

# THESE

présentée  
devant L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

SPECIALITE ACOUSTIQUE

par

Yves HUGON-JEANNIN

## SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES EN MILIEU TURBULENT

Soutenue le 7 juillet 1992 devant la Commission d'Examen

### JURY

Président : Mme G. COMTE-BELLOT

Examineurs : M. Ph. BLANC-BENON  
M. J. BRASSEUR  
M. J.N. GENGE  
M. D. JUVE  
M. M. KARWEIT

ECOLE CENTRALE DE LYON  
ACOUSTIQUE  
36, avenue Guy de Collongue  
B.P. 163  
69131 ECULLY cedex  
Tél. (33) 04 72 18 60 09  
Fax (33) 04 72 18 91 43

## REMERCIEMENTS

ECOLE CENTRALE DE LYON  
ACOUSTIQUE  
36, avenue Guy de Collongue  
B.P. 163  
69131 ECULLY cedex  
Tél. (33) 04 72 18 60 09  
Fax (33) 04 72 18 91 43

Cette étude a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, Unité de Recherche Associée au CNRS n° 263.

J'exprime ma profonde gratitude à Mme le Professeur G. COMTE-BELLOT, Responsable du Département Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur D. JUVE, Directeur de thèse, pour ses conseils et sa sollicitude constante tout au long de ce travail.

Ces remerciements s'adressent également à Monsieur M. KARWEIT, Research Professor à Johns Hopkins University, USA. Il a bien voulu juger ce travail et me faire l'honneur de participer au Jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur J.N. GENGE pour sa participation au jury et l'appréciation qu'il a bien voulu porter sur ce travail.

Ma gratitude s'adresse à Monsieur J. BRASSEUR, Assistant Professor à Pennsylvania State University, USA. Il me fait le grand honneur de participer au jury.

Je remercie aussi vivement Monsieur Ph. BLANC-BENON, Chargé de Recherche au CNRS. Ses précieux conseils et sa constante disponibilité m'ont permis d'améliorer continûment la qualité de ce travail.

Je rappelle avec plaisir l'amitié constante de l'ensemble du personnel de l'équipe Acoustique pour l'aide spontanée que j'ai pu trouver auprès de chacun.

Je remercie enfin Madame E. ROCHE pour son accueil amical et son aide précieuse.

## RESUME

La propagation des ondes acoustiques dans les milieux turbulents est un sujet dont les applications sont nombreuses en acoustique aérienne ou sous-marine. Citons par exemple la limitation du pouvoir de résolution des antennes provoquée par la distorsion progressive des surfaces équiphase, ou les fluctuations de niveau sonore en fonction des conditions météorologiques.

La théorie de la propagation des ondes en milieu aléatoire a été développée par un grand nombre d'auteurs suivant une approche de nature statistique. Dans une première étape on écrit une équation dans laquelle l'interaction entre l'onde et le milieu s'exprime à l'aide d'un indice de réfraction aléatoire. La deuxième étape consiste à construire les équations moyennées qui gouvernent les moments successifs du champ transmis. Malheureusement ces équations ne constituent pas un système fermé et il est nécessaire pour les résoudre d'introduire une hypothèse a priori sur la fonction de corrélation des fluctuations d'indice : la corrélation est supposée microscopique selon la direction de propagation.

Afin de s'affranchir d'une telle hypothèse, dont la validité est discutable et les conséquences difficiles à prévoir, nous avons développé une approche plus "déterministe" dans laquelle la prise de moyennes statistiques n'intervient qu'en dernier lieu. Le milieu, dont l'évolution est supposée lente, est représenté par une séquence de réalisations indépendantes d'un champ aléatoire. Chaque réalisation est obtenue par superposition d'un nombre limité de modes de Fourier dont l'amplitude est choisie de façon à obtenir un spectre d'énergie imposé. On considère alors la propagation déterministe des ondes acoustiques, dans l'approximation géométrique ou parabolique, à travers chaque réalisation particulière du champ turbulent. On accumule ensuite les résultats sur un ensemble de réalisations afin d'estimer différentes quantités statistiques : temps d'arrivée, probabilité d'apparition de caustiques, écart-type des fluctuations d'intensité...

Pour l'essentiel nous avons traité le cas d'un milieu bidimensionnel ; le dernier chapitre, consacré au cas tridimensionnel, montre que les conclusions qualitatives obtenues restent valables en tridimensionnel, ce qui justifie ainsi notre étude systématique du cas bidimensionnel.

## ABSTRACT

The propagation of acoustic waves in turbulent media has numerous applications in atmospheric and underwater acoustics. For instance, we may cite the limitation of the resolution of an array due to the gradual distortion of equiphase surfaces, or fluctuations of sound level due to meteorological conditions.

The theory of wave propagation in random media has been developed by many authors following a statistical approach. The first step is to establish an equation in which the interaction between the wave and the medium is governed by a random index of refraction. The second step consists of deducing the averaged equations governing the moments of the transmitted field. Unfortunately, these equations do not form a closed system and it is necessary to introduce an "a priori" hypothesis concerning the correlation of the fluctuation index: the correlation is assumed to be microscopic along the direction of propagation.

In order to avoid this assumption, which is questionable and leads to unpredictable consequences, we have developed a different approach in which statistical averaging is delayed until the final step. The medium is assumed to have a slow evolution, so that it may be represented by a series of independent realizations of a random field. Each realization is obtained by the superposition of discrete Fourier modes. The amplitude of these modes is determined by the choice of the power spectrum. We consider the deterministic propagation of acoustic waves, in either the geometric or the parabolic approximation through each realization of the modeled turbulent field. The results are then accumulated over an ensemble of realizations to permit the estimation of different statistical quantities: travel times, probability of caustics occurrence, variance of intensity fluctuations ...

Most of our work has been done for a two dimensional medium. However the last chapter is devoted to the three dimensional case. It is shown that global trends obtained in two dimensions remain valid in three dimensions, thereby justifying our concentration on the two dimensional case.

# Liste des figures

1.1	Axes utilisés pour l'étude des moments . . . . .	9
1.2	Axes utilisés pour l'équation du moment d'ordre 4 (2D) . . . . .	10
2.1	Angles des modes, milieu bidimensionnel . . . . .	14
2.2	Spectre 2D pour une fonction de corrélation gaussienne . . . . .	15
2.3	Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 2D . . . . .	17
2.4	Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 3D . . . . .	17
2.5	Fonction de corrélation pour un champ 2D . . . . .	18
2.6	Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations	18
2.7	Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations avec moyenne spatiale . . . . .	19
2.8	Angles des modes, milieu tridimensionnel . . . . .	20
2.9	Fonction de corrélation pour un champ thermique 3D . . . . .	21
2.10	Spectre 3D pour une fonction de corrélation gaussienne . . . . .	21
2.11	Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations	22
3.1	Influence du pas longitudinal $\Delta x$ sur l'indice de scintillation $\sigma_I^2$ . . . . .	31
3.2	Influence du pas d'échantillonnage (calcul de la transformée de Fourier rapide) sur l'indice de scintillation $\sigma_I^2$ . . . . .	31
4.1	Fluctuation du temps de parcours d'un rayon : position du problème	34
4.2	Interpolation du temps de parcours d'un rayon . . . . .	35
4.3	Tracé de quatre réalisations d'un rayon pour $20 L$ de propagation . . . . .	35
4.4	Tracé de quatre réalisations d'un rayon pour $40 L$ de propagation . . . . .	36
4.5	Variance des fluctuations de temps de parcours d'un rayon acoustique, comparaison avec Chernov pour 250 réalisations . . . . .	37
4.6	Densités de probabilité des distances d'apparition des caustiques pour un milieu bidimensionnel, par Kulkarny et White . . . . .	37
4.7	Variance des fluctuations de temps de parcours d'un rayon acoustique, comparaison avec Chernov pour 250 et 1000 réalisations . . . . .	38
4.8	Propagation de rayons acoustiques sur une réalisation, source ponctuelle	39
4.9	Retournement du faisceau de rayons au passage d'une caustique . . . . .	40
4.10	Déformations progressive des fronts d'ondes sur une réalisation, source ponctuelle . . . . .	41
4.11	Front d'onde près d'une zone de caustique . . . . .	41
4.12	Définition des écarts de phase pris en compte par la méthode envisagée	42
4.13	Coefficient de corrélation de phase, distance à la source : $10 L$ et $20 L$ . . . . .	42

4.14	Coefficient de corrélation de phase, distance à la source : $30 L$ et $40 L$ .	43
4.15	Positions probables des sources de fronts perturbés, distance à la source : $40 L$ . . . . .	44
4.16	Positions probables des sources de fronts perturbés, échelle dilatée selon $x$ , distance à la source : $40 L$ . . . . .	45
4.17	Positions probables des sources de fronts perturbés, échelle dilatée selon $x$ , distance à la source : $20 L$ . . . . .	45
4.18	Positions probables des sources de fronts perturbés, distance à la source : $20 L$ . . . . .	46
4.19	Installation expérimentale de Blanc-Benon . . . . .	46
4.20	Mesure des écarts de phase entre deux microphones . . . . .	47
4.21	Mesure des écarts de phase entre deux microphones : "zoom" . . . . .	47
4.22	Mesure des signaux de pression . . . . .	48
4.23	Phase calculée par l'équation parabolique sans traitement . . . . .	49
4.24	Phase calculée par l'équation parabolique après traitement . . . . .	49
4.25	Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source $20.1 L$ . . . . .	49
4.26	Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source $20.15 L$ . . . . .	50
4.27	Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source $20.2 L$ . . . . .	50
4.28	Agrandissement d'une zone de dislocation de phase (1) . . . . .	50
4.29	Comparaison de deux fronts de phase proches . . . . .	51
4.30	Intensité près d'une zone de dislocation de phase (1) . . . . .	51
4.31	Agrandissement d'une zone de dislocation de phase (2) . . . . .	52
4.32	Intensité près d'une zone de dislocation de phase (2) . . . . .	52
4.33	Lieux des caustiques . . . . .	53
5.1	Maillage adopté pour la résolution de l'équation parabolique . . . . .	56
5.2	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L = 0.085$ . . . . .	57
5.3	Superposition d'un calcul de rayon et d'une carte de fluctuations d'intensité . . . . .	57
5.4	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L = 0.17$ . . . . .	58
5.5	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L = 0.043$ . . . . .	58
5.6	Influence de $(k_0, \overline{\mu^2}, L)$ à $\gamma$ constant sur $\sigma_I^2$ . . . . .	60
5.7	Comparaison avec Rytov $\gamma = 6.5$ . . . . .	60
5.8	Comparaison avec Rytov $\gamma = 50$ . . . . .	61
5.9	Comparaison avec Rytov $\gamma = 417$ . . . . .	61
5.10	Comparaison avec Tur $\gamma = 10$ . . . . .	62
5.11	Comparaison avec Tur $\gamma = 20$ . . . . .	62
5.12	Comparaison avec Tur $\gamma = 50$ . . . . .	63
5.13	Comparaison avec Spivack et Uscinski $\gamma = 50$ . . . . .	63
5.14	Comparaison avec Spivack et Uscinski $\gamma = 1000$ . . . . .	64

5.15	Comparaison avec Spivack et Uscinski $\gamma = 10000$ . . . . .	64
5.16	Comparaison avec Spivack et Uscinski $\gamma = 100000$ . . . . .	65
5.17	Evolution de $\sigma_I^2$ en fonction de $\gamma$ . . . . .	66
5.18	Abscisse du pic de $\sigma_I^2$ . . . . .	67
5.19	Hauteur du pic de $\sigma_I^2$ . . . . .	67
5.20	$\sigma_I^2$ en fonction du paramètre de Kulkarny et White . . . . .	68
5.21	Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation : $\lambda/L = 0.17$ , distance de propagation : 5 à 20 $L$ . . . . .	70
5.22	Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation : $\lambda/L = 0.17$ , distance de propagation : 25 à 40 $L$ . . . . .	71
5.23	Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation : $\lambda/L = 0.043$ , distance de propagation : 5 à 20 $L$ . . . . .	71
5.24	Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation : $\lambda/L = 0.043$ , distance de propagation : 25 à 40 $L$ . . . . .	72
5.25	Comparaison avec la loi Gamma généralisée : $\lambda/L = 0.17$ , 5 $L$ de propagation . . . . .	73
5.26	Comparaison avec la loi Gamma généralisée : $\lambda/L = 0.17$ , 15 $L$ de propagation . . . . .	73
5.27	Comparaison avec la loi Gamma généralisée : $\lambda/L = 0.17$ , 20 $L$ de propagation . . . . .	74
5.28	Comparaison avec la loi Gamma généralisée : $\lambda/L = 0.17$ , 40 $L$ de propagation . . . . .	74
6.1	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.17, calcul 3D, coupe selon le plan $(y, z)$ perpendiculaire à la direc- tion de propagation, $x = 10 L$ . . . . .	78
6.2	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.085, calcul 3D, coupe selon le plan $(y, z)$ perpendiculaire à la direc- tion de propagation, $x = 10 L$ . . . . .	78
6.3	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.043, calcul 3D, coupe selon le plan $(y, z)$ perpendiculaire à la direc- tion de propagation, $x = 10 L$ . . . . .	79
6.4	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.17, calcul 3D, coupe selon le plan $(x, z)$ parallèle à la direction de propagation . . . . .	79
6.5	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.085, calcul 3D, coupe selon le plan $(x, z)$ parallèle à la direction de propagation . . . . .	80
6.6	Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique $\lambda/L =$ 0.043, calcul 3D, coupe selon le plan $(x, z)$ parallèle à la direction de propagation . . . . .	80
6.7	$\sigma_I^2$ 3D comparaison avec Rytov $\gamma = 6.5$ . . . . .	82
6.8	$\sigma_I^2$ 3D comparaison avec Rytov $\gamma = 52$ . . . . .	82
6.9	$\sigma_I^2$ 3D comparaison avec Rytov $\gamma = 100$ . . . . .	83
6.10	$\sigma_I^2$ 3D comparaison avec Rytov $\gamma = 200$ . . . . .	83

6.11 $\sigma_I^2$ 3D comparaison avec Rytov $\gamma = 1000$ . . . . .	84
6.12 $\sigma_I^2$ en fonction du paramètre de Kulkarny et White . . . . .	85
6.13 Abscisse du pic de $\sigma_I^2$ . . . . .	86
6.14 Hauteur du pic de $\sigma_I^2$ . . . . .	88



## Liste des symboles

- $dt$  est le pas de temps de la méthode de Runge-Kutta pour la résolution du système différentiel permettant le calcul des rayons.
- $\Delta x, \Delta y$ , sont les pas du maillage spatial pour la résolution de l'équation parabolique.
- $\overline{\Delta t^2} = \overline{(t - \bar{t})^2}$
- $\mathcal{F}(f)$  est la transformée de fourier de  $f$ , notée  $\tilde{f}$ .
- $min$  indique le minimum
- $\bar{x}, \langle x \rangle, x_{moy}$  désignent la moyenne statistique de  $x$
- $z^*$  indique le conjugué de la grandeur complexe  $z$
- $Re(z)$  est la partie réelle de la grandeur complexe  $z$ .
- $R^3$  est l'espace.
  
- $\alpha^i = (\vec{K}^i, Oz)$
- $\beta = k_0^2 \bar{\mu}^2 L \sqrt{\pi}$
- $\gamma = k_0^3 \bar{\mu}^2 L^3 \sqrt{\pi}$
- $\Gamma$  désigne la fonction Gamma.
- $\delta$  est la distribution de Dirac.
- $\epsilon = n^2 - 1$
- $\theta$  est l'angle polaire habituel.
- $\vartheta^i = (\vec{K}^i, Ox)$
- $\kappa$  est le deuxième paramètre de la loi Gamma généralisée.
- $\lambda$  est la longueur d'onde acoustique.
- $\mu = -T'/(2\bar{T}) = n'$
- $\varpi$  est un opérateur différentiel :  

$$\varpi = k_0^{-2}(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$$
- $\Pi(\vec{x})$  est une fonction représentant la phase de l'onde acoustique.  

$$\Pi(\vec{x}) = \omega \tau(\vec{x})$$

- $\rho = \|\vec{\rho}\|$
- $\vec{\rho}$  est le vecteur espace du plan  $(x, y)$ .
- $\varrho$  désigne la masse volumique.
- $\sigma$  désigne l'abscisse curviligne correspondant au trajet d'un rayon.
- $\sigma_I^2$  est l'indice de scintillation ou variance des fluctuations d'intensité de l'onde acoustique.  

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}$$
- $\sigma_x^2$  est la variance du logarithme de l'amplitude de l'onde acoustique.
- $\tau(\vec{x}) = \text{constante}$  est l'équation des surfaces équiphasés ou fronts d'onde.  
 $(\Pi(\vec{x}) = \omega \tau(\vec{x}))$
- $\phi$  est le deuxième angle polaire.
- $\varphi^i$  est le déphasage des modes de Fourier discrets du champ thermique.
- $\Phi_\epsilon(K)$  est le spectre des fluctuations  $\epsilon$ .
- $\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi_1(\vec{x}) + \psi_2(\vec{x}) + \dots$  est "l'iconale".
- $\omega$  est la pulsation de l'onde acoustique.
  
