Chambers [45] montre notamment que la rugosité augmente l'amplitude des ondes rampantes dans les zones d'ombres.

### 1.2.7 « Scattering » par les petites structures de l'atmosphère

Le *scattering* est un terme regroupant les phénomènes de diffraction et la diffusion des ondes par les inhomogénéités du milieu de propagation [157, p. 424]. Dans cette section, nous ne nous intéressons pas directement aux phénomènes de réflexions partielles sur de fortes inhomogénéités du milieu qui, comme nous l'avons vu précédemment, donne lieu aux phases  $P$  et  $I_m$ . Les inhomogénéités seront appelées *turbulence* dans le sens où elles ont un comportement aléatoire caractérisé de manière statistique par une fonction de cohérence spatiale.

La turbulence peut être associée à deux types d'inhomogénéités : les inhomogénéités scalaires correspondant à des fluctuations spatiales de la vitesse du son (température) et/ou de la densité et les inhomogénéités vectorielles correspondant à une variation spatiale de la vitesse de convection du milieu. La turbulence est généralement décrite par une répartition spectrale d'énergie. Elle peut être homogène ou inhomogène, isotrope ou anisotrope [150, 58]. La répartition spectrale d'énergie dans la zone inertielle dépend des propriétés des structures turbulentes (2D, 3D, isotropie, . . .) [10] ou, autrement dit, du mode portant l'énergie turbulente (acoustique, gravité, tourbillonnaire, entropique, . . .). Différentes méthodes permettent de simuler numériquement un champ de turbulence [58]. Nous citerons la décomposition en modes de Fourier aléatoire [101, 58].

Les effets de la turbulence sur la propagation des ondes dans la couche limite atmosphérique ont été étudiés analytiquement (ex. Ostashev [150]) et numériquement (ex. Dallois & Blanc-Benon [58, 31]), notamment dans le cas du bang supersonique primaire [125, 155]. Ces études sont utiles à l'interprétation des hautes fréquences des signaux et peuvent être transposées à la turbulence grande échelle qui affecte la propagation des infrasons. Lors de la propagation en milieu turbulent, le signal en un point de l'espace est constitué d'arrivées multiples. Ceci a pour effet d'allonger la durée du signal et de créer de petites oscillations. Dans le cas du bang supersonique primaire, par exemple, cet effet se traduit par un allongement du temps de montée du « N » [160]. Pour des distances de propagation plus grandes, le signal est complètement modifié. Le délai entre les arrivées multiples peut être plusieurs fois plus grand que la durée du signal d'une arrivée. L'amplitude du champ de pression augmente également dans certaines zones en raison de la focalisation des ondes par la turbulence [30, 27, 147]. Les non linéarités accentuent cet effet et donnent lieu à une distortion de la forme d'onde [114, 27]. Bien que la prise en compte de la turbulence dans les modèles de propagation permettent de retrouver statistiquement les résultats expérimentaux, peu d'expériences permettent de valider les modèles. En particulier, les expériences fournissant à la fois le champ acoustique propagé et les caractéristiques de la turbulence telle que celle réalisée par Ollivier & al. [147] sont peu nombreuses.

À grande échelle, la turbulence de l'atmosphère est essentiellement constituée d'ondes de gravité [138, 76]. Cette dominance des ondes de gravité est liée à leur amplification exponentielle avec l'altitude. Les spectres d'énergie d'ondes de gravité ont largement été étudiés. La turbulence d'onde de gravité est inhomogène et anisotrope et est caractérisée par une cascade d'énergie en  $k_z^{-3}$  où  $k_z$  est le nombre d'onde vertical. L'influence de cette turbulence sur la propagation des ondes a récemment été étudiée analytiquement [149, 108] et numériquement [146, 145, 109, 29, 59].

Ostashev & al. [149] utilisent une répartition spectrale d'énergie de température et de vent

inspiré du spectre de Von Kármán utilisé pour modéliser la turbulence isotrope de couche limite atmosphérique [58]. Cette répartition spectrale d'énergie reproduit le comportement anisotrope des ondes de gravité et leur distribution inhomogène. La direction verticale  $\vec{e}_z$  de l'espace est ainsi privilégié. Le spectre reproduit également l'évolution en  $k_z^{-3}$  caractéristique de la cascade d'énergie des ondes de gravité. Ostashev & al. établissent à partir de cette répartition spectrale d'énergie la section de scattering des ondes infrasonores ainsi que la fonction de cohérence transverse pour une onde plane qui apparaît anisotrope. La section de scattering est constituée de deux lobes de directivité correspondant à la direction de propagation de l'onde incidente et à la direction de propagation d'une onde réfléchiée par rapport à la stratification du milieu. Le scattering par la turbulence d'ondes de gravité contribue également aux phénomènes de réflexions multiples dans la stratosphère. Kulishkov & al. [108] étudient l'impacte de la turbulence d'onde de gravité sur les incertitudes de mesures au niveau d'une station barométrique. Ils évaluent les fluctuations d'azimut et de vitesse apparente des ondes infrasonores mesurées au niveau d'une station. Ils montrent une bonne adéquation entre leurs évaluations et des mesures réalisées à courte et longue distances de sources explosives. La déviation d'azimut est également étudiée numériquement par Norris & Gibson [146].

Norris & al. [145] utilisent une répartition spectrale d'énergie d'ondes de gravité présentant les mêmes caractéristiques que précédemment et modélisent la propagation des infrasons à partir d'une explosion à la surface du sol avec un code basé sur l'approximation parabolique. Les calculs montrent une augmentation de l'énergie dans la zone d'ombre (entre la source et 150 km). L'amplitude des signaux reconstitués est de l'ordre de grandeur de l'amplitude des mesures réalisées lors d'un accident industriel. Kulichkov & al. [109] utilisent comme turbulence une perturbation petite échelle de la vitesse horizontale variant uniquement suivant l'altitude et vérifiant la dépendance en  $k_z^{-3}$ . La propagation des ondes infrasonores est modélisée à l'aide d'une méthode parabolique. Les perturbations créent des réflexions multiples et permettent à de l'énergie de suivre le guide d'onde stratosphérique. Ils montrent que des signaux apparaissent dans la zone d'ombre et que la durée des signaux déjà présents sans turbulence augmentent.

Blanc-Benon & al. [29, 59] montrent l'influence de la turbulence d'ondes de gravité sur la carapette secondaire d'un avion supersonique à l'aide d'une méthode de tracé de rayons. Ces petites échelles modifient significativement les temps d'arrivée des rayons ainsi que la forme de la carapette secondaire.

Les répartitions spectrales d'énergie turbulente d'ondes de gravité utilisés pour étudier l'influence des perturbations de l'atmosphère sur la propagation des infrasons sont réalistes mais ne tiennent pas compte de toutes les propriétés des ondes de gravité telles que les relations entre les échelles horizontales et verticales, l'ensemble de la bande en fréquences des ondes de gravité, l'anisotropie liée à la convection du milieu, les fluctuations de masse volumique et de pression. Les confrontations entre les mesures et des simulations intégrant ce type de turbulence sont peu nombreuses. Les études statistiques sont limitées aux variations d'azimut et de vitesse apparente. Les effets de la turbulence d'onde de gravité sur la signature des infrasons ne sont pas étudiés de manière approfondie.

### 1.3 Simulation numérique de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores

L'objet de ce chapitre est de présenter les différentes méthodes permettant de modéliser la propagation des ondes infrasonores à grande distance. Les avantages et les limites de chacune des méthodes seront précisés ainsi que leurs applications et les enjeux en terme de développement. Nous nous intéressons au tracé de rayons (acoustique géométrique dans la limite des chocs faibles), à la résolution directe des équations de la mécanique des fluides et aux méthodes parabo-

liques. D'autres méthodes existent telles que les modes normaux [97, 111] ou les rayons Gaussiens mais elles ne présentent pas véritablement d'avantages par rapport aux autres méthodes.

Le problème de propagation est défini à la fois par les propriétés du milieu, par son comportement au passage d'une onde et par la source. Les aspects intervenant en propagation atmosphérique d'ondes infrasonores sont :

- la réfraction, la convection, la diffraction et la réflexion partielle des ondes,
- la variation de la masse volumique de l'atmosphère (stratification),
- l'absorption et la dispersion des ondes (classique, rotationnelle et relaxation vibratoire),
- les effets non linéaires dans la limite des chocs faibles et les chocs forts,
- le scattering par la turbulence scalaire et vectorielle,
- la réflexion sur la topographie et l'impédance de la surface du sol,
- les conditions de rayonnement de Sommerfeld,
- la propagation en trois dimensions relativement aux coûts de calcul.

Les contraintes sur la modélisation de la source sont à la fois sur le champs de pression qu'elle génère localement mais également sur la prise en compte de son mouvement. L'objet d'un code de propagation à grande distance n'est pas de calculer le champ proche de la source. L'initialisation de la propagation au niveau de la source est réalisée avec un champ équivalent au niveau de la source compatible avec le code de propagation. Les codes de modélisations doivent notamment être capables de modéliser la propagation des ondes émises par une source se déplaçant sur de grande distance par rapport aux inhomogénéités du milieu.

### 1.3.1 Acoustique géométrique

L'acoustique géométrique est une approximation hautes fréquences de l'opérateur de propagation des ondes acoustiques. L'hypothèse hautes fréquences suppose que les plus petites échelles spatiales et temporelles caractéristiques du milieu de propagation sont grandes par rapport à la longueur d'onde et à la période de l'onde. Cette approximation relativement classique est détaillée par Whitham [199], Candel [39], Pierce [157] ou encore Ostashev [148]. Historiquement, l'acoustique géométrique est dérivée de l'optique géométrique et de la loi de Snell-Descartes [157] qui décrit la réfraction des ondes dans un milieu inhomogène. Plus généralement, l'approximation hautes fréquences appliquée aux équations de la mécanique des fluide donne au premier ordre l'équation de l'eikonal et au deuxième ordre une équation de transport de l'action d'onde [39]. L'équation de l'eikonal est résolue à l'aide de la méthode de *tracé de rayons*. Les rayons sont les lignes tangentes à la direction de propagation de l'énergie acoustique. L'intégration de l'équation de conservation de l'action d'onde conduit à l'invariant de Blokhintzev [32]. Keller [102] montre que l'équation de l'eikonal est également vérifiée au premier ordre pour les chocs faibles.

L'hypothèse hautes fréquences de l'acoustique géométrique équivaut à négliger la diffraction dans le modèle de propagation de l'onde. La diffraction est importante au niveau des caustiques, des bords des zones d'ombre et en présence de petites inhomogénéités. La diffraction est d'autant plus importante que la fréquence de l'onde est basse. L'acoustique géométrique ne modélise également pas la réfraction non linéaire des chocs. En dehors de ces limites contraignantes, soit loin des caustiques et des zones d'ombre, pour des ondes d'amplitude faible et en absence de petites échelles, la méthode de tracé de rayons est juste et efficace. Elle permet notamment de modéliser la propagation en trois dimensions et à très grandes distances d'ondes émises par des sources en mouvement avec un coût de calcul faible. Un autre aspect délicat techniquement de l'acoustique géométrique est la recherche de l'ensemble des rayons reliant la source au récepteur [52, 133, 188, 197]. Ces rayons sont généralement appelés rayons propres et leur détermination est nécessaire au calcul du signal au récepteur.

Différents codes de tracé de rayons appliqués à la propagation atmosphérique ont été développés depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle. Une liste non exhaustive de ces codes est donnée ci-dessous.

- Les premiers codes calculaient essentiellement les trajectoires des rayons acoustiques à partir de la loi de Snell-Descartes (ex. Fujiwhara [91]).
- Georges [79] développe un code permettant de calculer en coordonnées sphériques (3D) les rayons pour les ondes acoustique-gravité dans l’atmosphère. L’atmosphère est modélisée comme un milieu inhomogène convecté. Le code inclut les effets de dispersion des ondes acoustiques en basses fréquences dus aux variations de la masse volumique.
- Le premier code intégrant la forme d’onde (*ARAP*) est celui de Hayes & al. [91] (1969) qui permet de modéliser la propagation du bang supersonique dans la limite des chocs faibles. Les rayons sont initialisés sur un cône au niveau de la source supersonique en mouvement quelconque. Ils sont calculés pour une atmosphère stratifiée, inhomogène et convectée (3D). Les effets géométriques sur l’amplitude des ondes sont calculés à l’aide de la section du tube de rayons. La forme d’onde est initialisée au niveau de la source à l’aide de la fonction de Whitham. L’évolution non linéaire de la forme d’onde le long des rayons est obtenue par résolution de l’équation de Burgers sans viscosité.
- Candel [39] formalise la notion de section du tube de rayons et l’étend à la notion de volume convecté. Il propose une méthode basée sur les éléments géodésiques pour les calculer. La réflexion sur des frontières solides est également présentée.
- *Harpa* [99] (NOAA) est un code permettant de calculer la trajectoire des rayons en coordonnées sphériques (3D) et l’absorption atmosphérique. L’amplitude de l’onde est obtenue en calculant des rayons voisins. Il est particulièrement intéressant pour son code associé *Eigen* [197] qui permet de trouver les rayons propres entre une source ponctuelle fixe et un récepteur. La procédure est basée sur une méthode de tir de rayons (shooting method) qui recherche en 2D les rayons encadrant le récepteur. Cette procédure est utilisable en trois dimensions si l’évolution en azimut est lente.
- Cleveland & al. [50, 49] comparent trois codes résolvant le long des rayons l’équation de Burgers généralisée incluant les effets géométriques, la stratification et la relaxation moléculaire. Les schémas numériques sont optimisés afin de calculer correctement les fines structures de la signature en pression, en particulier les temps de montée des chocs. *SHOCKN* et *ZEPHYRUS* sont des codes mixtes temporel-fréquentiel tandis que *THOR* est entièrement temporel. Blanc-Benon & al. [28, 29, 59] appliquent ce type d’algorithmes à la propagation du bang supersonique secondaire. Coulouvrat & al. [55] proposent pour leur part de résoudre en potentiel acoustique l’équation de Burgers, ce qui élimine les contraintes sur le pas d’intégration des méthodes précédentes.
- *PCboom* [160, 161] permet en particulier de traiter la super-focalisation du boom supersonique. La version de 2007 [162] permet de prendre en compte la rotondité de la Terre ainsi que le déphasage au passage des caustiques.
- Le code *WASP* [193, 194] utilisé au CEA offre les mêmes possibilités que le code *Harpa* mais en utilisant la méthode paraxiale de Candel. Il permet également de générer des tables de propagation utilisées pour la localisation de source [140, 141]. Il ne permet cependant pas de calculer la forme d’onde le long des rayons et ne tient compte que d’une source ponctuelle en coordonnées sphériques (3D).

Ajoutons, que l’acoustique géométrique est étroitement liée à la mécanique Hamiltonienne et Lagrangienne et au principe de Fermat [82, 83]. Ces formalismes permettent d’aborder le problème de la recherche des rayons propres différemment. En particulier, des méthodes d’optimisation directe (ex. Mazur & Gilbert [133]) permettent de « relaxer » des trajectoires fictives vers les rayons propres.

Les méthodes de tracé de rayons sont particulièrement rapides et adaptées à la propagation à grande distance des ondes dans un milieu faiblement inhomogène. Ces performances sont liées à la simplification du problème de propagation, celui-ci ne tenant plus compte des effets de diffraction ni des petites échelles de l’atmosphère. Dans ce cadre, elles sont largement employées

pour des études statistiques [33, 118] permettant d'évaluer l'effet des variations saisonnières des conditions météorologiques.

### 1.3.2 Résolution directe des équations de la mécanique des fluides

Les méthodes basées sur la résolution directe des équations de la mécanique des fluides (Euler, Navier-Stocke) par différences finies, volumes finis ou éléments finis sont rarement utilisées en propagation atmosphérique à grande distance des ondes infrasonores [158, 62, 11, 73]. Parmi ces méthodes, les différences finies sont généralement privilégiées et nous discuterons essentiellement de ces méthodes. L'utilisation de ces méthodes pour la propagation en milieu extérieur est généralement motivée par l'étude de la propagation d'ondes dans des milieux complexes ou en présence de géométries complexes (scattering par des immeubles ou des arbres, traversé d'un champ de turbulence, sources en mouvement, signaux transitoires, ...) [35, 174, 167, 200, 151]. Dans le cas des infrasons, la propagation pleinement 3D dans un milieu inhomogène convecté est la principale motivation. Ce problème se pose notamment pour simuler la propagation du bang secondaire émis par le Concorde.

Bien que ces méthodes permettent de modéliser l'ensemble des mécanismes affectant la propagation des ondes, des difficultés numériques existent :

- Les conditions de rayonnement (Sommerfeld) aux limites des domaines doivent être traitées afin d'éliminer des réflexions parasites. Les méthodes simples consistant à repousser suffisamment loin les limites du domaine et à diminuer la célérité des ondes en augmentant la dissipation sont généralement coûteuses. Elles ne permettent également pas de limiter la taille du domaine dans une direction privilégiée. Des techniques plus performantes telles que les conditions PML (Perfectly Matched Layers) [167] ou les conditions de Tam & Webb [187] sont également appliquées à la propagation atmosphérique [62, 11].
- La modélisation d'une impédance à la surface du sol est également délicate dans le domaine temporel [174]. Cependant, la surface de la Terre peut être supposée parfaitement réfléchissante pour les infrasons.
- Les grandeurs (pression, vitesse, ...) caractéristiques de la dynamique du milieu de propagation sont très grandes par rapport aux grandeurs associées à l'onde. Les erreurs numériques dues à l'écoulement peuvent très rapidement dégrader le résultats de l'acoustique. La première solution consiste à calculer préalablement le milieu et à modéliser séparément la propagation des ondes. Cette solution est généralement utilisée en régime linéaire [35, 174, 151]. Elle peut également être appliquée en régime non linéaire si les équations sont développées sous leur forme perturbative. La seconde solution est d'utiliser des schémas hautes performances tels que les schémas DRP (Dispersive Relation Preserving) [36, 62, 60] capables de modéliser à la fois l'écoulement et l'acoustique.
- La prise en compte des effets non linéaires nécessite l'utilisation de méthodes numériques élaborées. Les schémas d'ordre bas souvent utilisés pour modéliser la propagation d'onde de chocs sont trop dissipatifs et dispersifs pour la propagation sur un grand nombre de longueurs d'onde. D'un autre côté, les effets non linéaires rendent instables les schémas conservatifs (type DRP [36]). L'idée est d'utiliser un filtre qui élimine les hautes fréquences mal résolues. La méthode des volumes finis est souvent plus adaptée à la résolution de problèmes en présence de chocs.
- L'introduction des mécanismes de relaxation vibratoire dans un code aux différences finies en temps a été réalisée récemment par Wochner & al. [201] et Bailly & al. [12]. La modélisation de ces mécanismes est coûteuse en temps de calcul car chaque mécanisme de relaxation introduit une équation et une variable supplémentaire et le pas d'intégration temporel doit être diminué afin d'être adapté aux temps de relaxation vibratoire.
- L'aspect le plus contraignant des méthodes de résolution directes des équations de la

mécanique des fluides est le temps de calcul. Ce problème est d'autant plus vrai que la propagation est à trois dimensions et à grandes distances. Deux approches permettent de réduire les coûts de calcul. La première est de limiter au mieux la taille du domaine : domaines allongés avec des conditions de rayonnement aux limites parfaites, maillage en déplacement avec le front d'onde où encore des maillages adaptatifs (AMR - Adaptive Mesh Refinement). La seconde approche consiste à utiliser des schémas performants adaptés aux machines : parallélisation, optimisation de la mémoire cache (ex. Del Pino & al. [61, 73]).

Ainsi, avec l'augmentation des puissances de calcul et l'utilisation des schémas d'ordre élevé, les différences finies apparaissent prometteuses pour la résolution des problèmes de propagation atmosphérique.

### 1.3.3 Équations paraboliques

Bien que les équations de la mécanique des fluides soient de nature hyperbolique, l'évolution d'une onde peut être modélisée par une équation parabolique. L'approximation parabolique consiste à approcher une équation d'onde par une équation parabolique modélisant l'évolution d'une onde acoustique dans une direction privilégiée. Il existe une multitude d'équations paraboliques basées sur différentes équations d'onde et utilisant différents développements asymptotiques. Elles permettent de modéliser la majorité des phénomènes physiques affectant la propagation des ondes suivant des degrés d'approximation variables (milieu lentement variable, Mach du milieu faible...). En plus des approximations physiques, la validité des équations paraboliques est limitée angulairement autour de la direction de propagation privilégiée.

Deux approches permettent d'obtenir des équations paraboliques. L'approche physique permet de développer les équations paraboliques petit angle et est utilisée pour la famille des équations paraboliques non linéaires (NPE, KZK) [120, 31, 9]. La seconde approche utilisée en acoustique linéaire repose sur un développement mathématique de l'opérateur de propagation dans le domaine fréquentiel. Elle permet d'obtenir de manière systématique des équations paraboliques linéaires grand angle [97, 58, 123].

#### Équations paraboliques linéaires grand angle

Le développement des équations paraboliques grand angle est présenté par Jensen & al. [97] et Dallois [58]. Les méthodes offrant les plus grands angles de validité sont les méthodes Split-Step Padé [58]. Ces méthodes fournissent directement un schéma numérique d'intégration implicite dont l'ordre peut être élevé. L'ordre du développement permet d'augmenter l'ouverture angulaire de la méthode parabolique.

Différentes équations paraboliques grand angle ont été développées en propagation atmosphérique. L'équation parabolique grand angle standard *WAPE* (Wide Angle Parabolic Equation) est rappelée par Dallois [58]. Elle tient compte des effets de la stratification, des inhomogénéités du milieu au premier ordre ainsi que de la convection par l'intermédiaire de la célérité effective. Elle est utilisée pour modéliser la propagation atmosphérique des infrasons par Kulichkov [111] ou Norris [144], par exemple. L'équation parabolique *MW-WAPE* [58] (Mean Wind - *WAPE*) est valable au deuxième ordre en Mach afin de tenir compte plus correctement de la convection du milieu. Une version incluant les effets de la stratification est donnée par Lingeitch [123]. Afin d'intégrer les petites inhomogénéités de faible amplitude de vent (turbulence), l'équation parabolique *TW-WAPE* [58] (Turbulent Wind - *WAPE*) tient compte des gradients du vent. Notons également l'existence d'équations paraboliques modélisant la propagation d'ondes acoustique-gravité [124].

Ces équations paraboliques peuvent être utilisées en deux dimensions, en coordonnées cylindriques ( $2D\frac{1}{2}$ ) [97, 111] ou à trois dimensions (ex. *3DWAPE* [184] ou [46]). La topographie et

des obstacles peuvent également être modélisés [24, 1]. Cependant, les équations paraboliques négligent les effets de rétro-propagation ce qui est une limitation pour la pente du terrain par rapport à la direction de propagation. La prise en compte de l'impédance du sol et de l'absorption atmosphérique [185] ne pose pas de difficulté en propagation linéaire et dans le domaine fréquentiel. La condition de rayonnement de Sommerfeld est plus délicate à modéliser et les méthodes sont identiques à celles des différences finies (zone absorbante, ...). La méthode des écrans de phase permet de garder un pas d'avancement grand en présence d'inhomogénéités de petite échelle et de faible amplitude [58]. Cette méthode est mise en oeuvre en présence de turbulence afin de profiter des avantages de schéma d'ordre élevé. Les méthodes paraboliques linéaires donnent directement le niveau de pression acoustique pour une fréquence donnée. Elles permettent également de reconstituer les signaux au niveau d'un récepteur (ex. [144]).

La rapidité des méthodes paraboliques en linéaire tient avant tout au fait que le champ acoustique, pour une fréquence donnée, est modélisé par une seule variable (la pression) qui ne dépend que de deux variables en 2D (3 en 3D) dont la variable d'intégration. L'utilisation de schémas d'ordre élevé permet également d'augmenter le pas d'intégration [58]. L'indépendance des fréquences offre la possibilité de paralléliser les calculs avec une scalabilité parfaite [184].

### Équations paraboliques non linéaires

Les méthodes paraboliques petit angle permettent de modéliser les effets non linéaires dans la limite des chocs faibles [88]. Elles sont développées sous l'hypothèse d'amplitude lentement variable suivant la direction de propagation privilégiée [88]. Les équations standards tenant compte des effets non linéaires, de la diffraction et des mécanismes d'absorption sont les équations KZK [120, 88, 31, 54, 9, 131] et NPE [136]. Différentes méthodes de résolution de ces équations ont été développées en utilisant des schémas dans le domaine temporel ou des méthodes spectrales [88, 9].

La topographie et les conditions de rayonnement doivent être traitées comme avec les méthodes de résolution directe. La géométrie (2D, 3D) et l'initialisation au niveau de la source est identique au cas linéaire. Comme en linéaire, des développements permettent de modéliser les effets de scattering dus à la turbulence scalaire [31] ou vectorielle [9]. Les coûts de calcul sont plus importants car le champ de pression dépend de 3 variables en 2D (4 en 3D), les fréquences étant interdépendantes. De plus, les schémas d'ordre bas nécessitent des grilles plus fines et des pas d'intégration plus faibles.

En propagation atmosphérique, les équations paraboliques non linéaires sont appliquées essentiellement pour la diffraction aux voisinages des caustiques et des zones d'ombre d'ondes de choc faible (ex. onde en  $\ll N \gg$ ). Des études portent également sur la focalisation d'onde de choc en milieu turbulent [31, 9].

Dans l'ensemble des cas, les équations paraboliques sont moins coûteuses en temps de calcul que les méthodes de résolution directe des équations de la mécanique des fluides. Elles permettent également de modéliser la majorité des phénomènes physiques. Cependant, elles ne permettent pas de prendre en compte tous les types de source et leur utilisation en trois dimensions reste limitée à des études particulières.

## 1.4 Objectifs de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans un programme de développement d'outils d'expertises permettant de caractériser la source une fois localisée. La caractérisation consiste en l'identification du type de source et en l'évaluation de son énergie, de son altitude ou encore de sa vitesse. Étant donné que l'atmosphère est un milieu complexe qui évolue dans le temps et que les sources d'infrasons

sont très variées, les outils d'expertises s'appuient fortement sur la modélisation de la propagation des ondes infrasonores.

L'objectif de la thèse est de modéliser la propagation des ondes infrasonores à grandes distances. Les sources considérées sont des sources ponctuelles fixes ou des sources en mouvement. L'exemple de référence pour la source mobile est le Concorde, le champ de pression acoustique généré par cette source étant complètement 3D. Pour atteindre mes objectifs, le modèle doit être capable de reconstituer la signature en pression au niveau d'une station barométrique en tenant compte des phénomènes physiques les plus significatifs.

Nous avons vu dans la partie concernant les méthodes numériques que la modélisation de la propagation 3D des ondes à grande distance à l'aide des méthodes directes et paraboliques reste limitée à des études particulières. Les coûts numériques de ces méthodes ne permettent pas de réaliser des études statistiques en fonction de la source ou des conditions atmosphériques ni d'être suffisamment réactif pour l'analyse d'événements. Aussi, à des fins opérationnelles, nous nous sommes orientés vers le développement d'une méthode de tracé de rayons.

Dans cette thèse, nous développons une méthode de tracé de rayons permettant de calculer la signature en pression aux récepteurs. Ce modèle de propagation est obtenu à partir d'un développement asymptotique des équations de la mécanique des fluides basé sur un nombre restreint d'hypothèses. Le modèle obtenu tient compte des effets non linéaires, de l'absorption atmosphérique et du passage des caustiques sur la signature en pression. Les méthodes numériques nécessaires à la résolution des équations de ce modèle sont ensuite développées. Ces méthodes numériques doivent résoudre le problème de propagation tel qu'il est défini dans le modèle sans ajouter d'approximation supplémentaire. Les limites de la méthode sont alors dues uniquement aux approximations physiques. Une seconde étape consiste à valider le modèle physique par rapport à des mesures et par rapport à d'autres modèles. Ces comparaisons sont réalisées lors de l'étude de deux cas d'application, à savoir une explosion de forte puissance (expérience Misty Picture) et un avion supersonique (le Concorde). Au delà d'une simple comparaison, nous cherchons à évaluer et quantifier les limites du modèle de tracé de rayons dans des conditions réalistes de propagation.

Ce travail de thèse a également pour objectif de clarifier les connaissances en propagation atmosphérique des ondes infrasonores. L'étude bibliographique présentée dans ce chapitre a permis d'identifier l'ensemble des mécanismes qui influencent la propagation des ondes infrasonores. Cependant, bien que les principes fondamentaux soit connus, certains aspects de la propagation des ondes infrasonores restent à approfondir. Les points particuliers étudiés dans cette thèse sont : l'identification des phénomènes principaux permettant à de l'énergie acoustique d'arriver dans les zones d'ombre géométrique, l'identification de la trajectoire des rayons dans des cas de propagation géométriquement complexe tels que celui du Concorde, l'évaluation de l'importance relative des effets non linéaires, de l'absorption et du scattering sur la forme d'onde pour les phases stratosphériques et thermosphériques.



## Chapitre 2

# Modélisation de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores

L'objectif dans ce chapitre est de développer un modèle de propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère. Ces ondes peuvent être émises par des sources fixes ou mobiles et le milieu de propagation est inhomogène et convecté. Dans la partie 2.1, les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire sont formulées. Ces équations permettent de modéliser l'ensemble des phénomènes physiques influençant la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère. Les coefficients intervenant dans ces équations sont connus, ce qui permet d'envisager une résolution directe de ces équations [12]. L'étude bibliographique du chapitre 1, montre que la méthode de tracé de rayons est la méthode la plus appropriée en vue de nos applications. Le développement asymptotique réalisé dans la partie 2.2 à partir des équations de la mécanique des fluides de la partie 2.1 permet de retrouver au premier ordre l'équation de l'eikonal et au second ordre une équation de conservation du champ de pression. L'équation de l'eikonal est classiquement résolue par la méthode de tracé de rayons dans la partie 2.3. L'équation de conservation est transformée pour les sources fixes en une équation de Burgers généralisée modélisant l'évolution de la forme d'onde le long des rayons. Pour compléter le modèle de propagation, nous réalisons une description de l'atmosphère et proposons un modèle d'atmosphère dans la partie 2.4.

### 2.1 Les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire

Dans cette section sont rappelées les équations de la mécanique des fluides pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire. La viscosité, la diffusion thermique ou encore la vibration interne des molécules atténuent et dispersent les ondes lors de leur propagation dans l'atmosphère. Ces mécanismes physiques et leur influence sur la propagation des ondes acoustiques sont décrits dans le chapitre 1 ou d'une manière plus générale dans l'ouvrage de Pierce [157] et de Lighthill [122].

Deux approches permettent d'introduire les mécanismes de relaxation moléculaire dans les équations de Navier-Stokes. L'approche présentée par Pierce [157] et Lighthill [122] est la plus couramment utilisée pour la propagation dans l'air [6, 50]. Elle suppose que les concentrations massiques des différentes espèces moléculaires du milieu ( $N_2, O_2, \dots$ ) sont constantes et fait l'hypothèse que seul le premier état de vibration des molécules peut être excité. Pour chaque espèce, la fraction de molécules excitées est introduite dans les équations du mouvement par l'in-

termédiaire d'une température partielle. Des équations de relaxation modélisent la dynamique du changement d'état d'excitation des espèces moléculaires. La seconde méthode proposée par Ostashev [151] et Scott & al. [176, 59, 28] (cf. annexe B) est plus générale. Les concentrations massiques de chaque état d'excitation de chaque espèce moléculaire sont introduites. Les mécanismes de changement d'état d'excitation, de réaction chimique et de diffusion de molécule interviennent alors dans la dynamique du milieu. Une présentation générale de la dynamique des gaz est faite par Vincenti & Kruger [192]. Les liens entre la physique microscopique et la physique statistique indispensable à la compréhension de la dynamique des gaz et en particulier aux mécanismes de relaxation y sont présentés.

Les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire proposée par Pierce font intervenir un plus petit nombre de degrés de liberté que celles proposées par Scott & al.. L'ensemble des coefficients des équations utilisées par Pierce est connu pour l'atmosphère ce qui permet d'envisager leur résolution directe [201, 12].

Dans cette section, nous réunissons l'ensemble des équations et des coefficients constituant un modèle complet permettant de simuler la propagation des ondes infrasonores à partir de l'approche de Pierce. Dans les sections suivantes, nous réaliserons un développement asymptotique à partir de ces équations. Le développement asymptotique effectué à partir des équations utilisées par Scott & al. est quand à lui repris en annexe B.

### 2.1.1 Équations du mouvement

Les équations du mouvement pour un fluide thermovisqueux avec relaxation moléculaire sont [157, p. 551] :

- l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{F}, \quad (2.2)$$

- l'équation de l'entropie gelée<sup>1</sup>),

$$\rho T \left( \frac{\partial s_{\text{fr}}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s_{\text{fr}} \right) = \vec{D} : \vec{\tau} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \rho \sum_{\alpha} c_{v\alpha} \left( \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_{\alpha} \right), \quad (2.3)$$

- les équations de relaxation pour chaque espèce  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_{\alpha} = \frac{1}{\tau_{\alpha}} (T - T_{\alpha}). \quad (2.4)$$

---

1. L'équation de l'entropie est dérivée de l'équation de conservation de l'énergie interne [157, eq. (10-1.8)] :

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} e \right) = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{D} : \vec{\tau} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q},$$

avec  $e = e_{\text{fr}} + \sum_{\alpha} e_{\alpha}$ , où  $e_{\text{fr}}$  est l'énergie interne volumique attachée aux mouvements de translation et de rotation et  $e_{\alpha}$  sont les énergies internes de vibration de chaque espèce moléculaire. La variation de ces énergies internes est reliée aux variations des températures partielles par la relation inspirée de la loi de Joule :  $de_{\alpha} = c_{v\alpha} dT_{\alpha}$ . Afin d'obtenir l'équation de l'entropie gelée, on utilise également la relation thermodynamique :  $T ds_{\text{fr}} = de_{\text{fr}} + p d\rho^{-1}$  que nous retrouverons dans l'expression (2.10).

– une équation d'état et une relation thermodynamique à expliciter pour fermer le système,

$$p = p(\rho, s_{\text{fr}}), \quad (2.5)$$

$$T = T(\rho, s_{\text{fr}}). \quad (2.6)$$

Ces équations font intervenir la masse volumique  $\rho$ , la pression  $p$ , le temps  $t$ , la vitesse du milieu  $\vec{v}$ , la température  $T$ , l'entropie à l'état gelé  $s_{\text{fr}}$  et les températures partielles de vibration  $T_\alpha$  associées aux différentes espèces moléculaires  $\alpha$ . Les coefficients sont les chaleurs spécifiques à volume constant  $c_{v\alpha}(\rho, s_{\text{fr}})$  et les temps de relaxation  $\tau_\alpha(\rho, s_{\text{fr}})$  de chaque espèce moléculaire. Il est important de noter que toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être exprimées en fonction de  $\rho$  et  $s_{\text{fr}}$ , les concentrations des espèces moléculaires étant supposées constantes. Les températures partielles  $T_\alpha$  ne vérifient pas cette propriété étant associées aux vibrations internes des molécules. La notion d'état gelé fait référence aux mécanismes de relaxation. L'état gelé suppose simplement que les températures partielles  $T_\alpha$  restent constantes lorsque le milieu évolue.

Les équations (2.2) et (2.3) font intervenir le tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\tau}$  :

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{D} + \lambda_2(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{I} = \mu\left(2\vec{D} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{I}\right) + \mu_b(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{I}. \quad (2.7)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{v} + {}^t(\vec{\nabla}\vec{v})\right). \quad (2.8)$$

$\mu$  et  $\lambda_2$  sont les coefficients de viscosité de Lamé.  $\mu$  est la viscosité dynamique de cisaillement (shear viscosity) et  $\lambda_2$  est la viscosité seconde.  $\mu_b = \lambda_2 + \frac{2}{3}\mu$  est la viscosité volumique qui est reliée au mouvement de rotation des molécules (bulk viscosity). Un gaz monoatomique vérifie l'hypothèse de Stokes :  $\mu_b = 0$ . Il est important de préciser que  $T$  est la température d'équilibre entre les mouvements de translations et de rotations des molécules. Ces degrés de liberté ne sont cependant pas à l'équilibre thermodynamique. La viscosité volumique  $\mu_b$  modélise la différence d'énergie qui existe entre ces deux mouvements [157, p. 549].

Le vecteur  $\vec{F}$  de l'équation (2.2) est le vecteur des forces extérieures. Dans le cas de la propagation des ondes infrasonores, la force  $\vec{F}$  n'a pas d'influence et sera prise nulle. Dans le cas des ondes de gravité, des ondes de Rossby ou afin d'établir la composition de l'atmosphère au repos, il est nécessaire d'introduire la force de gravité et/ou la force de Coriolis :

$$\vec{F} = \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v},$$

où  $\vec{g}$  est le vecteur accélération de la pesanteur et  $\vec{\Omega}$  le vecteur vitesse angulaire de la Terre.

Suivant la loi de Fourier, le flux thermique est proportionnel au gradient de température [176, 157] :

$$\vec{q} = -\kappa\vec{\nabla}T, \quad (2.9)$$

où  $\kappa(\rho, s_{\text{fr}})$  est le coefficient de diffusivité thermique.

### 2.1.2 Équation d'état et relation thermodynamique

Afin de fermer le système d'équations différentielles défini précédemment il est nécessaire d'introduire une relation thermodynamique et une équation d'état. La relation thermodynamique couramment utilisée est la loi de Joule pour les gaz parfaits :  $de_{\text{fr}} = c_v dT$ ,  $c_v$  étant la chaleur spécifique à volume constant à l'état gelé. Cette loi introduite dans le premier principe de la thermodynamique permet de définir une relation entre les variations de température, de masse

volumique et d'entropie gelée :

$$Tds_{\text{fr}} = c_v dT + pd\rho^{-1}. \quad (2.10)$$

L'équation d'état que nous utilisons est l'équation des gaz parfaits :

$$p(\rho, T) = \frac{\rho RT}{M}. \quad (2.11)$$

$R$  est la constante universelle des gaz parfaits ( $8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) et  $M$  est la masse molaire totale. D'autres équations peuvent être utilisée comme l'équation de van der Waals [201].

### 2.1.3 Coefficients thermodynamiques pour un mélange de gaz parfaits

Les différents coefficients introduits dans les équations précédentes dépendent de la composition et de l'état thermodynamique du milieu. Ces coefficients sont fonction des concentrations massiques  $C_\alpha$  du milieu et de deux variables thermodynamiques  $\rho$  et  $s_{\text{fr}}$ . Dans la mesure où les variations des concentrations massiques des différentes espèces du milieu sont négligées, les concentrations massiques  $C_{\alpha 0}$  du milieu au repos sont utilisées. Le tableau ci-dessous compare les expressions des coefficients utilisées par Pierce [157] avec celles utilisées par Sutherland & Bass [185].

	Pierce [157]	Sutherland & Bass [185]
$c_{v\alpha}(\rho, s_{\text{fr}}, C_\beta)$	$c_{v\alpha}(T_\alpha, X_\alpha) = X_\alpha \frac{R}{M} \left(\frac{T_\alpha^*}{T_\alpha}\right)^2 e^{-T_\alpha^*/T_\alpha}$	$c_{v\alpha}(T_\alpha, X_\alpha) = X_\alpha \frac{R}{M} \left(\frac{T_\alpha^*}{T_\alpha}\right)^2 \frac{e^{-T_\alpha^*/T_\alpha}}{(1-e^{-T_\alpha^*/T_\alpha})^2}$
$\tau_\alpha(\rho, s_{\text{fr}}, C_\beta)$	$\tau_\alpha(P, T, C_\beta)$	$\frac{1}{2\pi f_\alpha(P, T, C_\beta)}$
$\mu(\rho, s_{\text{fr}}, C_\beta)$	$\mu(T) = \mu^* \left(\frac{T}{T^*}\right)^{3/2} \frac{T^*+T_S}{T+T_S}$	
$\mu_b(\rho, s_{\text{fr}}, C_\beta)$	$\mu_b(T) = 0, 6\mu$	$\mu_b(T, X_\beta) = \gamma \frac{16}{175} \frac{X_{O_2}+X_{N_2}}{0,9903} Z_{rot}\mu$
$\kappa(\rho, s_{\text{fr}}, C_\beta)$	$\kappa(T) = \frac{\mu c_p}{Pr}$	$\kappa(T) = \frac{4}{3}\mu c_p$

TABLE 2.1 – Expressions des coefficients thermodynamiques proposées par Pierce [157] et Sutherland & Bass [185].  $R$  est la constante universelle des gaz parfaits ( $8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ),  $M$  est la masse molaire totale ( $\text{kg.mol}^{-1}$ ),  $X_\alpha = \frac{C_\alpha}{M_\alpha} M$  sont les fractions molaires,  $C_\alpha$  sont les concentrations massiques,  $T_\alpha^*$  sont des constantes moléculaires (K),  $\mu^*$ ,  $T^*$ ,  $T_S$  sont des constantes,  $Z_{rot}$  est le nombre de collisions rotationnelles pour l'air [185],  $Pr$  est le nombre de Prandtl. Les temps  $\tau_\alpha$  sont les temps de relaxation et  $f_\alpha$  les fréquences associées. Toutes les données sont explicitées en annexe C.1.

Enfin, rappelons que pour les gaz parfaits, les chaleurs spécifiques vérifient les relations :

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

### 2.1.4 Formulation perturbative des équations du mouvement

Les ondes sont des perturbations du milieu autour de son état d'équilibre. Les différentes variables décrivant le milieu peuvent être décomposées en une partie représentant le milieu ambiant à l'état d'équilibre et une partie représentant les perturbations. Le milieu ambiant est défini par  $\rho_0$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $p_0$ , ... Étant donné que le milieu ambiant est à l'équilibre thermodynamique

en absence de perturbations, ces variables sont supposées vérifier l'ensemble des équations du mouvement. Les perturbations sont définies par  $\rho'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $p'$ , ... et vérifient les identités :

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad p = p_0 + p'. \quad (2.12)$$

Seuls les développements des équations de conservation de la masse (2.1) et de la quantité de mouvement (2.2) sous leur forme perturbée sont utiles dans les sections suivantes. Par soustraction des équations vérifiées par le milieu à l'état d'équilibre aux équations pour le milieu perturbé, nous obtenons les équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement sous leur forme perturbative :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho' + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = -\vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho_0 - \rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho' - \rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v}', \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} = \rho' \frac{\vec{\nabla} (p_0 + p') - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0}{\rho_0 (\rho_0 + \rho')} + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}'}{\rho_0 + \rho'} - (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v}_0 + \vec{v}') + \vec{F}', \quad (2.14)$$

où  $\vec{F}' = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$  pour l'étude des ondes de Roosby. Pour l'étude des ondes acoustiques et des ondes de gravité nous prenons  $\vec{F}' = 0$  puisque la force de Coriolis n'intervient pas dans ces mécanismes de propagation. Bien que le vecteur accélération de la gravité n'apparaisse pas explicitement dans l'équation (2.14), la force de flottabilité est présente par l'intermédiaire du gradient de pression  $\vec{\nabla} p_0$ . Le système d'équations précédent est agencé en plaçant à droite les termes de perturbation non linéaires, les termes de gradient du milieu ambiant ainsi que la force de Coriolis et le tenseur des contraintes visqueuses. Dans l'analyse des sections suivantes qui porte sur l'étude des ondes infrasonores, tous les termes de droite s'avéreront d'un ordre inférieur aux termes de gauche.

## 2.2 Développement asymptotique

Le développement asymptotique utilisé est une généralisation de la méthode WKBJ (des initiales de Wentzel, Kramers, Brillouin et Jeffreys [92]) à un cas à quatre dimensions. L'analyse asymptotique est basée sur l'existence de différentes échelles caractéristiques pour le problème de propagation des ondes acoustiques. L'échelle spatiale de référence est la longueur d'onde  $\lambda_w$ . L'échelle temporelle de référence qui lui est associée est la période de l'onde  $\mathcal{T}_w$ . Ces échelles caractérisent les perturbations que l'on souhaite étudier, et plus précisément la forme d'onde de l'onde acoustique. Elles sont étroitement liées aux dimensions de la source. Les variations des propriétés du milieu de propagation (masse volumique, pression, température, ...) sont caractérisées par une échelle spatiale  $\mathcal{L}_0$  et une échelle temporelle  $\mathcal{T}_0$ . Dans la pratique, un milieu tel que l'atmosphère est constitué d'un large spectre spatial et temporel. Les échelles  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{T}_0$  représentent alors la plus petite des échelles du milieu. L'hypothèse de milieu lentement variable consiste à supposer que les grandeurs caractéristiques du milieu sont très grandes devant les échelles caractéristiques de l'onde. Le rapport des échelles définit un petit paramètre que l'on note  $\epsilon$ . En pratique, la définition d'échelles caractéristiques et du rapport entre ces échelles sont des notions assez délicates. L'existence du rapport  $\epsilon$  sera discutée dans la section 2.5.

La génération des ondes au niveau de la source est un mécanisme hydrodynamique complexe. Cependant, en champ lointain par rapport aux dimensions de la source et aux échelles de l'onde, l'onde est généralement localisée sur une surface appelée front d'onde. Cette surface correspond à l'ensemble des points auxquels la forme d'onde est reçue simultanément et peut être définie au temps  $t$  par la relation implicite  $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ . Ce front d'onde revêt une morphologie différente en fonction du type de source. La notion de front d'onde permet d'introduire l'hypothèse d'onde localement plane. En effet, les variations des perturbations sont lentes lorsque l'on suit le front

d'onde alors qu'elles sont rapides lorsque l'on s'éloigne du front d'onde. En définissant la distance normalisée au front d'onde  $\xi = \Phi(\vec{x}, t)$ , les perturbations évoluent rapidement en fonction de la variable  $\xi$  et lentement suivant les variables  $\vec{x}$  et  $t$ . La présence de deux échelles caractéristiques du champ de perturbation suggère un développement asymptotique du type WKBJ. L'hypothèse d'onde localement plane est liée à l'existence du rapport d'échelle  $\epsilon$  mais elle fait également appel aux propriétés du champ de pression au voisinage de la source. Ainsi, dans nos développements, l'hypothèse d'onde localement plane apparaît séparément de l'hypothèse de milieu lentement variable.

Dans les sections suivantes, la démarche est de supposer que les perturbations sont une fonction rapide suivant la variable  $\xi = \Phi(\vec{x}, t)$  et lente suivant  $\vec{x}$  et  $t$ ,  $\Phi$  étant indéfinie pour le moment. Le milieu non perturbé est quant à lui supposé fonction de  $\vec{x}$  et  $t$  uniquement, vérifiant ainsi l'hypothèse de milieu lentement variable. Le rapport entre les deux échelles de variation définit un petit paramètre noté  $\epsilon$  dont l'existence est admise. À ces deux hypothèses fondamentales s'ajoutent les hypothèses physiques suivantes :

- Au premier ordre, les effets de dissipation linéaires et non linéaires n'interviennent pas. Dans le cas contraire l'onde serait dissipée au même ordre que la propagation et serait atténuée très rapidement.
- L'étude est effectuée pour les chocs faibles ( $\rho' \ll \rho_0$ ).
- Loin de la surface  $\Phi(\vec{x}, t) = 0$  les perturbations dues à la source sont nulles.
- La période de l'onde  $\mathcal{T}_w$  est supposée de l'ordre des temps de relaxation  $\tau_\alpha$  des mécanismes de vibration moléculaire.

Sous ces hypothèses, le développement des équations du mouvement montre que  $\Phi$  vérifie l'équation de l'eikonal et permet de trouver au deuxième ordre une équation modélisant l'évolution de la forme d'onde le long des rayons.

### 2.2.1 Analyse asymptotique au premier ordre

Afin de faire apparaître explicitement la variation rapide des perturbations acoustiques en fonction de  $\xi$ , la variable  $\eta = \xi/\epsilon$  est introduite. Ainsi, l'évolution des perturbations en fonction des variables  $\eta$ ,  $\vec{x}$  et  $t$  sont du même ordre de grandeur en  $\epsilon$ .

Nous posons le développement asymptotique suivant le petit paramètre  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \rho'(\vec{x}, t) &= \epsilon \rho'_1(\eta, \vec{x}, t) + \epsilon^2 \rho'_2(\eta, \vec{x}, t) + \dots \\ \vec{v}'(\vec{x}, t) &= \epsilon \vec{v}'_1(\eta, \vec{x}, t) + \epsilon^2 \vec{v}'_2(\eta, \vec{x}, t) + \dots \\ p'(\vec{x}, t) &= \epsilon p'_1(\eta, \vec{x}, t) + \epsilon^2 p'_2(\eta, \vec{x}, t) + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

où chaque terme indicé est une fonction indépendante de  $\epsilon$ . Les variables décrivant le milieu ambiant ( $\rho_0$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $p_0$ ) sont fonctionS uniquement de  $\vec{x}$  et  $t$ . Les dérivées de  $\rho'$  (et de manière analogue de  $\vec{v}'$  et de  $p'$ ) par rapport aux variables de temps et d'espace sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + \dots, \\ \vec{\nabla} \rho' &= \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \vec{\nabla} \rho'_1 + \epsilon \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \epsilon^2 \vec{\nabla} \rho'_2 + \dots, \end{aligned}$$

en remplaçant  $\eta$  par  $\Phi/\epsilon$ . Les termes de droite de ces équations sont réarrangés par ordres de grandeur. Le premier terme de droite est en  $O(1)$ , les deux termes suivant sont en  $O(\epsilon)$ , le quatrième terme et les suivants (non écrits) sont négligeables dans nos développements. Les variables décrivant le milieu, ainsi que toutes leurs variations, sont en  $O(1)$ . Les coefficients de viscosités  $\mu$  et  $\mu_b$  sont supposés en  $O(\epsilon^2)$  pour que les effets de dissipations n'apparaissent pas

au premier ordre. La substitution des développements (2.15) dans les équations de conservation de la masse (2.13) et du mouvement (2.14) donne au premier ordre :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \rho_0 \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon), \quad (2.16a)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon). \quad (2.16b)$$

Ce système d'équation est valable pour les ondes acoustiques uniquement. Afin de fermer ce système, nous utilisons la relation linéaire du premier ordre en  $\epsilon$ ,  $p'_1 = c_0^2 \rho'_1$ , qui fait intervenir la vitesse du son  $c_0$ . Cette relation est vérifiée puisque au premier ordre de notre analyse la propagation des ondes acoustiques est un phénomène isentropique. En effet, les termes de droite de l'équation de l'entropie (2.3) sont supposés être au moins en  $O(\epsilon)$  dans le but de ne pas faire apparaître de phénomènes de dissipation au premier ordre. Les coefficients de viscosité  $\mu$  et  $\mu_b$  et le coefficient de diffusion thermique  $\kappa$  sont en  $O(\epsilon^2)$  et les capacités calorifiques des mécanismes de relaxations  $c_{v\alpha}$  sont en  $O(\epsilon)$ . De la relation  $p'_1 = c_0^2 \rho'_1$ , on déduit une troisième relation qui complète le système précédent :

$$\frac{\partial p'_1}{\partial \eta} - c_0^2 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon). \quad (2.16c)$$

Le système (2.16) possède une solution non triviale si son déterminant est nul, ce qui conduit à une équation pour  $\Phi$  appelée équation de l'eikonal :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right)^2 = c_0^2 |\vec{\nabla} \Phi|^2. \quad (2.17)$$

Ainsi, l'ordre dominant du développement asymptotique montre que la fonction  $\Phi(\vec{x}, t)$  respectant l'hypothèse d'onde localement plane vérifie l'équation de l'eikonal.  $\Phi$  a le même rôle que la phase en acoustique géométrique,  $\Phi(\vec{x}, t) = \text{Cte}$  étant un front d'onde. Ainsi, par analogie avec l'onde plane, la *pulsation locale* et le *vecteur d'onde local* sont définis :

$$\omega(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\vec{k}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.19)$$

Notons que par définition, ces grandeurs vérifient la relation :

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \omega = 0. \quad (2.20)$$

L'équation de l'eikonal (2.17) possède deux racines correspondant à deux modes acoustiques [157] se propageant dans deux directions opposées :

$$\omega = \vec{k} \cdot (c_0 \vec{n} + \vec{v}_0), \quad (2.21)$$

où  $\vec{n}(\vec{x}, t) = \vec{k}/|\vec{k}|$  est le vecteur unitaire normal aux surfaces  $\Phi(\vec{x}, t) = \text{Cte}$ . Chaque solution correspondant à un sens du vecteur d'onde  $\vec{k}$  opposé, autrement dit, au signe de  $\Phi$  opposé. La relation de dispersion (2.21) fait apparaître la vitesse de groupe  $\vec{c}_g = c_0 \vec{n} + \vec{v}_0$ . Les relations de

polarisation associés à ces modes acoustiques sont :

$$\vec{v}'_1 = \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n}, \quad (2.22a)$$

$$p'_1 = c_0^2 \rho'_1. \quad (2.22b)$$

Ces équations sont obtenues à partir du vecteur propre du système (2.16) associé à la valeur propre (2.21). Le vecteur propre est intégré suivant  $\eta$  avec comme condition limite  $\rho'_1$ ,  $\vec{v}'_1$  et  $p'_1$  nuls lorsque  $\eta \rightarrow +\infty$ . On suppose en effet que le milieu n'est pas perturbé dans tout l'espace et le temps et que suffisamment loin de la surface  $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ , les perturbations sont nulles.

Le développement asymptotique au premier ordre montre que la pulsation locale et le vecteur d'onde local doivent vérifier la relation de dispersion (2.21) pour que les variables  $\rho'_1$ ,  $p'_1, \dots$  représentent correctement les perturbations propagatives du milieu. Cette condition n'est cependant pas suffisante. La relation de dispersion n'impose pas à elle seule que les perturbations varient lentement suivant  $\vec{x}$  et  $t$  relativement aux variations suivant  $\xi$ . Cette propriété n'est pas satisfaite notamment aux voisinages des caustiques et des zones d'ombres (cf. section 2.5).

### 2.2.2 Analyse asymptotique au deuxième ordre

L'analyse au deuxième ordre permet d'établir une équation décrivant le comportement de la perturbation de masse volumique  $\rho'_1(\xi, \vec{x}, t)$  sur un champ  $(\omega, \vec{k})$  vérifiant la relation de dispersion (2.21). Cette équation sera utilisée afin d'établir une équation de Burgers généralisée dans la section 2.3.3.

Dans cette partie, la pulsation locale  $\omega(\vec{x}, t)$  et le vecteur d'onde local  $\vec{k}(\vec{x}, t)$  sont supposés connus sur l'ensemble du domaine et vérifient la relation de dispersion. Les perturbations du milieu sont toujours supposées lentement variable en espace  $\vec{x}$  et en temps  $t$  par rapport aux variations de phase  $\xi$ . Les relations de polarisation (2.22) sont également satisfaites.

Au deuxième ordre, l'équation d'état (2.5) ne suffit pas à fermer le système constitué des équations (2.13) et (2.14). Cette équation d'état fait intervenir l'entropie gelée  $s_{\text{fr}}$ . La propagation des ondes acoustiques étant au premier ordre isentropique et non visqueuse, les termes  $s'_{\text{fr}1}$  et  $\vec{\tau}'_1$  sont nuls, aussi, nous pouvons écrire :

$$s'_{\text{fr}}(\vec{x}, t) = \epsilon^2 s'_{\text{fr}2}(\eta, \vec{x}, t) + O(\epsilon^3), \quad \vec{\tau}'(\vec{x}, t) = \epsilon^2 \vec{\tau}'_2(\eta, \vec{x}, t) + O(\epsilon^3), \quad (2.23)$$

où chaque terme est une fonction indépendante de  $\epsilon$ .

La relation d'état  $p(\rho, s_{\text{fr}})$  est développée au deuxième ordre en  $\epsilon$  sous la forme :

$$p' = \epsilon c_0^2 \rho'_1 + \epsilon^2 \left( c_0^2 \rho'_2 + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \rho_1'^2 + \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 s'_{\text{fr}2} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.24)$$

où  $\frac{B}{2A}$  est le paramètre non linéaire classiquement utilisé en acoustique [157] dans le cas de chocs faibles. En substituant les développements de  $\rho'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $p'$ ,  $s'_{\text{fr}}$  et de  $\vec{\tau}'$  dans l'équation (2.13) et dans l'équation (2.14) projetée suivant  $\vec{n}$ , on obtient au deuxième ordre le système :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \rho_0 |\vec{\nabla} \Phi| \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} = -g + O(\epsilon), \quad (2.25a)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} + \frac{c_0^2}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} = -\vec{n} \cdot \vec{f} + O(\epsilon), \quad (2.25b)$$

avec

$$g = \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho'_1 + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n} \right) + \left( \frac{c_0}{\rho_0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \right) \rho'_1 + 2 \frac{c_0}{\rho_0} k \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta}, \quad (2.26)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{f} = & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) + \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} (c_0^2 \rho'_1)}{\rho_0} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p_0 - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0}{\rho_0^2} \rho'_1 + \frac{c_0}{\rho_0} \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \rho'_1 \\ & - \epsilon \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}'_2}{\rho_0} + \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \frac{B}{A} k \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 k \frac{\partial s'_{\text{fr}2}}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les relations de polarisation (2.22) du premier ordre ont été utilisées afin de substituer la variable  $\rho'_1$  aux variables  $p'_1$  et  $\vec{v}'_1$ . La norme du vecteur d'onde  $k = |\vec{\nabla} \Phi|$  défini en (2.19) est également utilisée.

Du fait de la relation de dispersion (2.21), le déterminant du système (2.25) est nul. Ainsi, pour que ce système possède une solution non triviale, la relation suivante doit être satisfaite :

$$\rho_0 \vec{n} \cdot \vec{f} + c_0 g = 0. \quad (2.28)$$

Cette relation permet d'établir l'équation décrivant l'évolution des perturbations de masse volumique  $\rho'_1$ . Il est maintenant nécessaire d'exprimer le deuxième ordre du tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\tau}'_2$  et les variations de l'entropie gelée  $s'_{\text{fr}2}$  en fonction de la variable  $\rho'_1$ .

Les perturbations du tenseur des contraintes visqueuses valent au deuxième ordre :

$$\epsilon^2 \vec{\tau}'_2 = \frac{c_0}{\rho_0} \left( 2\mu_0 \vec{n} \vec{n} - \frac{2}{3} \mu_0 \vec{I} + \mu_{b0} \vec{I} \right) k \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta}, \quad (2.29)$$

les coefficients de viscosité  $\mu$  et  $\mu_b$  étant par hypothèses en  $O(\epsilon^2)$ . Leur dérivée l'est également et elles n'apparaissent ainsi pas dans les développements.

Le calcul du terme  $s'_{\text{fr}2}$  est obtenu à partir de l'équation de conservation de l'entropie gelée (2.3). L'équation pour la variation de l'entropie peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial s'_{\text{fr}}}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} s'_{\text{fr}} = S' - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} s_{\text{fr}0} - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} s'_{\text{fr}}, \quad (2.30)$$

en posant  $S = S_0 + S'$  le membre de droite de l'équation (2.3) divisé par  $\rho T$ . Cette équation se simplifie en utilisant les développements de  $\vec{v}'$  (2.15) et de  $S' = \epsilon S'_1 + O(\epsilon^2)$  ainsi que l'équation de dispersion (2.21) en :

$$k \frac{\partial s'_{\text{fr}2}}{\partial \eta} = -\frac{S'_1}{c_0} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_{\text{fr}0}}{\rho_0} \rho'_1. \quad (2.31)$$

Les variations de l'entropie gelée sont dues à trois termes : le terme de viscosité, la conduction thermique et les mécanismes de relaxation moléculaire. Ces trois termes se retrouvent dans l'expression de  $S'$ . Le terme de viscosité ne contribue pas à  $S'_1$  puisque les coefficients de viscosité sont en  $O(\epsilon^2)$ . Les deux autres mécanismes contribuent à  $S'_1$ .

Les perturbations de la température  $T$  et des températures partielles  $T_\alpha$  sont développées

suivant les expressions :

$$T'(\vec{x}, t) = \epsilon \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0 \rho'_1(\eta, \vec{x}, t) + O(\epsilon^2), \quad (2.32)$$

$$T'_\alpha(\vec{x}, t) = \epsilon T'_{\alpha 1}(\eta, \vec{x}, t) + O(\epsilon^2), \quad (2.33)$$

où le coefficient thermodynamique  $\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0$  est obtenu à partir de la relation (2.6). À l'aide de ces approximations et en utilisant la loi de Fourier (2.9), on obtient après simplification :

$$S'_1 = \frac{\epsilon^{-2} \kappa_0}{\rho_0 T_0} \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0 k^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + \frac{c_0}{T_0} k \sum_{\alpha} \epsilon^{-1} c_{v\alpha} \frac{\partial T'_{\alpha 1}}{\partial \eta}, \quad (2.34)$$

où le premier terme de droite provient de la diffusion thermique et le deuxième terme provient des mécanismes de relaxation moléculaire. Rappelons que le coefficient de diffusion thermique  $\kappa_0$  est en  $O(\epsilon^2)$  et que les capacités calorifiques partielles  $c_{v\alpha}$  sont en  $O(\epsilon)$ .

Finalement, la relation (2.28) conduit à une équation décrivant le comportement de la perturbation de masse volumique  $\rho'_1(\eta, \vec{x}, t)$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_0}{c_0} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \left( \frac{c_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \rho'_1 \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g + \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right) \rho'_1 = \\ & - \frac{c_0}{\rho_0} k \left( 1 + \frac{B}{2A} \right) \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon^{-2} \delta k^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + \frac{k}{2c_0 T_0} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_0 \sum_{\alpha} \epsilon^{-1} c_{v\alpha} \frac{\partial T'_{\alpha 1}}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec  $\vec{c}_g = c_0 \vec{n} + \vec{v}_0$  et où le coefficient d'absorption classique et rotationnelle [157, p. 558] vaut :

$$\delta = \frac{\mu_0}{2\rho_0} \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_{b0}}{\mu_0} + \frac{\kappa_0}{c_0^2 T_0 \mu_0} \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0 \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_0 \right). \quad (2.36)$$

Les termes de droite de l'équation (2.35) représentent respectivement les effets non linéaires, l'absorption thermovisqueuse, l'absorption rotationnelle et les mécanismes de relaxation moléculaire. L'équation (2.35) a été simplifiée en utilisant l'égalité  $\vec{\nabla} p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_0 \vec{\nabla} s_{fr0} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0 \vec{\nabla} \rho_0$ , et en négligeant le terme  $\epsilon \rho'_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0$  qui est en  $O(\epsilon^2)$ . L'équation (2.35) est fermée à l'aide du développement à l'ordre le plus bas des équations de relaxation (2.4) :

$$\frac{\partial T'_{\alpha 1}}{\partial \eta} = \frac{-\epsilon}{\tau_{\alpha} k c_0} \left( \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0 \rho'_1 - T'_{\alpha 1} \right). \quad (2.37)$$

avec les conditions limites  $T'_{\alpha 1} \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ . Les temps de relaxation sont en  $O(\epsilon)$ .

Le système constitué des équations (2.35) et (2.37) décrit le comportement de la perturbation de masse volumique  $\rho'_1(\eta, \vec{x}, t)$  sur un champ  $(\omega, \vec{k})$ . Le champ  $(\omega, \vec{k})$  doit vérifier à la fois la relation de dispersion (2.21) et être lentement variable en espace et en temps.

## 2.3 Tracé de rayons

La méthode de tracé de rayons permet de résoudre l'équation de l'eikonal obtenue lors du développement asymptotique précédent. Nous incluons dans cette méthode le calcul de l'amplitude de l'onde le long des rayons ainsi que celui de l'évolution de la forme d'onde. Dans cette section, nous présentons d'abord la résolution de l'équation de l'eikonal par la méthode de tracé de rayons puis le calcul de l'amplitude de l'onde dans le cadre linéaire. Nous repartons ensuite de l'équation d'évolution de  $\rho'_1$  pour la transformée dans le cas d'une source impulsionnelle en une équation de Burgers généralisée d'écrivant l'évolution de la forme d'onde le long des rayons. Nous explicitons ensuite l'initialisation géométrique de la méthode de tracé de rayons au niveau de sources de différents types. La réflexion des rayons et des éléments géodésiques est détaillée ainsi que le déphasage des ondes au niveau des caustiques. Enfin, nous présentons différents aspects de la méthode de tracé de rayons permettant de calculer la forme d'onde au niveau d'un récepteur dans le domaine linéaire ou non linéaire.

### 2.3.1 Équations des rayons

Dans cette section, nous cherchons à déterminer le champ  $(\omega, \vec{k})$  qui décrit à l'ordre de l'acoustique géométrique la propagation des ondes dans le milieu. Ce champ de l'espace  $\vec{x}$  et du temps  $t$  doit vérifier la relation de dispersion (2.21). Cette équation peut être écrite sous la forme symbolique :

$$\omega = \Omega(\vec{k}, \vec{x}, t).$$

Elle est généralement résolue à l'aide de la méthode de tracé de rayons qui consiste à transformer cette relation en un système dynamique non autonome de  $\mathbb{R}^7$  pour les variables  $(\omega, \vec{k}, \vec{x})$  fonction du temps  $t$ .

Une approche géométrique est proposée par Pierce [157, p. 371]. Elle s'appuie sur la notion de front d'onde de l'acoustique géométrique. Le comportement d'un point du front d'onde est déterminé à partir de la relation de dispersion. Le point se déplace dans l'espace suivant la vitesse de groupe  $\vec{c}_g$ . Le vecteur d'onde vérifie une équation différentielle modélisant la réfraction du milieu déterminée à partir de la relation de dispersion. Les équations des rayons sont ainsi obtenues. Ces développements de géométrie différentielle permettant d'obtenir les équations des rayons sont présentés en annexe A.1.

La seconde approche utilise le formalisme hamiltonien [107, 194]. Le système dynamique  $(\omega, \vec{k}, \vec{x})$  répond à la définition d'un système hamiltonien non autonome, où  $\omega - \Omega(\vec{k}, \vec{x}, t)$  est l'hamiltonien. Les coordonnées  $\vec{x}$  et les moments conjugués  $\vec{k}$  sont indépendants. Les équations canoniques de Hamilton fournissent un système d'équation différentielles du premier ordre :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{k}}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = -\vec{\nabla} \Omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Ces équations permettent de calculer le champ vérifiant la relation de dispersion à partir de conditions initiales. Ce formalisme est essentiellement utilisé dans le cas où le milieu ne dépend pas du temps (Keller [102]), le système étant alors autonome. Dans ce cas,  $\omega$  est une constante le long d'un rayon.

Pour finir, la méthode des caractéristiques [39, 107] permet également de résoudre l'équation de dispersion à partir de conditions initiales. L'équation aux dérivées partielles résolue est celle vérifiée par la phase  $\Phi$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Omega(\vec{\nabla} \Phi, \vec{x}, t) = 0.$$

Les équations obtenues par la méthode des caractéristiques sont les mêmes que celles obtenues par le formalisme hamiltonien. Ces équations appelées *équations des rayons* sont explicitées sous

la forme :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c_0(\vec{x}, t)\vec{n} + \vec{v}_0(\vec{x}, t), \quad (2.38a)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -k\vec{\nabla}c_0(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}\vec{v}_0(\vec{x}, t).\vec{k}, \quad (2.38b)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = k\frac{\partial c_0}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{k}.\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}(\vec{x}, t), \quad (2.38c)$$

avec  $\vec{k} = k\vec{n}$ . Dans ces équations, la coordonnée curviligne  $t$  est identique au temps conventionnel. La dérivée  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g.\vec{\nabla}$  est la dérivée temporelle convecté le long des caractéristiques. La relation de dispersion (2.21) étant toujours satisfaite, il n'est pas nécessaire de résoudre la troisième équation pour connaître l'évolution de la pulsation  $\omega$ . L'évolution temporelle du milieu est intrinsèquement prise en compte lors de l'intégration des deux autres équations.

L'initialisation du système dynamique  $(\omega, \vec{k}, \vec{x})$  est réalisée en définissant à un temps initial  $t_s$  la position  $\vec{x}_s$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}_s$ ; la pulsation  $\omega_s$  étant définie par la relation de dispersion. D'une manière équivalente, il est possible d'initialiser le système en utilisant la pulsation  $\omega_s$  et le vecteur normal  $\vec{n}_s$ , la norme du vecteur d'onde étant alors déterminée par la relation de dispersion. Dans la pratique, nous nous intéressons à un ensemble de solutions initiales correspondant à une hypersurface du système dynamique  $(\omega, \vec{k}, \vec{x})$ . Cette hypersurface initiale est paramétrée par un vecteur  $\vec{p}$  constitué de plusieurs composantes  $p_i$ . Cette hypersurface initiale est définie par  $\vec{x}_s(\vec{p})$ ,  $t_s(\vec{p})$ ,  $\omega_s(\vec{p})$  et  $\vec{n}_s(\vec{p})$ . Les équations des rayons étant linéairement indépendantes de la pulsation, la condition initiale  $\omega_s$  n'a pas d'influence sur les rayons. Si la propagation des ondes était dispersive, les rayons seraient dépendants de la pulsation  $\omega$  [83].

La dimension du vecteur  $\vec{p}$  dépend de la dimension de l'hypersurface initiale. Dans le cas le plus général de nos applications, le vecteur  $\vec{p}$  est constitué de trois composantes. Ces trois composantes permettent de définir les conditions initiales sur une surface de l'espace à différents temps. Les trois dimensions sont *a priori* nécessaires si le milieu évolue dans le temps ou si les caractéristiques de l'onde au niveau de la source évoluent dans le temps. Dans le cadre le plus courant, les propriétés de l'onde émise par la source sont indépendantes du temps. Dans ce cas, deux paramètres suffisent à définir la surface initiale. Cependant, il peut être nécessaire de garder la troisième composante afin de paramétrer les effets dus à l'évolution temporelle du milieu. Notons également que le paramètre  $\vec{p}$  représentent différentes grandeurs physiques en fonction du type de source. Ce paramètre  $\vec{p}$  est explicité pour différentes sources dans la section 2.3.4.

Les paramètres  $\vec{p}$  et le temps  $t$  correspondent à des abscisses curvilignes pour les solutions du problème défini par le système (2.38) et les conditions initiales  $(\omega_s(\vec{p}), \vec{n}_s(\vec{p}), \vec{x}_s(\vec{p}), t_s(\vec{p}))$ . Nous posons  $\vec{X}(\vec{p}, t)$  la trajectoire des rayons, ainsi que  $\vec{N}(\vec{p}, t) = \vec{n}(\vec{X}(\vec{p}, t), t)$  le vecteur normal et  $\vec{K}(\vec{p}, t) = \vec{k}(\vec{X}(\vec{p}, t), t)$  le vecteur d'onde. Par définition, ces nouvelles variables vérifient les équations des rayons (2.38). L'intérêt de ces notations est que la dérivée lagrangienne présente dans les équations des rayons est une dérivée partielle pour ces variables :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t}.$$

Ces notations permettent de simplifier les développements en géométrie différentielle. Avec les coordonnées curvilignes  $(\vec{p}, t)$ , la trajectoire d'un rayon est définie pour  $\vec{p}_0$  fixé par  $\vec{X}(\vec{p}_0, t)$  et un front d'onde au temps  $t_0$  par  $\vec{X}(\vec{p}, t_0)$ . Nous utiliserons dans la suite les notations  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  pour un rayon et  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_t$  pour un front d'onde.

Les relations données en annexe A.1 permettant d'établir les équations des rayons sont également utiles afin d'établir les relations des sections suivantes. Nous conseillons donc de

consulter brièvement cette annexe.

### 2.3.2 Conservation de l'action d'onde et éléments géodésiques

Nous nous intéressons dans cette section à l'évolution des propriétés de l'amplitude de l'onde le long des rayons  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$ . L'ensemble des équations établies dans les sections 2.2.1 et 2.2.2 sont vérifiées le long des rayons, le vecteur d'onde locale  $\vec{k}$  et le vecteur normal  $\vec{n}$  étant remplacés respectivement par  $\vec{K}$  et  $\vec{N}$ . L'équation (2.35) modélise alors l'évolution des fluctuations de masse volumique le long des rayons. Le membre de gauche de cette équation tient compte de la convection le long du rayon et des effets géométriques. Le membre de droite regroupe les effets non linéaires, les mécanismes de dissipation et de relaxations. Dans cette section nous négligeons provisoirement le membre de droite.

Le long des rayons, le second terme de gauche de l'équation (2.35) est transformé en faisant apparaître la norme du vecteur d'onde  $K$  :

$$\frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g + \vec{N} \cdot (\vec{N} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g}{2} - \frac{1}{2K} \frac{dK}{dt}. \quad (2.39)$$

En introduisant cette relation dans l'équation (2.35) sans son membre de droite, on trouve l'équation de conservation valable le long des rayons :

$$\frac{d}{dt} \left( \left( \frac{c_0}{K\rho_0} \right)^{1/2} \epsilon \rho'_1 \right) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g \left( \frac{c_0}{K\rho_0} \right)^{1/2} \epsilon \rho'_1 = 0.$$

Cette équation est plus généralement présentée en introduisant l'action d'onde  $A$  sous la forme de l'équation de transport [39, 157] :

$$\frac{dA}{dt} + A \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g = 0. \quad (2.40)$$

où  $A = \frac{1}{Kc_0} W$ , avec la densité d'énergie de l'onde  $W(\vec{p}, t) = \frac{c_0^2}{\rho_0} \int_{\text{Supp}} \left( \epsilon \rho'_1(\eta, \vec{X}(\vec{p}, t), t) \right)^2 d\eta$  où le support Supp est indépendant de  $t$ . Ce support est une période pour un signal stationnaire et la durée totale du signal lorsqu'il est transitoire.

L'équation de conservation de l'action d'onde permet de calculer l'amplitude de l'onde le long des rayons en tenant compte des inhomogénéités de vitesse du son et de masse volumique ainsi que des effets géométriques. Les effets géométriques de divergence et de convergence de l'onde sont représentés dans l'équation (2.40) par la divergence de la vitesse de groupe.

Afin de calculer la divergence de la vitesse de groupe, le concept de volume convecté le long des rayons est introduit. L'élément de volume convecté est l'analogue du volume matériel convecté le long d'une ligne de courant en mécanique des fluides. Il représente le volume compris entre des rayons voisins et deux fronts d'ondes. Les rayons voisins constituent un tube de rayons (cf. figure (2.1)). Ainsi défini, le volume convecté  $\nu$  est une grandeur conservative le long du rayon et vérifie la relation :

$$\frac{d\nu}{dt} = \nu \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g, \quad (2.41)$$

avec la dérivée lagrangienne  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}$ . Les équations (2.40) et (2.41) permettent de montrer que le produit de l'action d'onde par le volume convecté se conserve le long d'un rayon :

$$A\nu = \text{Cte}. \quad (2.42)$$

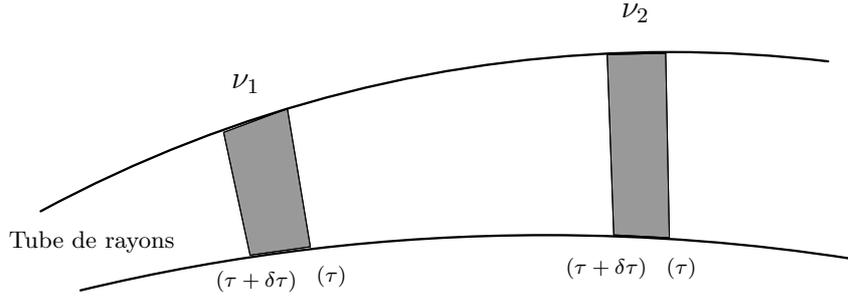


FIGURE 2.1 – Volume convecté  $\nu$  pris à deux instants différents  $t_1$  et  $t_2$ . La surface initiale est définie par  $\vec{x}_s(p_1, p_2)$  et le temps d'émission est  $t_s(p_3) = p_3 = \tau$ . L'ensemble des rayons passant entre les deux rayons représentés constitue un tube de rayons. Les temps  $\tau$  et  $\tau + \delta\tau$  correspondent aux temps d'émission des fronts d'onde. Le volume convecté varie au fur et à mesure de la propagation. Dans notre cas, le volume  $\nu$  pris au temps  $t_2$  est plus grand que le volume  $\nu$  pris au temps  $t_1$ .

Nous avons vu à la section précédente que dans le cas général, l'hypersurface initiale est paramétrée par un vecteur  $\vec{p}$  constitué de trois composantes  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  indépendantes. Les composantes du vecteur  $\vec{p}$  dépendent du type de source et sont explicitées dans la section 2.3.4. Dans ce cas général, le volume convecté peut être défini par le déterminant :

$$\nu = |\vec{X}_{p_1} \vec{X}_{p_2} \vec{X}_{p_3}|, \quad (2.43)$$

où les vecteurs  $\vec{X}_{p_i}$  sont les éléments géodésiques  $\vec{X}_{p_i} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i}$ . Ce volume convecté vérifie la relation (2.41) (cf. annexe A.3).

Dans le cas où l'hypersurface initiale est invariante par translation dans le temps, la surface initiale  $\vec{x}_s(\vec{p})$  peut être paramétrée par deux composantes seulement  $\vec{x}_s(p_1, p_2)$ , la troisième composante étant liée au temps de passage de l'onde  $t_s : p_3 = \omega t_s$ . Le volume convecté peut alors être défini par la relation :

$$\nu = \frac{|\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}|}{|\vec{K}|}, \quad (2.44)$$

avec les éléments géodésiques  $\vec{X}_{p_i}$  et le vecteur d'onde  $\vec{K}$ . Ce volume convecté vérifie la relation (2.41) (cf. annexe A.3). L'utilisation de cette définition du volume convecté permet d'intégrer uniquement deux éléments géodésiques le long des rayons.

Candel [39] propose une méthode permettant de calculer les éléments géodésiques  $\vec{X}_{p_i}$  le long des rayons. Ces éléments, couplés avec leur élément géodésique conjugué  $\vec{N}_{p_i} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial p_i}$ , vérifient un système d'équations différentielles le long des rayons :

$$\frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} = (\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} c_0) \vec{N} + (\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + c_0 \vec{N}_{p_i}, \quad (2.45a)$$

$$\frac{d\vec{N}_{p_i}}{dt} = (\vec{N} \cdot \vec{V}) \vec{N}_{p_i} + (\vec{N}_{p_i} \cdot \vec{V}) \vec{N} - \left( \vec{V}_{p_i} - (\vec{N} \cdot \vec{V}_{p_i}) \vec{N} \right), \quad (2.45b)$$

où,

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{\nabla} c_0 + \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{N}, \\ \vec{V}_{p_i} &= \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{N}_{p_i} + \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{N} + \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} c_0. \end{aligned}$$

Les tenseurs  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} c_0$ ,  $\vec{\nabla} \vec{v}_0$  et  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{v}_0$  sont explicités en annexe A.4. Les valeurs de  $c_0$ ,  $\vec{v}_0$  et de leur

dérivée spatiale sont évaluées le long des rayons en  $\vec{X}(\vec{p}, t)$ . Ces équations sont obtenues en annexe A.2 à l'aide de développements différentiels. L'hypothèse  $\frac{\partial t}{\partial p_i} = 0$  est la seule contrainte imposée aux paramètres  $p_i$  en plus de leur indépendance. Cette hypothèse est vérifiée pour l'ensemble des paramètres  $\vec{p}$  que nous avons choisis. L'intégration de ces équations différentielles et les équations des rayons (2.38) à partir de la source est présentée en section 2.3.10.

Dans le cas où le milieu est indépendant du temps et que l'hypersurface initiale est invariante par translation dans le temps, il est possible d'utiliser comme volume convecté le Jacobien de la transformation entre les coordonnées d'espace et les coordonnées curvilignes :

$$\nu = |\vec{X}_{p_1} \vec{X}_{p_2} \vec{c}_g|,$$

les éléments géodésiques vérifiant toujours le système (2.45). Cette définition du volume convecté est utilisée par Candel [39].

### 2.3.3 Équation de Burgers généralisée

L'objet de cette section est de déterminer l'équation gouvernant l'évolution de la forme d'onde le long d'un rayon. Nous verrons dans cette partie que cette équation est une équation de Burgers généralisée. Il est cependant nécessaire d'ajouter deux hypothèses. La durée du signal émis par la source doit être petit par rapport à l'échelle caractéristique de l'atmosphère  $\mathcal{T}_0$  et le déplacement du front d'onde initial doit être petit pendant la durée du signal. Ces deux hypothèses sont nécessaires pour que l'ensemble de la forme d'onde emprunte le même rayon. L'évolution temporelle de l'atmosphère ainsi que le déplacement ne peuvent être introduits que sous la forme d'une correction au premier ordre de la pulsation  $\omega$ . Cette correction intervient également sur l'amplitude de l'onde par l'intermédiaire du volume convecté.

Dans cette section, nous développons à partir de l'équation (2.35) l'équation de Burgers généralisée. Nous donnons ensuite les relations entre les différentes variables physiques du problème ainsi que l'équation de Burgers généralisée dans le domaine fréquentiel. Enfin, nous discutons les coefficients intervenant dans cette équation en comparaison avec d'autres formulations extraites de la littérature.

#### Équation de Burgers généralisée dans le domaine temporel

Afin de simplifier l'équation (2.35), nous introduisons une variable normalisée  $u$  décrivant les fluctuations acoustiques. Cette normalisation s'appuie sur l'équation de conservation de l'action d'onde du paragraphe précédent :

$$u(\xi, t) = \left( \frac{\nu c_0}{K \rho_0} \right)^{1/2} \epsilon \rho'_1 \left( \xi/\epsilon, \vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}, t \right). \quad (2.46)$$

La variable  $u(\xi, t)$  est fonction de la distance normalisée au front d'onde  $\xi$  et évolue le long du rayon  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  en fonction de  $t$ . Le rayon est fixé par ses conditions initiales  $\vec{p}$ . L'hypothèse que la durée de la forme d'onde est petite devant  $\mathcal{T}_0$  et le déplacement du front d'onde initial doit être petit pendant la durée du signal apparaît implicitement dans la définition de  $u$ .

L'introduction du volume convecté (équations (2.39) et (2.41)) et de la forme d'onde normalisée  $u$  (équation (2.46)) dans le système d'équations décrivant l'évolution de  $\rho'_1$  (équations (2.35) et (2.37)) fait apparaître l'équation de Burgers généralisée modélisant l'évolution de la

forme d'onde  $u(\xi, t)$  le long des rayons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - B(t) K u \frac{\partial u}{\partial \xi} + K \sum_{\alpha} (\Delta c)_{\alpha}(t) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi}, \quad (2.47a)$$

$$K \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau_{\alpha} c_0} (u_{\alpha} - u), \quad (2.47b)$$

avec le coefficient de non linéarité et les coefficients des mécanismes de relaxation :

$$B(t) = \left(1 + \frac{B}{2A}\right) \left(\frac{K c_0}{\nu \rho_0}\right)^{1/2}, \quad (2.48)$$

$$(\Delta c)_{\alpha}(t) = \frac{1}{2c_0 T_0} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_0 \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0 c_{\nu\alpha}, \quad (2.49)$$

et en utilisant la définition :

$$u_{\alpha}(\xi, t) = \left(\frac{\nu c_0}{K \rho_0}\right)^{1/2} \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_0^{-1} \epsilon T'_{\alpha 1},$$

avec les conditions limites  $u_{\alpha}(\xi, t) \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Les différents coefficients des équations précédentes dépendent de l'abscisse curviligne  $t$  du rayon. Ils sont évalués à la position  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  et au temps  $t$ , par exemple  $c_0 = c_0(\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}, t)$ .

Les solutions des équations (2.47b) peuvent être exprimées à l'aide de fonctions de Green. Les fonctions  $u_{\alpha}$  sont alors obtenues par la convolution de la fonction de Green par la fonction  $u$  :

$$u_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\tau_{\alpha} c_0} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{Y}{\tau_{\alpha} c_0}} u(\xi + KY) dY. \quad (2.50)$$

Ainsi, l'équation de Burgers généralisée peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - B(t) K u \frac{\partial u}{\partial \xi} + K \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{+\infty} g(Y, t) u(\xi + KY, t) dY, \quad (2.51)$$

avec :

$$g(Y, t) = \sum_{\alpha} \frac{(\Delta c)_{\alpha}}{\tau_{\alpha} c_0} e^{-\frac{Y}{\tau_{\alpha} c_0}}. \quad (2.52)$$

Le système d'équation (2.47) ou l'équation (2.51) permettent de calculer l'évolution de la variable  $u(\xi, t)$  le long d'un rayon depuis la source. Ces équations sont valables si l'ensemble du signal émis par la source suit le même rayon. C'est le cas d'une source ponctuelle émettant un signal bref par rapport à l'échelle caractéristique du milieu  $T_0$ .

### Relations entre les variables acoustiques et la forme d'onde normalisée $u$

La connaissance de  $u$  permet de remonter aux variables acoustiques  $\rho'$ ,  $p'$  et  $\vec{v}'$ . Le développement de Taylor au premier ordre de  $\Phi$  au voisinage du point  $(\vec{X}(\vec{p}, t_r)|_{\vec{p}}, t_r)$  donne :

$$\Phi(\vec{x}, t) = (\vec{x} - \vec{X}(\vec{p}, t_r)|_{\vec{p}}) \vec{\nabla} \Phi + (t - t_r) \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

En utilisant la relation  $\xi = \Phi(\vec{x}, t)$  et la relation de dispersion (2.21), on obtient au voisinage de  $(\vec{X}(\vec{p}, t_r)|_{\vec{p}}, t_r)$  :

$$\xi = \vec{K} \cdot \left( \vec{x} - \vec{X}(\vec{p}, t_r)|_{\vec{p}} - (t - t_r)\vec{c}_g \right).$$

Ainsi,  $\xi$  apparaît à la fois comme une distance normalisée au front d'onde mais également comme un écart temporel normalisé par rapport au temps de passage de l'onde. De cette relation, on déduit les relations suivantes, valables au même ordre d'approximation :

$$\rho'(\vec{x}, t_r) = \left( \frac{K\rho_0}{\nu c_0} \right)^{1/2} u \left( \vec{K} \cdot (\vec{x} - \vec{X}_r), t_r \right), \quad (2.53a)$$

$$\rho'(\vec{X}_r, t) = \left( \frac{K\rho_0}{\nu c_0} \right)^{1/2} u \left( (t_r - t)\vec{K} \cdot \vec{c}_g, t_r \right). \quad (2.53b)$$

où l'on a noté  $\vec{X}_r$  le point  $\vec{X}(\vec{p}, t_r)|_{\vec{p}}$ . L'ensemble des coefficients sont évalués au point  $\vec{X}_r$  et au temps  $t_r$  ou à l'abscisse curviligne  $t_r$ . En utilisant les équations de polarisation (2.22), on obtient également les relations :

$$p'(\vec{X}_r, t) = \left( \frac{K\rho_0 c_0^3}{\nu} \right)^{1/2} u \left( (t_r - t)\vec{K} \cdot \vec{c}_g, t_r \right), \quad (2.54)$$

$$\vec{v}'(\vec{X}_r, t) = \left( \frac{Kc_0}{\nu\rho_0} \right)^{1/2} u \left( (t_r - t)\vec{K} \cdot \vec{c}_g, t_r \right) \vec{N}. \quad (2.55)$$

Inversement, pour initialiser la forme d'onde normalisée au niveau de la source, celle-ci peut être approchée par les relations :

$$u(\xi, t_r) = \left( \frac{\nu c_0}{K\rho_0} \right)^{1/2} \rho' \left( \vec{X}_r + \xi \frac{\vec{N}}{K}, t_r \right), \quad (2.56a)$$

$$u(\xi, t_r) = \left( \frac{\nu c_0}{K\rho_0} \right)^{1/2} \rho' \left( \vec{X}_r, t_r - \frac{\xi}{\vec{K} \cdot \vec{c}_g} \right). \quad (2.56b)$$

### Transformée de Fourier de l'équation de Burgers généralisée

Dans l'optique d'identifier les coefficients de l'équation de Burgers généralisée par rapport aux coefficients mesurés expérimentalement et dans l'optique d'utiliser une méthode spectrale basée sur les polynômes trigonométriques, nous nous intéressons à la transformée de Fourier de l'équation de Burgers généralisée.

À partir du système (2.47) ou de l'équation (2.51), on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \tilde{u}(q, t)}{\partial t} = -\Gamma(Kq, t)\tilde{u} - \imath Kq \frac{B(t)}{2} \widetilde{(u^2)}, \quad (2.57)$$

avec le coefficient d'absorption et de dispersion (en Neper.s<sup>-1</sup>) :

$$\Gamma(Kq, t) = \delta K^2 q^2 - \imath Kq \sum_{\alpha} \frac{(\Delta c)_{\alpha}}{1 - \imath Kq\tau_{\alpha}c_0}. \quad (2.58)$$

$\tilde{u}$  et  $\widetilde{(u^2)}$  sont les coefficients de Fourier définis respectivement par :

$$\tilde{u}(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-\imath q\xi} d\xi \quad \text{et} \quad \widetilde{(u^2)}(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\xi, t) e^{-\imath q\xi} d\xi. \quad (2.59)$$

$q$  est une grandeur sans dimension,  $Kq$  est le nombre d'onde acoustique et  $\omega q$  est la pulsation acoustique,  $\omega$  étant définie par la relation de dispersion (2.21).

Les parties dissipative et dispersive du coefficient  $\Gamma$  peuvent être dissociées :

$$\Gamma(Kq, t) = \delta K^2 q^2 + \sum_{\alpha} \frac{K^2 q^2 \tau_{\alpha} c_0 (\Delta c)_{\alpha}}{1 + K^2 q^2 (\tau_{\alpha} c_0)^2} - i K q \sum_{\alpha} \frac{(\Delta c)_{\alpha}}{1 + K^2 q^2 (\tau_{\alpha} c_0)^2}. \quad (2.60)$$

Ceci permet de retrouver les comportements asymptotiques des mécanismes de relaxation [157]. En basses fréquences, la propagation des ondes est à l'équilibre par rapport à tous les degrés de libertés internes. La vitesse des ondes est diminuée de  $\sum_{\alpha} (\Delta c)_{\alpha}$  et le coefficient d'absorption  $\delta$  est augmenté de  $\sum_{\alpha} \tau_{\alpha} c_0 (\Delta c)_{\alpha}$ . En hautes fréquences, la propagation est dite gelée (uniquement par rapport aux mouvements de vibration interne) et la vitesse des ondes est la vitesse du son gelée notée  $c_0$  (notée classiquement  $c_{\infty}$  [157]). L'absorption due aux mécanismes de relaxation devient indépendante de la fréquence et est généralement dominée par l'absorption classique et rotationnelle (cf. section 1.2.4). Notons que Pierce utilise comme vitesse de référence pour l'équation de Burgers la vitesse du son à l'équilibre  $c_0 - \sum_{\alpha} (\Delta c)_{\alpha}$ .

### Coefficients de l'équation de Burgers généralisée

Dans cette section, nous nous intéressons à l'identification des coefficients apparaissant dans l'équation (2.57) avec ceux de la littérature. Le coefficient de dissipation classique  $\delta$  est défini à l'équation (2.36). Il est composé de trois termes associés à la viscosité de cisaillement, la viscosité volumique et la diffusion thermique et moléculaire. Pierce [157, p.558] donne une autre expression de ce coefficient qui nous servira de référence :

$$\delta = \frac{\mu}{2\rho_0} \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_b}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{Pr} \right), \quad (2.61)$$

les coefficients étant définis dans la partie 2.1.3. Bien que les notations pour les coefficients de relaxation moléculaire soit souvent différentes, elles sont toutes équivalentes. Le tableau ci-dessous réunit les différentes expressions des différents mécanismes d'absorption. Les notations des différentes références sont conservées.

	Pierce [157]	Sutherland & Bass [185]	Scott [176] et annexe B, eq. (B.27) et (B.41)	Chap. 2 eq. (2.36)
Rotationnelle	$\frac{\mu_b}{\mu}$	$\gamma \frac{16}{175} \frac{X_{O_2} + X_{N_2}}{0,9903} Z_{\text{rot}}$	$\frac{\mu_b}{\mu}$	$\frac{\mu_b}{\mu}$
Diffusion	$\frac{\gamma - 1}{Pr}$	$\frac{4}{3}(\gamma - 1)$	$\frac{\kappa_{\rho}}{\mu c_0^2 T_0} \frac{\partial p}{\partial s} \Big _0 + \frac{1}{\mu c_0^2} \sum_{\alpha} D_{\rho\alpha} b_{\alpha}$	$\frac{\kappa}{c_0^2 T_0 \mu} \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big _0 \frac{\partial p}{\partial s} \Big _0$
Temps de relaxation	$\tau_{\alpha}$	$\frac{1}{2\pi f_{\text{vib},i}}$	$\frac{1}{c_0 \lambda^{(n)}}$	$\tau_{\alpha}$
Absorption max.	$(\alpha\lambda)_{\text{max}}$	$A_{\text{max},i}$	$\pi \frac{Z_n}{c_0 \lambda^{(n)}}$	$\frac{\pi(\Delta c)_{\alpha}}{c_0}$

Nous utiliserons dans nos calculs les valeurs données par Sutherland et Bass qui sont reprises en annexe C. Le coefficient non linéaire  $1 + \frac{B}{2A}$  est très classique en acoustique [157, 88] et vaut  $\frac{1+\gamma}{2}$ .

### 2.3.4 Conditions initiales des rayons

Cette section présente les paramètres du front d'onde initial pour différentes sources. L'initialisation d'une onde au niveau d'un plan est utile pour les cas de validation ou pour le raccordement avec d'autres codes de calculs. Le cas d'une source ponctuelle fixe est utilisé afin de modéliser les sources explosives telles qu'une explosion chimique ou une éruption volcanique. Pour finir, les paramètres du cône de Mach généré par une source supersonique sont également présentés.

### Cas général

D'une manière générale, les rayons sont initialisés sur une hypersurface définie en espace et en temps et paramétrée par un vecteur  $\vec{p}$ . Les paramètres  $\vec{p}$  sont choisis afin de représenter au mieux le champ acoustique généré par la source. La position de la surface initiale est notée  $\vec{x}_s(\vec{p})$  et le temps de passage de l'onde est noté  $t_s(\vec{p})$ . La connaissance de cette surface ne suffit pas à définir la géométrie de l'onde. Le vecteur normal au front d'onde doit également être connu  $\vec{n}_s(\vec{p})$  ainsi que la pulsation  $\omega_s(\vec{p})$ . Les conditions initiales pour la position  $\vec{X}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  et le vecteur normal  $\vec{N}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  sont :

$$\vec{X}(\vec{p}, t_s(\vec{p})) = \vec{x}_s(\vec{p}), \quad (2.62)$$

$$\vec{N}(\vec{p}, t_s(\vec{p})) = \vec{n}_s(\vec{p}), \quad (2.63)$$

Les expressions des éléments géodésiques et de leurs éléments conjugués au niveau de la surface initiale sont nécessaires à leur intégration le long des rayons. Il est généralement plus facile de connaître la dérivée de la position  $\vec{x}_s(\vec{p})$  et du temps  $t_s(\vec{p})$  par rapport à une composante  $p_i$  de  $\vec{p}$  que de connaître directement l'élément géodésique  $\vec{X}_{p_i}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$ . À partir de la différentiation de  $\vec{x}_s(\vec{p}) = \vec{X}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  :

$$\frac{\partial \vec{x}_s}{\partial p_i} = \frac{d\vec{X}}{dp_i} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i} + \frac{\partial t_s}{\partial p_i} \frac{d\vec{X}}{dt},$$

il est possible de remonter à l'expression de  $\vec{X}_{p_i}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  :

$$\vec{X}_{p_i} = \frac{\partial \vec{x}_s}{\partial p_i} - \frac{\partial t_s}{\partial p_i} \vec{c}_g, \quad (2.64)$$

la vitesse de groupe  $\vec{c}_g$  étant évaluée au point  $\vec{x}_s(\vec{p})$  et au temps  $t_s(\vec{p})$ . D'une manière analogue, on obtient  $\vec{N}_{p_i}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  :

$$\vec{N}_{p_i} = \frac{\partial \vec{n}_s}{\partial p_i} - \frac{\partial t_s}{\partial p_i} \frac{d\vec{N}}{dt}, \quad (2.65)$$

où  $\frac{d\vec{N}}{dt}(\vec{p}, t_s(\vec{p}))$  est évalué à l'aide de l'équation (A.1). Les expressions de  $\frac{\partial \vec{x}_s}{\partial p_i}$ ,  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial p_i}$  et de  $\frac{\partial t_s}{\partial p_i}$  sont soit connues analytiquement à partir des propriétés de la source, soit calculées numériquement à partir des expressions de  $\vec{x}_s(\vec{p})$ ,  $\vec{n}_s(\vec{p})$  et de  $t_s(\vec{p})$  respectivement. Les expressions  $\vec{x}_s(\vec{p})$ ,  $\vec{n}_s(\vec{p})$  et  $t_s(\vec{p})$  doivent être suffisamment régulières pour vérifier l'hypothèse d'onde localement plane.

Notons également qu'une valeur de la pulsation  $\omega$  doit être définie afin d'initialiser la norme du vecteur d'onde. L'ensemble des équations des rayons étant linéairement indépendantes de cette norme, nous choisissons arbitrairement pour les calculs  $\omega_s(\vec{p}) = 1$ . La pulsation est initialisée par  $\omega(\vec{x}_s(\vec{p}), t_s(\vec{p})) = \omega_s(\vec{p})$ . La norme de  $K$  est définie par la relation de dispersion (2.21) :

$$K(\vec{p}, t_s(\vec{p})) = \frac{\omega_s(\vec{p})}{c_0(\vec{x}_s(\vec{p}), t_s(\vec{p})) + \vec{v}_0(\vec{x}_s(\vec{p}), t_s(\vec{p})) \cdot \vec{n}_s(\vec{p})}. \quad (2.66)$$

Dans les sous sections suivantes, nous développons de manière plus complète les conditions initiales des équations des rayons et des éléments géodésiques pour différents types de sources.

### Sources planes

Différentes sources peuvent être définies au niveau d'une surface initiale plane. La source la plus naturelle est l'onde plane. Cependant, lors de calculs avec un autre code du champ acoustique au voisinage de la source, la surface de raccordement entre les codes est généralement

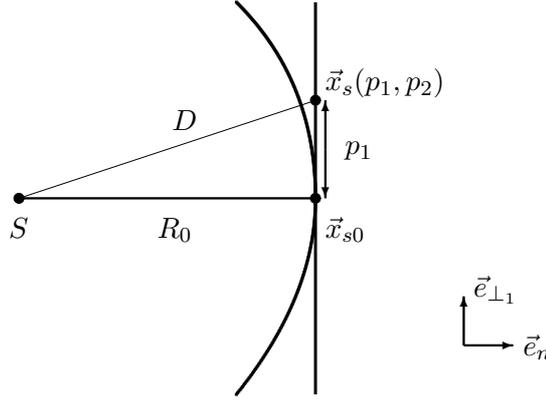


FIGURE 2.2 – Onde sphérique paramétrée sur une surface plane. La source est positionnée en  $S$  et les vecteurs  $\vec{e}_n$  et  $\vec{e}_{\perp 1}$  représente la base locale du plan initial.

plane. Le plan est alors un bon candidat pour initialiser la propagation de l'onde. Pour des sources complexes, le calcul des conditions initiales peut être très compliqué. Dans ce paragraphe, nous déterminons les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques pour une onde plane et pour une onde sphérique.

Le plan initial est défini par un point de l'espace  $\vec{x}_{s_0}$  et un vecteur normal  $\vec{e}_n$ . La base orthonormée directe  $[\vec{e}_n, \vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{\perp 2}]$  y est associée. La surface initiale est générée par les deux distances  $p_1$  et  $p_2$  :  $\vec{x}_s(p_1, p_2) = \vec{x}_{s_0} + p_1\vec{e}_{\perp 1} + p_2\vec{e}_{\perp 2}$ . De cette définition, on obtient les relations  $\frac{\partial \vec{x}_s}{\partial p_i} = \vec{e}_{\perp i}$ . Les relations pour le vecteur normal aux fronts d'onde  $\vec{n}_s(p_1, p_2)$  et le temps de passage de l'onde  $t_s(p_1, p_2)$  restent à définir.

Dans le cas de la propagation d'une onde plane portée par le plan initial, le vecteur normal au front d'onde est  $\vec{n}_s(p_1, p_2) = \vec{e}_n$  et le temps de passage de l'onde est une constante  $t_s(p_1, p_2) = t_{s_0}$ . Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques sont alors :

$$\begin{aligned} \vec{X}(p_1, p_2, t_{s_0}) &= \vec{x}_{s_0} + p_1\vec{e}_{\perp 1} + p_2\vec{e}_{\perp 2}, \\ \vec{N}(p_1, p_2, t_{s_0}) &= \vec{e}_n, \\ \vec{X}_{p_i}(p_1, p_2, t_{s_0}) &= \vec{e}_{\perp i}, \\ \vec{N}_{p_i}(p_1, p_2, t_{s_0}) &= \vec{0}. \end{aligned} \quad i = \{1, 2\}, \quad (2.67)$$

Pour une source ponctuelle positionnée en  $\vec{x}_{s_0} - R_0\vec{e}_n$ , la distance entre la source et un point du front d'onde vaut  $D(p_1, p_2) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + R_0^2}$  (cf. figure (2.2)). En supposant qu'entre la source et la surface initiale le milieu est homogène et au repos, le temps de passage de l'onde est  $t_s(p_1, p_2) = \frac{D(p_1, p_2)}{c_0} + t_{s_0}$ . Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques sont alors :

$$\begin{aligned} \vec{X}(p_1, p_2, t_s(p_1, p_2)) &= \vec{x}_{s_0} + p_1\vec{e}_{\perp 1} + p_2\vec{e}_{\perp 2}, \\ \vec{N}(p_1, p_2, t_s(p_1, p_2)) &= \frac{1}{D}(p_1\vec{e}_{\perp 1} + p_2\vec{e}_{\perp 2} + R_0\vec{e}_n), \\ \vec{X}_{p_i}(p_1, p_2, t_s(p_1, p_2)) &= \vec{e}_{\perp i} - \frac{p_i}{D}\vec{N}, \\ \vec{N}_{p_i}(p_1, p_2, t_s(p_1, p_2)) &= \frac{1}{D}\vec{e}_{\perp i} - \frac{p_i}{D^2}\vec{N}, \end{aligned} \quad i = \{1, 2\}, \quad (2.68)$$

avec l'hypothèse  $\vec{c}_g = c_0\vec{N}$  et en supposant que  $\frac{d\vec{N}}{dt} = 0$ . Cette dernière supposition est vérifiée dans un milieu homogène. Le cas d'une source ponctuelle paramétrée sur un plan peut être comparé au cas d'une source ponctuelle paramétrée par des angles sur une sphère comme présenté dans la section suivante.

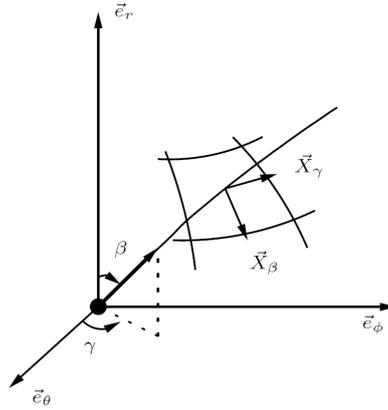


FIGURE 2.3 – Front d’onde généré par une source sphérique. Définition des paramètres d’élévation  $\beta$  et d’azimut  $\gamma$ .

### Sources ponctuelles fixes

Le front d’onde générée par une source ponctuelle située en  $\vec{x}_{s_0}$  est une sphéroïde. Cette surface est paramétrée par deux angles dans la base  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]^2$  de centre  $\vec{x}_{s_0}$  (cf. (2.3)). Ces angles définissent le paramètre initial  $\vec{p} = (\beta, \gamma)$ . Pour s’affranchir de tout effet lié à la propagation, la surface initiale est prise au point source. Ainsi, la position de cette surface est définie par  $\vec{x}_s(\beta, \gamma) = \vec{x}_{s_0}$ , le vecteur normal au front d’onde  $\vec{n}_s(\beta, \gamma)$  par les deux angles et le temps d’émission par  $t_s(\beta, \gamma) = t_{s_0}$ . Les conditions initiales des rayons et des éléments géodésiques sont déduites de ces expressions :

$$\begin{aligned}
 \vec{X}(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= \vec{x}_{s_0}, \\
 \vec{N}(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= \cos \beta \vec{e}_1 + \sin \beta \cos \gamma \vec{e}_2 + \sin \beta \sin \gamma \vec{e}_3, \\
 \vec{X}_\beta(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= \vec{0}, \\
 \vec{N}_\beta(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= -\sin \beta \vec{e}_1 + \cos \beta \cos \gamma \vec{e}_2 + \cos \beta \sin \gamma \vec{e}_3, \\
 \vec{X}_\gamma(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= \vec{0}, \\
 \vec{N}_\gamma(\beta, \gamma, t_{s_0}) &= -\sin \gamma \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Notons que l’élément géodésique conjugué  $\vec{N}_\gamma$  est divisé par  $\sin \beta$  afin de s’affranchir de la singularité lorsque  $\beta$  vaut zéro. Cette simplification ne fausse pas l’intégration des géodésiques puisque  $\vec{X}_\gamma$  est nul au niveau de la source.

En propagation atmosphérique, les angles d’émission  $\beta$  et  $\gamma$  sont appelés respectivement l’élévation  $(\frac{\pi}{2} - \beta)$  et l’azimut  $(\pi - \gamma)$ .

### Sources supersoniques

Un avion supersonique génère des chocs aérodynamiques localisés sur un cône. Ce cône coïncide avec le cône de Mach [157, 199]. Ces chocs généralement appelés *bang supersonique* sont des ondes acoustiques susceptibles de se propager à grande distance. Le cône est un front d’onde sur lequel les propriétés des chocs évoluent lentement. On retrouve ici la notion d’onde localement plane. L’étude de la propagation de ces ondes est réalisée dans le cadre de l’acoustique géométrique. L’initialisation du front d’onde est effectuée au niveau de la source afin de

2.  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$  est la base orthonormée définissant le repère spatial. En coordonnées cartésiennes cette base correspond au repère galiléen  $[\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y]$ . En coordonnée sphérique cette base est la base locale  $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi]$ . Dans les deux cas, le vecteur  $\vec{e}_1$  indique la verticale à la surface de la Terre.

s'affranchir des effets de la propagation. Au voisinage de la source, la surface initiale est le cône défini dans le cas de la propagation en milieu homogène.

En milieu homogène, le sommet du cône coïncide avec le nez de l'avion  $\vec{x}_s(t)$  (cf. figure 2.4). L'axe de révolution du cône est la direction de vol de l'avion  $\vec{u}_s - \vec{v}_0$  et le demi-angle d'ouverture du cône est  $\cos \alpha = \frac{1}{M}$  où le nombre de Mach  $M$  de l'avion vaut  $\frac{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|}{c_0}$ .

Le cône est paramétré par le temps d'émission  $\tau$  et l'azimut  $\psi$  autour de la direction de vol de l'avion  $\vec{u}_s - \vec{v}_0$ . Le paramètre initial est  $\vec{p} = (\tau, \psi)$ . Les rayons sont émis au temps  $t_s = \tau$  à la position  $\vec{x}_s(\tau)$  et la normale au front d'onde est :

$$\vec{n}_s(\tau, \psi) = \cos \alpha(\tau) \vec{e}_u(\tau) + \sin \alpha(\tau) \cos \psi \vec{e}_v(\tau) + \sin \alpha(\tau) \sin \psi \vec{e}_u(\tau) \wedge \vec{e}_v(\tau),$$

en posant  $\vec{e}_u = \frac{\vec{u}_s - \vec{v}_0}{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|}$  et  $\vec{e}_v = \frac{\vec{e}_w - (\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u}{|\vec{e}_w - (\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u|}$ . Le vecteur  $\vec{e}_w$  est un vecteur de référence arbitraire par rapport auquel l'angle  $\psi$  est défini. Ce vecteur doit être choisi afin d'être toujours différent du vecteur  $\vec{e}_u(t)$ . Pour l'étude d'un avion supersonique, il est possible d'utiliser le vecteur vertical  $\vec{e}_1$ . La normale au cône  $\vec{n}_s$  vérifie la relation :  $(\vec{u}_s - \vec{v}_0) \cdot \vec{n}_s = c_0$  qui définit l'angle du cône  $\alpha$ . Le temps d'émission étant  $t_s = \tau$ , les rayons et les éléments géodésiques ne sont définis que pour  $t \geq \tau$ .

Les conditions initiales au temps  $\tau$  des équations des rayons et des éléments géodésiques sont :

$$\begin{aligned} \vec{X}(\tau, \psi, \tau) &= \vec{x}_s(\tau), \\ \vec{N}(\tau, \psi, \tau) &= \vec{n}_s(\tau, \psi), \\ \vec{X}_\psi(\tau, \psi, \tau) &= \vec{0}, \\ \vec{N}_\psi(\tau, \psi, \tau) &= \vec{e}_u \wedge \vec{n}_s, \\ \vec{X}_\tau(\tau, \psi, \tau) &= \vec{u}_s - \vec{v}_0 - c_0 \vec{n}_s, \\ \vec{N}_\tau(\tau, \psi, \tau) &= \frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} c_0 + \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{n}_s - \vec{n}_s \cdot \left( \vec{\nabla} c_0 + \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{n}_s \right) \vec{n}_s. \end{aligned} \quad (2.70)$$

où  $\vec{u}_s$  et  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$  sont évalués au temps  $\tau$ .  $c_0$ ,  $\vec{\nabla} c_0$ ,  $\vec{v}_0$  et  $\vec{\nabla} \vec{v}_0$  sont évalués en  $\vec{x}_s(\tau)$  au temps d'émission  $\tau$ . Les conditions initiales des éléments géodésiques et des éléments géodésiques conjugués sont obtenues en appliquant les équations (2.64) et (2.65) en notant que  $\frac{\partial t_s}{\partial \psi} = 0$ , que  $\frac{\partial t_s}{\partial \tau} = 1$  et en remplaçant l'expression de  $\frac{d\vec{N}}{dt}$  par son expression (A.1).

La détermination du vecteur  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$  est plus délicate. Nous présentons ici les développements géométriques permettant d'obtenir son expression (2.74). En notant que  $\vec{n}_s$  est un vecteur unitaire et en différenciant la relation  $(\vec{u}_s(\tau) - \vec{v}_0(\vec{x}_s(\tau), \tau)) \cdot \vec{n}_s = c_0(\vec{x}_s(\tau), \tau)$  par rapport à  $\tau$ , on obtient les relations :

$$\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{n}_s = 0, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{e}_u = \frac{1}{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|} \left( \frac{\partial c_0}{\partial \tau} + \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} c_0 + \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tau} + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) \cdot \vec{n}_s - \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{n}_s \right). \quad (2.72)$$

Ces deux équations permettent de calculer la projection de  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$  dans le plan défini par les vecteurs  $\vec{e}_u$  et  $\vec{n}_s$ . La composante de cette projection suffit au calcul de l'amplitude de l'onde. Cependant, pour l'optimisation des rayons propres (cf. section 3.1.2), toutes les composantes de  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$  sont nécessaires.

Nous introduisons le vecteur unitaire  $\vec{e}_p = \cos \psi \vec{e}_v + \sin \psi \vec{e}_u \wedge \vec{e}_v$  appartenant à ce plan et orthogonal à  $\vec{e}_u$ . Le vecteur normal au front d'onde s'écrit simplement :  $\vec{n}_s = \cos \alpha \vec{e}_u + \sin \alpha \vec{e}_p$ . Par substitution de cette expression dans l'équation (2.71), on obtient :

$$\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{e}_p = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{e}_u. \quad (2.73)$$

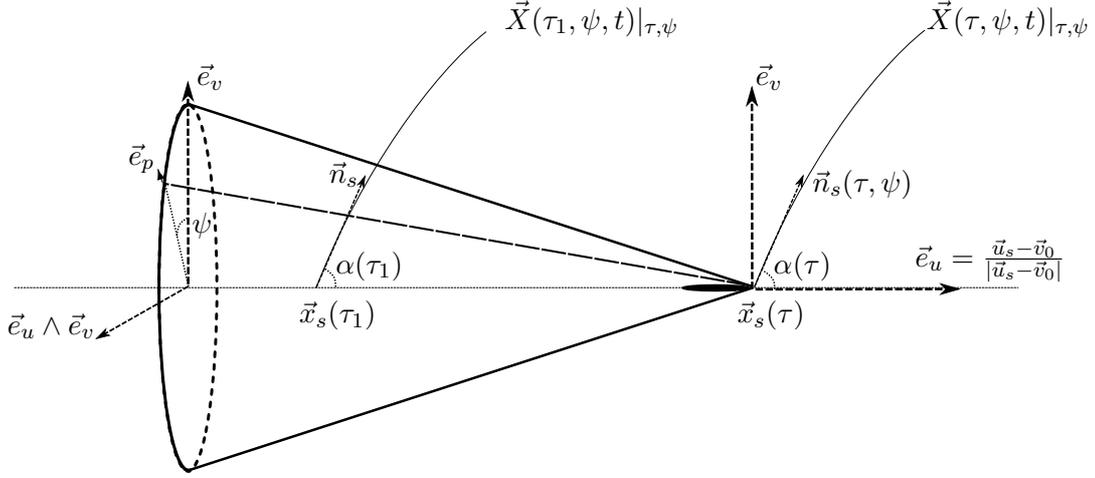


FIGURE 2.4 – Paramétrisation du cône de Mach.

Nous cherchons maintenant la composante suivant  $\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p$  de  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$ . L'expression de  $\vec{n}_s$  permet d'écrire après simplifications :

$$\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) = \cos \alpha \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) + \sin \alpha \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p).$$

À partir des définitions de  $\vec{e}_p$  et de  $\vec{e}_v$ , on obtient successivement :

$$\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) = \frac{\partial \vec{e}_v}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_v) = - \frac{\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u}{|\vec{e}_w - (\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u|} \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_v).$$

d'où,

$$\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) = \cos \alpha \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p) - \sin \alpha \frac{\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u}{|\vec{e}_w - (\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u|} \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau} \cdot (\vec{e}_u \wedge \vec{e}_v).$$

où le vecteur  $\frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau}$  est déterminé à partir de la définition de  $\vec{e}_u$  :

$$\frac{\partial \vec{e}_u}{\partial \tau} = \frac{1}{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|} \left( \left( \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tau} - (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) - \left( \left( \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tau} - (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) \cdot \vec{e}_u \right) \vec{e}_u \right).$$

La sommation des projections du vecteur  $\frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau}$  sur les trois vecteurs unitaires orthogonaux  $\vec{e}_u$ ,  $\vec{e}_p$  et  $\vec{e}_u \wedge \vec{e}_p$  donne, en éliminant  $\vec{e}_p$  au profit de  $\vec{n}_s$  et de  $\vec{e}_u$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{n}_s}{\partial \tau} &= \frac{1}{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|} \left( \frac{\partial c_0}{\partial \tau} + \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla} c_0 + \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tau} + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) \cdot \vec{n}_s - \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial \tau} \cdot \vec{n}_s \right) \frac{\vec{e}_u - \cos \alpha \vec{n}_s}{\sin^2 \alpha} \\ &+ \frac{1}{|\vec{u}_s - \vec{v}_0|} \left( \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial \tau} - (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) \cdot \left( \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{e}_u \wedge \vec{n}_s - \frac{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_w}{|\vec{e}_w - (\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u) \vec{e}_u|} \vec{e}_u \wedge \vec{e}_v \right) \vec{e}_u \wedge \vec{n}_s. \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'ensemble des valeurs étant évalué au temps  $\tau$  et à la position  $\vec{x}_s(\tau)$ . Le premier terme de droite de cette équation représente les variations de la normale au front d'onde en fonction de  $\tau$  dans le plan défini par  $\vec{e}_u$  et  $\vec{n}_s$ . Seule cette partie intervient dans le calcul de l'amplitude de l'onde. L'utilisation n'est valable qu'en régime supersonique.

### 2.3.5 Réflexion sur une surface

Lors de leur propagation dans un milieu, les ondes acoustiques sont susceptibles de rencontrer des discontinuités qui les réfléchissent partiellement ou totalement. En propagation atmosphérique, la surface de la Terre constitue la principale discontinuité. La réflexion sur la surface de la Terre pour les ondes infrasonores est généralement supposée spéculaire et totale. Cependant, cette surface possède une géométrie complexe et une porosité susceptible d'affecter la propagation des ondes infrasonores. L'influence de la surface de la Terre sur la propagation des ondes peut être considérée en séparant les grandes échelles des petites échelles. Les grandes échelles correspondent aux variations sur de grandes distances par rapport à la longueur d'onde de la topographie. La réflexion est toujours supposée spéculaire mais la surface de la Terre n'est plus supposée plane ni seulement sphérique mais comme une surface paramétrique. Ces grandes échelles sont dues à la présence de continents et de chaînes de montagnes. Les petites échelles correspondent aux petites échelles de la topographie, à la végétation ou encore à la porosité du sol. Ces petites échelles peuvent être modélisées en partie par une impédance.

Supposer que la réflexion est spéculaire revient à négliger la diffraction de l'onde par les petites et moyennes échelles de la surface. Ces effets de diffraction sont d'un ordre inférieur ou égal à ceux produits par les inhomogénéités du milieu qui sont eux-mêmes négligés par la méthode de tracé de rayons. Ces effets pourraient être importants dans le cas de la propagation grande distance d'onde plus hautes fréquences que les infrasons.

Dans cette section nous présentons la réflexion d'une onde sur une surface plane. Dans le cadre de l'acoustique géométrique, il est nécessaire de connaître les propriétés de l'onde réfléchie à partir de celles de l'onde incidente. Pour la méthode de tracé de rayons, il est à la fois nécessaire de connaître les conditions initiales du rayon réfléchi mais également celles des éléments géodésiques et de leurs éléments conjugués. La surface de réflexion est définie par sa normale  $\vec{e}_n$ . Les conditions initiales pour l'onde réfléchie sont :

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= \vec{X}, \\ \vec{K}' &= \vec{K} - 2(\vec{K} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n, \\ \vec{N}' &= \vec{N} - 2(\vec{N} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n, \\ \vec{X}'_{p_i} &= \vec{X}_{p_i} - 2(\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n, \\ \vec{N}'_{p_i} &= \vec{N}_{p_i} - 2(\vec{N}_{p_i} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n - \frac{\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{e}_n}{c_0 \vec{N} \cdot \vec{e}_n} \left[ \frac{d\vec{N}}{dt} - \frac{d\vec{N}'}{dt} - 2 \left( \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \vec{e}_n \right) \vec{e}_n \right].\end{aligned}$$

Dans ces équations, la projection de la convection du milieu  $\vec{v}_0$  suivant la normale à la surface  $\vec{e}_n$  est supposée nulle. Le vent est supposé tangent à la surface. La réflexion spéculaire des rayons et des éléments géodésiques sur une surface sphérique et plus généralement sur une surface paramétrique est présentée en annexe A.5. Les développements permettant d'obtenir les équations de réflexion y sont également détaillés.

Dans l'ensemble des cas et en particulier dans le cas d'une réflexion sur une surface paramétrique, il est nécessaire que l'écoulement du milieu soit tangent localement en tous points de la surface. En propagation atmosphérique, les données météorologiques ne sont pas suffisamment fines ou sont incompatibles avec les données topographiques pour vérifier cette propriété. Il est alors nécessaire de modifier les vents pour les rendre compatibles. Il en résulte que la composante verticale du vent ne peut pas être supposée nulle dans la basse atmosphère.

Les petites échelles de la surface sont supposées modifier uniquement la forme d'onde et ne pas affecter la trajectoire des rayons. Ces effets sont ainsi du second ordre. Ils sont modélisés par l'intermédiaire d'une impédance locale  $Z_g(k, \vec{x})$  qui dépend généralement de la fréquence de l'onde (ou de la norme du vecteur d'onde  $k$ ) et de la position du point de réflexion  $\vec{x}$ . Pour les

infrasons cette impédance est généralement supposée infinie, la réflexion étant alors totale. La notion d'impédance acoustique est définie par Pierce [157, sec. 3.3] et est classiquement utilisée en propagation atmosphérique [3, 5]. Nous utiliserons de préférence le coefficient de réflexion :

$$\mathcal{R}(\vec{k}, \vec{x}, t) = \frac{Z_g \vec{n} \cdot \vec{e}_n - \rho_0 c_0}{Z_g \vec{n} \cdot \vec{e}_n + \rho_0 c_0},$$

qui tient compte de la direction de propagation de l'onde incidente  $\vec{n}$ . Les coefficients de Fourier de la forme d'onde  $u$  (cf. équation (2.59)) après réflexion sont obtenus à partir de ceux avant réflexion par la relation :

$$\tilde{u}'(q, t) = \tilde{u}(q, t) \mathcal{R}(\vec{K}q, \vec{x}, t). \quad (2.75)$$

Dans cette équation nous utilisons les notations de la section 2.3.3.  $\vec{K}q$  est le vecteur d'onde physique,  $\vec{x}$  est le point de réflexion et  $t$  est le temps physique auquel a lieu la réflexion. Pour une réflexion totale,  $\mathcal{R}$  est un nombre réel égal à 1.

Pour finir, considérons le cas d'un récepteur situé sur la surface du sol. La signature en pression mesurée est la somme des contributions de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. On obtient ainsi pour toute grandeur scalaire ( $u, p', \rho'$ ) :

$$\tilde{u}_r(q, t) = \tilde{u}(q, t) \left( 1 + \mathcal{R}(\vec{K}q, \vec{x}, t) \right),$$

où les coefficients  $\tilde{u}_r$  sont les coefficients de Fourier du signal mesuré. Dans le cas d'une réflexion totale, l'amplitude de la forme d'onde mesurée au niveau d'un récepteur sur la surface du sol est le double de l'amplitude de l'onde incidente. Cette propriété est vraie pour les grandeurs scalaires. La projection des fluctuations de la vitesse suivant le vecteur normal à la surface  $\vec{v}'_r \cdot \vec{e}_n$  est quant à elle nulle.

Pour la méthode de tracé de rayons, deux approches permettent de calculer l'amplitude du signal au niveau d'un récepteur situé sur la surface du sol. La première revient à supposer qu'un seul rayon arrive au niveau du récepteur. La véritable amplitude du signal est alors calculée en utilisant les expressions précédentes. La seconde méthode traite le rayon incident et le rayon réfléchi séparément. Les signaux pour chaque rayon étant calculés respectivement juste avant et juste après la réflexion. Le signal au niveau du récepteur est alors la somme des contributions des deux rayons. Les deux approches donnent le même résultat mais leur mise en œuvre est différente. La seconde méthode présente l'avantage d'être utilisable indifféremment pour un récepteur sur le sol ou en altitude. Nous reviendrons sur ces aspects dans la section concernant les aspects numériques liés à la recherche des rayons propres.

### 2.3.6 Déphasage au passage des caustiques

Les caustiques sont des singularités de l'acoustique géométrique. Elles correspondent aux lieux de l'espace et du temps où des rayons voisins se croisent. Le volume convecté  $\nu$  tend alors vers zéro ce qui conduit d'après l'équation de conservation de l'action d'onde (2.42) à une amplitude infinie. Le développement asymptotique précédent cesse d'être valable aux voisinages des caustiques où la diffraction de l'onde devient importante.

En trois dimensions, il existe de multiples types de caustiques [107]. Les plus couramment rencontrées en propagation atmosphérique sont les caustiques « pli » et les caustiques cuspidées. Lorsqu'un rayon traverse une de ces caustiques, le scalaire  $\vec{X}_{p_1} \cdot (\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3})$  change de signe (en utilisant la définition (2.43) du volume convecté  $\nu$ ). Ce changement de signe permet de détecter les caustiques lors de l'intégration des rayons et des éléments géodésiques. Un rayon peut traverser plusieurs caustiques le long de son trajet. Le nombre de caustiques traversées depuis la source est généralement comptabilisé par l'indice kmah (KELLER, MASLOV, ARNOLD,

HÖRMANDER) [107, 159]. L'étude du voisinage de ces caustiques [86, 107, 173, 130] montre que, dans le domaine linéaire et en négligeant les différents phénomènes d'absorption, pour un rayon donné, la forme d'onde après la caustique est la transformée de Hilbert de la forme d'onde avant la caustique. Ainsi, en notant  $t_c$  le temps auquel le rayon traverse la caustique et  $u_{\text{in}}(\xi) = u(\xi, t_c)$  la forme d'onde avant la caustique, la forme d'onde après la caustique  $u_{\text{out}}(\xi)$  est définie par la relation :

$$u_{\text{out}}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{\text{in}}(\eta)}{\eta - \xi} d\eta. \quad (2.76)$$

Dans le domaine de Fourier, la transformée de Hilbert peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{u}_{\text{out}}(q) = \imath \operatorname{sgn}(q) \tilde{u}_{\text{in}}(q). \quad (2.77)$$

Nous verrons dans la section 3.2 comment cette transformée de Hilbert est implémentée lors du calcul non linéaire de la forme d'onde le long d'un rayon.

L'hypothèse la plus contraignante dans l'utilisation de la transformée de Hilbert est de négliger les effets non linéaires au voisinage de la caustique. La transformée de Hilbert d'une forme d'onde discontinue présente une singularité logarithmique [173]. Ainsi, si la forme d'onde incidente présente une discontinuité, la forme d'onde après la caustique présentera un point avec une amplitude infinie. L'exemple le plus courant est la transformée de Hilbert d'une onde en « N » qui présente deux singularités logarithmiques. Il apparaît que ce sont les effets non linéaires qui limitent l'amplitude de la forme d'onde après les effets de diffraction. La modélisation des effets non linéaires dans la zone de la caustique implique la résolution d'une équation de Tricomi non linéaire [130] qui ne sera pas effectuée dans notre modèle. Dans le cas d'un calcul complètement linéaire de la forme d'onde, nous n'aurons pas de discontinuité et ainsi pas de singularité. Pour un calcul non linéaire, il est nécessaire de s'assurer de la pertinence des résultats obtenus par notre modèle.

Les fonctions  $u_{\text{in}}$  et  $u_{\text{out}}$  ne sont pas représentatives de la forme d'onde au voisinage de la caustique. Le calcul de la forme d'onde au voisinage de la caustique nécessite la résolution complète de l'équation de Tricomi non linéaire [130] ou dans le cas linéaire l'utilisation de la sommation de Maslov [107, 159], par exemple. Dans la pratique, il est nécessaire de s'assurer que le récepteur où l'on souhaite connaître la forme d'onde n'est pas au voisinage d'une caustique.

### 2.3.7 Rayons propres

Un rayon reliant la source au récepteur est généralement appelé un rayon propre (« eigen-ray »). Pour obtenir le signal au niveau d'un récepteur, il est nécessaire de connaître l'ensemble des rayons propres reliant la source au récepteur. Le signal est la somme des contributions de chaque rayon propre.

Posons d'abord des notations permettant de traiter les cas des sources dont l'hypersurface initiale dépend de deux ou de trois paramètres. Pour un récepteur donné, nous noterons  $\Sigma$  l'ensemble des rayons propres reliant la source au récepteur. Lorsqu'un paramètre d'émission est fixé, par exemple  $p_3$ , l'ensemble des rayons propres est généralement discret et fini. Nous noterons  $\Sigma^{(i)}(p_3)$  chaque rayon propre de cette ensemble fini. Le rayon propre  $\Sigma^{(i)}(p_3)$  est défini par ses paramètres  $p_1^{(i)}$ ,  $p_2^{(i)}$  et  $p_3$  mais également par le temps de réception au niveau du récepteur  $t_r^{(i)}$ . Pour un rayon propre  $\Sigma^{(i)}(p_3)$ , il est généralement possible d'associer un rayon propre  $\Sigma^{(i)}(p_3 + \delta p_3)$  pris à un paramètre d'émission  $p_3$  voisin. Ainsi, pour  $(i)$  donné,  $\{p_3 \rightarrow \Sigma^{(i)}(p_3)\}$  est un ensemble infini de rayons défini sur l'intervalle  $[p_{3a} p_{3b}]^{(i)}$ .  $\Sigma^{(i)}$  est une fonction de  $p_3$  décrivant l'évolution de  $p_1^{(i)}$ ,  $p_2^{(i)}$  et  $t_r^{(i)}$ .

Ces notations générales se simplifient dans le cas d'une source dont le front d'onde initial

(hypersurface initiale) est indépendant du paramètre  $p_3$ . Dans ce cas, les fonctions  $\Sigma^{(i)}$  sont des constantes. L'ensemble des rayons propres  $\Sigma$  est alors défini par les rayons propres  $\Sigma^{(i)}$  pris à un paramètre  $p_3$  quelconque. Dans ce cas, en notant  $p'_{(i)}(t)$  la forme d'onde calculée pour le rayon propre  $(i)$ , le signal au niveau du récepteur est simplement :

$$p'_r(t) = \sum_{(i) \in \Sigma} p'_{(i)}(t). \quad (2.78)$$

Les formes d'ondes sont obtenues dans le cas non linéaire en utilisant par exemple la relation (2.55). Cette sommation n'est pas applicable lorsque le récepteur se situe au voisinage d'une caustique puisque les formes d'onde  $p'_{(i)}$  calculées par notre modèle ne sont pas représentative du champ acoustique comme nous l'avons dit dans la section précédente. La détermination de l'ensemble des rayons propres  $\Sigma$  pour une source et un récepteur donnés est réalisée numériquement. La méthode numérique est présentée dans la section 3.1.2. Bien que la sommation (2.78) hors du voisinage des caustiques ne pose pas de problème de manière analytique, la mise en œuvre numérique peut s'avérer irréalisable, notamment lorsque le milieu de propagation est chaotique [188, 52, 181]. En propagation atmosphérique, ce problème existe lorsque le milieu de propagation est turbulent et que la distance de propagation est grande par rapport à l'échelle caractéristique du milieu [31, 114, 101]. Le cas de la propagation dans un guide d'onde à très grandes distances pose également des difficultés du fait de la croissance exponentielle du nombre de rayons propres.

### 2.3.8 Calcul linéaire de la forme d'onde

Dans le cas d'une source définie par deux paramètres, le calcul linéaire de la forme d'onde au niveau du récepteur est direct. Lorsque le terme non linéaire de l'équation (2.57) est négligé, cette équation peut s'intégrer analytiquement. En tenant compte du déphasage aux passages des caustiques et des différentes réflexions sur la surface de la Terre, les coefficients de Fourier de la forme d'onde  $u$  vérifient la relation :

$$\tilde{u}(q, t_r) = \exp\left(\int_{t_a}^{t_r} -\Gamma(Kq, t) dt + i\frac{\pi}{2} \text{kmah} \frac{q}{|q|}\right) \cdot \prod_j \mathcal{R}\left(\vec{K}(t_{g_j})q, \vec{X}(t_{g_j}), t_{g_j}\right) \tilde{u}(q, t_a), \quad (2.79)$$

Les différentes variables étant prises comme des fonctions dépendant uniquement de l'abscisse curviligne du rayon  $\vec{X}(p_1, p_2, t)|_{(p_1, p_2)}$ . La forme d'onde  $u(\xi, t_a)$  est supposée connue pour ce rayon au temps  $t_a$  et le rayon passe au niveau du récepteur  $\vec{x}_r$  au temps  $t_r$ . Le temps d'initialisation du calcul de la forme d'onde peut être différent du temps d'émission des rayons avec la contrainte :  $t_a \geq t_s$ . Le rayon se réfléchit sur la surface de la Terre aux différents temps  $t_{g_j}$  auxquels le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}$  est évalué. Rappelons que l'entier kmah indique le nombre de caustiques traversées entre la source, ou plus exactement  $t_a$ , et le récepteur  $t_r$ . La forme d'onde  $u$  est reliée à ces coefficients de Fourier par la transformée (2.59). On obtient à l'aide de l'équation (2.79) la fonction  $u(\xi, t_r)$  au niveau du récepteur qui permet de revenir à la forme d'onde en pression  $p'_{(i)}(t)$  du rayon propre  $(i)$ .

Le calcul numérique de la relation (2.79) est effectué pour un nombre discret de fréquences  $q_n$ . Le calcul est effectué pour  $q_n \geq 0$  uniquement puisque  $u$  est une fonction réelle. Le calcul de l'intégrale de  $\Gamma$  peut être réalisé pour un plus petit nombre de  $q_n$  répartis de manière logarithmique, l'intégrale de  $\Gamma$  étant une fonction de  $q$  suffisamment continue pour être interpolée par des polynômes. Nous ne reviendrons pas dans les prochains chapitres sur le calcul numérique de la forme d'onde dans le domaine linéaire pour une source définie par deux paramètres.

### 2.3.9 Calcul non-linéaire de la forme d'onde

Pour des sources de forte puissance les effets non linéaires modifient significativement la forme d'onde. L'équation de Burgers généralisée (2.47a) doit alors être intégrée numériquement le long des rayons acoustiques. Les méthodes numériques mises en œuvre pour intégrer cette équation sont présentées dans la section 3.2.

Le long d'un rayon, l'équation de Burgers généralisée est intégrée à partir du temps  $t_a$  auquel la forme d'onde normalisée  $u(\xi, t_a)$  est supposée connue. L'ensemble des temps  $t_{g_j}$  auxquels le rayon se réfléchit et  $t_{c_i}$  auxquels le rayon traverse une caustique sont recherchés préalablement. Le rayon est alors divisé en tronçons délimités par les temps  $t_a, t_{g_j}, t_{c_i}$  et  $t_r$ . L'intégration de l'équation de Burgers généralisée est réalisée successivement pour chacun des tronçons à l'aide de la méthode numérique présentée dans la section 3.2. À chaque caustique et à chaque réflexion la forme d'onde est transformée en utilisant respectivement les équations (2.77) et (2.75). On obtient ainsi la fonction  $u(\xi, t_r)$  au niveau du récepteur qui permet de revenir à la forme d'onde en pression  $p'_{(i)}(t)$  du rayon propre ( $i$ ).

Pour un calcul non linéaire ou linéaire de la forme d'onde, il est nécessaire d'initialiser  $u(\xi, t_a)$  au temps  $t_a$  et de calculer au niveau du récepteur la signature en pression  $p'_{(i)}(t)$  à partir de la forme d'onde normalisée  $u(\xi, t_r)$ .

Pour l'initialisation, on suppose que la forme d'onde en pression  $p'(\vec{X}(t_a), t)$  est connue au niveau du point du rayon  $\vec{X}(t_a)$ . On utilise alors une des relations (2.53), ce qui permet de revenir à la forme d'onde normalisée :

$$u(\xi, t_a) = \left( \frac{\nu(t_a)}{K(t_a)\rho_0(t_a)c_0^3(t_a)} \right)^{1/2} p' \left( \vec{X}(t_a), t_a - \xi / \left( \vec{c}_g(t_a) \cdot \vec{K}(t_a) \right) \right). \quad (2.80)$$

L'approximation dans cette équation vient de la définition de la variable  $\xi$  uniquement. Cette procédure est utilisée pour initialiser la forme d'onde au voisinage d'une source explosive (cf. chapitre 4), par exemple. Cette procédure peut être légèrement modifiée lorsque l'on souhaite initialiser la forme d'onde en un point  $t_a$  où le volume convecté est nul ( $\nu(t_a) = 0$ ) et au voisinage duquel le volume convecté évolue sous la forme  $\sqrt{\nu(t)} \propto (t - t_a)^\alpha$  avec  $0 \leq \alpha < 1$ . Dans ces conditions, l'équation de Burgers généralisée (2.51) peut être intégrée au voisinage de  $t_a$  comme nous le verrons dans la section 3.2.3. La fonction  $\sqrt{\nu(t)}p'(\vec{X}(t), t')$  possède une limite finie lorsque  $t$  tend vers  $t_a$ . Il est ainsi possible d'utiliser la relation (2.80) pour calculer  $u$  à condition de connaître directement l'expression de  $\sqrt{\nu(t_a)}p'(\vec{X}(t_a), t)$ . Cette procédure peut être utilisée dans le cas d'une source supersonique (cf. chapitre 5).

Au niveau du récepteur, la forme d'onde en pression  $p'_{(i)}(t)$  est obtenue à partir de la forme d'onde normalisée  $u$  à l'aide de la relation :

$$p'_{(i)}(t) = \left( \frac{K(t_r)\rho_0(t_r)c_0(t_r)^3}{\nu(t_r)} \right)^{1/2} u \left( (t_r - t)\vec{K}(t_r) \cdot \vec{c}_g(t_r), t_r \right).$$

La forme d'onde en pression  $p'_{(i)}(t)$  obtenue au niveau du récepteur est la contribution pour un rayon propre ( $i$ ) donné. Le signal en pression au niveau du récepteur sera la somme (2.78) des contributions  $p'_{(i)}(t)$  de l'ensemble des rayons propres. La sommation de ces signaux nécessite généralement un ré-échantillonnage des signaux  $p'_{(i)}(t)$ .

### 2.3.10 Mise en œuvre de la méthode de tracé de rayons

Nous résumons dans cette partie les différents étapes de la méthode de tracé de rayons permettant de calculer le signal en pression au niveau d'un récepteur. La première étape consiste

en la définition des limites du domaine de propagation et de la topographie. Les données météorologiques influençant la propagation doivent alors être définies. Ces données sont composées de la température, des composantes zonales et méridiennes du vent et de la masse volumique. Le type de source et sa trajectoire doivent être intégrés au modèle et les récepteurs auxquels on souhaite calculer le signal doivent être définis. Vient alors la recherche de l'ensemble des rayons propres qui relient la source aux récepteurs. Pour chaque rayon propre, la forme d'onde peut être calculée. Les caustiques et les points de réflexion sont localisés le long des rayons propres. La forme d'onde normalisée est calculée au niveau de la source en tenant compte des propriétés locales du milieu. Vient enfin l'intégration linéaire ou non linéaire de la forme d'onde jusqu'au récepteur. Les contributions de chaque rayon propre sont alors sommées fournissant ainsi la signature en pression au niveau des récepteurs.

## 2.4 Modélisation de l'atmosphère

Dans cette partie, nous décrivons les propriétés de l'atmosphère ainsi que différents modèles permettant de la modéliser. Dans une première section, nous présentons un modèle d'atmosphère stratifié ainsi que les différentes grandeurs intervenant dans la définition de l'atmosphère. Dans une seconde section, nous décrivons les différentes méthodes permettant d'obtenir des données atmosphériques dans la basse atmosphère d'un point de vue physique. Nous indiquons également quelles données sont disponibles, comment les obtenir et une méthode permettant de les relier.

### 2.4.1 Modèle d'atmosphère stratifiée

En propagation atmosphérique, l'atmosphère est un milieu généralement supposé stratifié verticalement [148]. La pression, la masse volumique, la température, les concentrations moléculaires et les composantes du vent dépendent ainsi essentiellement de l'altitude. L'hypothèse d'atmosphère stratifiée présente cependant quelques limites.

### Équilibre hydrostatique et stratification de l'atmosphère

À l'échelle synoptique, l'atmosphère est essentiellement un milieu stratifié à l'équilibre hydrostatique : la vitesse verticale moyennée sur un pavé horizontal de quelques kilomètres carrés ( $\text{km}^2$ ) est de l'ordre de quelques centimètres par secondes ( $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ) et l'accélération associée est négligeable devant l'accélération gravitationnelle. Ainsi, la projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.2) suivant la verticale  $\vec{e}_1$  donne :

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g,$$

où  $\vec{g} = -g\vec{e}_1$  est l'accélération de la pesanteur<sup>3</sup> et  $z$  est l'altitude. Cette équation est généralement appelée équation hydrostatique. L'équilibre hydrostatique suppose que le poids de l'air et la force de flottabilité se compensent.

Cette équation d'équilibre combinée avec la relation des gaz parfaits et le profil de température  $T(z)$  permet de déterminer les profils de pression et de masse volumique de l'atmosphère :

$$p_0(z) = p_0(0) \exp\left(-\int_0^z \frac{1}{H(h)} dh\right),$$

---

3. L'accélération gravitationnelle dépend de l'altitude  $z$  et de la latitude  $\phi_{\text{lat}}$ . La dépendance avec l'altitude est :  $g(z) = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$ , avec le rayon de la Terre  $R_T$ . La dépendance en fonction de la latitude peut être obtenue suivant le World Geodetic System (National Imagery and Mapping Agency) par exemple.

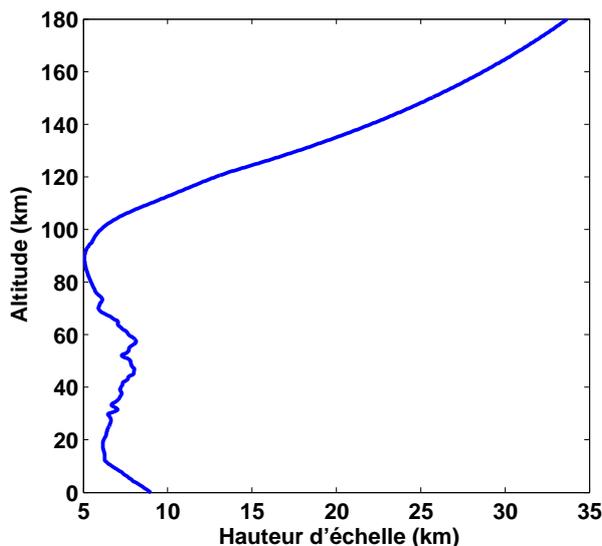


FIGURE 2.5 – Hauteur d'échelle  $H(z)$  pour une atmosphère standard.

en définissant la hauteur d'échelle :  $H(z) = \frac{RT(z)}{M(z)g(z)}$ . L'évolution de cette échelle avec l'altitude est présentée sur la figure (2.5). En supposant qu'elle est constante, on retrouve que la pression atmosphérique est une fonction exponentiellement décroissante de l'altitude. Une hauteur d'échelle d'environ 8 km fournit une diminution de la pression d'un facteur deux tous les 5 km.

Le modèle d'atmosphère stratifiée à l'équilibre hydrostatique est toutefois limité. Il ne tient pas compte de l'équilibre géostrophique qui suppose que la force du gradient de pression horizontal et la force de Coriolis se compensent. De plus, il n'est pas vérifié à l'échelle locale. Dans la troposphère, de forts phénomènes de convection perturbent le milieu tels que les panaches thermiques, les nuages (cumulus), les orages magnétiques, les cyclones, ... [143] Les gradients des vitesses des convections peuvent être très élevés, le milieu étant alors loin de l'équilibre hydrostatique. Au-dessus de la tropopause, l'atmosphère est essentiellement perturbée par les marées solaires, les ondes planétaires (Rossby) et des mécanismes propagatifs (ondes de gravité, ondes acoustiques, ...) ainsi que par la turbulence. Ces mécanismes entraînent des déplacements de matières susceptibles de modifier la propagation des ondes infrasonores. Cependant, l'accélération verticale du fluide par ces mécanismes reste généralement faible et l'hypothèse hydrostatique est une bonne approximation au-dessus de la tropopause.

### Composition moléculaire de l'atmosphère

Les concentrations des constituants majeurs de l'atmosphère ( $N_2$ ,  $O_2$ ) varient peu jusqu'à 100 km d'altitude puis diminuent. La proportion d'Argon est relativement stable. Il existe par contre de fortes variations des composants mineurs ( $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $O_3$ ,  $O$ ,  $N$ ). Les autres espèces minoritaires influencent peu l'état de l'atmosphère et pas directement la propagation des ondes. La concentration des différentes espèces du milieu est gouvernée principalement par leur masse molaire et par le rayonnement solaire. Des mécanismes de brassage de l'air peuvent également intervenir. Par exemple, les ondes de gravité jouent un rôle de brassage en particulier au niveau des pôles pour redistribuer l'ozone.

Sutherland & Bass [185] proposent des profils des concentrations des différentes espèces du milieu en fonction de l'altitude. Ces profils sont basés sur des mesures provenant des standards américains (A/F Handbook of Geophysics 1960). Notons que dans la troposphère, la concentration en vapeur d'eau varie de manière importante. La grandeur généralement tabulée est l'humidité relative plutôt que la concentration en eau ( $H_2O$ ). En propagation atmosphérique, les effets

liés à la relaxation vibratoire des molécules d'eau sont traités via des modèles semi-empiriques dépendant directement de l'humidité relative [157]. La relation entre humidité relative RH et la concentration molaire en molécule d'eau  $X_{\text{H}_2\text{O}}$  est :

$$X_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{10^{-2}\text{RH} p_{\text{vp}}(T)}{p}$$

où  $p$  est la pression et  $p_{\text{vp}}$  est la pression de vapeur d'eau saturante<sup>4</sup> définie dans Bass & al. [17].

Sutherland & Bass [185] proposent des profils de concentration des espèces majoritaires de l'atmosphère. Ces profils sont indépendants de la latitude, de la longitude et du temps et correspondent à des estimations des concentrations des différentes espèces en fonction de l'altitude. Des mesures de concentration des différentes espèces moléculaires existent également dans les parties basses de l'atmosphère, en particulier pour l'humidité. Ces mesures sont généralement réanalysées (ex. NCEP). Des données statistiques existent également (MSIS-90 [93]) pour les espèces moléculaires : He, O, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, Ar, H et N. Dans nos modélisations, nous utilisons les profils de Sutherland & Bass [185].

### Température de l'atmosphère

La température de l'atmosphère est globalement pilotée par le flux solaire arrivant au niveau de la Terre. À grande échelle, la température de l'atmosphère dépend de l'altitude, de la latitude et du temps. L'évolution de la température en fonction de l'altitude définit quatre couches présentées dans le premier chapitre à la figure (1.1) :

- La **troposphère**, d'une épaisseur variable suivant les régions (de 13 km au niveau des pôles à 18 km à l'équateur), est la couche la plus basse de l'atmosphère. C'est une couche d'air instable et turbulente qui est le siège des phénomènes météorologiques. La température y diminue avec l'altitude, la surface de la Terre étant une source thermique.
- La **stratosphère**, de la tropopause à environ 50 km. La température s'élève rapidement avec l'altitude, conséquence de l'absorption du rayonnement solaire Ultra-Violet par les molécules d'ozone.
- La **mésosphère**, de 50 à 100 km, où la température diminue à nouveau avec l'altitude, est la partie la plus froide de l'atmosphère.
- La **thermosphère**, au-dessus de 100 km, où la température augmente très rapidement avec l'altitude, les particules étant mises en mouvement par le rayonnement solaire.

La dépendance en latitude est liée à la différence d'inclinaison entre la verticale et le flux solaire : le chauffage moyen au niveau des pôles est beaucoup plus faible qu'au niveau des tropiques. Les marées saisonnières et diurnes de la températures sont liées au forçage thermique du flux solaire.

À l'échelle locale, la géophysique de l'atmosphère est complexe et la température dépend d'un grand nombre de facteurs. Des inhomogénéités de températures peuvent exister. La répartition de la température dans la troposphère est très inhomogène, gouvernée par des phénomènes météorologiques. Dans la basse atmosphère (au moins jusqu'à 25 km), de forts gradients de température localisés dans de fines couches ont été mesurés à l'aide de radar VHF [57, 127]. Ces couches, appelées feuillets, ont une épaisseur de 3 à 20 m et la température peut y augmenter de 0,2 à 0,8 K. Dans ces feuillets, les gradients de vitesse du son vont de 20 à 50 m.s<sup>-1</sup>.km<sup>-1</sup> et sont toujours positifs.

Au-dessus de la tropopause, la température est plus homogène. Cependant, des inhomogénéités de forte amplitude peuvent exister. Des observations par Lidar Rayleigh [115] montrent l'existence d'inversions de température dans la mésosphère (70 km). Ces inversions se traduisent

4.  $\log_{10} \left( \frac{p_{\text{vp}}}{p_{s0}} \right) = -6,8346 \left( \frac{T_{01}}{T} \right)^{1,261} + 4,6151$ , avec  $T_{01} = 273,16$  K et  $p_{s0}$  est la pression de référence (1 atm) dans la même unité que  $p_{\text{vp}}$ .

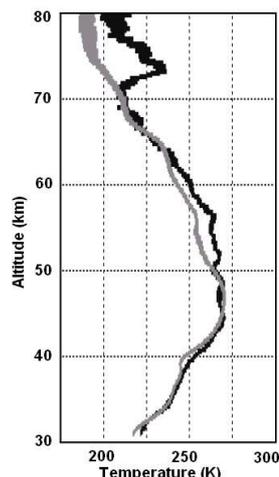


FIGURE 2.6 – Inversion de température dans la mésosphère mesurée par Lidar Rayleigh en mars 1999. La durée d’observation du phénomène est de plusieurs heures. Mesure extraite de Kumar & al. [115].

par une augmentation de la température sur quelques kilomètres et peuvent persister pendant plusieurs heures (cf. figure (2.6)). Les observations en différents points du globe (France, États Unis, ...) montrent des augmentations de la température allant de 20 K à 100 K sur des couches de quelques kilomètres d’épaisseur. Les gradients de la vitesse du son peuvent atteindre 4 à 10  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{km}^{-1}$ . Les altitudes d’inversion sont généralement plus basses en hiver qu’en été. La présence de ces inversions est attribuée au déferlement d’ondes de gravité provenant de la basse atmosphère [115].

### Vent zonal et méridien

La troposphère, qui est le siège des phénomènes météorologiques, est généralement brassée par des vents horizontaux mais également verticaux. La stratosphère est globalement plus calme que la troposphère. Elle peut cependant être brassée aux moyennes latitudes par de puissants courants atmosphériques qui circulent d’ouest en est. Ces courants jets (jet-streams) ont des vitesses pouvant atteindre 80  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . L’atmosphère au-dessus de la stratopause est essentiellement stratifiée et les perturbations verticales sont essentiellement dues aux phénomènes ondulatoires. Généralement, l’ensemble de l’atmosphère est, à l’échelle synoptique, supposée stratifiée, la composante verticale du vent étant alors supposée nulle.

Le vent horizontal peut être indiqué par sa composante zonale (vecteur allant de l’ouest vers l’est)  $u$  et sa composante méridienne (vecteur allant du sud vers le nord)  $v$  ou par sa vitesse horizontale  $S$  et la direction d’où il provient (compas de  $360^\circ$  orienté dans le sens horaire par rapport au nord)  $\phi$ . Ces notations sont celles utilisées en météorologie<sup>5</sup>. Les relations suivantes permettent de passer des deux composantes du vent horizontal à la vitesse et la direction du vent :

$$u = -S \sin \phi, \quad v = -S \cos \phi. \quad (2.81)$$

Ainsi, le vent d’ouest qui est dominant en Normandie a une direction  $\phi = 270^\circ$ , une composante méridienne  $v$  nulle et une composante zonale  $u$  positive. Le vent du nord qui est plus froid a une direction  $\phi = 0^\circ$  une composante méridienne  $v$  négative et une composante zonale  $u$  nulle.

5. Convention pour le vent définie par : The Office of the Federal Coordinator for Meteorology (<http://www.ofcm.gov/fmh3/text/appendd.htm>).

L'évolution en fonction de l'espace et du temps des composantes horizontales du vent au-dessus de la tropopause est généralement lente et relativement prévisible. Ces dernières peuvent être déterminées à partir de modèles empiriques comme nous verrons dans la section suivante. Cependant, des mesures au niveau des cercles polaires et aux latitudes moyennes révèlent l'existence de couches de cisaillements dans la mésosphère [96]. Ces couches sont appelées « wind corners ». Aux latitudes moyennes, la direction du vent horizontal peut tourner de  $90^\circ$  avec des gradients angulaires pouvant atteindre  $5^\circ$  pour 100m, pour des vitesses de vents de  $100 \text{ m.s}^{-1}$ . Ces couches de cisaillement sont mesurées vers 80 km d'altitude. Kulichkov & al. [113] estiment à l'aide de mesures infrasonores que les gradients de la vitesse effective du son dans ces couches sont de l'ordre de  $70 \text{ m.s}^{-1}.\text{km}^{-1}$  et que l'épaisseur des couches est de l'ordre de 1 km, ces grandeurs étant confirmées par des sondages atmosphériques.

L'hypothèse d'atmosphère stratifiée n'est pas compatible avec l'introduction d'une topographie, même à grande échelle. Le vent doit être tangent à la surface du sol. Ainsi, lorsque la topographie du sol est variable, la composante verticale du vent doit être introduite afin de respecter cette propriété. Si l'on ne souhaite pas modéliser les effets météorologiques et prendre en compte une topographie variable, il est nécessaire de raccorder les vents troposphériques avec les vents dans la stratosphère supposée stratifiée. Ce raccord peut être réalisé en supposant une évolution linéaire de la vitesse verticale du vent entre la surface du sol et une altitude donnée à partir de laquelle elle est supposée nulle. Sa valeur au niveau du sol est prise de telle sorte que le vent soit tangent au sol. Cette méthode est une astuce numérique qui permettra, lorsque la convection au niveau du sol est faible, d'étudier les effets de la topographie à l'échelle globale

### 2.4.2 Données atmosphériques

La température, la composition, la pression et le taux d'humidité de l'atmosphère ainsi que le vent sont mesurés quotidiennement afin d'être assimilés dans les codes de prévisions météorologiques. Ces mesures sont réalisées au niveau du sol par des stations météorologiques, entre le sol et quelques dizaines de kilomètres avec des ballons sondes, des fusées sondes et des radars météorologiques, et dans la haute atmosphère par les satellites.

Les mesures par ballon sonde sont réalisées quotidiennement voire plusieurs fois par jour sur l'ensemble de la Terre et constituent une base de données importante pour la troposphère. Les données atmosphériques sont réanalysées et assimilées dans des modèles d'atmosphère. Deux grandes sources de données réanalysées existent : les données NCEP<sup>6</sup> et les données ECMWF<sup>7</sup>.

Des modèles statistiques et semi empiriques ont été développés à partir des mesures présentées ci-dessus et réalisées sur plusieurs dizaines d'année. Les modèles les plus complets actuellement sont le modèle HWM-93 (Horizontal Wind Model) pour les vents zonaux et méridiens et le modèle MSIS-90 (ou NRLMSISE-00) pour la composition de l'atmosphère, sa masse volumique et sa température.

Les sondages par rocket sonde fournissent des informations complémentaires entre 30 et 80 km d'altitude sur l'état de l'atmosphère. Ces mesures sont réalisées occasionnellement lors d'expériences [142, 113, 166]. Notons également que les radars météorologiques apportent des informations sur les fines structures de l'atmosphère et sur leur évolution dans le temps [96, 127].

Les sondages fournissent une description relativement bonne de l'atmosphère jusqu'à 80 km d'altitude et les modèles statistiques sont fiables au-dessus de 120 km. Il existe une zone entre 80 et 120 km dans laquelle l'incertitude sur les données disponibles (généralement les données statistiques) est grande. Il est nécessaire de tenir compte de cette incertitude dans la discussion des résultats obtenus en utilisant de tels profils. Nous décrivons dans la suite de cette section les mesures par rawinsonde, les modèles statistiques HWM et MSIS ainsi que les données réanalysées.

6. NCEP : National Centers Environmental Prediction : <http://www.ncep.noaa.gov>

7. ECMWF : European Centre for Medium-Range Weather Forecasts : <http://www.ecmwf.int>

### Sondages atmosphériques par rawinsonde

Les sondages par rawinsonde (Radar, Wind, Sonde) sont réalisés quotidiennement par plus de 1000 stations réparties sur l'ensemble de la Terre. Une rawinsonde est constituée d'un ballon rempli d'hélium auquel est attaché un baromètre, un thermomètre et un hygromètre ainsi qu'un appareil permettant de mesurer la position du ballon (GPS par exemple). Ces ballons sont équipés d'un émetteur radio permettant de transmettre les données aux météorologistes. L'équipement de certains ballons ne permet de mesurer que leur position, on parle alors de « Pilot Balloon ». Inversement, ceux pour lesquels la position n'est pas mesurée sont appelés « radiosonde ». Malgré ces distinctions, on parle plus généralement de radiosonde que de rawinsonde.

Une rawinsonde s'élève à la vitesse d'environ  $5 \text{ m.s}^{-1}$  et atteint son altitude maximale (20 à 30 km) en un peu plus d'une heure. La pression (hPa), la température (K) et le taux d'humidité relative (en %) sont mesurés toutes les 10 s environ. Lorsque la trajectoire du ballon est mesurée en fonction du temps, il est possible de remonter à la vitesse et à la direction du vent. Le ballon est supposé se déplacer avec le milieu, l'inertie du ballon étant négligée. L'altitude du ballon mesurée n'est généralement pas utilisée. Elle est calculée à partir de l'équilibre hydrostatique de l'atmosphère définie dans la section 2.4.1. Des hypothèses sont faites sur la composition de l'atmosphère (excepté sur la concentration en  $\text{H}_2\text{O}$  qui est mesurée) et sur l'accélération gravitationnelle  $g(z)$ .

Les observations réalisées sur l'ensemble de la Terre par les rawinsondes et les ballons sondes sont regroupées par le NCDC<sup>8</sup> dans la base IGRA<sup>9</sup> [68]. Cette base regroupe les observations de plus de 1500 stations réalisées depuis les années 1960. La base est accessible gratuitement et elle est actualisée tous les jours (deux sondages par jours à 0 h et 12 h UTC). Elle reprend, corrige et complète la base « Radiosonde Data Archive » mise en œuvre par le NCDC et le FSL<sup>10</sup>.

### Modèles statistiques

Le modèle MSISE-90 (Mass Spectrometer and Incoherent Scatter radar) [94, 93] est un modèle empirique de l'atmosphère basé sur des données satellites et des mesures en basse atmosphère (ex. rocket sonde). Ce modèle fournit les profils de température et de densité des espèces moléculaires He, O,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , Ar, H et N. Une nouvelle version du modèle NRLMSISE-00 existe également [156]. Le modèle HWM-93 (Horizontal Wind Model) [93] est un modèle empirique des vents horizontaux de l'atmosphère basé sur des données satellites, des mesures par radar, par ballons sondes et par interféromètre optique Fabry-Perot. La zone autour de 100 km d'altitude est définie à partir de mesures par Radar-MF-météorites [190] uniquement. Ces modèles intègrent et moyennent des mesures scientifiques réalisées pendant plus de trente ans, ce qui leur confèrent un caractère statistique. Ces modèles sont une synthèse d'un ensemble de mesures.

Les modèles dépendent de l'altitude, de la latitude, de la longitude ( $\phi$ ), de l'heure universelle ( $t_u$ ), de l'heure solaire locale ( $t_{\text{local}}$ ,  $\phi = 15(t_{\text{local}} - t_u)$ ) et du jour de l'année. Ces modèles sont paramétrés par l'indice du flux solaire<sup>11</sup>  $F_{10.7}$ , par l'indice de flux solaire moyen ( $F_{10.7}$ )<sub>avg</sub> (moyenne sur les 3 cycles solaires précédents, soit 81 jours) et l'indice géomagnétique global<sup>12</sup>  $A_p$ .

---

8. NCDC : National Climatic Data Center : <http://www.ncdc.noaa.gov/oa/ncdc.html>

9. IGRA : Integrated Global Radiosonde Archive : <http://www.ncdc.noaa.gov/oa/climate/igra/index.php>

10. FSL : Forecast Systems Laboratory. [http://raob.fsl.noaa.gov/Raob\\_Software.html](http://raob.fsl.noaa.gov/Raob_Software.html)

11. [ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR\\_DATA/SOLAR\\_RADIO/FLUX/](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR_DATA/SOLAR_RADIO/FLUX/). Le flux solaire observé, qui tient compte de la distance entre la Terre et le soleil, doit être utilisé.  $F_{10.7}$  est en  $10^{-22} \text{ Wm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ .

12. [ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC\\_DATA/INDICES/KP\\_AP/](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC_DATA/INDICES/KP_AP/). L'indice  $A_p$  est la moyenne journalière de l'indice  $a_p$ .

Les modèles sont disponibles sous forme de programmes implémentés en Fortran. Les principales variations de l'atmosphère (latitude, longitude, altitude, temps) sont décrites à l'aide d'harmoniques sphériques et de fonctions splines dont les coefficients sont stockés à l'intérieur même des programmes.

Les modèles intègrent les variations saisonnières et diurnes de la dynamique de l'atmosphère. Ces marées atmosphériques sont forcées par le rayonnement solaire. Différentes échelles modélisent les variations temporelles : annuelle, semi-annuelle, diurne, semi-diurne et ter-diurne (8 h). Les échelles modélisées en longitude sont les mêmes que celles en temps. La plus petite échelle est donc d'environ 4 000 km aux latitudes moyennes. En latitude, la 6<sup>ème</sup> harmonique sphérique des modèles donne une échelle d'environ 1 000 km. L'échelle caractéristique en altitude est de 7 500 m entre le sol et 100 km, puis de 20 km jusqu'à 150 km.

Bien que les variations liées aux cycles solaires ( $F_{10.7}$ ), à l'activité magnétique ( $A_p$ ) et aux vortex polaires soient introduites, elles sont décrites de manière incomplète et leurs effets sont relativement faibles. Les moyennes sur les données masquent fortement les variations fines de l'atmosphère. Les modèles sont valables au-dessus de 120 km où l'atmosphère est stratifiée et sont représentatifs des principales tendances au-dessus de la stratopause. Par contre, au-dessous d'environ 50 km les modèles sous-évaluent l'amplitude des vents horizontaux et ne modélisent pas les échelles significatives des profils de vents, de températures et de masses volumiques. L'incertitude sur les données des modèles est étudiée par Drob & al. [64].

Notons également l'existence d'autres modèles tels que le modèle GSWM (Global Scale Wave Model) qui modélise les marées atmosphériques diurnes, le modèle CMAM (Canadian Middle Atmosphere Model [129]) qui modélise les marées atmosphériques diurnes et les ondes planétaires (ondes de Rossby). Le code CMAT (Coupled Middle Atmosphere-Thermosphere [90]) regroupe plusieurs modèles (dont les précédents) afin d'évaluer l'état de l'atmosphère moyenne (stratosphère et mésosphère) en incluant une grande partie des phénomènes physiques qui influent à l'échelle globale.

### Mesures réanalysées

Une grande quantité de données météorologiques sont mesurées chaque jour afin de guider les modèles de prévision météorologique. Sur une période de 12 heures, un total de 75 millions de données sont disponibles, la majorité provenant de mesures par satellites. Les autres données proviennent de mesures conventionnelles (Rawinsonde, ...) et d'observations ponctuelles (neige, glace, houle océanique, ...).

Le centre ECMWF (European Centre for Medium Range Weather Forecasts) réanalyse l'ensemble de ces données quotidiennement. Après vérification de la qualité des données, celles-ci sont intégrées dans les modèles météorologiques à l'aide d'une méthode d'assimilation à plusieurs dimensions. Les codes météorologiques modélisent la physique atmosphérique à l'aide des équations de la mécanique des fluides. Les données sont utilisées pour guider l'évolution, les conditions initiales et les conditions finales de l'état de l'atmosphère. Cet état vérifie avant tout les équations du modèle et il est calculé sur une grille globale. En un point de l'espace, les données réanalysées représentent plus significativement l'état de l'atmosphère qu'une mesure. La mesure est sensible à de multiples effets locaux tandis que les données réanalysées sont représentatives de l'état global de l'atmosphère. L'analyse des données a également l'avantage d'augmenter le nombre de données assimilables et d'éliminer les mesures erronées.

Les données ECMWF sont disponibles avec une résolution en temps de 6h sur une grille en latitude et longitude d'environ 100 km par 100 km ( $1, 125^\circ-1, 125^\circ$ ), tandis que la résolution verticale est comprise entre 500 m et 3 km. Cependant, ces données ne sont pas disponibles pour l'ensemble de l'atmosphère. Les données ECMWF les plus détaillées sont stockées dans la base ERA-40. Elle est constituée d'un grand nombre de grandeurs dont l'altitude géopotentielle

(étiquette 129,  $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$ ), la température (étiquette 130, K), la composante zonale du vent ( $u$ , vers l'est, étiquette 131,  $\text{m}.\text{s}^{-1}$ ), la composante méridienne du vent ( $v$ , vers le nord, étiquette 132,  $\text{m}.\text{s}^{-1}$ ), la composante verticale du vent ( $w$ , étiquette 135,  $\text{m}.\text{s}^{-1}$ ), l'humidité relative (étiquette 157, %).

Notons également l'existence des données NRL–G2S qui regroupent celles de NCEP avec les modèles empiriques HMW–93 et NRLMSIS–00 [156].

### Modèles atmosphériques utilisés dans nos études

Dans nos études, nous utilisons les modèles statistiques HMW–93 et MSIS–90 pour modéliser l'atmosphère moyenne. Ces modèles sont utilisés pour définir les profils de températures et de vents zonaux. La basse atmosphère est définie soit à l'aide de mesures soit à l'aide des données réanalysées. Les mesures sont généralement réalisées par rawinsondes dans la troposphère et par rocket sondes jusqu'à 70–80 km. L'hypothèse d'équilibre hydrostatique est également faite pour le calcul de la pression et de la masse volumique. La combinaison de ces données permet d'obtenir un modèle réaliste des variations saisonnières et diurnes du vent et de la température dans l'ensemble de l'atmosphère.

Les données de la basse atmosphère ne coïncident pas forcément avec les données statistiques de l'atmosphère moyenne. Un raccordement entre les données de la basse atmosphère et de la haute atmosphère doit être effectué. Ce raccordement peut être délicat surtout pour les vents. Les contraintes du raccord sont d'empêcher la création de gradients trop importants et d'éviter des oscillations non réalistes. De plus, les gradients de températures sont limités physiquement par la décroissance adiabatique. Pour répondre à ces contraintes, le raccord est effectué à l'aide d'un ajustement de fonctions splines sur les différentes données. Cette procédure doit limiter l'impact du raccord sur la propagation des infrasons. Les profils obtenus restent une estimation de l'état de l'atmosphère qui ne tient pas compte des petites échelles de l'atmosphère telles que les ondes de gravité.

L'utilisation de mesures dans la base atmosphère introduit de petites échelles verticales dans les profils de température et de vent. L'étendue horizontale et la persistance de ces phénomènes ne sont pas nécessairement très grandes. L'utilisation de ces profils locaux à une échelle globale peut aboutir à des résultats erronés. Les petites échelles mesurées peuvent être attribuées aux ondes de gravité et aux phénomènes météorologiques. La procédure à suivre pour prendre en compte ces petites échelles est d'utiliser des modèles physiques d'onde de gravité et de turbulence.

## 2.5 Conditions d'application du modèle de propagation

Dans cette partie, nous discutons du domaine de validité et des conditions d'application du modèle de propagation développé dans ce chapitre. Nous nous intéressons d'abord au modèle physique de propagation (cf. partie 2.1) et au modèle d'atmosphère puis nous nous attachons à l'approximation géométrique.

### Modèle physique et modèle d'atmosphère

Les équations de Navier Stokes pour un mélange de gaz tenant compte de la vibration interne des molécules polyatomiques proposées dans la partie 2.1 est un système complet permettant de modéliser correctement la propagation des ondes infrasonores. En effet, dans l'atmosphère, le nombre de Knudsen est inférieur à 0,1 pour l'ensemble des fréquences considérées (cf. figure (1.2)). De plus, ces équations tiennent compte de l'ensemble des phénomènes physiques intervenant dans la propagation des ondes infrasonores.

Ce modèle ne suffit cependant pas pour modéliser les mécanismes d'émission d'ondes infrasonores ou l'atmosphère elle-même. La source d'infrasons doit être initialisée à l'aide d'une perturbation équivalente dans le modèle de propagation. Le calcul du champ au voisinage de la source peut nécessiter d'intégrer dans les équations de Navier Stokes d'autres phénomènes physiques tels que le rayonnement solaire ou la variation de la composition du milieu. D'une manière équivalente, l'équilibre de l'atmosphère est régi par un système d'équations plus complexe que celui donné dans la partie 2.1 et doit être établi comme nous le proposons dans la partie 2.4. Cependant, le modèle d'atmosphère doit être compatible avec les équations développées pour modéliser la propagation. Dans le modèle de propagation, seuls certains paramètres peuvent être forcés arbitrairement. La composition du milieu et les coefficients thermodynamiques peuvent être imposés tandis que la température, la masse volumique et la convection décrivant l'atmosphère doivent être définies en respectant les équations du modèle de propagation. Dans le cas contraire, le milieu évolue en absence de perturbation acoustique, ce qui risque de masquer le phénomène de propagation.

Comme nous l'avons montré dans la partie 2.4, l'atmosphère est un milieu inhomogène et instationnaire constitué de multiples échelles. Il est possible de définir à l'échelle synoptique un modèle d'atmosphère dont l'exactitude et le réalisme dépend de l'altitude. Par contre, les petites échelles ne peuvent être modélisées que de manière statistique. Dans l'ensemble des cas, les modèles d'atmosphère ne sont pas exacts et les résultats des simulations de la propagation des ondes infrasonores doivent toujours être interprétés en tenant compte de ces incertitudes.

Ainsi, notre modèle constitué des équations de la partie 2.1 et du modèle d'atmosphère de la partie 2.4 représente correctement la propagation des ondes infrasonores. Les différences entre les prédictions de ces modèles et les mesures sont essentiellement liées à l'impossibilité de connaître l'état exact de l'atmosphère.

### Acoustique géométrique

Le modèle de propagation développé dans les parties 2.2 et 2.3 est limité au cadre de l'acoustique géométrique. Les approximations sur lesquelles il est basé limitent sa validité et ses conditions d'application. Il faut distinguer les limites liées aux approximations sur l'opérateur de propagation des limites liées aux conditions initiales au niveau de la source.

La première condition nécessaire pour l'application du modèle est que le milieu soit lentement variable en espace et en temps par rapport aux échelles caractéristiques de l'onde acoustique. Cela revient à supposer que les échelles caractéristiques du milieu  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{T}_0$  sont très grandes par rapport respectivement à la longueur d'onde  $\lambda_w$  et la période  $\mathcal{T}_w$ . Dans la pratique, un milieu de propagation tel que l'atmosphère est composé d'inhomogénéités de toutes les tailles et ne vérifie

pas ces hypothèses. Il est possible de distinguer l'impact sur la propagation des ondes suivant deux échelles du milieu : la première correspond aux petites échelles de l'atmosphère, la seconde aux grandes échelles.

Les petites échelles de l'atmosphère sont définies par rapport à la longueur d'onde par  $\mathcal{L}_0 \leq \lambda_w$ . Ces inhomogénéités interviennent dans le mécanisme de scattering des ondes. Ce mécanisme ne peut pas être modélisé dans le cadre de l'acoustique géométrique que ce soit pour des raisons mathématiques avec la prolifération du nombre de rayons propres mais également pour des raisons physiques liées à l'absence de diffraction dans le modèle. Une onde de fréquence finie se propageant dans un milieu constitué de petites échelles ne sera globalement pas sensible à ces échelles du fait de la diffraction. La solution obtenue par le tracé de rayons, qui suppose par hypothèse que la fréquence est infinie, est très sensible à ces petites échelles. La méthode prévoit un grand nombre de caustiques et ainsi une surévaluation de l'amplitude en un grand nombre de points. La solution obtenue à l'aide du tracé de rayons et en utilisant un modèle d'atmosphère sans petites échelles est plus réaliste. Dans la pratique, le modèle d'atmosphère est filtré pour ne laisser que les grandes échelles lors de la simulation de la propagation des ondes. La solution ainsi obtenue représente alors un temps d'arrivée moyen et une amplitude moyenne.

Un raisonnement analogue doit être appliqué pour la topographie, les échelles de celle-ci étant similaires à celles de l'atmosphère. Ainsi, pour modéliser la propagation des ondes en présence d'une topographie, il est nécessaire de filtrer l'atmosphère et la topographie pour que la plus petite des échelles les caractérisant soit supérieure à la longueur d'onde et à la pulsation de l'onde étudiée.

Les grandes échelles de l'atmosphère limitent également la validité du modèle de propagation. Les inhomogénéités de l'ordre de la distance de propagation vont former les caustiques et les zones d'ombre géométriques. Cependant, ces limitations restent localisées dans l'espace et peuvent éventuellement être traitées [7, 53, 54, 132].

L'initialisation au niveau de source limite également les conditions d'application du modèle de propagation. Celui-ci ne peut être appliqué que si le champ de pression au niveau de la source peut être décrit par un front d'onde localement plan. D'une manière générale, ce front d'onde initial peut évoluer lentement dans l'espace mais également dans le temps. Pour nos cas d'application, ce front d'onde initial est obtenu analytiquement à partir du champ émis par la source en milieu homogène (ex. source ponctuelle et source supersonique). Pour un champ plus complexe, il est nécessaire de le décomposer en terme de sources équivalentes compatibles avec le modèle de propagation [95].

Une condition supplémentaire est nécessaire pour le calcul de la forme d'onde à l'aide de l'équation de Burgers généralisée. La durée du signal émis par la source doit être petite par rapport à l'échelle caractéristique du milieu  $\mathcal{T}_0$ . Cette condition est nécessaire si le milieu dépend du temps ou si le front d'onde initial évolue en fonction du temps.