- $A(\vec{\rho})$  est une fonction intervenant dans la fonction de corrélation de  $\epsilon(\vec{x})$  :  
 $\langle \epsilon(x, \vec{\rho}) \epsilon(x', \vec{\rho}') \rangle = \delta(x - x') A(\vec{\rho} - \vec{\rho}')$
- $\mathcal{A}$  est l'amplitude de la pression acoustique  $p$  selon l'expression :  
 $p(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) e^{i\psi(\vec{x})}$
- $b$  est le premier paramètre de la loi Gamma généralisée.
- $c$  est la célérité des ondes acoustique dans le milieu perturbé par la turbulence.
- $c_0$  est la célérité des ondes acoustique dans le milieu au repos.
- $d$  est la distance de propagation.
- $G$  désigne le spectre du champ thermique, la même notation est utilisée en 2D et 3D.  

$$\text{spectre 2D : } G(K) = \frac{KL^2}{2} \exp\left(-\frac{K^2 L^2}{4}\right)$$

$$\text{spectre 3D : } G(K) = \frac{K^2 L^3}{4} \exp\left(-\frac{K^2 L^2}{4}\right)$$
- $I$  est l'intensité acoustique.

- $J_0$  est la fonction de Bessel.
- $K = \| \vec{K} \|$
- $\vec{K}$  est l'image de Fourier du vecteur  $\vec{x}$ .
- $\vec{K}^i$  est un mode de Fourier discret.
- $k_0 = \omega/c_0$  est le nombre d'onde acoustique.
- $k_y, k_z$  sont les image de Fourier de  $y$  et  $z$ .
- $L$  est le paramètre de la fonction de corrélation gaussienne  $\mathcal{R}$  adoptée pour les fluctuations thermiques.  
 $(\mathcal{R}(r) = \sqrt{T'^2} \exp(-r^2/L^2))$
- $\mathcal{L}$  est l'échelle intégrale spatiale des fluctuations thermiques. Avec la fonction de corrélation  $\mathcal{R}$  adoptée on a :  
 $\mathcal{L} = L\sqrt{\pi}/2$
- $\mathcal{L}_x$  est l'échelle spatiale de variation selon  $x$ , pour l'établissement de l'équation parabolique,  $\mathcal{L}_x \gg \lambda$ .
- $\mathcal{L}_\rho$  est l'échelle caractéristique des gradients de masse volumique.
- $m$  est le moment d'ordre 4 du champ acoustique :

$$m(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3) = \langle p(x, \vec{\rho}_1) p^*(x, \vec{\rho}_2) p^*(x, \vec{\rho}_3) p(x, \vec{\rho}_4) \rangle$$

- $m_2^\Gamma$  et  $m_3^\Gamma$  sont les moments d'ordre 2 et 3 de  $\mathcal{P}_\Gamma$ .
- $n$  est l'indice de réfraction du milieu de propagation. Il se décompose ainsi :  
 $n(x, y, z) = 1 + n'(x, y, z)$ , en prenant une valeur moyenne égale à 1, et en notant  $n'$  les fluctuations aléatoires de cet indice. (En général :  $|n'| \ll 1$ )  
 $n$  est également relié aux paramètres suivants :  
 $n = c_0/c$   
 $\epsilon = n^2 - 1$   
 $n \approx 1 - T'/(2\bar{T})$   
 $n'$  est souvent noté  $\mu$  dans la littérature ; nous emploierons également cette notation.
- $p$  est une grandeur complexe représentant l'amplitude de la fluctuation acoustique de la pression pour une onde monochromatique.  
 On décompose au Chapitre 1  $p$  en série de perturbations dont les différentes contribution sont notées  $p_0, p_1, p_2, \dots$   
 La fluctuation réelle de pression étant  $p'$ , on aura  $p' = \text{Re} [p \exp(-i\omega t)]$
- $p'$  est la fluctuation réelle de pression acoustique (voir ci-dessus).

- $P$  est un opérateur différentiel :

$$P = \partial/\partial x$$

- $\mathcal{P}$  est la densité de probabilité des fluctuations d'intensité.
- $\mathcal{P}_\Gamma$  est la densité de probabilité de la loi Gamma généralisée.
- $Q$  est un opérateur différentiel :

$$Q = [n^2 + k_0^{-2}(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)]^{1/2}$$

- $r$  désigne une distance de propagation.
- $R$  est le coefficient de corrélation gaussien des fluctuations thermiques.  
 $R(r) = \exp(-r^2/L^2)$ .  
 Dans les chapitres 5 et 6,  $R$  désigne également le coefficient de corrélation des droites de régression linéaire donnant l'évolution du pic de  $\sigma_I^2$ , le contexte évitant toute confusion.
- $\mathcal{R}$  est la fonction de corrélation gaussienne adoptée pour les fluctuations thermiques.  
 $\mathcal{R}(r) = \sqrt{T'^2} \exp(-r^2/L^2)$
- $\mathcal{R}_\epsilon$  est la fonction de corrélation spatiale de  $\epsilon(\vec{x})$ .
- $\vec{S} = \vec{\nabla}\tau$  est le "vecteur lenteur", de composantes  $S_1, S_2$ .
- $t$  est le temps de propagation.
- $\vec{T}'(\vec{K})$  est la transformée de Fourier de  $T'(\vec{x})$ .
- $\vec{T}_i(\vec{K}^i)$  est l'amplitude du mode  $\vec{K}^i$ .
- $T_{rms} = \sqrt{T'^2}$
- $\mathcal{V}^{2/3} = 12^{1/3} < \mu^2 >^{1/3} \pi^{1/6} L^{-1}$ , voir chapitre 5.
- $\vec{x}$  est le vecteur espace (noté également  $\vec{x}^j$  en variable muette).
- $x, y, z$  sont les coordonnées spatiales composantes du vecteur espace  $\vec{x}$ ,  $Ox$  étant l'axe de propagation.  
 La notation  $x_1, x_2, x_3$  est également utilisée au paragraphe 3.2 pour faciliter la présentation des calculs.
- $Z = x/(k_0 L^2)$
- $Z_p = x_p/(k_0 L^2)$  est l'abscisse du pic de  $\sigma_I^2$ .

# Sommaire

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 RESULTATS ANALYTIQUES</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Théorie géométrique . . . . .	4
1.2.1 Généralités . . . . .	4
1.2.2 Exemple : fluctuations de temps de parcours . . . . .	6
1.3 Résolution approchée de l'équation de Helmholtz . . . . .	7
1.4 Equation des moments du champ acoustique . . . . .	8
1.4.1 Généralités . . . . .	8
1.4.2 Exemple : Equation du moment d'ordre 4 . . . . .	10
1.5 Conclusion . . . . .	12
<b>2 SIMULATION NUMERIQUE D'UN CHAMP DE TEMPERA- TURE TURBULENT GAUSSIEN</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Cas d'un milieu 2D . . . . .	13
2.2.1 Fondements théoriques . . . . .	13
2.2.2 Réalisation pratique . . . . .	16
2.2.3 Résultats . . . . .	16
2.3 Milieu 3D . . . . .	19
2.3.1 Fondements théoriques . . . . .	19
2.3.2 Résultats . . . . .	20
2.4 Conclusion . . . . .	20
<b>3 METHODES DE CALCUL</b>	<b>23</b>
3.1 Etablissement de l'équation de Helmholtz . . . . .	23
3.2 Acoustique géométrique . . . . .	24
3.2.1 Construction des rayons . . . . .	24
3.2.2 Liaison avec le champ thermique . . . . .	25
3.3 L'équation parabolique . . . . .	26
3.3.1 Méthode classique . . . . .	26
3.3.2 Résolution par transformée de Fourier rapide . . . . .	28
3.4 Conclusion . . . . .	32

<b>4</b>	<b>ETUDE DE LA PHASE</b>	<b>33</b>
4.1	Introduction . . . . .	33
4.2	Caractérisation du champ à partir d'un rayon . . . . .	34
4.2.1	Méthode . . . . .	34
4.2.2	Etude des fluctuations de temps de parcours . . . . .	34
4.3	Caractérisation du champ à partir d'un front d'onde . . . . .	39
4.3.1	Observation des fronts d'ondes sur une réalisation . . . . .	39
4.3.2	Corrélation de phase . . . . .	40
4.3.3	Localisation de source . . . . .	43
4.3.4	Dislocation de phase . . . . .	44
4.4	Conclusion . . . . .	53
<b>5</b>	<b>ETUDE DE L'INTENSITE 2D</b>	<b>55</b>
5.1	Introduction . . . . .	55
5.2	Observation du champ acoustique sur une réalisation . . . . .	55
5.3	Indice de scintillation . . . . .	59
5.3.1	Evolution de $\sigma_I^2$ en fonction de $\gamma$ . . . . .	59
5.3.2	Etude du pic de $\sigma_I^2$ . . . . .	65
5.4	Densité de probabilité de l'intensité . . . . .	69
5.4.1	Evolution en fonction de $\lambda/L$ . . . . .	69
5.4.2	Modélisation par une loi Gamma généralisée . . . . .	72
5.5	Conclusion . . . . .	75
<b>6</b>	<b>ETUDE DE L'INTENSITE 3D</b>	<b>77</b>
6.1	Introduction . . . . .	77
6.2	Observation du champ acoustique sur une réalisation . . . . .	77
6.3	Indice de scintillation . . . . .	81
6.3.1	Comportement général . . . . .	81
6.3.2	Evolution du pic de $\sigma_I^2$ en fonction de $\gamma$ . . . . .	84
6.4	Conclusion . . . . .	88
	<b>CONCLUSION</b>	<b>89</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>91</b>

## INTRODUCTION

La transmission de signaux à travers des milieux aléatoires interesse de nombreux secteurs de la science et de la technologie : acoustique, optique, radio, astronomie etc ... La propagation du son dans l'atmosphère (bruits générés par la navigation aérienne, détection de phénomènes météorologiques), dans les océans (sonars et imagerie acoustique) constitue un important domaine de recherche. Les principaux objectifs poursuivis sont la prévision des niveaux de bruit engendrés par une source connue, la localisation d'une source de bruit ou l'utilisation de l'onde sonore comme moyen de détection et de transmission d'information. Des études similaires sont réalisées sur la transmission d'ondes radio ou optiques et les retombées de telles recherches débordent donc largement le cadre de l'acoustique.

L'étude de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu inhomogène pose de nombreuses difficultés ; celles-ci sont encore augmentées lorsque les inhomogénéités sont de nature aléatoire. En l'absence d'une théorie permettant de résoudre ce problème dans sa globalité, il est nécessaire de proposer des modèles s'appliquant à des situations particulières.

Ce travail apporte une contribution aux méthodes de simulations numériques dans le cas de la propagation dans un milieu siège de fluctuations de température turbulentes.

Classiquement ce type de problème est abordé par la résolution approchée des équations générales de la mécanique, ce procédé rendant indispensable l'introduction d'hypothèses sur la fonction de corrélation des fluctuations thermiques pour fermer le système.

La démarche adoptée ici repose sur une modélisation originale proposée par Kraichnan [KRAICHNAN 70], Corrsin et Karweit [CORRSIN 72], et développée par Blanc-Benon, Juvé, Karweit et Comte-Bellot [BLANC-BENON 90a] utilisant la superposition de modes de Fourier aléatoires. Le milieu est représenté par un grand nombre de réalisations à travers lesquelles le champ acoustique peut être calculé de façon déterministe. On peut alors accéder à différentes grandeurs statistiques caractérisant le champ perturbé par la turbulence. Cette technique présente l'avantage déterminant de n'imposer aucune contrainte sur la fonction de corrélation des fluctuations de température.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à un bref rappel des méthodes classiques dérivées des différentes possibilités de résolution approchées de l'équation

stochastique de Helmholtz : calcul approché de fluctuations de temps ou de distance à partir des rayons, obtention des différents moments du champ acoustique, dans le cadre de l'approximation parabolique associée à l'hypothèse de delta-corrélation des fluctuations thermiques.

Le second chapitre aborde le processus de génération du champ turbulent thermique par modes de Fourier aléatoires dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Les méthodes de calcul du champ acoustique à travers les réalisations du champ thermique : rayons, équation parabolique, sont décrites au chapitre trois.

L'étude des perturbations créées par le milieu aléatoire simulé sur le champ acoustique commence au chapitre quatre par l'analyse de la phase avec un modèle 2D. Les effets de la turbulence sur le temps de parcours d'un rayon, la perte de cohérence des fronts d'onde et la localisation d'une source sont abordés. Le rapprochement avec des résultats expérimentaux permet de confirmer le rôle important des caustiques.

Le chapitre cinq présente une étude des fluctuations d'intensité basée sur le calcul de leur variance normalisée (indice de scintillation) et de leur densité de probabilité, pour un milieu bidimensionnel. Les résultats obtenus pour la variance sont comparés à des résolutions de l'équation du moment d'ordre quatre disponible dans la littérature.

Le sixième et dernier chapitre étend les calculs de l'indice de scintillation au cas d'un milieu tridimensionnel. Une comparaison avec les résultats obtenus par le modèle 2D permet de tester partiellement la validité de ce dernier.



# Chapitre 1

## RESULTATS ANALYTIQUES

### 1.1 Introduction

La propagation des ondes acoustiques en milieu turbulent s'inscrit dans le cadre plus vaste de la propagation en milieu aléatoire, c'est à dire en milieu inhomogène dans le cas où les inhomogénéités sont de nature non déterministe. Les résultats analytiques que l'on peut trouver dans la littérature sont souvent issus de recherches en optique ou sur les ondes radio.

En effet, les problèmes posés par les communications entre la terre et un véhicule spatial ou un satellite par voie hertzienne ont été la source de nombreux travaux (Tatarski [TATARSKI 71], Chernov [CHERNOV 60], Barabanenkov, Kravtsov, Rytov, Tatarski [BARABANENKOV 71]) développant des méthodes analytiques pour évaluer l'influence des perturbations aléatoires de l'atmosphère sur les ondes radio. L'observation astronomique s'est aussi heurtée très tôt au problème que pose la traversée de l'atmosphère par les signaux optiques.

Toutes ces théories ont le même objectif : résoudre l'équation stochastique de Helmholtz (pour une onde monochromatique) :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0 \quad (1.1)$$

- $n$  est l'indice de réfraction du milieu. Dans notre cas cet indice subit des fluctuations causées par un champ thermique turbulent. Les études que l'on trouve dans la littérature concernent des causes très diverses : champ turbulent cinématique, différences de densité, etc... Il est alors avantageux de regrouper ces phénomènes en raisonnant en terme d'indice ce qui permet de comparer des résultats obtenus pour des phénomènes physiques très différents mais produisant des fluctuations d'indice ayant le même comportement statistique. Les fluctuations de l'indice de réfraction, notées  $n'(x, y, z)$ , sont très faibles en regard de la valeur moyenne égale à 1, soit :

$$n(x, y, z) = 1 + n'(x, y, z) \text{ avec } |n'| \ll 1 \quad (1.2)$$

On utilise également  $\epsilon = n^2 - 1$ .

- $p$  est le champ propagatif, dans notre cas, il s'agit des fluctuations acoustiques de la pression d'un fluide.
- $k_0 = \omega/c_0$  est le nombre d'onde pour une pulsation  $\omega$  et une vitesse de l'onde  $c_0$  (vitesse de phase) lorsque le milieu est au repos.

Les principaux résultats obtenus consistent en des expressions analytiques valables pour de faibles distances de propagation, ou en l'établissement d'équations et de méthodes de calcul adaptées à des cas particuliers comme la propagation de signaux en milieu marin, la propagation de signaux à très hautes fréquences, etc...

## 1.2 Théorie géométrique

### 1.2.1 Généralités

La théorie géométrique (modèle des rayons acoustiques) peut être développée dans le cadre de la propagation en milieu aléatoire en respectant certaines conditions. Afin de faciliter le raisonnement physique le milieu aléatoire peut être schématisé par un milieu homogène dans lequel des zones possédant des propriétés physiques différentes sont distribuées au hasard. Ces dernières peuvent être considérées comme autant d'obstacles du point de vue de la théorie de la diffraction et seront alors caractérisées par leurs dimensions.

Dans le cas particulier d'un champ turbulent ces dimensions seront celles des structures turbulentes données par une ou plusieurs échelles intégrales. En général, le milieu est modélisé par un spectre de von Karmann pour lequel deux paramètres sont requis : l'échelle interne (limite des petites structures) et l'échelle externe (limite des plus grosses structures). Nous simplifions cette modélisation en nous limitant à un milieu gaussien (voir Chapitre 2) pour lequel une seule échelle, que nous noterons  $\mathcal{L}$ , est nécessaire.

L'établissement des équations des rayons sera développée au chapitre 3 pour le cas d'un champ de fluctuations de température turbulent à partir de l'équation de Helmholtz. Nous présentons ici simplement les conditions de validité de ce modèle.

Pour un milieu turbulent d'échelle  $\mathcal{L}$  la première condition à respecter est :

$$\lambda \ll \mathcal{L} \quad (1.3)$$

qui limite le domaine acoustique utilisable aux hautes fréquences. Cependant cette condition n'est pas suffisante pour assurer que les phénomènes de diffraction sont négligeables. En effet, un raisonnement physique simple montre qu'il faut également imposer une limite à la distance de propagation.

Considérons une structure de taille  $\mathcal{L}$  sur laquelle arrive une onde plane : à la distance  $r$  "l'image" ou l'ombre de cette structure possède également une étendue  $\mathcal{L}$ . Ceci n'est possible qu'en négligeant la diffraction, qui produit une déviation angulaire des rayons de l'ordre de  $\lambda/\mathcal{L}$  ce qui correspond à une étendue spatiale de

la zone "polluée" par la diffraction de  $r\lambda/\mathcal{L}$ . Donc pour que la diffraction ait un effet négligeable il faut :

$$r \frac{\lambda}{\mathcal{L}} \ll \mathcal{L} \text{ ou } \sqrt{r\lambda} \ll \mathcal{L} \quad (1.4)$$

Le terme  $\sqrt{r\lambda}$  est l'étendue de la première zone de Fresnel.

Les résultats issus de la théorie géométrique sont donc valables si la distance de propagation est limitée à :

$$r \ll \frac{\mathcal{L}^2}{\lambda} \quad (1.5)$$

Un raisonnement plus rigoureux peut être trouvé dans [TATARSKI 71] et [CHERNOV 60].