## Chapitre 3

# Méthodes numériques pour l'acoustique géométrique

Dans le chapitre 2, nous avons développé un modèle de propagation des ondes infrasonores basé sur la méthode de tracé de rayons. La résolution d'un problème de propagation avec ce modèle est réalisée en deux étapes. La première étape est purement géométrique. Elle comprend le calcul des rayons acoustiques et des éléments géodésiques ainsi que la recherche des rayons propres. La seconde étape est le calcul de la forme d'onde le long des rayons acoustiques en résolvant l'équation de Burgers généralisée. Dans ce chapitre, nous présentons l'ensemble des méthodes numériques nécessaires à la résolution du problème de propagation tel qu'il est posé au chapitre 2. Nous souhaitons mettre en œuvre les méthodes numériques permettant d'intégrer les équations du modèle de la manière la plus exacte que possible. Nous avons donc développé des méthodes numériques adaptées à notre problème de propagation. Dans la partie 3.1, nous présentons la méthode numérique mise en œuvre pour intégrer les rayons et les éléments géodésiques ainsi qu'une procédure de validation de cette intégration. Dans un second temps, une méthode de recherche des rayons propres est décrite. Cette méthode originale est développée pour résoudre des problèmes de propagation à trois dimensions. Dans la partie 3.2, nous proposons une méthode de résolution de l'équation de Burgers généralisée basée sur la méthode spectrale Fourier Galerkin. Cette méthode est adaptée afin de traiter correctement le passage des caustiques. La résolution est optimisée en utilisant un maillage adaptatif et un pas d'intégration variable.

### 3.1 Tracé de rayons

Dans une première section, nous présentons la méthode numérique utilisée pour calculer les rayons acoustiques ainsi qu'une démarche permettant de valider l'implémentation du code. Les limites de la méthodes sont également discutées. Dans une seconde section, nous détaillons le fonctionnement d'une méthode de recherche de rayons propres dans un cas de propagation 3D. Elle s'appuie sur une méthode dite aux conditions initiales et est décomposée en une étape de détermination des rayons et une étape d'optimisation des rayons propres.

#### 3.1.1 Calcul des rayons acoustiques

Les rayons acoustiques peuvent être calculés à l'aide de différentes méthodes. Généralement, les rayons acoustiques sont obtenus en résolvant les équations des rayons (2.38) par une méthode standard d'intégration des systèmes d'équations différentielles ordinaires [99, 144, 162, 194]. Le choix de la méthode est fait essentiellement sur sa précision et sa flexibilité. La précision est d'autant plus importante que les distances de propagation sont grandes et que les inhomogénéités

du milieu sont petites. Il peut être intéressant d’utiliser un schéma d’intégration symétrique afin de pouvoir avancer de manière identique dans les deux sens du rayon. Ces types de schémas (ex. Leap Frog ou Crank-Nicolson) permettent de propager ou de rétro-propager les rayons en passant strictement par les mêmes points. Enfin, les équations des rayons sont basées sur un invariant qui est l’hamiltonien :

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t, \vec{k}, \omega) = \omega - \Omega(\vec{k}, \vec{x}, t),$$

avec les notations de la section 2.3.1. Cet invariant, qui est nul, est généralement utilisé afin de contrôler l’erreur numérique de l’intégration des rayons. Cependant, dans le cas où le système est autonome, il est possible d’utiliser des méthodes numériques symplectiques qui ont pour propriété de conserver cet invariant (cf. Hairer, Lubich & Wanner [87]). Les schémas symplectiques ne sont pas plus précis que les schémas standards mais leur propriété de conservation des invariants les rend utiles lorsque le nombre d’itérations est grand. L’utilisation de tels schémas permet de s’assurer que l’équation de dispersion est satisfaite le long du rayon discret calculé, la trajectoire des rayons n’étant pas nécessairement plus exacte.

Les rayons acoustiques peuvent également être résolus à l’aide d’une méthode d’optimisation directe [133]. Ces méthodes sont généralement développées à partir du principe de Fermat [191, 82, 83]. Elles consistent en la recherche des trajets reliant la source et un point de réception qui vérifient le principe du minimum du temps de propagation. La recherche est effectuée en optimisant un trajet initial (guess) à l’aide de méthodes de relaxation (SOR [163], Bending method [52]) ou de méthodes Monte Carlo (recuit simulé, algorithmes génétiques [133]). Ces méthodes présentent l’avantage de donner directement les rayons propres entre la source et le récepteur. Elles permettent également de tenir compte de la diffraction des ondes dans la limite de la théorie géométrique de la diffraction. Par contre, ces méthodes sont généralement plus coûteuses en temps de calcul et l’erreur numérique résiduelle après optimisation est plus grande que l’erreur obtenue lors d’une intégration classique des équations des rayons. Il est également difficile d’effectuer une étude prospective permettant de rechercher l’ensemble des rayons propres entre la source et le récepteur, ce qui est relié à la difficulté de définir un trajet initial pour l’optimisation. De plus, la prise en compte de la réflexion est délicate et les méthodes d’optimisation ne permettent pas de calculer les éléments géodésiques. Notons cependant, que ces méthodes sont les seules à fonctionner dans des milieux chaotiques pour déterminer des rayons propres entre la source et le récepteur [133].

Pour finir sur le calcul des rayons, il est nécessaire de discuter du caractère chaotique que présente l’espace des phases associé aux rayons acoustiques dans certains milieux. L’espace des phases lié à l’hamiltonien  $\mathcal{H}(\vec{x}, t, \vec{k}, \omega)$  est un système déterministe. Formellement, un rayon est entièrement déterminé par ses conditions initiales. Cependant, il présente dans certaines configurations un comportement chaotique qui se manifeste par une forte sensibilité aux conditions initiales. Ce chaos déterministe existe lorsque les profils de la vitesse du son et du vent sont fortement inhomogènes [181, 52, 188, 133, 134]. Dans l’atmosphère, ces inhomogénéités peuvent être associées aux différentes formes de turbulence. Plus généralement, chaque fois qu’un rayon est tangent à un maximum de la célérité effective (cf. figure (1.3)), nous sommes en présence d’une bifurcation dans le champ de phase. Les rayons passants au voisinage de cette bifurcation sont extrêmement sensibles aux conditions initiales ou, d’une manière équivalente, à une petite variation du profil de température ou de vent. Dans tous les cas, le caractère chaotique des rayons acoustiques augmente l’incertitude sur les résultats, la sensibilité aux erreurs numériques et l’impact des incertitudes liées aux champs de vents. Le chaos complexifie également la recherche des rayons propres, le nombre de rayons propres augmentant exponentiellement en fonction de la distance de propagation dans un milieu chaotique. Il peut la rendre impossible car la propagation perd son caractère déterministe. On retrouve ici les limites de l’acoustique géométrique.

Intéressons nous maintenant à la méthode mise en œuvre pour calculer les rayons acoustiques et les éléments géodésiques ainsi qu'à la procédure permettant de valider cette méthode.

### Méthode numérique mise en œuvre

La procédure d'intégration utilisée dans nos applications est une méthode de Runge & Kutta standard du 4<sup>ème</sup> ordre à pas variable. Les rayons acoustiques sont calculés en intégrant le système d'équations différentielles ordinaire (2.38) à partir de la source. Les éléments géodésiques sont calculés simultanément en intégrant le système (2.45). Le pas d'intégration est ajusté en fonction d'une évaluation numérique de l'erreur entre le 4<sup>ème</sup> et le 5<sup>ème</sup> ordre du développement de l'opérateur temporel [163]. Cette procédure est flexible et permet d'optimiser le nombre de points d'intégration en fonction des inhomogénéités du milieu. La méthode requiert trois paramètres : un pas de temps initial, une erreur relative que l'on notera  $\epsilon_{RK}$  et un ordre de grandeur pour chaque variable intervenant dans l'intégration. Les ordres de grandeur des coordonnées  $\vec{x}$ , du vecteur d'onde  $\vec{k}$ , des éléments géodésiques et des co-éléments géodésiques sont donnés par la somme de leur valeur absolue et de leur dérivé évaluées au niveau de la source. Par exemple pour le vecteur position  $\vec{x}$ , l'ordre de grandeur est :  $\|\frac{d\vec{x}}{dt}\| + \|\vec{x}\|$ .

Les équations des rayons et des éléments géodésiques sont implémentées en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques et elles sont initialisées pour différents types de sources (ex. plane, ponctuelle, conique).

Le calcul des différents gradients de vitesse du son et du vent sont également implémentés en coordonnées cartésiennes et sphériques. Ces grandeurs doivent impérativement être deux fois dérivables en fonction des variables d'espace et du temps. Dans le cas contraire, le calcul des éléments géodésiques sera faux. Cela donnerait lieu en particulier à de fausses caustiques. Dans la pratique le milieu de propagation évolue lentement dans le temps relativement à la période des ondes étudiées. Ainsi, nous supposons que les variables décrivant le milieu sont des fonctions des trois variables d'espace uniquement. La procédure d'interpolation des champs de vitesse du son et de vents utilisée est basée sur des fonctions B-splines [163]. Les différentes variables sont écrites sous la forme d'une somme :

$$c(x, y, z) = \alpha_0 + \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} B_i(x) B_j(y) B_k(z).$$

Les fonctions  $B_i(x)$  (*idem* suivant  $y$  et  $z$ ) sont les fonctions Bsplines – dans notre cas d'ordre 4 – calculées par récurrence et définies sur un support  $(x_i)_{i=1,n_i}$  dont la taille et le pas sont adaptés au problème. Les coefficients  $\alpha_{ijk}$  sont calculés à partir de données d'entrées par la méthode des moindres carrés [163]. Généralement, le support est plus petit que les entrées, ainsi la procédure correspond à un ajustement plutôt qu'une interpolation. Numériquement, la méthode des moindres carrés nécessite l'inversion d'une matrice de la taille totale du support. L'inversion de cette matrice est *a priori* coûteuse, cependant, celle-ci est creuse et nous utilisons une méthode de gradient conjugué pré-conditionné ce qui permet d'utiliser la procédure d'interpolation de manière opérationnelle. La méthode est intéressante puisqu'une fois les coefficients  $\alpha_{ijk}$  calculés, l'évaluation des fonctions splines  $B_i(x)$  (*idem* suivant  $y$  et  $z$ ) et de leurs dérivées est extrêmement rapide.

Le dernier aspect numérique lié à l'intégration des rayons est la réflexion sur les surfaces solides. Il faut d'abord pouvoir détecter lorsqu'un rayon rencontre la surface du sol puis pouvoir interpoler cette surface. Les points de réflexion sont déterminés en vérifiant simplement si les points d'intégration du rayon sont sous la surface du sol. Cependant, comme le font remarquer Jones & al. [99], lorsque la topographie n'est pas plane, il est également nécessaire de s'assurer que le rayon ne traverse pas la topographie entre deux points d'intégration. Pour cela, lorsque le rayon est au voisinage du sol, le pas d'intégration est diminué de telle sorte que la distance

entre deux points du rayon soit inférieure à la moitié de la plus petite distance caractéristique de la topographie. Le calcul du point de réflexion sur la surface du sol est obtenu par interpolation après avoir diminué le pas d'intégration de tel sorte que l'erreur liée à l'interpolation soit négligeable. Un fois le point de réflexion calculé, la réflexion (cf. section 2.3.5) est appliquée puis la procédure d'intégration est réinitialisée (cf. Gainville & Blanc-Benon [70]).

### Validation de l'intégration des rayons

Dans cette section, nous proposons une méthode permettant de valider l'intégration des rayons et des éléments géodésiques. La méthode d'intégration des rayons et des éléments géodésiques est d'abord validée dans un milieu homogène au repos ou uniformément convecté [70], puis dans un milieu inhomogène [72].

Dans les milieux homogène, on s'assure que les trajectoires des rayons sont rectilignes et que le calcul du volume convecté est exact. Le test est effectué pour une multitude de rayons émis depuis la source. La déviation de l'hamiltonien est également vérifiée en comparaison à l'erreur d'intégration de la procédure de Runge & Kutta  $\epsilon_{RK}$ . Ceci permet de s'assurer de l'exactitude des calculs et de l'implémentation des équations en coordonnées sphériques et de la réflexion des rayons.

La seconde partie de la validation est réalisée en calculant des rayons et les éléments géodésiques associés dans un milieu inhomogène convecté indépendant du temps. La déviation de l'hamiltonien est également contrôlée, ce qui valide l'intégration de la trajectoire des rayons. L'intégration des éléments géodésiques  $\vec{X}_{p_i}$  est validée à l'aide du développement de Taylor de la position d'un rayon par rapport aux paramètres d'émission  $p_i$  :

$$\vec{X}(p_i + \Delta p_i, \vec{p} \neq p_i, t) = \vec{X}(p_i, \vec{p} \neq p_i, t) + \Delta p_i \vec{X}_{p_i}(p_i, \vec{p} \neq p_i, t) + O(\Delta p_i^2).$$

Si le calcul des rayons et de l'élément géodésique  $\vec{X}_{p_i}$  est exact, le comportement de la différence entre le membre de droite de l'expression précédente et celui de gauche doit être en  $O(\Delta p_i^2)$ . Cette comparaison permet de s'assurer de la cohérence entre les données définissant le milieu de propagation et leurs dérivées ainsi qu'entre la surface initiale et les éléments géodésiques sur cette surface. Notons qu'au voisinage des caustiques, les éléments géodésiques étant très petits, il n'est pas possible d'effectuer ce test.

La procédure doit être effectuée pour les différentes sources et pour les différentes coordonnées. La figure (3.1) illustre ce test pour une source située à 1 km au-dessus de la surface de la terre (de rayon 6373 km). Le calcul est réalisé en coordonnées sphériques. Des rayons émis dans différentes directions et pour une source située en différentes positions sont calculés. La figure montre que l'hamiltonien est bien conservé et que les éléments géodésiques sont cohérents avec les trajectoires des rayons. Ceci reste vrai après de multiples réflexions.

### 3.1.2 Recherche des rayons propres pour un problème 3D

La recherche des rayons propres est une partie importante d'un code opérationnel de tracé de rayons qui est pourtant peu abordée dans la littérature scientifique. Les rayons propres sont indispensables au calcul de la signature en pression au niveau du récepteur. La recherche des rayons propres est généralement un problème multivalué, plusieurs rayons pouvant relier la source au récepteur. Il s'apparente à un problème aux valeurs limites définies en deux points (*Two points boundary value problem*) [163] avec une frontière libre.

La recherche des rayons propres peut être décomposée en deux étapes. Une première consiste en la détermination de l'ensemble des rayons reliant la source au récepteur, la seconde consiste en l'optimisation de ces rayons propres déterminés. La détermination est l'étape la plus délicate

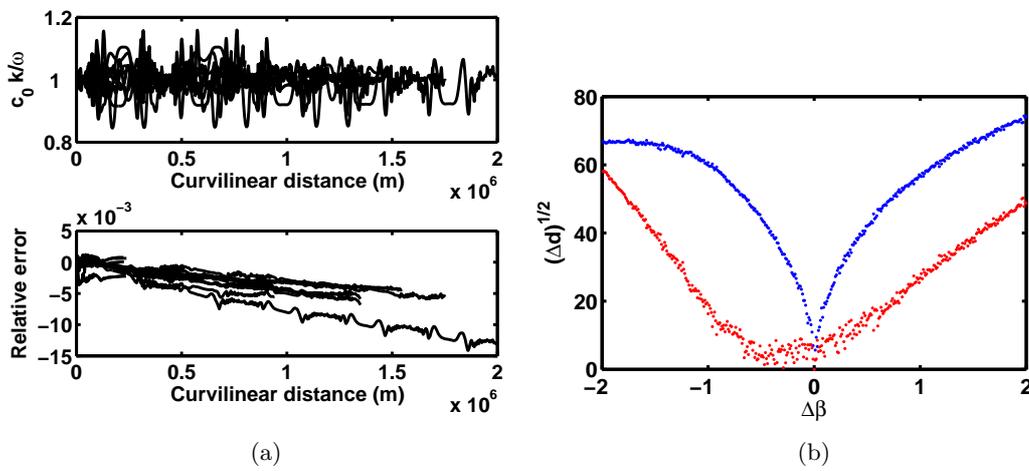


FIGURE 3.1 – Validation de l’intégration des rayons acoustiques dans une atmosphère inhomogène. Pour le graphique (a), un grand nombre de rayons émis dans différentes directions à partir d’une source fixe à la surface du sol est calculé. Le rapport  $c_0 K/\omega$  et l’erreur  $(|\omega - \vec{K} \cdot \vec{v}_0| - |K c_0|)/|K c_0|$  sont représentés. Cette erreur est faible comparée à l’erreur d’intégration de la procédure de Runge et Kutta ( $10^{-2}$  dans notre cas). Le graphique (b) représente en bleu la différence entre les rayons  $|\vec{X}(\beta + \Delta\beta, \gamma, t) - \vec{X}(\beta, \gamma, t)|^{1/2}$  et en rouge la différence corrigée à l’aide des éléments géodésiques  $|\vec{X}(\beta + \Delta\beta, \gamma, t) - \vec{X}(\beta, \gamma, t) - \Delta\beta \vec{X}_\beta(\beta, \gamma, t)|^{1/2}$  pour  $\beta = 50^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$  et  $t = 1000s$  (cf. cas d’une source ponctuelle, section 2.3.4). Le pas du paramètre d’émission est de  $0,01^\circ$  et la distance de propagation est d’environ 300 km dans une atmosphère standard. Des résultats identiques sont obtenus pour les autres temps, avant et après les réflexions excepté au voisinage des caustiques.

et pour laquelle peu de méthodes numériques existent. La difficulté est autant d'être capable de trouver des rayons propres que de s'assurer que tous les rayons propres sont déterminés.

Nous avons présenté deux méthodes permettant de calculer les rayons acoustiques : les méthodes d'optimisation et les méthodes d'intégration des rayons. Les méthodes d'optimisation ont l'avantage de fournir directement les rayons propres optimisés et sont généralement plus robustes. Cependant, ces méthodes ne permettent pas de réaliser une investigation systématique en vue d'obtenir l'ensemble des rayons propres. L'étape de détermination, qui revient à définir les bons rayons initiaux (*guess*), doit être effectuée par une autre méthode. Ces méthodes sont essentiellement utilisées dans des milieux chaotiques [181, 52, 188, 133, 134] pour rechercher un rayon propre lorsque celui-ci présente une solution approchée évidente.

Le problème aux valeurs limites définies en deux points peut également être résolu à l'aide de la méthode de tir de rayons (*shooting method*). Les rayons sont intégrés à partir d'un des points et, en ajustant les conditions initiales, les rayons passant par le second point sont recherchés. La méthode permet à la fois de déterminer puis d'optimiser les rayons propres. La méthode généralement utilisée en deux dimensions consiste à calculer un grand nombre de rayons à partir de la source et à rechercher leur point d'intersection avec la verticale au récepteur. Le tracé de l'altitude de ces points en fonction du paramètre d'émission (unique en deux dimensions) permet de trouver facilement les rayons propres. Cette méthode peut être étendue au cas à trois dimensions si les variations par rapport au second paramètre d'émission sont faibles [197]. Mialle & al. [140] effectuent en trois dimensions une recherche des zones de transition entre les différentes phases atmosphériques dans le cas d'une source ponctuelle fixe. Cette méthode est également délicate à mettre en œuvre pour une source plus complexe. La nouvelle méthode de détermination des rayons propres que nous proposons [71, 72] est plus flexible en vue de résoudre le problème pour n'importe quel type de source.

Deux conditions sont défavorables à la recherche de rayons propres. Dans un guide d'onde, le nombre de rayons propres croît exponentiellement. Lorsque la distance de propagation devient grande devant la hauteur du guide d'onde, il devient impossible de calculer l'ensemble des rayons propres étant donné leur nombre et la sensibilité aux conditions initiales. Cette limite est essentiellement numérique. La recherche des rayons propres est également impossible lorsque la propagation est chaotique du fait de l'extrême sensibilité aux conditions initiales. Certes des rayons peuvent passer par le récepteur mais le front d'onde n'est généralement plus localement plan. Dans ces deux cas, la difficulté de trouver les rayons propres s'accompagne d'une augmentation du nombre de caustiques. L'approximation géométrique n'est alors plus valable et la méthode de tracé de rayons perd également de sa validité.

Dans la suite de cette section, nous présentons la méthode de tir de rayons retenue pour rechercher les rayons propres. Une première étape permet de déterminer approximativement l'ensemble des rayons propres. La seconde étape utilise une méthode classique de descente afin d'optimiser ces rayons propres. Les doublons et les rayons ne pouvant pas être optimisés sont éliminés.

#### Détermination des rayons propres

Dans le cas général, aucune information n'est connue *a priori* sur la propagation des ondes dans le milieu. Une investigation systématique est nécessaire afin de déterminer l'ensemble des rayons propres. Nous nous limitons au cas de sources décrites par deux paramètres :  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ . Le cas des surfaces initiales définies par trois paramètres est généralement ramené à de multiples problèmes à deux paramètres.

La méthode de recherche des rayons propres est basée sur la distance entre les rayons  $\vec{X}(p_1, p_2, t)|_{p_1, p_2}$  émis par la source et le point de réception  $\vec{x}_r$  (cf. figure (3.2)). Cette distance

notée  $d$  dépend des conditions initiales  $(p_1, p_2)$  du rayon. Elle est définie par :

$$d^2(p_1, p_2) = \min_t \|\vec{X}(p_1, p_2, t) - \vec{x}_r\|^2 = \|\vec{X}(p_1, p_2, t_{\min}) - \vec{x}_r\|^2. \quad (3.1)$$

Un rayon est un rayon propre si la distance  $d$  est nulle. La recherche des rayons propres se réduit à la recherche des minima d'une fonction à deux variables  $d(p_1, p_2)$ . Du fait des erreurs numériques lors de l'intégration des rayons, la fonction  $d(p_1, p_2)$  est généralement en dents de scie, conduisant à un nombre important de minima locaux. Il est plus efficace de calculer directement les dérivées  $\frac{\partial d^2}{\partial p_i}$  et de rechercher les paramètres tels que ces dérivées changent de signe simultanément.

À proximité des rayons propres, les dérivées  $\frac{\partial d^2}{\partial p_i}$  peuvent être approchées par :

$$\left. \frac{\partial d^2}{\partial p_i} \right|_{p_j \neq i} \approx 2 \left( \vec{X}(p_1, p_2, t_{\min}) - \vec{x}_r \right) \cdot \vec{X}_{p_i}(p_1, p_2, t_{\min}), \quad (3.2)$$

pour  $i = 1, 2$ .  $\vec{X}(p_1, p_2, t_{\min})$  est le point du rayon le plus proche du récepteur et  $\vec{X}_{p_i}$  est l'élément géodésique suivant  $p_i$ . Cette expression est une approximation puisque le temps  $t_{\min}$  est une fonction de  $(p_1, p_2)$ . Cependant, au voisinage des rayons propres, les dérivées  $\frac{\partial t_{\min}}{\partial p_i}$  sont négligeables. Loin des rayons propres, ces approximations ne sont pas vérifiées mais cela ne pose pas de difficultés en pratique puisque nous sommes en mesure, lors de la phase d'optimisation, de vérifier si un rayon est effectivement un rayon propre.

La recherche systématique des rayons propres est réalisée en calculant pour une grille discrète de paramètres  $p_1^n$  et  $p_2^m$  l'ensemble des distances  $d(p_1^n, p_2^m)$ . Chaque élément de la grille est divisé en deux triangles  $[(n, m)(n+1, m)(n, m+1)]$  et  $[(n+1, m+1)(n+1, m)(n, m+1)]$ . Nous présentons les équations uniquement pour le premier type de triangle, celles-ci étant analogues pour le second type. Pour chaque triangle, les dérivées de la distance  $d^2$  sont interpolées bilinéairement :

$$g_i(x, y) = \frac{\partial d^2}{\partial p_i}(p_1^n, p_2^m) + \left[ \frac{\partial d^2}{\partial p_i}(p_1^{n+1}, p_2^m) - \frac{\partial d^2}{\partial p_i}(p_1^n, p_2^m) \right] x + \left[ \frac{\partial d^2}{\partial p_i}(p_1^n, p_2^{m+1}) - \frac{\partial d^2}{\partial p_i}(p_1^n, p_2^m) \right] y, \quad (3.3)$$

pour  $i = 1, 2$  et en posant :

$$x = \frac{p_1 - p_1^n}{p_1^{n+1} - p_1^n}, \quad \text{et} \quad y = \frac{p_2 - p_2^m}{p_2^{m+1} - p_2^m}.$$

Pour chaque triangle, on recherche le point  $(x_s, y_s)$  vérifiant  $g_1(x_s, y_s) = 0$  et  $g_2(x_s, y_s) = 0$ . Si celui-ci existe et si il est à l'intérieur du triangle (i.e.  $x_s \in [0, 1]$  et  $y_s \in [0, 1 - x_s]$ ) alors ce point est susceptible d'être un rayon propre. Il est également nécessaire de vérifier que cet extremum de la distance  $d^2$  correspond à un minimum. L'ensemble des minima trouvés ne sont pas tous des rayons propres. Lorsqu'un récepteur est dans la zone d'ombre au voisinage d'une caustique alors le minimum ne correspond pas à un rayon propre. Pour s'assurer qu'un minimum est un rayon propre, nous vérifions qu'après la procédure d'optimisation (présentée dans la section suivante) il passe suffisamment près du récepteur.

Afin de discerner le rayon incident du rayon réfléchi pour un récepteur proche d'une surface de réflexion (cf. figure (3.2)), la procédure de détermination des rayons propres est effectuée séparément pour chaque morceau de rayon de même nombre de rebond. La classification des rayons en nombre de réflexion a pour intérêt de séparer les minima qui ont des paramètres d'émission très proches.

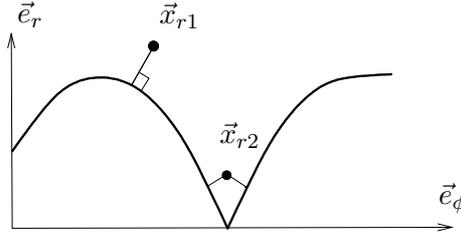


FIGURE 3.2 – Distance entre un rayon et un point de réception. Le point  $\vec{x}_{r1}$  ne présente qu'une seule distance minimale. Le point  $\vec{x}_{r2}$ , quant à lui, présente deux distances minimales.

### Optimisation des rayons propres

Une fois l'ensemble des rayons propres déterminés, il est nécessaire de les optimiser. Cette optimisation est basée sur une méthode de tir de rayons, les paramètres d'émission étant ajustés afin de réduire la distance entre les rayons et le récepteur. L'optimisation est réalisée à l'aide d'une méthode dite globalement convergente [163] dérivée de la méthode de descente Newton-Raphson.

L'optimisation est effectuée directement pour le vecteur  $\vec{X}(p_1, p_2, t) - \vec{x}_r$  en ajustant les trois paramètres  $p_1$ ,  $p_2$  et  $t$ . La fonction d'erreur à minimiser est la distance  $\|\vec{X}(\vec{p}, t) - \vec{x}_r\|$ . La connaissance de la matrice Jacobienne de passage entre les coordonnées curvilignes du rayon et les coordonnées spatiales :

$$J(p_1, p_2, t) = \begin{bmatrix} \vec{X}_{p_1} & \vec{X}_{p_2} & \vec{c}_g \end{bmatrix},$$

permet d'augmenter significativement l'efficacité de la méthode d'optimisation. La méthode de convergence globale est une méthode itérative. Les itérations sont réalisées jusqu'à ce que l'erreur  $\|\vec{X}(\vec{p}, t) - \vec{x}_r\|$  soit inférieure à une erreur résiduelle  $d_{\max}$ . À chaque itération, les paramètres  $p_1$ ,  $p_2$  et l'abscisse curviligne  $t$  sont ajustés dans la direction du gradient  $[\delta p_1, \delta p_2, \delta t] = J^{-1}(\vec{X} - \vec{x}_r)$  d'une fraction  $\alpha$  du pas du gradient :

$$[p_1, p_2, t]_{\text{new}} = [p_1, p_2, t]_{\text{old}} + \alpha[\delta p_1, \delta p_2, \delta t].$$

$\alpha$  est déterminé de manière itérative afin de minimiser l'erreur en distance. Un pas de Newton ( $\alpha = 1$ ) est d'abord essayé. Si l'erreur n'a pas suffisamment diminué, le paramètre  $\alpha$  est ajusté comme le propose Press & al. [163, chap. 9.7]. Ainsi, la méthode d'optimisation permet d'obtenir les paramètres d'émission  $p_1$  et  $p_2$  des rayons propres ainsi que le temps d'arrivée  $t$  au niveau du récepteur.

L'erreur résiduelle qu'il est possible d'atteindre dépend de l'échelle des inhomogénéités du milieu de propagation, de l'erreur  $\epsilon_{\text{RK}}$  d'intégration des rayons et des éléments géodésiques, de la position du récepteur par rapport aux caustiques et de la sensibilité des rayons aux conditions initiales. Dans des configurations classiques, il est aisé d'obtenir une erreur résiduelle inférieure à 5 m pour une distance de propagation de 500 km.

Après la détermination et l'optimisation des rayons propres, leur unicité est vérifiée. Les rayons propres avec le même nombre de réflexion depuis la source ne doivent pas avoir des conditions initiales et un temps de réception trop proches. Dans le cas contraire, un seul des rayons est conservé.

### Illustration de la méthode de recherche de rayons propres

La méthode de recherche des rayons propres est illustrée sur des problèmes concrets correspondant à des cas de propagation dans l'atmosphère. Lorsque les petites échelles de l'atmosphère ne sont pas modélisées, l'atmosphère apparaît comme un milieu de propagation lentement va-

riable en fonction de la latitude et de la longitude. Dans ces conditions, le nombre de rayons propres est faible et discret. La méthode de recherche de rayons propres peut alors être appliquée.

La méthode de recherche des rayons propres est illustrée en détails dans l'article de Gainville & al. [72] pour le cas de la propagation des infrasons émis par une source ponctuelle dans une atmosphère invariante par translation. La taille des inhomogénéités est de l'ordre de quelques kilomètres suivant l'altitude, et la distance entre la source et le récepteur est de 390 km. La méthode permet de trouver automatiquement les phases thermosphériques  $It_a$  et  $It_b$ . Dans ces conditions, la méthode est efficace bien que la sensibilité de la trajectoire des phases thermosphériques  $It_b$  aux conditions initiales rende l'optimisation des rayons délicate.

La figure (3.3) illustre la recherche des rayons propres dans le cas d'une source supersonique. Ce problème de propagation est à trois dimensions et les rayons propres ne sont *a priori* pas évitant. Cependant, le calcul de la distance  $d^2(\tau, \psi)$  entre les rayons et le récepteur fait apparaître clairement des minima. Numériquement, ces minima sont déterminés par interpolation bilinéaire des dérivées de  $d^2(\tau, \psi)$  comme indiqué précédemment. L'optimisation permet d'éliminer les caustiques pour ne garder que les rayons propres.

## 3.2 Intégration de l'équation de Burgers généralisée

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équation de Burgers généralisée (2.51). Nous avons montré dans le chapitre précédent que cette équation modélise l'évolution de la forme d'onde le long des rayons.

L'équation de Burgers (non généralisée) à une dimension est généralement écrite sous la forme [51, 199, 122] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Cette équation est fondamentale en mécanique des fluides. Elle décrit de manière simple le comportement non linéaire des équations de Navier-Stokes [199]. Cette équation traduit une compétition entre la convection non linéaire (membre de droite) et la diffusion (membre de gauche). Lorsque les effets non linéaires dominent ( $\nu \rightarrow 0$ ), cette équation est de nature hyperbolique tandis que le terme de diffusion lui donne une nature parabolique. L'équation de Burgers est une première étape naturelle lors du développement de schémas numériques pour la mécanique des fluides. Elle permet de s'assurer du bon comportement du schéma numérique. Un grand nombre de méthodes numériques, partiellement énumérées par Wei & Gu [196], ont été développées pour résoudre l'équation de Burgers en vue d'autres applications. Ces méthodes sont aussi bien des méthodes aux différences finies, des méthodes spectrales, des méthodes de flux, des méthodes aux éléments finis, des méthodes à capture de chocs, . . . En dépit de toutes ces méthodes, la résolution numérique de l'équation de Burgers reste un problème délicat en particulier lorsque les effets dissipatifs sont faibles et que l'advection non linéaire forme des chocs. L'équation de Burgers possède des solutions analytiques [18] généralement obtenues à l'aide de la transformation de Cole–Hopf [51]. Ces solutions permettent de valider les méthodes numériques de résolution de cette équation.

L'équation de Burgers modélise en acoustique l'évolution non linéaire de la forme d'onde en présence d'effets dissipatifs (viscosité de cisaillement et de volume, diffusions thermique et moléculaire). Cette équation doit être généralisée sous la forme (2.51) afin d'inclure les mécanismes de relaxation et les effets géométriques. Hamilton & Blackstock [88] présentent différentes méthodes numériques utilisées en acoustique permettant de résoudre l'équation de Burgers généralisée. Les méthodes sont généralement basées sur un splitting d'opérateur [50, 130]. L'advection non linéaire est alors réalisée avec une méthode de Lagrange projeté [91, 50, 55] ou une méthode de flux [135, 130]. La partie dissipative est résolue dans le domaine fréquentiel

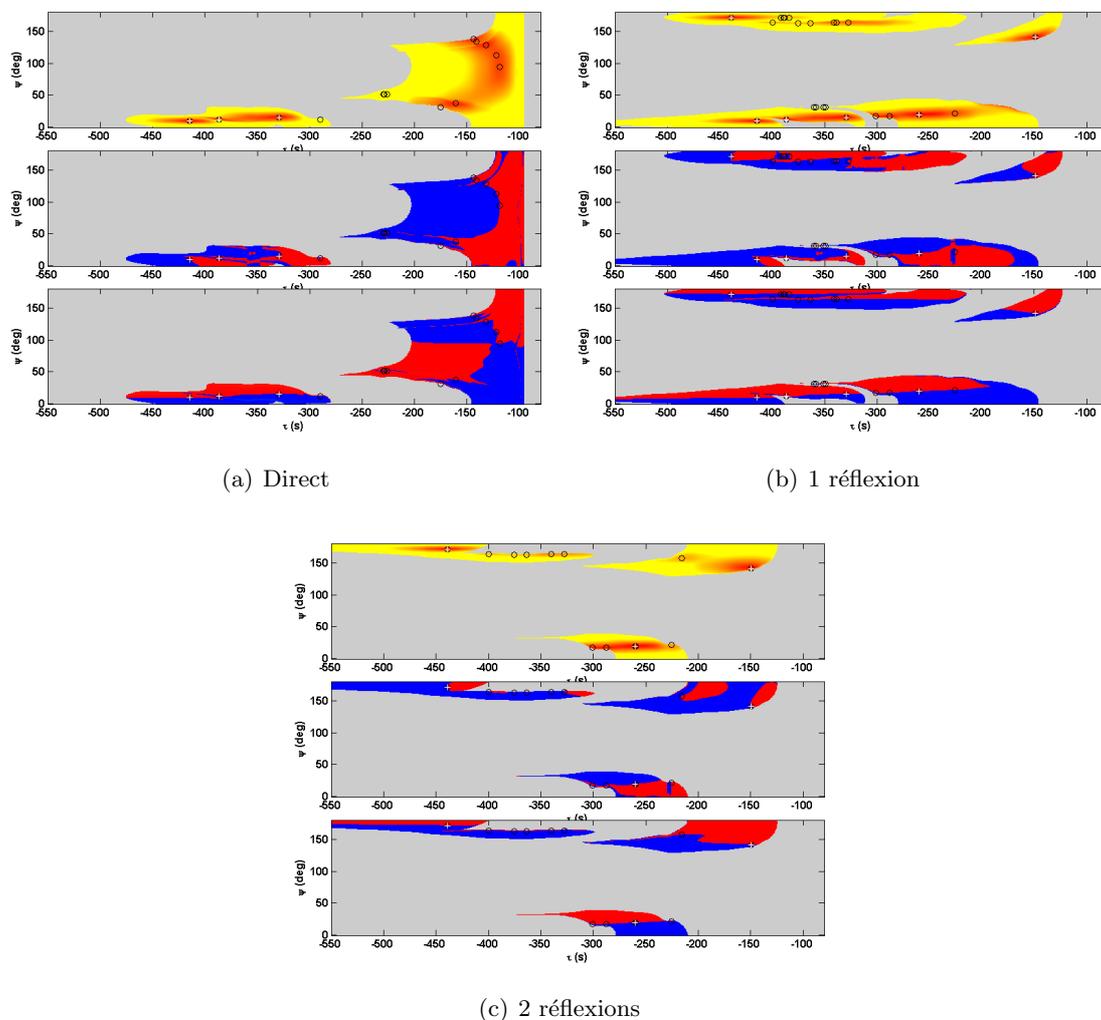


FIGURE 3.3 – Distance minimale entre les rayons émis à partir d’une source supersonique pour des temps d’émission  $\tau$  compris entre -550 et -100 s et des angles d’émission  $\psi$  entre 0 et  $180^\circ$ . Le problème est celui de la détermination à la station de Flers des rayons émis par le Concorde (cf. chap.5). Le premier graphique correspond à la partie des rayons directe, le second à la partie après une réflexion et le troisième à la partie après deux réflexions. En haut est indiquée la distance entre le rayon et le récepteur  $d$ , et en dessous le signe des dérivées approchées  $\frac{\partial d^2}{\partial \tau}$  et  $\frac{\partial d^2}{\partial \psi}$  (négatif en bleu et positif en rouge). Les cercles noirs indiquent les rayons propres déterminés et les croix blanches les rayons propres optimisés.

ou directement en différences finies avec un schéma implicite tel que le schéma de Crank-Nicholson [50]. L'équation de Burgers peut également être résolue en utilisant une méthode explicite aux différences finies [36] ou encore des méthodes spectrales. Canuto & al. [41] montrent sur des exemples, notamment la résolution de l'équation de Burgers, que les méthodes spectrales sont plus précises.

Dans les sections suivantes, nous montrons d'abord que la méthode pseudo-spectrale Fourier Galerkin est adaptée à la résolution de l'équation de Burgers généralisée. Cette méthode est ensuite présentée ainsi que le schéma d'intégration temporel associé et des développements spécifiques permettant d'optimiser les calculs. Le passage des caustiques nécessite également une attention particulière, à la fois en ce qui concerne le calcul de la transformée de Hilbert et en ce qui concerne l'intégration de l'équation de Burgers à son voisinage. Les performances de la méthode seront finalement discutées.

### 3.2.1 Analyse de l'équation de Burgers généralisée

Dans cette section, nous étudions l'équation de Burgers généralisée ainsi que la variation de ses coefficients pour nos cas d'application. Cette étude renforcée d'une comparaison de différents schémas numériques permet de sélectionner le plus approprié.

L'équation de Burgers généralisée modélisant l'évolution de la forme d'onde le long des rayons est l'équation (2.51) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - BKu \frac{\partial u}{\partial \xi} + K \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{+\infty} \sum_{\alpha} \frac{(\Delta c)_{\alpha}}{\tau_{\alpha} c_0} e^{-\frac{Y}{\tau_{\alpha} c_0}} u(\xi + KY, t) dY,$$

dans laquelle les coefficients  $K$ ,  $\delta$ ,  $B$ ,  $(\Delta c)_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$  et  $c_0$  sont des fonctions de  $t$ . Dans cette section, nous analysons cette équation et le comportement de ses coefficients afin de déterminer un schéma numérique approprié à sa résolution.

#### Grandeurs caractéristiques

Quelques grandeurs caractéristiques de l'équation de Burgers généralisée permettent d'analyser l'évolution de la forme d'onde et de déterminer les phénomènes physiques prépondérants.

Deux grandeurs adimensionnelles sont généralement définies pour une condition initiale correspondant à une onde sinusoïdale de période  $\Xi_0$  et d'amplitude  $u_0$ . La première grandeur caractéristique de l'équation de Burgers est le temps de formation du choc en absence d'absorption :

$$t_{\text{choc}} = \frac{\Xi_0}{BK u_0}.$$

Au bout du temps  $t_{\text{choc}}/4$ , un signal sinusoïdal sera transformé en un choc [157]. Rappelons que la période de l'onde  $\Xi_0$  est reliée à la fréquence physique de l'onde  $f_0$  par la relation :  $\Xi_0 = \vec{K} \cdot \vec{c}_g / f_0$ . Dans l'équation de Burgers standard, deux termes sont en compétition, à savoir les non linéarités et la dissipation. L'importance relative de chaque mécanisme est décrite par le nombre de Gol'dberg :

$$\nu_G = \frac{B u_0 \Xi_0}{\delta K}.$$

Le nombre de Gol'dberg est l'inverse d'un nombre de Reynolds défini à partir des conditions initiales de l'onde. Le temps de formation du choc et le nombre de Gol'dberg sont généralement utilisés afin d'adimensionnaliser le problème de Cauchy défini par l'équation de Burgers et l'onde sinusoïdale de période  $\Xi_0$  et d'amplitude  $u_0$  (ex. [50]). Ces deux nombres adimensionnels peuvent être définis de manière équivalente pour d'autres conditions initiales.

Lorsque les ondes ne sont pas planes, le coefficient non linéaire et le coefficient de dissipation évoluent au cours de la propagation. Une concurrence existe alors entre la décroissance géométrique de l'onde, les effets non linéaires et la dissipation. Le temps de formation du choc est remplacé par la *variable d'âge* [91, 56, 157]. Dans le cas général, l'équation de Burgers ne peut plus être adimensionnée. Pour des décroissances cylindrique, conique ou sphérique, l'équation de Burgers adimensionnée existe mais le nombre de Gol'dberg dépend de  $t$  et un nouveau paramètre  $R_0$  apparaît [56, 177]. Ce paramètre est relié à la distance d'initialisation de l'onde et exprime la décroissance géométrique de l'onde. Lorsque  $R_0$  est grand, le problème se rapporte à celui de l'onde plane. Scott [177] étudie en fonction du nombre de Gol'dberg et de  $R_0$  le comportement asymptotique de l'onde à grande distance pour une décroissance sphérique et une décroissance cylindrique. Différentes régions de prédominance des effets non linéaires, de l'absorption ou de la divergence géométrique se dessinent.

L'équation de Burgers généralisée (2.51) tient également compte des mécanismes de relaxation moléculaire. Ces mécanismes sont dissipatifs et dispersifs. Le coefficient d'atténuation complexe (2.60) fait apparaître séparément les deux effets. Le coefficient  $\sum_{\alpha}(\Delta c)_{\alpha}$  est un indicateur de l'importance de la dispersion. La prise en compte des équations de relaxation pause généralement des problèmes de stabilité dans les schémas numériques explicites [12].

### Ordre de grandeur des coefficients de l'équation de Burgers

L'évolution des coefficients de l'équation de Burgers généralisée dépend des inhomogénéités du milieu et des effets géométriques de convergence et de divergence du front d'onde. Principalement deux mécanismes sont en compétition à savoir les effets non linéaires et l'absorption. L'objet de cette section est d'évaluer les conditions de prédominance de chacun de ces mécanismes.

Les coefficients des différents mécanismes d'absorption dépendent essentiellement de l'altitude comme nous l'avons présenté au paragraphe 1.2.4. Ainsi, l'importance de l'absorption est fonction de l'altitude et de la fréquence de l'onde. La norme du vecteur d'onde local  $K$  reste de l'ordre de grandeur de l'inverse de la vitesse du son  $c_0$ . Ces deux variables interviennent peu dans la résolution de l'équation de Burgers.

Par contre, le coefficient de non linéarité  $B$  évolue fortement au cours de la propagation. La figure (3.4) montre des variations entre  $10^{-7}$  et  $10^{-1}$ . Ces variations sont la combinaison de deux effets. D'abord,  $B$  est inversement proportionnel à la racine carré de la masse volumique qui évolue exponentiellement en fonction de l'altitude (cf. section 1.2.3). Les effets non linéaires sont ainsi beaucoup plus importants en haute altitude qu'au niveau du sol. De plus, il est inversement proportionnel à la racine carré du volume convecté. La convergence et la divergence des ondes vont augmenter et respectivement diminuer les effets non linéaires. Les caustiques apparaissent comme des points de singularité pour le coefficient de non linéarité  $B$ . Celui-ci tend logarithmiquement vers l'infini au voisinage des caustiques ce qui crée des pics de non linéarité. Bien que les caustiques soient des singularités de l'acoustique géométrique, ces effets non linéaires apparaissent dans nos développements asymptotiques et nous devons mettre en œuvre les méthodes numériques permettant de les traiter correctement.

Lors de la propagation des ondes dans l'atmosphère les signaux peuvent aussi bien présenter des chocs qu'être relativement lisses. Les chocs sont observés essentiellement au voisinage de la source et des caustiques ou pour les phases de la basse atmosphère (troposphériques ou stratosphériques). En raison de la forte absorption dans la haute atmosphère, les phases thermosphériques sont essentiellement constituées de fréquences regroupées autour d'une fréquence centrale. Ces deux types de forme d'onde correspondent à la prédominance des effets non linéaires ou des effets d'absorption. Le schéma numérique doit être suffisamment précis pour résoudre ces deux types de problèmes.

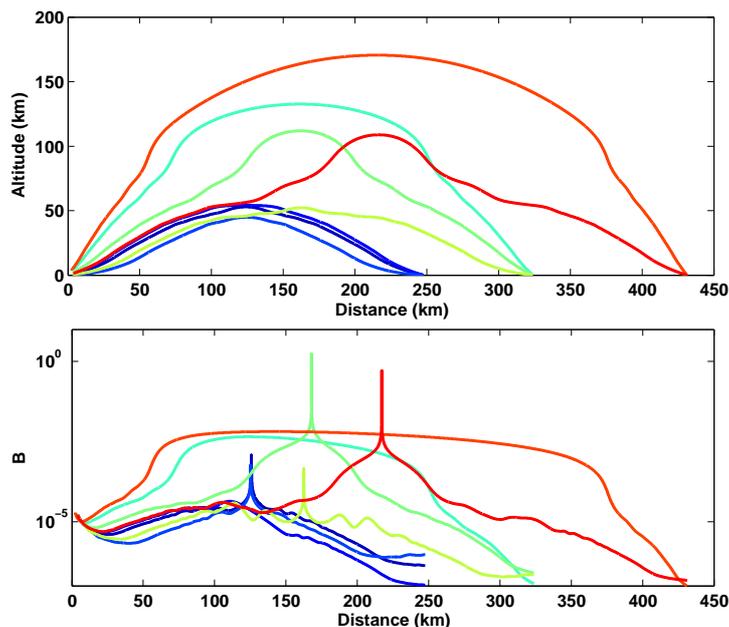


FIGURE 3.4 – Évolution du coefficient de non linéarité de l'équation de Burgers  $B$  le long de rayons. Les pics du coefficient correspondent aux passages des caustiques.

### Méthode de résolution choisie

La résolution de l'équation de Burgers généralisées est soumise à plusieurs contraintes. (1) La méthode numérique doit résoudre les termes liés aux mécanismes de relaxation moléculaire. (2) Le schéma doit supporter les chocs faibles. (3) Le schéma doit être suffisamment conservatif et non dispersif pour pouvoir effectuer des calculs à très grandes distances sur des milliers de kilomètres. (4) La méthode numérique doit également permettre de traiter la singularité logarithmique du coefficient de non linéarité au passage des caustiques. (5) Enfin, les coûts de calcul doivent rester raisonnables.

Les schémas pouvant être utilisés sont soit des schémas rapides et stables, soit des schémas explicites d'ordre élevé permettant de réduire le nombre de points par longueur d'onde. Les méthodes généralement utilisées et testées sont présentées ci-dessous.

- La méthode utilisée par Cleveland & al. [50] est basée sur un splitting d'opérateur entre l'advection non linéaire et la partie diffusion et relaxation moléculaire. L'advection non linéaire est réalisée par une phase de Lagrange projeté. La projection est obtenue par interpolation linéaire. La partie linéaire est résolue à l'aide d'un schéma aux différences finies centré d'ordre deux et du schéma temporel Crank-Nicolson. Cette méthode proposée initialement par Lee & Hamilton [120] permet de résoudre les équations de relaxation moléculaire dans le domaine temporel. Le pas d'intégration est limité par l'advection non linéaire. Cleveland & al. notent cependant que la matrice obtenue par la méthode de Crank-Nicolson pour les mécanismes de relaxation moléculaire peut être mal conditionnée. Coulouvrat & Marchiano [54, 130] utilisent la même méthode mais en utilisant comme variable le potentiel acoustique au lieu de la pression. Le pas d'intégration de la phase de Lagrange projeté n'est alors plus limité.
- Auger [7] et Dallois & al. [59, 28] résolvent également dans le domaine temporel l'équation de Burgers généralisée avec un splitting d'opérateur. La partie linéaire est résolue comme précédemment par la méthode de Crank-Nicolson. L'advection non linéaire est résolue à l'aide d'une méthode de Flux proposée par McDonald & Ambrosiano [135].
- Bogey & Bailly [36] proposent un schéma aux différences finies d'ordre élevé (11pts).

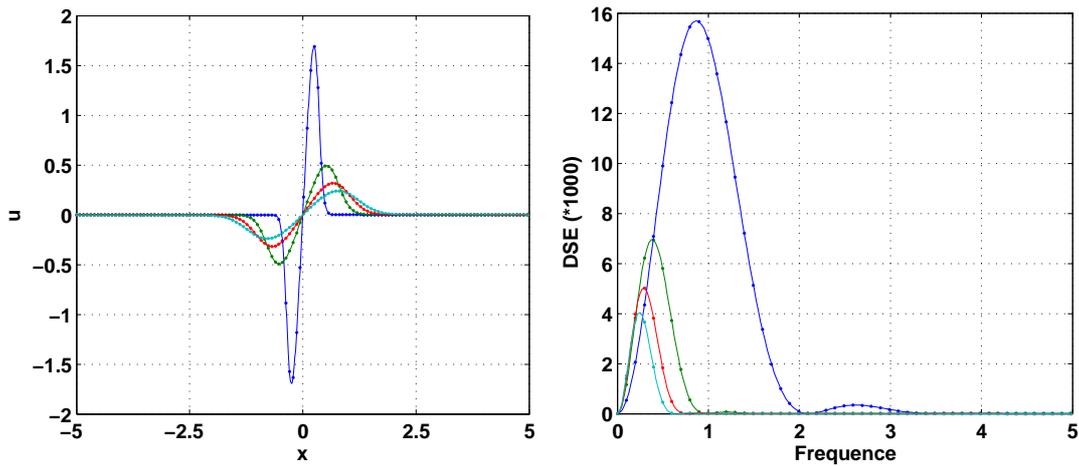


FIGURE 3.5 – Solution auto-similaire de l'équation de Burgers proposée par Benton & Platzman [18]. Les paramètres sont  $L = 1$  et  $\nu = 0.1$ . Les courbes (a) et les spectres (b) sont représentés aux temps 0,1 0,6 1,1 et 1,6. Les points correspondent à la solution numérique obtenue avec la méthode spectrale Fourier-Galerkin pour  $N=128$  points.

L'intégration est réalisée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta optimisé [20] avec une contrainte CFL proche de 1. La prise en compte récente des mécanismes de relaxation moléculaire avec ce type de schéma [11] permet d'envisager leur utilisation. Cependant, nous ne les utilisons ici qu'à titre de comparaison.

- Canuto & al. [41] et Scott & al. [176] proposent d'utiliser la méthode spectrale Fourier-Galerkin. Cette méthode présente l'avantage de résoudre analytiquement la partie absorption et dispersion linéaire. L'advection non linéaire est une convolution réalisée à l'aide de deux transformées de Fourier. Canuto & al. utilisent pour l'intégration une méthode de Runge-Kutta tandis que Scott & al. utilisent un schéma d'ordre deux en temps. Cette méthode est la méthode retenue et sera développée plus en détails dans les sections suivantes.

Nous ne traitons pas les méthodes mixtes effectuant la partie linéaire dans le domaine fréquentielle et la partie non linéaire dans le domaine temporel puisqu'elles sont au moins aussi coûteuses en temps de calcul que la méthode spectrale et moins performantes.

Afin de déterminer la méthode la plus performante pour résoudre l'équation de Burgers généralisée, nous allons comparer les quatre méthodes précédentes. La comparaison des schémas numériques est effectuée pour la résolution de l'équation de Burgers standard sans les termes de relaxation moléculaire. La transformation de Cole-Hopf [51] permet de trouver des solutions analytiques à l'équation de Burgers pour certaines conditions initiales. Nous utilisons une solution auto-similaire proposée par Benton & Platzman [18] :

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tilde{x}/\tilde{t}}{1 + \sqrt{\tilde{t}}e^{\tilde{x}^2/4\tilde{t}}}, \quad (3.5)$$

avec les variables normalisées  $\tilde{x} = x/L$ ,  $\tilde{t} = \nu t/L^2$  et  $\tilde{u} = uL/\nu$ . Le coefficient de viscosité de l'équation de Burgers (3.4)  $\nu$  et la distance de normalisation  $L$  sont les deux variables indépendantes du problème. La solution (3.5) est définie pour  $t > 0$  et l'expression est singulière en  $t = 0$ . La figure (3.5) représente cette solution auto-similaire pour  $L = 1$  et  $\nu = 0,1$ . Ces paramètres sont gardés pour la comparaison des schémas. Lors des calculs numériques, le signal est initialisé à  $t = 0,1$  et la comparaison est effectuée au temps  $t = 1,6$ . La fenêtre en  $x$  est limitée à l'intervalle  $[-5, 5]$  en dehors duquel la valeur absolue de  $u(x, t)$  est inférieure à  $10^{-16}$

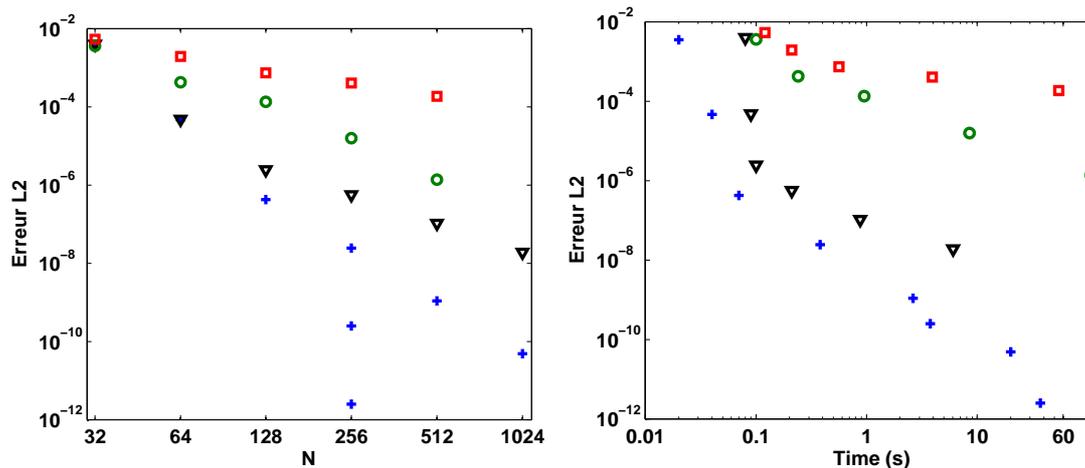


FIGURE 3.6 – Comparaison des performances des schémas numériques :  $\square$  Cleveland & al. [50];  $\circ$  Auger [7] et Dallois & al. [59, 28];  $\nabla$  Bogey & Bailly [36];  $+$  Scott & al. [176]. (a) Erreur estimée par la norme  $\mathcal{L}_2$  [41] en fonction du nombre de point du maillage. (b) Erreur en fonction d'une estimation du temps de calcul CPU.

pour  $t < 1,6$ . La fréquence principale du signal initial et l'amplitude maximale sont d'environ 1. Le nombre de Gol'dberg associé est alors de 10 et la distance de choc de 1. L'advection non linéaire est du même ordre d'importance que l'absorption linéaire. Cette coexistence des effets s'observe sur la figure (3.5). Le spectre est globalement décalé vers les basses fréquences et les hautes fréquences sont absorbées.

Les différents schémas sont implémentés conformément aux articles qui les présentent. Par contre, le pas d'intégration est pris constant au cours de l'intégration. Il est optimisé pour obtenir le meilleur résultat pour un nombre de points donné. Cet optimal ne nuit pas au temps de calcul. L'amplitude du signal étant très faible aux limites du domaine, celles-ci n'ont pas d'influence sur le résultat et l'erreur de troncature est négligeable. Cet aspect est d'autant plus important que la méthode spectrale de Fourier Galerkin peut être utilisée pour des signaux non périodiques uniquement si ceux-ci présentent une zone tampon au bord du domaine où l'amplitude est nulle. Il en résulte cependant que ce cas test est avantageux pour la méthode spectrale. La zone tampon nulle peut être enlevée pour les autres méthodes ce qui réduirait le nombre de points et les temps de calcul.

La figure (3.6) présente les performances des différents schémas obtenues avec la solution auto similaire précédente. Le pas d'intégration, constant en fonction du temps, est défini par une condition CFL sur l'advection non linéaire et au niveau de la condition initiale. Cette condition CFL est la même (0,1) pour l'ensemble des schémas et quel que soit le nombre de points  $N$ . Pour la méthode spectrale, il est possible en diminuant la condition CFL de diminuer l'erreur d'intégration (cf.  $N = 256$ , figure (3.6)) jusqu'à une limite. Cependant, les coûts de calcul augmentent également et la détermination de la condition CFL optimale dépend du problème. Ainsi, dans la pratique, nous travaillons à CFL constant.

L'étude de la figure (3.6) montre clairement que la méthode spectrale Fourier-Galerkin a une erreur plus faible pour un nombre de points  $N$  donné et que son temps de calcul est généralement plus faible que celui des autres méthodes. La méthode spectrale Fourier-Galerkin présente également l'avantage de pouvoir modéliser très facilement les effets de relaxation moléculaire. Ainsi, nous retiendrons cette méthode pour l'intégration de l'équation de Burgers généralisée.

### 3.2.2 Méthode spectrale Fourier Galerkin

Nous référons le lecteur au livre de Canuto & al. [41] pour une présentation approfondie des méthodes spectrales et en particulier de la méthode spectrale Fourier Galerkin. Nous reprenons uniquement les bases nécessaires à la résolution de l'équation de Burgers généralisée. Un schéma temporel d'intégration et une méthode permettant de stabiliser l'intégration sont également présentés. Dans le paragraphe suivant nous ajouterons des développements spécifiques à notre problème afin d'optimiser les calculs en précision et en coûts.

Les méthodes spectrales se distinguent par leur type de projection et la base de projection. Dans notre cas, la base de projection est la base des polynômes trigonométriques (Fourier) et la méthode de projection correspond à une troncature de cette base à un nombre fini de polynômes (Galerkin). La base de Fourier est particulièrement bien adaptée aux problèmes périodiques. Elle peut cependant être utilisée dans certains cas pour des fonctions non périodiques. Les méthodes spectrales ont l'avantage d'être d'ordre élevé. Elle sont donc faiblement dissipatives et faiblement dispersives. Cependant, elles génèrent des erreurs lors de l'intégration numérique au niveau de la troncature. Ces erreurs appelées *aliasing* sont de deux sortes. L'une est le repliement du spectre à la troncature (cf. sous section *Filtrage et aliasing*, page 87) l'autre apparaît lors de la convolution et peut éventuellement être éliminée (cf. sous section *Convolution et aliasing*, page 85). Lorsque ce dernier type d'erreur n'est pas éliminé par une méthode de déaliasing, on parle alors de méthode pseudo-spectrale. Notons également que la troncature du spectre entraîne des oscillations parasites du signal appelée phénomène de Gibbs [41]. Ce phénomène n'est pas une erreur d'intégration mais un artefact lié à la projection sur la base de Fourier.

Afin de simplifier les notations, nous présentons, dans cette section, la méthode spectrale Fourier Galerkin appliquée à la résolution de l'équation de Burgers (2.51) sans les termes de relaxation moléculaire. L'utilisation de la base de Fourier permet de prendre en compte facilement ces termes en utilisant l'expression (2.58) de  $\Gamma$ .

#### Base de Fourier continue

La base de Fourier continue est la base des polynômes trigonométriques définis sur l'intervalle  $[0, \Xi]$  :

$$\phi_n(\xi) = e^{2\pi n \xi / \Xi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

Afin de rechercher une expression exacte de la fonction  $u(\xi, t)$  projetée sur cette base, il est nécessaire de faire l'hypothèse que cette fonction est périodique de période  $\Xi$ . Les conditions limites aux extrémités de l'intervalle représentant la fonction sont des conditions de périodicité. Cette hypothèse n'est pas restrictive pour nos applications à condition de s'affranchir d'éventuels effets dûs aux conditions limites en prenant de chaque côté du signal une zone tampon nulle suffisamment grande. Les signaux acoustiques se propageant dans l'atmosphère n'ont pas une durée infinie. Il existe toujours une distance des deux côtés du signal au delà de laquelle l'amplitude est nulle.

La fonction  $u(\xi, t)$  de période  $\Xi$  peut être exprimée sous la forme de la série de Fourier :

$$u(\xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \check{u}_n(t) \phi_n(\xi), \quad (3.7)$$

où les coefficients de Fourier  $\check{u}_n(t)$  vérifient la relation :

$$\check{u}_n(t) = \frac{1}{\Xi} \int_0^{\Xi} u(\xi, t) e^{-2\pi n \xi / \Xi} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.8)$$

### Fourier Galerkin

Dans la méthode spectrale Fourier Galerkin, la fonction  $u(\xi, t)$  solution de l'équation de Burgers (2.51) est approchée par la série de Fourier tronquée  $u^N(\xi, t)$  définie par :

$$u^N(\xi, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_n(t) \phi_n(\xi) , . \quad (3.9)$$

Les coefficients  $\tilde{u}_n(t)$  vérifient un système d'équations différentielles du premier ordre et sont initialisés au temps d'émission  $t_s$  à partir du signal  $u(\xi, t_s)$ . Le système d'équations différentielles est obtenu en utilisant la formulation faible de l'équation de Burgers (2.51) pour la fonction  $u^N(\xi, t)$  [41] :

$$\frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} - \delta K^2 \frac{\partial^2 u^N}{\partial \xi^2} + K \frac{B}{2} \frac{\partial (u^N)^2}{\partial \xi} \right) \phi_n(\xi) d\xi = 0 , \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 , \quad (3.10)$$

où les fonctions  $\phi_n = e^{-2\pi n \xi / \Xi}$  sont les polynômes trigonométriques. De ces équations on déduit un système d'équations différentielles pour les coefficients de Fourier  $\tilde{u}_n$  pour lequel chaque équation a une forme analogue à l'équation (2.57) :

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} = \Gamma(Kq_n, t) \tilde{u}_n - i \frac{B(t)}{2} K q_n \widetilde{(u^2)}_n , \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 , \quad (3.11)$$

où  $q_n = 2\pi n / \Xi$ .

Les termes  $\widetilde{(u^2)}_n$  correspondent aux coefficients de Fourier de  $(u^N)^2$ . Ces termes sont calculés en effectuant l'auto-convolution des  $\tilde{u}_n$  :

$$\widetilde{(u^2)}_n = \sum_{l+k=n} \tilde{u}_l \tilde{u}_k \quad (3.12)$$

Les conditions initiales au temps  $t_s$  du système d'équations différentielles (3.11) sont obtenues à partir de  $u(\xi, t_s)$  par l'équation (3.8) en prenant  $\check{u}_n = \tilde{u}_n$  pour  $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ . Notons que les coefficients  $\tilde{u}_n$  ne sont pas égaux aux coefficients  $\check{u}_n$  de la sous section précédente. Ces derniers représentent la solution exacte du problème tandis que les coefficients  $\tilde{u}_n$  forment la solution numérique du problème associée à la fonction approchée  $u^N$ . Ces coefficients ne sont égaux qu'au temps initial  $t_s$ .

### Base de Fourier Discrète

Dans la pratique, la fonction initiale  $u(\xi, t_s)$ , où  $t_s$  est le temps initial d'intégration, n'est pas toujours connue de manière analytique. Elle est supposée connue en  $N$  points tel que :

$$\xi_j = \frac{j\Xi}{N} , \quad j = 0, \dots, N - 1 . \quad (3.13)$$

Les coefficients de Fourier de la fonction discrétisée en ces points sont calculés suivant la relation :

$$\tilde{u}_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(\xi_j, t) e^{-i2\pi n \xi_j / \Xi} , \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 . \quad (3.14)$$

Les fonctions trigonométriques (3.6) étant orthogonales, la relation inverse existe :

$$u(\xi_j, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_n(t) \phi_n(\xi), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.15)$$

Ainsi, les coefficients  $\tilde{u}_n$  ne dépendent que des  $N$  valeurs de  $u$  aux points définis par (3.13). La transformée de Fourier discrète (DFT) définie par l'équation (3.14) et son inverse (3.15) permettent d'établir une bijection entre les  $N$  complexes  $u(\xi_j)$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , et les  $N$  complexes  $\tilde{u}_n$ ,  $n = -N/2, \dots, N/2-1$ . La DFT la plus efficace est la transformée de Fourier rapide (FFT) dont le coût est de  $5N \log_2 N$  [41]. La FFT nécessite que  $N$  soit une puissance de 2.

Il est également important de noter que l'intervalle  $[0, \Xi]$  peut être remplacé dans l'ensemble de ces équations par l'intervalle  $[\xi_0, \xi_0 + \Xi]$  où  $\xi_0$  référence le début du signal.

### Schémas temporels

Le terme d'advection non-linéaire de l'équation (3.11) est classiquement résolu par un schéma explicite alors que le terme linéaire est plus généralement traité par un schéma implicite [41].

Le schéma proposé par Scott & al. [176] est un schéma d'ordre 2 à deux étapes :

$$\tilde{u}_n^{m+1/2} = \frac{\tilde{u}_n^m}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \Gamma_n} - \frac{1}{2} \imath \Delta t \frac{B}{2} K q_n (\widetilde{u^2})_n^m, \quad (3.16)$$

$$\tilde{u}_n^{m+1} = \frac{\tilde{u}_n^m}{1 - \Delta t \Gamma_n + \frac{1}{2} (\Delta t \Gamma_n)^2} - \imath \Delta t \frac{B}{2} K q_n \frac{(\widetilde{u^2})_n^{m+1/2}}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \Gamma_n}, \quad (3.17)$$

où  $\Gamma_n = \Gamma(Kq_n, t)$ ,  $B$ ,  $K$  et  $q_n$  sont évalués au temps  $t_m + \frac{\Delta t}{2}$ . La première partie (3.16) est une approximation en  $O(\Delta t)$  et la deuxième partie (3.17) est en  $O((\Delta t)^2)$ . L'intégration du terme d'advection non-linéaire est explicite et centrée au temps  $t_m + \frac{\Delta t}{2}$ . La partie linéaire est quant à elle intégrée par un schéma implicite décentré (backward). Étant donné que les parties réelles de  $\Gamma_n$  sont négatives, les normes des coefficients de  $\tilde{u}_n^m$  des équations (3.16) et (3.17) sont inférieures à 1. Ainsi, les termes pour lesquels  $\Delta t \Gamma_n$  sont grands sont supprimés rapidement. Ce schéma atténue naturellement les hautes fréquences qui ne sont pas correctement résolues. Nous verrons plus loin qu'en plus de ce filtrage naturel du schéma, il est nécessaire d'introduire de la viscosité additionnelle afin de stabiliser la résolution (*i.e.* éliminer l'aliasing due à la réflexion de troncature).

Ce schéma est, pour l'intégration du terme d'advection non linéaire, analogue à un schéma de Runge & Kutta d'ordre 2 avec un stockage plus faible. Cependant, comme nous allons le montrer dans la section 3.2.2, le schéma de Runge & Kutta d'ordre 2 permet de réduire l'aliasing dû au calcul du terme non linéaire en  $O(\Delta t^2)$  sans augmenter le coût de calcul. En utilisant le schéma implicite décentré précédent pour la partie linéaire et un schéma de Runge & Kutta d'ordre 2 pour la partie non linéaire, on obtient :

$$\tilde{v}_n^{m+1} = \frac{\tilde{u}_n^m}{1 - \Delta t \Gamma_n} - \imath \Delta t \frac{B}{2} K q_n (\widetilde{u^2})_n^m, \quad (3.18)$$

$$\tilde{u}_n^{m+1} = \frac{\tilde{u}_n^m}{1 - \Delta t \Gamma_n + \frac{1}{2} (\Delta t \Gamma_n)^2} - \imath \Delta t \frac{B}{2} K q_n \frac{1}{2} \frac{(\widetilde{u^2})_n^m + (\widetilde{v^2})_n^{m+1}}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \Gamma_n}. \quad (3.19)$$

Les termes d'advection non linéaire  $(\widetilde{u^2})_n^{m+1/2}$  et  $\frac{1}{2} \left( (\widetilde{u^2})_n^m + (\widetilde{v^2})_n^{m+1} \right)$ , respectivement du

premier schéma et du second schéma, sont identiques en  $O(\Delta t)$ . Ainsi les deux schémas sont identiques en  $O(\Delta t^2)$ .

### Convolution et aliasing

Le calcul des termes  $(\widetilde{u^2})_n$  de l'équation (3.12) nécessite une attention particulière. L'évaluation de ces termes est l'étape la plus coûteuse de l'intégration de l'équation de Burgers avec la méthode spectrale Fourier Galerkin.

Les termes  $(\widetilde{u^2})_n$  sont obtenus en effectuant l'auto-convolution des termes  $\tilde{u}_n$ . Le calcul direct de cette convolution à l'aide de l'équation (3.12) est très coûteux, en  $O(N^2)$ . La méthode la plus rapide est l'utilisation de la Transformée de Fourier rapide en  $O(N \log_2(N))$  en revenant dans l'espace physique. Cependant, la troncature du spectre à  $N$  fréquences entraîne une erreur lors du calcul de la convolution qui affecte toutes les fréquences. Cette erreur numérique est une forme d'aliasing qu'il peut être utile d'éliminer.

Afin d'illustrer cette erreur, nous nous intéressons à la convolution des coefficients spectraux  $\tilde{u}_n$  et  $\tilde{v}_n$ . Le spectre  $\hat{s}_n$  obtenu en effectuant successivement les deux transformées de Fourier inverses de  $\tilde{u}_n$  et de  $\tilde{v}_n$ , le produit  $s = uv$  et enfin la transformée de Fourier de  $s$ , vérifie [41] :

$$\hat{s}_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ |k|, |l| \leq N/2}} \tilde{u}_k \tilde{v}_l + \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k \tilde{v}_l = \tilde{s}_n + \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k \tilde{v}_l, \quad (3.20)$$

pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ . Le terme  $\tilde{s}_n = (\widetilde{uv})_n$  est la vraie (spectrale) convolution de  $\tilde{u}_n$  par  $\tilde{v}_n$ . Le deuxième terme de droite apparaît donc comme l'erreur de convolution. Différentes méthodes permettent de s'affranchir totalement de cette erreur, comme la règle des 2/3 et la méthode du déphasage [41]. Cependant, ces méthodes ont un coût numérique équivalent à prendre  $3N/2$  points pour la première et double pour la seconde. Dans la pratique, il est plus avantageux d'augmenter le nombre de points  $N$  que d'utiliser une de ces méthodes afin de s'affranchir de cet aliasing.

Rogallo [171] propose d'adapter la méthode de déaliasing par déphasage afin de réduire en  $O(\Delta t^2)$  l'erreur d'aliasing. Cette méthode nécessite l'utilisation du schéma d'intégration fournie par les équations (3.18) et (3.19).

La méthode du déphasage consiste à déphaser de  $\Delta$  les signaux avant la convolution et de déphaser le signal convolué de  $-\Delta$ . Ce double déphasage revient à effectuer le calcul de la convolution sur une grille de l'espace physique décalée de  $\frac{\Xi}{2\pi}\Delta$ . En notant :

$$\tilde{u}_n^\Delta = \tilde{u}_n e^{in\Delta} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_n^\Delta = \tilde{v}_n e^{in\Delta},$$

on obtient en utilisant la transformée de Fourier Rapide pour effectuer la convolution :

$$\hat{s}_n^\Delta = e^{-in\Delta} \sum_{\substack{k+l=n \\ |k|, |l| \leq N/2}} \tilde{u}_k^\Delta \tilde{v}_l^\Delta + e^{-in\Delta} \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k^\Delta \tilde{v}_l^\Delta = \tilde{s}_n + e^{\pm in\Delta} \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k \tilde{v}_l, \quad (3.21)$$

pour  $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .

Partant de la relation précédente, il est aisé de montrer que la convolution de  $\tilde{u}_n$  et  $\tilde{v}_n$ , notée  $\tilde{s}_n$ , peut être obtenue quelque soit  $\Delta$  par :

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{2} \left( \hat{s}_n^\Delta + \hat{s}_n^{\Delta + \frac{\pi}{N}} \right), \quad (3.22)$$

où les deux convolutions erronées  $\hat{s}_n^\Delta$  et  $\hat{s}_n^{\Delta+\frac{\pi}{N}}$  sont obtenues à l'aide de six FFTs au total. Elles sont choisies déphasées relativement de  $\pi/N$ , c'est à dire de la moitié d'un pas d'échantillonnage, afin d'éliminer le terme d'erreur. L'utilisation directe de cette méthode de déaliasing nécessite l'évaluation de deux convolutions (6 FFTs) ce qui est équivalent à doubler les coûts de calcul.

L'utilisation du schéma d'intégration défini par les équations (3.18) et (3.19) combiné avec la méthode de déaliasing par déphasage permet de réduire l'aliasing en  $O(\Delta t^2)$  sans augmenter de manière significative les coûts de calcul. Dans ce schéma temporel, les convolutions exactes  $(\widehat{u^2})_n^m$  et  $(\widehat{v^2})_n^{m+1}$  sont remplacés respectivement par :

$$(\widehat{u^2})_n^{m,\Delta} = (\widetilde{u^2})_n^m + e^{\pm i N \Delta} \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k^m \tilde{u}_l^m, \quad (3.23)$$

$$(\widehat{v^2})_n^{m+1,\Delta+\frac{\pi}{N}} = (\widetilde{v^2})_n^{m+1} + e^{\pm i(N\Delta+\pi)} \sum_{k+l=n \pm N} \hat{v}_k^{m+1} \hat{v}_l^{m+1}, \quad (3.24)$$

qui peuvent se calculer à l'aide de quatre FFTs au total. Dans la deuxième équation,  $\tilde{v}_n^{m+1}$  est remplacé par  $\hat{v}_n^{m+1}$  pour spécifier que la seconde étape de l'intégration (équation (3.18)) est calculée avec le terme non linéaire alié de l'équation (3.23).

Le développement du terme d'advection non linéaire de l'équation (3.19) calculé avec les convolutions erronées précédentes permet d'évaluer l'erreur d'aliasing. Le développement du terme  $(\widehat{v^2})_n^{m+1,\Delta+\frac{\pi}{N}}$  en  $O(\Delta t^2)$  en utilisant l'équation (3.18) est :

$$\begin{aligned} (\widehat{v^2})_n^{m+1,\Delta+\frac{\pi}{N}} &= (\widetilde{v^2})_n^{m+1} + \tilde{w}_n^m \\ &+ \Delta t \left( -2i \frac{B}{2} \sum_{k+l=n} K q_k \tilde{w}_k^m \tilde{v}_l^{m+1} - 2i \frac{B}{2} e^{\pm i(N\Delta+\pi)} \sum_{k+l=n \pm N} K q_k \tilde{w}_k^m \tilde{v}_l^{m+1} \right. \\ &\left. - 2i \frac{B}{2} e^{\pm i(N\Delta+\pi)} \sum_{k+l=n \pm N} K q_k \tilde{u}_k^m \tilde{u}_l^m + e^{\pm i(N\Delta+\pi)} \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k^m \tilde{u}_l^m (\Gamma_k + \Gamma_l) \right) + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (3.25)$$

en notant :

$$\tilde{w}_n^m = e^{\pm i(N\Delta+\pi)} \sum_{k+l=n \pm N} \tilde{u}_k^m \tilde{u}_l^m.$$

On obtient en utilisant la propriété de l'équation (3.22) :

$$(\widehat{u^2})_n^{m,\Delta} + (\widehat{v^2})_n^{m+1,\Delta+\frac{\pi}{N}} = (\widetilde{u^2})_n^m + (\widetilde{v^2})_n^{m+1} + O(\Delta t). \quad (3.26)$$

En injectant ce développement dans l'équation (3.19), on montre que l'erreur d'aliasing du schéma obtenu en combinant les équations (3.18), (3.19), (3.23) et (3.24) est en  $O(\Delta t^2)$ . Le coût de calcul est augmenté de  $4N$  multiplications par cycle par rapport au schéma défini par les équations (3.18) et (3.19) sans déaliasing. Rappelons que le stockage de ce schéma est plus élevé que celui du schéma défini par les équations (3.16) et (3.17). La valeur de  $\Delta$  peut être prise constante ou choisie de manière aléatoire. L'utilisation d'un déphasage  $\Delta$  aléatoire évite uniquement que l'erreur d'aliasing résiduelle soit cohérente entre les pas d'intégration [41, p.136].

Le développement (3.25) permet de majorer l'erreur par cycle due à l'aliasing :

$$|\hat{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^{m+1}| \leq \Delta t^2 N^4 \max \left( 3\pi^2 \frac{B^2 K^2}{\Xi^2} \max_{\xi} (|u(\xi, t_m)|)^3, 4\pi^3 \frac{B \delta K^3}{\Xi^3} \max_{\xi} (|u(\xi, t_m)|)^2 \right). \quad (3.27)$$

Pour conclure sur cette partie, il est nécessaire de signaler que le désaliasing est une méthode controversés dans la littérature. Il n'est jamais évident de montrer l'intérêt du désaliasing d'un point de vu pratique. Une méthode pseudo-spectrale (avec aliasing) donne souvent une solution aussi satisfaisante que la méthode spectrale Fourier Galerkin (sans aliasing).

### Filtrage et aliasing

Les méthodes spectrales ont l'avantage d'être non dispersives et non dissipatives. Cependant, en absence de dissipation la résolution de l'équation de Burgers est instable. Cette instabilité est liée à la conservation de l'énergie sur l'ensemble du spectre modélisé. Les harmoniques générées par les effets non linéaires qui doivent être au-dessus de la plus grande fréquence modélisée sont repliés sur la partie modélisée du spectre. Ce repliement est effectué symétriquement par rapport à la moitié de la fréquence d'échantillonnage du signal.

Afin de montrer la conservation de l'énergie sur l'ensemble du spectre modélisé par une méthode spectrale, étudions l'équation de Burgers sans dissipation sous sa forme la plus simple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} = 0. \quad (3.28)$$

L'approximation Fourier Galerkin de  $u(t, \xi)$ ,  $u^N(t)$  vérifie la formulation faible de l'équation de Burgers :

$$\left( \frac{\partial u^N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^N)^2}{\partial \xi}, v \right) = 0, \quad \forall v \in S_N, \quad (3.29)$$

où  $S_N$  est l'espace des polynômes trigonométriques d'ordre  $N/2$  et  $(,)$  est le produit scalaire associé  $(u, v) = \int_0^{2\pi} u(x) \bar{v}(x) dx$ . En prenant comme fonction  $v$  la fonction  $u^N$  et en la supposant réelle, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} (u^N)^2 dx + \int_0^{2\pi} (u^N)^2 u^N dx = 0. \quad (3.30)$$

En utilisant l'hypothèse de périodicité, la seconde intégrale disparaît. Ainsi, l'énergie du signal  $E(u^N)$  est conservée lors de l'intégration. Cette propriété est en contradiction avec la solution entropique qui prévoit que l'énergie du système diminue lorsque les ondes se choquent.

La prise en compte d'un terme de viscosité dans les équations permet de tendre vers la solution entropique. Cependant la viscosité physique n'est pas toujours suffisamment importante pour stabiliser le schéma numérique. Dans ce sens, il est souhaitable d'ajouter un filtrage des hautes fréquences afin d'éliminer l'aliasing lié à la troncature. L'objectif est de dissiper l'énergie en hautes fréquences sans modifier le spectre en basses fréquences.

L'ajout de viscosité numérique est une méthode classique [41] permettant d'obtenir la stabilité du schéma numérique ainsi que la solution entropique. Afin de préserver les basses fréquences, de la super-viscosité est ajoutée uniquement pour les hautes fréquences comme suit :

$$\Gamma_n = \Gamma_n + \sigma_d \frac{2\pi KB \max_{\xi} (|u(\xi, t)|)}{q_N} Q_n^M q_n^2. \quad (3.31)$$

$$Q_n^M = \begin{cases} 0 & |n| \leq M, \\ \frac{1 - \left(\frac{M}{|n|}\right)^4}{1 - \left(\frac{2M}{N}\right)^4} & M < |n| \leq \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $M$  est un entier inférieur à  $N/2$  et  $\sigma_d$  est l'amplitude du terme de super-viscosité. La partie

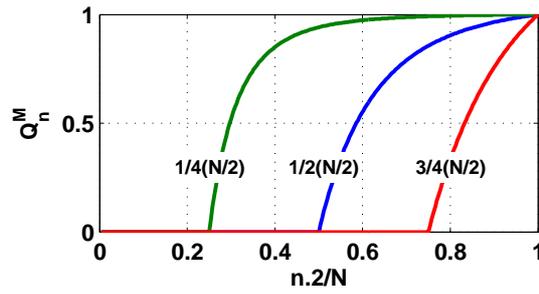


FIGURE 3.7 – Filtre par super-viscosité. Le graphique présente l'amplitude du filtre en fonction de la fréquence pour  $M$  prenant différentes fractions de  $\frac{N}{2}$  ( $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{4}$ ). La fréquence  $q_{N/2} = \pi N/\Xi$  est la plus dissipée.

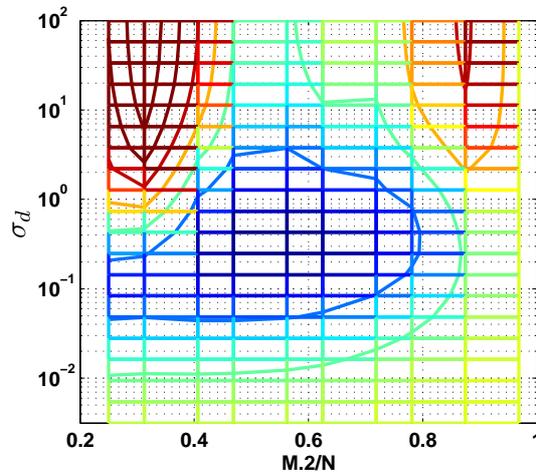


FIGURE 3.8 – Détermination des coefficients  $M$  et  $\sigma_d$  optimaux du filtre par super-viscosité. L'erreur obtenue en intégrant l'équation de Burgers à partir d'une onde en «  $N$  » est évaluée pour différents coefficients du filtre. L'erreur choisie est  $\sqrt{\sum_{n=1:N/8}(\tilde{u}_n - \check{u}_n)^2} / \sqrt{\sum_{n=1:N/8} \check{u}_n^2}$ , en rappelant que  $\check{u}_n$  est la solution exacte du problème. Ce test est ici évalué pour  $N = 64$  mais les résultats sont similaires pour d'autres échantillonnages. Les coefficients optimaux sont donc  $\sigma_d \simeq 0,1$  et  $M \simeq \frac{N}{4}$ .

du spectre traitée est comprise entre les points  $M$  et  $N/2$ . Canuto & al. [41] préconisent une évolution de  $M$  proportionnelle à  $\sqrt{N}$ . Afin de garder  $M$  plus proche de  $N/2$ , nous avons fait le choix de prendre  $M$  comme une fraction de  $N/2$ . Le facteur de normalisation de l'équation (3.31) permet d'adapter l'amplitude de la super-viscosité aux effets non linéaires et au maillage.

Afin de rendre le filtre par super-viscosité efficace, il est nécessaire de déterminer les valeurs de  $M/N$  et de  $\sigma_d$  optimales. L'existence d'un tel optimum pour un cas d'étude donné est évidente, les coefficients extrêmes n'étant pas avantageux. Cependant, nous cherchons des coefficients satisfaisants pour la majorité des cas d'études. Ces coefficients sont déterminés sur un cas simple de propagation d'une onde en «  $N$  » (cf. figure (3.8)). Ce cas est le plus défavorable pour nos problèmes de propagation puisqu'aucun effet dissipatif physique ne stabilise le schéma.

Il peut être intéressant dans certains cas d'ajouter à ce filtre un autre filtre qui limite l'amplitude des hautes fréquences. Ce filtre est essentiellement utile pour les fréquences très proches de la coupure qui, malgré le précédent filtre, peuvent avoir des amplitudes trop importantes. L'idée est de forcer la décroissance du spectre en  $n^{-s}$  ou  $s$  est une puissance à ajuster en fonction de

la régularité de la solution attendue. La solution proposée est :

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} \tilde{u}_n & |n| \leq M, \\ \min\left(1, \frac{M^s \max_k(|\tilde{u}_k|)}{|n|^s |\tilde{u}_n|}\right) \tilde{u}_n & M < |n| \leq \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Un coefficient  $s$  de 2 semble adapté à nos études puisque l'absorption classique impose au spectre une décroissance en  $q^{-2}$ . La valeur  $M$  du filtre précédent ne convient pas forcément pour ce filtre, surtout si  $M$  est petit.

### 3.2.3 Optimisation de la méthode spectrale Fourier Galerkin

La méthode spectrale de Fourier Galerkin est adaptée pour intégrer l'équation de Burgers généralisée. Le schéma d'intégration temporelle et des filtres ont été définis par rapport aux différents types de forme d'onde à intégrer. Cependant, la variation des coefficients de l'équation de Burgers et de la forme d'onde le long des rayons nécessite des améliorations de la méthode afin de la rendre plus exacte et plus rapide. Ces améliorations reposent essentiellement sur l'ajustement du pas d'intégration et du maillage au cours de la propagation.

#### Pas d'intégration

Deux aspects nécessitent l'ajustement du pas d'intégration temporel de l'équation de Burgers généralisée le long des rayons. D'abord, le coefficient non linéaire  $B(t)$  est singulier au voisinage des caustiques et éventuellement au niveau de la source. Le pas d'intégration doit s'adapter à ces singularités afin d'éliminer les problèmes numériques. L'ensemble des coefficients de l'équation de Burgers généralisée évolue également en fonction des inhomogénéités du milieu. Le pas d'intégration peut être adapté afin de garder une erreur numérique constante lors de l'intégration.

**Évolution analytique du pas d'intégration** La présence du terme en  $1/\sqrt{\nu}$  dans le coefficient non linéaire  $B(t)$  de l'équation de Burgers (3.11) engendre des singularités lors de l'intégration là où le volume convecté  $\nu(t)$  s'annule. Ces singularités ont lieu au niveau des caustiques et des sources ponctuelles ou supersoniques. Deux types de singularité existent, associées à une évolution cylindrique ou sphérique du coefficient non linéaire.

La singularité est logarithmique au niveau d'une caustique standard ('pli' ou cuspidée) pour laquelle le comportement du volume convecté est donné par :  $\nu \propto |t - t_c|$ .  $t_c$  est le temps repérant la singularité le long du rayon. Ce type de singularité est associé à une décroissance (ou croissance) cylindrique de l'amplitude de l'onde. Le voisinage d'une source supersonique vérifie le même type de singularité. Une équation de Burgers sans dissipation modèle peut être écrite pour ce type de singularité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{|t - t_c|}} u \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Afin de s'affranchir des problèmes numériques liés à ces singularités, on utilise un changement de variable d'intégration. La nouvelle variable  $T$  est choisie pour ajuster la vitesse de l'intégration aux variations du coefficient non linéaire. Pour un pas d'intégration numérique  $dT$  constant,  $dt$  doit évoluer proportionnellement à  $\sqrt{|t - t_c|}$ , ce qui élimine formellement la singularité de notre équation modèle précédente. La nouvelle variable appropriée à une singularité cylindrique est  $T = 2\sqrt{|t - t_c|}$ . L'équation de Burgers modèle est alors transformée en :

$$\frac{\partial u}{\partial T} = u \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

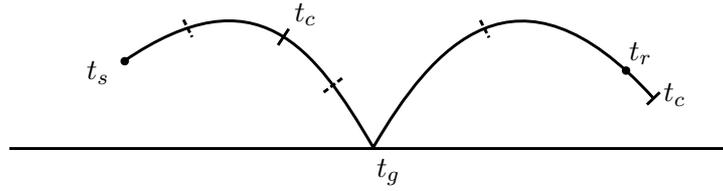


FIGURE 3.9 – Exemple de trajectoire et des différents temps la caractérisant :  $t_s$  source,  $t_r$  récepteur,  $t_c$  caustique et  $t_g$  réflexion. Le récepteur est au voisinage d'une caustique.

Cette équation ne présente pas de singularité et peut être intégrée à l'aide du schéma numérique présenté précédemment. Notons cependant que, bien que la fonction  $u$  soit connue, il n'est pas possible de revenir à la signature en pression  $p$  au niveau de la singularité, son amplitude étant infinie. Dans le cas d'une caustique, l'intégration est effectuée en tenant compte uniquement de la signature normalisée  $u$  qui n'est pas singulière. Dans le cas d'une source supersonique, la fonction  $u$  peut être calculée au niveau de la source à l'aide d'un raccordement avec une solution analytique. Cette condition initiale exprimée en pression est singulière au point source.

Dans le cas d'une source ponctuelle ou d'une caustique à trois dimensions [107], l'évolution du coefficient de non linéarité est sphérique. Le volume convecté a pour comportement :  $\nu \propto |t - t_c|^2$  au voisinage du point de focalisation. L'équation de Burgers modèle est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{|t - t_c|} u \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Cette singularité logarithmique ne peut pas être traitée par un changement de variable. Dans la pratique, l'initialisation de la forme d'onde des sources ponctuelles est toujours réalisée à une certaine distance de la source et les caustiques à trois dimensions sont très rares en propagation atmosphérique.

Nous avons vu le principe et la nécessité du changement de variable permettant de s'affranchir des singularités logarithmiques. Regardons maintenant sa mise en œuvre lors de l'intégration de l'équation de Burgers généralisée le long d'un rayon.

L'équation de Burgers est intégrée entre la source située au temps  $t_s$  et le récepteur situé au temps  $t_r$ . L'intervalle d'intégration  $[t_s, t_r]$  est divisé en sous parties  $[t_1, t_2]$  où chaque temps  $t_1$  et  $t_2$  correspond soit au temps  $t_s$ , soit au temps  $t_r$ , soit au temps de passage d'une caustique  $t_c$ , ou encore à un temps où le rayon se réfléchit  $t_g$ . La figure (3.9) présente un exemple de trajectoire. L'intégration de l'équation de Burgers est réalisée pour chaque intervalle successivement avec des changements de variables adaptés aux singularités en  $t_1$  et  $t_2$ . Les points  $t_1$  et  $t_2$  peuvent être singuliers ou non-singuliers. Le point est singulier pour une caustique ou une source supersonique. Il est non singulier pour une source plane, un point de réflexion ou encore le point de réception.

Cependant, un point non singulier peut se trouver au voisinage d'une singularité. Ce cas se présente lorsqu'un récepteur ou qu'un point de réflexion est proche d'une caustique. Il est donc nécessaire de s'assurer que le point  $t_1$  n'est pas juste après une caustique ou que le point  $t_2$  n'est pas juste avant une caustique. La position d'une éventuelle caustique est obtenue à partir de la variation du volume convecté  $\nu$  par :

$$t_i^c = t_i + \frac{\nu(t_i)}{\frac{\partial \nu}{\partial t}(t_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Si le point  $t_i^c$  est proche de  $t_i$  alors la caustique à une influence dans le voisinage du point  $t_i$ . Cette notion de voisinage est définie par une distance  $\Delta t^c$ . Les points  $t_1$  et  $t_2$  sont au voisinage

d'une caustique si respectivement les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$-\Delta t^c \leq t_1^c - t_1 \leq 0, \quad (3.34a)$$

$$0 \leq t_2^c - t_2 \leq \Delta t^c. \quad (3.34b)$$

Les  $t_i^c$  peuvent ne pas être définis. Ces cas impliquent que les inégalités précédentes ne sont pas vérifiées.

Chaque intervalle  $[t_1, t_2]$  est traité en deux étapes :  $[t_1, (t_1 + t_2)/2]$  et  $[(t_1 + t_2)/2, t_2]$ . Le changement de variable d'intégration est différent pour chaque intervalle. Dans le cas où  $t_1$  (respectivement  $t_2$ ) n'est pas une singularité et n'est pas au voisinage d'une singularité, on choisit  $T$  proportionnel à  $t$  sur l'intervalle  $[t_1, (t_1 + t_2)/2]$  (respectivement  $[(t_1 + t_2)/2, t_2]$ ) :

$$\begin{aligned} t &= t_1 + (t_2 - t_1)T, \\ a(T) &= t_2 - t_1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

$a(T)$  est la dérivée de  $dt$  par  $dT$  :  $dt = a(T)dT$ .

Dans le cas où  $t_1$  est une singularité ou que l'inégalité (3.34) est vérifiée, on choisit  $T$  tel que :

$$\begin{aligned} t &= t_1^c + 2T^2(t_2 + t_1 - 2t_1^c), \\ a(T) &= 4T(t_2 + t_1 - 2t_1^c). \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'intervalle d'intégration  $[t_1, (t_1 + t_2)/2]$  correspond à l'intervalle  $[T_1, \frac{1}{2}]$ , avec :

$$T_1 = \sqrt{\frac{t_1 - t_1^c}{2(t_1 + t_2 - 2t_1^c)}}.$$

Dans le cas où  $t_1$  est singulier alors  $t_1^c = t_1$  et l'intégration est réalisée sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .

Dans le cas où  $t_2$  est une singularité ou que l'inégalité (3.34b) est vérifiée, on choisit  $T$  tel que :

$$\begin{aligned} t &= t_2^c + 2(1 - T)^2(t_2 + t_1 - 2t_2^c), \\ a(T) &= 4(T - 1)(t_2 + t_1 - 2t_2^c). \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'intervalle d'intégration  $[(t_1 + t_2)/2, t_2]$  correspond à l'intervalle  $[\frac{1}{2}, T_2]$ , avec :

$$T_2 = 1 - \sqrt{\frac{t_2 - t_2^c}{2(t_1 + t_2 - 2t_2^c)}}.$$

Dans le cas où  $t_2$  est singulier alors  $t_2^c = t_2$  et l'intégration est réalisée sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

Dans tous les cas, le système d'équations pour les coefficients de Fourier  $\tilde{u}_n$  (3.11) est remplacé par le système :

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial T} = a(T)\Gamma(Kq_n, t(T))\tilde{u}_n - a(T)\nu \frac{B(t(T))}{2} Kq_n(\widetilde{u^2})_n, \quad (3.38)$$

$n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ . Dans ces équations, le produit  $a.B$  n'est pas singulier bien que  $B$  le soit.

Le pas d'intégration  $dT$  est défini en fonction d'un pas en temps maximal  $dt_{\max}$ . Dans le cas d'un point non singulier, le pas d'intégration vaut  $dT = dt_{\max}/(t_2 - t_1)$ . Dans les autres cas,  $a(T)$  prend sa valeur maximale en  $T = \frac{1}{2}$ , ainsi le pas d'intégration vaut  $dT = dt_{\max}/a(\frac{1}{2})$ . La figure (3.10) illustre l'évolution du pas d'intégration  $dt$  en fonction de  $T$  pour les différents cas. Dans le cas d'une singularité, le pas diminue linéairement vers 0 au cours de l'intégration.

L'évolution analytique du pas d'intégration permet non seulement d'éliminer les singularités aux caustiques mais elle est également la plus adaptée aux variations du paramètre non linéaire  $B$ . C'est pour cette raison que le cas d'une caustique au voisinage d'une des limites du domaine d'intégration est traité. Le changement de variable sert à guider l'évolution du pas d'intégration. Le paramètre  $\Delta t^c$  peut donc être choisi librement à condition d'être suffisamment

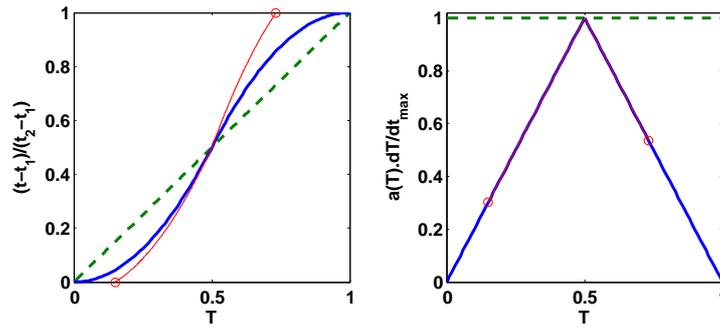


FIGURE 3.10 – Pas d'intégration de l'équation de Burgers. Le premier graphique représente le temps  $t$  en fonction de la nouvelle variable d'intégration  $T$ . La courbe pleine (bleu) représente le cas d'un point singulier et la courbe discontinue (verte) représente le cas d'un point non singulier. Les courbes fines (rouges) et les cercles correspondent à deux voisinages de caustiques ( $t_1^c = t_1 - 0,05(t_2 - t_1)$  et  $t_2^c = t_1 + 1,2(t_2 - t_1)$ ). Le deuxième graphique représente la vitesse d'intégration associée à chacun des cas.

grand. Une valeur de quelques secondes convient pour nos applications.

**Évolution automatique du pas d'intégration** L'évolution analytique du pas d'intégration permet d'éliminer les singularités au voisinage des caustiques. Cependant, dans un milieu inhomogène tel que l'atmosphère, le coefficient de non-linéarité ainsi que les coefficients d'atténuation peuvent évoluer significativement le long d'un rayon. Le pas d'intégration doit être ajusté afin de s'adapter aux effets non linéaires. Le pas de temps  $\Delta t$  au temps  $t_m$  est choisi de tel sorte que le décalage maximal dû aux effets non linéaires soit inférieur à une demi maille pour chaque pas de temps :

$$\Delta t(t_m) = \text{CFL} \frac{\pi}{\max_{\xi} (|u(\xi, t_m)|) B(t_m + \frac{\Delta t}{2}) q_N K(t_m + \frac{\Delta t}{2})}. \quad (3.39)$$

La fréquence d'échantillonnage  $q_N$  du signal  $u(\xi, t)$  est égale à  $q_N = 2\pi/\Delta\xi = 2\pi N/\Xi$ . Le coefficient CFL est une constante qui s'apparente à la condition de stabilité de Courant, Friedrich et Levi. La littérature ne définit pas de conditions de stabilité pour les schémas spectraux avec un terme de convolution. Cependant différents tests permettent de montrer que le schéma diverge pour un coefficient CFL supérieur à environ 1,4. Dans la pratique, ce coefficient doit être choisi inférieur à 1 afin d'assurer une bonne stabilité du schéma.

La relation (3.39) définissant le pas d'intégration est implicite. Une descente de Newton à partir du pas précédent est utilisée afin de déterminer le prochain pas d'intégration. Une tolérance est nécessaire afin d'utiliser cette procédure. Cette tolérance engendre un retard entre l'évolution du pas d'intégration et le pas optimal définis par la relation (3.39). Ce retard est particulièrement visible au voisinage des caustiques où le pas d'intégration doit évoluer rapidement. L'utilisation du changement de variable défini dans le paragraphe précédent permet d'éliminer ce retard.

### Ajustement de l'échantillonnage

Les non-linéarités ont principalement deux effets sur la forme d'onde des signaux acoustiques. D'un côté, elles allongent la durée du signal ce qui se traduit par un décalage global du spectre vers les basses fréquences. De l'autre côté, elles choquent les signaux ce qui se traduit par la génération d'harmoniques [157]. Cependant, l'atténuation atmosphérique augmente rapidement avec la fréquence. On constate qu'au delà d'une fréquence, que l'on notera  $q_{\max}$ , l'atténuation

est suffisamment importante par rapport aux effets non linéaires pour que les harmoniques de fréquences supérieures soient négligées. Dans la pratique, en raison de la diminution de l'amplitude de l'onde due au facteur géométrique  $\nu$  et de l'augmentation de l'atténuation atmosphérique avec l'altitude, cette fréquence  $q_{\max}$  diminue au cours de la propagation sauf au voisinage des caustiques. En parallèle, le décalage global vers les basses fréquences nécessite l'allongement de la durée du signal  $\Xi$ .

Afin d'ajuster au mieux le nombre de points  $N$  nécessaire pour modéliser correctement le signal  $u(\xi, t)$ , il apparaît indispensable d'ajuster la fréquence d'échantillonnage  $q_N$  ainsi que la durée du signal  $\Xi$  au cours de l'intégration de l'équation de Burgers, la fréquence d'échantillonnage pouvant diminuer et la durée du signal devant augmenter.

La méthode proposée pour ajuster le maillage modifie brutalement la fréquence d'échantillonnage et la durée du signal lorsque cela est nécessaire. Les critères sur la forme d'onde et son contenu fréquentiel imposant le remaillage sont également présentés. Un algorithme général permettant de suivre le signal avec moins de contraintes est également présenté.

**Ajustement par interpolation** La méthode pour ajuster le maillage consiste à modifier la fréquence d'échantillonnage, la durée du signal et/ou le nombre de points lorsque cela est nécessaire. D'une manière générale, la durée du signal ne fait qu'augmenter le long de la propagation. La méthode consiste à doubler la durée du signal par zéro padding en conservant soit le nombre de points  $N$ , soit la fréquence d'échantillonnage. Le premier de ces deux cas est privilégié car il n'augmente pas le coût de la résolution de l'équation de Burgers par la suite. Cependant, l'allongement du signal n'est pas toujours accompagné d'une diminution de la fréquence maximale  $q_{\max}$ . Dans ce cas il est nécessaire de conserver la fréquence d'échantillonnage.

La diminution de la fréquence d'échantillonnage s'écrit :

$$\Xi^+ = 2\Xi^-, \quad N^+ = N^-, \quad q_n^+ = \frac{q_n^-}{2}, \quad (3.40)$$

$$\xi_0^+ = \xi_0^- - \frac{\pi N^-}{q_N^-}, \quad (3.41)$$

$$u_j^+ = \begin{cases} u_{2j-N/2}^- & j = N/4, \dots, 3N/4 - 1, \\ 0 & j = 0, \dots, N/4 - 1, \\ 0 & j = 3N/4, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (3.42)$$

où l'exposant  $+$  (resp.  $-$ ) indique les variables après (avant) le changement de maillage. Le cas où l'on double le nombre de points donne :

$$\Xi^+ = 2\Xi^-, \quad N^+ = 2N^-, \quad q_n^+ = q_n^-, \quad (3.43)$$

$$\xi_0^+ = \xi_0^- - \frac{\pi N^-}{q_N^-}, \quad (3.44)$$

$$u_j^+ = \begin{cases} u_{j-N^-/2}^- & j = N^-/2, \dots, 3N^-/2 - 1, \\ 0 & j = 0, \dots, N^-/2 - 1, \\ 0 & j = 3N^-/2, \dots, 2N^- - 1, \end{cases} \quad (3.45)$$

La méthode du zéro padding revient à faire une interpolation de Fourier du spectre afin de l'affiner ( $\Delta q_n^+ = \Delta q_n^-/2$ ). Afin d'éviter des discontinuités aux limites du domaine avant remaillage, l'extrapolation peut être réalisée suivant une fonction affine au lieu d'effectuer un simple zéro padding. Il serait également possible de filtrer juste après l'extrapolation.

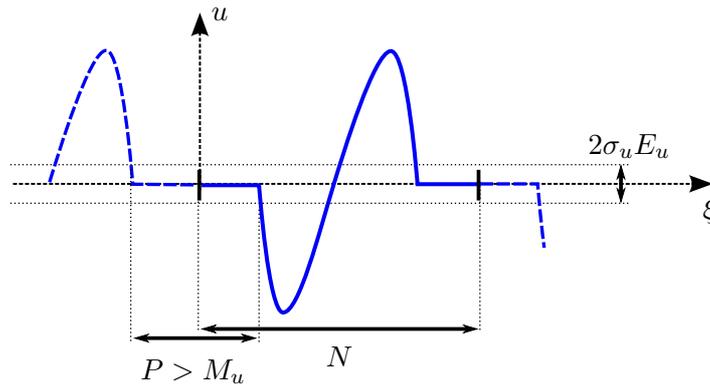


FIGURE 3.11 – Critère de remaillage dans le domaine temporel.  $P$  correspond à la suite des points pour lesquels  $u$  est inférieur à une fraction  $\sigma_u$  de l'énergie totale du signal  $E_u$ .  $P$  correspond au nombre de points de la zone tampon.

**Critères de remaillage** Les critères de remaillage portent à la fois sur la durée du signal et sur son contenu fréquentiel. La méthode spectrale Fourier Galerkin peut être appliquée à des signaux non périodiques si l'on impose une zone tampon dans laquelle le signal est nul. Lorsque le signal s'allonge en raison des effets non linéaires, cette zone diminue. Afin de la maintenir suffisamment grande, il est nécessaire d'effectuer régulièrement des remaillages. La zone tampon est définie à l'aide de l'énergie totale du signal  $E_u = \sqrt{\sum u^2/N}$ . Cette zone correspond à une suite de points pour lesquels la valeur absolue du signal  $u$  est inférieure à une fraction  $\sigma_u$  de l'énergie totale du signal  $E_u$  (cf. figure (3.11)). Cette suite de points tient compte de la périodicité numérique de la fonction  $u$  et le nombre de points est noté  $P$ . Si  $P$  est plus grand qu'un nombre  $M_u$  donné, alors le signal doit être remaillé et rallongé. Les valeurs choisies dans nos applications sont  $M_u = \frac{N}{8}$  et  $\sigma_u = 10^{-2}$ .

Des critères sur le spectre  $\tilde{u}$  de la fonction  $u$  contraignent également la taille du maillage et la fréquence d'échantillonnage du signal. Ces critères sont utilisés lors d'un remaillage afin de savoir si il est nécessaire d'augmenter le nombre de points ou si l'on peut diviser la fréquence d'échantillonnage par deux. La fréquence maximale modélisée est  $q_{N/2}$ . Cependant, la méthode spectrale Fourier Galerkin utilise un filtre à super viscosité qui s'applique aux fréquences supérieures à  $q_M$  comme nous l'avons défini dans la section précédente. Ainsi, la méthode ne modélise correctement que les fréquences inférieures à  $q_M$ . Pour diviser la fréquence échantillonnage par deux, il faut que les fréquences supérieures à  $q_{N/4}$  soient négligeables et que les fréquences supérieures à  $q_{M/2}$  soient faibles. Ainsi, lors du remaillage, la fréquence d'échantillonnage peut être divisée par deux si les deux inégalités suivantes sont vérifiées (cf. figure (3.12)) :

$$\begin{aligned} \max_{n \in [\frac{N}{4}, 3\frac{N}{8}]} (\tilde{u}_n) &\leq \sigma_{\tilde{u}} \tilde{u}_{\max} \\ \max_{n \in [\frac{M}{2}, \frac{N}{4}]} (\tilde{u}_n) &\leq \sigma_{\tilde{u}M} \tilde{u}_{\max} \end{aligned}$$

avec  $\tilde{u}_{\max} = \max_{[n=2, N/2]}(\tilde{u}_n)$  et où  $\sigma_{\tilde{u}}$  et  $\sigma_{\tilde{u}M}$  sont deux paramètres. Il peut être nécessaire de prendre la partie entière de  $M/2$  lorsque  $M$  n'est pas pair. Pour nos applications nous avons déterminé que les critères  $\sigma_{\tilde{u}} = 10^{-2}$  et  $\sigma_{\tilde{u}M} = 10^{-1}$  conviennent.

**Méthode générale de suivi du maillage** Les deux paragraphes précédents présentent la méthode utilisée pour ajuster le maillage en fonction de l'évolution de la forme d'onde. Cette méthode fait apparaître la zone tampon dans laquelle l'amplitude de la forme d'onde  $u$  doit

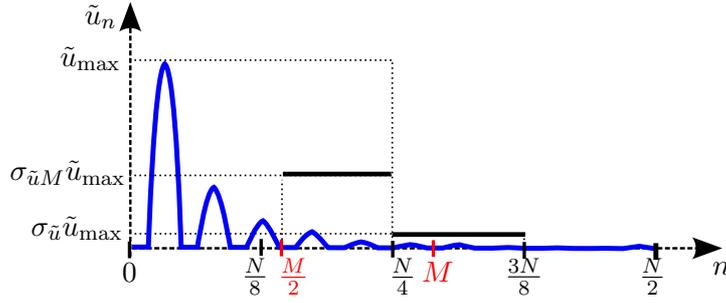


FIGURE 3.12 – Critères de remaillage dans le domaine fréquentiel.  $N$  est le nombre de points du maillage et  $M$  est la fréquence au-delà de laquelle le filtre super viscosité est appliqué. Lors du remaillage, les amplitudes des coefficients  $\tilde{u}_n$  pour  $n \in [\frac{N}{4}, \frac{3N}{8}]$  et  $n \in [\frac{M}{2}, \frac{N}{4}]$  sont comparées à  $\tilde{u}_{\max}$ .

rester très faible. Cette zone, centrée sur le point  $j_P$  et de longueur  $P$ , est susceptible de se décaler au cours de l'intégration. Ceci se produit notamment lorsque la forme d'onde n'est pas à moyenne nulle ou après le passage d'une caustique (cf. section 3.2.4). La périodicité de la base de projection implique que le résultat sera le même quelle que soit la position de la zone tampon. Seule la taille  $P$  de cette zone a une influence sur le calcul de la forme d'onde. Cependant, il est nécessaire de suivre le déplacement de cette zone au cours de l'intégration notamment afin de calculer le début du signal.

L'algorithme utilisé pour suivre la position de la zone tampon est le suivant. À partir du point central  $j_P^m[N]$  de l'itération précédente<sup>1</sup>, on recherche par indice  $j$  croissant, modulo  $N$ , le premier point noté  $j_P^+$  tel que  $u_j \geq E_u \sigma_u$ . D'une manière analogue, on recherche la limite inférieure de la zone tampon indiquée  $j_P^-$ . La taille de la zone tampon est alors  $P = (j_P^+ - j_P^-)[N]$  et le milieu de cette zone est donné par :

$$j_P^{m+1} = j_P^m + \left( \frac{(j_P^+ - j_P^m)[N] - (j_P^m - j_P^-)[N]}{2} \right).$$

Dans la pratique, on prend la partie entière du terme entre parenthèses. Notons que  $j_P$  est un entier quelconque, positif ou négatif. Pour s'assurer que le décalage n'est pas trop important à chaque itération, nous vérifions que  $j_P^m[N]$  est compris entre les points  $j_P^-$  et  $j_P^+$  (modulo  $N$ ). À la fin du calcul ou lors d'un remaillage, le signal est translaté en  $\xi$  afin de ramener  $j_P$  à zéro. Cette translation s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi_0^+ &= \xi_0^- + j_P \frac{2\pi}{q_N}, \\ u_j^+ &= u_{(j-j_P)[N]}^- \quad j = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

où l'exposant  $^+$  (respectivement  $^-$ ) désignent les variables après (avant) la translation. Lors de cette opération,  $j_P$  est remis à zéro et les autres variables restent inchangées.

Dans cette section, nous avons défini une méthode permettant d'adapter le maillage à la forme d'onde résolue. La méthode globale permet d'allonger la grille en diminuant la fréquence d'échantillonnage ou en doublant le nombre de points du maillage. Des critères permettant d'automatiser la procédure ont été définis. Enfin, la méthode permet au maillage de suivre la forme d'onde lorsque celle-ci se décale.

La principale contrainte de la méthode est due à l'utilisation de la transformée de Fourier

1.  $[N]$  indique modulo  $N$ , le résultat étant compris dans l'intervalle  $[0, N[$

rapide (FFT) qui impose que le nombre de points  $N$  soit un multiple de 2. Le maillage peut être uniquement augmenté ou diminué d'un facteur 2. D'autres algorithmes de transformée de Fourier rapide basés sur un plus grand nombre de puissances (2, 3, 4, 5, 6) existent comme Canuto & al. [41] le mentionnent. L'utilisation de ces algorithmes permettrait un meilleur ajustement du nombre de points d'échantillonnage à la forme d'onde.

### 3.2.4 Déphasages au passage des caustiques

Comme nous l'avons présenté à la section 2.3.6, la forme d'onde est déphasée au passage des caustiques. La forme d'onde après la caustique est la transformée de Hilbert de la forme d'onde avant la caustique. La transformée de Hilbert peut être calculée dans le domaine temporel par l'équation (2.76) ou le domaine fréquentiel par l'équation (2.77).

Le calcul dans le domaine temporel est réalisé numériquement par une méthode aux différences finies et reproduit correctement la décroissance logarithmique en  $1/\xi$  (ou  $1/\xi^2$  si la forme d'onde incidente est à moyenne nulle) aux limites du domaine. Cette solution numérique peut être utilisée comme référence pour un signal non périodique de durée finie. Cependant, lors du calcul sur un domaine de taille limitée, on perd la réciprocity de la transformation. En effet, la transformée de Hilbert d'un signal fini donne un signal infini qui sera nécessairement tronqué aux limites du maillage. De plus les valeurs de la transformée aux deux bords du maillage seront généralement différentes, ce qui n'est pas optimal pour notre méthode spectrale Fourier Galerkin.

Le calcul dans le domaine fréquentiel ne donne qu'une approximation de la transformée puisqu'une fois de plus la forme d'onde est supposée périodique. Ainsi, la décroissance logarithmique en  $\xi \rightarrow \pm\infty$  n'est pas respectée. La transformée de Hilbert calculée dans le domaine fréquentiel conserve la périodicité de la forme d'onde et ne présente pas de discontinuité. Cette méthode présente également l'avantage d'être réversible. Si la durée du signal est suffisamment longue, la transformée de Hilbert calculée dans le domaine fréquentiel apparaît comme une bonne approximation du signal après la caustique.

Ainsi, le calcul de la transformée de Hilbert dans le domaine fréquentiel apparaît plus adapté à la méthode spectrale utilisée pour intégrer l'équation de Burgers généralisée. Cependant, des critères sur la durée du signal doivent être définis afin de contrôler l'erreur liée à cette transformation. Ces critères sont les mêmes que ceux contrôlant le remaillage de la forme d'onde (cf. section 3.2.3). En particulier, la méthode requiert une zone tampon où l'amplitude du signal est faible. Notons que la longueur du signal après la caustique est généralement plus grande qu'avant la caustique, ce qui entraîne souvent un remaillage au passage de la caustique. Par contre, la transformée de Hilbert ne modifie pas l'amplitude du spectre de la forme d'onde.

Dans le cas d'un remaillage de la forme d'onde après le passage d'une caustique, il est préférable d'effectuer la transformée de Hilbert inverse au signal, de remailler, puis de le transformer à nouveau. Cette procédure permet, entre autres, de conserver la décroissance logarithmique aux limites du domaine (cf. figure (3.14)). Le milieu de la zone tampon (noté  $j_P$  au paragraphe précédent) par rapport auquel le signal est allongé est celui du signal transformé. La procédure est utilisée au moment de passer la caustique mais également après la caustique lors de l'intégration. On utilise l'indice  $kmah$  qui compte le nombre de caustiques traversées pour savoir si la procédure de remaillage doit être effectuée directement sur le signal ( $kmah$  paire) où sur le signal déphasé par transformée de Hilbert ( $kmah$  impaire).

La méthode proposée ici fait suite à différentes investigations et semble la plus flexible et la plus exacte.

### 3.2.5 Performances du schéma d'intégration de l'équation de Burgers

Dans cette section, nous nous intéressons à la validation du schéma d'intégration de l'équation de Burgers présentée dans les sections précédentes ainsi qu'à ses performances. Les études sont

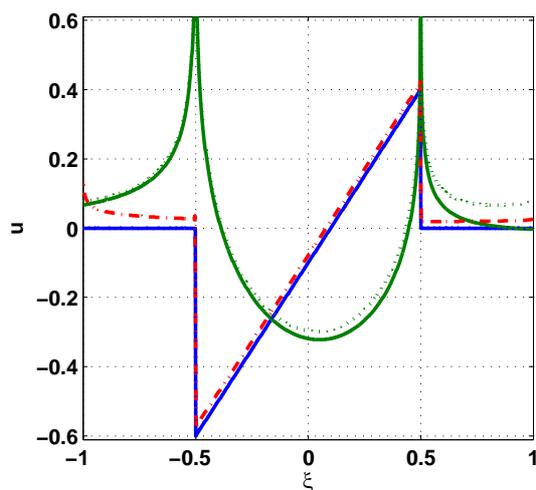


FIGURE 3.13 – La transformée de Hilbert d'une forme d'onde en « N » (–) est une onde dite en « U » (–). Le calcul de cette transformée dans le domaine fréquentiel (...) est une approximation. La transformée inverse calculée dans le domaine temporel de l'onde en « U » donne une onde en « N » erronée (–.).

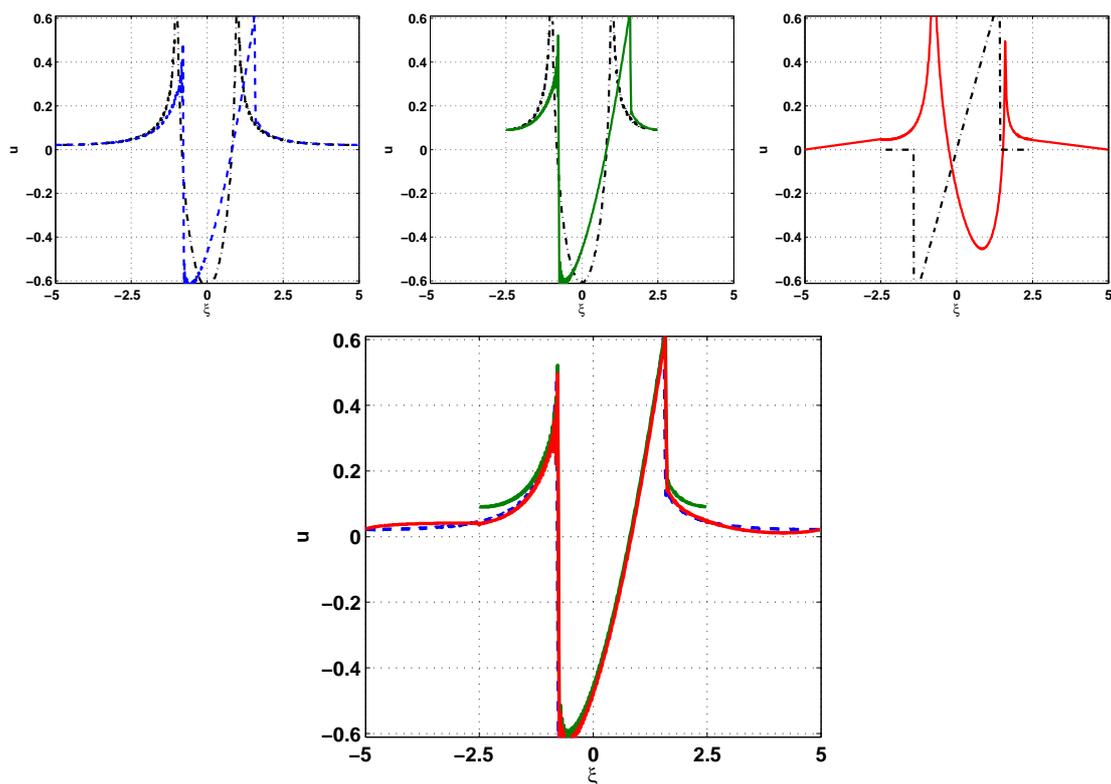


FIGURE 3.14 – Extrapolation d'une forme d'onde après le passage d'une caustique. La forme d'onde initiale est une onde en « U » (– a et b) calculée à partir d'une onde en « N » (– c) par la transformée de Hilbert fréquentielle. Les deux premiers graphiques (a et b) donnent l'évolution de cette onde en « U » pour deux tailles de fenêtres, l'une étant le double de l'autre. La forme d'onde extrapolée à partir du petit domaine (— d) peut être comparée au calcul dans le grand domaine (– d). L'extrapolation est réalisée en appliquant une transformée de Hilbert inverse (— c).

réalisées sur des cas de validation extraits de la littérature et sur des cas fictifs présentant des difficultés pour l'intégration.

### Relaxation de vibration des molécules

Le premier cas d'étude concerne l'intégration de la relaxation moléculaire dans le schéma spectral Fourier Galerkin. Par nature, ce genre de schéma est adapté pour modéliser ce type de phénomène qui est linéairement indépendant dans le domaine fréquentiel. Le cas de validation est celui présenté par Cleveland & al. [50, figure 2]. Le cas consiste en la propagation non linéaire d'une onde harmonique dans un fluide thermovisqueux en présence d'un seul mécanisme de relaxation. Le front d'onde est plan, ce qui correspond dans notre cas à un volume convecté constant. Le signal au niveau de la source est un sinus de période  $\Xi = 2\pi$  et le vecteur d'onde qui normalise la distance en la variable  $\xi$  vaut  $K = 1$ . Le coefficient de viscosité de notre équation de Burgers généralisée (2.51) est  $\delta = 0,025$ , le coefficient de non linéarité est  $B = 1$ , le temps de relaxation est  $\tau = 1/c_0$  et la variation de célérité liée au mécanisme de relaxation est  $\Delta c = 0,5$ . L'onde est initialisée à  $t = 0$  et propagée jusqu'à  $t = 3$ . Ces coefficients sont identiques à ceux utilisés par Cleveland & al. [50].

Nous avons utilisé leur code afin de comparer les performances du schéma spectral Fourier Galerkin avec leur schéma de différences finies. Cependant, l'équation de Burgers généralisée utilisée dans l'article de Cleveland & al. [50] est légèrement différente de l'équation (2.51). En effet, la vitesse du son de référence est la vitesse du son à l'équilibre dans le code de Cleveland & al. tandis que nous utilisons la vitesse du son à l'état gelé. Ainsi, les courbes doivent être décalées de  $\Delta ct$  afin de coïncider,  $t$  étant le temps de propagation depuis la condition initiale.

La solution de référence utilisée pour évaluer l'erreur d'intégration est la solution donnée par la méthode spectrale Fourier Galerkin pour  $N = 2048$ . La solution obtenue par le schéma de Cleveland & al. converge également vers cette solution. La figure (3.15) présente l'évolution de la forme d'onde ainsi que l'erreur au temps  $t = 3$  entre la solution de référence et les solutions obtenues par la méthode spectrale pour différents échantillonnages. Le schéma de Cleveland & al. est également comparé à cette solution.

On observe que le schéma de Fourier Galerkin tient compte correctement des mécanismes de relaxation et qu'il converge rapidement vers la solution lorsque le nombre de points augmente. Ce schéma est également plus performant que le schéma aux différences finies proposé par Cleveland & al. [50].

### Décroissance sphérique d'une onde en « N »

Dans ce cas d'étude, nous nous intéressons à la propagation d'un front d'onde sphérique. Pour une telle onde, l'amplitude de la forme d'onde en pression et l'importance des effets non linéaires décroissent au cours de la propagation. On suppose qu'aucun mécanisme de relaxation n'intervient et que le milieu n'est pas absorbant. La forme d'onde au niveau de la source est une onde dite en « N » d'amplitude  $u_m(t_0) = 1$  et de demi-longueur  $l(t_0) = 1$ . L'onde est initialisée à  $t_0 = 0,1$  et elle est propagée jusqu'au temps  $t = 2$ . Le coefficient de non linéarité choisi est  $B = 1/t$ , correspondant à une décroissance sphérique de l'onde. La variable  $u$  correspond à la forme d'onde normalisée et n'est pas directement affectée par la décroissance sphérique de l'amplitude de l'onde. Seule la forme d'onde en pression est affectée et vérifie la propriété :  $p'(\xi, t) \propto u(\xi, t)/t$ . Nous supposons que le milieu de propagation est homogène.

Ce problème possède une solution analytique. Au cours de la propagation, la forme d'onde conserve sa forme en « N » et l'aire sous la courbe est également conservée. Ainsi, en notant  $l(t)$  la demi-longueur du « N » et  $u_m(t)$  son amplitude, nous avons quelque soit  $t$ ,  $l(t)u_m(t) = l(t_0)u_m(t_0)$ . De plus, les caractéristiques de l'équation de Burgers non visqueuse montrent que le

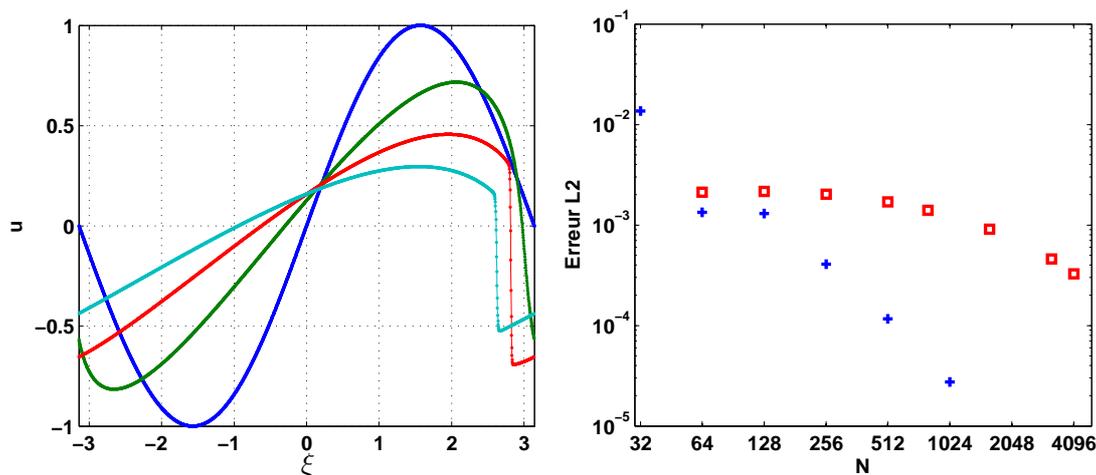


FIGURE 3.15 – Cas de validation de l'intégration d'un mécanisme de relaxation vibratoire par le schéma de Fourier Galerkin. (a) Forme d'onde présentée au temps  $t = 0, 1, 2$  et  $3$ . (b) Comparaison de la solution obtenue par la méthode de Fourier Galerkin (+) et par le schéma aux différences finies de Cleveland & al. (□) au temps  $t = 3$  pour différents échantillonnages  $N$ .

front du choc avance à la vitesse  $\frac{d\xi}{dt} = u_m(t)/(2t)$ . On en déduit que la demi-longueur de l'onde en «  $N$  » est  $l(t) = \sqrt{l(t_0)^2 + l(t_0)u(t_0) \ln(t/t_0)}$ .

Le spectre d'une onde en «  $N$  » contient des hautes fréquences qui ne peuvent pas être modélisées par la méthode spectrale Fourier Galerkin (cf. figure (3.16)). Ce test permet à la fois de s'assurer que la décroissance sphérique de l'onde est correctement intégrée dans le code et également d'évaluer en fonction du nombre de points l'erreur commise par la méthode d'intégration. L'erreur au niveau des chocs se manifeste par des oscillations de Gibbs caractéristiques d'une troncature du spectre.

Le même type de test a été réalisé pour une onde plane ce qui a permis d'optimiser les coefficients du filtre par superviscosité (cf. figure (3.8)) et pour une onde cylindrique<sup>2</sup>. Des comparaisons ont également été réalisées avec les résultats du code de Cleveland & al. [50].

### Passage d'une caustique

Dans ce dernier cas d'étude, nous nous intéressons à l'évolution de la forme d'onde lorsque l'onde passe une caustique simple ('pli' ou cuspidée). Au voisinage d'une telle caustique, l'onde converge puis diverge de manière cylindrique. La convergence de l'onde est d'abord étudiée afin d'évaluer l'erreur commise par le code. Ensuite, nous évaluons l'erreur numérique de la méthode lors du passage d'une caustique, incluant la transformée de Hilbert.

Dans les deux cas, le signal est supposé non périodique. La caustique est au temps  $t = 0$  et le signal est initialisé au temps  $t = -1$  par un sinus d'amplitude 1 et de largeur  $\pi/2$ . La fenêtre utilisée pour le calcul fait  $2\pi$  ou  $4\pi$  et elle est centrée par rapport à  $\xi = 0$  comme le montre la figure (3.17). Le coefficient de non linéarité est  $B = 1/\sqrt{|t|}$  et le coefficient de viscosité  $\delta = 0,01$ . Aucun mécanisme de relaxation n'est pris en compte.

Dans le premier cas, l'évolution de la forme d'onde normalisée  $u$  est étudiée entre  $t = -1$  et  $t = 0$ . Sur la caustique, il n'est pas possible de revenir à la forme d'onde en pression puisque son amplitude est infinie. Cependant, la forme d'onde normalisée a une amplitude finie comme le montre la figure (3.17).

2. Pour une onde cylindrique, la demi-longueur du «  $N$  » vaut  $l(t) = \sqrt{l(t_0)^2 + 2l(t_0)u(t_0)(\sqrt{t} - \sqrt{t_0})}$ .

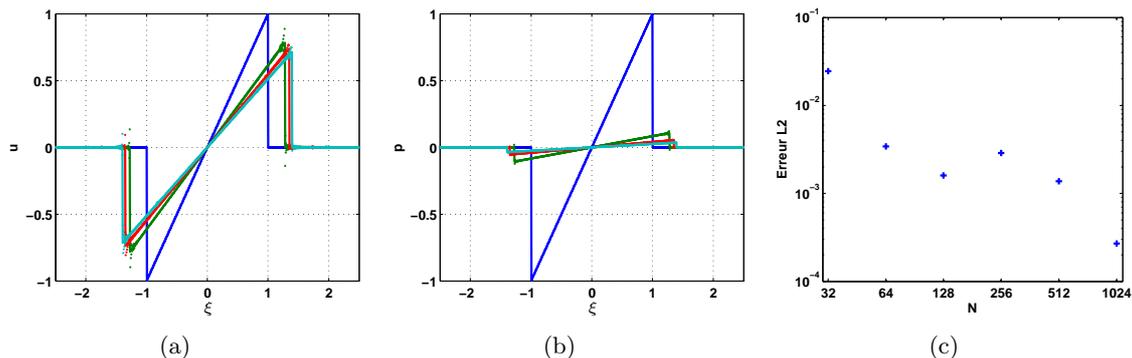


FIGURE 3.16 – Décroissance sphérique d’une onde en «  $N$  » calculée par le schéma spectral Fourier Galerkin pour  $N = 2048$  points. La forme d’onde normalisée (a) et la forme d’onde en pression (b) sont tracées pour les temps  $t = 0, 1$ ,  $t = 0, 73$ ,  $t = 1, 36$  et  $t = 2$ . L’erreur entre la solution analytique et la forme d’onde calculée au temps  $t = 2$  pour différents échantillonnages  $N$  est également représentée dans le dernier graphique (c).

Ce cas d’étude montre que la singularité en  $1/\sqrt{|t|}$  est transformée par le changement de variable d’intégration en une erreur sur la troncature du spectre. Au voisinage de la caustique, les effets non linéaires dominent sur les mécanismes d’absorption physique. L’onde se choque nécessairement ce qui s’accompagne de la formation de hautes fréquences qui ne sont pas supportées par le schéma numérique. La singularité est donc traitée indirectement par les filtres qui stabilisent le schéma numérique. Ainsi, l’évaluation de l’erreur numérique due au passage d’une caustique revient à évaluer l’erreur numérique associée à la troncature du spectre par la méthode spectrale Fourier Galerkin. La figure (3.17) évalue cette erreur en fonction du nombre de points  $N$ , montrant une bonne convergence du schéma numérique.

Le second cas d’étude du voisinage d’une caustique porte sur le passage de la caustique incluant la modification de la forme d’onde par la transformée de Hilbert en  $t = 0$  (cf. figure (3.18)). Le signal après s’être transformé en une onde en «  $N$  » se modifie en une onde en «  $U$  » qui à nouveau tend à reformer une onde en «  $N$  ». Comme pour le cas précédent, l’erreur est liée à la troncature du spectre par la méthode spectrale Fourier Galerkin mais également à l’approximation lors de la transformée de Hilbert (cf. 3.2.4). La comparaison des erreurs des figures (3.17) et (3.18) montre que l’erreur commise après la caustique est beaucoup plus grande que celle commise avant.

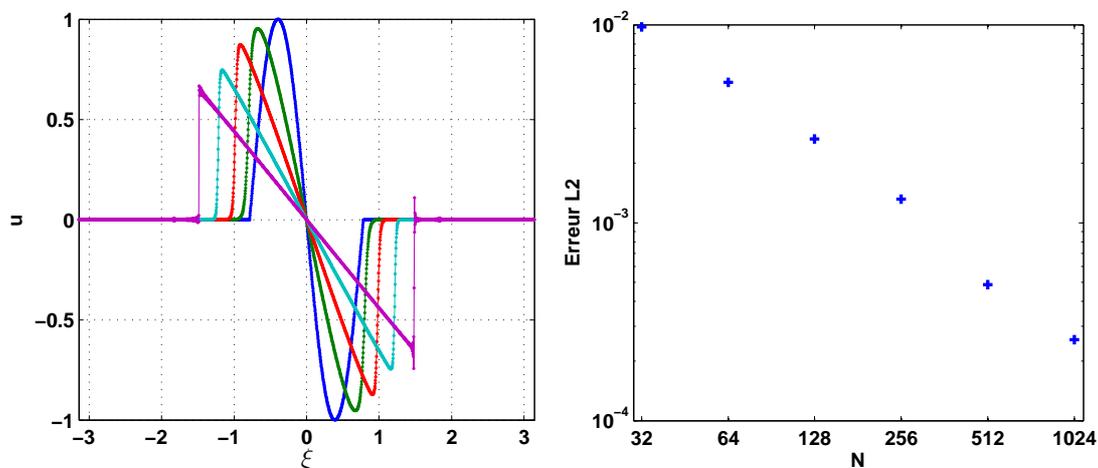


FIGURE 3.17 – Formation de la forme d'onde en « N » lors de la convergence cylindrique d'une onde sur une caustique. (a) À partir de la forme d'onde initiale (bleu,  $t = -1$ ), l'onde se choque pour former un « N » au niveau de la caustique (violet,  $t = 0$ ). Les calculs sont réalisés pour  $N = 1024$  points. (b) L'erreur entre la solution de référence calculée pour  $N = 2048$  points et les formes d'onde calculées au temps  $t = 0$  pour différents échantillonnages est présentée.

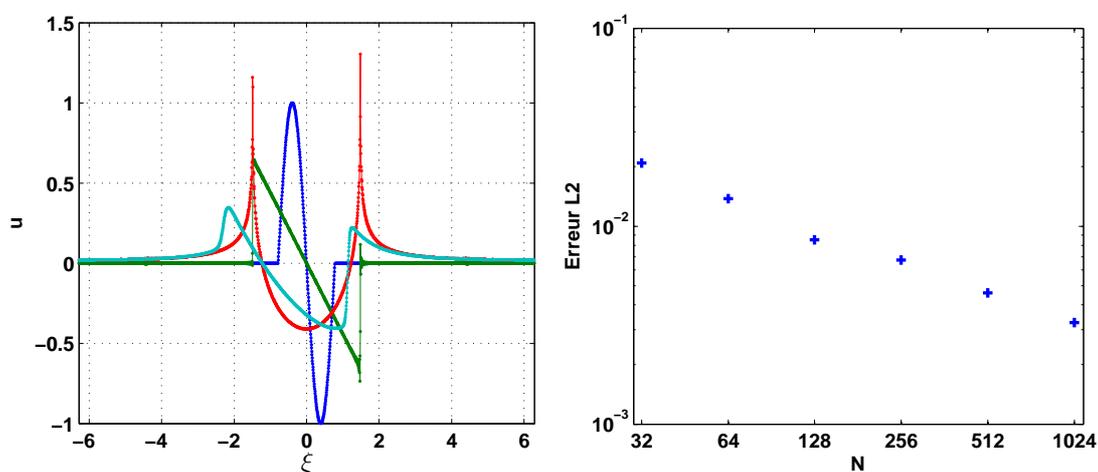


FIGURE 3.18 – Évolution d'une forme d'onde au passage d'une caustique. Le cas reprend celui de la figure (3.17) mais l'onde est propagée après la caustique jusqu'au temps  $t = 1$ . (a) Sur le premier graphique est représentée la forme d'onde initiale ( $t = 0$ , bleu) et la forme d'onde au niveau de la caustique avant le déphasage (rouge). Cette onde en « N » se transforme en une onde en « U » (rouge) puis évolue à nouveau vers une onde en « N » ( $t = 1$ ). (b) L'erreur entre la solution de référence ( $N = 2048$ ) et les formes d'onde calculées est calculée en fonction de  $N$  au temps  $t = 1$ .



## Chapitre 4

# Étude de la propagation des infrasons émis par une source ponctuelle fixe

Dans ce chapitre, nous étudions la propagation des ondes infrasonores émises par des explosions de forte puissance essentiellement situées à la surface du sol. Dans la partie 4.1, nous présentons une revue des connaissances sur ce sujet. Les principales données expérimentales y sont rapportées ainsi que les résultats de leur analyse. Dans une seconde partie (4.2), nous réalisons l'étude d'une explosion particulièrement bien documentée nommée Misty Picture. Cette expérience est unique de par la quantité et la qualité des mesures barométriques effectuées. L'étude de cette expérience permet de caractériser la propagation des ondes infrasonores dans le cas d'une source émettant un signal très basses fréquences (0,1 Hz). Les effets de la rotondité de la terre, de la convection du milieu ou encore de la diffraction des ondes sont évalués. La comparaison des formes d'onde mesurées et calculées à l'aide du modèle de tracé de rayons (chapitre 2) et d'un code parabolique grand angle permet d'évaluer l'importance des effets non linéaires et du scattering sur la signature en pression au niveau des capteurs. La comparaison entre les mesures et les résultats de simulation permet de valider et de quantifier les limites des modèles de propagation.

### 4.1 Propagation des ondes émises par des explosions

Les explosions chimiques de forte puissance et les essais nucléaires atmosphériques sont les sources d'ondes infrasonores qui ont été les plus étudiées pour plusieurs raisons. D'abord, la recherche dans le domaine de la propagation des ondes infrasonores est principalement motivée par le traité d'interdiction complète des essais nucléaires. L'étude de la propagation des infrasons émis par des sources explosives s'inscrit particulièrement bien dans ce contexte. De plus, les explosions sont des sources idéales pour l'étude de la propagation des infrasons. Elles sont bien identifiées en position et en temps. Leur planification permet également d'installer du matériel de mesure supplémentaire et de choisir les conditions météorologiques idéales. Les explosions sont également des sources impulsionnelles ce qui permet de définir précisément le temps d'émission et de bien identifier les différentes arrivées au niveau des stations barométriques. Le signal source peut être caractérisé finement, en terme d'amplitude et de durée, à partir de données annexes telles que l'énergie de la source ou de mesures sismiques. Cependant, les explosions sont des événements peu récurrents qui ne permettent pas de faire des études statistiques sur les effets des variations saisonnières et diurnes de l'atmosphère contrairement à l'étude d'événements récurrents tel que le Concorde (cf. chap. 5).

Les enregistrements barométriques des explosions réalisées dans la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle ont permis de comprendre la propagation des ondes infrasonores mais également de réaliser des abaques permettant d'évaluer la puissance d'une source explosive. Parmi les explosions de forte puissance figurent les essais nucléaires atmosphériques réalisés par les États-Unis, l'Union Soviétique et d'autres pays tels que la France. McKisic [137] fait une revue des différents enregistrements publiés. Avec la fin des essais atmosphériques, des explosions chimiques de fortes puissances ont été réalisées afin de reproduire les effets d'une explosion nucléaire. Notamment, une campagne de six explosions de forte puissance réalisées au White Sands Missile Range au Nouveau Mexique a été étudiée par le Los Alamos National Laboratory [198]. Enfin, les stations du système de surveillance international enregistrent des explosions liées à des accidents industriels qui permettent d'évaluer les performances du réseau en terme de détection [69, 139].

Ces différentes mesures ont permis d'établir plusieurs lois empiriques reliant la charge de la source à la surpression au niveau des capteurs. La comparaison des lois avec l'ensemble des mesures disponibles réalisée par Stevens [183] montre que la relation établie par Whitaker & al. [198] est la plus probante. Cette loi relie la surpression mesurée  $P$  (Pa), la distance à la source  $R$  (km) et la charge de la source  $W$  (kt de TNT) :

$$\log P = 3,37 - 1,36 \log \left( \frac{R}{W^{1/2}} \right).$$

Le rapport d'échelle  $R/W^{1/2}$  indique que l'énergie des ondes émise par la source est supposée piégée dans un guide d'onde. Dans ce cas, le problème est cylindrique et l'énergie libérée par la source est comprise dans un volume qui augmente en  $R^2$ . Ce type de comportement est valable à grande distance de la source par rapport à la hauteur des guides d'onde. Pour l'atmosphère, cette loi d'échelle est valable au delà de quelques dizaines de kilomètres. Le facteur  $-1,36$  établi empiriquement tient compte de tous les phénomènes d'absorption des ondes. Mutschlecner & al. [142] introduisent les effets du vent dans les modèles empiriques à partir de l'étude des mesures des essais américains.

À courte distance, le comportement de l'onde et les lois d'échelle sont différentes. La source est généralement modélisée comme une sphère dans un milieu homogène. Dans ce cas, le rapport d'échelle reliant la distance à la source  $R$  à sa charge  $W$  est de la forme  $Z = R/W^{1/3}$ . Pour l'onde directe, la distance normalisée à utiliser est donc  $Z$ . Les lois d'échelle pour une source sphérique dans un milieu infini sont présentées en détails par Kinney & Graham [105] et repris par Koper & al. [106]. Ces lois sont plus générales que dans le cas de la propagation des ondes à grande distance et permettent de modéliser complètement le signal en pression.

Cependant, la complexité de l'atmosphère et surtout sa variabilité dans le temps ne permettent pas de faire des moyennes et de se fier uniquement aux lois empiriques. La modélisation permet d'intégrer à différentes échelles les variations météorologiques et les effets du vent de manière plus précise.

Les études de l'explosion d'un pipeline en Belgique et de l'explosion d'un dépôt de carburant à Buncefield en Angleterre survenus respectivement en juillet 2004 et en décembre 2005 illustrent les capacités actuelles disponibles afin d'analyser la propagation des infrasons émis par des explosions [44, 84, 69]. Les deux explosions ont été détectées par de multiples stations barométriques en Europe. Les différentes phases mesurées ont pu être identifiées et pour les stations lointaines de multiples phases stratosphériques ont été observées. La modélisation par tracé de rayons permet de retrouver l'azimut et la vitesse apparente des ondes. Cependant, les modélisations [84] montrent les limites des champs statistiques (HWM et MSIS) et l'importance d'utiliser des données météorologiques mesurées pour la basse atmosphère telles que les champs réanalysés ECMWF. Les études réalisées s'intéressaient également à la localisation de la source et au calcul de son énergie à partir des mesures du réseau barométrique. L'erreur de localisation

est inférieure à la vingtaine de kilomètres et l'énergie calculée est cohérente avec les estimations réalisées à partir des mesures sismiques.

Pour finir cette revue sur l'étude de la propagation des ondes infrasonores émises par des explosions, nous mentionnons les travaux réalisés par Krasnov & Drobzheva [66, 67] concernant l'effet des explosions sur l'ionosphère. Les comparaisons entre les mesures de la vitesse de déplacement de la ionosphère au passage de l'onde et les simulations coïncident particulièrement bien, validant ainsi leur modèle de propagation des infrasons.

## 4.2 Une explosion chimique de forte puissance : l'expérience Misty Picture

Parmi l'ensemble des explosions de forte puissance présentées dans le paragraphe précédent, une expérience a été particulièrement bien instrumentée : l'expérience Misty Picture. Elle fait partie de la campagne d'explosions chimiques de forte puissance réalisée aux États-Unis entre 1981 et 1990 [198]. Les données recueillies lors de cette expérience sont nombreuses et de bonne qualité. Au total, les mesures de 22 stations barométriques sont disponibles ainsi que des mesures ionosphériques et météorologiques. Les mesures barométriques réalisées par l'équipe du CEA (E. Blanc [25]) ont été étudiées par Rascalou [164] et Peyret [154]. Malgré ces études, ces mesures sont encore riches en informations inexploitées et leur analyse à l'aide des méthodes actuelles a permis de mieux les comprendre et de corriger certaines erreurs d'interprétation.

Cette section synthétise l'ensemble des données disponibles pour l'expérience Misty Picture. Ces données sont recroisées et extraites directement des rapports originaux afin d'en assurer leur exactitude. À partir des données sur la source et des mesures météorologiques, les bases d'une modélisation de l'expérience sont construites. Elles sont réalistes et présentées de manière détaillée. Ces données sont utilisées pour simuler la propagation des infrasons à l'aide de différentes méthodes. Les méthodes utilisées pour l'analyse sont essentiellement le tracé de rayons et l'équation parabolique. L'étude de cette expérience met en avant l'intérêt de certains outils d'analyse et permet de comprendre intégralement la propagation des infrasons émis par cette explosion.

Ce problème de propagation est détaillé afin de pouvoir servir de cas de comparaison entre les différentes méthodes de modélisation de la propagation des ondes infrasonores à grande distance. Les différentes méthodes envisagées sont le tracé de rayons, les méthodes paraboliques et les méthodes de résolution directe des équations de la mécanique des fluides.

### 4.2.1 Présentation de l'expérience Misty Picture

L'expérience Misty Picture consiste en l'explosion de 4684,7 t d'ANFO, le 14 mai 1987, à 10h00 MDT (16h00 UT), à la surface du sol dans le Nouveau Mexique (White Sands Missile Range). Elle fait partie d'une série d'expériences sur les effets des explosions de forte puissance soutenues par l'agence américaine de sûreté nucléaire (Defense Nuclear Agency).

En plus de l'explosion de forte puissance Misty Picture, une série d'explosions de moyenne puissance a été réalisée comme indiqué dans le tableau (4.1). Ces explosions avaient pour objectif de calibrer les dégâts dus à l'explosion principale sur les villes avoisinantes. Nous ne présentons que succinctement les mesures liées à ces explosions. Elles sont cependant nécessaires à l'analyse des mesures barométriques en champ proche et ainsi à la modélisation de la source de forte puissance.

Nom	Heure (MDT)	Charge (ANFO)
MP-2h00	07 : 59 : 00,54	113 kg
MP-2h10	07 : 59 : 09,36	113 kg
MP-2h20	07 : 59 : 18,30	1 130 kg
MP-2h00	08 : 59 : 00,42	113 kg
MP-2h10	08 : 59 : 09,45	113 kg
MP-2h20	08 : 59 : 18,27	1 130 kg
MP-2m	09 : 58 : 00,00	1 130 kg
MP	10 : 00 : 00,00	4 684 700 kg

TABLE 4.1 – Caractéristiques des explosions de calibration de l’expérience Misty Picture [166, p.70] effectuées le 14 mai 1987. Les positions des sources sont également connues et données dans l’annexe D.

### Description de la charge explosive

L’ANFO est constitué d’un mélange de 94% de nitrate d’ammonium et de 6% d’huiles minérales (Fuel oil). Ces proportions stochiométriques permettent d’atteindre une chaleur d’explosion d’environ  $3800 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . L’énergie mécanique libérée par 1 kg d’ANFO correspond à l’énergie mécanique libérée par une masse équivalente de 0,82 kg de TNT. Ce rapport 0,82 entre l’énergie massique de l’ANFO et celle du TNT a été obtenu expérimentalement en mesurant le souffle d’explosions de différentes charges et à l’aide de lois d’échelle [153, 106].

Pour l’explosion Misty Picture, l’ANFO a été agencé dans une demi-sphère en fibre de verre de rayon 13,4 m [121] (cf. figure (4.1)). La masse volumique moyenne du nitrate d’ammonium est de (donnée fabricant)  $785 \text{ kg.m}^{-3}$  et la taille moyenne des billes de 1,7 mm. La masse volumique moyenne de l’ANFO a été mesurée à la valeur de  $860 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le produit du volume de la demi-sphère par la masse volumique de l’ANFO obtenue en pesant les camions lors de la mise en place de l’explosif, permet de retrouver à 5% près la masse d’ANFO mesurée (4684,7 t). L’installation de l’ANFO a pris 10 jours ce qui peut nuire au rendement de l’explosif du fait d’une modification des proportions du mélange.

L’explosion est accélérée à l’aide d’OCTOL (75/25 HMX/TNT) dont la masse totale est de 140 kg, et la mise à feu de l’ANFO est initialisée par d’autres explosifs en plus petites quantités. L’énergie libérée par ces explosifs n’est pas prise en compte dans notre modélisation de la source.

Le milieu environnant la source Misty Picture était également modifié afin de s’approcher du cas d’une explosion nucléaire. Lors d’une telle explosion, la surface du sol et la couche d’air au-dessus du sol sont fortement réchauffées. Dans cette couche, l’onde se déplace plus vite et se transforme en une onde de choc appelée précurseur. Afin de recréer cet effet, le sol a été recouvert d’hélium sur 60 cm d’épaisseur et sur  $230 \times 300 \text{ m}$ . Étant donnée la faible taille de la couche limite thermique simulée, nous ne prendrons pas en compte sa présence. Celle-ci a une influence uniquement sur l’effet de l’explosion à faible distance.

### Mesures environnementales

Des mesures météorologiques, effectuées avant et pendant l’expérience Misty Picture, fournissent des profils de température, de pression et du vent (vitesse et direction) en fonction de l’altitude. Ces mesures réalisées à l’aide de Ballons-sondes (rawinsonde, radiosonde), de Tether-sonde et de Rocket sondes, sont toutes extraites du rapport de Reed [166], et sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.



FIGURE 4.1 – Photos de l'expérience Misty Picture. La première photo représente la demi-sphère en fibre de verre contenant l'ANFO. Les autres photos montrent le nuage de poussière généré par l'explosion.

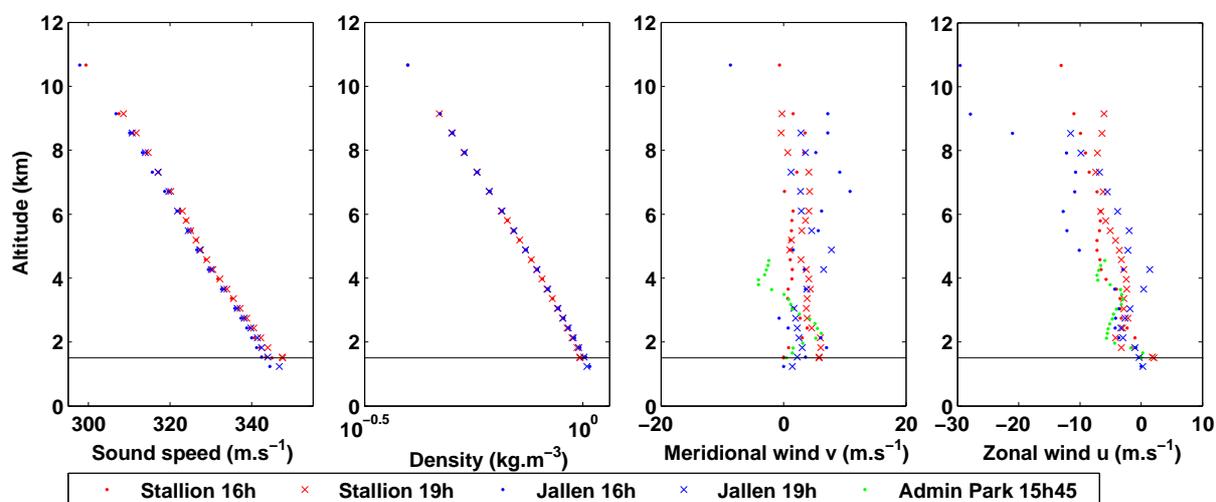


FIGURE 4.2 – Profils des champs de vents mesurés par des ballons-sondes (RAOB) lors de l'expérience Misty Picture. Ces données sont extraites du rapport de Reed (Tab. A) comme indiqué dans le tableau (4.2). Les mesures sont réalisées aux stations Stallion Raob (33,80 N, 106,67 W, 1506 m) et Jallen Raob (33,18 N, 106,48 W, 1236 m) et au niveau du parking Admin (33,66 N, 106,54 W, 1505 m). Les trois points de mesures sont respectivement à 24, 30 et 8 km du point d'explosion. Les mesures sont réalisées à l'heure de l'explosion (16h TU) et trois heures après. Les altitudes sont référencées par rapport au niveau de la mer, l'altitude de Misty Picture est précisée.

Mesures	Données	Position	Altitude /sol	Temps (MDT)	Ref. [166]
Rawinsonde	T, P, W	Raobs : Stallion, Jallen, Elpaso, Albuquerque	≈ 0 :14 km	MP-30h, MP-6h, MP, MP+3h	TabA
Weather observation	T W	Ground zero (MP)	-0.1,0,0.5,1.5,10 m 2,6,10 m	13/5 19h00 au 14/5 09h50, 15min	TabB
Pilot baloon Radarwind	W	Admin Park BRV-LCC	0 :3.35 km	13/5 18,19..03h 14/5 7,8,9,10h	TabC
Weather observation	T, W	11 stations	0.5 et 1.5 m	13/5 00h00 au 14/5 09h15, 15min	TabD
Thetersonde	T, P, W	Admin Park	1 :1000 m	14/5 à 7h, 8h30 et 10h10	TabE
Rocketsonde	T, P, W	WSMR	29 :73 km /mer	14/5, 10h02	TabF

TABLE 4.2 – Récapitulatif des différentes mesures environnementales (Température-T, Pression-P et vents-W) réalisées lors de l’expérience Misty Picture et données dans le rapport de Reed & al. [166] de 1987. Les altitudes sont référencées en générale par rapport à l’altitude de la station (/sol). Les mesures par Rocketsondes sont référencées par rapport au niveau de la mer (/mer).

### Mesures micro-barométriques

Trois laboratoires ont réalisé des mesures barométriques lors de l’expérience Misty Picture : le Sandia National Laboratories [166], le Los Alamos National Laboratories [198] et le Laboratoire de Détection et de Géophysique (LDG) [164, 25].

**Mesures du Sandia National Laboratories** Les mesures du Sandia National Laboratories consistent en 2 stations à une distance inférieure à 10 km, 5 stations entre 30 et 100 km et 5 stations à 200 km d’azimuts différents. Les positions des stations sont présentées dans la figure (4.3). Les signaux au niveau de ces stations ont été enregistrés à l’aide d’enregistreurs à papier et le rapport de Reed [166] présente des photocopies de ces bandes (cf. tableau (4.3)). Ces stations sont constituées uniquement d’un seul capteur barométrique. Toutes les mesures effectuées à ces stations ne sont pas exploitables à cause, soit d’une mauvaise calibration, soit d’un trop fort bruit de fond. Nous avons numérisé certaines de ces courbes afin de pouvoir les comparer avec les résultats des modélisations.

Station	MP-2h			MP-1h			MP-2mn	MP	Commentaire
	00s	10s	20s	00s	10s	20s			
Admin Park	**	**	**	**	**	**	**	**	Incertitude sur l’amplitude Échos sur Oscura Park
Observer area	**	**	**	**	**	**	**	** +échos	
Stallion	**	**	**	**	**	**	**	**	
Socorro	**	**	**	**	**	**	**	**	
Carrizzo	-	-	-	-	-	-	-	-	Mauvaise calibration
Tularossa	-	-	-	-	-	-	-	-	Mauvaise calibration
Alamogordo	-	-	-	-	-	-	-	-	Bruit de fond élevé
Deming	*	*	*	-	-	-	-	-	- : Bruit de fond élevé
Silver City 2	**	**	**	-	-	-	-	*	- : Bruit de fond élevé
Reserve	**	**	**	*	*	**	**	*	MP : calibration faible
Quemado Lake	*	*	*	*	*	*	*	*	Calibration faible
Grants	*	*	**	*	*	**	-	**	

TABLE 4.3 – Signaux contenus dans le rapport de Reed [166]. \*\* indique que le signal est de bonne qualité, \* indique qu’uniquement une partie du signal est représenté ou que le signal est donné par Reed mais que le bruit de fond est élevé, - indique l’absence de signal. Les signaux de bonne qualité ont été numérisés à partir du rapport de Reed.

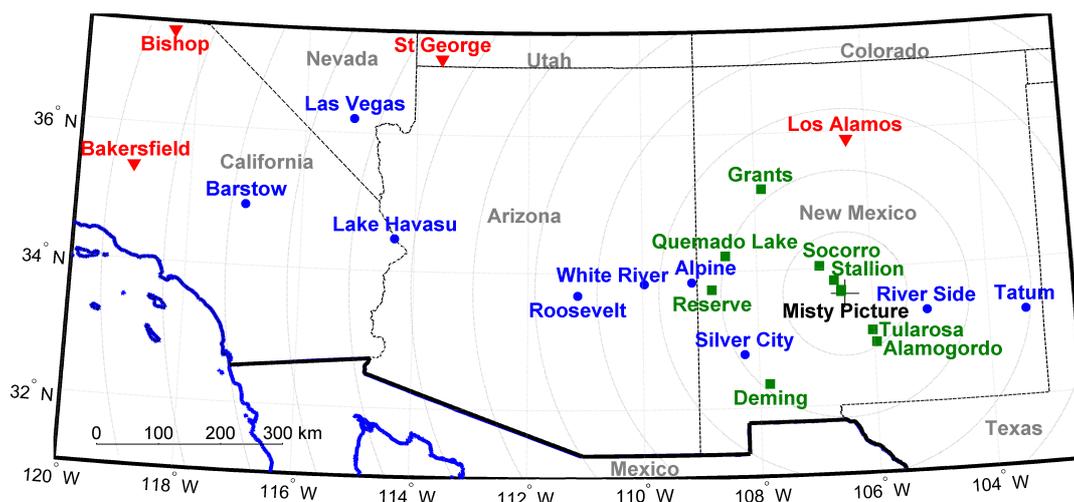


FIGURE 4.3 – Positions des stations barométriques lors de l'expérience Misty Picture. Les stations du Los Alamos National Laboratories sont indiquées en rouge, celles du Sandia National Laboratories sont indiquées en vert et celles du CEA en bleu. Les cercles concentriques autour du point d'explosion sont espacés de 100 km. Le point vert proche de Misty Picture indique la position des stations Admin Park et Observer area situées à environ 8 km de la source.

**Mesures du Los Alamos National Laboratories** Le Los Alamos National Laboratories disposait de stations composées de plusieurs senseurs barométriques permettant ainsi de calculer la vitesse apparente de l'onde ainsi que son azimut au niveau de la station. L'article de Withaker [198] présente des enregistrements effectués pour plusieurs expériences de puissances différentes réalisées dans les années 80 dont l'expérience Misty Picture (Cf. figure (4.4)). Les signatures en pression au niveau des stations de Los Alamos, St. George, Bishop et Bakersfield (Cf. figure (4.3)) sont données pour l'expérience Misty Picture. Le papier de Withaker fait observer la présence d'une arrivée de faible amplitude ayant une vitesse moyenne d'environ  $342 \text{ ms}^{-1}$  au niveau de la station de Los Alamos. L'azimut de cette phase correspond à celle de Misty Picture. La même observation a été faite lors de l'expérience Misers Gold. Les signaux de la figure (4.4) ont été numérisés pour faciliter les comparaisons avec les simulations numériques. Cependant, seuls les temps d'arrivée peuvent être utilisés, les amplitudes n'étant pas connues et la numérisation des signaux ne reproduit pas correctement toutes les fréquences.

**Mesures du Laboratoire de Détection et de Géophysique** Le Laboratoire de Détection et de Géophysique a mis en place, lors de l'expérience Misty Picture, un réseau constitué de 10 stations barométriques allant jusqu'à mille kilomètres de la source. Les positions de ces stations sont présentées sur la carte de la figure (4.3). Seule l'explosion Misty Picture a été enregistrée par ces stations. L'explosion H-2m n'est pas observable sur les enregistrements originaux. La fréquence d'échantillonnage des signaux enregistrés est d'environ 4 Hz et le capteur se comporte comme un filtre passe bas de fréquence de coupure à -3 dB à 1 Hz. Les signaux mesurés au niveau de ces stations sont présentés à la figure (4.5). Ces signaux ont été filtrés à 0,03 Hz. Le rapport signal sur bruit est élevé sauf pour la station de Tatum et de Lake Havasu [164]. La perturbation due à l'explosion Misty Picture a été observée sur l'ensemble des stations à l'exception de Tatum.

Rascalou [164] a effectué une analyse complète des signaux mesurés par le LDG. L'énergie provenant de l'explosion est répartie sur la gamme du spectre compris entre 0,05 et 0,5 Hz. Les

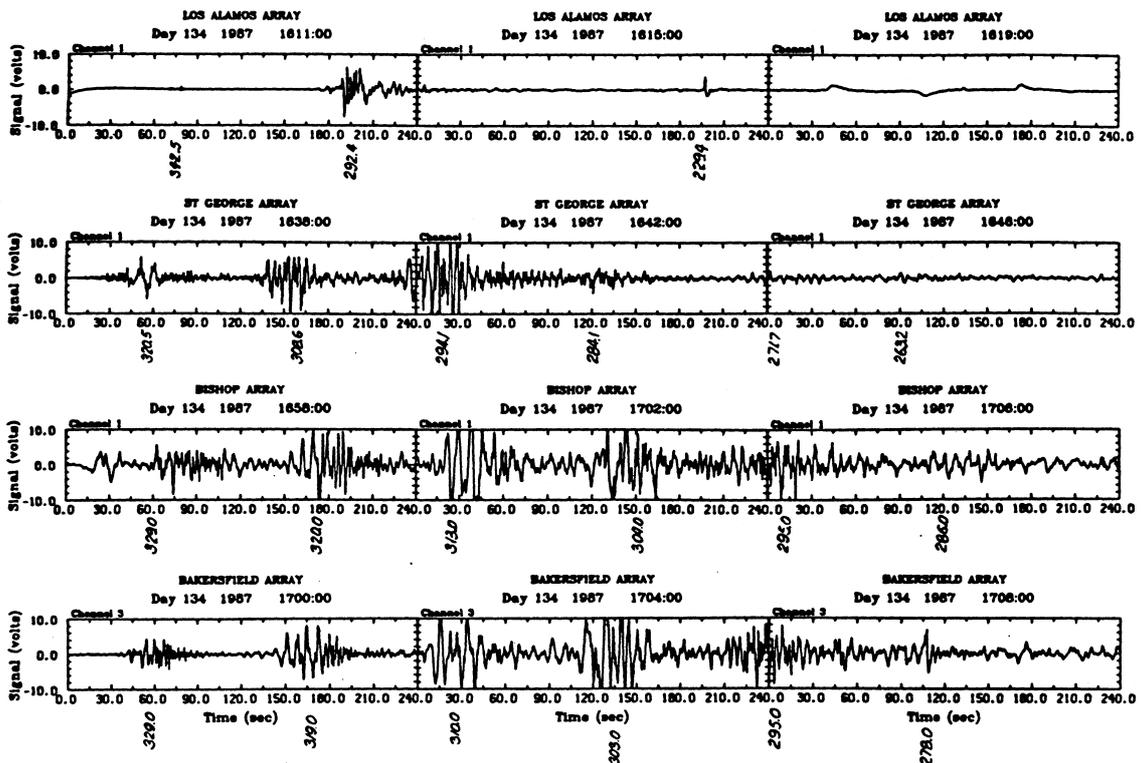


FIGURE 4.4 – Mesures barométriques réalisées par le Los Alamos National Laboratory [198] lors de l’expérience Misty Picture. La vitesse moyenne par rapport au sol est indiquée verticalement sous chaque phase identifiée. Ces figures originales ont été numérisées pour les comparaisons ultérieures. Les amplitudes maximales des signaux sont d’environ 7 Pa, 1,6 Pa, 0,6 Pa et 0,7 Pa respectivement (Cf. figure 6 de la référence [198]).

spectres sont constitués de pics vers les fréquences 0,1 Hz et 0,2 Hz. Les spectrogrammes permettent de retrouver les différents temps d'arrivée observés sur les signaux. Des inter-corrélations entre les signaux montrent que les composantes fréquentielles principales des signaux reçus à des stations proches de la source (150 km) se propagent en phase et ne varient qu'en amplitude quelque soit la direction de propagation. Il existe également une bonne corrélation entre les signaux des stations alignées vers l'ouest (White River - Barstow). Par contre, une dispersion fréquentielle est présente pour les stations non alignées éloignées de plus de 250 km de la source. L'analyse des spectrogrammes (Cf. figure (4.6)) permet une première identification de certaines phases grâce à leur contenu fréquentiel. Les phases distinguées sont les phases stratosphériques  $Is$  et thermosphériques  $It$ . Cette analyse s'appuie sur le principe selon lequel les phases thermosphériques, plus atténuées, ont un contenu fréquentiel plus bas que les phases stratosphériques.

### 4.2.2 Modélisation de l'expérience Misty Picture

L'objectif de cette partie est de définir les données nécessaires à la modélisation de la propagation atmosphérique des infrasons dans le cas de l'expérience Misty Picture. Les simulations ont pour buts d'aider à l'analyse des mesures de l'expérience Misty Picture, d'évaluer l'importance relative des différents phénomènes affectant la propagation des infrasons et de définir un cas test pour comparer différents modèles. Nous nous intéresserons aux méthodes paraboliques (2D) et à la méthode de tracé de rayons (2D et 3D). Les données nécessaires à la modélisation de l'expérience Misty Picture concernent la source, les champs de vents, la topographie, l'absorption atmosphérique et également la position des récepteurs. Ces données sont définies pour être les plus réalistes possibles.

#### Source

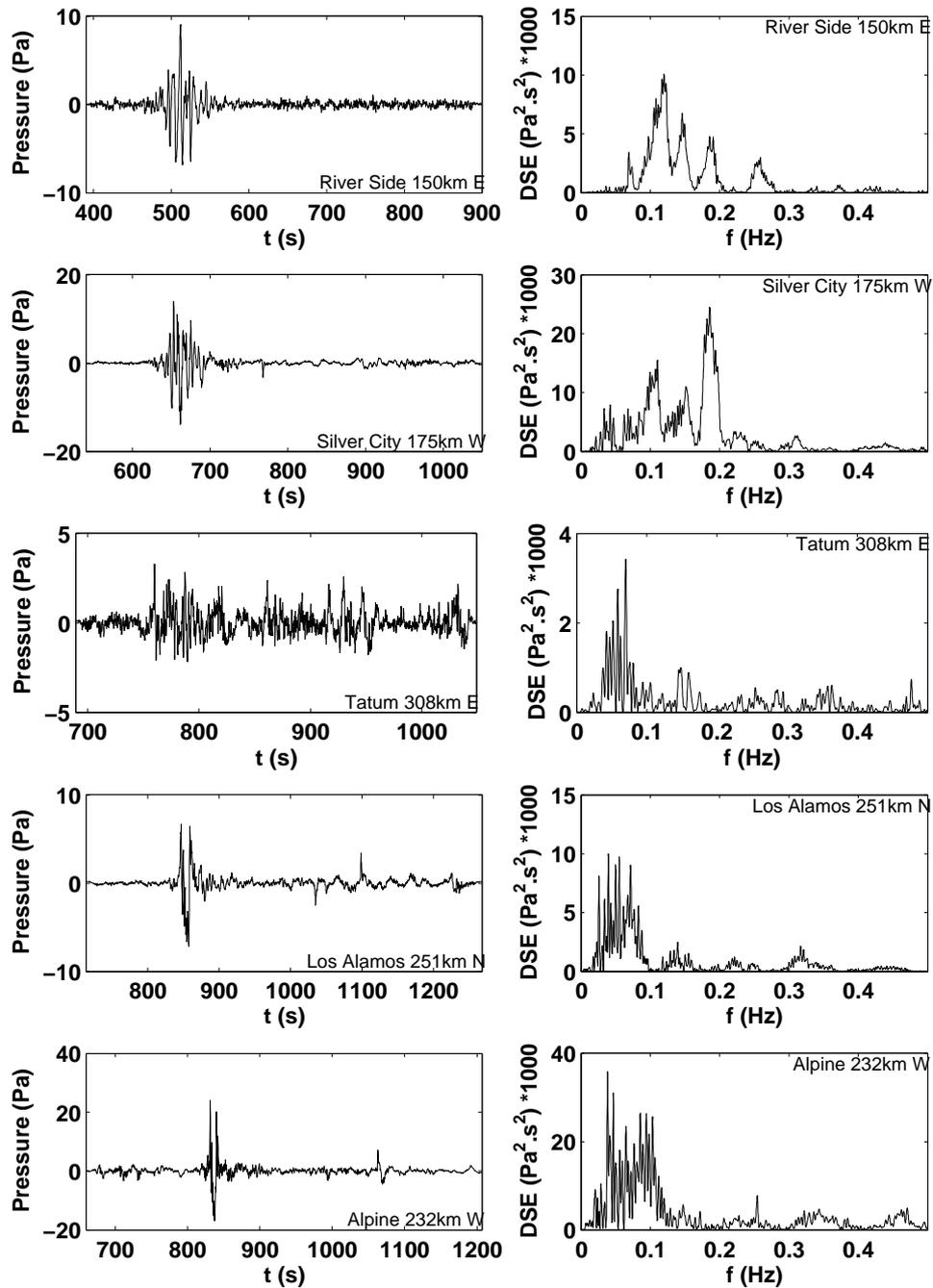
La source Misty Picture est située à la position (33 37'11,5"N,-106 38'26,3"E), au niveau du sol (1505 m). La puissance de la source est de 4684,7 t d'ANFO. Cette masse peut être convertie en masse de TNT équivalente à l'aide du facteur 0,82 vu précédemment. La masse de TNT équivalente utilisée dans les calculs est de 3841  $t_{\text{TNT}}$ . La température au sol au niveau de la source est de 20.0 C et la pression atmosphérique de 860 hPa. L'onde de choc émise lors de l'explosion est approchée par le modèle de Kinney [105]. Ce modèle empirique a été élaboré à partir d'explosions de puissances et de types d'explosifs différents et sa validité est vérifiée expérimentalement pour des charges allant de quelques kilogrammes à 100 t de TNT [106, 121]. Ce modèle est valable dès que la distance est supérieure à  $R = 27W^{1/3}$  (m), où  $W$  est la puissance de la source en kilogramme de TNT équivalent. L'observation des mesures montre qu'il peut être valable à des distances plus faibles.

Suivant les expressions données par Kinney, la variation de la surpression  $p$  d'une onde de choc émise par une explosion chimique est de la forme :

$$p(t) = p_{\max} \left( 1 - \frac{t}{t_d} \right) e^{-\alpha t/t_d},$$

$p_{\max}$  étant le maximum de surpression,  $t_d$  la durée du signal et  $\alpha$  le facteur de forme. Reed [165] propose une autre forme d'onde qui est approximativement équivalente. Les trois paramètres ( $p_{\max}$ ,  $t_d$ ,  $\alpha$ ) dépendent de la puissance de la source et de la distance à celle-ci et vérifient des lois empiriques données par Kinney [105]. Les équations donnant l'amplitude de la surpression  $p_{\max}$  et la durée  $t_d$  sont bien corrélées avec les mesures [106]. Le facteur de forme  $\alpha$  est généralement obtenu à partir de l'aire sous la courbe de pression comprise entre 0 et  $t_d$  :

$$i_{\text{area}} = \int_0^{t_d} p(t) dt = p_{\max} t_d \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha}) \right).$$



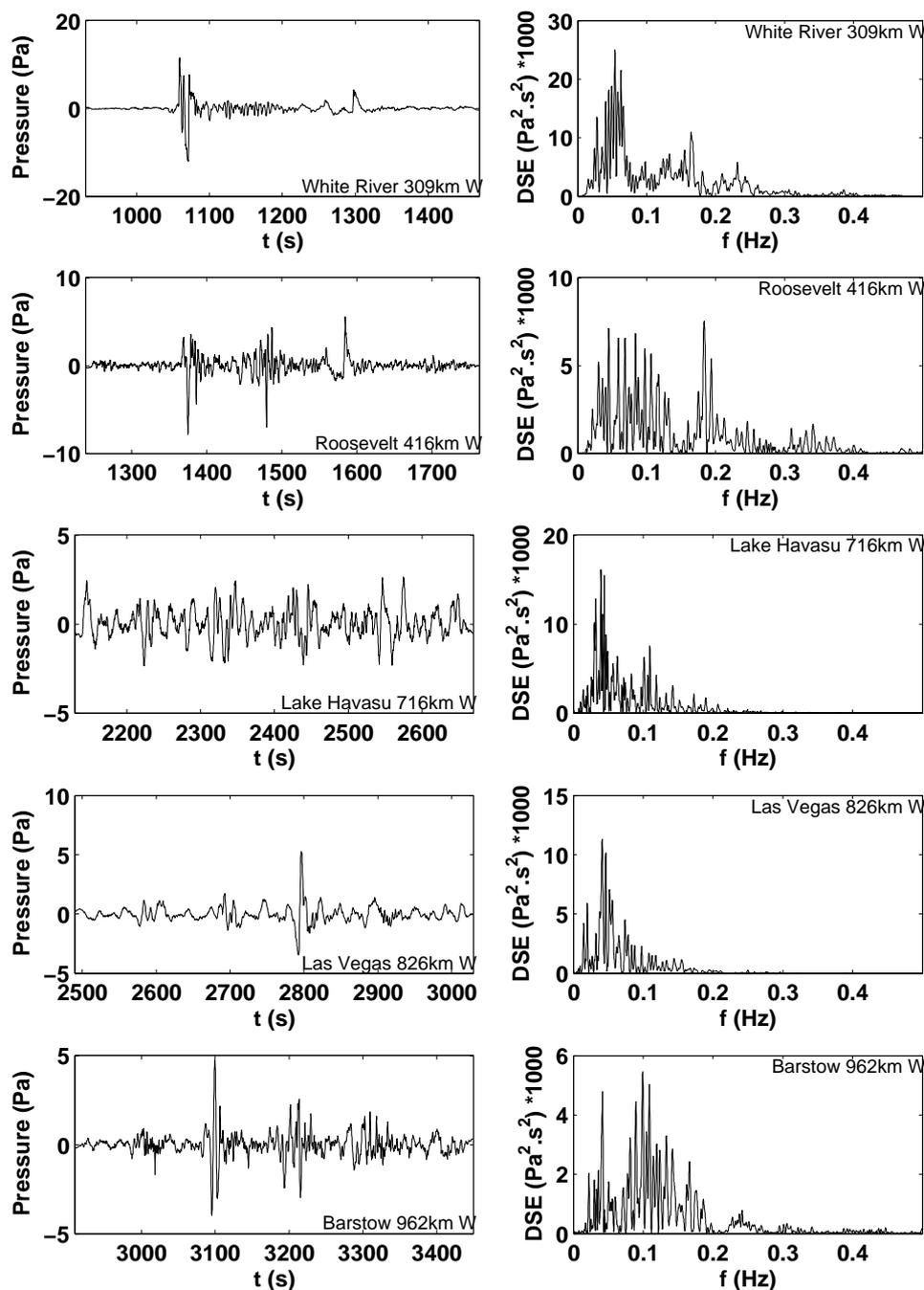


FIGURE 4.5 – Signaux mesurés au niveau des stations barométriques et leur densité spectrale d'énergie. Les signaux ont été recalés par rapport au rapport de Blanc [25]. Les incertitudes sur les données sont de quelques secondes en temps et de quelques pour cent en amplitude.