Notons que les équations des rayons peuvent être obtenues classiquement en appliquant le principe de Fermat. Soient deux points  $A$  et  $B$  reliés par un chemin  $\sigma$  (abscisse curviligne) dans un milieu caractérisé par une vitesse du son  $c$  ; le trajet du rayon reliant les deux points est celui correspondant au temps de parcours minimal :

$$\int_A^B \frac{d\sigma}{c} = \min \quad (1.6)$$

ce qui peut s'écrire avec l'indice de réfraction :

$$\int_A^B n(x, y, z) d\sigma = \min \quad (1.7)$$

Cette méthode est notamment utilisée par Chernov [CHERNOV 60]. Les indéterminations, dues essentiellement à la difficulté de prendre en compte une grandeur aléatoire, sont levées en faisant plusieurs approximations qui limitent assez sévèrement la portée des résultats.

Tout d'abord, on admet que tout en suivant un chemin aléatoire le rayon reste confiné dans un "couloir" petit au regard de la distance de propagation entre la source et le récepteur. On admet également que les valeurs finales et initiales de l'indice peuvent être prises égales à 1 puisque c'est l'ensemble des valeurs prises par  $n$  le long du trajet qui influence la déviation.

Ces hypothèses permettent d'atteindre analytiquement des caractéristiques statistiques du champ acoustique telles que les variances des déviations latérales des rayons ou la variance du temps de parcours d'une distance fixée. Ce dernier calcul est détaillé ci-dessous, et sera comparé à la simulation dans le chapitre 4.

En poursuivant l'idée d'assimiler la trajectoire d'un rayon à celle d'une marche au hasard perturbée par des obstacles répartis aléatoirement, connaissant les propriétés statistiques du milieu de propagation, il est possible de développer une théorie purement probabiliste [CHERNOV 60]. La propagation des rayons en milieu aléatoire est alors considérée comme un processus stochastique de Markov continu. Le rôle du temps est joué par l'abscisse curviligne  $\sigma$  du rayon.

La densité de probabilité de la position du rayon  $W(\theta, \phi, \sigma)$  ( $\theta$  et  $\phi$  angles polaires) est alors gouvernée par l'équation d'Einstein-Fokker-Kolmogorov :

$$Q \frac{\partial W}{\partial \sigma} = -\frac{\partial A_\theta Q W}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi Q W}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{\theta\theta} Q W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{\phi\phi} Q W}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_{\theta\phi} Q W}{\partial \theta \partial \phi} \quad (1.8)$$

où :

$$Q = \sin\theta, \quad A_\theta = \frac{\overline{\Delta\theta}}{\Delta\sigma}, \quad A_\phi = \frac{\overline{\Delta\phi}}{\Delta\sigma} \quad (1.9)$$

$$B_{\theta\theta} = \frac{\overline{(\Delta\theta)^2}}{\Delta\sigma}, \quad B_{\phi\phi} = \frac{\overline{(\Delta\phi)^2}}{\Delta\sigma}, \quad B_{\theta\phi} = \frac{\overline{\Delta\theta\Delta\phi}}{\Delta\sigma} \quad (1.10)$$

Cette équation permet ensuite, sous certaines approximations, d'obtenir des variances de distances ou d'angles. On peut trouver un développement complet de cette technique dans [CHERNOV 60] (p. 18-34). Notons que toutes ces expressions obtenues analytiquement ont un domaine de validité limité essentiellement par la distance.

### 1.2.2 Exemple : fluctuations de temps de parcours

Chernov [CHERNOV 60] calcule donc le temps de parcours d'un rayon dans un milieu à indice aléatoire  $n(x, y, z)$  en considérant que l'indice ne dépend que de l'abscisse  $x$  (axe de propagation) ; les déviations selon les axes  $y$  et  $z$  sont considérées comme négligeables. En d'autres termes, l'intégration peut être effectuée le long du rayon non perturbé (axe  $x$ ). Il calcule alors le temps de propagation pour une distance  $d$  par :

$$t = \frac{1}{c_0} \int_0^d n(x) dx \quad (1.11)$$

La fluctuation de temps  $\Delta t = t - \bar{t}$  peut alors être reliée à la fonction de corrélation  $\mathcal{R}$  des fluctuations  $T'$  du champ thermique ; pour une turbulence statistiquement homogène et isotrope on obtient :

$$\overline{\Delta t^2} = \frac{2\overline{\mu^2}d}{c_0^2} \int_0^\infty \mathcal{R}(r) dr \quad (1.12)$$

$$\text{où : } \overline{\mu^2} = \frac{\overline{T'^2}}{(2T)^2}$$

Adapté au cas que nous avons traité ; fonction de corrélation gaussienne :

$$\mathcal{R}(r) = \sqrt{\overline{T'^2}} \exp(-r^2/L^2)$$

on obtient :

$$\overline{\Delta t^2} = \overline{\mu^2} \frac{\sqrt{\pi}L}{c_0^2} x \quad (1.13)$$

la variance des temps de parcours varie donc linéairement en fonction de la distance. Nous verrons que cette formule est bien respectée pour les faibles distances de parcours (voir chapitre 4).

## 1.3 Résolution approchée de l'équation de Helmholtz

Pour obtenir une solution approchée deux méthodes sont possibles. La première consiste à développer le champ  $p(\vec{x})$  en série :

$$p(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + p_1(\vec{x}) + p_2(\vec{x}) + \dots \quad (1.14)$$

$p_0(\vec{x})$  est la solution pour un milieu "au repos", alors que  $p_1(\vec{x})$ ,  $p_2(\vec{x})$ , ... sont les contributions résultant des effets des "perturbations" par les inhomogénéités du milieu; on parle alors de développement en série de perturbation. Cette technique est connue sous le nom d'approximation de Born.

L'autre méthode consiste à développer  $p$  sous forme d'une série d'exponentielles :

$$p(\vec{x}) = \exp(\psi_0(\vec{x}) + \psi_1(\vec{x}) + \psi_2(\vec{x}) + \dots) \quad (1.15)$$

$\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi_1(\vec{x}) + \psi_2(\vec{x}) + \dots$  est "l'iconale".

Cette méthode prend en compte des perturbations  $\psi_i(\vec{x})$  de l'iconale plus faibles qu'un développement direct du champ pour la même contribution au champ final, c'est pourquoi on l'appelle méthode des perturbations "douces". Elle est encore plus connue sous le nom de méthode de Rytov. Les solutions développées à partir de l'une de ces deux approches sont généralement obtenues en se limitant aux deux premiers termes .

Dans le cas d'une onde incidente plane la solution de Born en prenant  $p(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + p_1(\vec{x})$  est donnée par :

$$p(\vec{x}) = p_0 e^{ik_0 x} + \frac{k_0^2}{4\pi} \int_{R^3} p_0(\vec{x}') \frac{e^{ik_0 \|\vec{x} - \vec{x}'\|}}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} p_0(\vec{x}') \epsilon(\vec{x}) d^3 \vec{x}' \quad (1.16)$$

Quant au développement de Rytov au premier ordre,  $\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \psi_1(\vec{x})$ , il s'exprime par :

$$p(\vec{x}) = p_0 \exp(\psi_1(\vec{x})) \quad (1.17)$$

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{k_0^2}{4\pi p_0(\vec{x}')} \int_{R^3} \frac{e^{ik_0 \|\vec{x} - \vec{x}'\|}}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} p_0(\vec{x}') \epsilon(\vec{x}) d^3 \vec{x}' \quad (1.18)$$

Les conditions de validité de l'approximation de Rytov sont moins restrictives que celles de Born. Cette dernière revient en effet à imposer au cumul des fluctuations (amplitude et phase) sur tout le trajet de l'onde à rester petit. La solution de Rytov en revanche ne suppose que la faiblesse des fluctuations sur une longueur d'onde. En effet, pour cette dernière méthode on doit résoudre l'équation en  $\psi_1$  :

$$\Delta \psi_1(\vec{x}) + \vec{\nabla} \psi_1(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi_1(\vec{x}) + 2 \vec{\nabla} \psi_1(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \psi_0(\vec{x}) + k_0^2 \epsilon(\vec{x}) = 0 \quad (1.19)$$

On néglige à ce stade le terme non linéaire  $(\vec{\nabla} \psi_1(\vec{x}))^2$  ce qui correspond à la condition  $\lambda \|\vec{\nabla} \psi_1(\vec{x})\| \ll 1$  citée ci-dessus.

Ceci explique que la méthode de Rytov ait donné lieu à des développements permettant l'accès à des paramètres statistiques décrivant la propagation en milieu aléatoire. On peut donc trouver [ISHIMARU 78] des expressions des corrélations des fluctuations de phase et d'amplitude.

## 1.4 Equation des moments du champ acoustique

### 1.4.1 Généralités

Afin d'obtenir des expressions analytiques des différents moments du champ propagé plusieurs approches ont été essayées, soit pour obtenir des expressions analytiques, soit pour aboutir à une équation permettant un traitement numérique simple.

Les méthodes de type Rytov ou Born sont utilisées pour les faibles fluctuations c'est à dire lorsque la partie cohérente du champ est supérieure aux fluctuations. Un critère de validité de ces théories est donné par Ishimaru [ISHIMARU 78] par une condition sur la variance du logarithme de l'amplitude de l'onde  $\sigma_x^2$  :

$$\sigma_x^2 < 0.2 - 0.5 \quad (1.20)$$

Au-delà de cette limite on entre dans le domaine des "fortes fluctuations" : le champ moyen est négligeable et le champ total est presque totalement incohérent. La méthode actuellement la plus utilisée et possédant le plus grand intérêt fondamental est celle basée sur l'équation parabolique.

Nous présentons brièvement cette technique afin de mettre en évidence les hypothèses de départ et les limites de la méthode.

Comme nous le verrons au chapitre 3, sous certaines hypothèses l'équation de Helmholtz (1.1) peut se mettre sous la forme d'une équation parabolique :

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon(\vec{x}) p = 0 \quad (1.21)$$

Outre cette approximation, la principale hypothèse à faire concerne le terme  $\epsilon(\vec{x})$  qui constitue le principal obstacle puisque la fonction  $p(\vec{x})$  cherchée va dépendre de cette fonction aléatoire. La fermeture du problème nécessite donc une modélisation du terme  $\epsilon p$ . Tatarski [TATARSKI 71], [TATARSKI 61] et Ishimaru [ISHIMARU 78] utilisent la procédure suivante :

- $\epsilon(\vec{x})$  est gaussien : il est complètement connu par sa fonction de corrélation  $\mathcal{R}_\epsilon(\vec{x} - \vec{x}') = \langle \epsilon(\vec{x}) \epsilon(\vec{x}') \rangle$
- $\epsilon(\vec{x})$  est delta-corrélé suivant la direction de propagation :  $\langle \epsilon(x, \vec{\rho}) \epsilon(x', \vec{\rho}') \rangle = \delta(x - x') A(\vec{\rho} - \vec{\rho}')$

Les axes sont ceux indiqués par la figure 1.1.

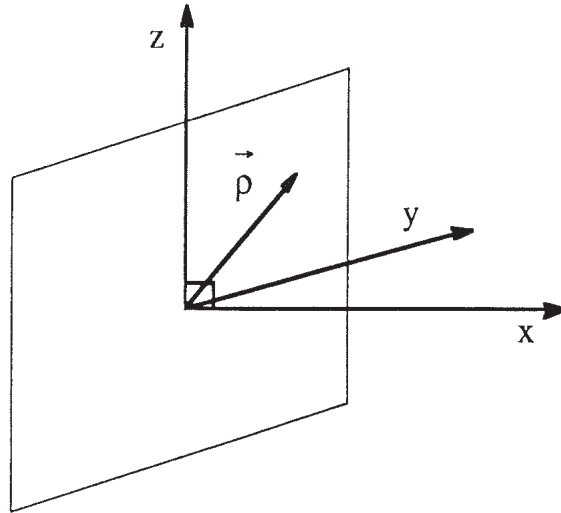


Figure 1.1 : Axes utilisés pour l'étude des moments

Dans le cas d'une turbulence isotrope  $A(\vec{\rho})$  se réduit à une fonction scalaire reliée au spectre des fluctuations  $\Phi_\epsilon$  par :

$$A(\rho) = 4\pi^2 \int_0^\infty K J_0(K\rho) \Phi_\epsilon(K) dK \quad (1.22)$$

En moyennant l'équation (1.21) on obtient :

$$2ik_0 \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial z^2} + k_0^2 \langle \epsilon(\vec{x}) p \rangle = 0 \quad (1.23)$$

On montre que l'hypothèse de delta-corrélation conduit à l'expression :

$$\langle \epsilon(\vec{x}) p \rangle = \frac{ik_0}{4} A(0) \langle p(x, \vec{\rho}) \rangle \quad (1.24)$$

On obtient ainsi une équation du moment d'ordre 1 du champ dont la solution est :

$$\langle p(\vec{x}) \rangle = p_0(\vec{x}) \exp\left(-k_0^2 \frac{A(0)}{8} x\right) \quad (1.25)$$

$p_0$  étant le champ en milieu homogène.

Les mêmes hypothèses permettent d'atteindre le moment d'ordre 2 ou fonction de cohérence, dont nous donnons l'expression :

$$\langle p(x, \vec{\rho}_1) p^*(x, \vec{\rho}_2) \rangle = |p_0|^2 \exp\left\{-\frac{k_0^2}{4} [A(0) - A(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)] x\right\} \quad (1.26)$$

Nous donnons ci-dessous une équation du moment d'ordre 4. Cette dernière n'a pas trouvé de solution analytique générale à l'heure actuelle.

### 1.4.2 Exemple : Equation du moment d'ordre 4

Le moment d'ordre 4 du champ  $p(\vec{x})$  est défini par (voir figure 1.1 pour les définitions des axes) :

$$m(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3) = \langle p(x, \vec{\rho}_1) p^*(x, \vec{\rho}_2) p^*(x, \vec{\rho}_3) p(x, \vec{\rho}_4) \rangle \quad (1.27)$$

Lorsque  $\vec{\rho}_i = \vec{\rho}$ , on voit que  $m$  est relié aux fluctuations d'intensité par :

$$m(x, \vec{\rho}, \vec{\rho}, \vec{\rho}) = \langle I^2(x, \vec{\rho}) \rangle \quad (1.28)$$

qui donne la valeur moyenne du carré des fluctuations d'intensité pour un récepteur placé en  $(x, \vec{\rho})$ .

La grandeur utilisée en pratique est obtenue en normalisant  $m$  pour obtenir la variance des fluctuations d'intensité ou indice de scintillation  $\sigma_I^2$ :

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} \quad (1.29)$$

Cette quantité fournit d'importantes informations lorsque l'on cherche à caractériser le bruit de systèmes de communication par ondes propagatives.

L'équation du moment d'ordre quatre,  $m$ , est remarquable dans le fait qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre lorsqu'on l'exprime en variables adimensionnelles. Dans le cas d'un milieu bidimensionnel et pour une onde incidente plane Spivack et Uscinski [SPIVACK 88] indiquent l'équation (La figure 1.2 indique les variables dans le plan  $(x, y)$ ) :

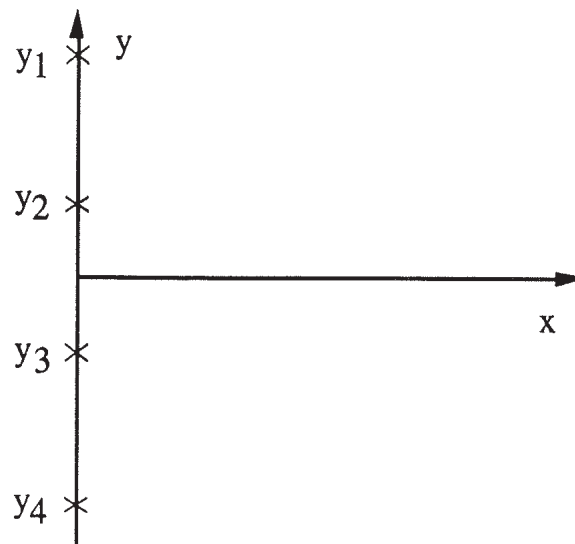


Figure 1.2 : Axes utilisés pour l'équation du moment d'ordre 4 (2D)

$$\frac{\partial m}{\partial Z} = -i \frac{\partial^2 m}{\partial \xi \partial \eta} - 2\gamma [1 - g(\xi, \eta)] m \quad (1.30)$$



où  $\xi$  et  $\eta$  sont des variables adimensionnelles :

$$\begin{cases} \xi &= (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)/2L \\ \eta &= (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)/2L \\ Z &= x/k_0 L^2 \end{cases}$$

$L$  étant le paramètre du coefficient de corrélation du champ thermique :

$$R(r) = \exp(-r^2/L^2)$$

$g$  est relié à  $R$  par la relation :

$$g(\xi, \eta) = 2R(\xi) + 2R(\eta) - R(\xi + \eta) - R(\xi - \eta)$$

On voit que (1.30) ne dépend que du paramètre  $\gamma$  qui a pour expression :

$$\gamma = k_0^3 \overline{\mu^2} L^3 \sqrt{\pi}$$

Le sens physique du paramètre  $\gamma$  s'obtient en l'écrivant sous la forme [USCINSKI 77] :

$$\gamma = \frac{\beta x}{Z} \quad \text{où } \beta = k_0^2 \overline{\mu^2} L \sqrt{\pi}$$

$\beta$  est le coefficient d'atténuation d'énergie par la diffusion, ainsi  $\beta x$  mesure la "quantité" de diffusion qui se produit sur une distance  $x$ .  $Z$  mesure la somme des effets dus à la distance qui se sont cumulés sur une distance totale  $x$ .  $\gamma$  est donc le rapport des effets des diffusions multiples (nombre de structures turbulentes traversées) aux effets de la distance. On peut alors distinguer le cas où  $\gamma$  est petit, le mécanisme prédominant créant des fluctuations d'intensité est la distance, du cas où  $\gamma$  est grand, le mécanisme prédominant étant la diffusion multiple.