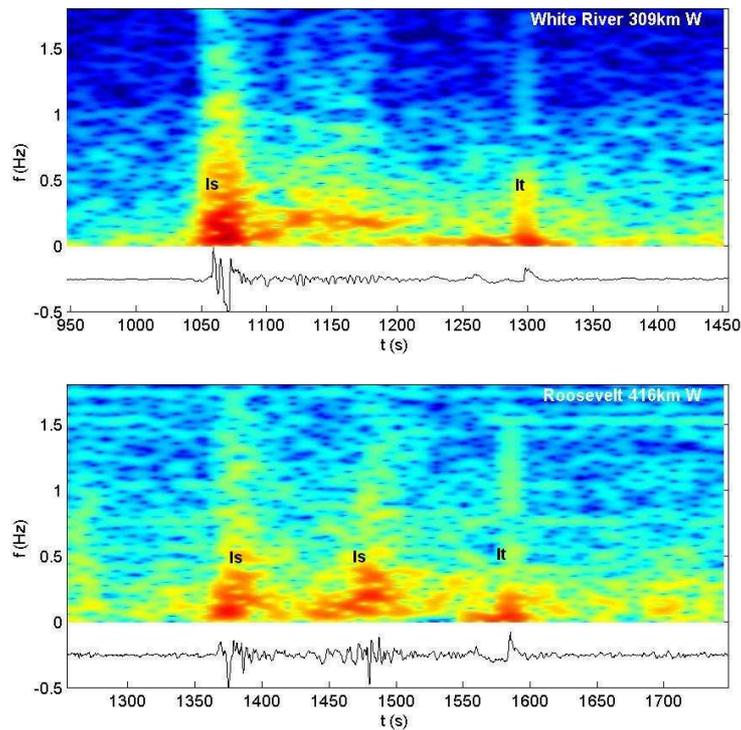


FIGURE 4.6 – Spectrogramme des stations White River (324 km) et Roosevelt (431 km). Les dernières phases à arriver ont un contenu fréquentiel plus bas que les autres. Cette observation permet d’identifier les phases stratosphériques  $I_s$  et les phases thermosphériques  $I_t$ .

Cette aire doit être inférieure à  $p_{\max} t_d / 2$ . Les équations empiriques donnant cette aire (Kinney [105] et Koper [106]) la surévaluent généralement. Le facteur de forme  $\alpha$  étant très sensible à cette aire, une correction est nécessaire.

Il est également important de noter que Kinney modélise uniquement le pic principal de pression. Les mesures montrent dans certaines configurations la présence de pics secondaires (explosion de  $100 t_{\text{ANFO}}$  du rapport [153] et explosion Misty Picture, cf. figure (4.7)).

Dans le cas de l’expérience Misty Picture, la distance à partir de laquelle le modèle de Kinney est théoriquement valable est de 4300 m. Nous avons choisi d’initialiser la forme d’onde de la source à 4000 m. La forme d’onde donnée par le modèle de Kinney pour la configuration de Misty Picture est donnée à la figure (4.10). Le rapport de Reed montre quelques incohérences entre les mesures à Admin Park et Observer area. Les surpressions mesurées ( $p_{\max}$ ) vérifient relativement bien la fonction empirique de Kinney (cf. figure (4.8)), mais la figure (4.9) montre que l’amplitude à Admin Park est parfois plus faible et d’autres fois plus élevée qu’à Observer area, situé plus loin de l’explosion, en fonction du temps et des explosions. Reed introduit des effets de focalisation (caustiques) pour expliquer ces mesures (cf. figure 39 du rapport [166]). Les durées des signaux ( $t_d$ ) données par le modèle de Kinney et celles mesurées (Cf. figure (4.7) et tableau (4.4)) sont très proches. Nous utiliserons directement les valeurs de la surpression et de la durée du signal données par les fonctions semi-empiriques de Kinney à 4 km de la source pour initialiser le calcul afin de nous affranchir des effets météorologiques locaux qui affectent les mesures. Le paramètre de forme  $\alpha$  est, quant à lui, choisi afin de correspondre au mieux avec les mesures réalisées à environ 8 km de la source aux stations Admin Park et Observer area comme indiqué à la figure (4.7).

Lorsque l’initialisation de la forme d’onde est possible à 4 km pour la méthode de modélisation utilisée (ex : tracé de rayons), on utilise le signal de la figure (4.10) directement. Pour les

Station	Distance (km)	Mesures		Modèle de Kinney	
		$p_{\max}$ (Pa)	$t_d$ (s)	$p_{\max}$ (Pa)	$t_d$ (s)
	4,000			3900	0,822
Admin Park	7,26	1700	0,855	2990	0,856
Observer area	8,38	2410	0,862	1800	0,868

TABLE 4.4 – Comparaison du maximum de la surpression et de la durée de la phase positive des signaux mesurés à Admin Park et à Observer area avec le modèle de Kinney pour une charge de  $2 \times 3800$  t de TNT, une pression atmosphérique de 860 hPa et une température de 20.0 C. L'analyse des signaux est effectuée comme indiqué par Koper & al. [106] et présentée à la figure (4.7).

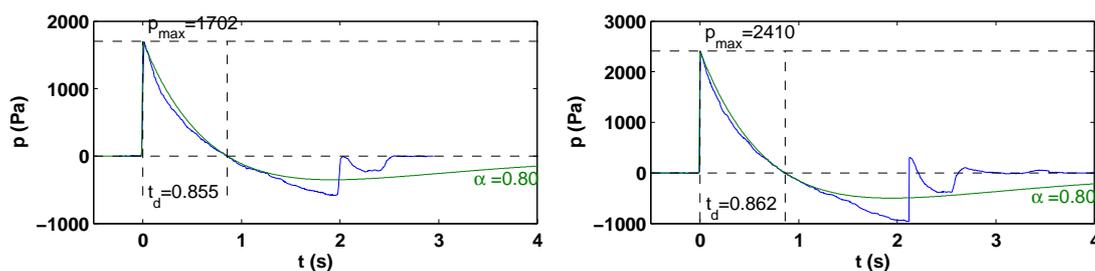


FIGURE 4.7 – Signaux mesurés aux stations d'Admin Park et d'Observer area (bleu). Les différentes caractéristiques du modèle de Kinney calculées pour ces signaux sont indiquées en noir. Les courbes vertes correspondent à la forme d'onde du modèle de Kinney pour un facteur de forme  $\alpha$  choisi à 0,80.

méthodes directes ou paraboliques, il peut être utile de modifier le signal entré au niveau de la source afin de retrouver la bonne forme d'onde et la bonne amplitude à 4 km, principalement pour le contenu basses fréquences du signal. Enfin, dans le cas d'un code direct linéaire, on peut utiliser le signal filtré de la figure (4.10) afin d'éviter que le maillage ne filtre de lui-même. Le filtrage est effectué avec un filtre à erreur de phase minimale qui reproduit l'absorption atmosphérique des hautes fréquences. Ce filtrage permet d'éliminer les hautes fréquences sans modifier le contenu fréquentiel basses fréquences ni la phase. La calibration de l'amplitude des signaux est souvent difficile à effectuer directement au niveau de la source et peut être faite à 4 km de la source. La calibration est réalisée à l'aide de la densité spectrale d'énergie plutôt qu'avec l'amplitude des signaux temporels qui est fortement dépendante des hautes fréquences. Il est important de noter que l'origine des temps correspond au début du choc au niveau du point source (ex. figure (4.10)) soit au maximum de la forme d'onde pour le signal filtré. La forme d'onde de l'enregistrement effectué à la station d'Admin Park (Cf. figure (4.7)) est également utilisée en vue d'effectuer des comparaisons avec les mesures.

### Champs de vents

Le champ de vents utilisé pour la modélisation est stratifié et indépendant du temps : il dépend uniquement de l'altitude. Il est constitué de la température et de deux composantes du vent (zonale et méridienne). Les champs de vents ont été établis en raccordant les données mesurées avec des champs statistiques (HWM-93 pour les composantes du vent et MSIS-90 pour la température). Les mesures utilisées sont celles de la radiosonde envoyée à 10h de Stallion Raob (0-17 km/sol, cf. tableau (4.2)) et la mesure par rocketsonde (29-73 km/mer, cf. tableau (4.2)). Les champs HWM-MSIS, qui sont relativement fiables aux hautes altitudes, sont utilisés entre 73 et 180 km/mer. Nous ne possédons pas de données entre 18,5 km et 29 km/mer.

Les raccords entre les profils sont réalisés à l'aide de fonctions Splines (cf. figure (4.11)). Le

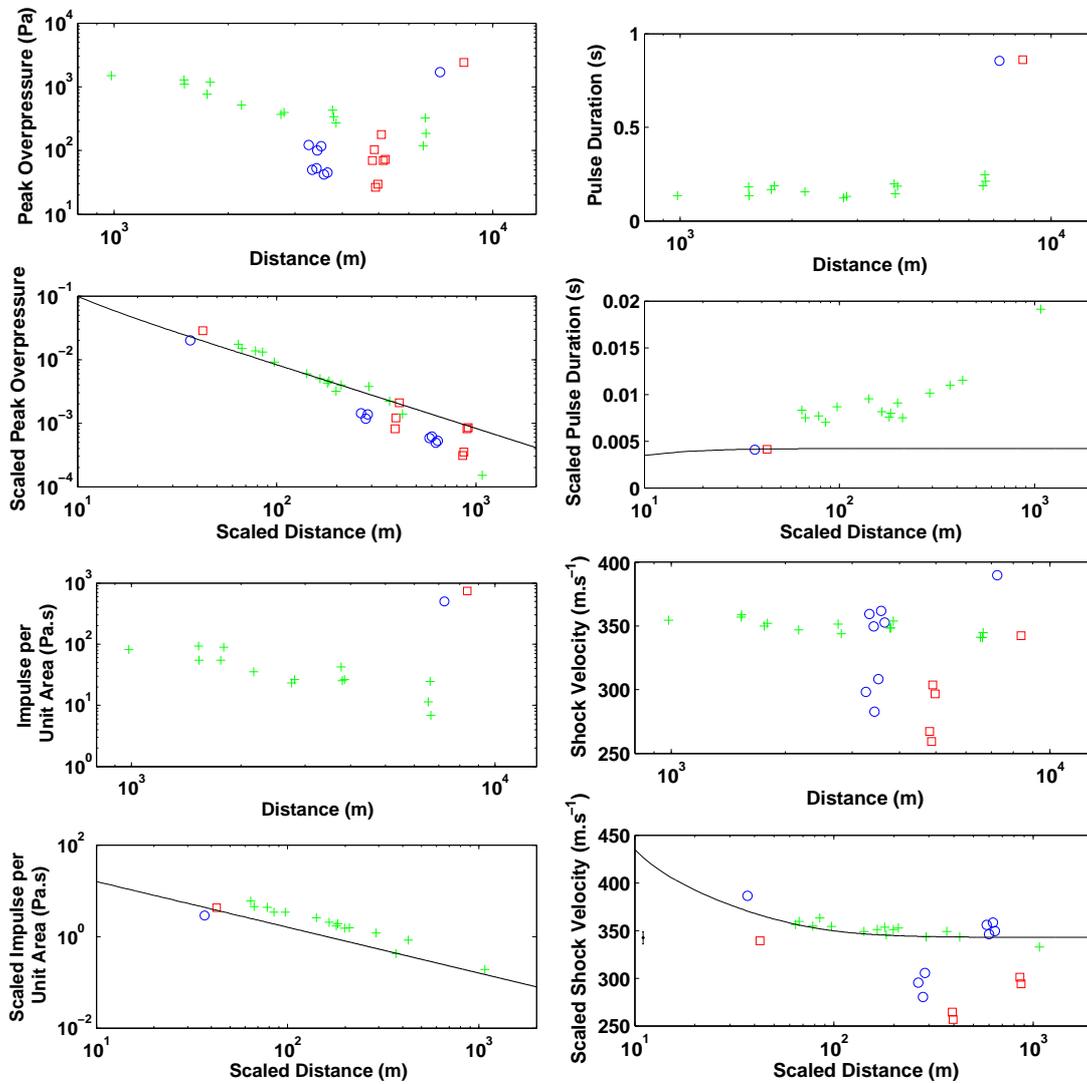


FIGURE 4.8 – Surpression  $p_{\max}$ , durée du signal  $t_d$ , aire sous la courbe  $i_{\text{area}}$  et vitesse pour les signaux enregistrés à Admin Park (cercles) et à Observer area (carrés), pour l’explosion Misty Picture et les explosions de calibration en fonction de la distance. Pour chaque paramètre, les valeurs mesurées et normalisées sont données. Les courbes noires correspondent aux fonctions empiriques de Kinney et les croix vertes aux mesures rapportées par Koper [106]. Le quatrième graphique révèle de fortes variations sur la vitesse de propagation de l’onde par rapport au sol qui sont dues à des erreurs de localisation des sources ou sur les temps d’arrivée.

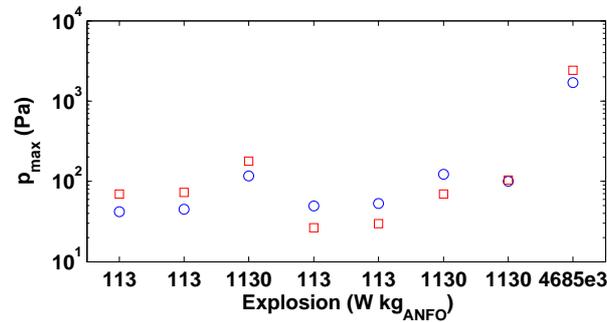


FIGURE 4.9 – Évolution de la surpression mesurée aux stations Admin Park et Observer area en fonction de l'explosion (cf. tableau (4.1)) et donc du temps. Cette figure montre que la surpression est parfois plus grande à Admin Park qu'à Observer area et parfois plus petite. Cette observation est interprétée par Reed comme un effet local des champs de vents qui focalisent l'onde acoustique.

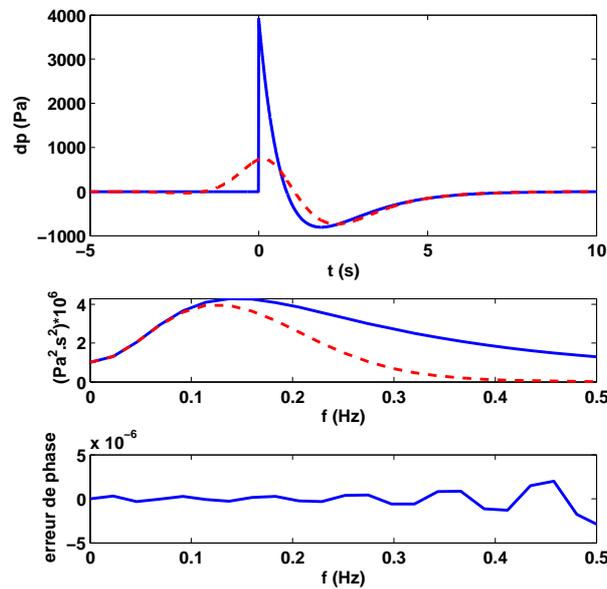


FIGURE 4.10 – Forme d'onde dans le cas de l'expérience Misty Picture à 4000 m de la source donnée par le modèle de Kinney. Les paramètres du modèle sont  $p_{\max}=3900$  Pa,  $t_d=0,822$  s et  $\alpha=0,80$ . La courbe en trait plein correspond au signal brut du modèle, la courbe discontinue est filtrée à l'aide d'un filtre passe bas à erreur de phase minimale, de fréquence de coupure 0,3 Hz (Butterworth d'ordre 2). L'origine des temps est arbitraire. Le deuxième graphique présente le spectre des deux signaux et le troisième, l'erreur de phase du filtre ( $< 10^{-6}$ ).

profil de température se raccorde très bien à 73 km et les fluctuations sont suffisamment lentes pour effectuer une extrapolation entre 18,5 et 29 km. Par contre, les fluctuations du vent étant plus grandes, les raccords des profils du vent sont plus délicats. Les profils du vent zonal et du vent méridien se raccordent assez naturellement autour de l'altitude 73 km. L'extrapolation entre 18,5 et 29 km est quant à elle complètement arbitraire. Ce raccordement est le plus continu possible afin d'éviter de créer des guides d'ondes supplémentaires. L'utilisation des mesures atmosphériques dans la génération de ces profils est intéressante afin d'obtenir un profil moyen plus juste et d'introduire des structures plus petites que celles fournies par les champs statistiques. Cependant, comme le montre la figure (4.2), les variations en temps et en espace des mesures sont relativement importantes ( $\approx 5 \text{ m.s}^{-1}$  pour la vitesse du son et les deux composantes de vents). Ainsi, les profils générés correspondent à des valeurs instantanées locales qui ne sont pas représentatives du champ de vents global. Les grandes échelles des profils de notre modèle sont légèrement plus réalistes que les champs statistiques. Les petites structures doivent, quant à elles, être interprétées comme un exemple d'inhomogénéités de petites tailles du champ de vents. Celles-ci sont, dans notre modèle, supposées invariantes en espace bien que la turbulence d'ondes de gravité a une étendue relativement faible par rapport aux distances de propagation. Il est important, en complément de l'étude de ces profils, d'effectuer des études paramétriques sur l'influence de la variation des champs de vents (petites et grandes échelles) sur la propagation atmosphérique des infrasons.

Pour les profils de température et de vents, le pas en altitude est de 300 m. Les profils sont donnés par rapport au niveau de la mer, or, dans l'expérience, la surface du sol et la source sont à 1505 m au-dessus du niveau de la mer. En complément du profil de température, l'équilibre hydrostatique de l'atmosphère est supposé satisfait. La masse volumique au niveau de la mer est de  $1,17 \text{ kg.m}^{-3}$ , ce qui permet de calculer le profil de masse volumique et de pression en supposant que le gaz est parfait et en se donnant la masse molaire. La composition de l'atmosphère utilisée est celle proposée par Sutherland & Bass [185]. Cette composition permet de définir un profil de masse molaire dépendant de l'altitude. Le rapport des chaleurs spécifiques dépend de la température par une relation empirique donnée par ces mêmes auteurs. La modélisation de l'atmosphère est décrite de manière plus générale dans la section 2.4. L'absorption atmosphérique (viscosités de cisaillement et volumique, conduction thermique, et mécanismes de relaxation moléculaire) est modélisée par les équations de Sutherland & Bass [185] dans le domaine fréquentiel ou en incluant ces phénomènes directement dans les équations tel que nous l'avons décrit dans le chapitre 2. En plus de ce cas de référence, des cas d'étude simplifiés ont été réalisés afin de s'adapter aux différents codes et afin d'étudier l'impact des différents phénomènes.

### Topographie

La surface de la Terre est supposée être une surface plane ou sphérique, parfaitement réfléchissante. Les altitudes sont référencées par rapport au niveau de la mer que ce soit pour les champs de vents ou les positions de la source et des stations barométriques. Le sol est pris à l'altitude de la source soit 1505 m. Dans le cas d'un sol sphérique le rayon de la terre est pris à 6373 km. L'impédance du sol et des océans est supposée infinie.

### Modèles de propagation

Pour étudier la propagation des ondes infrasonores émises par l'explosion de forte puissance Misty Picture, nous utilisons la méthode de tracé de rayons non linéaire présentée dans les chapitres 2 et 3, ainsi qu'une méthode parabolique. La méthode parabolique est une méthode grand angle (WAPE) linéaire incluant la convection du milieu à l'aide de la célérité effective [58, 1]. Les calculs sont effectués en deux dimensions, le champ de surpression acoustique étant supposé

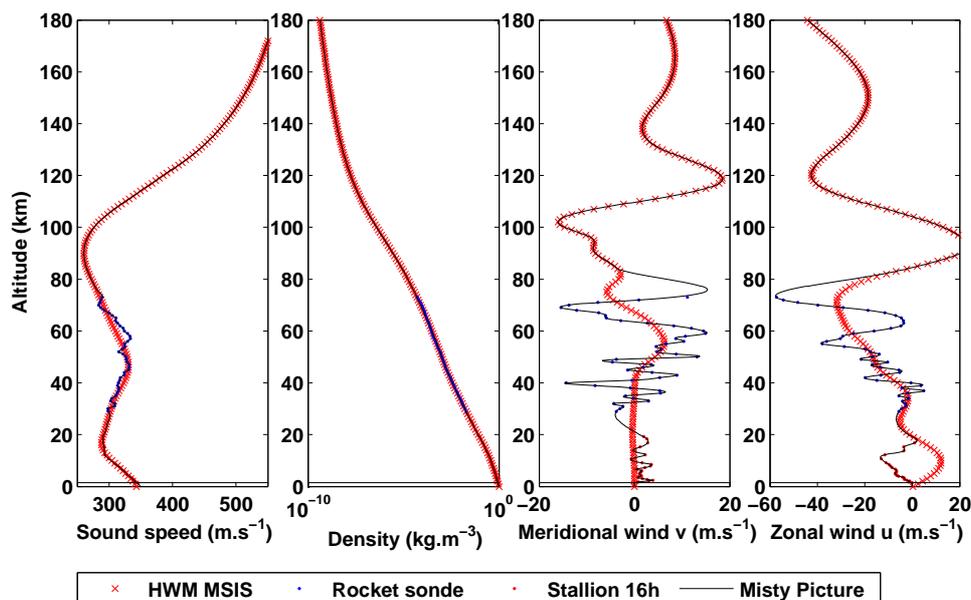


FIGURE 4.11 – Profils de vitesse du son (température), de masse volumique et des composantes du vent zonale et méridienne, entre 0 et 180 km d’altitude par rapport à la mer. Les points indiquent des profils mesurés lors de l’expérience Misty Picture et les croix les champs statistiques HWM93 et MSIS90. La ligne noire représente le profil raccordé. La position du sol est également indiquée.

varier suffisamment lentement en fonction de l’azimut pour pouvoir négliger les effets transverses (diffraction, réfraction, . . .). Par contre, l’amplitude de l’onde est corrigée afin d’intégrer la décroissance cylindrique du niveau de surpression acoustique. La méthode parabolique tient compte de l’absorption atmosphérique suivant les lois de Sutherland & Bass [185]. La surface du sol est plane et parfaitement réfléchissante, et les calculs sont effectués en coordonnées cartésiennes. La source ponctuelle située à la surface du sol est initialisée à l’aide d’un « starter de Greene » [97, 1]. La méthode parabolique permet de calculer des cartes d’amplitude pour une source sinusoïdale et elle permet de reconstituer la signature en pression au niveau d’un récepteur pour une source transitoire. Le lecteur trouvera plus de détails sur la méthode parabolique WAPE, ses capacités et les schémas numériques utilisés dans la thèse de Dallois [58].

La méthode parabolique a été validée sur des cas de propagation de référence [5, 1] et à l’aide de comparaisons par rapport à la méthode de tracé de rayons. Les résultats obtenus par la méthode parabolique pour l’expérience Misty Picture ont été confirmés par des méthodes de simulations directes : différences finies [63, 12, 11] et volumes finis [73, 61].

### 4.2.3 Interprétation des mesures barométriques

#### Cartes de pression

Les méthodes paraboliques et de tracé de rayons montrent qu’il existe principalement deux altitudes de réfraction des ondes acoustiques (cf. figure (4.12)). Les infrasons réfractés dans la stratosphère ( $\approx 50$  km) forment la phase stratosphérique  $I_s$  et les infrasons réfractés dans la thermosphère ( $>100$  km) forment les phases thermosphériques  $It_a$  et  $It_b$ . La phase  $It_a$  est réfractée à une altitude plus basse que la phase  $It_b$ . Ces deux phases sont associées aux deux branches de la caustique cuspidée. La phase stratosphérique n’est présente que vers l’ouest de la source, le vent rendant le champ acoustique dissymétrique.

En fonction de la phase, il existe des zones de l’espace où aucun rayon ne passe, appelées zones d’ombre géométrique. Étant donné que nos récepteurs sont le plus souvent au niveau du sol, nous

ne nous intéresserons qu'aux zones d'ombre au sol. Entre la source et la première réflexion de la phase  $I_s$  ou  $It_a$ , aucune phase n'est présente sauf vers le nord-ouest (cf. figure (4.15)) où une phase troposphérique  $I_w$  est modélisée. Cette phase troposphérique est également visible sur les cartes verticales dans la direction du nord (cf. figure (4.13)). Les zones d'ombre sont également obtenues à l'aide de l'équation parabolique pour les hautes fréquences (1 Hz). Par contre, en basses fréquences (0,1 Hz) aucune zone d'ombre n'est observable. Étant donné que la fréquence de la source est centrée sur cette fréquence, il est possible de prévoir l'existence de phases dans la zone d'ombre.

La figure (4.14) montre la variation d'azimut de rayons émis vers l'ouest et l'est de la source. Ces variations d'azimut sont dues aux vents transverses (sud-nord). Les variations d'azimut sont relativement faibles ce qui explique la bonne concordance entre le tracé de rayons et l'équation parabolique.

Il est également possible d'observer que le long de leur trajectoire, les rayons peuvent croiser plusieurs caustiques (cf. figure (4.12)). Les caustiques en touchant le sol dessinent des cercles sur les cartes de directivité où l'amplitude est anormalement élevée (cf. figure (4.15)). Ces caustiques se retrouvent également sur les cartes de pression obtenues à l'aide de l'équation parabolique.

### Identification des phases mesurées

Les différentes phases mesurées sont identifiées en les comparant avec les résultats du tracé de rayons et de la méthode parabolique. Pour effectuer ces comparaisons, nous utilisons une représentation dans un diagramme temps relatif – distance à la source (cf. figure (4.16)) dans lequel sont tracés les signaux mesurés, les signaux synthétisés à l'aide de la méthode parabolique et le temps d'arrivée des phases calculées par le tracé de rayons. Le temps relatif est référencé par rapport à une onde allant à la vitesse du son au niveau du sol ( $340 \text{ m.s}^{-1}$ ).

Dans ce diagramme, les différentes phases stratosphériques apparaissent verticalement. Le temps relatif d'une phase stratosphérique est identique quelle que soit la distance de propagation. La première phase stratosphérique  $Is_I$  apparaît avec un retard de 100 s environ par rapport à une onde directe et chacune des phases est espacée de ce même temps. Les informations données par le code parabolique sont complémentaires à celles données par le tracé de rayons. Le tracé de rayons permet d'identifier le type de phase et le nombre de rebonds depuis la source. L'équation parabolique montre que pour une onde dont la fréquence centrale est 0,1 Hz, les effets de diffraction sont importants réduisant considérablement les zones d'ombre géométriques, surtout pour les phases stratosphériques. La première phase stratosphérique  $Is_I$  est sensée être comprise entre 200 km et 300 km suivant l'acoustique géométrique. L'équation parabolique montre qu'elle peut être observée dès 100 km et jusqu'à 1000 km, ce qui est en accord avec les mesures. Pour la partie diffractée de la phase stratosphérique  $Is_I$ , la vitesse de la phase par rapport au sol augmente en fonction de la distance. Le temps relatif d'arrivée à 100 km est plus faible qu'à 50 km.

Les phases thermosphériques mettent quant à elles environ 300 s de plus qu'une onde directe. Les calculs paraboliques et de tracé de rayons montrent que les phases thermosphériques  $It_b$  ne peuvent pas être observées parce qu'elles sont trop atténuées par l'atmosphère. Les phases  $It_a$  sont mesurées et retrouvées par les différents modèles. Les temps relatifs de ces phases sont également peu dépendants de la distance à la source. Les effets de diffraction sont relativement faibles pour ces phases comme le montre l'équation parabolique. La différence de temps d'arrivée à la station de Alpine peut être due à une erreur sur les champs de vents utilisés dans la simulation ou à une erreur sur les mesures.

Il est important de noter qu'à la station de Roosevelt (431 km), les temps d'arrivée de la phase stratosphérique  $Is_{II}$  et de la phase thermosphérique  $It_{bI}$  sont confondus. Cependant, étant donné que les phases thermosphériques  $It_b$  sont pratiquement totalement atténuées par l'absorption atmosphérique, la phase mesurée est la phase  $Is_{II}$ . Bien que dans les précédents rapports [164]

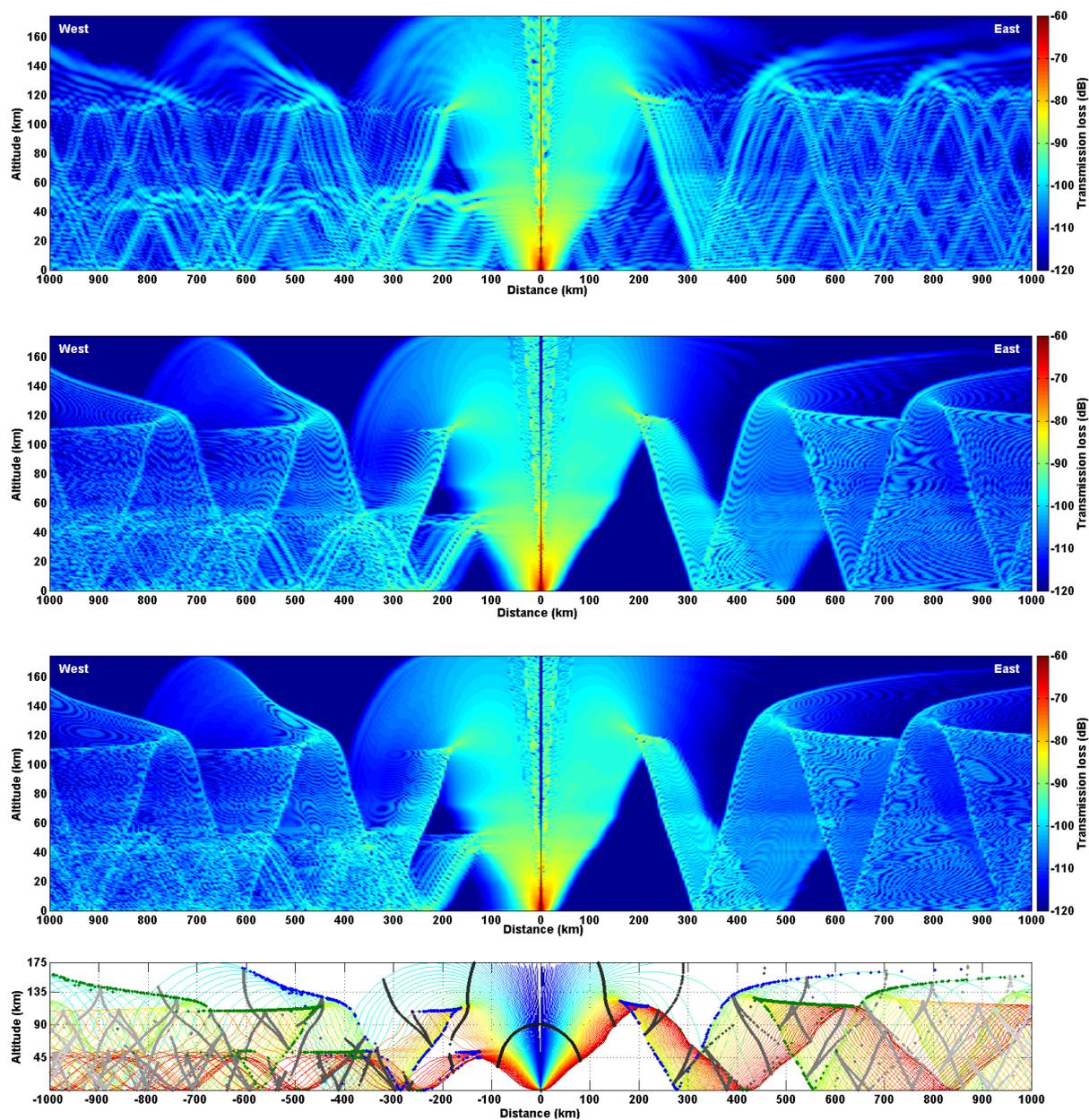


FIGURE 4.12 – Cartes de pression suivant la direction ouest-est. Les trois premiers graphiques (0,1 Hz, 0,5 Hz, 1 Hz) correspondent aux champs de pression calculés à l'aide de l'équation parabolique (ATMOS- équation parabolique grand angle) utilisant la célérité effective et une masse volumique constante. Le dernier graphique présente le calcul des rayons (AGAP). La couleur des rayons dépend de l'angle d'émission (élévation) de ceux-ci. Deux caustiques sont indiquées en bleu et en vert (points) et les fronts d'ondes aux temps 0 à 4000s par pas de 400s sont représentés. Les calculs sont ici effectués en coordonnées cartésiennes.

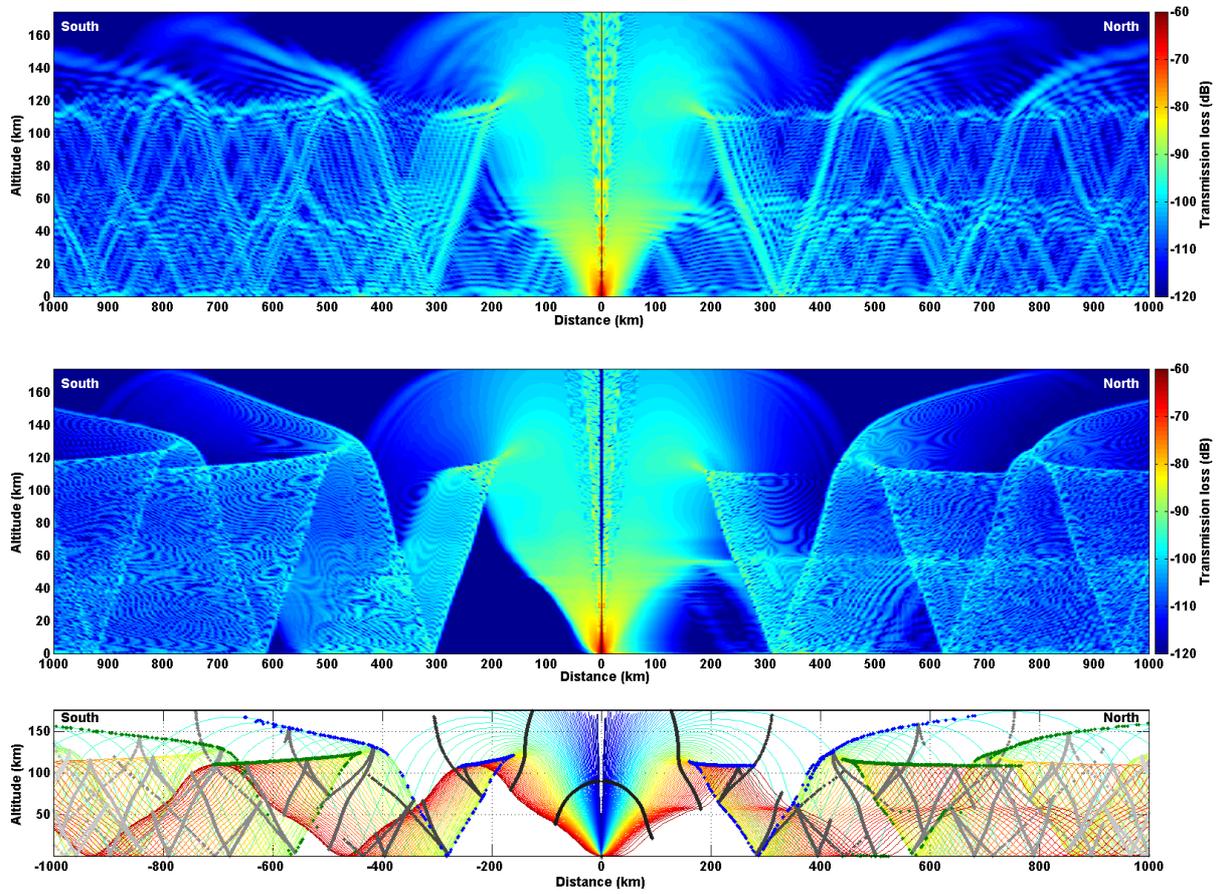


FIGURE 4.13 – Cartes de pressions suivant la direction sud-nord. Les deux premiers graphiques résultent du calcul parabolique aux fréquences 0,1 Hz et 1 Hz et le troisième du tracé de rayons.

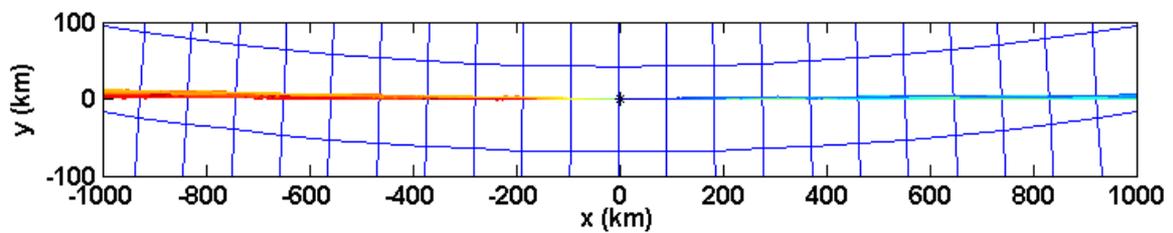


FIGURE 4.14 – Trace des rayons au sol dans le cas de la propagation ouest-est. La déviation des trajectoires par rapport au grand cercle passant par la source est, à 1000 km de la source, de l'ordre d'une vingtaine de kilomètres.

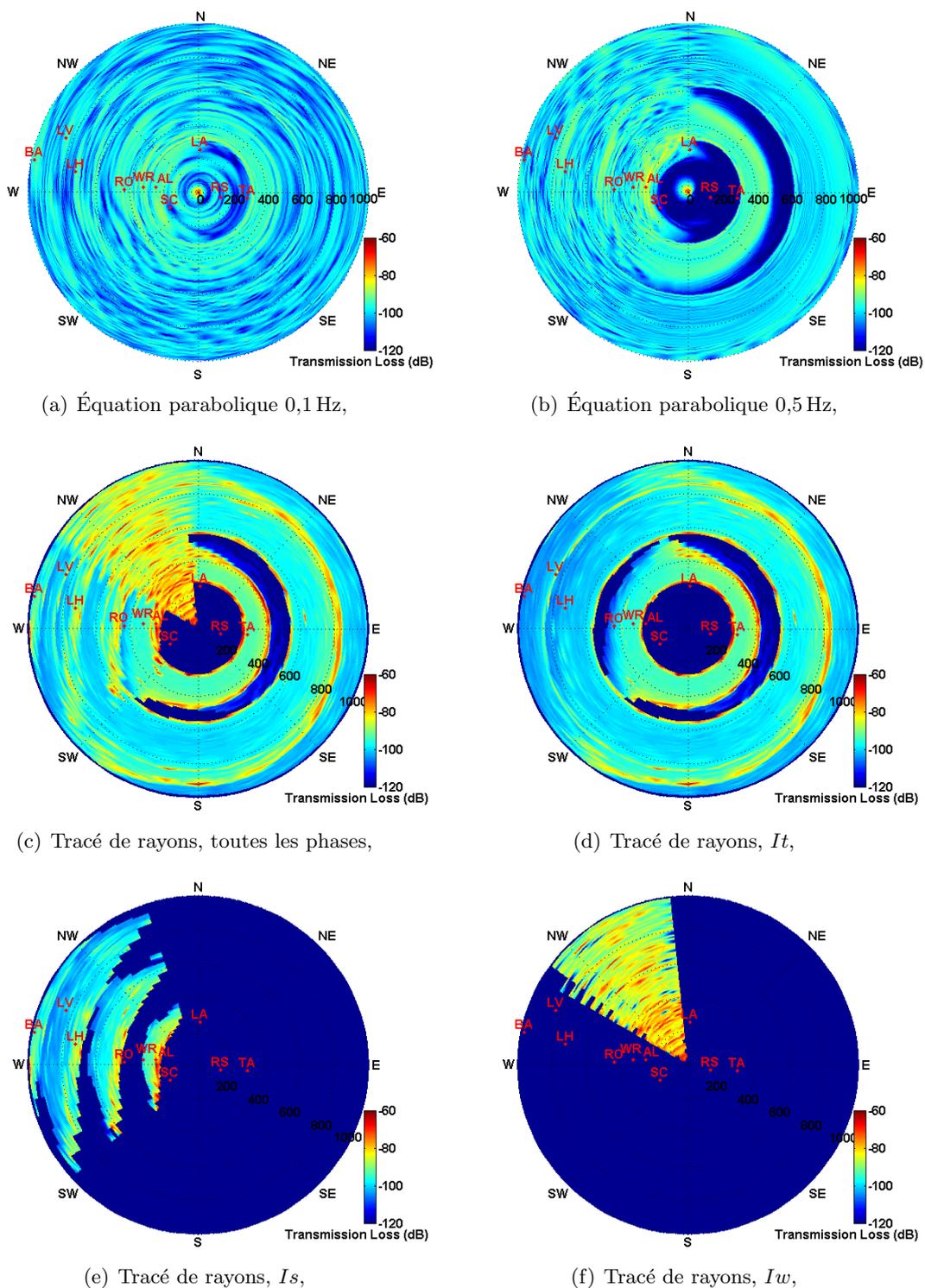


FIGURE 4.15 – Cartes au sol du maximum de la perte par transmission en dB (1 Pa à 1 m de la source) calculées avec la méthode parabolique à 0,1 Hz et 0,5 Hz et par la méthode de tracé de rayons pour toutes les phases et pour chaque phase séparément. Ces cartes permettent de visualiser les effets de directivité dus aux vents et les différentes phases qui arrivent au niveau du sol. Les cercles et points d'amplitude élevée correspondent aux caustiques. Les zones bleues foncées (-120 dB) correspondent aux zones d'ombres ou à des zones où la concentration de rayons est très faible donc l'amplitude faible également. Les positions des stations sont indiquées en rouge.

sur l'expérience Misty Picture cette phase est été classé comme une phase stratosphérique, en s'appuyant sur le spectre du signal mesuré, elle n'a jamais été associé à une seconde réflexion stratosphérique.

L'interprétation des mesures réalisées au delà de 500 km est plus délicate car elles ne coïncident pas exactement avec le tracé de rayons. Ces différences sont imputables aux profils météorologiques. Deux causes principales peuvent être investiguées : incertitudes lors du raccordement des profils mesurés avec les champs statistiques ou fortes variations des profils en espace et/ou en temps. Cependant, pour les stations lointaines, il est possible de confirmer par le tracé de rayons combiné au calcul parabolique que les premières phases sont des phases stratosphériques et qu'une phase thermosphérique est présente sur les mesures à Barstow et à St George. La durée d'enregistrement des autres stations est trop courte pour l'observation des phases thermosphériques. La station de St George est particulièrement intéressante car elle était équipée de plusieurs senseurs. La corrélation des signaux mesurés permet de distinguer 6 arrivées (cf. figure (4.4)). La figure (4.16) permet d'identifier clairement les quatre premières arrivées comme des phases stratosphériques ( $Is_I$ ,  $Is_{II}$ ,  $Is_{III}$ ,  $Is_{IV}$ ) et la dernière arrivée comme une phase thermosphérique  $It_{aII}$ . La cinquième arrivée peut être la phase thermosphérique  $Is_V$  ou une phase dite diffractée.

Il est important de noter la présence de points de réflexion modélisés par le tracé de rayons qui n'entrent pas dans les grands groupes de phases. Le premier point est à la position (400 s, 750 km - figure (4.16)) et correspond au rayon bleu de la figure (4.17). Les deux rayons rouges de cette même figure correspondent aux points proches de la position (500 s, 1000 km - figure (4.16)). Ces points permettent d'interpréter en termes de rayons certaines phases calculées par le code parabolique et portant les noms de phases diffractées  $I_d$ . Ces phases correspondent à des conversions de phases dues, dans le cas du tracé de rayons, à la courbure de la terre. Les simulations à l'aide de la méthode parabolique montrent un grand nombre d'autres types de conversions associées à la diffraction. On observe facilement dans les résultats du code parabolique les rebonds stratosphériques des phases thermosphériques  $It_{aI}$  et  $It_{aII}$ .

### Comparaison des formes d'onde

L'identification des phases aux stations situées entre 200 et 400 km à l'ouest de la source a permis de distinguer : la phase stratosphérique  $Is_I$  et la phase thermosphérique  $It_a$  à la station de Alpine ; la phase stratosphérique  $Is_I$ , la partie diffractée de la phase stratosphérique  $Is_{II}$  et la phase thermosphérique  $It_a$  à White River et deux phases stratosphériques  $Is_I$  et  $Is_{II}$  et la phase thermosphérique  $It_a$  à la station de Roosevelt. La méthode de tracé de rayons permet de calculer les signaux aux niveaux des stations de Alpine (Phase  $Is_I$ ), de White River (Phases  $Is_I$  et  $It_a$ ) et de Roosevelt (Phase  $It_a$ ). Les signaux de ces phases mesurés et calculés par les différentes méthodes sont présentés à la figure (4.18). Le signal source utilisé dans les modèles est celui de Kinney. Nous trouvons une assez bonne concordance entre les temps d'arrivée et une identification totale du type de phase. L'ordre de grandeur de l'amplitude est très bon compte tenu des incertitudes sur les données météorologiques et des distances de propagation. Le calcul linéaire de la forme d'onde ne permet pas d'effectuer des comparaisons avec les mesures. Par contre le calcul non linéaire de la forme d'onde le long des rayons permet de retrouver la forme en « U » bien marquée des phases stratosphériques ainsi que la forme en « N » des phases thermosphériques. Les phases dans les zones d'ombre géométrique ou aux voisinages des caustiques ne sont pas correctement modélisées par la méthode de tracé de rayons. Les spectres des phases mesurées et calculées à l'aide du tracé de rayons non linéaire permettent une comparaison plus fine de l'énergie et du contenu fréquentiel. Pour l'ensemble des phases, la gamme fréquentielle et les amplitudes sont du même ordre de grandeur (cf. figure (4.19)) excepté à la station de Alpine où l'énergie de la phase stratosphérique est largement surévaluée par le

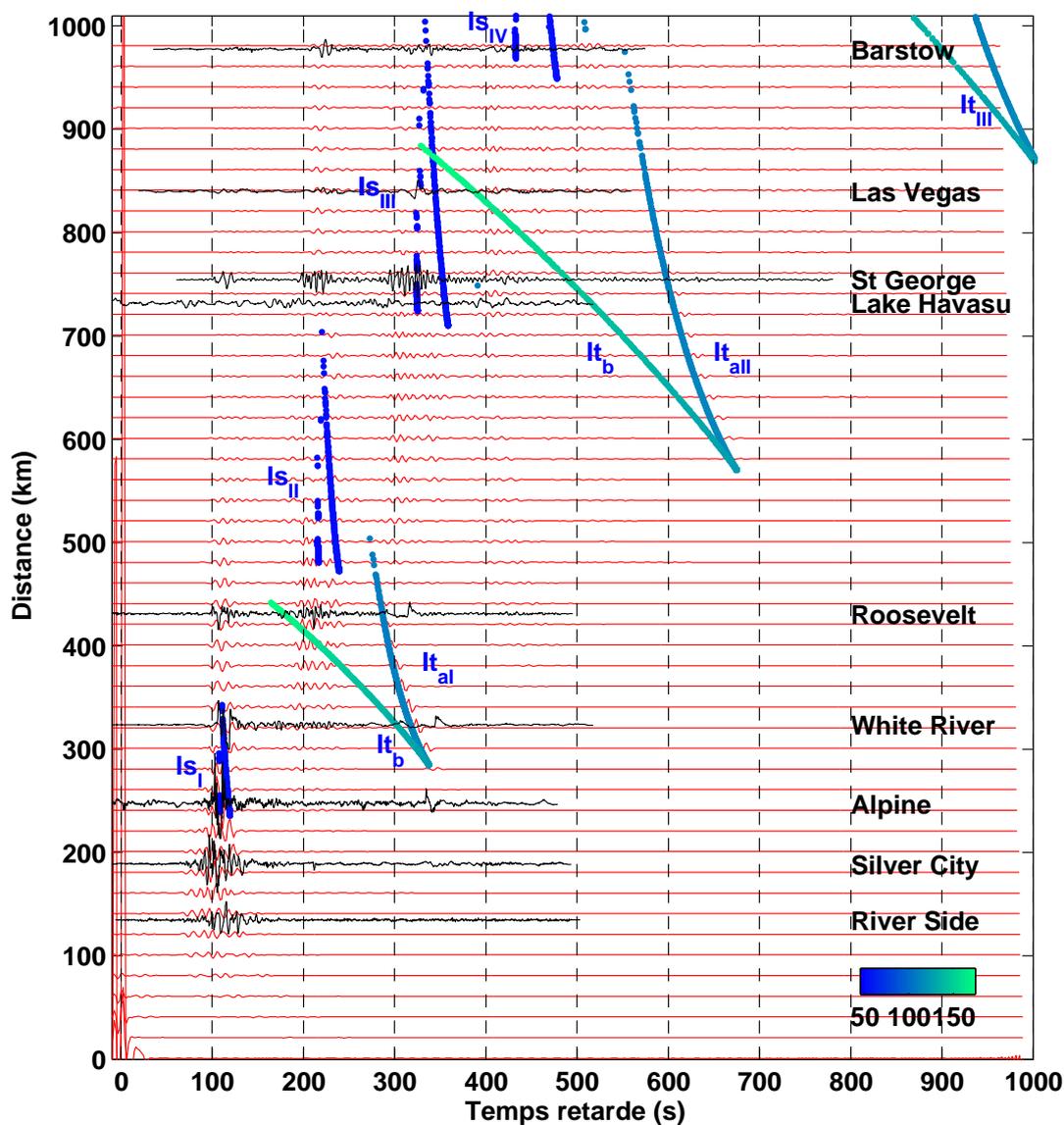


FIGURE 4.16 – Diagramme temps relatif - distance pour un signal source centré autour de 0,1 Hz. Comparaison des phases mesurées (—), calculées avec le tracé de rayons (•, la couleur dépend de l'altitude de réfraction des rayons : 45 à 180 km) et calculées avec le code parabolique (—, ATMOS) dans la direction ouest de la source. Les calculs sont effectués en coordonnées cartésiennes et le calcul parabolique tient compte de l'atténuation atmosphérique. Les résultats obtenus par le code parabolique sont confirmés par le code aux différences finies [12].

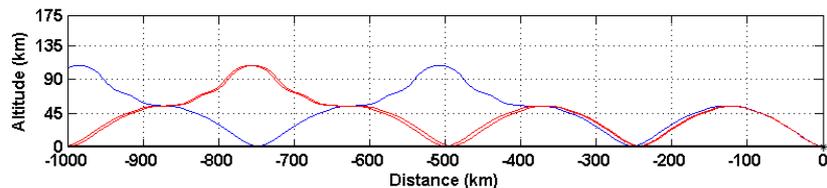


FIGURE 4.17 – Propagation vers l’ouest de trois rayons spéciaux. Le calcul est effectué en coordonnées sphériques et les paramètres d’émission sont  $\beta=72,3$  pour le rayon bleu et  $\beta=72,4$  et  $72,5$  pour les rayons rouges. Ces rayons sont d’abord des phases stratosphériques puis des phases thermosphériques après une réflexion pour le rayon bleu et deux réflexions pour les autres rayons. Ces conversion de phases sont généralement associées aux phases diffractées  $I_s$ .

code de tracé de rayons non linéaire. Cette surévaluation est due à la présence de la double arrivée et au voisinage des caustiques.

Les méthodes paraboliques permettent de retrouver l’ensemble des phases mesurées avec des amplitudes et des contenus fréquentiels proches des mesures (cf. figures (4.18) et (4.19)). Il est nécessaire de noter d’une part des décalages au niveau des temps d’arrivée et d’autre part que les formes d’onde ne sont pas exactement reproduites. Aucune des méthodes de simulation ne permet de retrouver la phase thermosphérique de la station Alpine. Cette différence entre modélisation et mesure est donc imputable directement aux champs de vents.

#### 4.2.4 Comparaison des codes de simulation

Dans cette section, nous comparons les résultats des codes de tracé de rayons et paraboliques dans différentes configurations. Ces études permettent d’évaluer l’influence de certains paramètres sur la propagation ainsi que de quantifier les approximations des méthodes. Parmi les facteurs influençant la propagation des infrasons, nous nous intéressons à la rotondité de la terre, à la convection par le vent, aux effets non linéaires et à la diffraction. Les comparaisons sont réalisées à partir des graphiques de la section précédente et d’études complémentaires. Trois études sont menées et présentées sur les figures (4.20), (4.21) et (4.22).

##### Effet de la rotondité de la terre

L’effet de la rotondité de la terre sur la propagation des ondes infrasonores est évalué à l’aide de la figure (4.20). Cette figure présente en fonction du temps relatif et de la distance la position des points de réflexion pour une propagation vers l’ouest dans le cas Misty Picture. Les calculs sont réalisés en coordonnées sphériques et cartésiennes à l’aide de la méthode de tracé de rayons. Les champs de vents utilisés sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées et les distances au sol sont conservées. Ainsi, la projection en coordonnées cartésiennes modifie les distances en haute altitude. L’altitude relative de la source par rapport aux récepteurs et l’incidence de l’onde par rapport aux champs de vents sont également modifiées.

Le décalage sur les temps d’arrivée est de l’ordre de 2,5 s pour la première réflexion de la phase stratosphérique et 8,5 s pour la première réflexion des phases thermosphériques. Cet écart se cumule pour les autres rebonds. À distance égale, les phases thermosphériques sont plus affectées que les phases stratosphériques, la projection en coordonnées cartésiennes modifiant davantage les distances en haute altitude qu’au niveau du sol. Les différentes phases arrivent en avance en coordonnées cartésiennes ce qui est la conséquence de la réduction des distances de

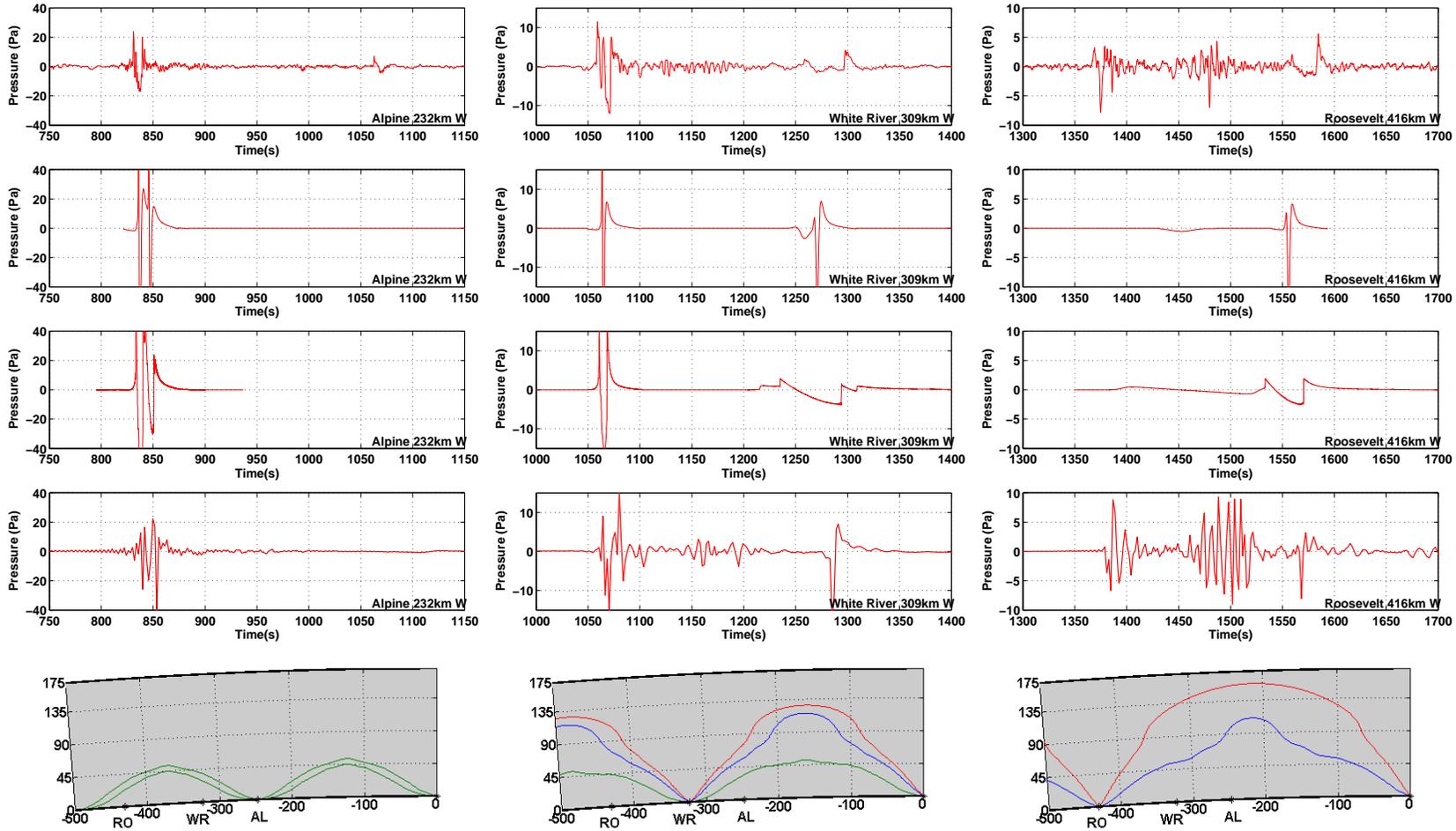


FIGURE 4.18 – Signaux aux stations Alpine, White River et Roosevelt. Les graphiques représentent de haut en bas : les mesures, le calcul linéaire de la forme d'onde avec le tracé de rayons, le calcul non linéaire avec le tracé de rayons et le calcul avec l'équation parabolique.

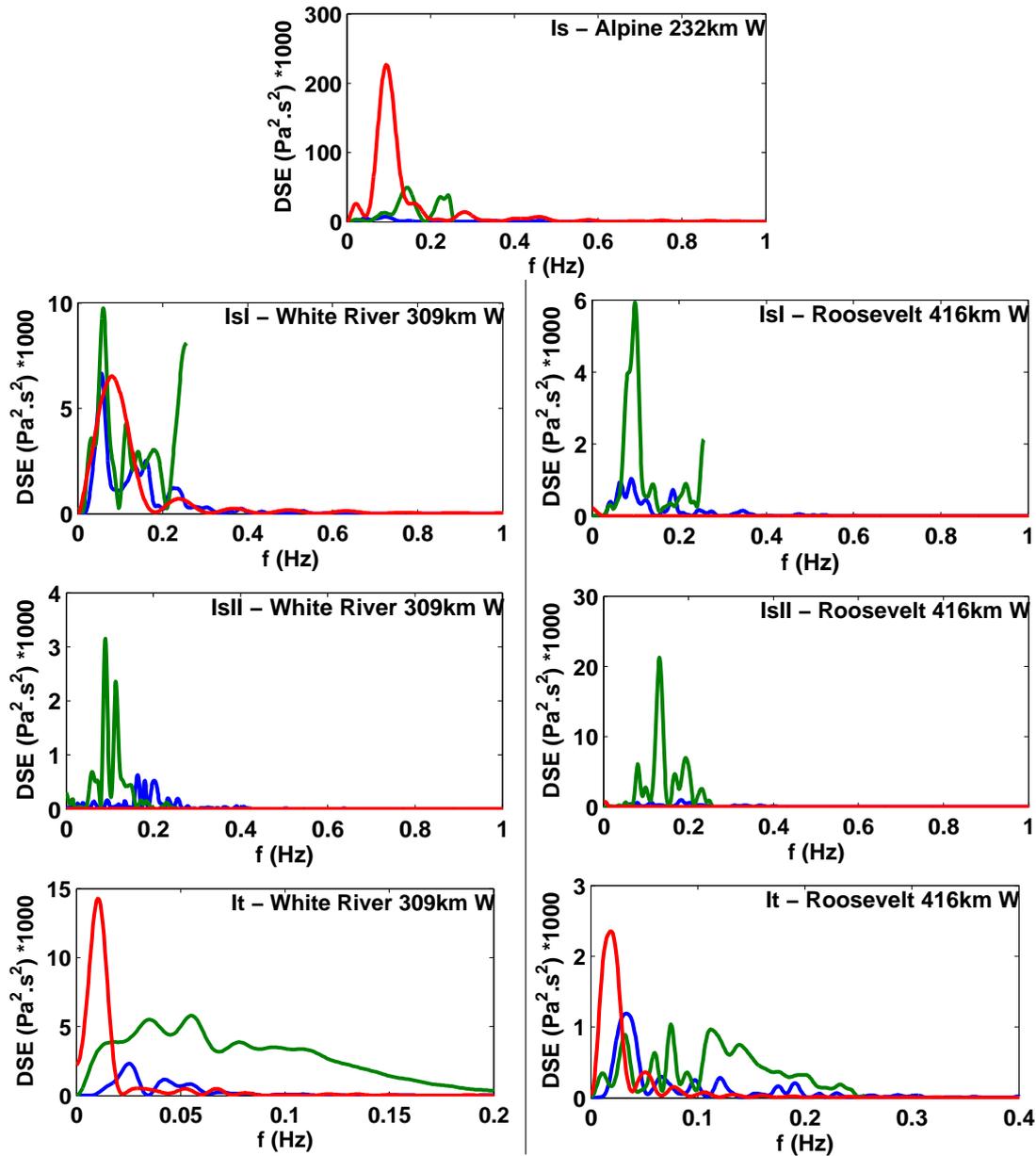


FIGURE 4.19 – Spectres des phases mesurées (– bleu), calculées par le tracé de rayons non linéaire (– rouge) et calculées par la méthode parabolique (– vert) aux stations de Alpine, White River et Roosevelt. Le calcul pour l’équation parabolique est effectué entre 0 et 0,25 Hz, le spectre étant brusquement coupé à cette dernière fréquence.

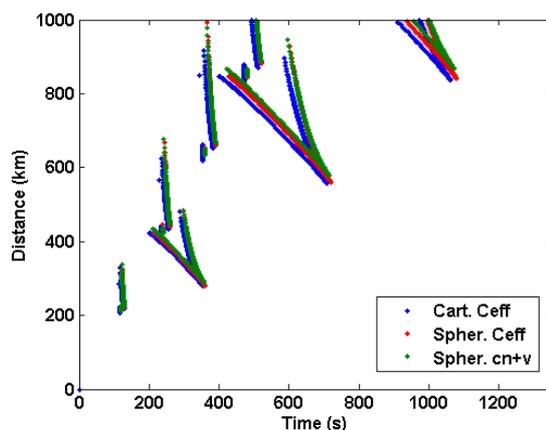


FIGURE 4.20 – Évaluation de l'effet de la rotondité de la terre et de la célérité effective sur les phases et leur temps d'arrivée à l'aide de la méthode de tracé de rayons. Les champs de vents sont ceux de Misty Picture et la propagation est réalisée en deux dimensions vers l'ouest. Les différentes phases stratosphériques et thermosphériques sont identiques à celles de la figure (4.16). Les calculs sont effectués en coordonnées cartésiennes avec la célérité effective (●), en coordonnées sphériques avec la célérité effective (●) et avec la convection sous forme vectorielle (●). La célérité effective est calculée dans la direction ouest.

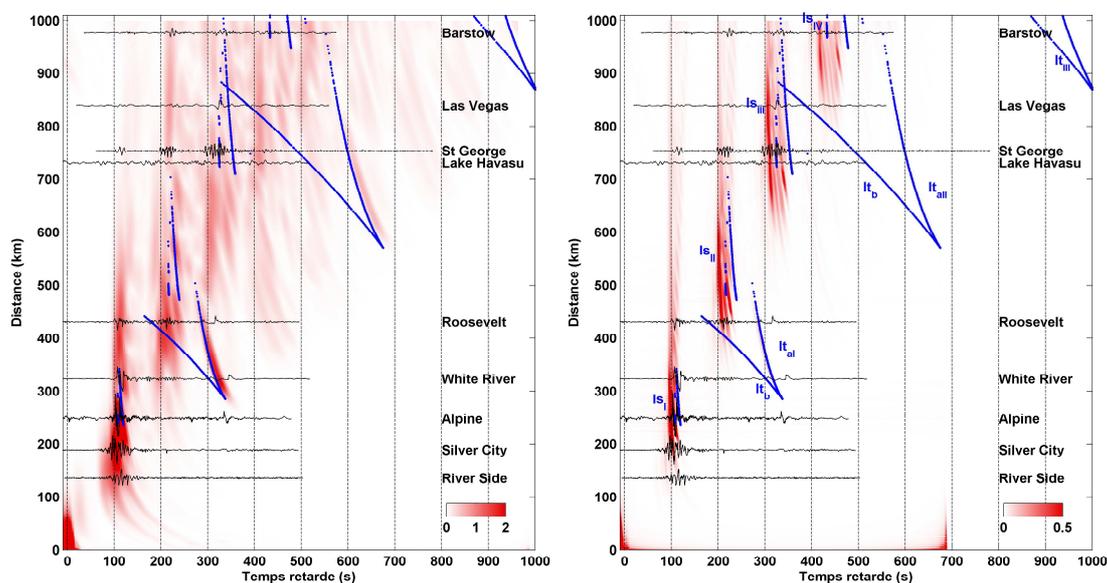


FIGURE 4.21 – Diagrammes temps relatif - distance pour des signaux sources de fréquence centrale **0,1 Hz** et **0,5 Hz**. Le premier diagramme (0,1 Hz) est une autre représentation de celui de la figure (4.16). L'amplitude moyenne sur 3,5 s des signaux obtenus par la méthode parabolique est indiquée en rouge. Le décalage entre les résultats du calcul parabolique (rouge) et du tracé de rayons (bleu) est dû à la différence de coordonnées entre les codes (cf. section 4.2.4) et à un décalage de 10 s du temps d'émission permettant aux graphiques d'être plus lisibles.

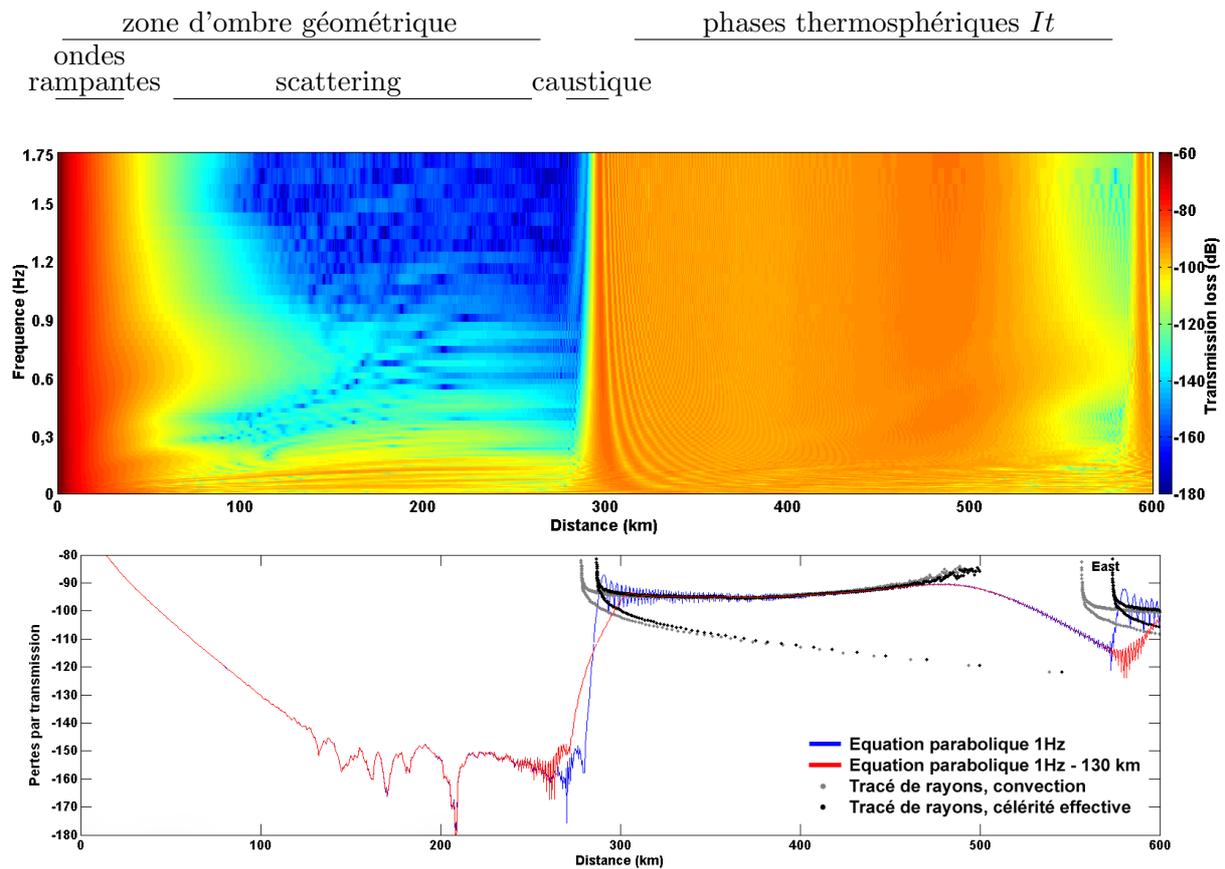


FIGURE 4.22 – a) Pertes par transmission au sol en fonction de la distance à la source et de la fréquence obtenue par l’approximation parabolique. La propagation est réalisée vers l’est avec les profils météorologiques de référence de l’expérience Misty Picture. La méthode numérique inclue le vent à l’ordre le plus bas, soit à l’aide de la vitesse du son effective. L’absorption atmosphérique n’est pas modélisée dans les calculs. b) Le second graphique présente une coupe du premier graphique pour la fréquence 1 Hz (bleu). La courbe rouge présente le même résultat mais pour une atmosphère limitée à 130 km d’altitude ce qui élimine la phase thermosphérique  $It_b$ . L’amplitude obtenue par le tracé de rayons en prenant le vent par l’intermédiaire de la célérité effective (noir) ou directement sous sa forme vectorielle (gris) est également représentée.

propagation et du rehaussement des récepteurs relativement à la source.

Les positions des phases et des zones d'ombre associées sont également décalées. Le début du premier rebond de la phase stratosphérique apparaît à 208 km en coordonnées cartésiennes et à 212 km en coordonnées sphériques. Pour la phase thermosphérique, ces distances sont respectivement 287 km et 288 km. Ces différences sont faibles relativement aux distances de propagation et aux incertitudes sur les profils météorologiques. Cette erreur est d'autant plus négligeable que les effets de diffraction pour les infrasons sont importants. Les débuts des phases correspondent à l'intersection des caustiques avec la surface du sol. Les caustiques des phases stratosphériques font un angle plus faible avec la surface du sol que ne le font celles des phases thermosphériques (cf. figure (4.12)). Ceci permet d'expliquer qu'une modification de l'altitude relative de la surface du sol par rapport à la source affecte plus la position des caustiques stratosphériques que celle des caustiques thermosphériques. Cependant, le passage en coordonnées cartésiennes modifie peu les formes d'onde des phases infrasonores ni leur amplitude.

### Effets du vent

L'impact de la convection de l'atmosphère sur la propagation des ondes infrasonores est très important que ce soit sur le type des phases observées, sur les temps de propagation, sur l'azimut d'observation, sur l'amplitude des ondes ou encore sur les formes d'onde. Ces effets peuvent être observés sur les figures de la section précédente et en particulier sur les cartes de directivité (figure (4.15)) et les cartes de pression (figures (4.12) et (4.13)).

Dans cette partie, nous nous intéressons plus en détails à l'erreur due à l'utilisation de la vitesse du son effective au lieu du vent sous une forme vectorielle. Rappelons que pour l'approximation parabolique, la célérité effective revient à introduire le vent à l'ordre le plus bas en nombre de Mach. Comme précédemment, nous utilisons le tracé de rayons pour évaluer cette approximation. La figure (4.20) permet d'évaluer l'erreur sur le temps de propagation et sur la position des phases dans un cas de propagation réaliste. Excepté pour les phases thermosphériques  $It_b$ , la différence de temps d'arrivée est très faible, inférieure à 1 s. Par contre, le décalage en espace sur la position des caustiques est important pour les phases thermosphériques  $It_a$  et  $It_b$ , allant jusqu'à 11 km pour la première réflexion. Ce décalage est de quelques kilomètres pour les phases stratosphériques. Les effets sur l'amplitude des phases sont faibles comme le confirme la figure (4.22).

Pour conclure, l'effet de l'approximation au premier ordre en nombre de Mach est faible sur le temps de propagation et sur l'amplitude de l'onde. Cependant, cette approximation est source d'erreur sur la position d'apparition des phases.

### Diffraction des ondes infrasonores

En acoustique géométrique, la diffraction des ondes est négligée. La figure (4.22) permet d'évaluer la limite de validité de l'acoustique géométrique pour le champ de vents de Misty Picture. On compare l'amplitude au sol calculée à l'aide de la méthode de tracé de rayons avec l'amplitude calculée à l'aide du code parabolique pour différentes fréquences. Pour toutes les fréquences, il existe une phase troposphérique  $Iw$  dans la zone d'ombre géométrique dont la décroissance est globalement en  $1/r$  pour le niveau de pression. Par contre, entre 50 et 275 km, le niveau de pression est fortement dépendant de la fréquence. En hautes fréquences, on tend vers la solution de l'acoustique géométrique avec une perte par transmission supérieure à -160 dB. En basses fréquences, l'amplitude dans la zone d'ombre géométrique peut être très importante, de l'ordre de grandeur de l'amplitude des phases thermosphériques. En prenant comme limite une perte par transmission de -140 dB, on peut estimer qu'en dessus de 0,6 Hz, l'approximation géométrique donne un résultat satisfaisant. En dessous de cette fréquence, les mécanismes de diffraction et la réflexion partielle sur les inhomogénéités du milieu doivent être modélisés. La

limite en fréquence dépend de la taille des structures du milieu et n'est pas fixe vis à vis du problème de propagation. La valeur de 0,6 Hz est liée aux profils météorologiques utilisés.

La figure (4.22) montre également que la diffraction au niveau de la caustique est importante quelle que soit la fréquence et que le tracé de rayons surestime fortement l'amplitude de l'onde. Par contre, les amplitudes des phases thermosphériques sont bien retrouvées. Ajoutons qu'à la distance de 500 km, le tracé de rayons surévalue également l'amplitude de la phase du fait de la présence d'une seconde caustique pour la phase thermosphérique  $It_a$  que l'on retrouve sur la figure (4.12) (en vert vers l'est à 500 km). Cette caustique ne présente pas de pic en amplitude car elle est coupée par le rayon limite tangent au sol au niveau de la source.

La figure (4.21) permet d'étudier l'effet de la diffraction sur l'amplitude des signaux en fonction de la fréquence centrale du signal source. La diffraction à 0,5 Hz est globalement moins importante qu'à 0,1 Hz. D'abord, il est nécessaire de noter que la phase thermosphérique  $It_a$  est atténuée pratiquement totalement à 0,5 Hz du fait de l'absorption atmosphérique. Ceci à pour conséquence, outre la faible amplitude de la phase thermosphérique  $It_a$ , de diminuer également l'amplitude des phases diffractées  $Id$ . Celles-ci sont présentes à 0,1 Hz et pratiquement absentes à 0,5 Hz. La phase troposphérique  $Iw$  s'étend quant à elle sur une distance légèrement plus courte, ce qui est corrélé au mécanisme des ondes rampantes qui dépend fortement de la fréquence. Les phases stratosphériques ont pour leur part une amplitude beaucoup plus faible dans la zone d'ombre située entre la source et leur distance d'apparition. Par exemple, la phase stratosphérique  $Is_I$  apparaît à 180 km pour une source de fréquence 0,5 Hz tandis qu'elle apparaît à une distance inférieure à 100 km pour la fréquence de 0,1 Hz. Par contre, les phases stratosphériques peuvent être observées bien au delà de ce que prévoit l'acoustique géométrique. La phase stratosphérique  $Is_I$  est présente jusqu'à 1000 km pour les deux fréquences. Cette observation est en accord avec les mesures qui rapportent des fréquences plus élevées pour les phases stratosphériques que pour les phases thermosphériques même pour les signaux mesurés à longue distance.

Ainsi, les mécanismes de diffraction doivent être pris en compte même pour des fréquences allant au delà de 0,5 Hz lorsque l'on se situe au voisinage d'une caustique mais également pour retrouver l'ensemble des phases stratosphériques à grande distance.

### Importance des effets non linéaires

Dans cette section, nous cherchons à évaluer l'importance des effets non linéaires sur l'évolution de la forme d'onde le long des rayons pour l'explosion Misty Picture. La distance de formation du choc  $t_{\text{choc}}$  et le nombre de Gol'berg  $\nu_G$  (cf. section 3.2.1) caractérisent l'importance des effets non linéaires par rapport respectivement à la distance de propagation et aux effets dissipatifs linéaires. Ces deux grandeurs sont représentées dans le cas de l'expérience Misty Picture pour les rayons propres arrivant aux stations de Alpine, White River et Roosevelt (figure (4.23)). Les signatures en pression sont calculées le long de ces rayons à partir du modèle de Kinney et en résolvant l'équation de Burgers généralisée. Les caractéristiques de ces signaux, *i.e.* la fréquence centrale et l'amplitude, sont évaluées le long des rayons ce qui permet de revenir au temps de formation du choc et au nombre de Gol'dberg.

Le temps de formation du choc est de l'ordre de 100 s ce qui correspond à une distance d'environ 30 km. Ainsi, au bout d'environ 100 s, la signature en pression, quelque soit sa forme à la source, fusionnera pour donner une unique onde en « N ». Étant donné que le temps de propagation jusqu'aux stations ( $\sim 1000$  s) est 10 fois supérieur au temps de formation du choc, le signal obtenu à la station sera une onde en « N ».

Le nombre de Gol'berg est pour sa part supérieur à approximativement 17, ce qui implique que les effets non linéaires sont dominants par rapport aux mécanismes linéaires d'absorption. Cette valeur limite, proposée par Rogers & Gardner [172], sépare le cas où les mécanismes d'ab-

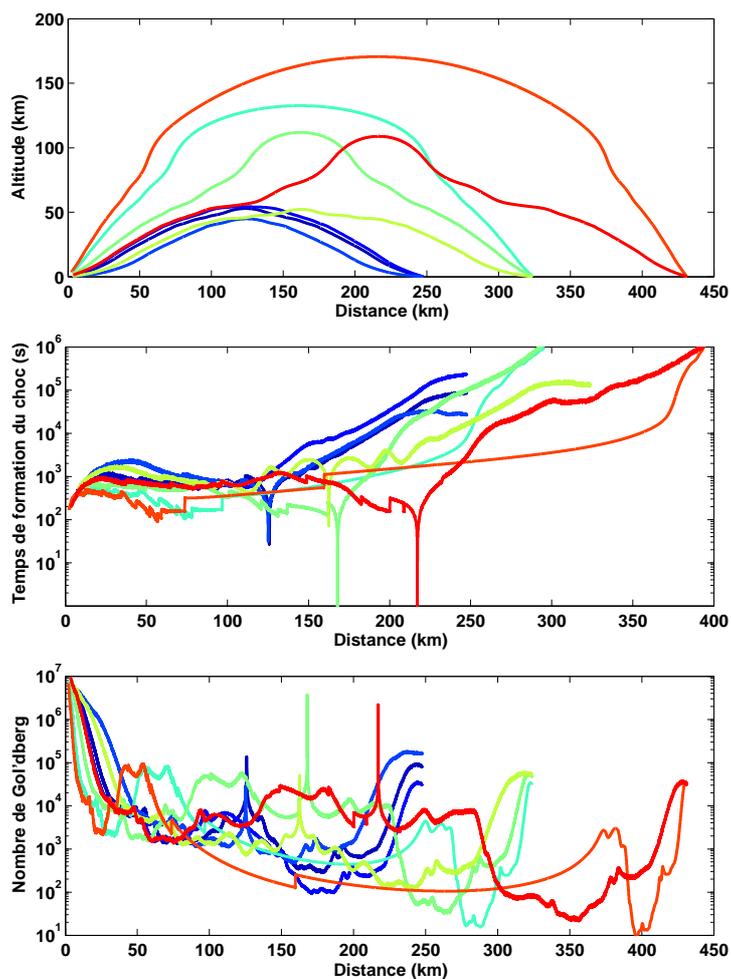


FIGURE 4.23 – Temps de formation du choc et nombre de gold'berg pour les rayons propres obtenus aux stations de Alpine, White River et Roosevelt. Ces deux grandeurs sont calculées à partir de la fréquence centrale et de l'amplitude du signal simulé.

sorption dus aux effets non linéaires dominant de celui où la viscosité et la vibration moléculaire dominant. Étant donné que les effets non linéaires sont dominants, ceux-ci doivent être modélisés afin de connaître la durée des signaux. La longueur du signal sera fortement influencée par les effets non linéaires. Les effets d'absorption sont néanmoins importants lorsque l'on s'intéresse au temps de montée des chocs ou pour des sources de plus faibles amplitudes.

Dans une application où l'on ne connaît pas *a priori* l'importance relative des effets non linéaires par rapport aux effets de dissipation linéaires, il est nécessaire de résoudre l'équation de Burgers généralisée complète.

### 4.3 Conclusion

L'expérience Misty Picture est unique de par la qualité et la quantité des mesures barométriques réalisées. Ces mesures permettent de caractériser le signal au niveau de la source et d'étudier la propagation des ondes infrasonores jusqu'à 1000 km de la source. L'ensemble de ces données permettent de définir un cas de propagation de référence des ondes infrasonores à grande distance pour une source de fréquence centrale de 0,1 Hz.

L'étude de l'expérience Misty Picture montre que les phases stratosphériques sont présentes sur une zone bien plus étendue que celle prédite par l'acoustique géométrique. En effet, l'ensemble des arrivées stratosphériques sont observées jusqu'à 1000 km avec des fréquences allant jusqu'à 0,5 Hz. Les simulations montrent que ces arrivées sont dues au phénomène de scattering par les inhomogénéités de l'atmosphère. À l'inverse, les phases thermosphériques sont très bien identifiées par la méthode de tracé de rayons. Nos études montrent également que des phases converties peuvent exister mais leur amplitude est trop faible pour être observées expérimentalement.

L'étude de la première zone d'ombre géométrique à l'Est de la source montre que le mécanisme permettant à de l'énergie d'y entrer est essentiellement le scattering. La diffraction proprement dite a une influence locale au niveau des caustiques et de la source. Au voisinage des caustiques, la diffraction de l'onde s'observe sur quelques longueurs d'onde seulement. Les ondes rampantes sont, quant à elles, observées dans la zone d'ombre à plusieurs dizaines de kilomètres de la source. Cependant, ces arrivées sont facilement identifiables en raison de leur temps d'arrivée, qui coïncide avec celui des phases troposphériques, et de leur signature en pression.

Les calculs de formes d'onde montrent l'importance des effets non linéaires, en particulier sur le décalage de la fréquence centrale de l'onde vers les basses fréquences que ce soit pour les phases thermosphériques ou stratosphériques. Hors des zones d'ombre, la méthode de tracé de rayons non linéaire est suffisante à elle seule pour reproduire la signature en pression des phases thermosphériques et stratosphériques. Cependant, la présence de nombreuses caustiques limite fortement la validité de la méthode en particulier pour les phases stratosphériques, l'amplitude des ondes étant souvent surestimée. Ces calculs permettent cependant d'effectuer une estimation plus fine de l'énergie de la source qu'en utilisant les lois empiriques données dans la section 4.1.

Enfin, nous avons observé que la méthode de tracé de rayons est essentiellement limitée en très basses fréquences par l'absence de scattering du modèle et localement par l'existence de caustiques. Ainsi, nous nous attendons à ce que le tracé de rayons coïncide plus, en terme de répartition du niveau d'énergie, avec les mesures pour des sources de fréquence centrale supérieure à 1 Hz telles que le Concorde.

## Chapitre 5

# Étude de la propagation des infrasons émis par un avion supersonique

Les sources en mouvement supersonique telles que le Concorde génèrent un système d'ondes de choc aérodynamique. Ces ondes de choc se propagent dans l'atmosphère et le bruit qui leur est associé est appelé *bang supersonique*. Les ondes de choc formées par un avion supersonique peuvent être observées à la surface du sol sous deux formes différentes : le bang primaire et le bang secondaire.

Le bang primaire fait référence aux ondes de choc qui se propagent vers le bas à partir de l'avion et qui arrivent directement au sol. La forme d'onde classique est un double choc dit en « N » correspondant à deux augmentations rapides de la pression pouvant atteindre 100 Pa et séparés de quelques dixièmes de secondes [160]. Le bang primaire est connu pour la gêne occasionnée [119] obligeant les avions supersoniques à survoler les océans uniquement. Au bang primaire est associée la carquette primaire correspondant aux zones de la Terre où le bang primaire est perçu. Le bang primaire a fait l'objet de nombreuses études comme le rapporte Plotkin [160, 161]. Cependant, des problèmes restent ouverts tels que la propagation de l'onde au travers de la turbulence [37, 155, 31, 125]. Au voisinage de la carquette primaire se situe une zone d'ombre géométrique pour laquelle les effets de diffraction sont importants [53] et dans laquelle peu de modèles permettent de calculer le champ acoustique. Un autre problème en relation avec le bang primaire est la focalisation des chocs lors des manœuvres de l'avion. L'une des focalisations est causée par l'accélération de l'avion lors de son passage en vitesse supersonique [34, 100]. Enfin, des premières études statistiques sur les nuisances liées au bang primaires tenant compte de différentes conditions météorologiques ont été réalisées [33] et restent à poursuivre.

Le bang secondaire désigne l'ensemble des autres arrivées observées lors du passage d'un avion supersonique. Ces arrivées secondaires sont dues à la réfraction des ondes au niveau de la stratosphère et de la thermosphère. Bien que les ondes de choc soient composées de hautes fréquences dans le champ proche de l'avion, elles se transforment en ondes infrasonores sous l'influence des effets non linéaires. Elles peuvent ainsi se propager à grandes distances dans l'atmosphère. Aux États-Unis [195], en Suède [126] et en France [118], les infrasons émis par le Concorde ont été quotidiennement enregistrés et étudiés. Weber & Donn [195] associent les arrivées à des phases stratosphériques et thermosphériques, les secondes couvrant une gamme de fréquences plus basses que les premières. Ils concluent également que le guide d'onde stratosphérique n'est formé que lorsque le vent est portant dans la stratosphère. Liszka [126] montre que les ondes infrasonores émises par le Concorde peuvent être observées à plus de 2000 km de

la source du fait de la focalisation de ces ondes. Cette focalisation à très grande distance est liée à la rotondité de la Terre et à la trajectoire de la source qui a un mouvement quasi-circulaire autour du pôle nord. Le Pichon & al. [118] effectuent une étude statistique des enregistrements infrasonores à la station de Flers du Concorde pour l'année 1999. Cette étude permet notamment d'évaluer l'importance des variations saisonnières du vent sur la propagation des infrasons.

La propagation du bang supersonique est généralement caractérisée par trois régions : champ proche, champ à moyenne distance et champ lointain [160]. Les limites entre ces régions ne sont pas nettes. Kaouri [100] utilise respectivement les dénominations de région interne, région moyenne et région externe qui semblent mieux appropriées. Dans la région interne, la forme de l'avion est très importante et les effets non linéaires et les inhomogénéités du milieu sont supposés négligeables. Dans la région moyenne, la propagation est dominée par les effets non linéaires. En région externe, les effets non linéaires ont transformé le signal source en une onde en « N » et la stratification du milieu est aussi importante que les effets non linéaires. Les deux premières régions ont largement été étudiées par Whitham [199]. La fonction dite de Whitham [157] permet de connaître le champ de pression à partir de la forme de l'avion en régime linéaire. Cette solution est propagée dans la région moyenne à l'aide de la méthode des caractéristiques non linéaires [199, 100]. Le calcul en région externe est classiquement réalisé dans le cadre de l'acoustique géométrique en tenant compte des effets non linéaires pour les chocs faibles. Les calculs sont réalisés de manière analytique [100, 172] ou numérique [91, 203, 59, 162].

La propagation du bang secondaire est un problème à trois dimensions. La forme du front d'onde au voisinage de la source est un cône qui se propage dans un milieu stratifié dans lequel les effets de réfraction dominants sont verticaux. De ce fait, il n'est pas possible d'approcher le problème par un calcul en deux dimensions comme il est possible de le faire pour une source explosive ponctuelle. Peu de méthodes numériques permettent de modéliser la propagation 3D d'une onde à très grandes distances pour des temps de calcul raisonnables. L'initialisation d'un choc dans un maillage grande échelle est également un problème délicat, surtout pour des trajectoires complexes telles que celle du Concorde. Pour ces raisons, la méthode de tracé de rayons est pour le moment la seule méthode fonctionnelle.

Le Concorde, comme tout avion engendre d'autres sources aéroacoustiques de bruits, notamment les jets des réacteurs et des cavités sur son fuselage. Cependant, leur rayonnement est moins fort que l'amplitude du choc hydrodynamique, la décroissance de l'amplitude étant sphérique. Nous nous limitons donc à l'étude de la propagation des ondes de choc aérodynamiques.

Dans cette section, nous nous intéressons à la propagation à plusieurs centaines de kilomètres du bang secondaire émis par le Concorde. Nous commençons par décrire les données et le modèle de source nécessaires à la modélisation de la propagation des infrasons par la méthode de tracé de rayons. Les méthodes d'analyse des enregistrements infrasonores réalisés à la station de Flers sont ensuite présentées. Un événement caractéristique du Concorde est alors étudié en détails. La propagation des ondes émises par le Concorde est analysée et des comparaisons sont réalisées entre les mesures et les simulations. Enfin, nous étudions pour l'année 2002 les enregistrements de manière statistique tout en les comparant avec les modèles.

### 5.1 Modélisation du Concorde

Les données nécessaires à la modélisation de la propagation des ondes émises par le Concorde et au calcul de la signature en pression au niveau de récepteurs sont la trajectoire de la source, la forme d'onde au niveau de la source et les données météorologiques. Le modèle de source pour le tracé de rayons est présenté à la section 2.3.4.



FIGURE 5.1 – Carte des couloirs aériens du Concorde. Le couloir vert correspond aux vols vers les États-Unis et les couloirs bleus et violets aux vols vers la France.

### 5.1.1 Trajectoire

La trajectoire du Concorde arrivant en France est extraite du plan de vol de l'avion (cf. figure (5.1)). Après avoir traversé l'océan atlantique à un nombre de Mach de 2, l'avion décélère et commence sa descente à l'approche de la France (cf. figure (5.2)). Au passage de Guernsey, le Concorde atteint l'altitude et la vitesse des avions de ligne. Le passage en vitesse subsonique a lieu à une centaine de kilomètres avant Guernsey. Pour l'étude de la propagation des infrasons, seules les parties supersoniques situées entre 500 km avant l'Europe et la côte nous intéressent. Les ondes émises avant ne sont pas mesurées au niveau de la station de Flers.

Dans le code de tracé de rayons, la trajectoire de l'avion supersonique est une fonction du temps d'émission  $\tau$ . Cette fonction doit être deux fois dérivable afin de pouvoir calculer l'accélération de l'avion en tout point d'émission. La trajectoire est, comme pour l'atmosphère un modèle représentatif de l'avion à l'échelle globale. Les petites fluctuations de vitesse ou d'altitude n'ont pas lieu d'être prises en compte pour l'étude de la propagation des ondes sur plusieurs centaines de kilomètres. Ainsi, nous avons filtré la trajectoire pour ne conserver que les fluctuations d'une taille supérieure à quelques kilomètres. Ce filtrage est réalisé en considérant la latitude, l'altitude et le temps comme des fonctions de la longitude. En coordonnées sphériques, le calcul de la vitesse et de l'accélération de l'avion à partir de la trajectoire n'est pas direct et est effectué d'une manière analogue au calcul des équations des rayons.

Les lignes New York-Paris et New York-Londres ont été exploitées jusqu'en octobre 2003. La ligne pour Paris était exploitée tous les jours sauf le mardi et le samedi. Le départ était à 8h30 de New-York et l'arrivée vers 17h25 (heure locale) à Paris. La ligne pour Londres était exploitée tous les jours avec un vol partant à 13h30 et arrivant à 22h25. Ce vol était avancé le samedi.

### 5.1.2 Forme d'onde à la source

Le déplacement supersonique d'un objet dans un milieu compressible produit un système d'ondes. La formation de ces ondes est un problème aérodynamique linéaire. Par contre, la propagation de ces ondes est non linéaire et conduit à des chocs faibles. Whitham [199] a étudié en détails la formation de ce champ de surpression ainsi que la propagation en milieu homogène des ondes et la formation des chocs. Il montre en particulier que le calcul linéaire des ondes au voisinage de l'avion est une condition initiale correcte pour l'initialisation de la propagation non linéaire de ces ondes. Les amplitudes du champ de surpression obtenu en linéaire sont justes mais les caractéristiques du problème de propagation ne le sont pas. Les effets non linéaires décalent ces caractéristiques. Le code de tracé de rayons tient compte de ces effets non linéaires et nécessite seulement une condition initiale au voisinage de la source compatible avec l'acoustique

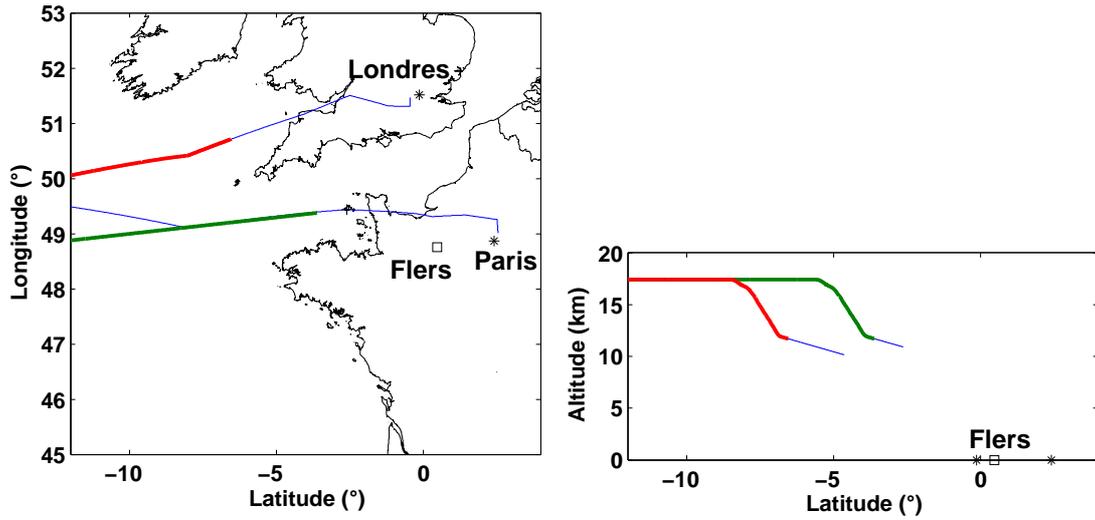


FIGURE 5.2 – Trajectoires du Concorde à l’approche de la France et de l’Angleterre. Les traits épais indiquent où l’avion vole à une vitesse supersonique. Notons qu’il existe deux trajectoires possibles pour le Concorde arrivant en France dans la partie supersonique. Nous utilisons la trajectoire en gras dans nos simulations.

géométrique.

Le problème de la formation des ondes acoustiques est généralement résolu dans le repère de l’avion, l’écoulement autour de l’avion étant alors supersonique. Le milieu est modélisé par les équations d’Euler linéarisées et l’avion est supposé à symétrie cylindrique autour de la direction de l’écoulement. Le calcul du champ de surpression peut être réalisé numériquement [47, 180, 160, 95] ou approché analytiquement [199, 100]. L’expression du champ de surpression pour un avion de section quelconque  $S(\zeta)$ , où  $\zeta$  est la distance au nez de l’avion, allant à vitesse constante  $u_s$  dans un milieu homogène est connue dans l’approximation champ lointain. Ce champ de surpression  $p'$  est donné par Whitham [199, 157] :

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0 u_s^2}{\sqrt{2r\sqrt{M^2 - 1}}} F_w \left( \left( t - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_s(0))}{c_0} \right) \cdot u_s \right), \quad (5.1)$$

où  $M = u_s/c_0$  est le nombre de Mach,  $c_0$  la vitesse du son et le point  $\vec{x}_s(\tau)$  est la position de l’avant de l’avion au temps  $\tau$ . Les points de l’espace sont définis en coordonnée cylindrique :  $\vec{x} = x\vec{e}_u + r\vec{e}_r$ .  $\vec{e}_u$  est la direction suivant laquelle vole l’avion et  $\vec{e}_r$  est un vecteur radial quelconque. Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est défini lors du développement par :

$$\vec{n} = \frac{1}{M}\vec{e}_u + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}\vec{e}_r.$$

$F_w$  est la fonction F de Whitham définie par rapport à la section de l’avion  $S(\zeta)$  :

$$F_w(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{S''(\bar{\zeta})}{\sqrt{\zeta - \bar{\zeta}}} d\bar{\zeta}, \quad (5.2)$$

où  $S''$  désigne la dérivée seconde de la section de l’avion  $S$ .

Dans l’expression (5.1) du champ de surpression généré par une source supersonique, le facteur devant la fonction de Whitham traduit essentiellement la décroissance cylindrique de l’onde. La fonction de Whitham donne la forme d’onde ainsi que la géométrie du front d’onde.

La décroissance cylindrique de l'amplitude de l'onde peut être considérée comme une fonction lentement variable en espace et en temps par rapport à la fonction de Whitham. En s'intéressant à l'argument de la fonction de Whitham, on observe que les points de l'espace et du temps vérifiant  $t - \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_s(0)) = \text{Cte}$  ont, à la décroissance géométrique près, la même amplitude. Ces points définissent dans l'espace des cônes dont les sommets appartiennent à la trajectoire de l'avion. Ces cônes sont communément appelés cônes de Mach bien qu'ils ne soient pas dus à la combinaison d'ondes. Ainsi, le champ de surpression généré par une source supersonique est une fonction lentement variable suivant le cône de Mach et qui évolue rapidement perpendiculairement. Nous retrouvons les hypothèses de l'analyse asymptotique présentée au chapitre 2, le front d'onde au niveau de la source étant défini par le cône de Mach.

Nous revenons maintenant à la modélisation de la propagation du bang supersonique dans le cadre de l'acoustique géométrique. Nous reprenons les notations de la section 2.3.4 qui définissent les rayons et le cône de Mach pour une source supersonique. La signature en pression au niveau de la source nécessaire à l'initialisation du calcul de la forme d'onde le long des rayons est obtenue à partir l'expression (5.1) du champ de surpression. Le long du rayon  $\vec{X}(\tau, \psi, t)$ , défini par  $\tau$  et  $\psi$ , le champ de surpression, en milieu homogène et au repos, vaut :

$$p'(\vec{X}(\tau, \psi, t_a), t) = \frac{\rho_0 u_s^2 \sqrt{M}}{\sqrt{2r_a} \sqrt{M^2 - 1}} F_w(u_s(t - t_a)), \quad (5.3)$$

où  $r_a = c_0(t_a - \tau)$  est l'abscisse curviligne le long du rayon et  $M = u_s/c_0$ . La vitesse de l'avion  $u_s(\tau)$  dépend de  $\tau$ , la vitesse du son  $c_0$  et la masse volumique  $\rho_0$  dépendent de la position de l'avion.

En utilisant l'expression (2.44) du volume convecté  $\nu$ , on a dans un milieu homogène et en utilisant les éléments géodésiques de la section 2.3.4 :

$$\nu(t_a) = \frac{t_a - \tau}{|\vec{K}|} c_0^2 \frac{M^2 - 1}{M}.$$

De cette expression et en utilisant celle de la surpression (5.3), on obtient la forme d'onde normalisée :

$$u(\xi, t_a) = \frac{\sqrt{\rho_0} u_s^2}{\sqrt{2K^2 c_0^2}} F_w \left( -\frac{u_s}{\vec{K} \cdot \vec{c}_g} \xi \right), \quad (5.4)$$

en rappelant que  $\xi$  est une distance normalisée au front d'onde,  $\vec{K}$  est le vecteur d'onde et que  $\vec{c}_g$  est la vitesse de groupe. L'amplitude de la forme d'onde normalisée  $u$ , contrairement à celle en pression, n'est pas singulière au niveau de la source. Le calcul de la forme d'onde est donc initialisé à partir de cette expression en  $t_a = \tau$ , soit sur la source.

La forme d'onde au niveau de la source est obtenue à l'aide de la fonction F de Whitham. Pour des formes de fuselage complexes, cette fonction doit être intégrée numériquement [170]. Pour évaluer la forme d'onde analytiquement, nous nous intéressons à un mobile à symétrie de révolution pour lequel le rayon est une fonction parabolique de longueur  $L$  et de rayon maximal  $R_m$ . La section du fuselage  $S$  vérifie :

$$S(\zeta) = \pi \left( 4 \frac{\zeta}{L} \left( 1 - \frac{\zeta}{L} \right) R_m \right)^2, \quad \zeta \in [0, L].$$

Pour ce profil, la fonction de Whitham est :

$$F_w(\zeta) = \frac{32R_m^2}{5L^{3/2}} \begin{cases} 0 & \frac{\zeta}{L} < 0, \\ \sqrt{\frac{\zeta}{L}} \left( 5 - 20\frac{\zeta}{L} + 16 \left( \frac{\zeta}{L} \right)^2 \right) & \frac{\zeta}{L} \in [0 \ 1], \\ \sqrt{\frac{\zeta}{L}} \left( 5 - 20\frac{\zeta}{L} + 16 \left( \frac{\zeta}{L} \right)^2 \right) - \sqrt{\frac{\zeta}{L} - 1} \left( 1 - 12\frac{\zeta}{L} + 16 \left( \frac{\zeta}{L} \right)^2 \right) & \frac{\zeta}{L} > 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

L'amplitude maximale de cette fonction est  $6,4 \frac{R_m^2}{L^{3/2}}$ .

Le Concorde fait 60 m de long et a un rayon de 1,5 m. L'utilisation de la forme parabolique est une approximation forte. Cependant, à grande distance, seule la forme générale de l'onde est importante puisque celle-ci se transforme dans tous les cas en une onde en « N ». Dans nos simulations nous avons utilisé les paramètres  $L = 60$  m et  $R_m = 3$  m ce qui donne pour un vol à Mach 2 à une altitude de 15 km au niveau de la carapette primaire une onde en « N » d'amplitude 96 Pa et de durée 0,22 s. Ces résultats sont en adéquation avec les mesures des vols du Concorde données par Grover [85] (60 à 150 Pa, 250 ms). Ainsi, dans nos simulations, nous utilisons essentiellement le facteur de normalisation dépendant de la vitesse de l'avion. La forme d'onde utilisée aurait pu être une simple onde en « N ». La configuration utilisée donne une amplitude pour l'onde en « N » de 400 Pa à 400 m de la source à une altitude de 17 km. Une modélisation plus réaliste de la forme d'onde à la source nécessite au minimum un calcul exact de la fonction de Whitham correspondant au fuselage du Concorde. Des études complémentaires seraient nécessaires afin de caractériser complètement la forme d'onde au niveau de la source en intégrant par exemple dans les modèles les forces de portance.

### 5.1.3 Champs de vents

Dans nos simulations, les champs de température et des composantes du vent utilisés sont les données ECMWF raccordées avec les modèles empiriques MSIS-90 et HWM-93 (cf. section 2.4). Ces modèles intègrent les variations diurnes et saisonnières de l'atmosphère. La variation saisonnière principale est l'inversion de la direction de la composante zonale du vent au niveau de la stratopause (altitude de 40 à 70 km) entre le printemps et l'automne. Pour la composition de l'atmosphère et les effets de l'absorption, nous utilisons le modèle de Sutherland & Bass [185]. Étant donné que les horaires du Concorde sont approximativement les mêmes tout au long de l'année, il est possible d'étudier les effets des variations saisonnières de l'atmosphère sur la propagation des infrasons.

## 5.2 Mesures barométriques réalisées à la station de Flers

Les infrasons sont continuellement enregistrés à la station barométrique de Flers (20,48 W, 48,76 N). Cette station est un prototype des stations du réseau CTBT. Elle a été installée par la France à des fins scientifiques. Elle permet de caractériser les sources d'infrasons, d'améliorer la connaissance de la propagation atmosphérique des ondes et également de valider les modèles de propagation. Elle est opérationnelle depuis avril 1996. Cette station est composée de quatre éléments disposés aux sommets et au centre d'un triangle isocèle de 3 km de côté. Chaque élément est constitué d'un micro barographe (MB2000) qui peut mesurer la pression absolue ou relative. Les mesures sont principalement bruitées par les effets du vent sur chaque prise d'air du capteur. Pour réduire ce bruit, le capteur est équipé d'un système de 32 entrées disposées dans un disque de 8 m de diamètre. Cette installation est optimisée pour mesurer les infrasons dans la gamme 0,01 Hz à 10 Hz, la fréquence d'échantillonnage des signaux étant légèrement supérieure à 20 Hz.

Les mesures des quatre capteurs de la station sont analysées en temps réel à l'aide de

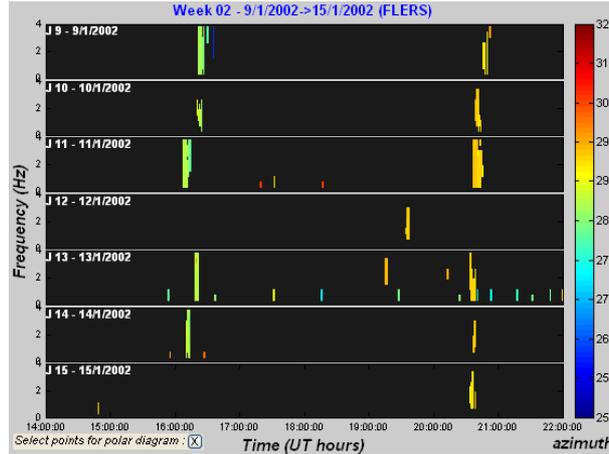


FIGURE 5.3 – Une semaine de détection PMCC automatique des ondes infrasonores à la station de Flers. Seules les détections dont l’azimut est comprise entre 250 et 320 sont représentées. La semaine commence le mercredi 9 janvier 2002.

la méthode PMCC (Progressive Multi-Channel Correlation) issue de la sismologie [40]. Cette méthode permet de détecter toutes les ondes cohérentes arrivant sur la station et de calculer leur azimut d’arrivée et leur vitesse apparente<sup>1</sup>. La méthode PMCC est particulièrement bien adaptée à la détection d’ondes de faible amplitude dans un bruit de fond élevé mais incohérent par rapport à la taille de la station. La méthode PMCC est détaillée dans Cansi & al. [40]. L’analyse des signaux est réalisée par bandes de fréquences et pour une succession de fenêtres temporelles. Elle fournit des détections élémentaires cohérentes dans le domaine temps-fréquence pour lesquelles la vitesse apparente et l’azimut sont connus. Une onde est constituée de plusieurs détections élémentaires cohérentes voisines en temps, en fréquence, en azimut et en vitesse apparente.

Les détections du Concorde couvrent généralement une large bande de fréquences et leur azimut est dans la direction Ouest Nord-Ouest. Les signaux durent plusieurs centaines de secondes ce qui facilite la détection. La figure (5.3) récapitule toutes les détections mesurées à la station de Flers durant la seconde semaine de l’année 2002 dont l’azimut est comprise entre 250 et 320. Les détections du Concorde apparaissent sur toute la gamme de fréquences comprise entre 0 et 4 Hz. Elle ont lieu vers 16 h pour le vol d’Air France et vers 21 h pour le vol de British Airways. Ces horaires de détection sont cohérents avec les horaires de vol, la détection ayant lieu environ une heure avant l’atterrissage de l’avion. Les autres détections basses fréquences sont essentiellement dues à la houle océanique qui se situe également dans cet azimut. La figure (5.4) présente une analyse plus fine d’une détection du Concorde réalisée à l’aide de la méthode PMCC. La méthode PMCC est utilisée à la fois pour détecter les événements en routine sur une année mais également pour analyser en détails des événements particuliers comme nous le regardons dans la section suivant.

### 5.3 Étude d'une détection

Dans cette section, nous étudions la propagation des ondes infrasonores émises par le Concorde en nous appuyant sur la détection à la station de Flers le 15 novembre 1999 des infrasons

1. La vitesse apparente d’une onde correspond à la distance entre deux capteurs (à la surface du sol et alignés suivant la direction de propagation de l’onde) divisée par le temps mit par l’onde pour aller d’un capteur à l’autre. Ainsi, si l’on note  $\theta$  l’angle que fait la normale à l’onde avec la surface du sol et  $c_0$  la vitesse du son, la vitesse apparente vaut  $v_a = \frac{c_0}{\cos\theta}$ .

associés au vol Air France du Concorde. Cette détection a été présentée et étudiée par Le Pichon & al. [118]. Nous l'utilisons comme cas de référence pour la compréhension de la propagation des ondes infrasonores émises par une source supersonique. D'autres détections réalisées en 2002 sont également présentées en annexe E.

### 5.3.1 Arrivées détectées à la station de Flers

L'analyse à l'aide de la méthode PMCC des mesures des quatre capteurs de la station de Flers permet de détecter au moins sept arrivées différentes référencées de (a) à (g) sur la figure (5.4). La durée totale de la détection est d'environ 30 s et toute la gamme des fréquences supérieures à 0,2 Hz est représentée. Tandis que l'azimut reste approximativement constante autour de 287°, la vitesse apparente des ondes augmente globalement au cours du temps. Les arrivées avec la vitesse apparente la plus faible sont associées à des phases stratosphériques tandis que les deux dernières arrivées de vitesse apparente élevée sont associées à des phases thermosphériques. Cette discrimination peut également se faire en considérant le spectre des signaux mesurés. Les phases stratosphériques sont classiquement plus large bande que les phases thermosphériques qui sont essentiellement basses fréquences (<2 Hz).

### 5.3.2 Modélisation de la propagation du front d'onde

Pour modéliser la propagation des ondes acoustiques émises par le Concorde, nous avons utilisé deux profils de vent différents présentés à la figure (5.5). Le premier profil est basé uniquement sur les données statistiques (HWM et MSIS) et le second correspond aux données ECMWF raccordées avec les données statistiques. Nous avons conservé les études réalisées à partir des champs statistiques car elles aident à l'interprétation des mesures barométriques. Dans les deux cas, le milieu dépend des trois dimensions de l'espace. La trajectoire utilisée est celle du Concorde Air France et la propagation est réalisée en trois dimensions, en coordonnées sphériques.

La figure (5.6) présente le front d'onde calculé par la méthode de tracé de rayons au moment où l'avion passe en vitesse subsonique. Du fait de la réfraction des ondes et de la décélération de l'avion, le front d'onde a une forme complexe. On retrouve cependant au voisinage de l'avion le cône qui est très évasé lorsque le nombre de Mach est proche de 1. On observe des réfractions dans la stratosphère pour les rayons émis horizontalement tandis que les rayons émis verticalement vers le haut et le bas se réfractent dans la thermosphère. L'énergie acoustique émise verticalement est piégée dans le guide d'onde thermosphérique tandis que l'énergie émise horizontalement est piégée dans le guide d'onde stratosphérique. Le front d'onde présente de nombreux plis pour la partie piégée dans la stratosphère. Une coupe verticale d'un front d'onde et les trajectoires de deux rayons émis verticalement sont présentées à la figure (5.7). Les positions des caustiques présentes dans le plan de la trajectoire sont également indiquées. Une caustique est présente vers 150 km d'altitude. Les rayons émis pendant le régime de croisière du Concorde viennent la tangenter avant d'être réfractés vers le sol. Pendant la phase de décélération, l'altitude de réfraction diminue, les caustiques se retrouvant en fin de course dans la stratosphère.

La figure (5.8) présente l'évolution en fonction du temps d'émission de la position des points de réflexion des rayons. Les points décrivent des pseudo-carpettes. Les pseudo-carpettes correspondent à la trace sur la surface du sol des rayons (iso temps d'émission). Les carpettes correspondent à l'intersection du front d'onde (iso temps de réception) avec la surface du sol. Le code de tracé de rayons ne permet pas d'obtenir directement les carpettes. Les pseudo-carpettes font apparaître les points de réflexion des phases stratosphériques et thermosphériques. Les différents rebonds de chaque phase sont régulièrement espacés. Les points de réflexions vont par deux, l'un étant associé aux rayons émis vers le bas au niveau de l'avion, l'autre vers le haut. La distance entre les points est égale au double de la distance horizontale parcourue par le rayon

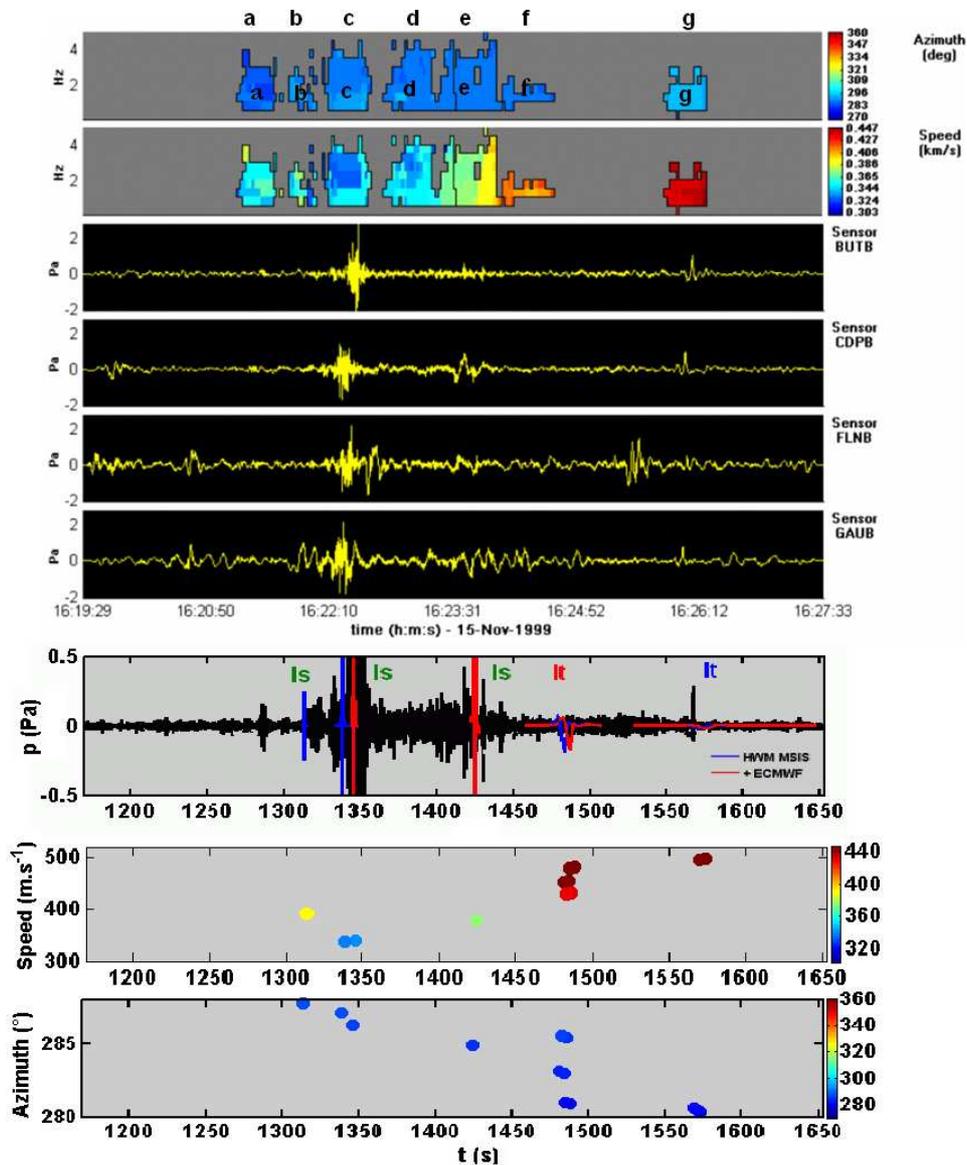


FIGURE 5.4 – Détection des infrasons émis par le Concorde du vol Air France du 15 novembre 1999. Les 6 premiers graphiques présentent l'analyse PMCC (Azimut et Vitesse apparente) des 4 capteurs de la station de Flers. Les trois derniers graphiques présentent les résultats obtenus par la méthode de tracé de rayons. Les échelles de couleurs utilisées entre l'analyse PMCC et les résultats du code de tracé de rayons sont les mêmes. Le recalage en temps est réalisé par rapport à la dernière phase thermosphérique.

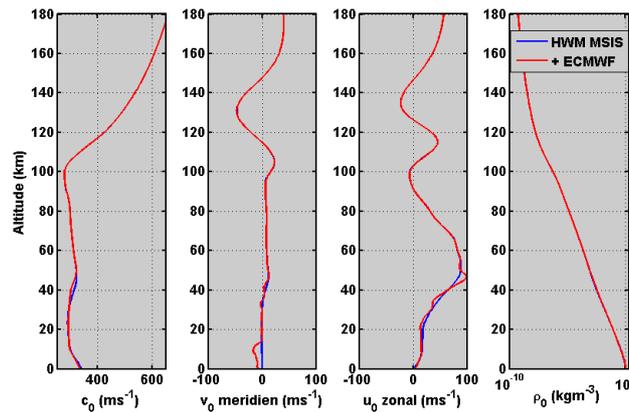


FIGURE 5.5 – Profils météorologiques utilisés pour modéliser la propagation des ondes infrasonores émis par le Concorde. De haut en bas et de gauche à droite, les profils en rouges correspondent aux champs réanalysés raccordés avec les champs statistiques tandis que les champs en bleu correspondent aux données statistiques uniquement. Les champs varient suivant les trois dimensions de l’espace (3D) et sont ici visualisés au point (50 N,0 E).

entre la source et la carapette primaire. Les phases thermosphériques sont observées dans la zone centrale face à l’avion tandis que les phases stratosphériques sont observées de part et d’autre des premières. Entre les temps d’émission  $\tau = 150$  s et  $\tau = 1050$  s l’avion vole à Mach 2 et à altitude constante. Les pseudo-carpettes sont uniquement translatée entre ces deux temps. Au delà de  $\tau = 1050$  s, l’avion ralentit et descend. La forme des pseudo-carpettes varie. La zone où les rayons sont reçus devient plus étroite, centrée autour de la direction de la trajectoire de l’avion. Ces graphiques montrent que plusieurs arrivées peuvent être détectées à la station de Flers et que les ondes arrivant en premier sont émises en dernier.

La carte d’amplitude (cf. figure (5.9)) permet de distinguer la carapette primaire juste en dessous de la trajectoire de l’avion et les carapettes secondaires. La carapette primaire est uniquement au-dessus de l’océan et de la Manche. La carapette secondaire est caractérisée par des formes hyperboliques de forte amplitude (rouge) dont les branches sont orientées vers l’ouest mais également vers l’est. Les formes hyperboliques orientées vers l’ouest sont dues aux caustiques sur lesquelles l’amplitude de l’onde est surévaluée. Les formes orientées vers l’est sont à relier directement aux accélérations de l’avion qui focalisent le front d’onde. Ces formes coïncident avec des iso temps d’émission. Cette carte montre que les phases thermosphériques sont présentes partout mais leur amplitude est relativement faible. Il existe une zone d’ombre entre la carapette primaire et la carapette secondaire liée aux phases stratosphériques.

### 5.3.3 Comparaison des arrivées modélisées et mesurées

Le code de tracé de rayons permet de trouver 5 rayons propres automatiquement (cf. figures (5.4) et (5.10)) sur les 7 arrivées mesurées pour la détection du 15 novembre 1999. Les trois premières arrivées calculées sont des phases stratosphériques  $Is$  émises juste avant que l’avion ne passe en vitesse subsonique. L’arrivée suivante est constituée de trois phases thermosphériques  $It$  émises au-dessus de l’avion et qui arrivent directement à la station de Flers. Ces trois phases sont émises à des temps différents mais voisins et arrivent au même temps. La dernière arrivée est une phase thermosphérique émise sous l’avion et qui se réfléchit sur la surface de la terre. Les phases thermosphériques sont émises avant les phases stratosphériques mais arrivent après du fait de la vitesse supersonique de l’avion. D’autres phases arrivant plus tard que les phases présentées existent mais leur amplitude est trop faible pour être mesurée.

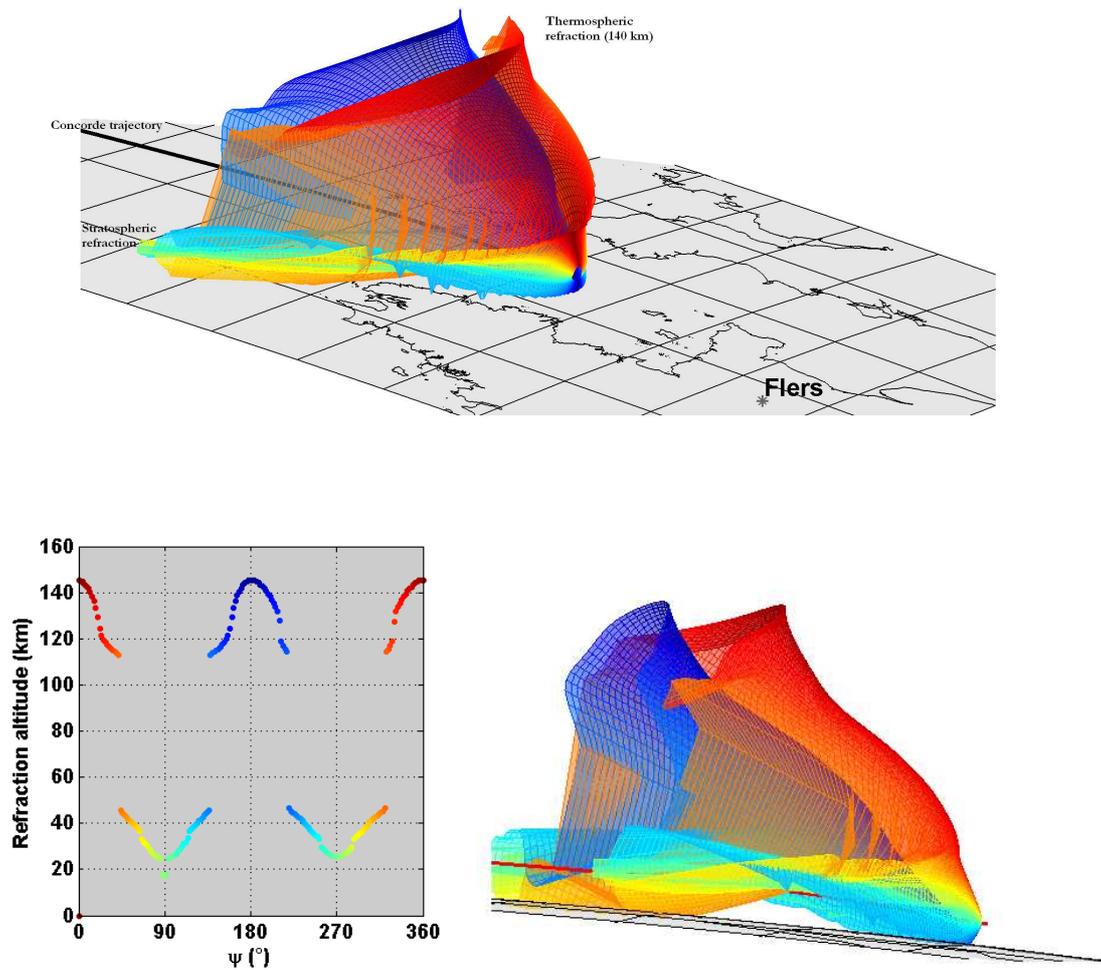


FIGURE 5.6 – Front d'onde émis par le Concorde lors de son arrivée sur la France. Le front d'onde est visualisé au temps  $t = 600$  ce qui correspond approximativement au moment où l'avion passe en vitesse subsonique. Le graphique présente l'altitude de réfraction des rayons émis à  $\tau = 0$  s en fonction de l'azimut autour de l'avion  $\psi$ .

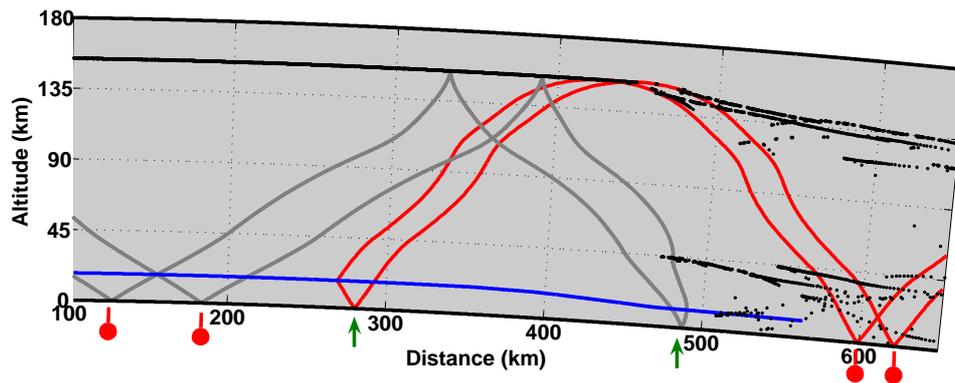


FIGURE 5.7 – Plan vertical de propagation des ondes émises par le Concorde le 15 novembre 1999 dans l’axe de la trajectoire. La coupe du front d’onde (gris) est présentée au temps  $t = 550$  s et les rayons (rouge) sont émis au temps  $\tau = 50$  s. Les premières caustiques rencontrées par les rayons sont indiquées par des points noirs et la trajectoire du Concorde est en bleu. Les carpettes (et pseudo-carpettes) primaires associées aux rayons et au front d’onde sont indiquées par les flèches, les carpettes secondaires thermosphériques par des cercles.

Les temps d’arrivée des trois premières phases stratosphériques calculées sont en accord avec les arrivées (b), (c) et (d-e) mesurées (cf. figure (5.4)). Les temps d’arrivée des phases thermosphériques coïncident quant à eux avec les temps des arrivées (f) et (g) mesurées. Pour ces phases, les temps d’arrivée et les azimuts d’arrivée concordent entre les mesures et la simulation. C’est également le cas de la vitesse apparente des ondes qui caractérise le type de phase. Ainsi, les phases (b) à (g) sont bien identifiées. L’arrivée (b) n’est retrouvée par le code de tracé de rayons qu’en utilisant les champs statistiques tandis que l’arrivée (d-e) est obtenue en utilisant les champs ECMWF raccordés avec les champs statistiques. Le code de tracé de rayons ne permet pas de trouver la première arrivée mesurée notée (a). Cette phase stratosphérique arrivant avant les autres est donc émise après toutes les autres. Le trajet qui semble le plus probable correspond à un rayon émis au-dessus de l’avion, réfracté vers 50 km d’altitude et qui arrive directement au niveau du récepteur. Ce trajet n’existe pas dans le cadre de l’acoustique géométrique mais pourrait éventuellement être trouvé avec un modèle de propagation intégrant la diffraction des ondes.

Les arrivées mesurées (d-e-f) font apparaître une augmentation de la vitesse apparente mesurée. Cette augmentation traduit une élévation de l’incidence de l’onde, soit une transition entre les phases stratosphériques vers les phases thermosphériques. Cette transition est partiellement retrouvée par la méthode de tracé de rayons au travers du caractère multi-arrivées de la première phase thermosphérique.

Par contre, la variation de l’azimut mesurée n’est pas expliquée par le code de simulation. Étant donné que les premières arrivées sont émises en dernier et que le Concorde passe au nord de la station de Flers, nous nous attendons à ce que l’azimut diminue avec les arrivées. Le code de tracé de rayons montre que les effets du vent ne sont pas *a priori* suffisamment forts pour inverser cette tendance. Cependant, la méthode PMCC montre que l’azimut est plus élevé pour la dernière arrivée que pour la première. Cette différence est imputable aux profils de vent utilisés pour la simulation. Les études sur l’année 2002 montrent que le cas d’une évolution positive de l’azimut en fonction du temps d’arrivée est courant.

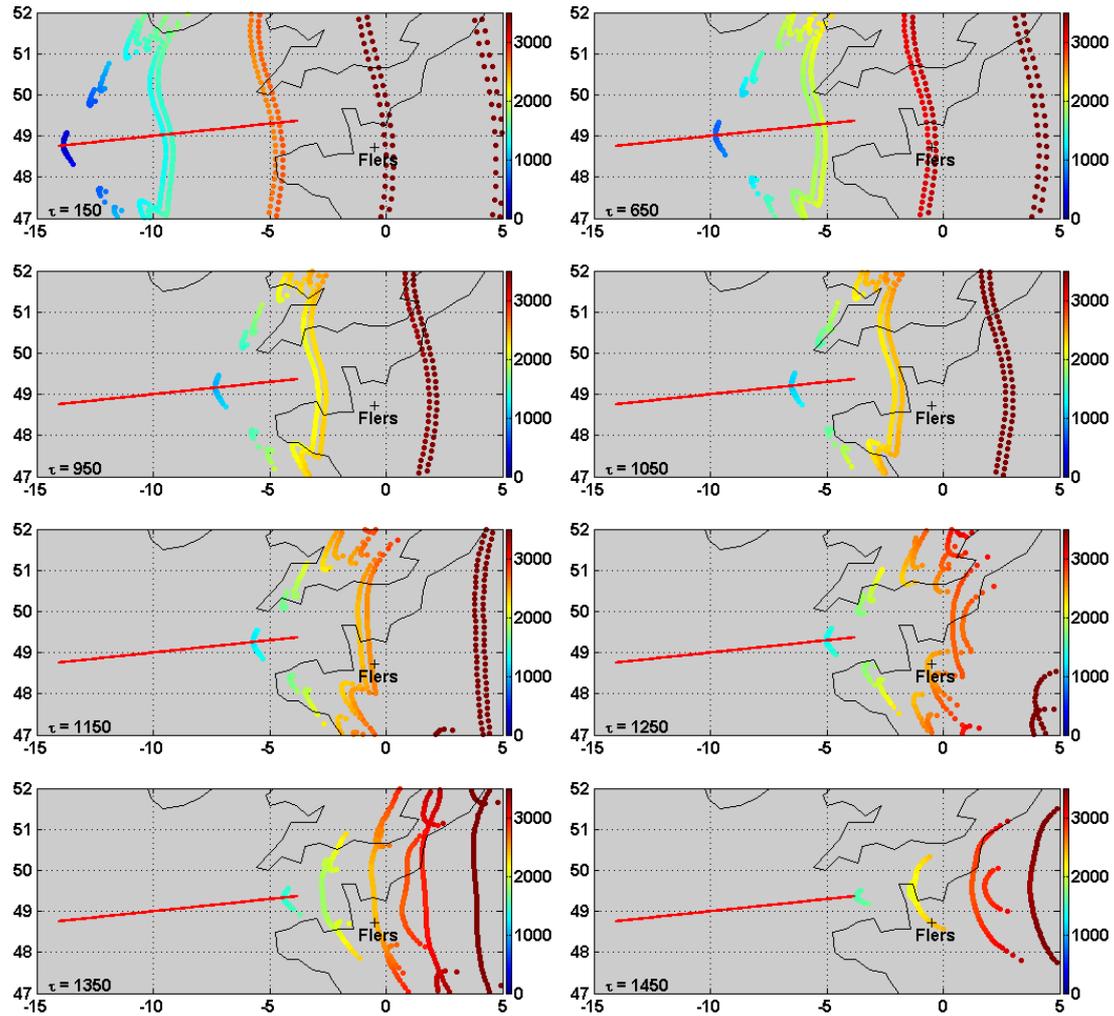


FIGURE 5.8 – Intersection des rayons acoustiques avec la surface du sol. Les coordonnées sont la longitude et la latitude et la couleur correspond aux temps auxquels les rayons se réfléchissent sur le sol. Les différents temps d'émission  $\tau$  sont indiqués sur chaque figure.

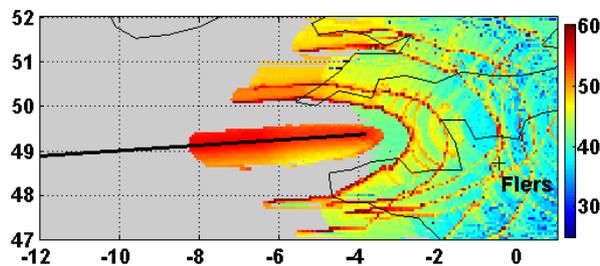


FIGURE 5.9 – Carte de l'amplitude de la surpression ( $20 \cdot \log_{10}(p')$ ) au niveau du sol. Le calcul est linéaire et ne tient pas compte de l'absorption atmosphérique. L'amplitude de référence au niveau de la source est l'amplitude de la fonction de Whitham. Le calcul commence à partir de  $\tau = 800$  s.

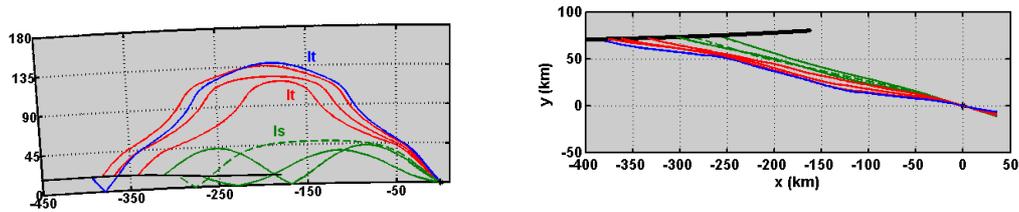


FIGURE 5.10 – Rayons propres obtenus par la méthode de tracé de rayons pour l'étude de la propagation des infrasons émis par le Concorde le 15 novembre 1999. La trajectoire du Concorde est indiquée en noir et la position de la station de Flers est à droite. Les trois trajets stratosphériques sont indiqués en vert, celui en ligne discontinue n'est trouvé qu'en utilisant les champs de vents statistiques. Les trois trajets thermosphériques rouges ont le même temps d'arrivée.

### 5.3.4 Analyse des formes d'onde

Nous souhaitons dans cette partie analyser les formes d'onde mesurées et les confronter aux résultats du code de tracé de rayons. Nous commençons par décrire l'évolution de la forme d'onde le long des rayons pour une phase stratosphérique et une phase thermosphérique. Nous interprétons ensuite ces signaux et les comparons aux mesures par l'intermédiaire de leur densité spectrale d'énergie.

Les signaux au niveau de la station de Flers sont synthétisés en résolvant l'équation de Burgers généralisée le long des rayons. La figure (5.11) présente l'évolution de la forme d'onde pour une phase stratosphérique. Nous nous intéressons à la troisième phase stratosphérique obtenue lors de la recherche de rayons propres. Elle arrive au temps  $t = 1425$  s. Le rayon est émis au-dessus de l'avion, passe deux caustiques et se réfléchit une fois sur la surface de la terre pendant son trajet entre la source et le récepteur. La forme d'onde initiale se transforme en quelques secondes en une onde en « N » qui s'allonge ensuite et diminue en amplitude jusqu'à la première caustique. Le déphasage à la caustique transforme l'onde en « N » en une onde en « U ». Cette dernière se choque à nouveau au cours de la propagation, en particulier juste après la caustique. Au niveau de la seconde caustique, cette onde a repris la forme d'un « N » du fait des effets non linéaires. Ce « N » se transforme en une onde en « U » qui évolue peu jusqu'au récepteur. Les effets non linéaires modifient fortement la forme d'onde, sa durée et son amplitude. L'allongement de l'onde en « N » se traduit par un décalage vers les basses fréquences du spectre de l'onde. La formation du « N » a tendance à engendrer des hautes fréquences qui sont atténuées par les effets de dissipation. Le décalage vers les basses fréquences, et donc vers les infrasons, permet à l'onde de se propager à grandes distances sans être atténuée par l'absorption atmosphérique. On observe qu'après le passage de la première caustique, l'onde ne s'allonge pratiquement plus. L'onde en « U » doit évoluer en une onde en « N » avant de s'allonger à nouveau, ce qui n'arrive qu'au niveau de la seconde caustique. La forme d'onde normalisée  $u$  permet de voir l'influence directe des effets non linéaires et de l'absorption sur l'amplitude de l'onde. Les effets géométriques de convergence et de divergence de l'onde et les variations de la masse volumique n'influencent que l'amplitude de l'onde en pression. Pour la phase stratosphérique, on observe que les effets non linéaires et l'absorption allongent l'onde d'un facteur 4 et diminuent son amplitude d'un facteur 4 également (cf. figure (5.11)).

Nous nous intéressons également à l'évolution de la forme d'onde d'une phase thermosphérique (cf. figure (5.12)). Il s'agit de la dernière phase obtenue par le tracé de rayons qui arrive à  $t = 1573$  s. Le rayon se réfléchit juste en-dessous de l'avion et traverse une caustique dans la thermosphère. Lors de l'intégration de la forme d'onde, du fait de l'allongement du si-

gnal, un grand nombre de remaillages a été nécessaire. Ils sont indiqués à la figure (5.12) par des points verts le long du trajet. La forme d'onde s'allonge essentiellement en haute atmosphère du fait de la diminution de la masse volumique qui augmente l'importance des effets non linéaires. On passe d'un signal d'une durée de 0,2 s à un signal de plus de 5 s dans la thermosphère, au niveau de la caustique. Cet allongement a essentiellement lieu en-dessous de 100 km d'altitude. Au delà, les effets d'absorption dominent et l'amplitude de l'onde diminue considérablement. Entre la source et 45 km d'altitude l'amplitude est divisée par 2,5, puis, entre 45 km et 100 km, elle est divisée par 4 et entre 100 km et l'altitude de réfraction (140 km), elle est divisée par 25. Après la caustique, la forme d'onde n'évolue plus.

L'ensemble des signaux obtenus à l'aide de la méthode de tracé de rayons non linéaire est présenté à la figure (5.4) avec l'analyse des signaux mesurés. La modélisation donne pour chaque phase stratosphérique une seule arrivée de courte durée et de grande amplitude. Ces formes d'onde ne sont pas comparables aux formes d'onde mesurées. La différence est essentiellement due aux multi arrivées qui constituent une phase stratosphérique. Ainsi, l'énergie concentrée dans une seule arrivée pour la simulation est en réalité répartie dans le temps. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons comparé les densités spectrales d'énergie des arrivées mesurées à celles des arrivées calculées (cf. figure (5.13)). Ces spectres sont réalisés à partir des signaux remis en phases à l'aide des paramètres de réception de chaque arrivée. Le niveau d'énergie des deux premières arrivées stratosphériques modélisées est du même ordre de grandeur que celui mesuré (arrivée (b) et (c)). Pour la troisième arrivée (d-e), le calcul surestime l'énergie. Dans ces figures, nous avons représenté le niveau du bruit de fond dans le but d'évaluer les fréquences où l'onde apporte de l'énergie. Cependant, le bruit de fond est élevé ce qui ne permet pas d'effectuer la comparaison sur ce cas.

Pour les phases thermosphériques, les signaux synthétisés sont également constitués d'une seule arrivée. Leur durée est de plusieurs secondes et leur amplitude de quelques dixièmes de Pascal. Comme pour les phases stratosphériques, la forme d'onde de la première phase thermosphérique modélisée n'est pas comparable avec la signature en pression mesurée (f). La comparaison de son spectre avec celui du signal mesuré est également délicat (cf. figure (5.13)) puisque le signal détecté a une amplitude très faible par rapport au bruit de fond. Pour la dernière phase mesurée, le signal mesuré a une amplitude beaucoup plus importante que le signal calculé et sa durée semble plus courte. Ce résultat est plus net sur son spectre qui montre clairement que l'amplitude de l'onde est sous-évaluée par le code et que le signal simulé ne contient que des très basses fréquences ( $< 0,1$  Hz) contrairement à la mesure qui domine le bruit de fond dans la gamme 0,1 à 1 Hz. L'absorption des ondes acoustiques à l'altitude de réfraction de cette phase (140 km) est sans doute trop forte.

Pour l'ensemble des phases, la forme d'onde en « N » obtenue pour le bang primaire n'est pas observée au niveau des carpettes secondaires. D'une manière générale, la signature en pression mesurée n'est pas retrouvée par le code de tracé de rayons. Seule l'énergie de la phase correspond globalement entre la mesure et les simulations. Pour les phases stratosphériques, les formes d'onde sont modifiées par les arrivées multiples dues au scattering par les petites structures de l'atmosphère. La dernière phase thermosphérique est quant à elle trop atténuée par le modèle d'absorption.

## 5.4 Variations saisonnières

Le Concorde a été enregistré quotidiennement entre 1997 et 2003 à la station de Flers. Ces détections du Concorde sont une opportunité unique pour analyser les effets des variations saisonnières de l'atmosphère sur la propagation des ondes infrasonores.

Les enregistrements du Concorde réalisés au cours de l'année 1999 ont été analysés par Le Pichon & al. [118]. Cette analyse est reprise dans cette section pour les données mesurées sur

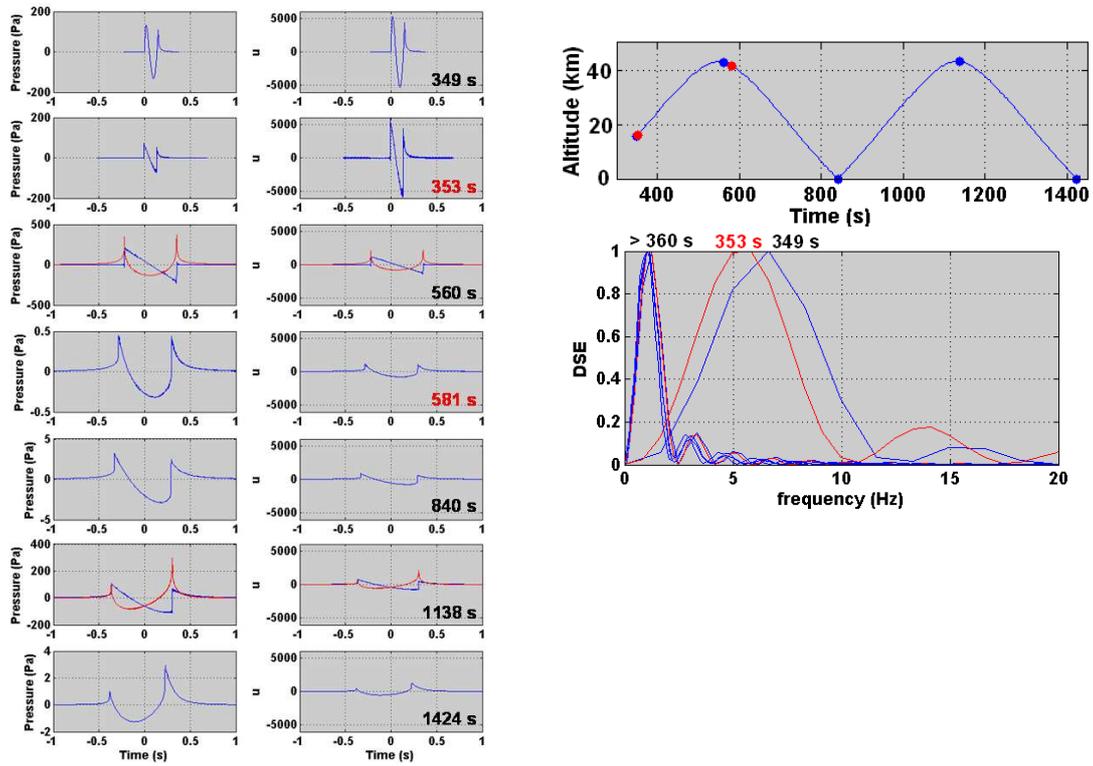


FIGURE 5.11 – Évolution de la forme d’onde le long du rayon stratosphérique arrivant à 1425 s. La forme d’onde en pression et la forme d’onde normalisée  $u$  sont représentés à différents temps indiqués dans le graphique en haut à droite. Le troisième graphique présente la densité spectrale d’énergie normalisée pour les différents signaux.

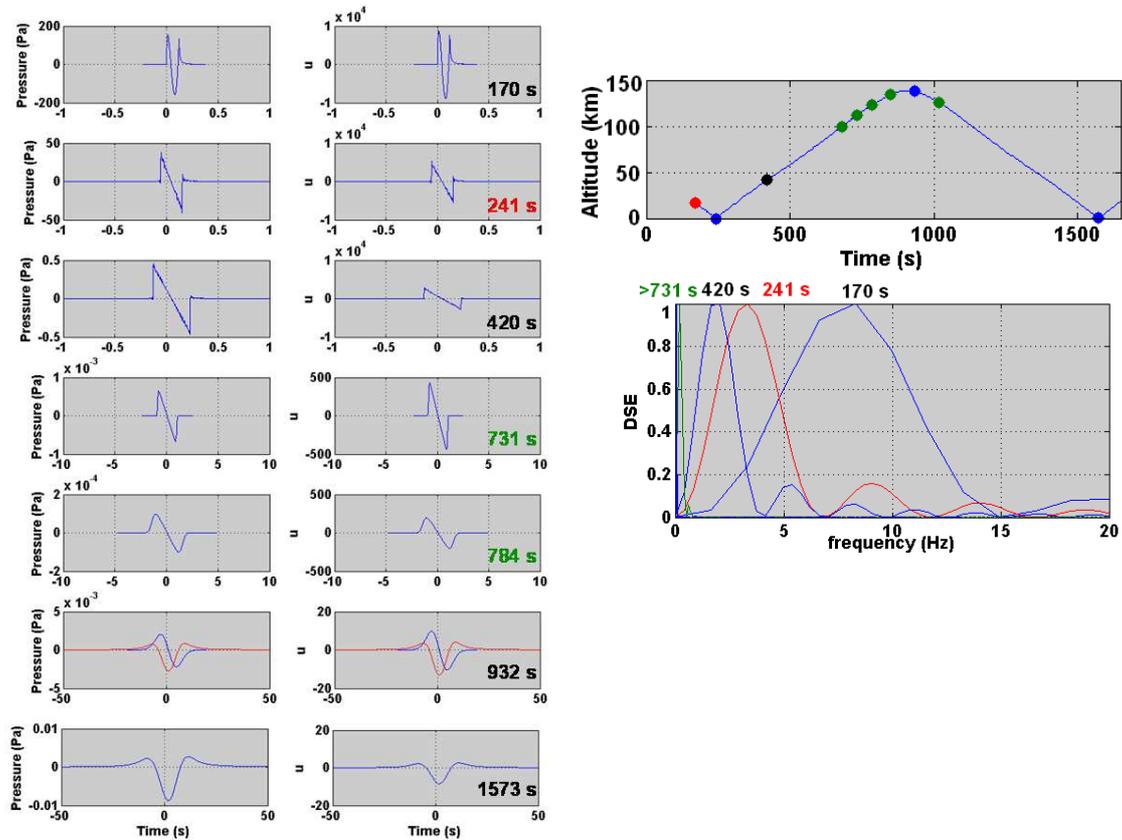


FIGURE 5.12 – Évolution de la forme d'onde le long du rayon thermosphérique arrivant à 1573 s.

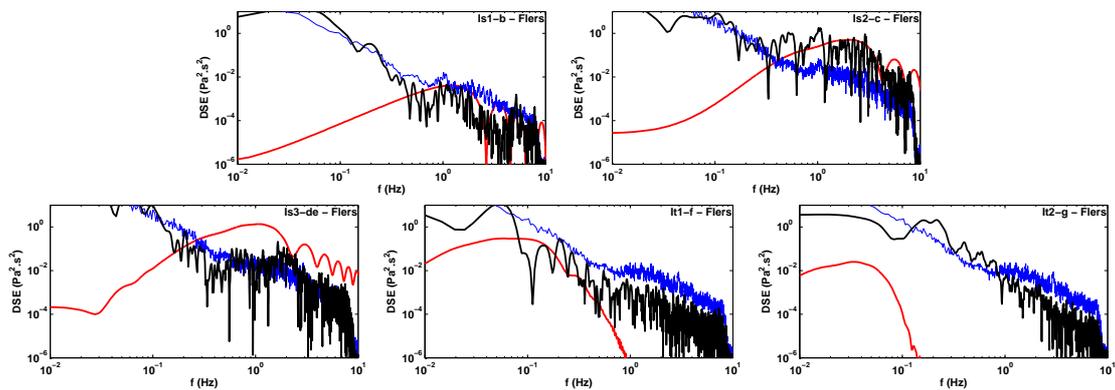


FIGURE 5.13 – Densité spectrale d'énergie des signatures en pression mesurées (—) et calculées par le tracé de rayons (—). La courbe bleu (—) indique le niveau du bruit de fond évalué à partir des 30 minutes entourant la détection. Ce niveau est normalisé par rapport à la durée du signal.

l'année 2002. La modélisation à l'aide du tracé de rayons utilise pour l'année 2002 des modèles atmosphériques (cf. figure (5.14)) plus réalistes que les données statistiques utilisées pour l'étude de l'année 1999.

Les événements sont détectés automatiquement par la méthode PMCC puis confirmés manuellement (cf. annexe E). Les résultats des détections du Concorde Air France sont présentés à la figure (5.15) avec les résultats des modélisations réalisées à l'aide de la méthode de tracé de rayons. Les données montrent que le Concorde Air France est détecté vers 16 h et que son azimut moyen est de 287°. L'amplitude mesurée des variations saisonnières de l'azimut est de l'ordre de 3°. Les détections sont moins nombreuses entre mai et septembre (233 arrivées pour 86 événements) qu'entre Octobre et Avril (578 arrivées pour 120 événements). Pour chaque événement en été, seulement 2 ou 3 arrivées sont mesurées et certains événements ne sont pas observés. Tous les vols du Concorde sont détectés à la station de Flers en hiver et pour chaque événement, un grand nombre d'arrivées est observé. Une différence entre l'été et l'hiver s'observe également sur la vitesse apparente des infrasons. Tandis qu'en été, la vitesse apparente des arrivées est toujours proche de la vitesse du son au niveau du sol, en hiver, la vitesse apparente augmente, avec des vitesses allant jusqu'à 480 m.s<sup>-1</sup>. Ces différences s'expliquent très bien à l'aide de la méthode de tracé de rayons. Celle-ci montre qu'en été, seul des phases thermosphériques sont présentes et qu'elles ont une vitesse apparente relativement faible. En hiver, des phases stratosphériques sont également obtenues par la méthode de tracé de rayons et la vitesse apparente des phases thermosphériques est beaucoup plus élevée. Le tracé de rayons permet bien de retrouver les principales variations saisonnières mesurées. La différence entre l'été et l'hiver est due essentiellement à l'inversion de la composante zonale du vent [81]. En hiver le guide d'onde stratosphérique est présent vers l'est de la source alors qu'en été il est vers l'ouest. Cette variation du vent a également une influence sur le temps de propagation comme le montre le premier graphique de la figure (5.15).

La figure (5.16) est indispensable afin de savoir quelles phases calculées peuvent effectivement être détectées. On observe sur cette figure que les phases thermosphériques réfractées à une altitude supérieure à 130 km sont complètement absorbées par l'atmosphère et ne peuvent pas être détectées. On observe également que les phases thermosphériques ont une amplitude plus faible en hiver qu'en été du fait d'une altitude de réfraction légèrement plus élevée.

Le Pichon & al. [118] montre sur l'exemple du Concorde que pour une vitesse apparente donnée plusieurs types de phases différentes peuvent être obtenues en fonction de la saison. Par exemple, une vitesse de trace de 400 m.s<sup>-1</sup> est caractéristique d'une phase stratosphérique en hiver alors qu'elle caractérise une phase thermosphérique en été. Les résultats du tracé de rayons utilisant des données atmosphériques réalistes montrent que les variations journalières de la vitesse apparente sont supérieures à l'écart de vitesse apparente entre les phases stratosphériques et thermosphériques. Ainsi, dans certaines gammes de vitesse apparente, il est impossible de savoir quel est le type de phase.

## 5.5 Conclusion

L'étude du Concorde nous a permis d'une part d'évaluer les capacités de la méthode de tracé de rayons pour un problème de propagation pleinement 3D et d'autre part de mieux comprendre la propagation des ondes infrasonores émises par le Concorde. Le cas de l'arrivée du Concorde en France est particulièrement intéressant car la décélération de l'avion permet à un grand nombre de phases d'être mesurées à la station de Flers. Un vol à vitesse constante n'est pas aussi riche en observations.

La méthode de tracé de rayons permet d'identifier la majorité des phases stratosphériques et thermosphériques mesurées à la station de Flers. La méthode manque cependant quelques arrivées en raison des limites du modèle de propagation, à savoir l'absence de diffraction et

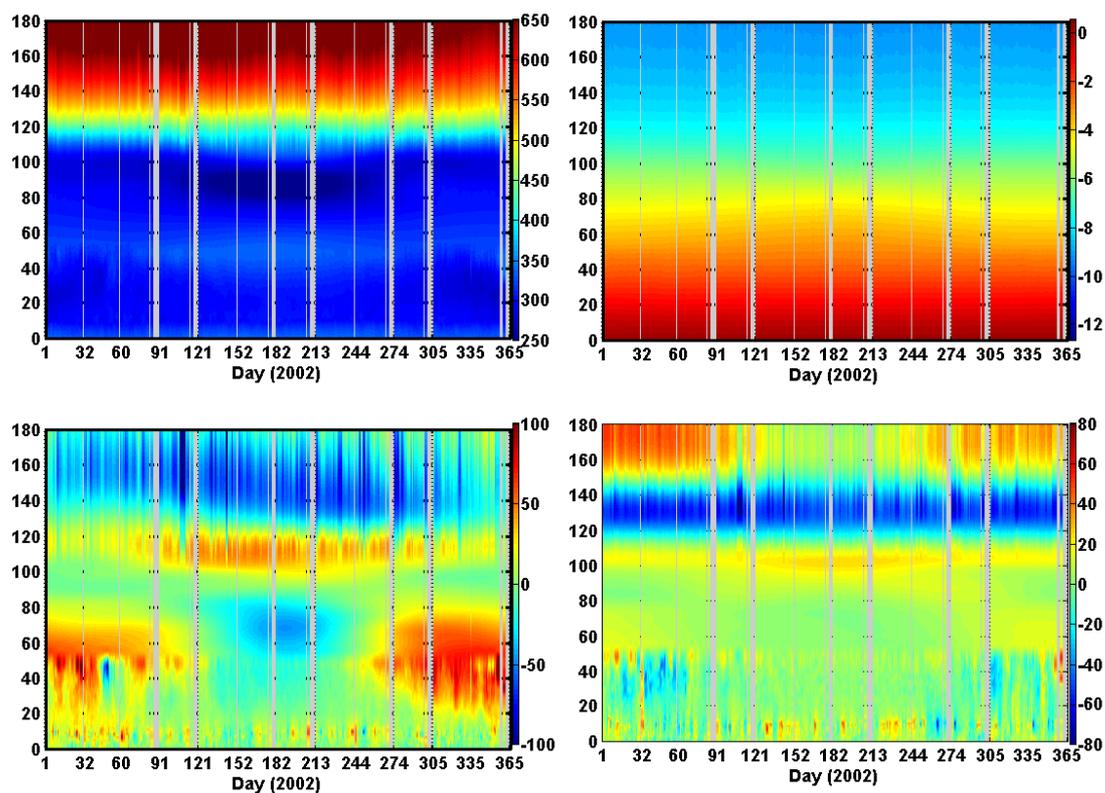


FIGURE 5.14 – Profils météorologiques pour l'année 2002 utilisés pour la simulation. La vitesse du son ( $\text{m.s}^{-1}$ ), la masse volumique ( $\log_{10}, \text{kg.m}^{-3}$ ), les composantes zonales et méridiennes du vent ( $\text{m.s}^{-1}$ ) sont visualisées à la position (49 N, 0 E). Les profils sont construits en raccordant les données ECMWF (0-40 km) aux champs statistiques HWM et MSIS. Ces champs évoluent suivant les trois dimensions de l'espace.

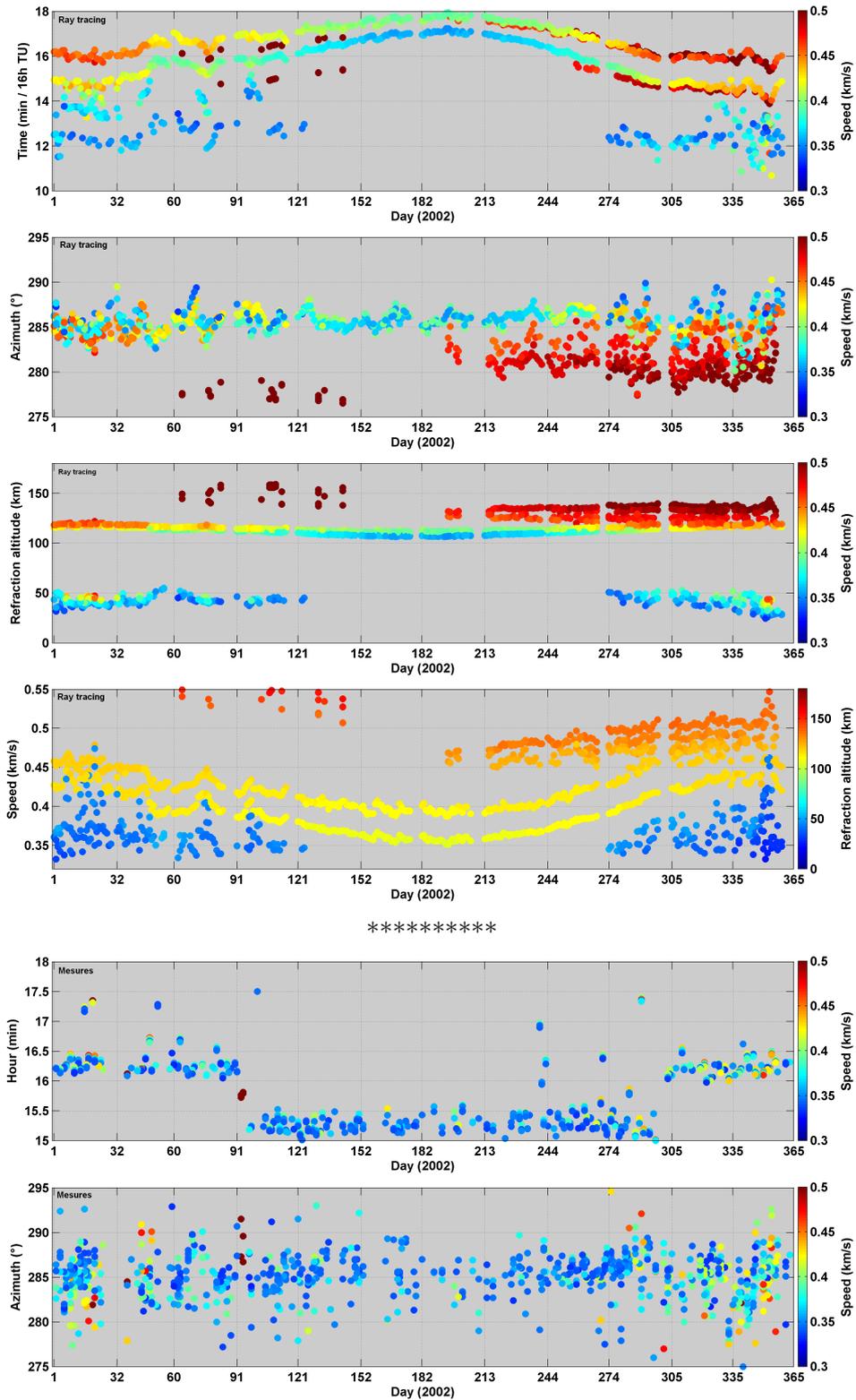


FIGURE 5.15 – Évolution des caractéristiques des détections mesurées et simulées en fonction du jour de l’année 2002 pour le Concorde Air France. Les quatre premiers graphiques correspondent à la simulation par la méthode de tracé de rayons et les deux derniers aux mesures. Pour les calculs, le temps de réception, l’azimut, l’altitude de réfraction et la vitesse apparente des phases sont représentés. La couleur indique généralement la vitesse apparente. Pour les mesures, le temps de réception et l’azimut de détection sont indiqués. Deux exemples de rayons sont donnés à la figure (5.17).

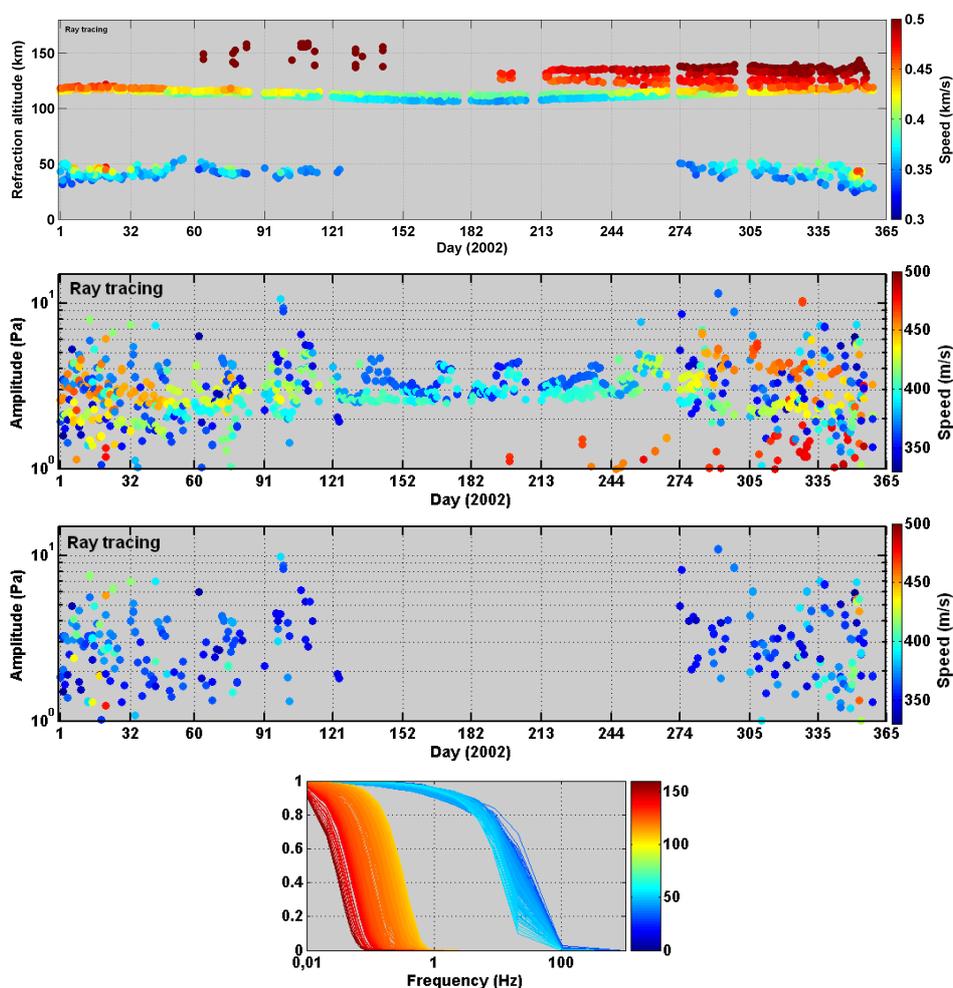


FIGURE 5.16 – Amplitudes calculées par la méthode de tracé de rayons pour les phases obtenues à la station de Flers en fonction du jour de l’année 2002. Le premier graphique permet d’identifier le type de phase en fonction de son altitude de réfraction, avec les phases thermosphériques vers 110 km et les phases stratosphériques vers 45 km. Le second donne l’amplitude pour une onde sinusoïdale de fréquence **0,1 Hz** et le troisième pour une fréquence de **1 Hz**. Pour ces trois graphiques les couleurs indiquent la vitesse apparente de la phase. Le dernier graphique trace pour toutes les phases l’amplitude relative en fonction de la fréquence. Les phases stratosphériques sont en bleu et les phases thermosphériques en rouge.

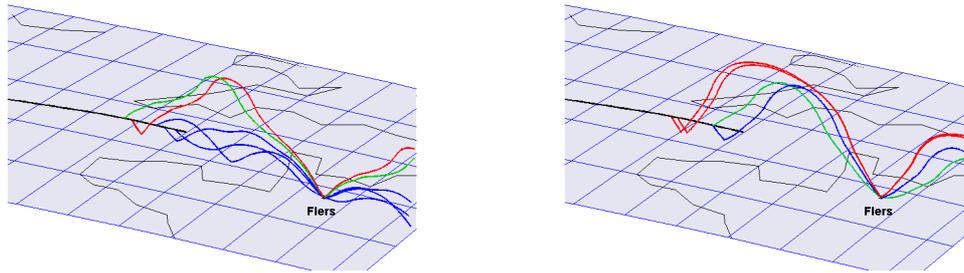


FIGURE 5.17 – Exemple de rayons propres obtenus pour l’année 2002 pour un jour en hiver (002) et un jour en été (215). La couleur des rayons correspond à la vitesse apparente calculée au niveau de la station de Flers.

de scattering. Pour certaines dates de l’année 2002, un grand nombre d’arrivées ne sont pas retrouvées par le tracé de rayons. Le modèle météorologique et de la trajectoire de la source peuvent alors être remis en cause. Pour les arrivées prédites, les caractéristiques des phases calculées (azimut, vitesse apparente) sont en accord avec les mesures.

L’observation de l’évolution de la forme d’onde le long des rayons montre l’importance des effets non linéaires et de l’absorption atmosphérique, que ce soit pour les phases stratosphériques ou les phases thermosphériques. Il est cependant difficile de conclure sur la comparaison des signaux mesurés et calculés bien que l’énergie soit pour les phases stratosphériques globalement similaire. Par contre, l’observation des arrivées mesurées en 2002 montre clairement que les jours où le bruit de fond est faible, les phases stratosphériques sont moins étalées dans le temps et leur amplitude est plus élevée. Cette observation rejoint l’idée que l’aspect bruité des signaux, qualifié de grondement, est dû à la turbulence grande échelle du milieu de propagation. Ce résultat rejoint ceux de Blanc-Benon & al. [29, 59] qui montre la déformation de la carapette secondaire lorsque le milieu de propagation est turbulent et qu’il peut exister de multiples arrivées.

L’analyse de la propagation des ondes émises par le Concorde permet de bien comprendre que, du fait de la vitesse supersonique de la source, les ondes qui arrivent en premier sont les dernières émises. Sachant que le Concorde ralentit, et donc que ces phases sont émises plus horizontalement au cours de son avancée, on en déduit que la vitesse apparente mesurée au niveau de la station de Flers devrait continuellement augmenter. Cependant, on observe fréquemment en hiver une ou plusieurs premières arrivées avec une vitesse apparente plus grande. La solution à ce problème n’est pas intuitive et résulte de la combinaison de la position relative de la station par rapport à la source, de la décélération du Concorde et de sa variation d’altitude. Le modèle identifie certaines phases stratosphériques directes (ex. jour 350 de 2002) qui vérifient les propriétés précédentes. Ces phases longent le bord supérieur du guide d’onde stratosphérique et vont ainsi plus vite que les autres phases.

Pour finir, l’étude statistique des mesures sur l’année 2002 permet de retrouver les grandes tendances saisonnières observées par Le Pichon & al. [118] sur l’année 1999. On montre cependant qu’en utilisant un modèle d’atmosphère plus réaliste, on obtient des variations diurnes importantes pour les phases stratosphériques que ce soit sur leur nombre et leurs caractéristiques.

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons développé un modèle de propagation atmosphérique des ondes infrasonores à grande distance en 3D pour des sources fixes ou en mouvement supersonique. Ce modèle permettant de reconstituer la signature en pression au niveau d'un capteur tient compte des effets non linéaires, de l'absorption atmosphérique ainsi que des effets géométriques liés aux inhomogénéités du milieu et aux mouvements de la source. Il est obtenu à l'aide d'un développement asymptotique basé sur le rapport d'échelle entre les grandeurs caractéristiques de la forme d'onde et celles du milieu et de l'amplitude de l'onde. Le développement montre que l'énergie des ondes suit les rayons acoustiques (de l'acoustique géométrique) et que l'évolution non linéaire de la forme d'onde vérifie une équation de Burgers généralisée. Afin de résoudre le problème de propagation défini par le modèle, nous avons développé une méthode de recherche de rayons propres en 3D ainsi qu'une méthode de résolution numérique de l'équation de Burgers généralisée. Cette équation aux dérivées partielles non linéaire est intégrée à l'aide d'une méthode spectrale de Fourier Galerkin à pas variable et maillage adaptatif. La méthode tient compte des singularités au voisinage des caustiques. Peu coûteuse en temps de calcul, elle permet de calculer numériquement la forme d'onde à très grande distance avec une très faible erreur numérique.

L'application du modèle au cas d'une explosion de forte puissance (Misty Picture) et d'un avion supersonique (Concorde) nous a permis d'évaluer ses capacités et ses limites. Contrairement au modèle physique, les méthodes numériques mises en œuvre pour le résoudre n'apportent pas de limitation sur la validité des résultats, excepté en ce qui concerne la recherche de rayons propres. En effet, lorsque les échelles caractéristiques du milieu de propagation sont petites par rapport aux distances de propagation, la recherche des rayons propres en 3D est un problème très difficile voire théoriquement impossible si la propagation est chaotique. Par contre, les études montrent que le modèle de propagation est limité physiquement principalement par l'absence des phénomènes de diffraction et de scattering. La diffraction, qui est négligée en acoustique géométrique, intervient au niveau des discontinuités du champ acoustique et en particulier au niveau des caustiques. Elle permet notamment à une partie de l'énergie acoustique d'arriver dans les zones d'ombre ou de changer de guide d'onde. L'absence de scattering dans le modèle de propagation est sa principale limitation. La majorité des arrivées manquées par le modèle peut lui être attribuée. Le scattering influence également la signature en pression au niveau des capteurs, les arrivées étant multiples. Ces limitations sont essentiellement déduites des comparaisons des résultats du tracé de rayons avec ceux de la méthode parabolique grand angle pour le cas simplifié d'une explosion en deux dimensions. Enfin, nous observons que la signature acoustique au capteur dépend des conditions météorologiques, du type de source et de ses caractéristiques, de la distance à la source et de la direction de propagation. Ainsi, nos études montrent qu'il est possible de simuler la propagation à grande distance des ondes infrasonores pour une source supersonique ou une explosion au sol en tenant compte des effets non linéaires et de l'absorption atmosphérique. La méthode de tracé de rayons permet de modéliser la propagation à grande distance des ondes infrasonores pour des problèmes à trois dimensions avec des temps de calcul faibles. Cette méthode répond aux contraintes opérationnelles en termes de réactivité et de flexibilité pour l'analyse et l'expertise d'événements infrasonores. Elle permet

également d'envisager des études statistiques dépendant des conditions de propagation.

À travers les études réalisées, nous avons pu caractériser en détails la propagation atmosphérique des ondes infrasonores à grande distance. Parmi les différentes phases infrasonores, la phase stratosphérique est, lorsqu'elle est observée, la plus énergétique. Sa zone d'observation dépend de la direction des vents dans la stratosphère. De multiples arrivées stratosphériques peuvent être obtenues au même capteur correspondant chacune à un nombre différent de réflexions sur la surface de la Terre. Pour une source fixe, quelle que soit la distance à la source, ces différentes arrivées sont régulièrement espacées en temps d'un écart d'environ 100 s. Pour des sources basses fréquences, *i.e.* en dessous d'environ 1 Hz, ces phases peuvent être observées bien au delà de ce que prévoit l'acoustique géométrique. Les phases thermosphériques ont une amplitude plus faible et leurs signaux sont constitués de plus basses fréquences du fait de la forte absorption dans la haute atmosphère. Leur zone d'observation est en accord avec celle prédite par l'acoustique géométrique. Pour une source fixe, une seule arrivée thermosphérique est généralement observée à un récepteur. Les phases présentes dans les zones d'ombre sont essentiellement dues au mécanisme de scattering qui est appelé réflexion partielle lorsque l'inhomogénéité du milieu est forte ou discontinue. Les autres phases sont plus rares ou de faible amplitude.