Spivack et Uscinski ainsi que Tur ([TUR 82a], [TUR 82b]) ont résolu cette équation dans une situation que nous avons facilement pu reproduire par une simulation numérique à savoir une onde incidente plane et un milieu bidimensionnel. En particulier Spivack et Uscinski [SPIVACK 88] ont obtenu des résultats pour une très grande plage de variation de  $\gamma$  (50 à 100 000). Leur méthode de résolution consiste à se ramener à une équation différentielle ordinaire en passant dans l'espace de Fourier. Ensuite, ils procèdent de façon analogue à la méthode "split step" utilisée pour l'équation parabolique (voir chapitre 3). Notons également que ces deux auteurs obtiennent une parfaite adéquation de leurs résultats numériques avec ceux donnés par une expression analytique synthétisant le travail de nombreux auteurs. Leur approche semble donc très bien adaptée dans ce cas précis pour calculer  $\sigma_I^2$ .

On peut trouver des développements complets sur l'obtention de l'équation (1.30) dans [USCINSKI 77] ainsi que dans [SHISHOV 72]. D'autres techniques ont été développées pour résoudre cette équation, la méthode des "écrans de phase" ([KNEPP 83], [USCINSKI 85]) se rapproche de celle que nous avons adoptée. Elle consiste à découpler les variations de phase des variations d'amplitude. Les variations de phase sont créées par une simulation numérique de fluctuations aléatoires de phase. On peut trouver une étude de cette technique par Martin et Flatté ([MARTIN 88] et [MARTIN 90]) pour une onde sphérique dans un espace tridimensionnel et pour un signal optique.

## 1.5 Conclusion

Les méthodes analytiques de type Rytov ou encore celles basées sur les rayons sont en général suffisantes tant que la distance ou les fluctuations du milieu sont faibles. Elles nous seront utiles pour valider nos calculs. Les résultats basés sur les équations des moments ne sont en revanche limités que par l'hypothèse de delta corrélation. En particulier l'équation du moment d'ordre quatre a été résolue numériquement et analytiquement pour une très grande plage de variation des paramètres du champ acoustique et du champ thermique ; une comparaison très large avec la simulation est donc possible.

# Chapitre 2

## SIMULATION NUMERIQUE D'UN CHAMP DE TEMPERATURE TURBULENT GAUSSIEN

### 2.1 Introduction

La simulation d'un champ de température turbulent par modes de Fourier aléatoires présente de nombreux avantages pour l'étude de la propagation des ondes acoustiques. Nous verrons en effet que la souplesse de la méthode permet facilement son adaptation à différents procédés de calcul de propagation. En outre, aucune condition n'est imposée a priori sur les interactions entre le champ thermique et le champ acoustique, comme c'est nécessairement le cas si l'on utilise une théorie statistique. On peut donc choisir librement l'intensité de la turbulence ainsi que les autres paramètres qui la définissent.

### 2.2 Cas d'un milieu 2D

#### 2.2.1 Fondements théoriques

Cette modélisation de la turbulence a été proposée par Kraichnan [KRAICHNAN 70], Corrsin et Karweit [CORRSIN 72], et développée par Blanc-Benon, Juvé, Karweit et Comte-Bellot [BLANC-BENON 90a].

Partant du fait que l'on peut représenter la partie turbulente du champ de température  $T'(\vec{x})$  sous forme de transformée de Fourier dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope :

$$T'(\vec{x}) = \int_{R^2} \tilde{T}'(\vec{K}) e^{j\vec{K} \cdot \vec{x}} d\vec{K} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{T}'(\vec{K})$  est la transformée de Fourier de  $T'(\vec{x})$ ,  $\vec{K}$  étant le vecteur d'onde.

Pour simuler un champ homogène et isotrope on choisit de discrétiser l'intégrale de Fourier de la façon suivante :

$$T'(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \tilde{T}_i(K^i) \cos(\vec{K}^i \cdot \vec{x} + \varphi^i) \quad (2.2)$$

$n$  étant le nombre de modes.

Cette dernière expression met en évidence les différents paramètres à régler afin d'obtenir une bonne représentation numérique du type de turbulence désiré. Ces paramètres sont :

- l'orientation des modes  $\vec{K}^i$  dans l'espace de Fourier. Dans le cas particulier qui nous préoccupe, un champ scalaire 2D, un seul angle  $\vartheta^i$  suffit si on le définit par  $\vartheta^i = (\vec{K}^i, Ox)$
- le déphasage de chaque mode  $\varphi^i$
- les amplitudes des modes  $\tilde{T}_i(K^i)$
- le nombre de modes et leur répartition dans un intervalle judicieusement choisi.

L'angle  $\vartheta^i$  assure l'isotropie statistique (invariance par rotation) du champ généré si l'on tire ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  de façon équiprobable. Le déphasage  $\varphi^i$  est obtenu dans les mêmes conditions pour assurer l'homogénéité statistique (invariance par translation). La figure 2.1 montre la disposition de ces angles.

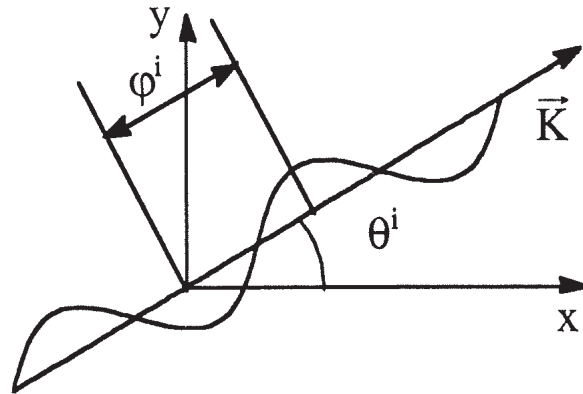


Figure 2.1 : Angles des modes, milieu bidimensionnel

Pour le calcul du produit scalaire on admet que l'on peut superposer l'espace spectral et l'espace physique. Les autres paramètres obéissent à un choix déterministe :

- $\|\vec{K}^i\|$  est constant ainsi que le nombre de modes.
- les amplitudes  $\tilde{T}_i$  sont liées aux choix d'une fonction de corrélation particulière par le biais du spectre correspondant.

- les modes sont répartis selon un espacement constant ce qui est bien adapté à un spectre gaussien. Pour un spectre en puissance une progression logarithmique est nécessaire.

La fonction de corrélation  $\mathcal{R}$  imposée est donnée par :

$$\overline{T'(\vec{x})T'(\vec{x} + \vec{r})} = \sqrt{\overline{T'^2}} e^{-r^2/L^2}$$

$L$  étant une constante.  $\mathcal{R}$  ne dépend que de la distance  $r$  puisqu'on veut "fabriquer" une turbulence homogène et isotrope.

L'échelle intégrale unique associée est alors :

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty e^{-r^2/L^2} dr = \frac{L\sqrt{\pi}}{2}$$

Notons que  $\mathcal{L} \approx 0,886L$ , le paramètre  $L$  et l'échelle intégrale  $\mathcal{L}$  sont donc très proches ce qui explique que pour la suite nous confondons parfois ces deux grandeurs.

On montre que la valeur moyenne du carré des fluctuations de température peut s'exprimer en fonction d'un spectre calculé à partir de la fonction de corrélation :

$$\overline{T'^2} = \int_0^\infty G(K) dK \quad (2.3)$$

où :

$$G(K) = \frac{KL^2}{2} \exp\left(-\frac{K^2L^2}{4}\right)$$

L'allure du spectre est donnée par la figure 2.2

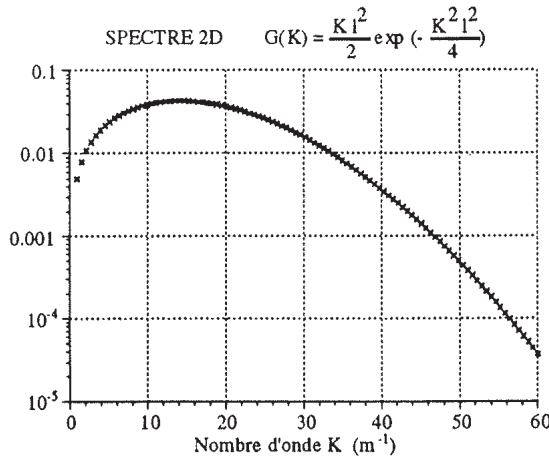


Figure 2.2 : Spectre 2D pour une fonction de corrélation gaussienne

Les amplitudes des modes sont obtenues en discrétisant (2.3) :

$$\overline{T'^2} = \sum_{i=1}^n G(K^i) \Delta K^i$$

pour  $n$  modes. Pour un seul mode, on obtient l'amplitude :

$$\tilde{T}_i = \sqrt{G(K^i) \Delta K^i}$$

Afin de représenter correctement le spectre  $G(K)$ , il faut choisir judicieusement  $L$ ,  $K^1$  et  $K^n$  tout en minimisant le temps de calcul.

## 2.2.2 Réalisation pratique

L'algorithme général a la forme suivante :

```

Initialisation du générateur de nombres aléatoires
Pour chaque réalisation
    génération des angles  $\vartheta^i$  et  $\varphi^i$  et normalisation
    pour chaque position  $\vec{x}$ 
        calcul de  $T(\vec{x})$ 
    fin
fin
  
```

$\vartheta^i$  et  $\varphi^i$  sont produits par un algorithme générant des nombres aléatoires [PRESS 86] répartis uniformément dans  $[0, 1]$ . L'initialisation permet d'avoir toujours la même séquence de réalisations ce qui est indispensable pour pouvoir comparer des grandeurs acoustiques différentes mais ayant traversé le même champ thermique. La normalisation fixe la valeur quadratique moyenne des fluctuations de température qui est choisie par l'utilisateur.

Les paramètres à fournir sont donc :

- $L$  qui fixe l'échelle intégrale
- $\sqrt{T'^2}$  valeur quadratique moyenne des fluctuations de température
- $n$  le nombre de modes
- $K^1$  et  $K^n$  valeurs minimale et maximale des nombres d'onde  $K^i$  ( $\Delta K^i$  est constant)

## 2.2.3 Résultats

La figure 2.3 montre une réalisation du champ de température.

L'évolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de modes et du nombre de réalisations permet de déterminer les valeurs assurant l'indépendance du calcul vis à vis du nombre de réalisations.

La figure 2.5 montre la fonction de corrélation obtenue après 5000 réalisations comparée à la gaussienne souhaitée ; la différence entre les deux courbes est négligeable. On observe simplement une légère remontée pour la simulation vers  $0.3 L$  qui peut-être produite par une influence des faibles nombres d'ondes.

A partir de la fonction de corrélation on a calculé la valeur de l'échelle intégrale et tracé son évolution en fonction du nombre de réalisations. Nous avons également fait varier le nombre de modes. Les essais effectués montrent que 50 modes semblent suffisants, alors que 5000 réalisations sont nécessaires pour retrouver la valeur de l'échelle intégrale prévue par le calcul.

En pratique, dès 2000 réalisations le résultat est satisfaisant (figure 2.6). Afin de réduire le nombre de réalisations, très coûteux en temps de calcul, nous avons utilisé

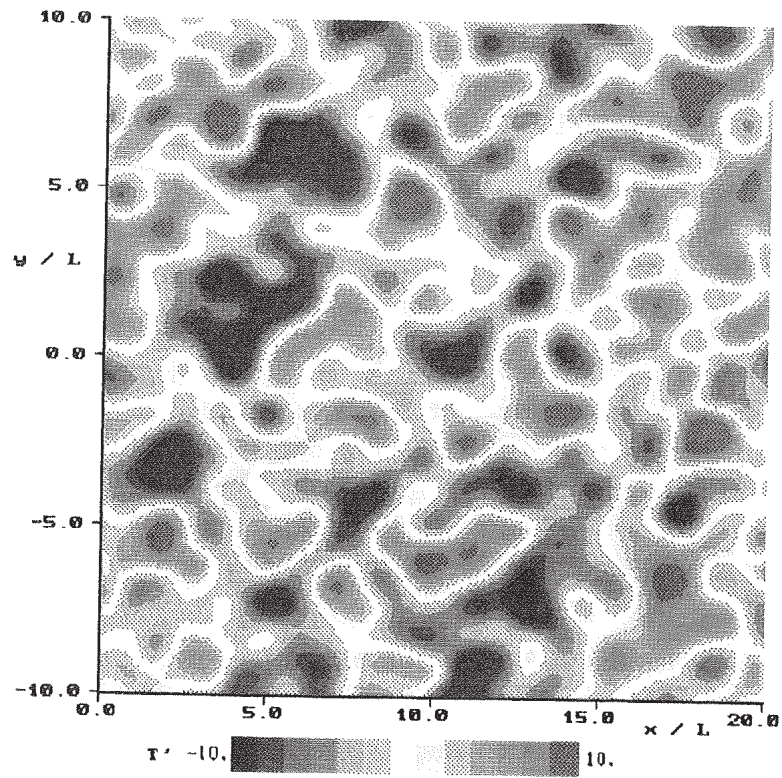


Figure 2.3 : Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 2D

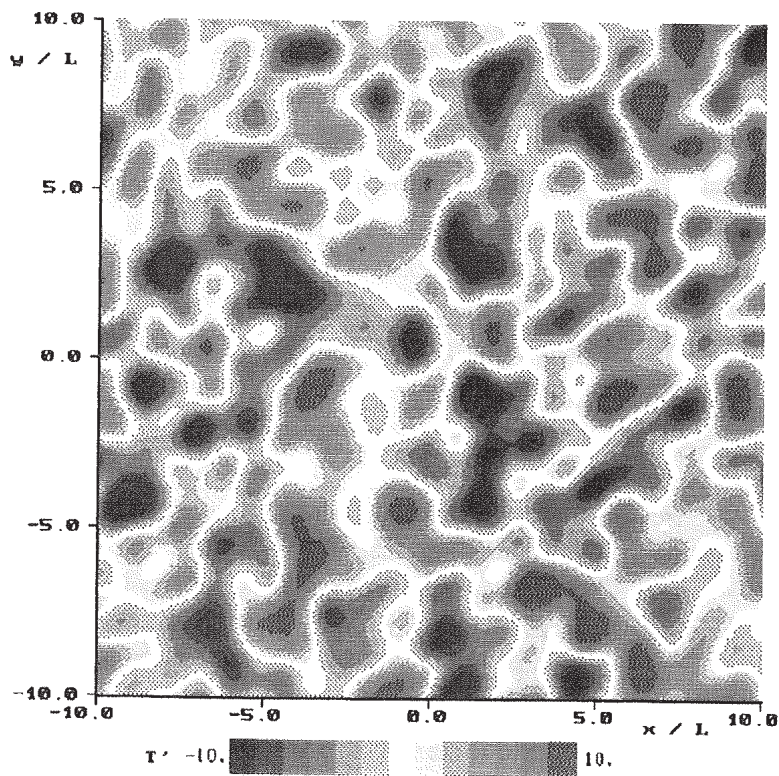


Figure 2.4 : Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 3D

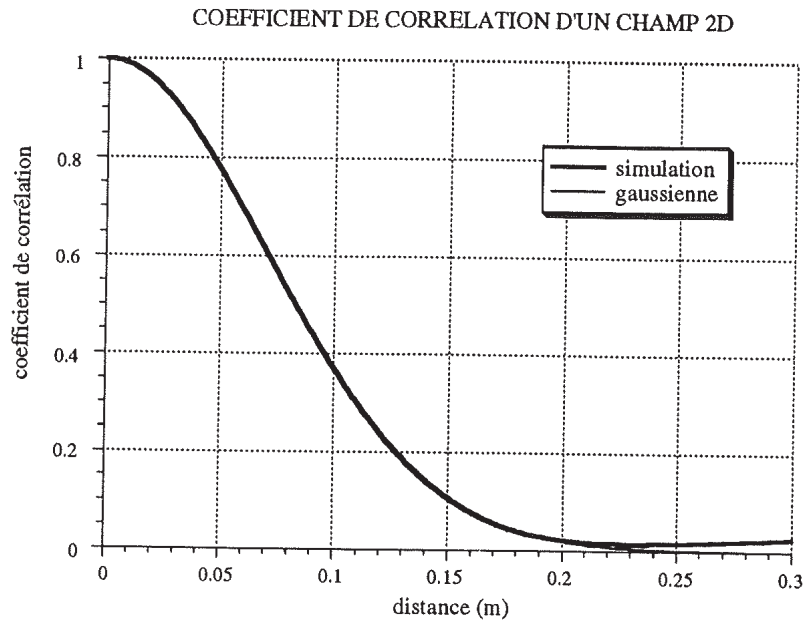


Figure 2.5 : Fonction de corrélation pour un champ 2D

en plus de la moyenne sur les réalisations des moyennes spatiales en changeant l'origine (décalage de  $3L$  environ pour assurer l'indépendance statistique). Cette méthode donne de bons résultats et permet ainsi d'abaisser le nombre de réalisations à 500 (figure 2.7) pour 10 moyennes spatiales par réalisation. Cette technique sera donc souvent employée.

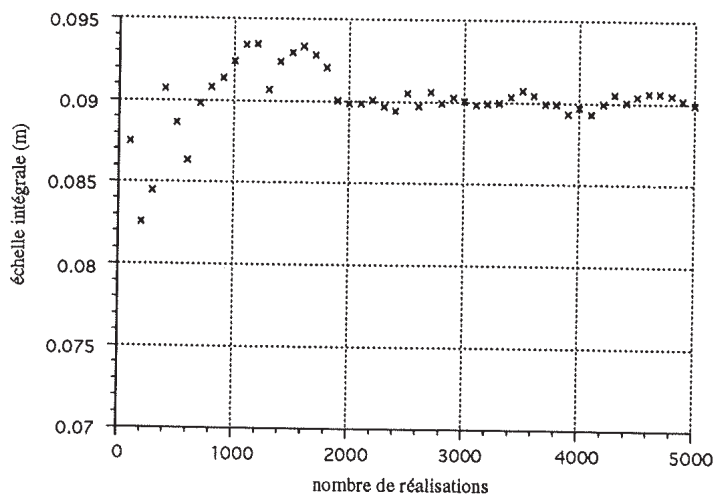


Figure 2.6 : Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations

Cette validation directe sur le champ de température s'est toutefois révélée en partie insuffisante pour le calcul de certaines grandeurs acoustiques comme la variance d'intensité  $\sigma_I^2$  (Voir Chapitre 1 et 5). L'étude qui précède donne de bons ordres de grandeur mais il s'avère nécessaire d'augmenter le nombre de modes à 100. Divers essais ont montré que ces 100 modes doivent être répartis en fonction de  $L$  selon



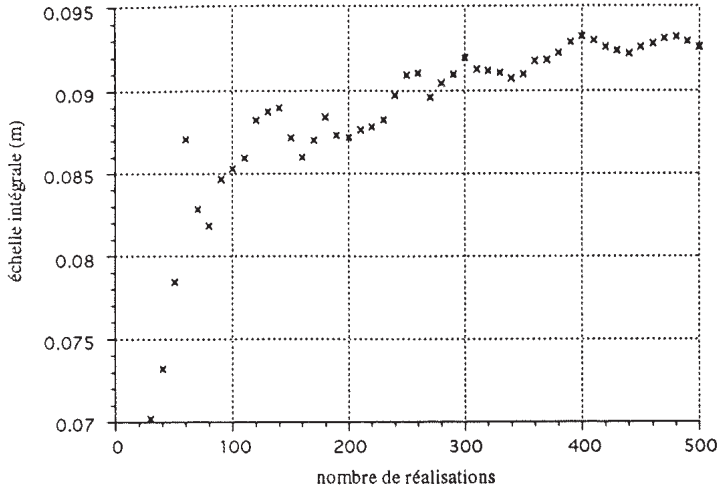


Figure 2.7 : Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations avec moyenne spatiale

$$K^1 = 0.1/L \text{ et } K^{100} = 60/L.$$

Notons également que des études analytiques basées sur des approximations valables pour des faibles distances de propagation (méthode de Rytov) indiquent que l'influence du spectre est différente pour la phase et l'intensité, la phase étant plus sensible aux faibles nombres d'onde [ISHIMARU 78]. L'amplitude étant plus sensible aux grands nombres d'onde, ce qui conduit à considérer une échelle jusqu'à des valeurs de  $K^i$  où le champ aléatoire porte peu d'énergie.

On ne peut cependant pas réduire  $K^1$  sans rencontrer des problèmes statistiques. En effet, si une grande valeur de  $K^n$  correspond à des petites structures turbulentes c'est-à-dire à un évènement fréquent sur une réalisation, en revanche les petits  $K^i$  correspondent à de grosses échelles spatiales donc, le domaine de calcul étant limité, à une perturbation "globale" du champ. Ces accidents peuvent modifier une réalisation suffisamment pour augmenter inutilement le nombre de moyennes nécessaires à la stabilisation alors même que les échelles en jeu sont peu réalistes. Il convient donc de limiter la partie basse du spectre pour éviter des réalisations "exceptionnelles".

## 2.3 Milieu 3D

### 2.3.1 Fondements théoriques

Avec les mêmes hypothèses qu'en 2D on remplace :

$$T'(\vec{x}) = \int_{R^3} \tilde{T}'(\vec{K}) e^{j\vec{K} \cdot \vec{x}} d\vec{K}$$

par

$$T'(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \tilde{T}^i(K_i) \cos(\vec{K}^i \cdot \vec{x} + \varphi^i)$$

les changements interviennent au niveau du produit scalaire  $\vec{K}^i \cdot \vec{x}$  et de l'amplitude  $\tilde{T}^i$  le spectre étant modifié car il faut deux angles  $\vartheta^i$  et  $\alpha^i$  pour repérer le vecteur  $\vec{K}^i$  dans l'espace spectral (figure 2.8) ainsi que pour le calcul du spectre et donc  $\tilde{T}^i$ .

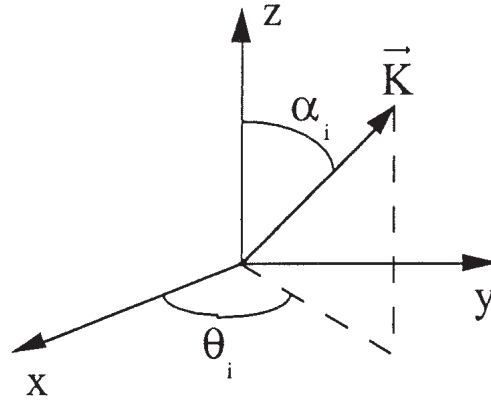


Figure 2.8 : Angles des modes, milieu tridimensionnel

Il reste à calculer les densités de probabilité  $p(\alpha^i)$  et  $p(\vartheta^i)$  des angles  $\alpha^i$  et  $\vartheta^i$ . Pour assurer l'isotropie on montre qu'il faut utiliser  $p(\vartheta^i) = 1/2\pi$  pour  $\vartheta^i$  appartenant à  $[0, 2\pi]$ . Quant à  $p(\alpha^i)$ , le module de  $\vec{K}^i$  variant de 0 à  $K^i$  on aura une densité de probabilité pour  $\alpha^i$  égale à  $K^i \sin \alpha^i / K^i = \sin \alpha^i$  pour  $\alpha^i$  décrivant  $[0, \pi/2]$ , pour  $\alpha^i$  décrivant  $[0, \pi]$ , on obtient finalement :

$$p(\alpha^i) = \frac{\sin \alpha^i}{2}$$

On montre que le spectre s'écrit :

$$G(K) = \frac{K^2 L^3}{4} \exp\left(-\frac{K^2 L^2}{4}\right) \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Résultats

Le champ obtenu se comporte comme le champ 2D. Les mêmes essais sur la fonction de corrélation ont été conduits et produisent des résultats ne montrant pas de différences significatives. En particulier le nombre de modes, leur répartition ainsi que le nombre de réalisations nécessaires sont les mêmes comme le montrent les figures 2.4, 2.9, 2.10, 2.11.

## 2.4 Conclusion

Pour cette étude, les caractéristiques de la turbulence ont été volontairement restreintes au cas d'une corrélation gaussienne, afin de faciliter les comparaisons avec des expressions analytiques disponibles dans la littérature pour ce cas particulier.

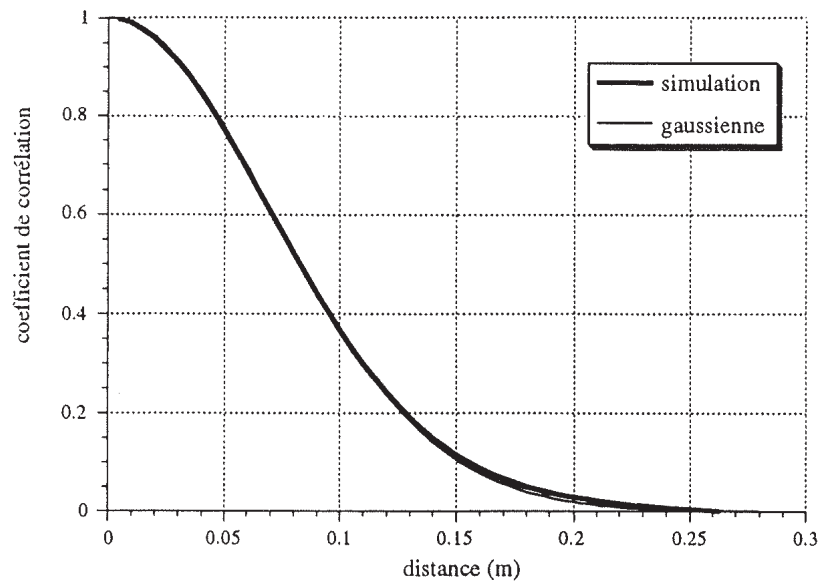


Figure 2.9 : Fonction de corrélation pour un champ thermique 3D

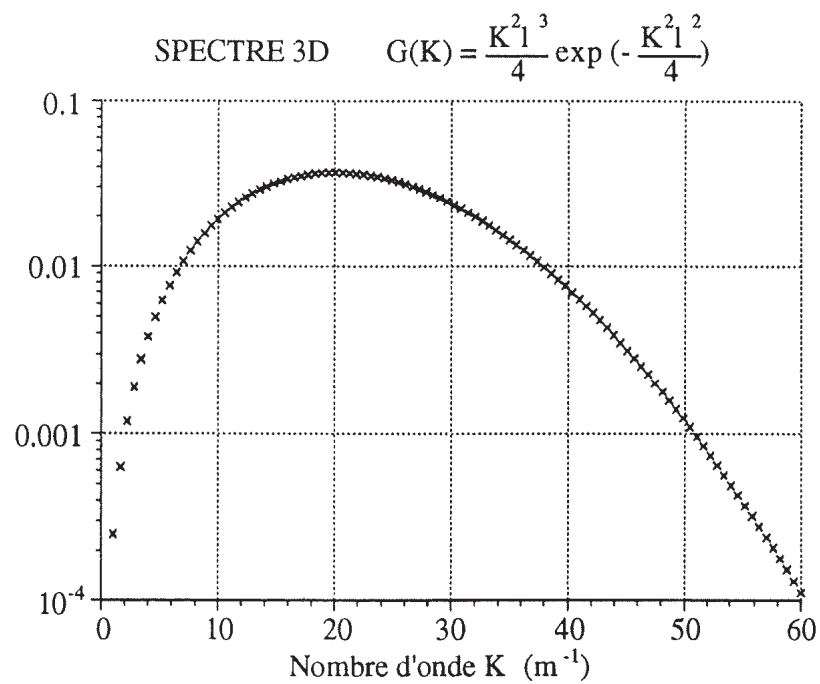


Figure 2.10 : Spectre 3D pour une fonction de corrélation gaussienne

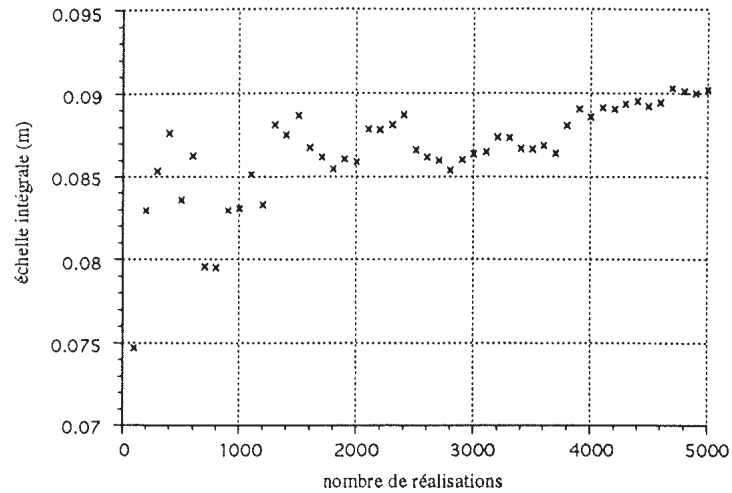


Figure 2.11 : Evolution de l'échelle intégrale en fonction du nombre de réalisations

La méthode peut sans difficulté s'adapter à des configurations plus complexes telles qu'une turbulence cinématique ou mixte, une superposition avec des inhomogénéités de nature déterministe (profil de célérité de la vitesse du son par exemple) et bien sûr un spectre plus proche des conditions réelles (spectre de Von Karmann).

Cette méthode permet d'obtenir un champ turbulent "gelé" dans lequel nous pourrions propager le champ acoustique de manière déterministe.

# Chapitre 3

## METHODES DE CALCUL

### 3.1 Etablissement de l'équation de Helmholtz

Dans le cas d'un milieu inhomogène au repos, l'équation des ondes (linéarisée) s'écrit rigoureusement :

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} p' = 0 \quad (3.1)$$

Par rapport à l'équation de Helmholtz classique on a un terme supplémentaire de couplage entre les gradients de masse volumique  $\vec{\nabla} \rho(\vec{x})$  et de fluctuations acoustiques de pression  $\vec{\nabla} p'$ . Cette équation peut se réduire à l'équation des ondes avec une célérité variable dans deux cas :

- les gaz (parfaits)
- les liquides (eau)

Une analyse des ordres de grandeurs des différents termes de l'équation (3.1) montre que le dernier terme est de l'ordre de :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{p'}{\lambda \mathcal{L}_\rho} \quad (3.2)$$

$\mathcal{L}_\rho$  étant l'échelle caractéristique des gradients de masse volumique.

On montre que pour l'air (considéré comme un gaz parfait)  $\Delta \rho / \rho$  est du même ordre que  $\Delta c / c$ , il n'y a donc pas de simplification possible sauf si  $\lambda \ll \mathcal{L}_\rho$  c'est à dire en hautes fréquences. A titre indicatif pour l'air  $\mathcal{L}_\rho \approx 10 \text{ m}$  et à partir d'une fréquence de 1 kHz on est sûr de pouvoir supprimer le terme de masse volumique. Dans le cas de l'eau de mer une fréquence supérieure à 10 Hz suffit.

Les calculs que nous avons effectués respectent toujours ces valeurs c'est pourquoi l'équation de départ est l'équation de Helmholtz avec une célérité variable :

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

La liaison avec le champ thermique se fait par la vitesse du son  $c(\vec{x})$  ; nous nous plaçons dans le cas d'un fluide parfait où  $c^2 = c_0^2(1 + \frac{T'}{\bar{T}})$ . On obtient donc l'équation :

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{1}{1 + \frac{T'}{\bar{T}}} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

les fluctuations  $T'$  étant faibles par rapport à la température moyenne  $\bar{T}$  on peut simplifier :

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{T'}{\bar{T}}\right) \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Dans le cas d'une onde monochromatique, on a  $p' = \text{Re}[p(\vec{r})e^{-i\omega t}]$  et  $k_0 = \omega/c_0$ , d'où :

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)p = 0 \quad (3.6)$$

## 3.2 Acoustique géométrique

Partant de l'équation de Helmholtz établie précédemment, on se place dans le cas de l'approximation des milieux faiblement inhomogènes. On pose  $p(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x})e^{i\Pi(\vec{x})}$  où  $\mathcal{A}$  varie lentement sur l'échelle d'une longueur d'onde  $\lambda$ ,  $\lambda$  étant très inférieure à la taille caractéristique des inhomogénéités.

Par analogie avec le cas du milieu homogène, on pose  $\vec{\nabla}\Pi(\vec{x}) = \vec{K}(\vec{x})$  et on suppose que  $\vec{K}(\vec{x})$  varie lentement sur  $\lambda$ . De même, on fait apparaître la fréquence en posant  $\Pi(\vec{x}) = \omega\tau(\vec{x})$ . ( $\tau(\vec{x}) = \text{constante}$  est l'équation des surfaces équiphases ou fronts d'onde)

On obtient l'équation exacte suivante :

$$\Delta\mathcal{A} + i\omega(\mathcal{A}\Delta\tau + 2\vec{\nabla}\mathcal{A}\cdot\vec{\nabla}\tau) + \mathcal{A}\omega^2\left[\frac{1}{c^2} - (\vec{\nabla}\tau)^2\right] = 0 \quad (3.7)$$

L'approximation consiste à faire un développement asymptotique de  $\mathcal{A}$ , il sera valable pour  $\omega \rightarrow \infty$  ce qui revient à  $\lambda \rightarrow 0$ , en identifiant les puissances de deux de  $\omega$  on obtient l'équation iconale :

$$(\vec{\nabla}\tau)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (3.8)$$

### 3.2.1 Construction des rayons

On peut montrer que l'équation iconale équivaut au système :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c \frac{\vec{S}}{S} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla}c \quad (3.10)$$

où  $\vec{S} = \vec{\nabla}\tau$  est le "vecteur lenteur".

En effet :

$$\frac{d\mathcal{S}_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$

or,

$$\frac{dx_j}{dt} = c \frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}}$$

l'équation iconale indique que :

$$\mathcal{S} = \|\vec{\mathcal{S}}\| = \frac{1}{c}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = c^2 \mathcal{S}_j$$

donc

$$\frac{d\mathcal{S}_i}{dt} = c^2 \mathcal{S}_j \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial x_j}$$

or

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\nabla} \tau \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{S}} = 0$$

donc

$$\frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathcal{S}_j}{\partial x_i}$$

d'où

$$\frac{dx_j}{dt} = c^2 \mathcal{S}_j \frac{\partial \mathcal{S}_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial \mathcal{S}_j^2}{\partial x_i}$$

d'où

$$\frac{d\vec{\mathcal{S}}}{dt} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} c$$

Ces équations montrent que la réfraction qui modifie le trajet des rayons est provoquée par des gradients de vitesse du son. Il reste donc à relier la vitesse du son au champ de fluctuations thermiques pour pouvoir résoudre le système (3.9) et (3.10).