Nous avons pu évaluer l'importance des différents mécanismes qui influencent la propagation des ondes infrasonores. Ils modifient d'une part les caractéristiques des phases infrasonores et d'autre part la forme d'onde de ces phases. La propagation des ondes infrasonores est conditionnée en premier lieu par le profil de température et le vent à l'échelle synoptique. L'absorption atmosphérique dissipe les ondes thermosphériques passant dans la haute atmosphère, *i.e.* au dessus d'environ 130 km. Le mécanisme modifiant significativement la répartition du champ acoustique est le scattering par les petites échelles de l'atmosphère. Cet effet est dépendant de la fréquence de l'onde. Il est la cause de la plus grande partie des arrivées obtenues dans les zones d'ombre géométrique. La diffraction des ondes a un effet local et intervient au niveau des rayons rampants et des caustiques. Ces deux effets dépendent de la fréquence et sont particulièrement importants en dessous de 1 Hz. Un meilleur accord entre les mesures et les simulations par tracé de rayons est effectivement trouvé dans le cas du Concorde comparativement au cas de l'expérience Misty Picture qui est à plus basse fréquence. Les autres mécanismes influencent peu la répartition du champ acoustique pour nos cas d'application. Ainsi, pour conclure sur les zones d'ombre géométrique, l'énergie obtenue dans ces zones est essentiellement due aux mécanismes de scattering. La diffraction proprement dite a un effet uniquement à proximité, *i.e.* quelques longueurs d'onde, des discontinuités du champ de pression acoustique et des caustiques. La forme d'onde est pour sa part modifiée essentiellement par l'absorption atmosphérique, les effets de relaxation vibratoire des molécules, les effets non linéaires et le scattering. Les effets non linéaires sont particulièrement importants au niveau de la source, au niveau des caustiques et dans la haute atmosphère. Ils augmentent la durée du signal essentiellement avant la première caustique rencontrée le long du rayon et génèrent des harmoniques, *i.e.* choquent les ondes, tout au long de la propagation. Pour les phases thermosphériques, la forme d'onde est bien reproduite par la méthode de tracé de rayons non linéaire. Les effets non linéaires, en diminuant la fréquence centrale de l'onde, réduisent l'absorption de l'onde et permettent à celle-ci de se propager plus loin. Les effets non linéaires causent un allongement de la durée du signal d'un facteur 5 à 50. Pour les phases stratosphériques, les non linéarités peuvent rester importantes après le passage de plusieurs caustiques. Cependant, pour ces phases, le scattering, qui n'est pas pris en compte dans notre modèle de tracé de rayons, a également une forte influence sur la signature en pression. Il allonge la durée des signaux et diminue leur amplitude au cours de la propagation en répartissant les arrivées dans le temps.

Nos études montrent également que la propagation des ondes infrasonores est fortement dépendante des conditions atmosphériques. Nous observons pour une même source (ex. Concor-

de) des variations saisonnières et diurnes importantes des phases mesurées. Ces variations concernent à la fois le nombre, le type et les caractéristiques (azimut et vitesse apparente) des phases détectées mais également les formes d'onde. Les simulations reproduisent en partie ces variabilités des caractéristiques des phases. Cependant, l'accord entre les mesures et les simulations n'est pas systématique. Certains événements sont parfaitement reproduits tandis qu'aucune phase n'est retrouvée pour d'autres. Les mesures révèlent également une grande variabilité des signatures en pression qui n'est pas reproduite par la simulation. Cette variation sur les signatures en pression est associée aux variations des effets de scattering. Nous remarquons également que les résultats des simulations sont très sensibles au modèle d'atmosphère. Ainsi, le modèle d'atmosphère apparaît comme un élément clé dans la modélisation de la propagation des ondes infrasonores.

Ce travail fait apparaître l'importance d'intégrer dans les modèles de propagation les phénomènes de diffraction et de scattering des ondes. Différentes pistes sont envisagées pour inclure ces phénomènes dans une méthode de tracé de rayons. D'abord, l'extension au cadre de la théorie géométrique de la diffraction permettrait de prévoir les phases dites diffractées et de calculer leurs caractéristiques. Le phénomène de réflexion partielle des ondes par les fortes discontinuités du milieu peut être intégrée dans un code de tracé de rayons en divisant le milieu de propagation en couches, les interfaces étant partiellement réfléchissantes (saut d'impédance). Enfin, il serait souhaitable de pouvoir intégrer le long des rayons de manière numérique ou analytique les effets du scattering sur la forme d'onde. Au delà de la modélisation de la propagation des ondes infrasonores proprement dite, une modélisation fine de la source ainsi que des modèles réalistes de l'atmosphère doivent être développés et couplés avec les méthodes de propagation.

Le modèle développé et son implémentation sont avant tout des outils permettant de caractériser la source notamment en terme de puissance une fois qu'elle est localisée. Les méthodes mises en œuvre dans cette thèse sont adaptées pour l'étude d'autres sources fixes ou en mouvement supersonique. L'étude de l'expérience Misty Picture montre également la complémentarité entre les méthodes paraboliques et la méthode de tracé de rayons. La modélisation de la propagation à grande distance des ondes émises par une source supersonique à l'aide d'une méthode parabolique 3D ou une méthode de résolution directe des équations de la mécanique restent cependant un défi à l'heure actuelle. Ces simulations permettraient notamment de valider les résultats du tracé de rayons pour une telle source. La méthode de tracé de rayons permet également de faire des prévisions sur, par exemple, les capacités de détection des stations barométriques du réseau du Système de Surveillance International. Ces capacités dépendant des conditions météorologiques et des caractéristiques de la source, ces prévisions requièrent des études statistiques. D'une manière analogue, des investigations concernant les nuisances liées au bang secondaire peuvent être envisagées à l'instar de celles réalisées pour le bang primaire par Blumrich & al. [33]. Enfin, les mesures des ondes infrasonores permettent également d'étudier l'atmosphère elle-même. La tomographie acoustique de l'atmosphère est l'une des premières méthodes utilisées pour sonder sa structure thermique. Elle peut maintenant, à l'aide des ondes infrasonores, être utilisée afin de caractériser la basse thermosphère pour laquelle peu de données sont disponibles. L'assimilation des mesures quotidiennes d'ondes infrasonores par l'intermédiaire d'un modèle de propagation permettrait de mieux contraindre les modèles atmosphériques (ex. modèles climatologiques). Pour ce faire, un modèle de propagation rapide tel que le tracé de rayons est nécessaire. Un dernier projet initié dans la thématique des infrasons est la surveillance de l'atmosphère (ex. réchauffement climatique).



# Bibliographie

- [1] ABALLÉA, F.-E. *Propagation acoustique en milieu extérieur : Application de l'équation parabolique rapide au couplage d'effets météorologiques et de topographies complexes*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 2004.
- [2] ARASE, T. Some characteristics of long-range explosive sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.* 31, 5 (1959), 588–595.
- [3] ATTENBOROUGH, K. Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 73, 3 (1983), 785–799.
- [4] ATTENBOROUGH, K. Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces. *Journal of sound and vibration* 99 (1985), 521–544.
- [5] ATTENBOROUGH, K., TAHERZADEH, S., BASS, H. E., DI, X., RASPET, R., BECKER, G. R., GUDESEN, A., CHRESTMAN, A., DAIGLE, G. A., L'ESPERANCE, A., GABILLET, Y., GILBERT, K. E., LI, Y. L., WHITE, M. J., NAZ, P., NOBLE, J. M., AND VAN HOOFF, H. A. J. M. Benchmark cases for outdoor sound propagation models. *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 1 (1995), 173–191.
- [6] AUBIN, T., AND COULOUVRAT, F. Ondes acoustiques non linéaires dans un fluide avec relaxation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 77, 4 (April 1998), 387–413.
- [7] AUGER, T. *Modélisation et simulation numérique de la focalisation d'ondes de choc acoustiques en milieu en mouvement. Application à la focalisation du bang sonique en accélération*. PhD thesis, Université de Paris VI, Paris, 2001.
- [8] AUGER, T., AND F. COULOUVRAT, F. Numerical simulation of sonic boom focusing. *AIAA Journal* 40 (2002), 1726–1734.
- [9] AVER'YANOV, M. V., KHOKHLOVA, V. A., SAPOZHNIKOV, O. A., BLANC-BENON, P., AND CLEVELAND, R. O. Parabolic equation for nonlinear acoustic wave propagation in inhomogeneous moving media. *Acoustical Physics* 52, 6 (2006), 623–632.
- [10] BAILLY, C., AND COMPTE-BELLOT, G. *Turbulence*. CNRS Editions, Paris, 2003.
- [11] BAILLY, C., DEYKINA, E., AND BOGEY, C. Etude numérique de la propagation acoustique de signaux basses fréquences en milieu atmosphérique. Tech. rep., Centre acoustique, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, École centrale de Lyon & UMR CNRS 5509, 2006.
- [12] BAILLY, C., DEYKINA, E., AND BOGEY, C. Etude de l'absorption atmosphérique des signaux acoustiques de basses fréquences. Tech. rep., Centre acoustique, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, École centrale de Lyon & UMR CNRS 5509, Dec. 2007.
- [13] BASKAR, S., AND PRASAD, P. Formulation of the problem of sonic boom by a maneuvering aerofoil as a one-parameter family of cauchy problems. *Math. Sci.* 116, 1 (Feb. 2006), 97–119.

- [14] BASS, H., HETZER, C., AND RASPET, R. Sound speed at altitudes up to 160 km. In *12th Long Range Sound Propagation Symposium* (New Orleans, USA, 25-26 octobre 2006), CD-Rom.
- [15] BASS, H. E. Absorption of sound by air : High temperature predictions. *J. Acoust. Soc. Am.* 69, 1 (1981), 124–138.
- [16] BASS, H. E., EZELL, J., AND RASPET, R. Effect of vibrational relaxation on rise times of shock waves in the atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 74, 5 (1983), 1514–1517.
- [17] BASS, H. E., SUTHERLAND, L. C., ZUCKERWAR, A. J., BLACKSTOCK, D. T., AND HESTER, D. M. Atmospheric absorption of sound : Futher developments. *J. Acoust. Soc. Am.* 97(1) (Jan. 1995), 680–683.
- [18] BENTON, E. R., AND PLATZMAN, G. W. A table of solutions of the one-dimentional burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics* 33 (July 1972), 195–212.
- [19] BERGMANN, P. G. The wave equation in a medium with a variable index of refraction. *J. Acoust. Soc. Am.* 17, 4 (1946), 329–333.
- [20] BERLAND, J. *Modélisation des erreurs numériques dans une simulation des grandes échelles et étude du screech d'un jet rectangulaire supersonique*. PhD thesis, École centrale de Lyon, Lyon, 2006.
- [21] BERTHET, C. *Propagation atmosphérique lointaine de signaux acoustiques puissants*. PhD thesis, Université Paris, Paris, 1969.
- [22] BESSET, C., AND BLANC, E. Propagation of vertical shock waves in the atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 95(4) (April 1994), 1830–1839.
- [23] BLACKSTOCK, D. T. Generalized burgers equation for plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 6 (1985), 2050–2053.
- [24] BLAIRON, N. *Effets de la topographie sur la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère : Modélisation avec l'équation parabolique et validation sur un site extérieur*. PhD thesis, École centrale Lyon, Lyon, 2002.
- [25] BLANC, E. Mesures ionosphériques et microbarographiques – expérience misty picture. Tech. Rep. 370/88, CEA, Sep. 1988.
- [26] BLANC, E., AND RICKEL, D. Nonlinear wave fonts and ionospheric irregularities observed by hf sounding over a powerful acoustic source. *Radio Science* 24, 3 (May-June 1989), 279–288.
- [27] BLANC-BENON, P., AVERIYANOV, M. V., KHOKHLOVA, V. A., CLEVELAND, R., AND SAPOZHNIKOV, O. Nonlinear parabolic equation for acoustic wave propagation in inhomogeneous moving media. In *12th Long Range Sound Propagation Symposium* (New Orleans, USA, 25-26 octobre 2006), CD-Rom.
- [28] BLANC-BENON, P., DALLOIS, L., AND SCOTT, J. Secondary sonic boom modelling for realistic atmospheric conditions. In *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (26th AIAA Aeroacoustics conference)* (May 2005), no. 2005-2950 in AIAA paper, AIAA/CEAS, American Institute of Aeroacoustics and Astronautics.
- [29] BLANC-BENON, P., DALLOIS, L., SCOTT, J., BERGER, U., ALLWRIGHT, D., AND KAOURI, K. Ray theory analysis of sonic boom in a 3-d unsteady atmosphere with nonlinearity and relaxation. In *11th Long-Range Sound Propagation Symposium, Fairlee, Vermont, USA, CD-Rom* (June 2004), pp. 1–11.
- [30] BLANC-BENON, P., JUVÉ, D., OSTASHEV, V. E., AND WANDELTS, R. On the appearance of caustics for plane sound-wave propagation in moving random media. *Waves in Random Media* 5 (1995), 183–189.

- [31] BLANC-BENON, P., LIPKENS, B., DALLOIS, L., HAMILTON, M. F., AND BLACKSTOCK, D. T. Propagation of finite amplitude sound through turbulence : Modeling with geometrical acoustics and parabolic approximation. *J. Acoust. Soc. Am.* 111(1) (Jan. 2002), 487–497.
- [32] BLOKHINTZEV, D. The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium i. *J. Acoust. Soc. Am.* 18, 2 (1946), 322–328.
- [33] BLUMRICH, R., COULOUVRAT, F., AND HEIMANN, D. Meteorologically induced variability of sonic-boom characteristics of supersonic aircraft in cruising flight. *J. Acoust. Soc. Am.* 118, 2 (2005), 707–722.
- [34] BLUMRICH, R., COULOUVRAT, F., AND HEIMANN, D. Variability of focused sonic booms from accelerating supersonic aircraft in consideration of meteorological effects. *J. Acoust. Soc. Am.* 118, 2 (2005), 696–706.
- [35] BLUMRICH, R., AND HEIMANN, D. A linearized eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects. *J. Acoust. Soc. Am.* 112, 2 (2002), 446–455.
- [36] BOGEY, C., AND BAILLY, C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computation,. *J. Comp. Phys.* 194, 1 (2004), 194–214.
- [37] BOULANGER, P., RASPET, R., AND BASS, H. E. Sonic boom propagation through a realistic turbulent atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 98, 6 (1995), 3412–3417.
- [38] BROCHE, P. Propagation Non-Lineaire et Couplage Ionospherique des Ondes Atmospheriques Engendrees Par une Explosion Nucleaire. In *Effects of Atmospheric Acoustic Gravity Waves on Electromagnetic* (oct 1972), pp. 1–37.
- [39] CANDEL, S. M. Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics. *J. Fluid Mech.* 83, 3 (1977), 465–493.
- [40] CANSI, Y. An automatic seismic event processing for detection and location : The pmcc method. *Geophys. Res. Lett.* 22 (1995), 1021–1024.
- [41] CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A., AND ZANG, T. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer Verlag, New York, 2006.
- [42] CATES, J. E., AND STURTEVANT, B. Shock wave focusing using geometrical shock dynamics. *Phys. Fluids* 9, 10 (Oct. 1997), 3058–3068.
- [43] CATES, J. E., AND STURTEVANT, B. Seismic detection of sonic booms. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 614–628.
- [44] CERANNA, L., AND LE PICHON, A. The buncefield fire : A benchmark for infrasound analysis in europe. In *Infrasound Technology Workshop* (Fairbanks, Sep. 2006), University of Alaska.
- [45] CHAMBERS, J., AND WHELAN, A. An investigation of the effects of roughness on acoustic propagation past curved surfaces. In *12th Long Range Sound Propagation Symposium* (New Orleans, USA, 25-26 octobre 2006), CD-Rom.
- [46] CHENG, R., MORRIS, P. J., AND BRENTNER, K. S. A 3d parabolic equation method for sound propagation in moving inhomogeneous media. In *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (28th AIAA Aeroacoustics Conference)* (2007).
- [47] CHEUNG, S. H., JOSE, S., EDWARDS, T. A., AND LAWRENCE, S. L. Application of cfd to sonic boom near and mid flow-field prediction. *NASA Technical Memorandum*, 102867 (1990).
- [48] CLEVELAND, R. O. *Propagation of Sonic Booms Through a Real, Stratified Atmosphere*. PhD thesis, The university of Texas at Austin, Austin, Texas, 1995.

- [49] CLEVELAND, R. O., CHAMBERS, J. P., BASS, H. E., RASPET, R., BLACKSTOCK, D. T., AND HAMILTON, M. F. Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres. *J. Acoust. Soc. Am.* 100, 5 (1996), 3017–3027.
- [50] CLEVELAND, R. O., HAMILTON, M. F., AND BLACKSTOCK, D. T. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids. *J. Acoust. Soc. Am.* 99, 6 (1996), 3312–3318.
- [51] COLE, J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics IX*, 3 (Oct. 1951), 225–236.
- [52] COLLINS, M. D., AND KUPERMAN, W. A. Overcoming ray chaos. *J. Acoust. Soc. Am.* 95, 6 (1994), 3167–3170.
- [53] COULOUVRAT, F. Sonic boom in the shadow zone : A geometrical theory of diffraction. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 499–508.
- [54] COULOUVRAT, F., AND MARCHIANO, R. Nonlinear fresnel diffraction of weak shock waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 114, 4 (2003), 1749–1757.
- [55] COULOUVRAT, F., MARCHIANO, R., GANJEHI, L., AND ROLLET, C. Numerical simulation of acoustical shock wave propagation in heterogeneous and moving media. In *19th International Congress on Acoustics* (Madrid, 2-7 septembre 2007), no. NLA-07-001-IP in NLA.
- [56] CRIGHTON, D. J., AND SCOTT, J. F. Asymptotic solutions of model equations in nonlinear acoustics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 292 (1979), 101–134.
- [57] DALAUDIER, F., SIDI, C., CROCHET, M., AND VERNIN, J. Direct evidence of sheets in the atmospheric temperature field. *J. Atmos. Sci.* 51, 2 (1994), 237–248.
- [58] DALLOIS, L. *Propagation des ondes acoustiques dans les milieux en mouvement : extension grand angle de l'approximation parabolique*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Lyon, 2000.
- [59] DALLOIS, L., BLANC-BENON, P., SCOTT, J., BERGER, U., ALLWRIGHT, D., AND KAOURI, K. Secondary sonic boom modelling for realistic atmospheric conditions. In *CFA/DAGA'04* (22-25 Mars 2004), Congrès français d'Acoustique, pp. 1061–1062.
- [60] DARU, V., AND TENAUD, C. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *J. Comp. Phys.* 193, 2 (Jan. 2004), 563–594.
- [61] DEL PINO, S., DESPRÉS, B., HAVÉ, P., JOURDREN, H., AND PISERCHIA, P. F. Simulating acoustic waves in the earth atmosphere. Communication personnelle, Oct. 2006.
- [62] DEYKINA, E., AND BAILLY, C. Simulation numérique de la propagation acoustique des signaux basses fréquences dans l'atmosphère. Master's thesis, École centrale de Lyon, Lyon, 2005.
- [63] DEYKINA, E., BAILLY, C., BOGEY, C., AND JUVÉ, D. Simulation numérique de la propagation de signaux acoustiques basses fréquences dans l'atmosphère. In *18ème Congrès Français de Mécanique* (Grenoble, 27-30 août 2007).
- [64] DROB, D. P., AND PICONE, J. M. Statistical performance measures of the hwm-93 and msise-90 empirical atmospheric models and the relation to infrasonic ctbm monitoring. In *22nd Annual Seismic Research Symposium : Planning for Verification of an Compliance with the Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty* (New Orleans, Louisiana, USA, 2000), p. 8 pages.
- [65] DROBZHEVA, Y., AND KRASNOV, V. The model of acoustic disturbances in atmosphere and ionosphere for mill race explosion. *Physics and Chemistry of the Earth (c)* 24, 8 (1999), 963–967.

- [66] DROBZHEVA, Y., AND KRASNOV, V. The acoustic field in the atmosphere and ionosphere caused by a point explosion on the ground. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 65 (2003), 369–377.
- [67] DROBZHEVA, Y., AND KRASNOV, V. Acoustic energy transfer to the upper atmosphere from surface chemical and underground nuclear explosions. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 68, 3-5 (Feb. 2006), 578–585.
- [68] DURRE, I., VOSE, R. S., AND WUERTZ, D. N. Overview of the integrated global radio-sonde archive. *Journal of climate* 19 (2005), 53–68.
- [69] EVERS, L., AND HAAK, H. Seismo-acoustic analysis of explosions and evidence for infrasonic forerunners. In *Infrasound Technology Workshop* (Fairbanks, Sep. 2006), University of Alaska.
- [70] GAINVILLE, O., AND BLANC-BENON, P. Rapport technique - réalisation d'une maquette logicielle de modèles numériques pouvant simuler la propagation des ondes infrasonores. Rapport technique, L.M.F.A. - UMR CNRS 5509, École centrale Lyon, Mars 2005.
- [71] GAINVILLE, O., BLANC-BENON, P., PISERCHIA, P. F., AND SCOTT, J. Infrasound propagation in realistic atmosphere : numerical modelling using ray theory and comparison with experiments. In *12th Long Range Sound Propagation Symposium* (New Orleans, USA, 25-26 oct. 2006).
- [72] GAINVILLE, O., PISERCHIA, P. F., BLANC-BENON, P., AND SCOTT, J. Ray tracing for long range atmospheric propagation of infrasound. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics conference)* (May 2006), no. AIAA 2006-2451, AIAA/CEAS, American Institute of Aeroacoustics and Astronautics.
- [73] GAINVILLE, O., PISERCHIA, P. F., DEPRES, B., HAVE, P., BLANC-BENON, P., AND ABALLEA, F. Numerical modelling of infrasound propagation in a realistic atmosphere. In *Infrasound Technology Workshop* (Fairbanks, Sep. 2006), University of Alaska.
- [74] GARCÉS, M., DROB, D., AND PICONE, J. A theoretical study of the effect of geomagnetic fluctuations and solar tides on the propagation of infrasonic waves in the upper atmosphere. *Geophys. J. Int.* 148 (2002), 77–87.
- [75] GARCÉS, M., WILLIS, M., HETZER, C., LE PICHON, A., AND DROB, D. On using ocean swells for continuous infrasonic measurements of winds and temperature in the lower, middle, and upper atmosphere. *Geophys. Res. Lett.* 31 (2004), L19304.
- [76] GARDNER, C. S. Testing theories of atmospheric gravity wave saturation and dissipation. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 58, 14 (1996), 1575–1589.
- [77] GARNIER, N. Modélisation de la propagation non-linéaire d'ondes infrasonores. Tech. rep., Communication personnelle (E. Blanc), 2001.
- [78] GEORGES, T. Ionospheric effects of atmospheric waves. IER 57-ITSA 54, ESSA, Boulder, Colorado, USA, 1967.
- [79] GEORGES, T. M. A program for calculating three-dimensional acoustic-gravity ray paths in the atmosphere. Tech. Rep. ERL 212-WPL 16, NOAA, 1971.
- [80] GEORGES, T. M., AND BEASLEY, W. H. Refraction of infrasound by upper-atmospheric winds. *J. Acoust. Soc. Am.* 61, 1 (1977), 28–34.
- [81] GIBSON, R. G., AND DROB, D. P. Infrasound propagation calculation techniques using synoptic and mesoscale atmospheric specifications. In *27th Seismic Research Review : Ground-based Nuclear Explosion Monitoring Technologies* (Rancho Mirage, California, 20-22 september 2005), pp. 828–837.
- [82] GODIN, L. A., AND VORONOVICH, A. G. Fermat principe for non-dispersive waves in non-stationary media. *Proceeding Royal society of London A460* (2004), 1631–1647.

- [83] GODIN, O. A., AND VORONOVICH, A. G. Fermat's principle for dispersive waves in nonstationary media. In *Days on Diffraction* (28 may - 1 june 2005), pp. 109–115.
- [84] GREEN, D., BOWERS, D., DROB, D., AND HOR, M. The buncefield oil depot explosion : Extending signal coverage using airwaves recorded on seismometers. In *Infrasound Technology Workshop* (Fairbanks, Sep. 2006), University of Alaska.
- [85] GROVER, F. H. Geophysical effects of concorde sonic boom. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* 14 (1973), 141–158.
- [86] GUIRAUD, J.-P. Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques, focalisation. *J. Mécanique* 4 (1965), 215–267.
- [87] HAIRER, E., LUBICH, C., AND WANNER, G. *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin, New York, 2002.
- [88] HAMILTON, M. F., AND BLACKSTOCK, D. T. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, New York, NY, USA, 1998.
- [89] HAMMERTON, P. Effect of molecular relaxation on the propagation of sonic booms through a stratified atmosphere. *Wave Motion* 33, 4 (April 2001), 359–377.
- [90] HARRIS, M. *A new coupled terrestrial mesosphere-thermosphere general circulation model : Studies of dynamic, energetic, and photochemical coupling in the middle and upper atmosphere*. PhD thesis, University of London, London, UK, 2000.
- [91] HAYES, W. D., HAEFELI, R. C., AND KULSRUD, H. E. Sonic boom propagation in a stratified atmosphere, with computer program. Tech. Rep. CR-1299, NASA, 1969.
- [92] HEADING, J. *An introduction to phase integral method*. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 1962.
- [93] HEDIN, A. E. Extension of the msis thermospheric model into the middle and lower atmosphere. *J. Geophys. Res.* 96 (1991), 1159.
- [94] HEDIN, A. E., SPENCER, N. W., AND KILLEEN, T. L. Empirical global model of upper thermosphere winds based on atmosphere and dynamics explorer satellite data. *J. Geophys. Res.* 93 (1988), 9959–9978.
- [95] HERON, N., ROGÉ, G., JOHAN, Z., COULOUVRAT, F., AND DAGRAU, F. Hisac midterm : Overview of sonic boom issues. In *19th International Congress on Acoustics* (Madrid, 2-7 septembre 2007), no. NLA-08-003 in NLA.
- [96] HOOPER, D. A., AND THOMAS, L. The small-scale structure of vhf mesospheric summer echo layers observed at mid-latitudes. *Annales Geophysicae* 15, 8 (Aug. 1997), 1037–1047.
- [97] JENSEN, F. B., KUPERMAN, W. A., SCHMIDT, H., AND PORTER, M. B. *Computational Ocean Acoustics*. American Institute of Physics Press, Melville, NY, USA, 1994.
- [98] JOHNSON, M., AND HAMMERTON, P. Effect of molecular relaxation processes on travelling wave solutions of sonic boom waveforms. *Wave Motion* 38, 3 (March 2003), 229–240.
- [99] JONES, R. M., RILEY, J. P., AND GEORGES, T. M. Harpa : A versatile three-dimensional hamiltonian ray-tracing program for acoustic waves in the atmosphere above irregular terrain. Tech. rep., National Oceanic and Atmospheric Administration, Boulder, CO., 1986.
- [100] KAOURI, K. *Secondary Sonic Boom*. PhD thesis, University of Oxford, Somerville College, UK, 2004.
- [101] KARWEIT, M., BLANC-BENON, P., JUVE, D., AND COMTE-BELLOT, G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field : A study of phase variance. *J. Acoust. Soc. Am.* 89, 1 (1991), 52–62.

- [102] KELLER, J. B. Geometrical acoustics. i. the theory of weak shock waves. *J. Appl. Phys.* 25 (1954), 938–947.
- [103] KELLER, J. B. Diffraction by an aperture. *J. Appl. Phys.* 28, 4 (April 1957), 426–444.
- [104] KELLER, J. B., LEWIS, R. M., AND SECKLER, B. D. Diffraction by an aperture. ii. *J. Appl. Phys.* 28, 5 (1957), 570–579.
- [105] KINNEY, G. F., AND GRAHAM, K. J. *Explosive shocks in air*, berlin heidelberg ed. Springer Verlag, New York, Tokyo, 1985.
- [106] KOPER, K. D., WALLACE, T. C., REINKE, R. E., AND LEVERETTE, J. A. Empirical scaling laws for truck bomb explosions based on seismic and acoustic data. *Seismological Society of America* 92, 2 (March 2002), 527–542.
- [107] KRAVTSOV, Y., AND ORLOV, Y. *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*. Wave Phenomena. Springer Verlag, New York, 1993.
- [108] KULICHKOV, S., CHUNCHUZOV, I., PEREPEL'KIN, V., SVERTILOV, A., AND BARYSHNIKOV, A. On the influence of anisotropic turbulence on fluctuations in the azimuths and grazing angles of acoustic signals in the lower and middle atmosphere. *InfraMatics. The newsletter of Subaudible sound*, 18 (June 2007), 1–5.
- [109] KULICHKOV, S., CHUNCHUZOV, I., AND POPOV, O. The effects of anisotropic turbulence on long-range infrasound propagation in the atmosphere. Communication personnelle, 2004.
- [110] KULICHKOV, S. N. Long-range propagation and scattering of low-frequency sound pulses in the middle atmosphere. *Meteorology and Atmospheric Physics* 85 (2004), 47–60.
- [111] KULICHKOV, S. N., AVILOV, K. V., POPOV, O. E., OTREZOV, A. I., BUSH, G. A., AND BARYSHNIKOV, A. K. Some results of simulation of long-range infrasonic propagation in the atmosphere. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics* 40, 2 (2004), 202–215.
- [112] KULICHKOV, S. N., AND BUSH, G. A. Rapid variations in infrasonic signals at long distances from one-type explosions. *Izvestiya Russian Academy of Sciences, Atmospheric and Oceanic Physics* 37, 3 (2001), 306–313.
- [113] KULICHKOV, S. N., BUSH, G. A., AND SVERTILOV, A. I. New type of infrasonic arrivals in the geometric shadow region at long distances from explosions. *Atmospheric and Oceanic Physics* 38, 4 (2002), 397–402.
- [114] KULKARNY, V. A., AND WHITE, B. S. Focusing of waves in turbulent inhomogeneous media. *Physics of Fluids* 25, 10 (1982), 1770–1784.
- [115] KUMAR, V. S., KUMAR, Y. B., RAGHUNATH, K., RAO, P. B., KRISHNAIAH, M., MIZUTANI, K., AOKI, T., AND YASUI, M. Lidar measurements of mesospheric temperature inversion at a low latitude. *Annales Geophysicae* 19 (2001), 1039–1044.
- [116] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Fluid Mechanics*, vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Addison Wesley, London, UK, Reading, USA, 1959.
- [117] LE PICHON, A., BLANC, E., DROB, D., LAMBOTTE, S., DESSA, J.-X., LARDY, M., BANI, P., AND VERGNIOLE, S. Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds. *J. Geophys. Res.* 110 (2005), D13106.
- [118] LE PICHON, A., GARCÉS, M., BLANC, E., BARTHÉLÉMY, M., AND DROB, D. P. Acoustic propagation and atmosphere characteristics derived from infrasonic waves generated by the concorde. *J. Acoust. Soc. Am.* 111(1) (Jan. 2002), 629–641.
- [119] LEATHERWOOD, J. D., SULLIVAN, B. M., SHEPHERD, K. P., MCCURDY, D. A., AND BROWN, S. A. Summary of recent nasa studies of human response to sonic booms. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 586–598.

- [120] LEE, Y.-S., AND HAMILTON, M. F. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 2 (1995), 906–917.
- [121] LEHR, L. D. Misty picture event - test execution report. Tech. Rep. ADA283521, Defence nuclear agency, Washington, Nov. 1987.
- [122] LIDTHILL, M. *Surveys in Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1956, ch. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, pp. 250–351.
- [123] LINGEVITCH, J. F., COLLINS, M. D., DACOL, D. K., DROB, D. P., ROGERS, J. C. W., AND SIEGMANN, W. L. A wide angle and high mach number parabolic equation. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 2 (2002), 729–734.
- [124] LINGEVITCH, J. F., COLLINS, M. D., AND SIEGMANN, W. L. Parabolic equations for gravity and acousto-gravity waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 105, 6 (1999), 3049–3056.
- [125] LIPKENS, B. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. part iii : Validation of sonic boom propagation models. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 509–519.
- [126] LISZKA, L. Long-distance focusing of concorde sonic boom. *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 2 (1978), 631–635.
- [127] LUCE, H., CROCHET, M., AND DALAUDIER, F. Temperature sheets and aspect sensitive radar echoes. *Annales Geophysicae* 19 (2001), 899–920.
- [128] MADSHUS, C., LOVHOLT, F., KAYNIA, A., HOLE, L. R., ATTENBOROUGH, K., AND TAHERZADEH, S. Air-ground interaction in long range propagation of low frequency sound and vibration-field tests and model verification. *Applied Acoustics* 66 (2005), 553–578.
- [129] MANSON, A. H., MEEK, C., CHSHYOLKOVA, T., MCLANDRESS, C., AVERY, S. K., FRITTS, D. C., HALL, C. M., HOCKING, W. K., IGARASHI, K., MACDOUGALL, J. W., MURAYAMA, Y., RIGGIN, D. C., THORSEN, D., AND VINCENT, R. A. Winter warmings, tides and planetary waves : comparisons between cmam (with interactive chemistry) and mfr-meto observations and data. *Annales Geophysicae* 24 (2006), 2493–2518.
- [130] MARCHIANO, R. *Singularités d’amplitude et de phase en acoustique non linéaire. Application au bang sonique*. PhD thesis, Université Paris VI, Paris, Dec. 2003.
- [131] MARCHIANO, R., COULOUVRAT, F., GANJEHI, L., AND THOMAS, J.-L. Numerical investigation of the properties of nonlinear acoustical vortices through weakly heterogeneous media. *Physical Review E* 77, 016605 (2008), 1–11.
- [132] MARCHIANO, R., COULOUVRAT, F., AND THOMAS, J.-L. Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp. *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 2 (2005), 566–577.
- [133] MAZUR, M. A., AND GILBERT, K. E. Direct optimization methods, ray propagation, and chaos. i. continuous media. *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 1 (1997), 174–183.
- [134] MAZUR, M. A., AND GILBERT, K. E. Direct optimization methods, ray propagation, and chaos. ii. propagation with discrete transitions. *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 1 (1997), 184–192.
- [135] McDONALD, B. E., AND AMBROSIANO, J. High-order upwind correction methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* 56 (1984), 448–460.
- [136] McDONALD, B. E., AND KUPERMAN, W. A. Time domain formulation for pulse propagation including nonlinear behavior at a caustic. *J. Acoust. Soc. Am.* 81, 5 (1987), 1406–1417.
- [137] MCKISIC, J. M. Infrasound and the infrasonic monitoring of atmospheric nuclear explosions : A literature review. Final Report PL-TR-97-2123, Department of energy and Phillips laboratory, 1997.

- [138] MEDVEDEV, A. S., AND KLAASSEN, G. P. Vertical evolution of gravity wave spectra and the parameterization of associated wave drag. *J. Geophys. Res.* 100, D12 (1995), 5,841–25,854.
- [139] MIALLE, P. *Contribution d'un modèle 3D de tracé de rayons dans un milieu complexe pour la localisation de sources infrasonores*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, 2007.
- [140] MIALLE, P., LE PICHON, A., VERGOZ, J., VIRIEUX, J., AND BLANC, E. Construction of 3d propagation tables for localizing infrasonic events. In *Infrasound Technology Workshop* (Tokyo, Japon, Nov. 2007).
- [141] MIALLE, P., LE PICHON, A., VIRIEUX, J., AND BLANC, E. Methodology for infrasound sources localization using global propagation tables. In *8th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics* (Heraklion, Crète, Grèce, July 2007).
- [142] MUTSCHLECHNER, J. P., WHITAKER, R. W., AND AUER, L. H. An empirical study of infrasonic propagation. Tech. rep., Los Alamos National Lab., Los Alamos, NM (US), 1999.
- [143] NAPPO, C. J. *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves*. Academic press, New York, NY, USA, 2002.
- [144] NORRIS, D. E. Time domain modeling techniques and the study of infrasonic propagation. In *26th Seismic Research Review – Trends in Nuclear Explosion Monitoring* (Orlando, Florida, USA, 21-23 september 2004).
- [145] NORRIS, D. E. Recent advances in prediction infrasound using the time-domain parabolic equation (tdpe) model. In *12th Long Range Sound Propagation Symposium* (New Orleans, USA, 25-26 october 2006), CD-Rom.
- [146] NORRIS, D. E., AND GIBSON, R. G. Inframap enhancements : environmental/propagation variability and localization accuracy of infrasonic networks. In *24th Seismic Research Review - Nuclear explosion Monitoring : Innovation and Integration* (Ponte Vedra Beach, Florida, USA, 17-19 september 2002), pp. 809–813.
- [147] OLLIVIER, S., AND BLANC-BENON, P. Numerical simulation of low level sonic boom propagation through random inhomogeneous sound speed fields. In *19th International Congress on Acoustics* (Madrid, 2-7 septembre 2007), no. NLA-08-008 in NLA.
- [148] OSTASHEV, V. E. *Acoustics in moving inhomogeneous media*. E and FN Spon, London, UK, 1997.
- [149] OSTASHEV, V. E., CHUNCHUZOV, I. P., AND WILSON, D. K. Sound propagation through and scattering by internal gravity waves in a stably stratified atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 118, 6 (Dec. 2005), 3420–3429.
- [150] OSTASHEV, V. E., AND WILSON, D. K. Coherence function and mean field of plane and spherical sound waves propagating through inhomogeneous anisotropic turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.* 115 (2004), 497–506.
- [151] OSTASHEV, V. E., WILSON, D. K., LIU, L., ALDRIDGE, D. F., SYMONS, N. P., AND MARLIN, D. Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation. *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 2 (2005), 503–517.
- [152] OSTROVSKY, L., AND NAUGOLNYKH, K. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge University press, Cambridge, UK, 1998.
- [153] PETES, J., MILLER, R., AND MCMULLAN, F. User's guide and history of anfo as a nuclear weapons effect simulation explosive. ADA 151 623, Defence Nuclear Agency, Washington, Mars 1983.

- [154] PEYRET, C. *Propagation des ondes de choc dans l'atmosphère*. PhD thesis, Université Paris VI, Paris, Juin 1995.
- [155] PIACSEK, A. A. Atmospheric turbulence conditions leading to focused and folded sonic boom wave fronts. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 520–529.
- [156] PICONE, J. M., HEDIN, A. E., DROB, D. P., AND AIKIN, A. C. Nrlmsise-00 empirical model of the atmosphere : statistical comparisons and scientific issues. *J. Geophys. Res.* 107, A12 (2002), 1468.
- [157] PIERCE, A. D. *Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1994.
- [158] PISERCHIA, P., AND ROCHE, R. Numerical modeling of infrasound propagation at very long distance. In *CD-Rom CFA/DAGA '04* (Strasbourg, March 2004), CFA, Ed., vol. CD-Rom ISBN 2-9521105-3-0, CFA, pp. 1063–1064.
- [159] PISERCHIA, P.-F. *Propagation et Conservation des ondes T par simulation numérique hybride*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice, 1998.
- [160] PLOTKIN, K. J. State of the art of sonic boom modeling. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 530–536.
- [161] PLOTKIN, K. J. Sonic boom : Origins, modeling and effects. Tech. rep., Wyle laboratories, June 2004.
- [162] PLOTKIN, K. J., AND PAGE, J. A. Extension of pcboom to over-the-top booms, ellipsoidal earth, and full 3-d ray tracing. In *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (28th AIAA Aeroacoustics Conference)* (2007).
- [163] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSLY, S. A., AND VETTERLING, W. T. *Numerical Recipes in Fortran 90*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [164] RASCALOU, B. étude détaillée des mesures microbarographiques – expérience misty picture. Tech. Rep. 24/89/Et, CEA, Bruyères-le-Châtel, Nov. 1989.
- [165] REED, J. W. Atmospheric attenuation of explosion waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 61, 1 (Jan. 1977), 39–47. Environmental Research, Sandia Laboratories.
- [166] REED, J. W., CHURCH, H. W., AND HUCK, T. W. Misty picture weather-watch and microbarograph project : experiments 9412-14-18. Sand-87-2978c, Sandia National Laboratories, 1987.
- [167] RENTERGHEM, T. V., AND BOTTELDOOREN, D. Numerical simulation of the effect of trees on downwind noise barrier performance. *Acta Acustica united with Acustica* 89 (2003), 764–778.
- [168] REVELLE, D. O., AND EDWARDS, W. N. Stardust - an artificial, low-velocity meteor fall and recovery : 15 january 2006. *Meteoritics & Planetary Science* 42, 3 (2007), 271–299.
- [169] REVELLE, D. O., AND WHITAKER, R. W. Lamb waves from airborne explosion sources : Viscous effects and comparisons to ducted acoustic arrivals. In *7th International Long-Range Sound Propagation Symposium* (July 1996), L. A. N. L. document, Ed., LA-UR-96-3594, École centrale Lyon.
- [170] RITZEL, D. V., AND GOTTLIEB, J. J. Numerical evaluation of whitam's f-function for supersonic projectiles. *AIAA Journal* 26, 0001-1452 (1988), 244–247.
- [171] RO GALLO, R. S. An illiac program for the numerical simulation of homogeneous incompressible turbulence. Tech. Rep. TM-73203, NASA, Nov. 1977.
- [172] ROGERS, P. H., AND GARDNER, J. H. Propagation of sonic booms in the thermosphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 67, 1 (1980), 78–91.

- [173] ROSALES, R. R., AND TABAK, E. G. Caustics of weak shock waves. *Phys. Fluids* 10, 1 (Jan. 1998), 206–222.
- [174] SALOMONS, E. M., BLUMRICH, R., AND HEIMANN, D. Eulerian time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. comparison with frequency-domain models. *Acta. Acust. Acust.* 88 (2002), 483–492.
- [175] SCHWENDEMAN, D. W. Numerical shock propagation in non-uniform media. *J. Fluid Mech.* 188 (1988), 383–410.
- [176] SCOTT, J., BLANC-BENON, P., AND DALLOIS, L. Secondary sonic boom modelling in a realistic atmosphere. *Communication personnelle* (2006).
- [177] SCOTT, J. F. Uniform asymptotics for spherical and cylindrical nonlinear acoustic waves generated by sinusoidal source. *Proc. R. Soc. Lond. A* 375 (1981), 211–230.
- [178] SECKLER, B. D., AND KELLER, J. B. Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am.* 31, 2 (Feb. 1959), 206–216.
- [179] SECKLER, B. D., AND KELLER, J. B. Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am.* 31, 2 (1959), 192–205.
- [180] SICLARI, M., AND DARDEN, C. A euler code prediction of near to mid-field sonic boom pressure signatures. *AIAA Paper* 90, 4000 (October 1990).
- [181] SMITH, K. B., BROWN, M. G., AND TAPPERT, F. D. Ray chaos in underwater acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.* 91, 4 (1992), 1939–1949.
- [182] SOKOLNIKOFF, I. S., AND REDHEFFER, R. M. *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1966.
- [183] STEVENS, J., ADAMS, D. A., BAKER, G. E., XU, H., AND MURPHY, J. R. Infrasound scaling and attenuation relations from soviet explosion data en instrumentation design criteria from experiments and simulations. In *21th Seismic Research Symposium* (Las Vegas, SV, USA, 21-24 september 1999), pp. 185–194.
- [184] STURM, F., AND FAWCETT, J. A. On the use of higher-order azimuthal schemes in 3-d pe modeling. *J. Acoust. Soc. Am.* 113, 6 (2003), 3134–3145.
- [185] SUTHERLAND, L. C., AND BASS, H. E. Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160km. *J. Acoust. Soc. Am.* 115 (3), 115 (3) (March 2004), 1012–1032.
- [186] TAHIRA, M. A study of the infrasonic wave in the atmosphere (ii). infrasonic waves generated by the explosion of the volcano sakurajima. *J. Meteorol. Soc. Japan* 60, 3 (1982), 896–907.
- [187] TAM, C., AND WEBB, J. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.* 107 (1993), 262.
- [188] TAPPERT, F., AND TANG, X. Ray chaos and eigenrays. *J. Acoust. Soc. Am.* 99(1) (Jan. 1996), 185–195.
- [189] THURRE, C. *Étude de l’ajustement hydrostatique suite à un forçage diabatique dans un modèle pleinement élastique*. PhD thesis, Université McGill, Montréal, 1998.
- [190] TSUTSUMI, M., HOLDSWORTH, D., NAKAMURA, T., AND REID, I. Meteor observations with an mf radar. *Earth Planets Space* 51 (1999), 691–699.
- [191] UGINCIUS, P. Ray acoustics and fermat’s principle in a moving inhomogeneous medium. *J. Acoust. Soc. Am.* 51, 5B (1972), 1759–1763.
- [192] VINCENTI, W. G., AND KRUGER, C. H. *Introduction to Physical Gas Dynamics*. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 1967.
- [193] VIRIEUX, J. Fast and accurate ray tracing by hamiltonian perturbation. *J. Geophys. Res.* 96, B1 (1991), 579–594.

- [194] VIRIEUX, J., GARNIER, N., BLANC, E., AND DESSA, J.-X. Paraxial ray tracing for atmospheric wave propagation. *Geophys. Res. Lett.* 31 (2004), L20106.
- [195] WEBER, M. E., AND DONN, W. L. Ducted propagation of concorde-generated shock waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 71, 2 (1982), 340–347.
- [196] WEI, G. W., AND GU, Y. Conjugate filter approach for solving burgers' equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 149, 2 (Dec. 2002), 439–456.
- [197] WEICKMANN, A. M., RILEY, J. P., GEORGES, T. M., AND JONES, R. M. Eigen – a program to compute eigenrays from harpa/harpo raysets. Tech. Rep. ERL WPL-160. PB89165781, NOAA, 1989.
- [198] WHITAKER, R. W., MUTSCHLECHNER, J. P., DAVIDSON, M. B., AND NOEL, S. D. Infrasonic observations of large-scale he events. In *4th Long Range Sound Propagation Symposium* (Virginia, USA, 16-17 May 1990), pp. 133–141.
- [199] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*. Interscience series of texts, monographs and tracts. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 1974.
- [200] WILSON, D. K., AND LIU, L. Finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in a dynamic atmosphere. Tech. Rep. ERDC/CRREL TR-04-12, US Army Corps of Engineers, May 2004.
- [201] WOCHNER, M. S., ATCHLEY, A. A., AND SPARROW, V. W. Numerical simulation of finite amplitude wave propagation in air using a realistic atmospheric absorption model. *J. Acoust. Soc. Am.* 118, 5 (2005), 2891–2898.
- [202] YEH, K. C., AND LIU, C. H. Acoustic gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space Phys* 12 (1974), 193–216.
- [203] YOUNG, R. W. Sonic booms of space shuttles approaching edwards air force base, 1988–1993. *J. Acoust. Soc. Am.* 111, 1 (2002), 569–575.

# Annexes



## Annexe A

# Éléments de géométrie différentielle pour l'acoustique géométrique

Dans cette annexe, nous proposons quelques développements de géométrie différentielle utiles en acoustique géométrique. En premier lieu, nous redonnons le développement des équations des rayons et des éléments géodésiques. Puis, nous nous intéressons au volume convecté sous ses différentes formes. Enfin, nous donnons les relations de réflexion des rayons et des éléments géodésiques dans le cas d'une surface paramétrique quelconque.

### A.1 Développement des équations des rayons

Dans cette partie, nous développons à l'aide de la géométrie différentielle les équations de tracé de rayons [157]. Nous cherchons les trajectoires de  $\mathbb{R}^7$  vérifiées par  $(\omega, \vec{K}, \vec{X})$ . La trajectoire d'un point du front d'onde se déplace à la vitesse de groupe  $\vec{c}_g$ . Ainsi la trajectoire de ce point  $\vec{X}$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{c}_g = c_0 \vec{N} + \vec{v}_0,$$

avec  $\vec{N} = \frac{\vec{K}}{K}$ . Nous cherchons maintenant l'évolution du vecteur d'onde le long de cette trajectoire.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{k}(\vec{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + (\vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{k}.$$

En utilisant l'équation (2.20) puis la relation de dispersion (2.21), il est possible d'écrire successivement :

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \omega = -\vec{\nabla}(\vec{c}_g \cdot \vec{k}) = -(\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{k} - (\vec{\nabla} \vec{k}) \cdot \vec{c}_g$$

Le dernier terme est développé puis simplifié en notant que  $\vec{k}$  est un gradient :

$$(\vec{\nabla} \vec{k}) \cdot \vec{c}_g = (\vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{k} + \vec{c}_g \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{k} = (\vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{k}.$$

On déduit de ces développements l'équation d'évolution du vecteur d'onde le long des rayons :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\vec{\nabla} \vec{c}_g \cdot \vec{K} = -K \vec{\nabla} c_0 - \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{K}.$$

Ajoutons aux équations des rayons l'équation de variation du vecteur normale  $\vec{N}$ . Cette

équation est obtenue par différentiation de la relation  $\vec{K} = K\vec{N}$  :

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{1}{K} \left( \frac{d\vec{K}}{dt} - \left( \vec{N} \cdot \frac{d\vec{K}}{dt} \right) \vec{N} \right). \quad (\text{A.1})$$

Cette relation sera utilisée ultérieurement dans les développements.

## A.2 Développement des équations des éléments géodésiques

Les éléments géodésiques sont les vecteurs permettant de passer d'un rayon aux rayons paraxiaux. Les rayons paraxiaux sont des rayons voisins du rayon central émis avec des conditions initiales voisines du rayon central. La notion d'éléments géodésiques est équivalente à la notion de rayons paraxiaux utilisée notamment par Piserchia [159]. Les éléments géodésiques sont également les vecteurs colonne de la matrice jacobienne de passage entre les coordonnées curvilignes  $(\vec{p}, t)$  et les coordonnées  $(\vec{x}, t)$ .

Suivant la démarche présentée par Candel [39], nous développons les équations décrivant l'évolution des éléments géodésiques le long des rayons. Nous cherchons donc l'équation décrivant l'évolution de  $\vec{X}_{p_i}$  le long des rayons où  $p_i$  est une composante de  $\vec{p}$ . À partir de la définition des éléments géodésiques et en utilisant la commutativité des opérateurs de différentiations  $\frac{\partial}{\partial p_i}$  et  $\frac{d}{dt}$ , nous avons :

$$\frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{d\vec{X}}{dt} \right),$$

et en remplaçant par l'équation des rayons (2.38a), puis en développant :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left( c_0(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{p}, t) + \vec{v}_0(\vec{X}, t) \right), \\ &= c_0 \frac{\partial \vec{N}}{\partial p_i} + \frac{\partial c_0(\vec{X}, t)}{\partial p_i} \vec{N} + \frac{\partial \vec{v}_0(\vec{X}, t)}{\partial p_i}, \\ &= c_0 \frac{\partial \vec{N}}{\partial p_i} + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i} \cdot \vec{\nabla} c_0 + \frac{\partial t}{\partial p_i} \frac{\partial c_0}{\partial t} \right) \vec{N} + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0 + \frac{\partial t}{\partial p_i} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}, \end{aligned}$$

d'où, avec l'hypothèse  $\frac{\partial t}{\partial p_i} = 0$  et en définissant l'élément géodésique conjugué  $\vec{N}_{p_i} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial p_i}$  :

$$\frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} = c_0 \vec{N}_{p_i} + \left( \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} c_0 \right) \vec{N} + \left( \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0. \quad (\text{A.2})$$

L'élément géodésique conjugué vérifie également une équation le long des rayons obtenue de manière analogue à l'équation précédente. Partant de la définition de  $\vec{N}_{p_i}$  et en utilisant les équations (A.1) et (2.38b) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}_{p_i}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{N}}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{d\vec{N}}{dt} \right), \\ \frac{d\vec{N}_{p_i}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\vec{\nabla} c_0 - \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{N} - \vec{N} \cdot \left( -\vec{\nabla} c_0 - \vec{\nabla} \vec{v}_0 \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \right). \end{aligned}$$

En posant le vecteur :  $\vec{V} = \vec{\nabla}c_0 + \vec{\nabla}\vec{v}_0 \cdot \vec{N}$ , on a, avec l'hypothèse  $\frac{\partial t}{\partial p_i} = 0$  :

$$\vec{V}_{p_i} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial p_i} = \vec{\nabla}\vec{v}_0 \cdot \vec{N}_{p_i} + \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0 \cdot \vec{N} + \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}c_0,$$

où  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0$  est un tenseur d'ordre trois. On en déduit l'équation d'évolution le long des rayons pour l'élément géodésique conjugué :

$$\frac{d\vec{N}_{p_i}}{dt} = (\vec{N} \cdot \vec{V})\vec{N}_{p_i} + (\vec{N}_{p_i} \cdot \vec{V})\vec{N} - \left( \vec{V}_{p_i} - (\vec{N} \cdot \vec{V}_{p_i})\vec{N} \right). \quad (\text{A.3})$$

Le système du premier ordre constitué des équations (A.2) et (A.3) est intégré à partir de la surface initiale en même temps que les équations de tracé de rayons. Ce système d'équation fait intervenir les tenseurs  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}c_0$  et  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0$ . Ces tenseurs doivent être définis en tout point de l'espace et du temps et continues afin d'assurer la bonne adéquation entre les rayons calculés et les géodésiques. La vitesse du son  $c_0$  et la convection du milieu  $\vec{v}_0$  sont des fonctions  $C^2(\mathbb{R}^4)$ . Cette contrainte est en accord avec l'hypothèse de milieu lentement variable.

### A.3 Volume convecté

L'objet de cette section est de montrer que le volume convecté  $\nu$  défini par l'équation (2.44) vérifie l'équation de conservation (2.41).

En procédant d'une manière analogue au développement des équations des éléments géodésiques, nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \vec{c}_g(\vec{X}, t) \right), \\ \frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} &= \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial p_i} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{c}_g, \\ \frac{d\vec{X}_{p_i}}{dt} &= \left( \vec{X}_{p_i} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{c}_g, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

en utilisant l'hypothèse  $\frac{\partial t}{\partial p_i} = 0$ .

Intéressons nous au cas où  $\nu$  est défini par l'équation :

$$\nu = |\vec{X}_{p_1} \vec{X}_{p_2} \vec{X}_{p_3}| = \vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2} \cdot \vec{X}_{p_3}. \quad (\text{2.43})$$

À partir de cette expression, on obtient que l'évolution du volume convecté le long du rayon vaut :

$$\frac{d\nu}{dt} = \left( \frac{d\vec{X}_{p_1}}{dt} \wedge \vec{X}_{p_2} \right) \cdot \vec{X}_{p_3} + \left( \vec{X}_{p_1} \wedge \frac{d\vec{X}_{p_2}}{dt} \right) \cdot \vec{X}_{p_3} + \left( \vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2} \right) \cdot \frac{d\vec{X}_{p_3}}{dt},$$

ou encore,

$$\frac{d\nu}{dt} = \left( \vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3} \right) \cdot \left[ (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right] + \left( \vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1} \right) \cdot \left[ (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right] + \left( \vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2} \right) \cdot \left[ (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right],$$

en développant chaque terme sur la base orthonormée  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ , et en les regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\nu}{dt} = & [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_1)] (\vec{e}_1 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_1) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_2)] (\vec{e}_2 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_2) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_3)] (\vec{e}_3 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_3) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_2)] (\vec{e}_1 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_2) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_1 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_3)] (\vec{e}_1 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_3) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_1)] (\vec{e}_2 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_1) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_3) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_2 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_3)] (\vec{e}_2 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_3) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_1) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_1)] (\vec{e}_3 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_1) \\
& + [(\vec{X}_{p_2} \wedge \vec{X}_{p_3}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_1} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_3} \wedge \vec{X}_{p_1}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_2} \cdot \vec{e}_2) + (\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}) \cdot \vec{e}_3 (\vec{X}_{p_3} \cdot \vec{e}_2)] (\vec{e}_3 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_2).
\end{aligned}$$

Les termes entre crochets des trois premières lignes sont égaux et valent  $\nu$ . En explicitant les termes entre crochets des six autres lignes, il est possible de montrer qu'ils sont nuls. Enfin, la divergence peut être explicitée sur une base orthonormée sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g = \vec{e}_1 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \cdot (\vec{\nabla} \vec{c}_g) \cdot \vec{e}_3.$$

Ainsi on montre que le volume convecté  $\nu$  définie à l'équation (2.43) vérifie le long des rayons la relation :

$$\frac{d\nu}{dt} = \nu \vec{\nabla} \vec{c}_g. \quad (2.41)$$

Intéressons nous maintenant au cas où le volume convecté  $\nu$  est défini par l'équation :

$$\nu = \frac{|\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}|}{K}, \quad (2.44)$$

Dans l'hypothèse où le vecteur  $\vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2}$  est colinéaire au vecteur unitaire  $\vec{N}$ , le volume convecté peut également être écrit :

$$\nu = \left( \vec{X}_{p_1} \wedge \vec{X}_{p_2} \right) \cdot \frac{\vec{N}}{K}.$$

La deuxième équation des rayons (2.38b) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\vec{\nabla} \vec{c}_g \cdot \vec{K},$$

ce qui donne en utilisant la relation (A.1) et en projetant suivant  $\vec{N}$  :

$$\vec{N} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{N}}{K} \right) = \left( \frac{\vec{N}}{K} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{c}_g \cdot \vec{N}.$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{N}/K$  vérifie la relation (A.4) projetée suivant le vecteur  $\vec{N}$ . Les éléments géodésiques vérifient toujours la relation (A.4). En procédant comme précédemment et en choisissant la base orthonormée  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$  telle que  $\vec{e}_1 = \vec{N}$ , on obtient que le volume convecté défini par la relation (2.44) vérifie la relation (2.41).

## A.4 Notations des opérateurs de dérivation spatiale

Le tenseur  $\vec{\nabla}\vec{v}_0 = \{\vec{\nabla}\vec{v}_0\}_{ij}$  représente les variations du vecteur  $\vec{v}_0$  par rapport à la coordonnée d'espace  $j$  suivant la direction  $\vec{e}_i$ . D'une manière analogue,  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0 = \{\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0\}_{ijk}$  est la variation du vecteur  $\vec{v}_0$  par rapport aux coordonnées  $j$  et  $k$  suivant la direction  $\vec{e}_i$ . Le tenseur  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}c_0 = \{\vec{\nabla}\vec{\nabla}c_0\}_{jk}$  est la variation du scalaire  $c_0$  par rapport aux coordonnées d'espace  $j$  et  $k$ . Avec ces notations, nous avons les relations :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}_0 &= (\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0, \\ (\vec{\nabla}\vec{v}_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_j &= \{\vec{\nabla}\vec{v}_0\}_{ij}n_i, \\ (\vec{X} \cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_k &= X_j \{\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{v}_0\}_{ijk}n_i, \\ (\vec{X} \cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}c_0) \cdot \vec{e}_k &= X_j \cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}c_{0jk}.\end{aligned}$$

Ces différents tenseurs sont donnés en coordonnées sphériques dans la littérature (ex. [182]).

## A.5 Réflexion spéculaire sur une surface paramétrique

Lors de leur propagation dans l'atmosphère, les ondes infrasonores peuvent se réfléchir sur la surface de la Terre plusieurs fois. Ces réflexions sont généralement supposées spéculaires et sans atténuation. Cependant, la surface de la Terre a une géométrie complexe qui est susceptible d'affecter la propagation des ondes. L'objectif n'est pas de prendre en compte les petites échelles de la surface de la Terre mais de modéliser les grandes échelles. Ces grandes échelles en propagation atmosphérique représentent la topographie des continents et essentiellement les chaînes de montagnes. L'objet de cette section est de développer les équations nécessaires à la modélisation de la réflexion spéculaire des ondes sur une surface paramétrique dans le cadre de l'acoustique géométrique.

La surface de la Terre est représentée par une surface paramétrique  $\vec{x}_g(\theta_1, \theta_2)$  supposée deux fois dérivable. Cette surface est également supposée lentement variable au même titre que le milieu est lentement variable en acoustique géométrique. Le rayon de courbure local de la surface est grand par rapport à la longueur d'onde. Du point de vue géométrique, la surface de la Terre apparaît localement pour l'onde comme une surface dont le rayon de courbure est grand par rapport à la longueur d'onde.

Pour être le plus général possible, les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont quelconques mais indépendants et permettent de générer la surface de la Terre en entier. Dans le cas de la surface de la Terre, ces paramètres peuvent être simplement la latitude et la longitude.

La fonction  $\vec{x}_g(\theta_1, \theta_2)$  est supposée connue ainsi que ces dérivées premières et secondes. La base locale  $[\vec{e}_n, \vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{\perp 2}]$  est définie par :

$$\begin{cases} \vec{e}_{\perp j} = \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_j} \left| \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_j} \right|^{-1}, & j = 1, 2, \\ \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_{\perp 1} \wedge \vec{e}_{\perp 2}}{|\vec{e}_{\perp 1} \wedge \vec{e}_{\perp 2}|}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Les vecteurs unitaires  $\vec{e}_{\perp j}$  sont tangents à la surface et le vecteur unitaire  $\vec{e}_n$  y est normal. Nous avertissons le lecteur que la base locale n'est pas forcément orthonormée étant donné que  $\vec{e}_{\perp 1} \cdot \vec{e}_{\perp 2} \neq 0$  d'une manière générale. La surface étant deux fois différentiable, les dérivées du

vecteur normal  $\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \theta_j}$  sont définies partout et peuvent être calculées suivant la relation :

$$\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \theta_i} = \frac{(\vec{D}_{i1} \wedge \vec{e}_{\perp 2} + \vec{e}_{\perp 1} \wedge \vec{D}_{i2}) \cdot (\vec{I} - \vec{e}_n \vec{e}_n)}{|\vec{e}_{\perp 1} \wedge \vec{e}_{\perp 2}|}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.6})$$

avec  $\vec{D}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{x}_g}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \left| \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_j} \right|^{-1}$  et  $\vec{I}$  la matrice identité.

Un rayon  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  incident au niveau d'une surface se réfléchit au temps  $t_g(\vec{p})$  et à la position  $\vec{x}_g(\theta_1(\vec{p}), \theta_2(\vec{p}))$ . Le vecteur normal à la surface au point de réflexion est  $\vec{e}_n(\theta_1(\vec{p}), \theta_2(\vec{p}))$ . La réflexion des ondes sur la surface est supposée spéculaire (loi de Descartes). Les conditions initiales du rayon réfléchi sont exprimées en fonction du rayon incident par :

$$\vec{X}' = \vec{X}, \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{K}' = \vec{K} - 2(\vec{K} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{N}' = \vec{N} - 2(\vec{N} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n, \quad (\text{A.9})$$

en notant prime ' les variables relatives à l'onde réfléchie et en gardant non indicées les variables relatives à l'onde incidente.

Nous cherchons maintenant à établir les conditions initiales après réflexion des éléments géodésiques  $\vec{X}'_{p_i}$  et des éléments conjugués  $\vec{N}'_{p_i}$  en fonction des éléments géodésiques avant réflexion. Les relations sont les mêmes quelque soit le paramètre  $p_i$  utilisé.

Deux rayons paraxiaux (de paramètres d'émission  $p_i$  voisins) se réfléchissent à des temps différents et à des points de la surface différents. Ces différences sont introduites à l'aide des différentielles  $\Delta_t$ ,  $\Delta_{\theta_1}$  et  $\Delta_{\theta_2}$  définies par :

$$\Delta_t = \frac{\partial t_g}{\partial p_i}, \quad \Delta_{\theta_1} = \frac{\partial \theta_1}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \Delta_{\theta_2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial p_i}.$$

Ces paramètres dépendent à la fois du rayon ( $\vec{p}$ ) et de l'élément géodésique considéré ( $p_i$ ).

La condition de réflexion du rayon au temps  $t_g$  sur la surface  $\vec{x}_g(\vec{p})$  s'écrit :

$$\vec{X}(\vec{p}, t_g(\vec{p})) = \vec{x}_g(\theta_1(\vec{p}), \theta_2(\vec{p})).$$

En différentiant cette équation par rapport à  $p_i$ , on obtient le système :

$$\vec{X}_{p_i} + \vec{c}_g \Delta_t = \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_1} \Delta_{\theta_1} + \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_2} \Delta_{\theta_2}.$$

Ce système exprime la fermeture géométrique de la figure (A.1(b)). La résolution de ce système donne :

$$\Delta_t = -\frac{\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{e}_n}{\vec{c}_g \cdot \vec{e}_n}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta_{\theta_1} = \left| \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_1} \right|^{-1} (\vec{X}_{p_i} + \vec{c}_g \Delta_t) \cdot \frac{\vec{e}_{\perp 1} - (\vec{e}_{\perp 1} \cdot \vec{e}_{\perp 2}) \vec{e}_{\perp 2}}{1 - (\vec{e}_{\perp 1} \cdot \vec{e}_{\perp 2})^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta_{\theta_2} = \left| \frac{\partial \vec{x}_g}{\partial \theta_2} \right|^{-1} (\vec{X}_{p_i} + \vec{c}_g \Delta_t) \cdot \frac{\vec{e}_{\perp 2} - (\vec{e}_{\perp 1} \cdot \vec{e}_{\perp 2}) \vec{e}_{\perp 1}}{1 - (\vec{e}_{\perp 1} \cdot \vec{e}_{\perp 2})^2}. \quad (\text{A.12})$$

Pour obtenir l'élément géodésique  $\vec{X}'_{p_i}$  de l'onde réfléchie, nous partons de la relation (A.7) :  $\vec{X}(\vec{p}, t_g(\vec{p})) = \vec{X}'(\vec{p}, t_g(\vec{p}))$ . En la différentiant par rapport au paramètre  $p_i$  on obtient une relation de fermeture géométrique présentée à la figure (A.1(c)) :  $\vec{X}'_{p_i} + \Delta_t \vec{c}'_g = \vec{X}_{p_i} + \Delta_t \vec{c}_g$ . Cette relation

est simplifiée, en utilisant la relation  $\vec{c}_g - \vec{c}'_g = c_0(\vec{N} - \vec{N}')$  et la relation (A.9), sous la forme :

$$\vec{X}'_{p_i} = \vec{X}_{p_i} + 2\Delta_t c_0(\vec{N} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n, \quad (\text{A.13})$$

Cette expression ne fait pas intervenir la courbure de la surface.

Le calcul de l'élément géodésique conjugué  $\vec{N}'_{p_i}$  à partir de  $\vec{N}_{p_i}$  suit le même principe que pour l'élément géodésique. La visualisation géométrique de la relation est plus complexe.

Partons cette fois ci de la relation (A.9) :

$$\vec{N}'(\vec{p}, t_g(\vec{p})) = \vec{N}(\vec{p}, t_g(\vec{p})) - 2 \left( \vec{N}(\vec{p}, t_g(\vec{p})) \cdot \vec{e}_n(\theta_1(\vec{p}), \theta_2(\vec{p})) \right) \vec{e}_n(\theta_1(\vec{p}), \theta_2(\vec{p})),$$

dans laquelle les dépendances en fonction de  $\vec{p}$  sont explicitement indiquées. En la différentiant par rapport à  $p_i$ , on obtient sans difficulté particulière :

$$\vec{N}'_{p_i} + \Delta_t \frac{d\vec{N}'}{dt} = \vec{N}_{p_i} + \Delta_t \frac{d\vec{N}}{dt} - 2 \left( \left( \vec{N}_{p_i} + \Delta_t \frac{d\vec{N}}{dt} \right) \cdot \vec{e}_n \right) \vec{e}_n - 2 \left( \vec{N} \cdot \frac{d\vec{e}_n}{dp_i} \right) \vec{e}_n - 2 \left( \vec{N} \cdot \vec{e}_n \right) \frac{d\vec{e}_n}{dp_i}.$$

En terminant le développement pour  $\vec{e}_n$  et après réarrangement des termes, on obtient la condition initiale pour les éléments géodésiques conjugués :

$$\begin{aligned} \vec{N}'_{p_i} = & \vec{N}_{p_i} - 2(\vec{N}_{p_i} \cdot \vec{e}_n) \vec{e}_n - 2 \sum_{j=1,2} \Delta_{\theta_j} \left[ \left( \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \theta_j} \right) \vec{e}_n + (\vec{N} \cdot \vec{e}_n) \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \theta_j} \right] \\ & + \Delta_t \left[ \frac{d\vec{N}}{dt} - \frac{d\vec{N}'}{dt} - 2 \left( \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \vec{e}_n \right) \vec{e}_n \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Dans l'équation (A.14), le développement des termes  $\frac{d\vec{N}}{dt}$  et  $\frac{d\vec{N}'}{dt}$  n'est pas avantageux d'un point de vue numérique. Ces vecteurs sont évalués directement à partir de l'équation (A.1) et de la seconde équation des rayons (2.38b).

Les équations (A.7), (A.8), (A.13) et (A.14) modélisent la réflexion des rayons sur une surface paramétrique. Ces équations sont indépendantes du système de paramétrisation de la surface  $(\theta_1, \theta_2)$  utilisé. Ces équations peuvent être légèrement simplifiées avec l'hypothèse que la convection du milieu est toujours parallèle à la surface du sol :  $\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_n = 0$ . Mais, comme nous l'avons mentionné précédemment, ces simplifications ne sont pas avantageuses au point de vue numérique et nous privilégions l'utilisation des équations sous leur forme actuelle. Ces équations sont en accord avec les développements de Pierce [157] (p.413) dans le cas de la réflexion sur une surface sphérique dans un milieu homogène. Dans le cas d'une surface plane, on retrouve les équations de Scott & al. [176].

## Réflexion sur une sphère en coordonnées sphériques

La surface de la Terre peut être en première approximation représentée par une sphère parfaite de rayon  $R_t$ . Cette sphère est centrée sur le repère géocentrique. En utilisant les coordonnées sphériques, la surface de la Terre est paramétrée par les angles  $(\theta, \phi)$ . Elle est définie par la relation :  $\vec{x}_g(\theta, \phi) = R_t \vec{e}_r(\theta, \phi)$ . Le vecteur normal est  $\vec{e}_n = \vec{e}_r$ , d'où les relations  $\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$  et  $\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \phi} = \sin \theta \vec{e}_\phi$ . Les deux vecteurs tangents à la surface sont  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\phi$ . La base  $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi]$  est orthonormée. On obtient alors :

$$\Delta_t = -\frac{\vec{X}_{p_i} \cdot \vec{e}_r}{\vec{c}_g \cdot \vec{e}_r}, \quad \Delta_\theta = \frac{1}{R_t} (\vec{X}_{p_i} + \vec{c}_g \Delta_t) \cdot \vec{e}_\theta, \quad \Delta_\phi \sin \theta = \frac{1}{R_t} (\vec{X}_{p_i} + \vec{c}_g \Delta_t) \cdot \vec{e}_\phi.$$

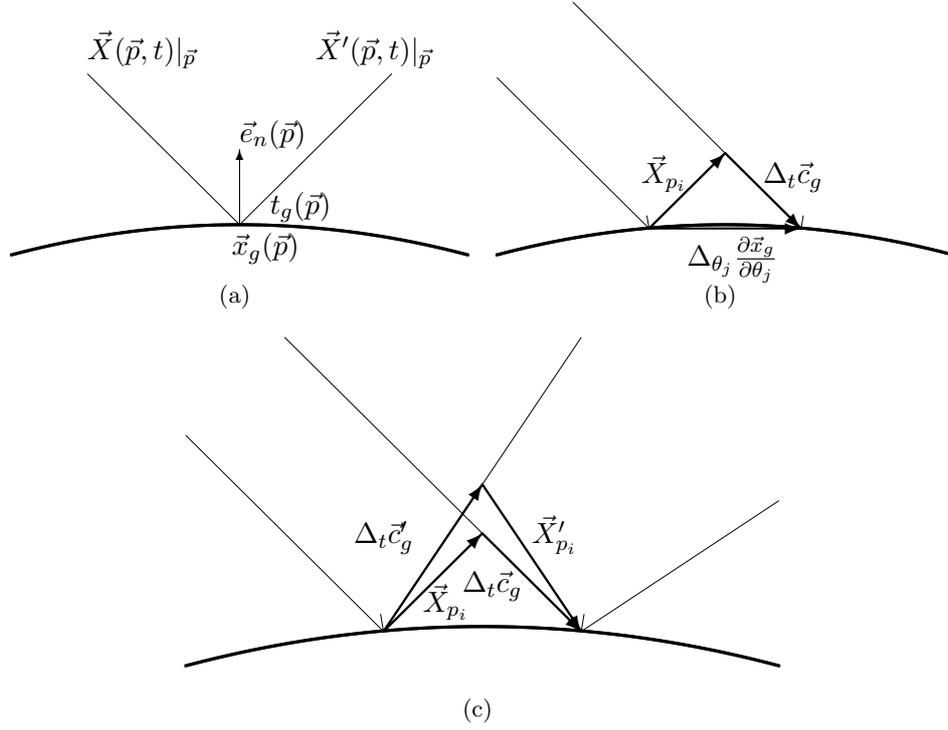


FIGURE A.1 – Réflexion des éléments géodésiques sur une surface paramétrique.

En supposant que la convection du milieu est tangente à la surface du sol, *ie*  $\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_r = 0$ , on obtient les propriétés de l'onde réfléchie à partir de l'onde incidente par :

$$\begin{aligned}
 \vec{X}' &= \vec{X}, \\
 \vec{K}' &= \vec{K} - 2(\vec{K} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r, \\
 \vec{N}' &= \vec{N} - 2(\vec{N} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r, \\
 \vec{X}'_{pi} &= \vec{X}_{pi} - 2(\vec{X}_{pi} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r, \\
 \vec{N}'_{pi} &= \vec{N}_{pi} - 2(\vec{N}_{pi} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + \Delta_t \left[ \frac{d\vec{N}}{dt} - \frac{d\vec{N}'}{dt} - 2 \left( \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \vec{e}_r \right) \vec{e}_r \right] \\
 &\quad - 2\Delta_\theta \left[ (\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_r + (\vec{N} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_\theta \right] - 2\Delta_\phi \sin \theta \left[ (\vec{N} \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_r + (\vec{N} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_\phi \right].
 \end{aligned}$$

Les termes  $\frac{d\vec{N}}{dt}$  et  $\frac{d\vec{N}'}{dt}$  sont comme précédemment évalués directement à partir de l'équation (A.1) et de la seconde équation des rayons (2.38b).

## Annexe B

# Analyse asymptotique des équations du mouvement

Dans cette annexe, l'analyse asymptotique proposée par Scott [176] est reprise. Cette analyse est plus générale que celle présentée dans le corps du document. Des développements intermédiaires présentés ici permettent de comprendre certains détails du développement présenté dans le chapitre 2.

### B.1 Équations du mouvement

Nous nous intéressons à un fluide constitué de différentes espèces moléculaires dans différents états d'excitation et d'ionisation. La concentration massique  $C_\alpha$  de chaque espèce chimique est introduite. Les différents états de chaque molécule sont considérés comme des espèces différentes. Notons que, comme la somme des concentrations  $C_\alpha$  vaut 1, une des espèces est redondante et n'est pas prise en compte dans les équations. L'espèce choisie est généralement le solvant, dans le cas de l'atmosphère se sera la molécule de diazote dans son état non excité. Contrairement au paragraphe 2.1.1, nous ne considérerons pas l'entropie à l'état gelé  $s_{\text{fr}}$  mais l'entropie totale du système  $s$ . Le système thermodynamique est entièrement déterminé par les variables d'état  $\rho$ ,  $s$  et  $C_\alpha$ . Toutes les variables et constantes thermodynamiques peuvent être exprimées à partir de ces variables.

Avec ces notations, les équations du mouvement sont dans le cas le plus général :

- l'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{F}, \quad (\text{B.2})$$

- l'équation de l'entropie,

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s \right) = \vec{D} : \vec{\tau} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho T \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \left( \frac{\partial C_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha} \right), \quad (\text{B.3})$$

- les équations de réaction et de diffusion des espèces  $\alpha$ ,

$$\rho \left( \frac{\partial C_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha} \right) = \rho R_{\alpha} - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\alpha}. \quad (\text{B.4})$$

– une équation d'état et une relation thermodynamique,

$$p = p(\rho, s, C_\alpha), \quad (\text{B.5})$$

$$T = T(\rho, s, C_\alpha). \quad (\text{B.6})$$

Ces équations font intervenir la masse volumique  $\rho$ , la pression  $p$ , le temps  $t$ , la vitesse du milieu  $\vec{v}$ , la température  $T$ , l'entropie  $s$  et les concentrations massiques  $C_\alpha$ . Les coefficients  $\chi_\alpha(\rho, s, C_\alpha)$  sont les potentiels chimiques de chaque espèce moléculaire. On retrouve le tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\tau}$  et  $\vec{D}$  défini à l'équation (2.7) ainsi que les forces extérieures  $\vec{F}$ . Le flux de diffusion thermique  $\vec{q}$  et les flux de diffusion de particules  $\vec{J}_\alpha$  vérifient respectivement la loi de Fourier généralisée et la loi de Fick généralisée :

$$\vec{q} = -\kappa_\rho \vec{\nabla} \rho - \kappa_s \vec{\nabla} s - \sum_{\beta} \kappa_\beta C_\beta, \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{J}_\alpha = -D_{\rho\alpha} \vec{\nabla} \rho - D_{s\alpha} \vec{\nabla} s - \sum_{\beta} D_{\beta\alpha} C_\beta, \quad (\text{B.8})$$

où les  $\kappa$  sont les coefficients de diffusivité thermique et les  $D$  sont les coefficients de diffusivité moléculaire. Les coefficients  $R_\alpha$  représentent les réactions chimiques générant des espèces  $\alpha$ .

On néglige dans ces équations les effets radiatifs qui n'influencent pas la propagation des ondes acoustiques, ainsi que les forces extérieures  $\vec{F} = 0$ . Ces effets sont importants afin d'établir la composition de l'atmosphère au repos.

Comme dans le corps du document, nous nous intéressons uniquement à la propagation d'onde acoustique. Ces ondes correspondent à une perturbation du milieu par rapport à son état au repos. L'atmosphère au repos est représentée par les variables  $\rho_0, p_0, s_0, \dots$  qui sont supposées vérifier l'ensemble des équations du mouvement précédentes.  $\rho', p', s', \dots$  représentent les perturbations du milieu dont on étudie la propagation.

Les équations de conservation de la masse (B.1) et de la quantité de mouvement (B.2) étant les mêmes que dans le corps du document, leur développement sous leurs formes perturbées donne les équations (2.13) et (2.14).

## B.2 Développement asymptotique au premier ordre

Nous effectuons maintenant le développement asymptotique des équations du mouvement incluant les variations de concentrations des différentes espèces du milieu. Le développement au premier ordre à partir des équations de la section précédente donne le même résultat que dans la section 2.2.1. Nous ne reprenons pas ces développements. Nous nous attacherons uniquement à montrer que la propagation des ondes acoustiques est isentropique au premier ordre en  $\epsilon$ . Pour cela, il est nécessaire de montrer que le membre de droite de l'équation (B.3) est nul en  $O(\epsilon)$ .

Nous nous intéressons à la propagation des ondes acoustiques à grande distance. Dans notre analyse, nous supposons que le mécanisme de propagation est dominant au premier ordre et que les mécanismes de diffusion et de dissipation sont négligeables à cet ordre. Dans le cas contraire, l'onde serait majoritairement dissipée et ne pourrait se propager à grande distance. Le membre de droite de l'équation d'entropie (B.3) est constitué de trois terme. Le premier terme fait intervenir la viscosité du milieu qui est un mécanisme de dissipation. Ce terme apparaît donc négligeable au premier ordre. Le deuxième terme est un mécanisme de diffusion qui est également négligeable à cet ordre d'approximation. Pour connaître l'ordre du troisième terme, il est nécessaire de considérer l'équation (B.4). Le premier terme du membre de droite de cette équation est un mécanisme de diffusion et n'apparaît qu'au deuxième ordre. Le premier terme fait intervenir les changements d'état d'excitation des espèces moléculaires. Il est également négligeable au premier

ordre.

La vitesse du son  $c_0$  est calculée à partir de l'équation d'état (B.5) avec la propriété de mécanisme isentropique à l'état gelé (les concentrations des espèces restent constantes). Aussi, au premier ordre, on retrouve l'équation de l'eikonal.

### B.3 Développement asymptotique au deuxième ordre

Nous reprenons le développement asymptotique suivant le petit paramètre  $\epsilon$  pour  $\rho'$  mais aussi pour toutes les autres variables ( $\vec{v}', p', s', T', C'_\alpha, \dots$ ) :

$$\rho'(\vec{x}, t) = \epsilon \rho'_1(\eta, \vec{x}, t) + \epsilon^2 \rho'_2(\eta, \vec{x}, t) + \dots$$

où chaque terme indicé est une fonction indépendante de  $\epsilon$ . Ces variables sont ainsi des fonctions lentes de  $\vec{x}$  et de  $t$  et des fonctions rapides de  $\xi = \epsilon\eta$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} \right) + O(\epsilon^2), \\ \vec{\nabla} \rho' &= \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( \vec{\nabla} \rho'_1 + \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} \right) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

où les termes sont regroupés par ordre de grandeur. Ces deux relations sont valables pour l'ensembles des grandeurs thermodynamiques.

Substituons maintenant ces développements asymptotiques dans les équations du mouvement.

#### B.3.1 Équation de conservation de la masse

En remplaçant les différentes variables décrivant les perturbations du milieu dans l'équation de conservation de la masse prise sous sa forme perturbée (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} \right) \\ & + \epsilon \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho'_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} \right) \\ & + \rho_0 \epsilon \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} + \rho_0 \epsilon \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{v}'_1 + \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} \right) \\ & + \epsilon \vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 + \epsilon \rho'_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 + \epsilon \vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \epsilon \rho'_1 \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On obtient en regroupant les termes du premier ordre l'équation (2.16a) et au deuxième ordre l'équation (2.25a) :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} + \rho_0 |\vec{\nabla} \Phi| \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} = -g + O(\epsilon), \quad (\text{B.10})$$

avec,

$$g = \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho'_1 + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n} \right) + \left( \frac{c_0}{\rho_0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \right) \rho'_1 + 2 \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta}. \quad (\text{B.11})$$

Cette expression est obtenue en utilisant la relation de polarisation (2.22)  $\vec{v}'_1 = \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n}$ ,

avec  $\vec{\nabla}\Phi = |\vec{\nabla}\Phi|\vec{n}$  et en notant que :

$$\frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} = \frac{c_0}{\rho_0} \vec{n} \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta}.$$

### B.3.2 Équation de Navier Stokes

Commençons par nous intéresser au tenseur des contraintes visqueuses. Le développement au premier ordre du tenseur  $\vec{\vec{D}}$  donne :

$$\vec{\vec{D}} = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \vec{v}_0 + {}^t(\vec{\nabla} \vec{v}_0) \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} \vec{\nabla} \Phi \right) + O(\epsilon).$$

En utilisant la relation  $\vec{v}'_1 = \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n}$ , on obtient :

$$\vec{\vec{D}}' = \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \vec{n} \vec{n} + O(\epsilon).$$

Le développement du tenseur des contraintes visqueuses donne quant à lui :

$$\vec{\vec{\tau}}' = \mu_0 \left( 2\vec{\vec{D}}'_1 - \frac{2}{3} \left( \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} \right) \vec{\vec{I}} \right) + \mu_{b0} \left( \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} \right) \vec{\vec{I}} + O(\epsilon^3).$$

Les coefficients de viscosité  $\mu$  et  $\mu_b$  sont en  $O(\epsilon^2)$  ainsi que leurs variations par rapport à  $\vec{x}$  et  $t$ . Ces variations n'apparaissent donc pas dans les développements. Il résulte également que le tenseur  $\vec{\vec{\tau}}'$  est nul en  $O(\epsilon^2)$  et donc que le terme  $\vec{\vec{\tau}}'_1$  n'apparaît pas dans les développements. En utilisant les expressions de  $\vec{v}'_1$  et de  $\vec{\vec{D}}'$ , on obtient en repartant de l'équation précédente :

$$\epsilon^2 \vec{\vec{\tau}}'_2 = \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \left( 2\mu_0 \vec{n} \vec{n} - \frac{2}{3} \mu_0 \vec{\vec{I}} + \mu_{b0} \vec{\vec{I}} \right).$$

Cette équation est la même que l'équation (2.29). De cette expression on déduit :

$$\epsilon^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}}'_2 = \epsilon^{-1} \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \mu_{b0} \right) \vec{n} + O(\epsilon^2).$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement perturbée (2.14) est développée au deuxième ordre en :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} \right) \\ & + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} + \epsilon \left( (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}'_1 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_0} \epsilon \left( \vec{\nabla} p'_1 + \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial p'_2}{\partial \eta} \right) \\ & - \epsilon \frac{\rho'_1}{\rho_0^2} \left( \vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0 \right) - \epsilon \frac{\rho'_1}{\rho_0^2} \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho_0} \epsilon^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}'_2 \\ & + \epsilon (\vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + \epsilon (\vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

En regroupant les termes du premier ordre on obtient l'équation (2.16b) et en regroupant ceux

du deuxième ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial p'_2}{\partial \eta} \right) \\ & \quad + \epsilon \left( \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}'_1 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p'_1 \right) \\ & - \epsilon \frac{\rho'_1}{\rho_0^2} \left( \vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0 \right) + \epsilon (\vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 - \frac{1}{\rho_0} \epsilon^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}'_2 \\ & \quad - \epsilon \vec{\nabla} \Phi \frac{\rho'_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} + \epsilon (\vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} = 0 + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

On introduit maintenant le développement au deuxième ordre de l'équation d'état  $p = p(\rho, s, C_\alpha)$  :

$$p' = \epsilon c_0^2 \rho'_1 + \epsilon^2 \left( c_0^2 \rho'_2 + \frac{c_0^2 B}{\rho_0 2A} \rho_1'^2 + \Pi \right) + O(\epsilon^3),$$

où  $\frac{B}{2A}$  est le paramètre non linéaire (cf. (2.24)) et avec :

$$\Pi = \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 s'_2 + \sum_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial C_\alpha} \Big|_0 C'_{\alpha 2}. \quad (\text{B.12})$$

En introduisant les relations :

$$\vec{v}'_1 = \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n}, \quad p'_1 = c_0^2 \rho'_1 \quad \text{et} \quad p'_2 = c_0^2 \rho'_2 + \frac{c_0^2 B}{\rho_0 2A} \rho_1'^2 + \Pi,$$

ainsi que l'expression de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}'_2$  dans l'équation de conservation de mouvement développée au deuxième ordre, on obtient en projetant suivant le vecteur  $\vec{n}$  :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial \eta} + \frac{c_0^2}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta} = -\vec{n} \cdot \vec{f} + O(\epsilon), \quad (\text{B.13})$$

avec,

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{f} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \right) + \frac{\vec{n} \cdot \vec{\nabla} (c_0^2 \rho'_1)}{\rho_0} - \vec{n} \cdot \frac{\vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0}{\rho_0^2} \rho'_1 + \frac{c_0}{\rho_0} \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \rho'_1 \\ & - \frac{c_0}{\rho_0^2} \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \mu_{b0} \right) |\vec{\nabla} \Phi|^2 \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + \frac{c_0^2 B}{\rho_0^2 A} |\vec{\nabla} \Phi| \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Cette équation est obtenue en remarquant que :

$$\vec{n} \cdot \left( -\vec{\nabla} \Phi \frac{\rho'_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p'_1}{\partial \eta} + (\vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} \Phi) \frac{\partial \vec{v}'_1}{\partial \eta} \right) = 0.$$

### B.3.3 Équation d'évolution de la masse volumique

Comme pour le système (2.25), le système d'équations différentielles constitué des équations (B.10) et (B.13) possède une solution non trivialement nulle si :

$$\frac{\rho_0}{c_0} \vec{n} \cdot \vec{f} + g = 0.$$

Cette relation s'explique sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_0}{c_0}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}\right) \left(\left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \rho'_1\right) + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g + \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g\right) \rho'_1 = \\ - \left(1 + \frac{B}{2A}\right) \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla}\Phi| \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \frac{1}{2\rho_0} \left(\frac{4}{3}\mu_0 + \mu_{b0}\right) \epsilon^{-2} |\vec{\nabla}\Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} \\ - \frac{1}{2c_0} |\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} + \frac{1}{2c_0} \vec{n} \cdot \left(\vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0 - c_0^2 \vec{\nabla} \rho_0\right) \frac{\rho'_1}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

avec  $\vec{c}_g = c_0 \vec{n} + \vec{v}_0$ . L'ensemble des termes sont connus pour cette équation excepté le terme  $\Pi$ . Des équations supplémentaires doivent être introduites afin de compléter cette équation et d'exprimer  $\Pi$  en fonction de  $\rho'_1$ .