### 3.2.2 Liaison avec le champ thermique

Si l'on écrit la vitesse du son en fonction des fluctuations thermiques :

$$c^2 = c_0^2 \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right)$$

on obtient alors le système :

$$\frac{dx_i}{dt} = c_0^2 \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right) \mathcal{S}_i \quad (3.11)$$

$$\frac{d\mathcal{S}_i}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T'}{\bar{T}}}} \frac{\partial \left( \sqrt{1 + \frac{T'}{\bar{T}}} \right)}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

On voit apparaître les dérivées spatiales du champ thermique, leur évaluation nécessite a priori un calcul numérique de type différences finies. Un des avantages de la méthode de génération du champ turbulent par modes de Fourier aléatoires apparaît ici, puisque à partir de la somme définissant analytiquement le champ  $T'(\vec{x})$  (voir chapitre 2), on obtient facilement et de manière analytique les dérivées spatiales de  $T'(\vec{x})$ . Cela procure ainsi un gain en précision de calcul.

Le système final à résoudre est donc :

$$\frac{dx_1}{dt} = c_0^2 \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right) \mathcal{S}_1 \quad (3.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = c_0^2 \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right) \mathcal{S}_2 \quad (3.14)$$

$$\frac{d\mathcal{S}_1}{dt} = -\frac{1}{2\bar{T} \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right)} \frac{\partial T'}{\partial x_1} \quad (3.15)$$

$$\frac{d\mathcal{S}_2}{dt} = -\frac{1}{2\bar{T} \left( 1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right)} \frac{\partial T'}{\partial x_2} \quad (3.16)$$

Les conditions initiales sont d'une part la donnée de la position initiale du rayon  $(x_1, x_2)$ , d'autre part la donnée du vecteur lenteur initial  $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ . Le vecteur lenteur initial donne en fait l'angle de tir du rayon depuis sa position initiale.

On réalise une "source sphérique" en conservant la même position initiale pour chaque rayon et en faisant varier l'angle sur une plage déterminée. Pour une onde plane, il suffit de faire varier  $x_2(t=0)$  pour tous les rayons. L'algorithme de calcul suit le trajet de chaque rayon, le domaine de propagation étant supposé infini, aucun traitement de conditions limites n'est effectué.

Ce système est résolu par un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 ([PRESS 86]), la seule contrainte étant le choix du pas de temps,  $dt$ . Ce dernier est construit à partir de la vitesse du son  $c_0$  correspondant à un milieu où  $T = \bar{T}$  d'une part, du nombre d'onde  $K^n$  correspondant au mode d'ordre le plus élevé pour le spectre du champ thermique turbulent d'autre part. On a donc :

$$\Delta t < \frac{1}{c_0 K^n}$$

Des études précédentes de Blanc-Benon, Comte-Bellot, Juvé, Karweit ([KARWEIT 91] et [BLANC-BENON 90a]) ont montré que la valeur  $1/(c_0 K^n)$  était optimale : une valeur inférieure n'apporte pas plus de précision tout en augmentant le temps de calcul.

### 3.3 L'équation parabolique

#### 3.3.1 Méthode classique

Cette première approche nous permettra de justifier par des considérations physiques l'usage d'une telle équation simplifiée.



Considérons l'équation de Helmholtz (3.6) établie précédemment dans le cas d'une onde monochromatique :

$$\Delta p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 \quad (3.17)$$

Elle s'écrit également sous la forme :

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = 0 \quad (3.18)$$

où  $n = c_0/c$  est l'indice de réfraction du milieu

Il s'agit d'une équation de type elliptique, le champ en un point dépend de la valeur du champ dans tout l'espace ; une résolution numérique par une méthode simple n'est pas envisageable. Cette difficulté a été résolue par Tappert [TAPPERT 79] en opérant une transformation en équation parabolique moyennant quelques hypothèses restrictives. Ainsi on peut utiliser une méthode de type "pas à pas" (différences finies par exemple)

1. On pose  $p(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})\Psi(\vec{x})$
2. Il est nécessaire de choisir une direction privilégiée de propagation de l'onde. Prenons pour celle-ci l'axe  $Ox$  ; c'est  $\Phi$  qui va porter cette information on aura donc  $\Phi(\vec{x}) = \Phi(x)$
3. On pose  $\Phi(x) = e^{ik_0x}$
4.  $\Psi$  est une fonction à variations lentes sur  $\lambda$

L'équation de Helmholtz devient alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k_0^2(n^2 - 1)\Psi = 0 \quad (3.19)$$

Une analyse des ordres de grandeurs des différents termes va nous permettre de négliger certains d'entre eux. Les échelles de variation des différentes grandeurs selon  $x$  et  $y$  sont respectivement  $\mathcal{L}_x$  et  $\lambda$ , avec la relation  $\mathcal{L}_x \gg \lambda$ . On a les ordres de grandeur suivants :

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) &= \frac{\Psi}{\mathcal{L}_x^2} \\ O\left(2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) &= \frac{\Psi}{\lambda \mathcal{L}_x} \\ O(k_0^2(n^2 - 1)\Psi) &= \frac{\Psi}{\lambda^2} \\ O\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) &= \frac{\Psi}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Le terme  $\partial^2\Psi/\partial x^2$  est négligeable devant les autres. On obtient donc l'équation parabolique suivante :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{ik_0}{2}(n^2 - 1)\Psi = 0 \quad (3.20)$$

La variable  $x$  joue un rôle analogue à celui du temps dans l'équation de diffusion de la chaleur et transporte ainsi l'information dans un seul sens ; les simplifications ont consisté à négliger toutes les rétrodiffusions et à se limiter à la diffusion sous de faibles angles ( $\pm 15^\circ$  selon l'axe  $x$ ).

Cette équation peut être discrétisée directement afin de la résoudre par un schéma classique de différences finies. Nous exposons ci-dessous une méthode plus efficace.

### 3.3.2 Résolution par transformée de Fourier rapide

Nous avons préféré à une méthode de différences finies un algorithme utilisant la transformée de Fourier rapide ([PRESS 86]) qui permet de minimiser les temps de calcul.

Thomson et Chapman ont développé un processus particulièrement performant tant en ce qui concerne la vitesse de calcul que la précision des résultats [THOMSON 83]. L'amélioration porte en particulier sur l'augmentation de l'angle de propagation d'où le nom d'"équation parabolique grand angle".

Partant de l'équation de Helmholtz (3.18) du paragraphe (3.3.1) on procède à une approximation des opérateurs différentiels. Pour cela, on adopte la notation symbolique suivante :

$$P = \partial/\partial x \quad (3.21)$$

$$Q = [n^2 + k_0^{-2}(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)]^{1/2} \quad (3.22)$$

On peut alors écrire (3.20) sous la forme :

$$(P^2 + k_0^2 Q^2)p = 0 \quad (3.23)$$

que l'on factorise ainsi:

$$(P + k_0 Q)(P - k_0 Q)p + ik_0 [P, Q]p = 0 \quad (3.24)$$

A ce stade, on procède à deux simplifications :

- le commutateur  $[P, Q] = PQ - QP$  est considéré comme nul, ce qui n'est rigoureusement vrai que pour un milieu stratifié.
- On ne prend en compte que l'onde se propageant vers les  $x > 0$  puisque nous considérons un milieu infini sans réflexion possible, par conséquent seul l'opérateur  $(P - k_0 Q)$  nous intéresse.

On doit donc finalement résoudre :

$$Pp = ik_0 Qp \quad (3.25)$$

qui est une équation de type parabolique.

La difficulté est reportée dans le choix d'une bonne approximation de la racine carrée de l'opérateur  $Q = (n^2 + k_0^2 \partial^2 / \partial z^2)^{1/2}$ . Thomson et Chapman proposent pour  $Q$  l'expression :

$$Q = (1 + \varpi)^{1/2} + [(1 + \epsilon)^{1/2} - 1] \quad (3.26)$$

où

$$\epsilon = n^2 - 1 \quad (3.27)$$

$$\varpi = k_0^{-2} (\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) \quad (3.28)$$

En adoptant le changement de variable :

$$p = \Psi e^{ik_0 x} \quad (3.29)$$

On obtient l'équation :

$$P\Psi = ik_0(Q - 1)\Psi \quad (3.30)$$

On modifie l'écriture de  $Q$  en utilisant l'identité :

$$(1 + \varpi)^{1/2} = 1 + \frac{\varpi}{(1 + \varpi)^{1/2} + 1} \quad (3.31)$$

En revenant à la notation classique, on voit que l'on doit résoudre :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik_0 \left[ \frac{\varpi}{(1 + \varpi)^{1/2} + 1} + (n - 1) \right] \Psi \quad (3.32)$$

Cette équation différentielle ordinaire a pour solution :

$$\Psi(x + \Delta x, y, z) = \exp \left( \int_x^{x+\Delta x} \left( ik_0 \left( \frac{\varpi}{(1 + \varpi)^{1/2} + 1} + (n - 1) \right) \right) dx \cdot \Psi(x, y, z) \right) \quad (3.33)$$

Posons :

$$A = \left[ \left( k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (3.34)$$

$$B = k_0(n - 1) \quad (3.35)$$

Pour  $\Delta x$  petit, l'intégrale peut se simplifier en :

$$\Psi(x + \Delta x, y, z) = \exp [i(A + B)\Delta x] \Psi(x, y, z) \quad (3.36)$$

On peut alors décomposer les opérateurs en un produit d'exponentielles :

$$\Psi(x + \Delta x, y, z) = \exp[iA\Delta x] \exp[iB\Delta x] \Psi(x, y, z) \quad (3.37)$$

Nous utiliserons la transformée de Fourier pour calculer  $\exp[iA\Delta x] \Psi$  :

$$\exp[iA\Delta x] \Psi = \exp \left[ i\Delta x \frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}{\left[ (k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \right]} \right] \Psi \quad (3.38)$$

En faisant la transformée de Fourier selon  $(y, z)$  de cette égalité (en notant  $\tilde{\Psi}(x, k_y, k_z)$  la transformée de Fourier selon  $(y, z)$  de  $\Psi(x, y, z)$ ), puis en prenant la transformée de Fourier inverse on obtient finalement :

$$\exp(i\Delta x A) \Psi = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left\{ -i\Delta x \frac{k_y^2 + k_z^2}{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2} + k_0} \right\} \tilde{\Psi} \right\} \quad (3.39)$$

on obtient donc l'expression finale suivante :

$$\Psi(x + \Delta x, y, z) = \exp[ik_0(n-1)\Delta x] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left[ -i\Delta x \frac{k_y^2 + k_z^2}{(k_0^2 - k_y^2 - k_z^2)^{1/2} + k_0} \right] \tilde{\Psi}(x, k_y, k_z) \right\} \quad (3.40)$$

Les contraintes d'utilisation de (3.40) sont d'une part la valeur du pas  $\Delta x$  et d'autre part le nombre de points  $N$  pour la transformée de Fourier rapide. Le choix de ces deux paramètres s'effectue en fonction respectivement de l'échelle intégrale du champ thermique  $\mathcal{L}$  et de la longueur  $\lambda$  du signal acoustique.

Pour ne pas sous-échantillonner le signal acoustique l'espacement entre deux points de l'axe  $y$ ,  $\Delta y$ , doit respecter :

$$\Delta y \leq \frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad N \geq \frac{2H}{\lambda} + 1 \quad (3.41)$$

$H$  étant la largeur du domaine de calcul selon  $y$ .

Le pas  $\Delta x$  doit être limité vis à vis de la taille des structures turbulentes :

$$\Delta x \ll \mathcal{L} \quad (3.42)$$

Une vérification qualitative est obtenue en superposant une carte d'intensité à un calcul de rayons pour une même réalisation. La figure 5.3 (voir chapitre 5) montre la superposition des deux méthodes pour une onde plane .

Le calcul de la figure 5.3 a été fait en respectant la condition (3.41). La condition (3.42) a été assurée en prenant  $\Delta x = L/5$ . Des calculs du moment d'ordre quatre du champ acoustique (voir chapitre 5) à partir de (3.40) qui constituent un bon test de validité ont été effectués pour différentes valeurs du pas  $\Delta x$  (tous les autres paramètres restant constants). Ils montrent que la condition (3.42) n'est pas très restrictive. Sur la figure 3.1, on peut voir qu'entre les cas  $\Delta x = L$  et  $\Delta x = L/5$  il n'apparaît pas de différences significatives sur  $\sigma_f^2$ . On peut constater également qu'un trop grand pas tel que  $\Delta x = 2L$  ne produit pas une "explosion" des résultats :

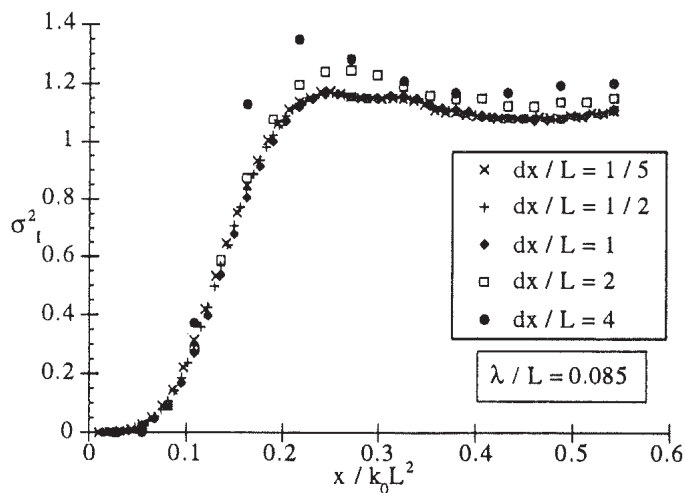


Figure 3.1 : Influence du pas longitudinal  $\Delta x$  sur l'indice de scintillation  $\sigma_I^2$

l'évolution de la courbe est sensible mais l'écart maximal avec la courbe correcte ne dépasse pas 7%.

Notons également qu'un doublement du nombre de points  $N$ , c'est à dire un suréchantillonnage respectant la condition  $\Delta y \leq \lambda/4$  n'apporte pas d'amélioration au calcul de  $\sigma_I^2$  comme le montre la figure 3.2. La valeur retenue pour les calculs est  $L/5$  et pour certains cas  $L/2$  en raison de l'importance du temps de calcul.

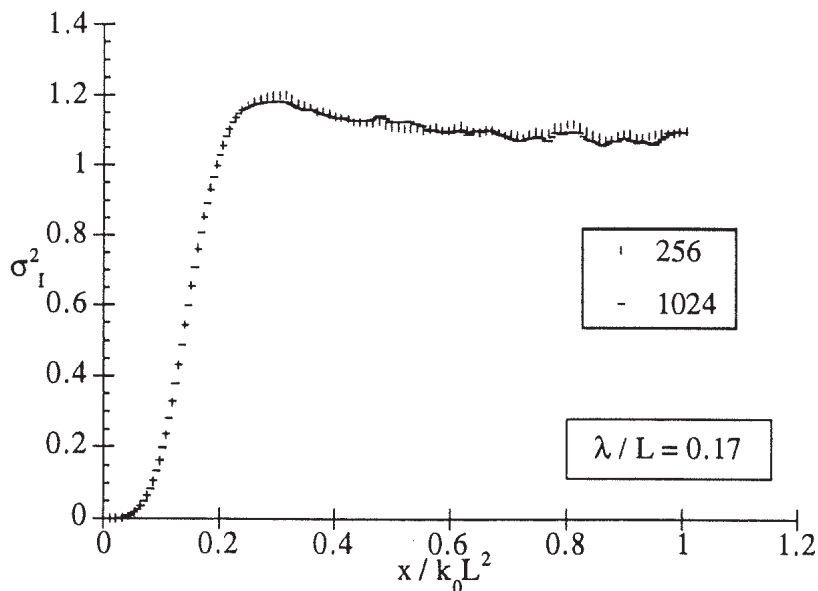


Figure 3.2 : Influence du pas d'échantillonnage (calcul de la transformée de Fourier rapide) sur l'indice de scintillation  $\sigma_I^2$

La seule limitation est la distance de propagation pour une large donnée. Pour une source de type "onde plane" comme celle que nous avons choisi les problèmes de réflexions aux bords sont limités. Ceux-ci ne deviennent sensibles qu'à partir de 50 à

$60 L$  pour la largeur de  $20 L$  que nous avons adoptée et la plage de fréquences choisie ( $0.085 \leq \lambda/L \leq 0.17$ ). On peut trouver une étude détaillée de la résolution de l'équation parabolique par transformée de Fourier faite par Cristol [CRISTOL 87] et des comparaisons de résolutions obtenues avec différentes méthodes par Juvé et Blanc-Benon [JUVE 88].

### 3.4 Conclusion

La méthode des rayons est très utile pour accéder directement aux fronts d'onde et permet pour les faibles distances de propagation (jusqu'à  $15$  à  $20 L$  d'accéder aux corrélations de phase (voir chapitre 4). Il est aussi possible de calculer le lieu des caustiques qui sont d'une grande importance pour l'interprétation de nombreux phénomènes. En outre, on peut traiter facilement les frontières du domaine par les lois de la réflexion. Cette méthode étant limitée par nature aux hautes fréquences, elle est bien complétée par l'équation parabolique qui permet d'accéder à l'intensité. Cette dernière donne d'excellents résultats lorsqu'on ne s'intéresse pas à l'onde rétropropagée.

# Chapitre 4

## ETUDE DE LA PHASE

### 4.1 Introduction

L'utilisation d'une méthode géométrique permet d'accéder soit au trajet des rayons soit aux fronts d'onde. A partir d'un grand nombre de réalisations d'un seul rayon on peut étudier les fluctuations de temps ou de distance induites par les fluctuations thermiques. Dans ce cas simple, la comparaison avec des résultats de la littérature permet de s'assurer du bon comportement du code de calcul.

Ensuite, à partir du calcul des fronts d'onde, on peut calculer la différence de trajet entre un front perturbé par la turbulence et un front obtenu en milieu homogène. Le retard ou l'avance de chaque point du front pour un grand nombre de réalisations permet de calculer un coefficient de corrélation de phase. Cette quantité constitue une mesure de la déformation subie par les fronts, son évolution au fur et à mesure de l'éloignement de la source doit conduire à l'évaluation de la perte de cohérence du signal acoustique en fonction de la distance parcourue dans la turbulence. On obtient ainsi des informations pouvant être utilisées lorsque l'on s'intéresse au problème de la localisation d'une source par une antenne acoustique.

Dans un deuxième temps des essais de simulation de localisation de source ont été effectués. Ils ont consisté à partir d'un grand nombre de réalisations d'un front d'onde à essayer de déterminer la source la plus probable ce qui permet de quantifier l'erreur commise, lorsqu'on essaie de localiser une source.

Enfin, dans le cas d'une onde plane, l'utilisation de l'équation parabolique donne accès à la phase dans des conditions autorisant une comparaison qualitative avec des données expérimentales. Cela permet notamment d'apporter une information supplémentaire pour décider si certains phénomènes ont une réalité physique ou sont de purs artefacts liés à la procédure expérimentale employée.

## 4.2 Caractérisation du champ à partir d'un rayon

### 4.2.1 Méthode

L'objectif est d'étudier les fluctuations de temps nécessaire au parcours d'une distance fixée (en ligne droite). On peut visualiser ce problème en imaginant un rayon tiré du centre d'un cercle et en étudiant le temps nécessaire au franchissement du cercle. On utilise les équations des rayons (chapitre 3) que l'on résoud pour "tirer" un seul rayon pour un grand nombre de réalisations (de 250 à 1000). Le rayon est toujours tiré de la même position d'origine et avec le même angle initial. La figure 4.1 schématise le problème.

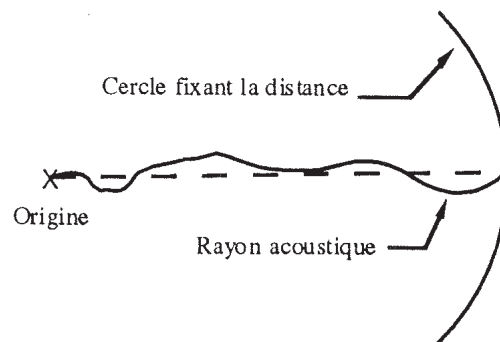


Figure 4.1 : Fluctuation du temps de parcours d'un rayon : position du problème

La résolution du système différentiel par Runge-Kutta progresse sur le trajet du rayon par pas de temps ; il n'est donc pas possible de parvenir exactement à une distance fixée. Une fois obtenu les coordonnées de l'extrémité d'un rayon ayant dépassé le cercle on doit donc interpoler entre ce point et le précédent pour connaître le temps d'arrivée sur le cercle. L'interpolation se fait en considérant que la distance parcourue est proportionnelle au temps pour une vitesse de propagation  $c_0$  (milieu au "repos"). Etant donné la petitesse des fluctuations de la vitesse du son  $c$  (de l'ordre de 1 %), l'erreur commise est négligeable. La figure 4.2 schématise cette interpolation.

### 4.2.2 Etude des fluctuations de temps de parcours

Le tracé des rayons correspondant à quelques réalisations (figure 4.3) permet de constater l'effet de la turbulence sur le trajet.

A grande distance l'écart par rapport à l'axe initial (axe  $x$ ) devient très important comme le montre la figure 4.4.

Afin de caractériser qualitativement les perturbations du trajet on calcule la variance du temps de parcours  $\overline{\Delta t^2} = \overline{(t - \bar{t})^2}$ , en fonction de la distance de propagation dans la turbulence. Le choix de cette grandeur va permettre une comparaison avec l'approximation analytique de Chernov (voir chapitre 1). Rappelons que ce dernier propose l'expression suivante :



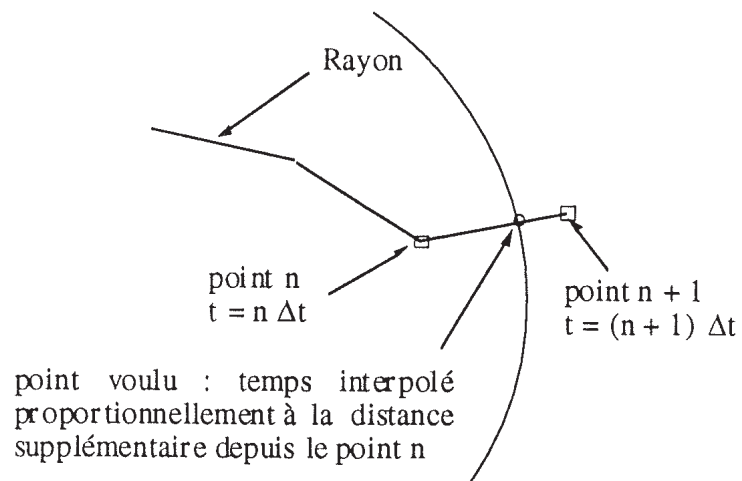


Figure 4.2 : Interpolation du temps de parcours d'un rayon

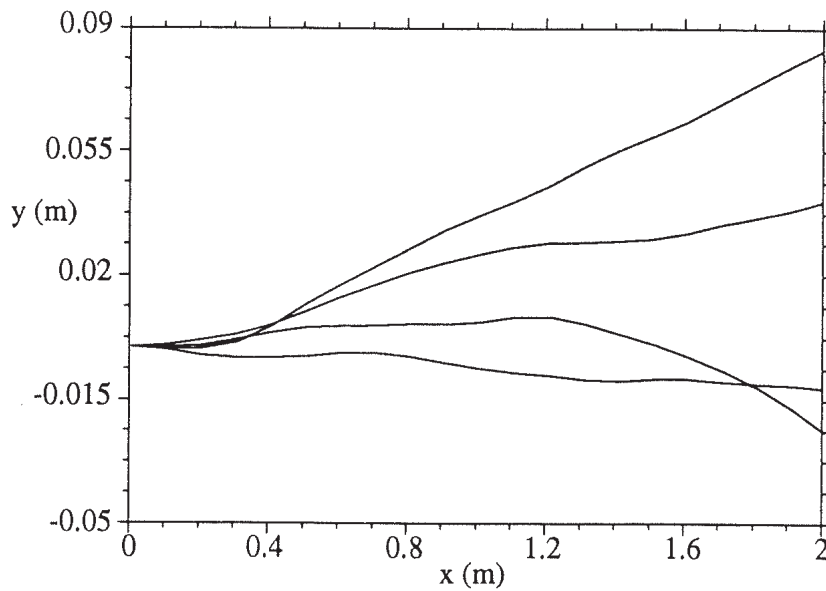


Figure 4.3 : Tracé de quatre réalisations d'un rayon pour 20 L de propagation

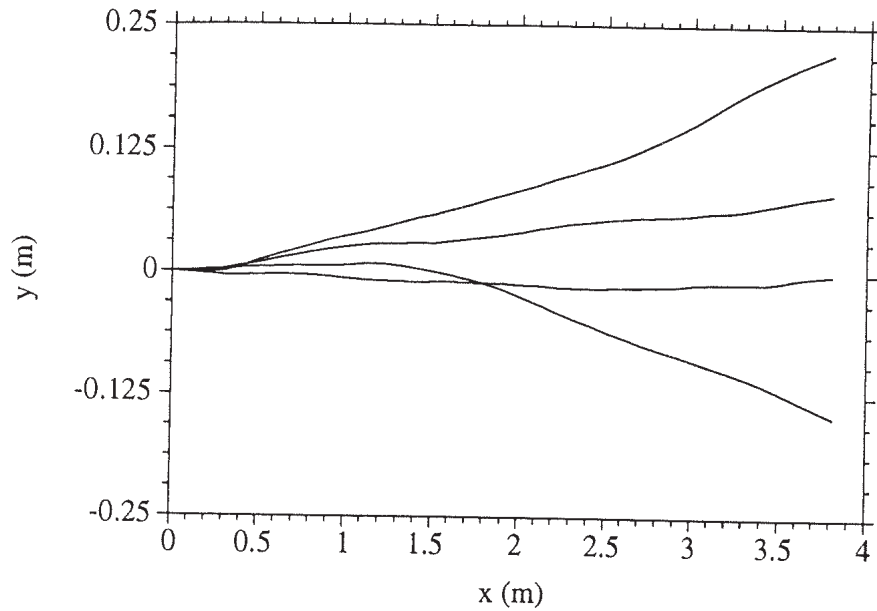


Figure 4.4 : Tracé de quatre réalisations d'un rayon pour 40  $L$  de propagation

$$\overline{\Delta t^2} = \frac{\mu^2 \sqrt{\pi} L}{c_0^2} x \quad (4.1)$$

La figure 4.5 montre la comparaison des deux approches pour 250 réalisations.

Cet auteur prévoit une évolution linéaire qui est effectivement observée tant que la distance à la source reste inférieure à environ  $17 L$ . L'approximation de Chernov présuppose que l'écart de trajectoire des rayons reste faible par rapport à la distance parcourue. La figure 4.4 prouve bien qu'à partir d'une distance de l'ordre de  $20 L$  l'angle des rayons par rapport à l'axe  $x$  est important et qu'ensuite cet angle ne cesse d'augmenter.

Lorsque la distance croît encore,  $\overline{\Delta t^2}$  augmente également avec une progression non linéaire également rendant l'approximation de Chernov inutilisable. En effet, l'écart entre les deux formulations devient très important puisqu'à  $36.5 L$ , on atteint deux fois la valeur prévue par Chernov.

Une explication possible de cette différence est l'influence des caustiques. Kulkarny et White [KULKARNY 82] ont calculé les densités de probabilité des distances d'apparition des pour un milieu bidimensionnel (figure 4.6). Notre calcul correspond au cas d'une onde sphérique, pour lequel la courbe correspondante présente un maximum pour  $x \mathcal{V}^{2/3} \approx 3.5$ . (voir le chapitre 5, section 5.3.2, pour les détails de calcul et les définitions du paramètre  $\mathcal{V}$ ). Cela correspond à une valeur de  $x \approx 17 L$  pour le cas des figures 4.5 et 4.7. Cette distance correspond donc bien avec le passage de la courbe de  $\overline{\Delta t^2}$  à un comportement non linéaire.

Cet effet des caustiques a déjà été observé pour la traversé d'un champ de vitesse turbulent par Blanc-Benon, Comte-Bellot, Juvé, Karweit ([KARWEIT 91] [BLANC-BENON 90a]).

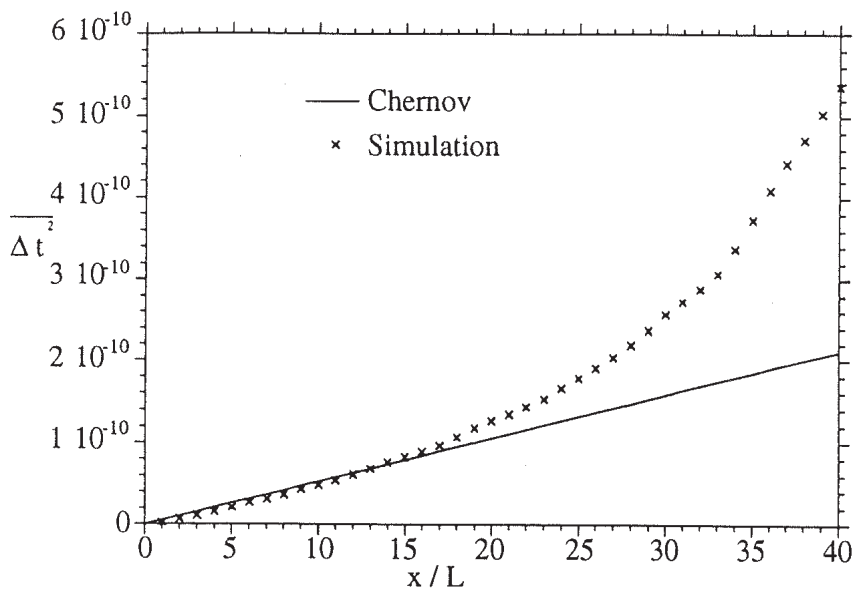


Figure 4.5 : Variance des fluctuations de temps de parcours d'un rayon acoustique, comparaison avec Chernov pour 250 réalisations

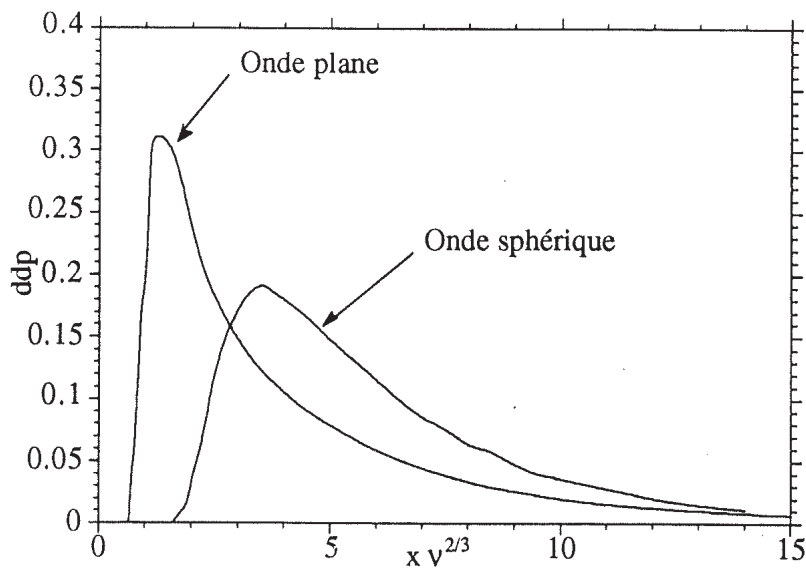


Figure 4.6 : Densités de probabilité des distances d'apparition des caustiques pour un milieu bidimensionnel, par Kulkarny et White

La simulation par modes de Fourier associée aux équations des rayons montre ici l'un de ses avantages : il n'y a pas de limitation sur la distance parcourue. L'inconvénient réside dans le temps de calcul qui est directement lié au nombre de réalisations. Il est intéressant sur cet exemple de mesurer l'influence du nombre de réalisations. La figure 4.7 permet de mesurer l'effet d'un quadruplement du nombre de réalisations sur l'évaluation de  $\overline{\Delta t^2}$ .

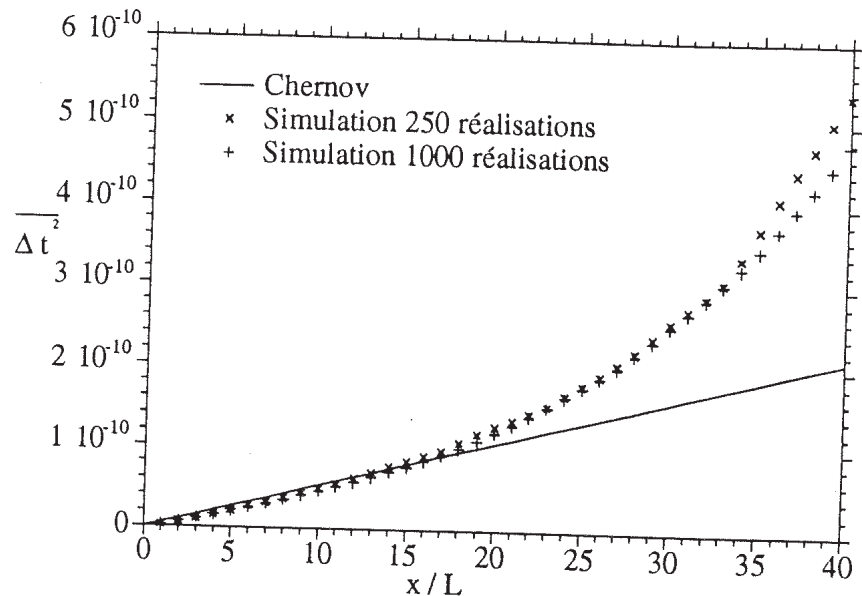


Figure 4.7 : Variance des fluctuations de temps de parcours d'un rayon acoustique, comparaison avec Chernov pour 250 et 1000 réalisations

Il apparait que l'augmentation du nombre de réalisations n'agit pas sur l'intégralité de la courbe mais ne se manifeste que pour une distance suffisamment élevée. On constate en effet que jusqu'à  $32.5 L$  il n'y a pratiquement pas de différence entre 250 et 1000 réalisations. Notons qu'ensuite l'écart reste modéré. Il est donc nécessaire, a priori, d'augmenter le nombre de réalisations pour atteindre de plus grandes distances sinon on surestime  $\overline{\Delta t^2}$ .

Ceci s'explique par le fait que plus la distance est grande et plus l'écart à l'axe de "tir" du rayon augmente : le nombre de possibilités de trajets significativement différents augmente. Avec l'augmentation de distance, des réalisations donnant lieu à des trajets très différents perturbent le calcul des moyennes, car ces événements sont rares, ce qui explique la nécessité d'augmenter le nombre de réalisations pour atteindre une valeur statistiquement stable.

## 4.3 Caractérisation du champ à partir d'un front d'onde

### 4.3.1 Observation des fronts d'ondes sur une réalisation

On génère des rayons à partir d'un point origine fixé, simulant ainsi une source ponctuelle. Cela permet d'étudier le champ acoustique sur une étendue spatiale importante. L'observation d'une réalisation (figure 4.8) montre bien l'influence du champ thermique sur l'onde acoustique : des zones de raréfaction et de concentration des rayons apparaissent et on peut constater que la complexité du champ acoustique augmente avec la distance. En particulier, on observe des régions de forte concentration des rayons qui se comportent comme des sources secondaires ; ces points focaux sont liés à l'apparition des caustiques.