### B.3.4 Équation de l'entropie

Pour poursuivre le développement, il est nécessaire de s'intéresser au terme  $\Pi$ , soit aux variations de l'entropie  $s'_2$  et des concentrations des différentes espèces du milieu  $C'_{\alpha 2}$ .

Écrivons l'équation (B.3) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s\right) = S,$$

avec :

$$S = \frac{1}{\rho T} \left( \vec{D} : \vec{\tau} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho T \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \left( \frac{\partial C_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha} \right) \right). \quad (\text{B.16})$$

La forme perturbée de cette équation est :

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s'\right) = S' - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} s_0 - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} s',$$

en posant  $S = S_0 + S'$  où  $S_0$  est égal à  $S$  en absence de perturbation. En utilisant le développement de  $s' = \epsilon^2 s'_2 + O(\epsilon^3)$  et de  $S' = \epsilon S'_1 + O(\epsilon^2)$ , on obtient :

$$\epsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi \right) \frac{\partial s'_2}{\partial \eta} = \epsilon S'_1 - \epsilon \vec{v}'_1 \cdot \vec{\nabla} s_0 + O(\epsilon^2).$$

Cette relation peut être simplifiée en utilisant l'expression de  $\vec{v}'_1$  et la relation de dispersion (2.21) en :

$$-c_0 |\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial s'_2}{\partial \eta} = S'_1 - \frac{c_0}{\rho_0} \rho'_1 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_0 + O(\epsilon).$$

Afin de déterminer  $\epsilon S'_1$ , intéressons nous à chaque terme de  $S$  défini par l'équation (B.16) :

- Le terme des contraintes visqueuses est nul en  $O(\epsilon^2)$ . En effet, par hypothèse les coefficients de viscosité sont en  $O(\epsilon^2)$ , donc la double contraction  $\vec{D} : \vec{\tau}$  l'est également.
- Le terme de diffusion thermique contribue à  $S'_1$ . L'expression du flux thermique (B.7) développée au deuxième ordre donne :

$$\vec{q} = -\kappa_{\rho 0} \left( \vec{\nabla} \rho_0 + \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \right) - \kappa_{s0} \vec{\nabla} s_0 - \sum_{\beta} \kappa_{\beta 0} \vec{\nabla} C_{\beta 0} + O(\epsilon^3),$$

en rappelant que les coefficients de diffusion thermique sont en  $O(\epsilon^2)$ . On en déduit que le terme de plus bas ordre pour les perturbations du flux thermique vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}' = -\kappa_{\rho 0} \epsilon^{-1} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + O(\epsilon^2)$$

Finalement, la contribution à  $S'_1$  de la diffusion thermique vaut :

$$\epsilon S'_{1\text{diff}} = \frac{\kappa_{\rho 0}}{\rho_0 T_0} \epsilon^{-1} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2}.$$

- Le terme de variation des concentrations des espèces du milieu contribue également à  $S'_1$ . Le développement de ce terme donne au deuxième ordre :

$$\begin{aligned} \chi_\alpha \left( \frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_\alpha \right) - \chi_{\alpha 0} \left( \frac{\partial C_{\alpha 0}}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} \right) = \\ - c_0 \epsilon |\vec{\nabla} \Phi| \chi_{\alpha 0} \frac{\partial C'_{\alpha 2}}{\partial \eta} + \frac{c_0}{\rho_0} \epsilon \rho'_1 \chi_{\alpha 0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Les potentiels chimiques  $\chi_{\alpha 0}$  ne sont pas négligeables. La contribution à  $S'_1$  correspond au membre de droite de cette expression.

On obtient finalement une relation entre les variables  $s'_2$  et  $C'_{\alpha 2}$  qui dépend des variations de masse volumique  $\rho'_1$  et des propriétés du milieu :

$$|\vec{\nabla} \Phi| \left( \frac{\partial s'_2}{\partial \eta} - \sum_\alpha \chi_{\alpha 0} \frac{\partial C'_{\alpha 2}}{\partial \eta} \right) = -\frac{\kappa_{\rho 0} \epsilon^{-2}}{\rho_0 T_0 c_0} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + \left( \vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_0 - \sum_\alpha \chi_{\alpha 0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} \right) \frac{\rho'_1}{\rho_0}. \quad (\text{B.17})$$

### B.3.5 Équation de conservation des espèces du milieu

Écrivons les équations de conservation des espèces constituant le milieu sous la forme :

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_\alpha = \mathcal{C}_\alpha,$$

avec  $\mathcal{C}_\alpha = R_\alpha - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha / \rho$ . Le premier terme correspond aux réactions chimiques (et aux changements d'état d'excitation) et le deuxième à la diffusion des espèces. Cette équation est développée sous sa forme perturbée :

$$\frac{\partial C'_\alpha}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} C'_\alpha = C'_\alpha - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} - \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} C'_\alpha,$$

ce qui permet d'écrire, à l'ordre le plus bas :

$$|\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial C'_{\alpha 2}}{\partial \eta} = \frac{\rho'_1}{\rho_0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} - \frac{1}{c_0} C'_{\alpha 1}.$$

La contribution à  $C'_{\alpha 1}$  du terme de diffusion des espèces est obtenue en utilisant la loi de Fick généralisée (B.8) :

$$\epsilon C'_{\alpha 1\text{diff}} = \frac{D_{\rho \alpha 0}}{\rho_0} \epsilon^{-1} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2}.$$

Le raisonnement permettant d'obtenir cette équation est complètement analogue à celui permettant d'obtenir le terme de diffusion thermique de la sous section précédente. Les coefficients  $D_{\rho \alpha 0}$  sont en  $O(\epsilon^2)$  au même titre que les coefficients de diffusion thermique et de viscosité.

Les termes de réaction chimique  $R'_\alpha(\rho, s, C_\beta)$  sont développés sous la forme de séries de Taylor du premier ordre :

$$R'_\alpha = \epsilon \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \right|_0 \rho'_1 + \epsilon^2 \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \right|_0 s'_2 + \epsilon^2 \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \right|_0 C'_{\beta 2} + O(\epsilon^2).$$

Le coefficient  $\left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \right|_0$  n'est pas négligeable ( $O(1)$ ) tandis que l'ensemble des coefficients thermodynamiques  $\left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \right|_0$  et  $\left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \right|_0$  sont supposés grands en  $\epsilon^{-1}$ . Les deux derniers termes de l'expression précédente sont gardés afin de tenir compte des processus de relaxation moléculaire.

Finalement, en regroupant les relations précédentes, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial C'_{\alpha 2}}{\partial \eta} + \frac{1}{c_0} \left( \epsilon \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \right|_0 s'_2 + \sum_\beta \epsilon \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \right|_0 C'_{\beta 2} \right) = \\ - \frac{\epsilon^{-2} D_{\rho\alpha 0}}{\rho_0 c_0} |\vec{\nabla}\Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + \left( \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} - \frac{\rho_0}{c_0} \left. \frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \right|_0 \right) \frac{\rho'_1}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Les équations (B.17) et (B.18) forment un système différentiel qui gouverne l'évolution des variables  $s'_2$  et  $C'_{\alpha 2}$  en fonction de  $\eta$ . Les conditions aux limites sont  $s'_2 \rightarrow 0$  et  $C'_{\alpha 2} \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ . Ces conditions traduisent le fait que très loin du front  $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ , les perturbations sont nulles ou autrement dit, il existe toujours un lieu de l'espace et du temps suffisamment lointain où les perturbations ne sont pas encore arrivées.

### B.3.6 Système d'équations décrivant l'évolution de la masse volumique

Nous nous intéressons maintenant à la résolution des équations (B.17) et (B.18) afin de les substituer dans l'équation décrivant l'évolution de la masse volumique (B.15).

L'équation (B.17) est intégrée en utilisant les conditions limites nulles quand  $\eta \rightarrow +\infty$  :

$$s'_2 = \sum_\alpha \chi_{\alpha 0} C'_{\alpha 2} - \frac{\epsilon^{-2} \kappa_{\rho 0}}{\rho_0 T_0 c_0} |\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \left( \vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_0 - \sum_\alpha \chi_{\alpha 0} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} \right) \frac{1}{\rho_0 |\vec{\nabla}\Phi|} \int_\eta^{+\infty} \rho'_1.$$

En remplaçant cette expression de  $s'_2$  dans l'équation (B.18) et en introduisant les variables :

$$\epsilon^2 \bar{C}_\alpha = \epsilon^2 C'_{\alpha 2} + \epsilon^2 (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0}) \frac{1}{\rho_0 |\vec{\nabla}\Phi|} \int_\eta^{+\infty} \rho'_1 - \epsilon a_\alpha \rho'_1 + \frac{D_{\rho\alpha 0}}{\rho_0 c_0} |\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta}, \quad (\text{B.19})$$

on obtient la relation :

$$|\vec{\nabla}\Phi| \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial \eta} + \sum_\beta \epsilon r_{\alpha\beta} \bar{C}_\beta = -d_\alpha \rho'_1, \quad (\text{B.20})$$

avec, pour les deux relations précédentes :

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \Big|_0 + \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \Big|_0 \chi_{\beta 0} \right), \quad (\text{B.21})$$

$$a_\alpha = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( \frac{\kappa_{\rho 0}}{T_0 c_0} \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \Big|_0 + \sum_\beta r_{\alpha\beta} D_{\rho\beta 0} \right), \quad (\text{B.22})$$

$$d_\alpha = \frac{1}{c_0} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \Big|_0 + \sum_\beta r_{\alpha\beta} a_\beta. \quad (\text{B.23})$$

Les ordres de grandeur pour ces coefficients sont  $O(\epsilon^{-1})$  pour  $r_{\alpha\beta}$ ,  $O(\epsilon)$  pour  $a_\alpha$  et  $O(1)$  pour  $d_\alpha$ . Nous ne présentons pas en détails les calculs permettant d'obtenir ces équations. Notons seulement que les termes :

$$\vec{n} \cdot \left( \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \Big|_0 \vec{\nabla} s_0 + \sum_\beta \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \Big|_0 \vec{\nabla} C_{\beta 0} \right) \frac{\epsilon}{c_0 \rho_0 |\vec{\nabla} \Phi|} \int_\eta^{+\infty} \rho'_1,$$

qui apparaissent lors des développements dans les membres de droite des équations (B.20) ont été négligés, les termes entre parenthèses étant en  $O(1)$  comme nous allons le démontrer. En appliquant l'équation de réaction et de diffusion (B.4) à l'atmosphère au repos, on obtient :

$$\frac{\partial C_{\alpha 0}}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} = R_\alpha(\rho_0, s_0, C_{\beta 0}) + O(1),$$

en remarquant que le terme de diffusion est en  $O(\epsilon^2)$  et à plus forte raison nul en  $O(1)$ . Partant de l'hypothèse que les concentrations du milieu sont lentement variables en  $O(1)$ , la relation précédente implique que  $R_\alpha(\rho_0, s_0, C_{\beta 0}) = 0 + O(1)$ , d'où :

$$\vec{\nabla} R_\alpha = \frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \Big|_0 \vec{\nabla} \rho_0 + \frac{\partial R_\alpha}{\partial s} \Big|_0 \vec{\nabla} s_0 + \sum_\beta \frac{\partial R_\alpha}{\partial C_\beta} \Big|_0 \vec{\nabla} C_{\beta 0} = 0 + O(1).$$

Comme les coefficients  $\frac{\partial R_\alpha}{\partial \rho} \Big|_0$  et  $\vec{\nabla} \rho_0$  sont en  $O(1)$ , on obtient que la somme des deux derniers termes est en  $O(1)$ , comme nous cherchions à le démontrer. Cette propriété n'est pas évidente puisque les deux termes pris séparément sont grands en  $\epsilon^{-1}$ .

Les équations (B.20) forment un système qui gouverne l'évolution des variables  $\bar{C}_\alpha$  en fonction de  $\eta$ . En comparaison avec les développements du corps du document, ce système d'équations est analogue au système des équations de relaxation (2.37). Ces équations peuvent être résolues en parallèle à l'équation gouvernant l'évolution de la masse volumique que nous allons établir dans la suite. Notons que les variables  $\bar{C}_\alpha$  vérifient la condition limite  $\bar{C}_\alpha \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ .

À partir de la définition de  $\Pi$  et des relations (B.17) et (B.19), on obtient :

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = & - \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{\rho_0 c_0} \left( \frac{\epsilon^{-2} \kappa_{\rho 0}}{T_0} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 + \sum_\alpha \epsilon^{-2} D_{\rho\alpha 0} b_\alpha \right) \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} + |\vec{\nabla} \Phi| \sum_\alpha \epsilon^{-1} a_\alpha b_\alpha \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \\ & + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} s_0 + \sum_\alpha \frac{\partial p}{\partial C_\alpha} \Big|_0 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_{\alpha 0} \right) \frac{\rho'_1}{\rho_0} + \sum_\alpha b_\alpha |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial \eta}, \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

avec

$$b_\alpha = \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 \chi_{\alpha 0} + \frac{\partial p}{\partial C_\alpha} \Big|_0. \quad (\text{B.25})$$

La substitution de la relation (B.24) dans l'équation d'évolution de la masse volumique (B.15) fait apparaître le terme :

$$\frac{1}{2c_0} \vec{n} \cdot \left( \vec{\nabla} p_0 - c_0^2 \vec{\nabla} \rho_0 - \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 \vec{\nabla} s_0 - \sum_\alpha \frac{\partial p}{\partial C_\alpha} \Big|_0 \vec{\nabla} C_{\alpha 0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0 \right) \frac{\rho'_1}{\rho_0} = -\frac{1}{2c_0} \vec{n} \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_0 \right) \frac{\rho'_1}{\rho_0},$$

qui est négligeable au deuxième ordre. En effet, le tenseur  $\vec{\tau}_0$  est en  $O(\epsilon^2)$  puisque les coefficients de viscosités sont supposés en  $O(\epsilon^2)$ . En négligeant ce terme et effectuant la substitution de l'équation (B.24) dans l'équation (B.15), on obtient l'équation décrivant le comportement de la masse volumique  $\rho'_1(\eta, \vec{x}, t)$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_0}{c_0} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \left( \frac{c_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \rho'_1 \right) + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{c}_g + \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c}_g \right) \rho'_1 = \\ & \epsilon^{-2} \delta |\vec{\nabla} \Phi|^2 \frac{\partial^2 \rho'_1}{\partial \eta^2} - |\vec{\nabla} \Phi| \epsilon^{-1} \Lambda \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \left( 1 + \frac{B}{2A} \right) \frac{c_0}{\rho_0} |\vec{\nabla} \Phi| \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2c_0} \sum_\alpha b_\alpha |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

avec la vitesse de groupe  $\vec{c}_g = c_0 \vec{n} + \vec{v}_0$ , le terme de dissipation acoustique classique tenant compte des viscosités, de la conduction thermique et de la diffusion des espèces du milieu :

$$\delta = \frac{\mu_0}{2\rho_0} \left( \frac{4}{3} + \frac{\mu_{b0}}{\mu_0} + \frac{\kappa_{\rho 0}}{\mu_0 c_0^2 T_0} \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0 + \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \sum_\alpha D_{\rho\alpha 0} b_\alpha \right) \quad (\text{B.27})$$

et

$$\Lambda = \frac{1}{2c_0} \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha. \quad (\text{B.28})$$

Les coefficients  $c_0$ ,  $\frac{B}{2A}$ ,  $\delta$ ,  $\Lambda$  et  $b_\alpha$  de l'équation (B.26) ainsi que les coefficients  $r_{\alpha\beta}$  et  $d_\alpha$  des équations (B.20) sont des coefficients thermodynamiques qui ne dépendent que des variables thermodynamiques décrivant le milieu  $(\rho_0, s_0, C_{\alpha 0})$ .  $\rho_0$ ,  $s_0$  et  $C_{\alpha 0}$  sont fonction de l'espace  $\vec{x}$  et du temps  $t$ .  $|\vec{\nabla} \Phi|$  peut être remplacé par la norme du vecteur d'onde local  $k$ . Le champ  $(\omega, \vec{k})$  est supposé vérifier la relation de dispersion (2.21) et dépend de l'espace  $\vec{x}$  et du temps  $t$ . Le système constitué des équations (B.26) et (B.20) est un système fermé en incluant les conditions limites  $\bar{C}_\alpha \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ .

### B.3.7 Intégration des équations de relaxation

Dans cette sous partie, nous nous intéressons à l'intégration des équations (B.20) afin d'expliquer les coefficients  $\bar{C}_\alpha$ . L'intégration est réalisée à l'aide de fonctions de Green. Cette méthode permet de revenir à une expression similaire à celle obtenue à partir des équations de relaxation découplées.

Les coefficients  $\bar{C}_\alpha$  vérifient les relations (B.20) et les conditions limites  $\bar{C}_\alpha \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ . Les coefficients  $r_{\alpha\beta}$  et  $d_\alpha$  des équations (B.20) étant indépendant de  $\eta$ , nous introduisons

les fonctions de Green  $G_\alpha(Y)$  vérifiant le système :

$$\frac{dG_\alpha}{dY} - \sum_{\beta} r_{\alpha\beta} G_\beta = d_\alpha \delta(Y), \quad (\text{B.29})$$

pour  $Y \geq 0$  et avec  $G_\alpha(Y) = 0$  pour  $Y < 0$ . La solution du système constitué des équations (B.20) peut alors s'écrire :

$$\epsilon \bar{C}_\alpha(\eta, \vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(Y) \rho'_1 \left( \epsilon \eta + Y |\vec{\nabla} \Phi|, \vec{x}, t \right) dY. \quad (\text{B.30})$$

Le dernier terme de l'équation (B.26) s'écrit alors :

$$-\frac{1}{2c_0} \sum_{\alpha} b_\alpha |\vec{\nabla} \Phi| \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial \eta} = -|\vec{\nabla} \Phi| \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} g(Y) \rho'_1 \left( \epsilon \eta + Y |\vec{\nabla} \Phi|, \vec{x}, t \right) dY, \quad (\text{B.31})$$

avec

$$g(Y) = \frac{1}{2c_0} \sum_{\alpha} b_\alpha G_\alpha(Y). \quad (\text{B.32})$$

Intéressons nous maintenant à la détermination de la fonction  $g(Y)$  dans le cas où la matrice  $r_{\alpha\beta}$  possède un jeu complet de vecteurs propres complexes linéairement indépendant notés  $\gamma_\alpha^{(n)}$  associés aux valeurs propres  $-\lambda^{(n)}$ . La matrice de passage  $P_{n\alpha}$  a comme colonnes les vecteurs propres  $\gamma_\alpha^{(n)}$ . La matrice  $P^{-1} r_{\alpha\beta} P$  est égale à la matrice diagonale composée des valeurs propres  $-\lambda^{(n)}$ . En multipliant (B.29) par la matrice  $P^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{d\bar{G}_n}{dY} + \lambda^{(n)} \bar{G}_n = \bar{d}_n \delta(Y), \quad (\text{B.33})$$

avec  $\bar{G}_n = P^{-1} G_\alpha$  et  $\bar{d}_n = P^{-1} d_\alpha$ .  $\bar{G}_n(Y) = 0$  pour  $Y < 0$ . La solution de ces équations est :

$$\bar{G}_n(Y) = \bar{d}_n e^{-\lambda^{(n)} Y},$$

pour  $Y > 0$ . Cela permet de revenir aux fonctions de Green  $G_\alpha$  et ainsi d'écrire :

$$g(Y) = \begin{cases} \frac{1}{2c_0} \sum_n \bar{d}_n \left( \sum_{\alpha} b_\alpha \gamma_\alpha^{(n)} \right) e^{-\lambda^{(n)} Y} & Y \geq 0, \\ 0 & Y < 0. \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

La connaissance des valeurs propres  $-\lambda^{(n)}$  et des vecteurs propres associés  $\gamma_\alpha^{(n)}$  permet de calculer la fonction  $g(Y)$  et ainsi de fermer l'équation (B.26) sans faire intervenir les variables  $\bar{C}_\alpha$ . Cependant, toutes les valeurs propres  $-\lambda^{(n)}$  ne sont pas associées à un mécanisme qui influence la propagation des ondes acoustiques. Certaines des valeurs propres de la matrice  $r_{\alpha\beta}$  peuvent être éliminées dans le cadre de notre étude. Rappelons que la matrice  $r_{\alpha\beta}$  représente le réajustement des réactions produisant des espèces  $\alpha$  lors d'un changement de concentration des espèces  $\beta$ . Cette matrice traduit les variations de la cinétique des réactions chimiques, des changements d'état de vibration des molécules, ...

Les parties réelles des valeurs propres  $\lambda^{(n)}$  doivent être positives ou nulles. Dans le cas contraire, la solution serait exponentiellement croissante ce qui représente une instabilité. Il est assez naturel de supposer que le milieu perturbé par une onde tend à retrouver son état d'équilibre après le passage de celle-ci. De plus, nous ne nous intéressons qu'aux mécanismes de relaxation qui par définition impliquent un retour à l'état d'équilibre.

Certaines valeurs propres  $-\lambda^{(n)}$  peuvent être nulles. Les réactions chimiques représentées par  $R_\alpha$  vérifient  $M$  relations de la forme :

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(m)} R_{\alpha} = 0, \quad m \in [1 \ M],$$

où les coefficients  $\mu_{\alpha}^{(m)}$  sont des constantes indépendantes de l'état thermodynamique du milieu contrairement aux  $R_{\alpha}$  qui en dépendent et où  $m$  est l'indice de la relation. Ces relations décrivent, par exemple, la conservation du nombre d'atomes lors des réactions chimiques ou des changement d'état d'excitation des molécules. Il résulte des relations précédentes les relations :

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(m)} r_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}^{(m)} d_{\alpha} = 0.$$

Ainsi, les coefficients  $\mu_{\alpha}^{(m)}$  sont des vecteurs propres de la matrice transposée  ${}^t r_{\alpha\beta}$  associés à la valeur propre 0. La matrice  ${}^t r_{\alpha\beta}$  possède donc  $M$  vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 0. Il en est de même pour la matrice  $r_{\alpha\beta}$ . En posant  $\bar{\mu}_{\alpha}^{(m)} = \mu_{\alpha}^{(m)} P$ , on obtient :

$$\sum_{\beta} r_{\alpha\beta} \bar{\mu}_{\beta}^{(m)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \bar{\mu}_{\alpha}^{(m)} \bar{d}_{\alpha} = 0.$$

Ainsi, pour les  $M$  valeurs propres  $\lambda^{(n)}$  de  $r_{\alpha\beta}$  qui sont nulles, on a  $\bar{d}_n = 0$ . Les valeurs propres nulles ne contribuent pas à  $g(Y)$  et n'apparaîtrons plus.

Dans le cas où la valeur propre  $\lambda^{(n)}$  est un nombre complexe, la valeur propre conjuguée  $\lambda^{(n)*}$  existe également. Ces deux valeurs propres correspondent au même phénomène de relaxation et doivent être combinées. En propagation atmosphérique, les valeurs propres sont toutes réelles. La fonction  $g(Y)$  peut être déterminée à partir de l'équation (B.34) en effectuant la sommation sur les contributions des valeurs propres réelles strictement positives.

### B.3.8 Équation de Burgers généralisée

Comme dans la section 2.3.3, nous nous intéressons à l'évolution des perturbations de la masse volumique le long d'un rayon. Nous utilisons à nouveau la variable normalisée  $u$  décrivant les fluctuations acoustiques :

$$u(\xi, t) = \left( \frac{\nu c_0}{K \rho_0} \right)^{1/2} \epsilon \rho'_1 \left( \xi/\epsilon, \vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}, t \right).$$

La variable  $u(\xi, t)$  est fonction de la distance normalisée au front d'onde  $\xi$  et évolue le long du rayon  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  en fonction de  $t$ . Le rayon est fixé par ses conditions initiales  $\vec{p}$ .

En introduisant la variable  $u$  dans l'équation (B.26) et en remplaçant la variable  $\eta$  par  $\xi/\epsilon$ , on obtient le système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - B(t) K u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2c_0} \sum_{\alpha} b_{\alpha} K \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi}, \quad (B.35a)$$

$$K \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi} + \sum_{\beta} r_{\alpha\beta} u_{\beta} = -d_{\alpha} u, \quad (B.35b)$$

avec le coefficient de non linéarité :

$$B(t) = \left(1 + \frac{B}{2A}\right) \left(\frac{Kc_0}{\nu\rho_0}\right)^{1/2},$$

et en définissant les variables :

$$u_\alpha(\xi, t) = \left(\frac{\nu c_0}{K\rho_0}\right)^{1/2} \epsilon^2 \bar{C}_\alpha \left(\xi/\epsilon, \vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}, t\right),$$

qui vérifient les conditions aux limites  $u_\alpha(\xi, t) \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Les différents coefficients de ces équations dépendent de l'abscisse curviligne  $t$  du rayon et sont évalués à la position  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$ . Le terme  $\Lambda$  (cf. équation (B.28)) est négligé devant la vitesse du son. Il ne représente uniquement une légère correction de la vitesse du son dû aux mécanismes de diffusion thermique et de diffusion moléculaire. Ce terme ne modifie pas la forme d'onde.

En utilisant la relation (B.31), le système d'équation (B.35) peut être remplacé de manière équivalente par l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - B(t) K u \frac{\partial u}{\partial \xi} - K \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(Y) u(\xi + KY, t) dY, \quad (\text{B.36})$$

avec la fonction  $g(Y)$  définie par l'équation (B.32) ou par l'équation (B.34).

### B.3.9 Transformée de Fourier de l'équation de Burgers généralisée

Dans l'optique d'identifier les coefficients de l'équation de Burgers généralisée par rapport aux coefficients mesurés expérimentalement et d'utiliser une méthode spectrale basée sur les polynômes trigonométriques, nous nous intéressons à la transformée de Fourier de l'équation de Burgers généralisée.

À partir de l'équation (B.36), on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\delta K^2 q^2 \tilde{u} - \imath K q \int_{-\infty}^{+\infty} g(Y) e^{\imath K q Y} dY - \imath K q B(t) \frac{\widetilde{u^2}}{2}, \quad (\text{B.37})$$

où  $\tilde{u}$  et  $\widetilde{u^2}$  sont les coefficients de Fourier définis respectivement par :

$$\tilde{u}(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-\imath q \xi} d\xi \quad \text{et} \quad \widetilde{u^2}(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\xi, t) e^{-\imath q \xi} d\xi. \quad (\text{B.38})$$

$q$  est une grandeur sans dimension,  $Kq$  est le nombre d'onde acoustique et  $\omega q$  est la pulsation acoustique,  $\omega$  étant définie par la relation de dispersion (2.21) vérifiée le long du rayon.

L'équation (B.37) est généralement mise sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{u}(q, t)}{\partial t} = -\Gamma(Kq, t) \tilde{u} - \imath K q \frac{B(t)}{2} \widetilde{u^2}, \quad (\text{B.39})$$

avec le coefficient d'atténuation et de dispersion :

$$\Gamma(Kq, t) = \delta K^2 q^2 + \imath K q \int_{-\infty}^{+\infty} g(Y) e^{\imath K q Y} dY.$$

En utilisant l'expression (B.34) de  $g(Y)$ , le coefficient  $\Gamma$  peut être écrit sous la forme :

$$\Gamma(Kq, t) = \delta K^2 q^2 - iKq \sum_n \frac{Z_n}{\lambda^{(n)} - iKq}, \quad (\text{B.40})$$

avec les coefficients complexes à partie réelle positive :

$$Z_n = -\frac{1}{2c_0} \bar{d}_n \sum_\alpha b_\alpha \gamma_\alpha^{(n)}.$$

Les parties réelles des deux termes de  $\Gamma$  sont positives ce qui correspond à des atténuations de l'onde le long de sa propagation.  $\Gamma$  n'est complexe qu'en présence de mécanismes de relaxation.

La quantité  $\Gamma$  est plus généralement une fonction de la norme du vecteur d'onde et de l'état thermodynamique du milieu en un lieu de l'espace et à un temps donné. Lors de l'intégration de l'équation de Burgers le long d'un rayon,  $\Gamma$  est évalué à la position  $\vec{X}(\vec{p}, t)|_{\vec{p}}$  et au temps  $t$ .  $\Gamma(Kq, t)$  représente l'atténuation totale du milieu pour une onde de vecteur d'onde  $Kq$  en fonction du temps de propagation.  $\Gamma$  est le coefficient d'atténuation complexe temporel qui dépend de la norme du vecteur d'onde  $Kq$ . Cette définition se retrouve en négligeant le terme non linéaire de l'équation (B.39) dont la solution devient :

$$\tilde{u}(Kq, t) = \tilde{u}(Kq, t_s) e^{(-\int_{t_s}^t \Gamma(Kq, t') dt')}.$$

$\Gamma$  est bien l'atténuation pour un temps de propagation donné (Neper/s). Dans la littérature, le coefficient d'atténuation spatial (Neper/m) dépendant de la pulsation est plus généralement utilisé [185, 157]. Ce coefficient noté  $\bar{K}$  représente l'atténuation en fonction de la distance parcourue par l'onde. Le lien entre les deux coefficients est obtenu en considérant une onde se propageant dans un milieu homogène au repos. Dans ce cas, la relation entre la pulsation et le vecteur d'onde est :  $\omega = kc_0$  et l'onde se déplace de  $c_0 dt$  pendant le temps  $dt$ . On obtient ainsi la relation :  $\Gamma(Kq) = c_0 \bar{K}(Kqc_0)$ . Et finalement, en utilisant la relation (B.40), on obtient :

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\delta \omega^2}{c_0^3} - \frac{1}{c_0} \sum_n \frac{Z_n i \omega}{c_0 \lambda^{(n)} - i \omega}. \quad (\text{B.41})$$

Il est alors possible d'identifier les valeurs des coefficients  $\delta$ ,  $Z_n$  et  $\lambda^{(n)}$  expérimentalement ou dans la littérature. Ces coefficients dépendent uniquement de l'état thermodynamique du milieu, la convection du milieu par l'écoulement n'intervient pas. Les différents effets dus à la convection du milieu ( $|\vec{c}_g| \neq c_0$ ) sont intégrés dans la trajectoire du rayon et dans le calcul du vecteur d'onde  $K$ . Notons également que la partie réelle et la partie complexe de  $\bar{K}$  sont généralement notées respectivement  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$ .

### B.3.10 Identification des coefficients d'atténuation

Dans cette section nous nous intéressons à l'identification à partir de la littérature des coefficients  $\delta$ ,  $Z_n$  et  $\lambda^{(n)}$  nécessaires au calcul de l'atténuation atmosphérique. Nous utiliserons comme référence les expressions de Sutherland et Bass [185].

Pour déterminer le coefficient  $\delta$ , nous regroupons les expressions (9) et (14) de l'article de Sutherland et Bass [185]. Ces expressions sont valables en basses fréquences et se transforment en :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{4\pi^2 f^2}{c^3} \delta_{\text{sb}}, \quad \text{avec} \quad \delta_{\text{sb}} = \frac{\mu}{2\rho} \left( \frac{4}{3} + \gamma \frac{16}{175} \frac{X_{O_2} + X_{N_2}}{0.9903} Z_{\text{rot}} + \frac{4(\gamma - 1)}{3} \right).$$

On retrouve dans cette expression les différents termes de l'expression (B.27). Le terme de

diffusion des espèces du milieu est négligeable par rapport aux autres termes.

Les valeurs des coefficients  $Z_n$  et  $\lambda^{(n)}$  peuvent également être déduites de l'article de Sutherland et Bass [185]. Quatre mécanismes de relaxation indépendants sont considérés. Ces mécanismes sont associés au changement d'état de vibration interne des molécules  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  et  $O_3$ . Les fréquences de relaxation  $f_{\text{vib},n}$  et les atténuations maximales par longueurs d'onde  $A_{\text{max},n}$  sont connues. Après identification des termes, on obtient les relations :

$$\lambda^{(n)} = \frac{2\pi}{c_0} f_{\text{vib},n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2f_{\text{vib},n} A_{\text{max},n}.$$



## Annexe C

# Données atmosphériques

### C.1 Atténuation atmosphérique

Les coefficients nécessaires au calcul de l'atténuation atmosphérique proviennent de l'article de Sutherland & Bass [185]. Il serait redondant de donner les équations de l'article. Nous donnons seulement le code en Matlab permettant de calculer ces coefficients. Notons cependant que dans les formules générales de Sutherland & Bass, les coefficients d'absorption sont, dans le domaine fréquentiel, corrigés pour les nombres de Knudsen élevés. Les coefficients donnés en tant que basses fréquences correspondent à ceux de notre modèle physique.

```
% -----
function attenuation(z,c,rho,f)
% Coefficient atténuation de Sutherland & Bass 2004.
% z : altitude (km !!!)
% c : vitesse du son gelée (m.s-1)
% rho : masse volumique (kg.m-3)
% f : fréquence de sortie des coefficients (Hz)
% alpha* : (Neper.m-1)
M = molweight(z);
[T,p] = temppress(c,rho,M);
gam = gamma(T) ;
[XN,XN2,XO,XO2,XO3,XH2O,XCO2] = fracmol(z);
XON = (XO2+XN2)/0.9903;
Zrot = 1./((XN2./(63.3*exp(-16.7*T.^(-1/3))) + XO2./(54.1*exp(-17.3*T.^(-1/3)))));
[AN2,fN2,AO2,fO2,AO3,fO3,ACO2,fCO2] = relax_atten(T,p,XN,XN2,XO,XO2,XO3,XH2O,XCO2,XON);
%% BASSES FREQUENCES %%
% Atténuation classique et rotationnelle
% Equations (9+14) Sutherland2004 (approximation basses fréquences)
D_Bass = 2/3*gam.*viscosity(T)./rho.*(1+12/175*XON.*Zrot);
alpha_D_Bass=(2*pi*f).^2.*D_Bass./c.^3;
% Pierce1994 p. 558
D_Pierce = viscosity(T)/2./rho.*(4/3+0.6+(gam-1)./0.737);
alpha_D_Pierce=(2*pi*f).^2.*D_Pierce./c.^3;
%% TOUTES LES FREQUENCES %%
sigma0 = 5/sqrt(21);
nu = 8*pi*f.*viscosity(T)./(3*p) ;
n = 4/5*sqrt(3/7)*Zrot ;
x = 3*n.*nu/4 ;
xp = 2.36*x ;
% Atténuation classique
snu2=(sqrt(1+nu.^2)-1.); snu2(nu<10^-4)=nu(nu<10^-4).^2/2;
alphaCL = pi*f./c.*sqrt( 2*snu2.*(1+xp.^2) ...
./((1+nu.^2).*(1+(sigma0*xp).^2) ) );
% Ajout de la diffusion moléculaire (0.003 alphaCL) eq.25-Sutherland2004
alphaCL = alphaCL*1.003;
% Atténuation rotationnelle (bulk viscosity)
% eq.18-Sutherland2004 avec erratum Sutherland & Bass 2006
alphaROT = pi*f./c.*XON.*( (sigma0.^2-1).*x/(2*sigma0) ) ...
.*sqrt( 2*(sqrt(1+nu.^2)+1)./((1+nu.^2).*(1+(sigma0*xp).^2).*(1+xp.^2)) );
% Atténuation relaxation moleculaire
```

```

alphaO2 = A02.*(2*f.^2*f02./(f02.^2+f.^2))./c;
alphaN2 = AN2.*(2*f.^2*fN2./(fN2.^2+f.^2))./c;
alphaCO2 = AC02.*(2*f.^2*fC02./(fC02.^2+f.^2))./c;
alphaO3 = A03.*(2*f.^2*f03./(f03.^2+f.^2))./c;
alphaVIB = alphaO2+ alphaN2 + alphaCO2 +alphaO3 ;

% -----
function [mu] = viscosity(T)
% T (K) ; mu (kg.m-1.s-1)
% eq17-Sutherland2004
T0=293.15; mu0=1.8192e-5; % (K; kg.m-1.s-1)
S=117; % (K)
mu=mu0*(T/T0).^(1/2).*(1+S/T0)./(1+S./T);

function [mu] = viscosity_Pierce(T)
% T (K) ; mu (kg.m-1.s-1)
% p513-Pierce1994
T0=300; mu0=1.846e-5; % (K; kg.m-1.s-1)
Ts=110.4; % (K)
mu=mu0*(T/T0).^(3/2).*(T0+Ts)./(T+Ts);

function [mubsmu] = bulkviscosity_Bass(T,gam,XO2,XN2)
% bulk viscosity mub
% T (K) ; mubsmu (mu_b/mu) (kg.m-1.s-1)
% XN2, XO2 fractions molaires de N2 et de O2
% Sutherland2004
Zrot = 1./( XN2./(63.3*exp(-16.7*T.^(-1/3))) + XO2./(54.1*exp(-17.3*T.^(-1/3))) );
mubsmu=gam.*(XO2+XN2).*Zrot*(16/175/0.9903);

% -----
function [M] = molweight(z)
% z (km) altitude
% M est la masse molaire (kg.mol-1) du melange des gaz. eq.36-Sutherland2004
MN2 = 28013.4e-6; MO2 = 31998.8e-6; MCO2 = 44009.5e-6;
MO3 = 47998.2e-6; MN = 14006.7e-6; MO = 15999.4e-6;
MH2O = 18015.3e-6; Mar = 39948.0e-6; % Masse molaire (kg.mol-1)
[XN,XN2,XO,XO2,XO3,XH2O,XCO2] = fracmol(z);
M = (XN*MN + XN2*MN2 + XO*MO + XO2*MO2 + XO3*MO3 + XH2O*MH2O + XCO2*MCO2 + 0.012*XN2*Mar);
M = M./(XN + XN2 + XO + XO2 + XO3 + XH2O + XCO2 + 0.012*XN2) ;

function [c] = celerity(T,M)
% T temperature (K), M molecular weight (kg.mol-1)
% c celerity (m.s-1)
R = 8.31448; % universal gas constant (J.mol-1.K)
c = sqrt(gamma(T).*T*R./M);

function [T,P] = tempress(c,rho,M)
% Recalcul la temperature (K) et la pression (Pa)
% à partir de la vitesse du son (m/s), de la masse
% volumique rho (kg/m3) et de la masse molaire M (kg.mol-1)
% pour un gaz parfait
R = 8.31448; % universal gas constant (J.mol-1.K)
T = c.^2.*M/R;
gamma = gammagT(T);
T = T./gamma;
P = rho.*c.^2./gamma;

function [P] = pressure(T,rho,M)
% T temperature (K), rho volumique mass (kg.m-3),
% M molecular weight (kg.mol-1), P pressure (Pa)
R = 8.31448; % universal gas constant (J.mol-1.K)
P = rho.*R.*T./M;

% -----
function [AN2,fN2,A02,f02,A03,f03,AC02,fC02] = relax_atten(T,P,XN,XN2,XO,XO2,XO3,XH2O,XCO2,XON)
% Calcul la frequence de relaxation f et l'attenuation maximale A pour
% les composants moleculaires : N2, O2, O3 et CO2 suivant les formules de
% Sutherland2004
PO = 1.013e5;
T02 = 2239.1; TN2 = 3352.0; TC02 = 915.0; T03 = 1037.0;
T0=293.15; % (K)

```

```

S=117; % (K)
rmu =(T/T0).^(1/2).*(1+S/T0)/(1+S./T);
Tr = (T/T0).^(-1./3.) - 1.;
hp = 100.*(XH20 + X03);
rp = P./(P0*rmu);
% O2
fO2 = rp.*( 24.*(X02 + XN2).*exp(-9.16*Tr) ...
+ 2400.*(X0 + XN) ...
+ 40400*exp(10.*Tr).*hp.*(0.02*exp(-11.2*Tr) + hp)/(0.391*exp(8.41*Tr) + hp));
temp = T02./T;
cvi = exp(-temp).*(temp./(1. - exp(-temp))).^2; % eq.27-Sutherland2004
AO2 = pi*X02.*cvi./(7.*(5./2.+cvi)); % eq.26-Sutherland2004
% N2
fN2 = rp.*(9*exp(-19.9*Tr) + X03*60000. + XH20*28000.*exp(-4.17*Tr));
temp = TN2./T;
cvi= exp(-temp).*(temp./(1. - exp(-temp))).^2;
AN2 = pi*XN2.*cvi./(7*(5/2+cvi));
% CO2
fCO2 = rp.*(XC02*22000.*exp(-7.68*Tr) + (X02+ 0.5*X0)*15100.*exp(-10.4*Tr) ...
+ (XN2 + 0.5*XN)*11500.*exp(-9.17*Tr) + (XH20 + X03)*8.48e8.*exp(9.17*Tr));
temp = TC02./T;
cvi= exp(-temp).*(temp./(1. - exp(-temp))).^2;
AC02 = 4.*pi*XC02.*cvi./(4.*(3.+cvi)); % XC02->2.XC02 cf. Note eq.26-Sutherland2004
% O3
fO3 = rp.*1.2e5.*exp(-7.72*Tr);
temp = T03./T;
cvi= exp(-temp).*(temp./(1. - exp(-temp))).^2;
AO3 = 2.*pi*X03.*cvi./(4.*(3.+cvi));

% -----
% Modelisation de l'atmosphère suivant les données de Sutherland et Bass 2004
function [gamma] = gamma(T)
% T (K) ; gamma (SU)
% rapport des chaleurs specifiques en fonction de la temperature. eq.38-Sutherland2004
Agamma=[ 1.371 2.46e-4 -6.436e-7 5.2e-10 -1.796e-13 2.182e-17 ];
gamma = (((Agamma(6)*T + Agamma(5)).*T + Agamma(4)).*T + Agamma(3)).*T + Agamma(2)).*T + Agamma(1);

function [gamma]=gammagT(gT)
% T (K) ; gamma (SU) ; gT=gamma.T
Agamma=[ 1.3723, 1.63273e-4, -2.86625e-7, 1.30604e-10, -1.45853e-14, -1.9315e-18 ];
% Rapport des chaleurs specifiques en fonction du
% produit de gamma par la temperature permettant de revenir
% à la temperature à partir du produit de gamma.T.
% Inversion sur les temperatures [100 200 300 400 650 1000] de eq.38-Sutherland2004
% Le maximum d'erreur est autour de 900 K avec une erreur de 2e-4 (-0.2K),
% l'erreur est inférieure à 1e-5 entre 100 et 500K.
gamma = (((Agamma(6).*gT + Agamma(5)).*gT + Agamma(4)).*gT + Agamma(3)).*gT + Agamma(2)).*gT + Agamma(1);

function [XN,XN2, X0,X02,X03, XH20,XC02] = fracmol(z)
% Fraction molaire des composants : N, N2, O, O2, O3, H2O et CO2,
% Sutherland2004
% z (km)
A102 = -0.67887;
A202 = [4.9296e1, -1.5524, 1.8714e-2, -1.1069e-4, 3.1990e-7, -3.6211e-10] ;
A1N2 = -0.10744 ;
A2N2 = [1.3972e-1, -5.6269e-3, 3.9407e-5, -1.0737e-7] ;
A1CO2 = -3.3979 ;
A103 = [-1.9027e1, 1.3093, -4.6496e-2, 7.8543e-4, -6.5169e-6, 2.1343e-8] ;
A203 = [-4.2340, -3.0975e-2] ;
A10 = [-1.1195e1, 1.5408e-1, -1.4348e-3, 1.0166e-5] ;
A20 = [-3.2456, 4.6642e-2, -2.6894e-4, 5.264e-7] ;
A1N = [-5.3746e1, 1.5439, -1.8824e-2, 1.1587e-4, -3.5399e-7, 4.2609e-10] ;
A1H20 = [-1.7491, 4.4986e-2, -6.8549e-2, 5.4639e-3, -1.5539e-4, 1.5063e-6] ;
A2H20 = [-4.2563, 7.6245e-2, -2.1824e-3, -2.3010e-6, 2.4265e-7, -1.25e-9] ;
A3H20 = [-6.2534e-1, -8.3665e-2] ;
zz= [ones(size(z)); z; z.^2; z.^3; z.^4; z.^5];
% O2
X02 = 0.*z + 10.^A102;
iz = find(z>=90) ;
X02(iz) = 10.^(A202(1:6)*zz(1:6,iz)) ;
% N2

```

```
XN2 = 0.*z + 10.^A1N2;
iz = find(z>=76) ;
XN2(iz) = 10.^(A2N2(1:4)*zz(1:4,iz)) ;
% CO2
XC02 = 0.*z + 10.^A1C02 ;
% O3
XO3 = NaN.*z ;
iz = find(z<80) ;
XO3(iz) = 10.^(A1O3(1:6)*zz(1:6,iz)) ;
iz = find(z>=80) ;
XO3(iz) = 10.^(A2O3(1:2)*zz(1:2,iz)) ;
% O
XO = NaN.*z ;
iz = find(z<95) ;
XO(iz) = 10.^(A1O(1:4)*zz(1:4,iz)) ;
iz = find(z>=95) ;
XO(iz) = 10.^(A2O(1:4)*zz(1:4,iz)) ;
% N
XN = 10.^(A1N(1:6)*zz(1:6,:)) ;
% H2O
XH2O = NaN.*z ;
iz = find(z<30) ;
XH2O(iz) = 10.^(A1H2O(1:6)*zz(1:6,iz)) ;
iz = find(and(z>=30,z<100)) ;
XH2O(iz) = 10.^(A2H2O(1:6)*zz(1:6,iz)) ;
iz = find(z>=100) ;
XH2O(iz) = 10.^(A3H2O(1:2)*zz(1:2,iz)) ;
% -----
```

Notez que dans ce code la vitesse du son est donnée en entrée à la place de la température. L'utilisation de cette variable est justifiée par la nécessité lors du calcul des rayons de connaître la dérivée seconde de la vitesse du son et donc d'effectuer l'interpolation sur la vitesse du son au lieu de la température. La fonction `gammagT` permet de retrouver la valeur du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  en fonction du produit  $\gamma T$ .

## Annexe D

# Données de l'expérience Misty Picture

### D.1 Positions des sources et des stations

Nom		Coordonnées		Altitude/mer (m)	Distance (km)	Azimute/MP (°)
		Lat Nord	Lon Est			
Misty Picture	MP	33 37'12''	-106 28'27''	1505.	0.00	0.00
HE Cal A-1	HA1	33 38'02''	-106 30'41''	1505.	3.78	-65.85
HE Cal A-2	HA2	33 38'01''	-106 30'38''	1505.	3.69	-65.80
HE Cal A-3	HA3	33 38'04''	-106 30'42''	1505.	3.83	-65.16
HE Cal B-1	HB1	33 38'08''	-106 30'47''	1505.	3.99	-64.33
HE Cal B-3	HB2	33 38'07''	-106 30'44''	1505.	3.91	-64.25
HE Cal B-3	HB3	33 38'11''	-106 30'48''	1505.	4.06	-63.31
HE Cal C	HC	33 38'14''	-106 30'36''	1505.	3.83	-60.00
River Side	RS	33 20'00''	-105 03'42''	1524.	134.83	103.28
Silver City	SC	32 47'05''	-108 14'42''	1829.	189.13	-118.92
Tatum	TA	33 15'30''	-103 21'00''	1219.	292.65	97.04
Los Alamos	LA	35 52'15''	-106 19'44''	2280.	250.63	2.99
Alpine	AL	33 50'47''	-109 08'19''	2445.	247.67	-83.43
White River	WR	33 49'57''	-109 58'00''	1597.	323.84	-84.85
Roosevelt	RO	33 40'14''	-111 07'56''	674.	431.19	-87.96
Lake Havasu	LH	34 28'16''	-114 21'05''	146.	731.72	-80.37
Las Vegas	LV	36 12'24''	-115 08'07''	591.	840.10	-67.54
Barstow	BA	34 53'34''	-117 00'15''	663.	977.58	-78.73
Fite ranch	FR	33 55'12''	-106 45'06''	1524.	42.08	-37.48
Datil	DA	34 08'50''	-107 50'49''	2282.	139.62	-64.79
Admin Park	AP	33 39'22''	-106 32'22''	1505.	7.26	-56.38
Observer area	OA	33 40'32''	-106 32'07''	1505.	8.38	-42.46
Stallion	ST	33 49'12''	-106 39'21''	1506.	27.88	-37.00
Socorro	SO	34 02'15''	-106 53'51''	1400.	60.70	-40.00
Carrizozo	CA	33 38'41''	-105 52'35''	1670.	55.40	87.00
Tularosa	TU	33 04'32''	-106 01'12''	1378.	73.80	145.00
Alamogordo	ALA	32 53'56''	-105 57'32''	1330.	93.40	149.00
Deming	DE	32 20'37''	-107 49'35''	1319.	189.86	-138.00
Silver City 2	SC2	32 50'51''	-108 19'32''	1829.	192.42	-116.00
Reserve	RE	33 43'59''	-108 47'23''	1766.	214.62	-86.00
Quemado Lake	QL	34 13'28''	-108 32'24''	2132.	202.11	-70.00
Grants	GR	35 11'11''	-107 52'25''	1961.	216.37	-36.00
St George	SG	37 06'00''	-113 34'48''	800.	754.54	-57.00
Bishop	BI	37 21'36''	-118 27'00''	1300.	1160.6	-65.60
Bakersfield	BF	35 22'12''	-199 01'12''	120.	1165.6	-76.87

## D.2 Caractéristiques des signaux barométriques mesurés

Pour la pression, pm indique la surpression maximale, pp indique que la valeur est prise 'peak to peak' et vl que l'amplitude est en volt (amplitude non connue). Pour les fichiers des signaux, NaN No indique l'absence de signal dans la référence et NaN indique que le signal n'a pas été numérisé. Les noms des phases sans ? sont ceux indiqués dans les références et les initiales des phases résultent de notre analyse.

% Tableau de synthèse des différents signaux mesurés lors de l'expérience Misty Picture

% Station	Source	Signal arrival (s since shot)		Overpressure (Pa)	Phase wave	Ref.	Signal File	Remarks
River Side	MP	478	547	9. pm	Is stratosphere	Blanc1988	riverside	
Silver City	MP	625	694	14. pm	Is stratosphere	Blanc1988	silvercity	
Alpine	MP	825	850	24. pm	Is stratosphere	Blanc1988	alpine	
Alpine	MP	1062	1075	7. pm	Ita thermosphere	Blanc1988	alpine	
Los Alamos	MP	842	868	6.5 pm	Is stratosphere	Blanc1988	losalamos	
Los Alamos	MP	1097.5	1101	3.5 pm	Ita thermosphere	Blanc1988	losalamos	
White River	MP	1057.5	1081	11.0 pm	Is stratosphere	Blanc1988	whiteriver	
White River	MP	1082	1200	2.0 pm	Is stratosphere	Blanc1988	whiteriver	
White River	MP	1296	1314	4.0 pm	Ita thermosphere	Blanc1988	whiteriver	
Roosevelt	MP	1366	1397	3.5 pm	Is stratosphere	Blanc1988	roosevelt	
Roosevelt	MP	1450	1505	4.5 pm	Is stratosphere	Blanc1988	roosevelt	
Roosevelt	MP	1583	1598	5.6 pm	Ita thermosphere	Blanc1988	roosevelt	
Las Vegas	MP	2575	2620	1. pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	lasvegas	
Las Vegas	MP	2679	2722	2. pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	lasvegas	
Las Vegas	MP	2793	2830	5.5 pm	Ita ?thermosphere	Blanc1988	lasvegas	
Las Vegas	MP	2883	2925	1. pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	lasvegas	
Barstow	MP	2990	3025	1. pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	barstow	
Barstow	MP	3080	3120	4.6 pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	barstow	
Barstow	MP	3180	3230	2.5 pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	barstow	
Barstow	MP	3380	3425	2. pm	Is ?stratosphere	Blanc1988	barstow	
Admin Park	MP	18.59	21.2	1691.35 pm	Iw troposphere	Reed1987	adminpark	
Observer area	MP	24.48	27.3	2842.30 pm	Iw troposphere	Reed1987	observerarea	
Observer area	MP	57.35	57.35	36. pm	NaN echoes Oscura	Reed1987	NaN No	
Observer area	MP	69.47	69.47	36. pm	NaN echoes Oscura	Reed1987	NaN No	
Stallion	MP	77.42	80.	237.61 pm	Iw troposphere	Reed1987	stallion	
Socorro	MP	169.93	175.8	107.51 pm	Iw troposphere	Reed1987	socorro	
Carrizozo	MP	190.16	NaN	13.64 pp	Iw troposphere	Reed1987	NaN No	pp : pressure peak to peak
Tularosa	MP	212.97	NaN	3.94 pp	Iw troposphere	Reed1987	NaN No	50s, 0.3Hz
Alamogordo	MP	259.00	402.	7. pp	Iw ?stratosphere	Reed1987	NaN No	No clean signals
Deming	MP	656.80	NaN	6.84 pp	Is ?stratosphere	Reed1987	NaN	Wind noise : 6-9Pa, 12-20Pa
Silver City 2	MP	595.72	NaN	16. pp	Iw troposphere	Reed1987	NaN No	erroneous calibration ?

Silver City 2	MP	654.21	NaN	17.56	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN	No	erroneous calibration ?
Reserve	MP	742.21	NaN	1.27	pm	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		Overpressure : 5Pa pp
Reserve	MP	753.33	NaN	31.7	pm	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		Overpressure : 52Pa pp
Reserve	MP	758.12	NaN	12.06	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Reserve	MP	764.44	NaN	10.16	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Reserve	MP	821.46	NaN	1.27	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN	No	
Quemado Lake	MP	671.06	NaN	4.26	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Quemado Lake	MP	682.51	NaN	20.71	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Quemado Lake	MP	687.27	NaN	15.84	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Quemado Lake	MP	693.19	NaN	9.75	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN		
Quemado Lake	MP	734.72	NaN	3.05	pp	Is	stratosphere	Reed1987	NaN	No	
Grants	MP	648.78	648.78	3.96	pp	Iw	troposphere	Reed1987	NaN	No	
Grants	MP	715.34	715.34	3.40	pp	Is	stratosphere	Reed1987		grants	
Grants	MP	719.42	719.42	7.92	pp	Is	stratosphere	Reed1987		grants	
Grants	MP	723.33	723.33	11.32	pp	Is	stratosphere	Reed1987		grants	
Grants	MP	729.22	729.22	10.94	pp	Is	stratosphere	Reed1987		grants	
Los Alamos LANL	MP	736.	740.	0.5	v1	Iw	troposphere	Whitaker1990	LANL_losalamosbrut		
Los Alamos LANL	MP	840.	890.	4.5	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_losalamosbrut		
Los Alamos LANL	MP	1094.	1100.	3.0	v1	Ita	thermosphere	Whitaker1990	LANL_losalamosbrut		
St George	MP	2320.	2345.	4.0	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
St George	MP	2415.	2455.	4.0	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
St George	MP	2510.	2555.	7.0	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
St George	MP	2635.	2675.	2.0	v1	Is	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
St George	MP	2740.	2790.	1.5	v1	Is?	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
St George	MP	2845.	2865.	1.5	v1	It	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_stgeorgebrut		
Bishop	MP	3545.	3575.	4.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bishop	MP	3640.	3675.	7.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bishop	MP	3740.	3790.	10.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bishop	MP	3850.	3890.	9.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bishop	MP	3965.	3995.	5.	v1	Is	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bishop	MP	4070.	4090.	2.	v1	Is?	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_bishopbrut		
Bakersfield	MP	3640.	3675.	4.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		
Bakersfield	MP	3745.	3780.	6.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		
Bakersfield	MP	3850.	3885.	8.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		
Bakersfield	MP	3955.	3995.	10.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		
Bakersfield	MP	4055.	4105.	6.	v1	Is	stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		
Bakersfield	MP	4180.	4185.	5.	v1	Is?	?stratosphere	Whitaker1990	LANL_bakersfieldbrut		



## Annexe E

# Données du Concorde

Dans cette annexe sont présentées les analyses PMCC des enregistrements du Concorde Air France à la station de Flers pour quelques dates de l'année 2002 ainsi que les résultats obtenus par la méthode de tracé de rayons pour ces mêmes dates. Chaque événement est décrit par 8 figures.

- 1 Analyse PMCC : Azimut de l'ensemble des détections élémentaires cohérentes dans le diagramme temps-fréquence,
  - 2 Analyse PMCC : Vitesse apparente des détections élémentaires,
  - 3 Analyse PMCC : Signal remis en phase par rapport à une arrivée moyenne du Concorde. Les triangles du haut indiquent les phases détectées automatiquement. Ceux du bas indiquent les arrivées retenues pour l'analyse statistique.
  - 4 Tracé de rayons : Signaux reconstitués à la station de flers,
  - 5 Tracé de rayons : Azimut calculé,
  - 6 Tracé de rayons : Vitesse apparente calculée,
  - 7 Tracé de rayons : Trajectoire des rayons propres entre la source et le récepteur,
  - 8 Tracé de rayons : Temps de réception en fonction du temps d'émission  $\tau$  des rayons propres.
- Les résultats du tracé de rayons ne sont pas recalés en temps avec les mesures.

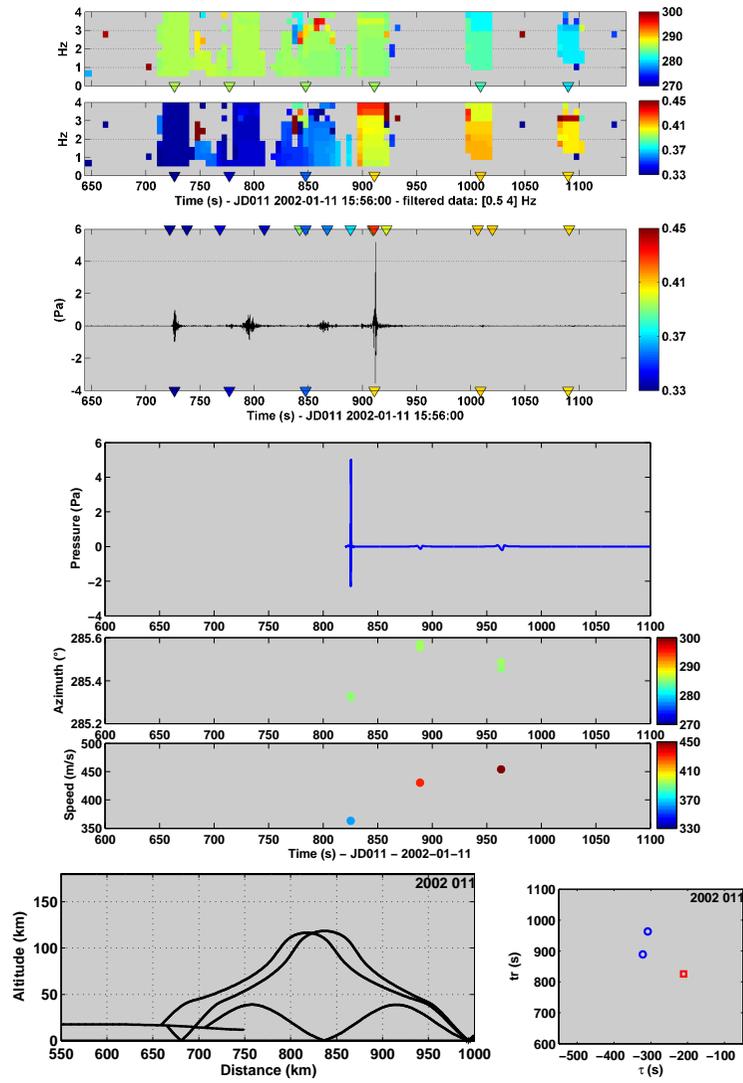


FIGURE E.2 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 011 de l'année 2002.

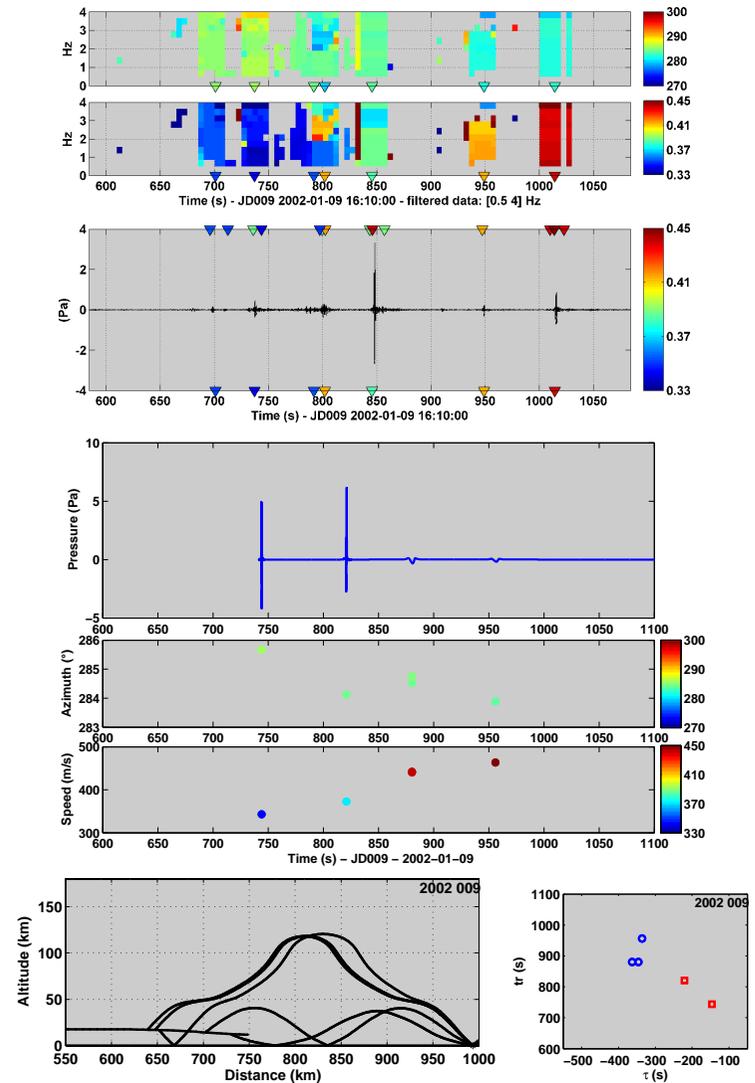


FIGURE E.1 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 009 de l'année 2002.

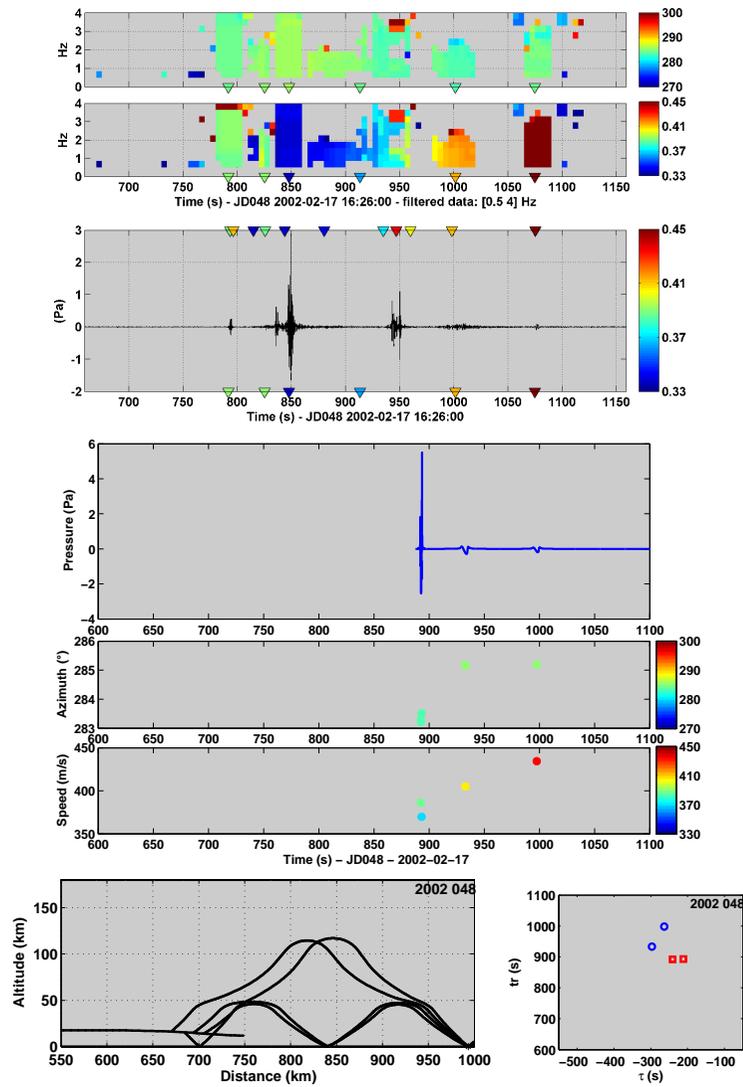


FIGURE E.4 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 048 de l'année 2002.

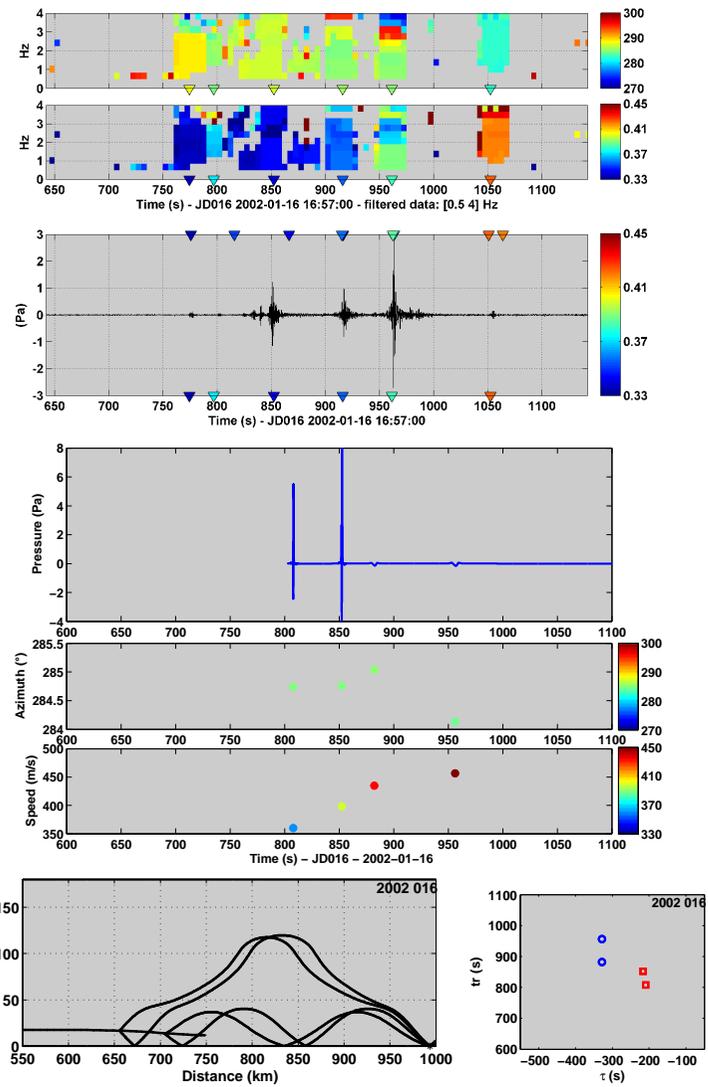


FIGURE E.3 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 016 de l'année 2002.

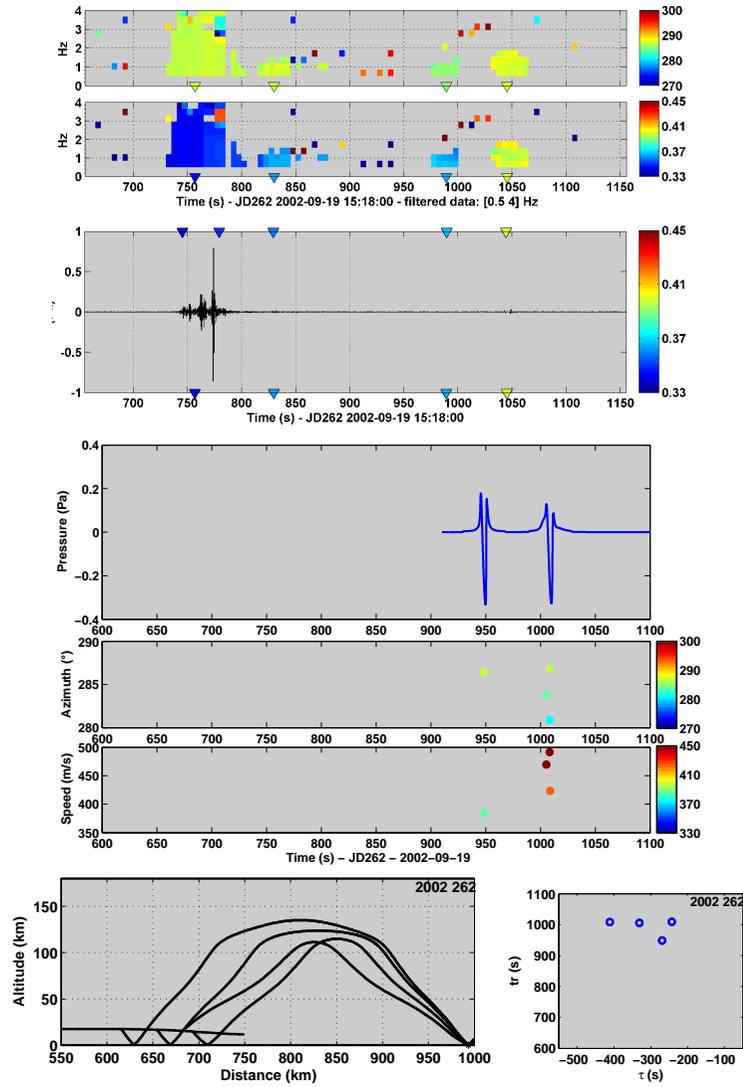


FIGURE E.6 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 262 de l'année 2002.

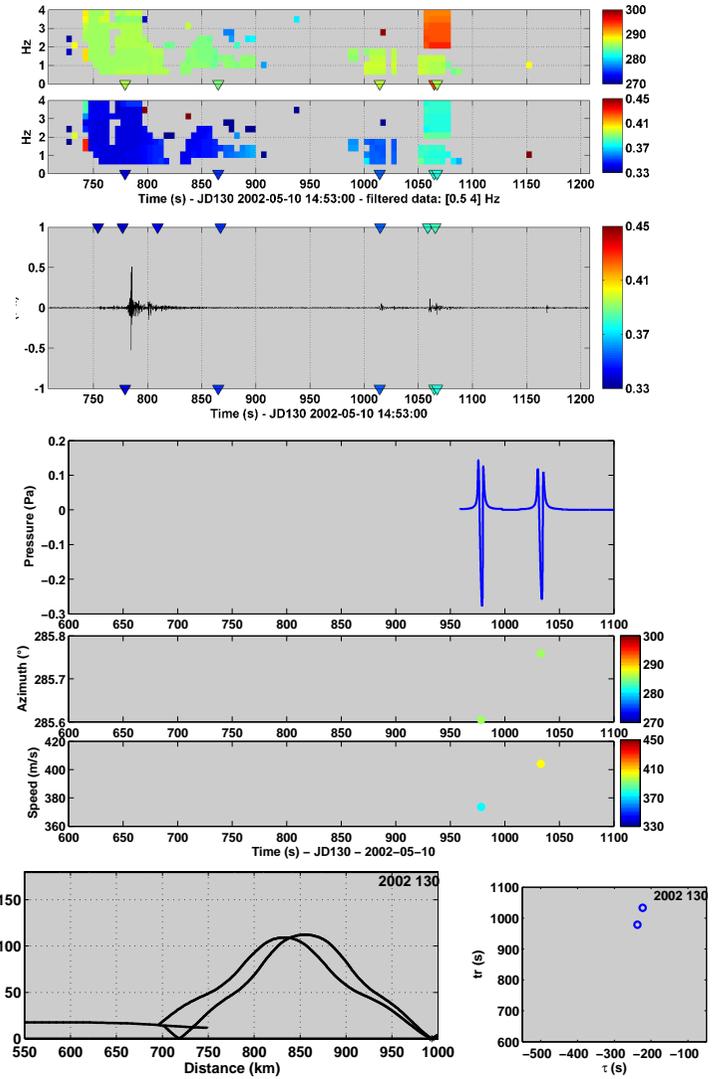


FIGURE E.5 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 130 de l'année 2002.

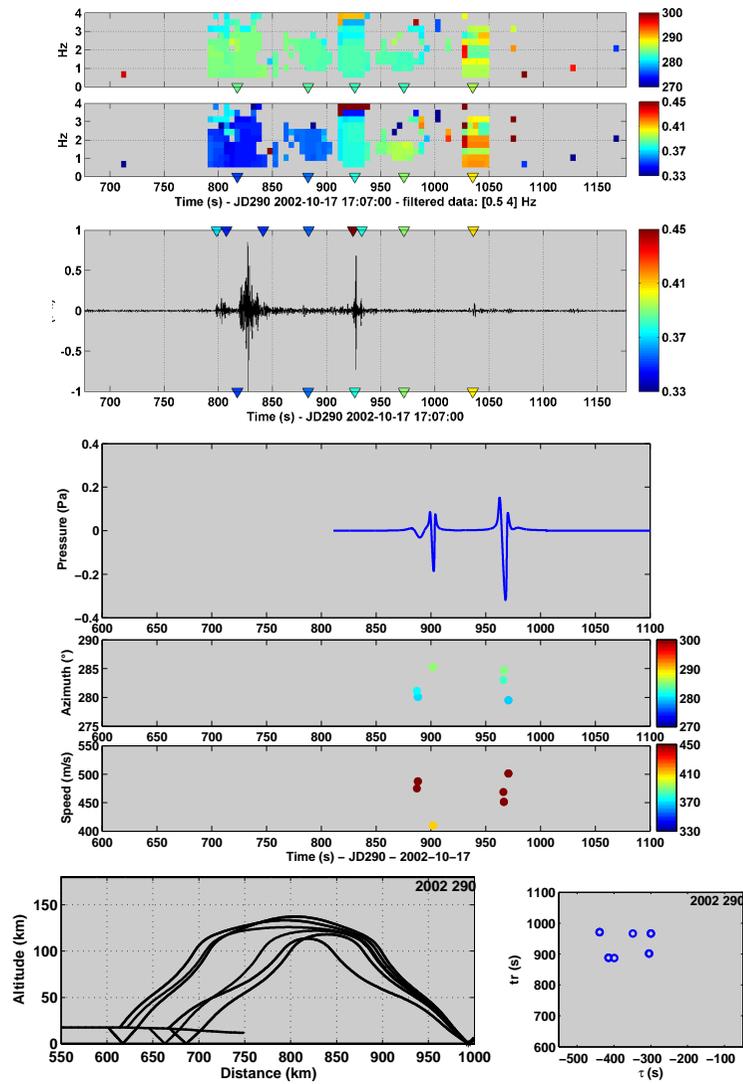


FIGURE E.8 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 290 de l'année 2002.

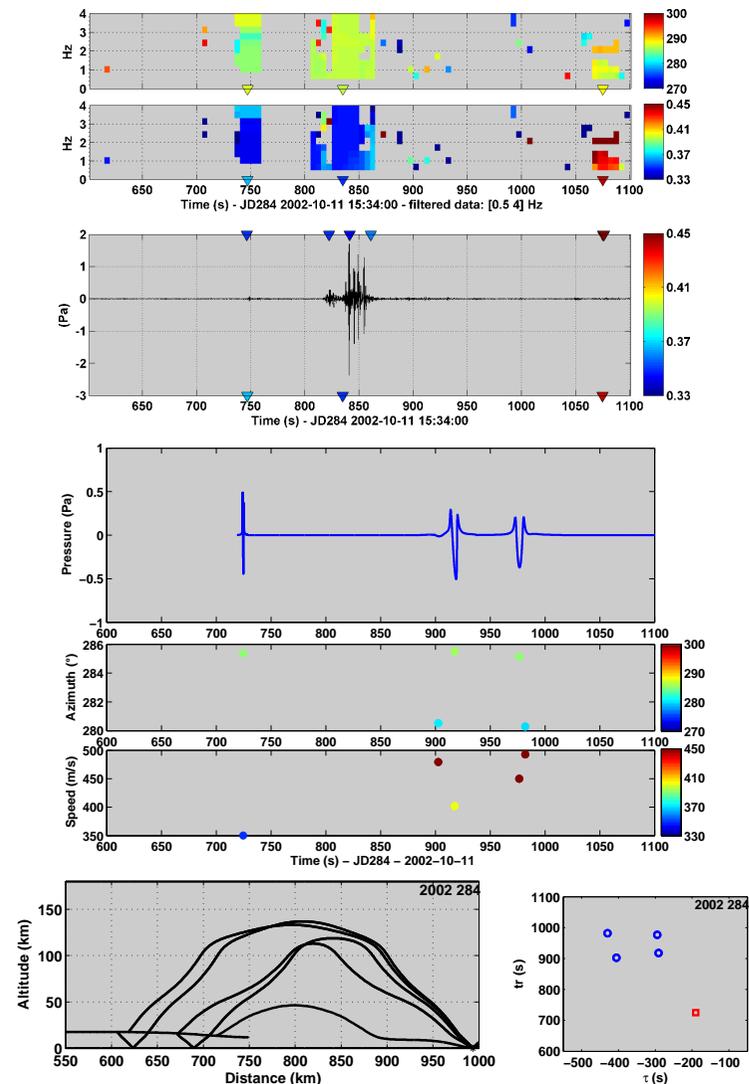


FIGURE E.7 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 284 de l'année 2002.

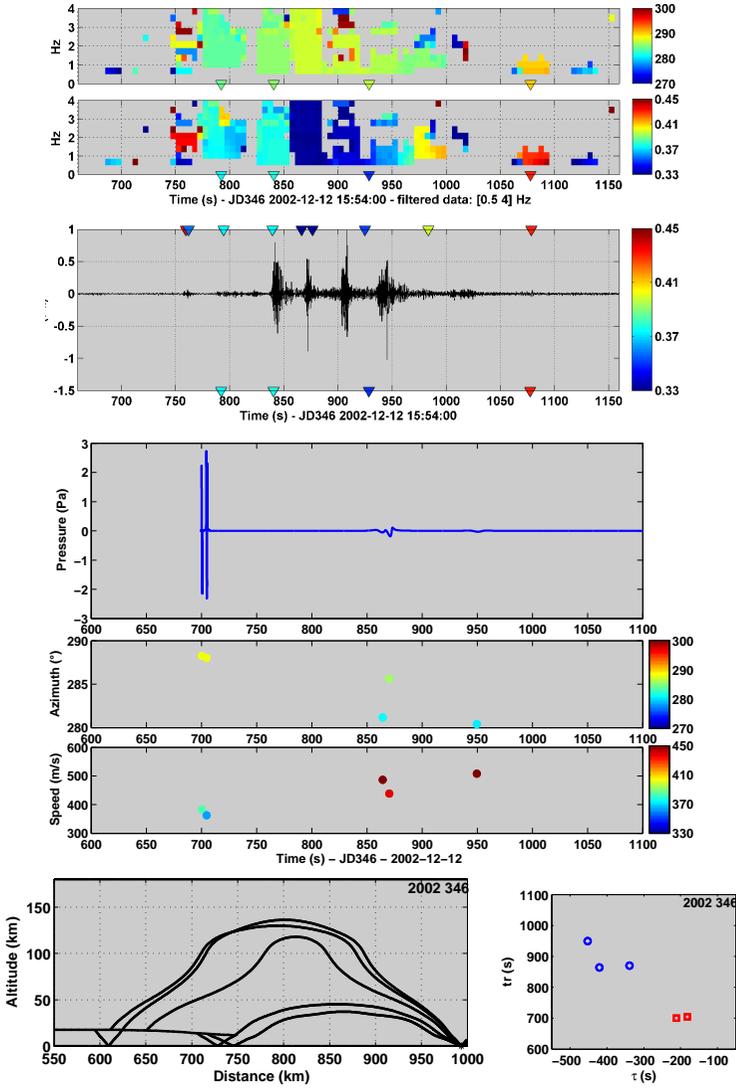


FIGURE E.10 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 346 de l’année 2002.

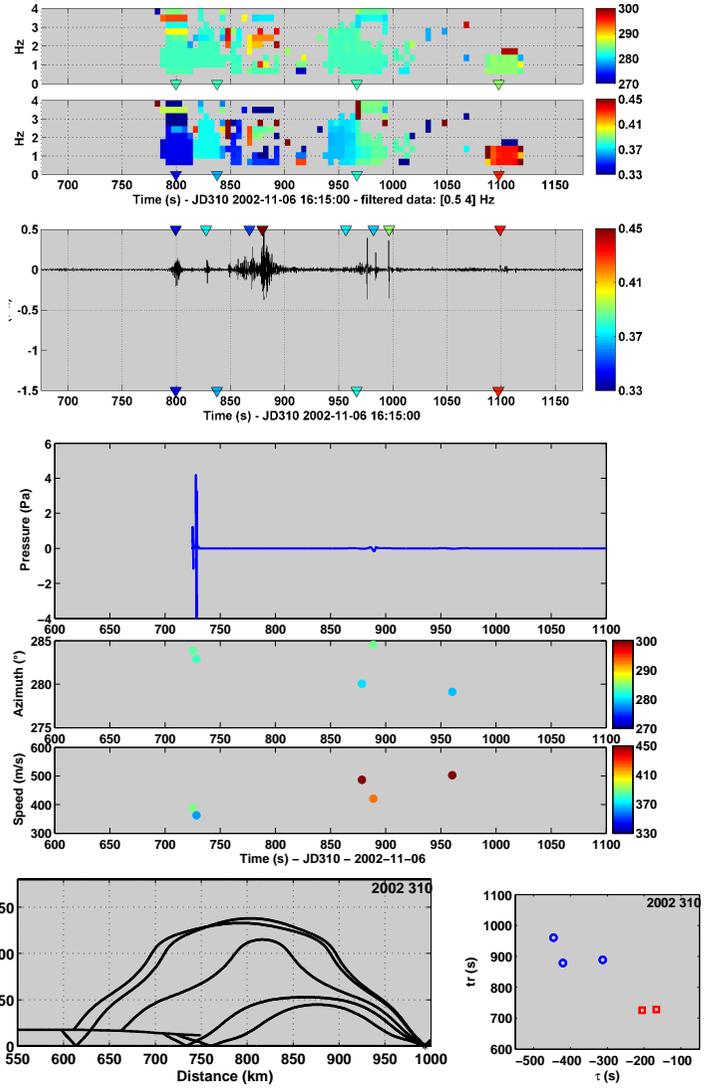


FIGURE E.9 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 310 de l’année 2002.

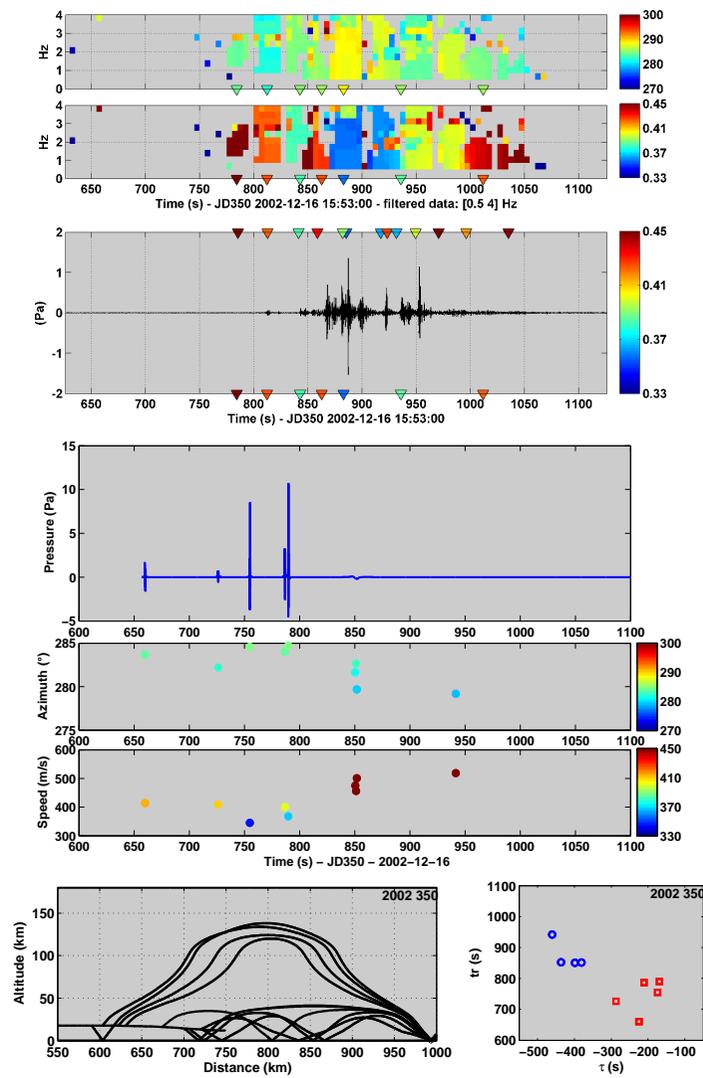


FIGURE E.11 – Analyse PMCC et résultats du tracé de rayons pour le jour 350 de l'année 2002.





**ECOLE CENTRALE DE LYON**  
**DIRECTION DE LA RECHERCHE**

**Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon**

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	maître de conférences	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	AMPERE	ECL

**Nbre Ampère 11**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

**Nbre DER EEA 2**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

**Nbre ICTT 1**

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL

O'CONNOR Ian	maître de conférences	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

**Nbre INL 18**

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

**Nbre LIRIS 1**

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

**Nbre LMFA 22**

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	maître de conférences	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL

TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL

**Nbre LTDS 25**

Total Hdr ECL

89



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur Ph. BLANC-BENON

et les rapports de

Monsieur J. VIRIEUX  
Professeur - Université Joseph Fourier - Laboratoire Géophysique Interne et Tectonophysique - BP 53  
38041 GRENOBLE cedex 9

Et de

Monsieur F. COULOUVRAT  
Directeur de Recherche CNRS - Université Pierre et Marie Curie Paris 6  
Institut Jean Le Rond D'Alembert - Case 162 - 4, place de Jussieu - 75252 PARIS cedex 05

**Monsieur GAINVILLE Olaf**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 10 avril 2008

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur des Etudes