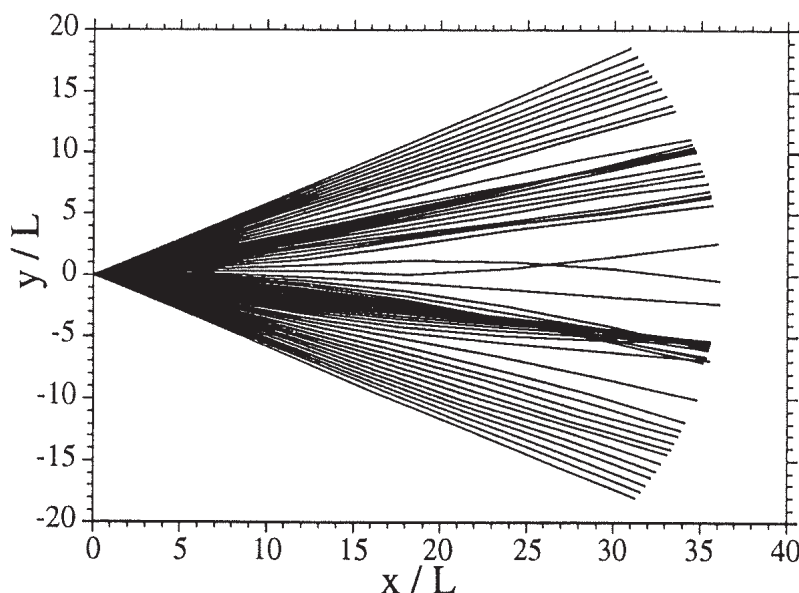


Figure 4.8 : Propagation de rayons acoustiques sur une réalisation, source ponctuelle

La traversée de ces régions modifie considérablement les trajets des rayons puisque deux rayons proches avant la zone focale se retrouvent ensuite sur des trajets très éloignés. La figure 4.9 montre un agrandissement de la zone correspondante de la figure 4.8, on constate en particulier un retournement du faisceau de rayons qui inverse l'ordre de répartition de ceux-ci selon l'axe  $y$ . Ce phénomène peut expliquer les brusques modifications de phase étudiées à la section 4.3.4.

Afin de calculer le coefficient de corrélation de phase, on reconstitue à partir d'un tracé de rayons les fronts d'onde correspondants. Pour une réalisation, on peut ainsi voir (figure 4.10) la déformation progressive d'un front d'onde lorsque la distance de propagation dans la turbulence augmente. Pour un même temps de parcours on constate une différence de distance entre les différentes parties du front. Par rapport

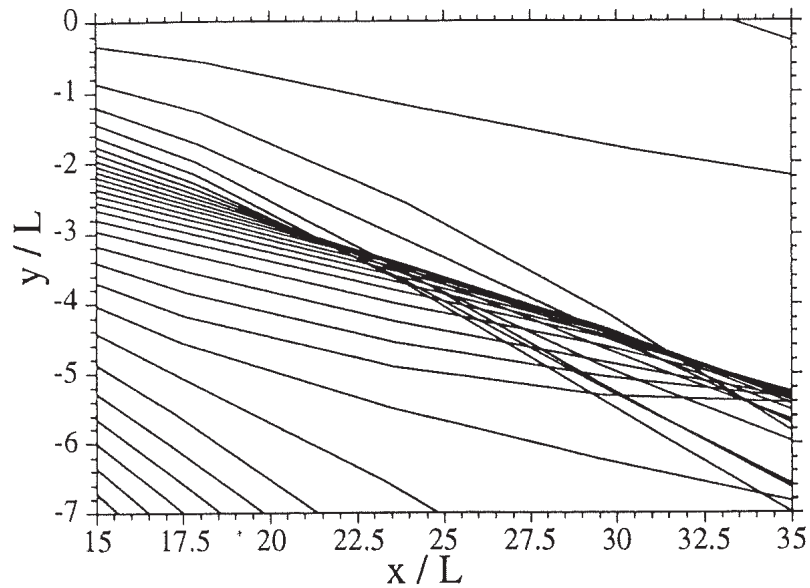


Figure 4.9 : Retournement du faisceau de rayons au passage d'une caustique

à un front se propageant à la vitesse  $c_0$  cet écart de distance correspond à des fluctuations de phase.

### 4.3.2 Corrélation de phase

Afin de quantifier ces modifications de phase, on peut calculer un coefficient de corrélation correspondant pour ces écarts. Cette méthode simple pose cependant d'énormes difficultés lorsque la distance de propagation atteint la zone des caustiques. En effet, tant que les déformations sont faibles, le calcul des rayons permet de reconstituer facilement les fronts d'onde en reliant les points de même temps de propagation (nombre de pas de temps) dans l'ordre de tir initial. En revanche, lorsque les trajectoires des rayons ont des courbures importantes et se croisent, le front obtenu comporte des boucles (figure 4.11) correspondant au retournement des rayons illustré par la figure 4.9, ce qui ne correspond plus à la notion habituelle de front d'onde.

Ce problème de définition se pose donc après la traversée des zones de caustiques qui constituent des régions singulières où la notion de front est remise en question.

Pour calculer la corrélation des fluctuations de phase, on doit procéder à une interpolation afin d'avoir les écarts de distance toujours aux mêmes points pour chaque réalisation (figure 4.12).

Cette interpolation prend en compte les repliements du front dans les zones de caustiques, ce qui fait apparaître des points multiples ; afin d'inclure ce phénomène dans le calcul de la corrélation, la distance représentant l'écart de phase est dans ce cas la moyenne des distances correspondant à chaque point.

La figure 4.13 montre le coefficient de corrélation de phase pour deux distances de propagation,  $10L$  et  $20L$ , assez faibles.

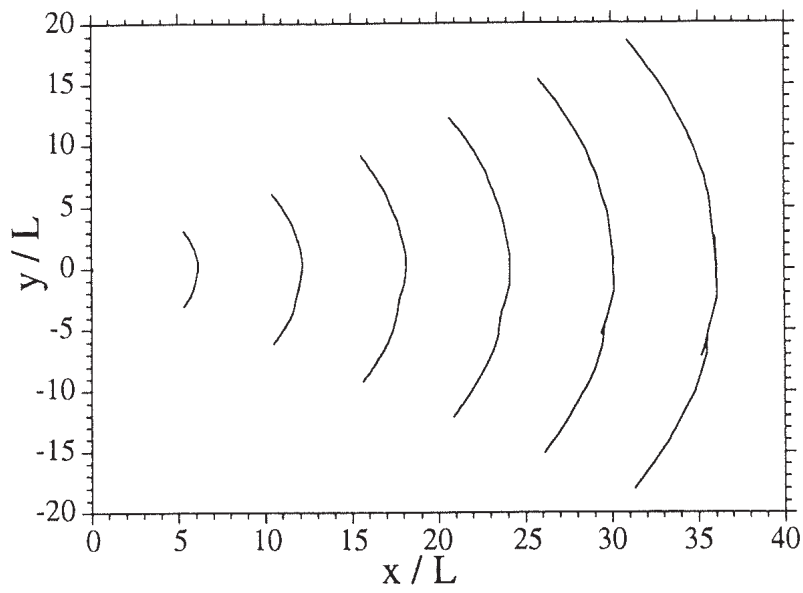


Figure 4.10 : Déformations progressive des fronts d'ondes sur une réalisation, source ponctuelle

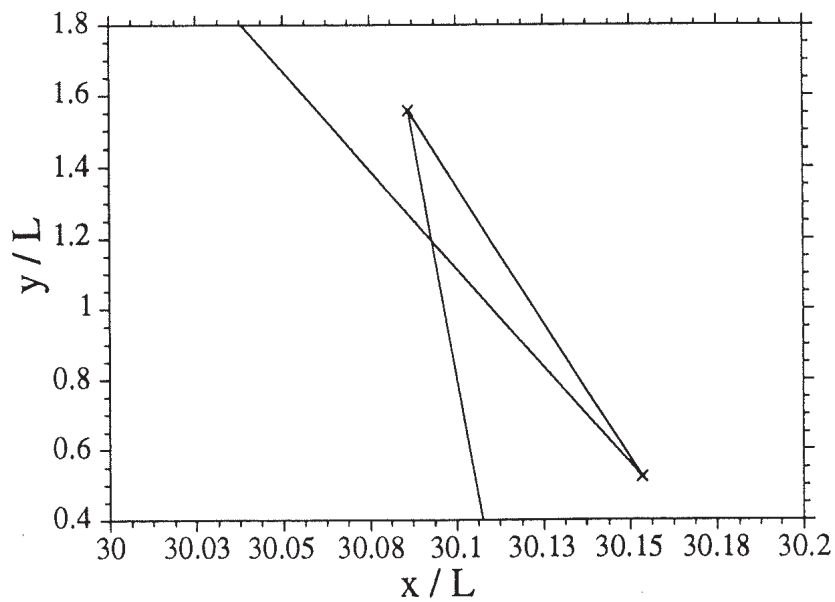


Figure 4.11 : Front d'onde près d'une zone de caustique

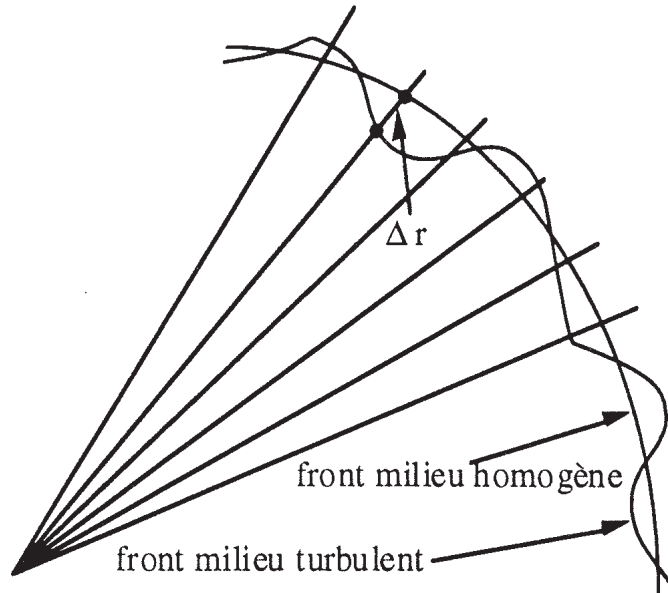


Figure 4.12 : Définition des écarts de phase pris en compte par la méthode envisagée

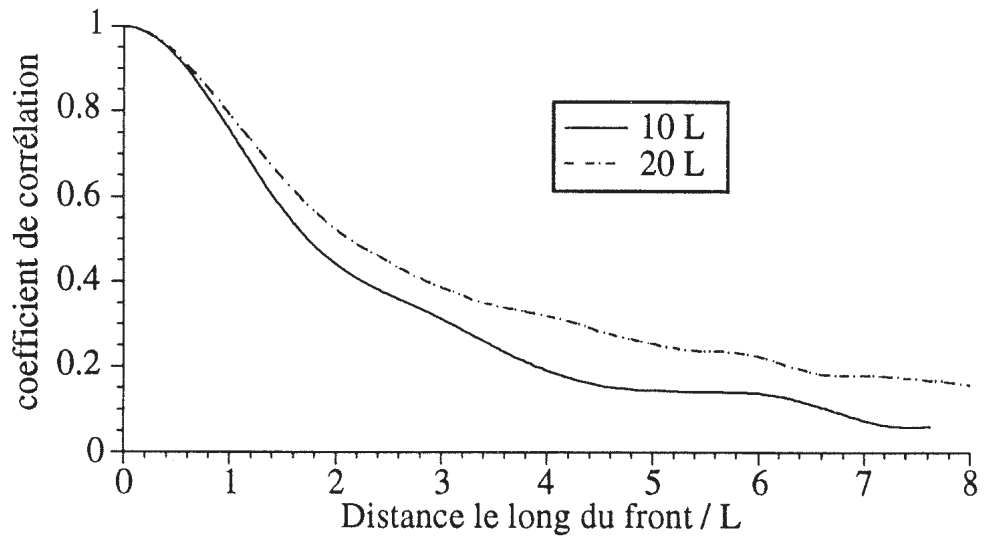


Figure 4.13 : Coefficient de corrélation de phase, distance à la source : 10 L et 20 L



On remarque que la corrélation augmente avec la distance de propagation dans la turbulence ce qui paraît contraire à toutes les autres caractéristiques du champ puisqu'on observe toujours une complexification du champ avec la distance et donc probablement une augmentation du désordre. D'autre part à une distance de  $20 L$  la zone des caustiques est déjà dépassée (voir figure 4.10) et donc la méthode employée ici pour le calcul des écarts de phase est sujette à caution comme nous l'indiquons ci-dessus.

Les calculs ont été poursuivis à de plus grandes distances ; la figure 4.14 illustre les résultats obtenus pour des distances de  $20 L$  et  $30 L$ .

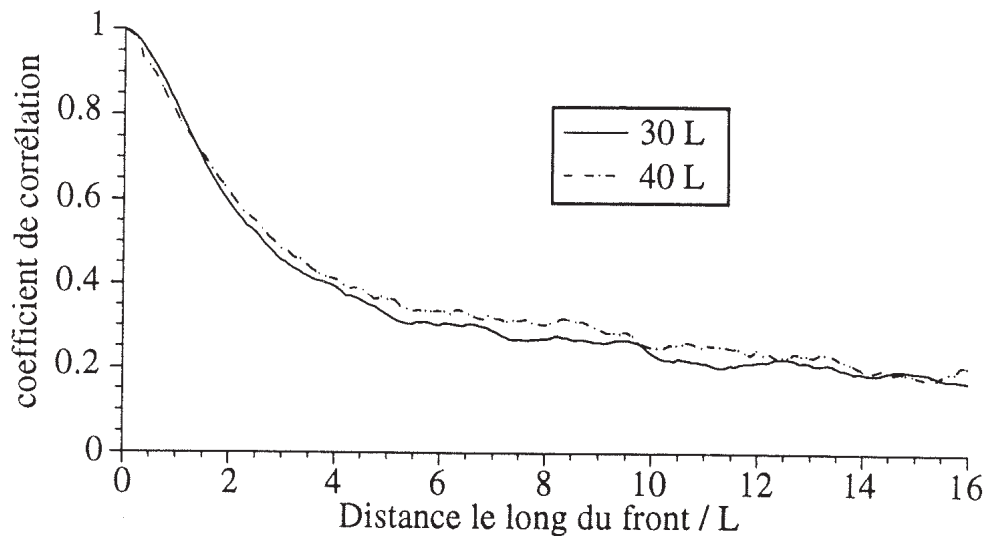


Figure 4.14 : Coefficient de corrélation de phase, distance à la source :  $30 L$  et  $40 L$

On constate encore une augmentation de la corrélation, ce qui confirme qu'il n'est pas possible de calculer les corrélations sans une redéfinition des fronts lorsqu'on s'intéresse aux régions situées au-delà des caustiques.

### 4.3.3 Localisation de source

Une autre façon de mettre en évidence les perturbations apportées par la turbulence sur les fronts d'onde consiste à essayer de retrouver le point source correspondant à chaque front.

La figure 4.15 montre les lieux des sources des 400 réalisations d'un front pour une distance de propagation dans la turbulence de  $40 L$ .

Ces positions sont obtenues en recherchant le cercle le plus proche du nuage de points constitué par une réalisation d'un front. Par la méthode des moindres carrés, on trouve son rayon et les coordonnées de son centre. Le choix de cette méthode se justifie par le fait qu'un front perturbé reste relativement proche du cercle correspondant au front en milieu homogène.

Sur la figure 4.16 l'axe  $x$  (direction de propagation) est dilaté ce qui permet de constater une dispersion selon cette direction. On observe donc une faible influence

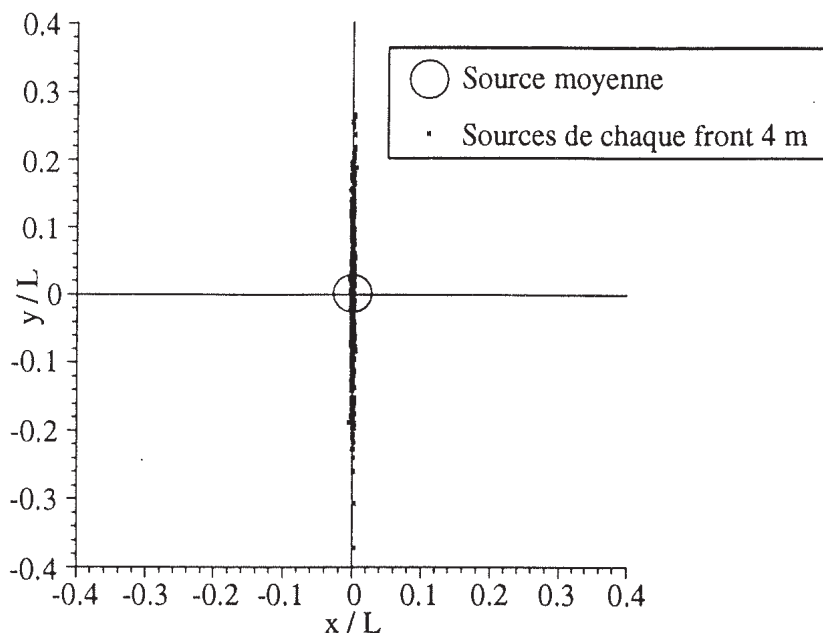


Figure 4.15 : Positions probables des sources de fronts perturbés, distance à la source :  $40 L$

de la turbulence sur la détermination de la distance du front à la source (l'écart maximal entre deux sources est environ 100 fois plus faible que selon l'axe  $y$ ).

La figure 4.15 montre (repère normé) que la dispersion se produit essentiellement selon l'axe  $y$ .

A partir des positions pour chaque réalisation on trouve la source moyenne qui est indiquée sur les figures 4.15 et 4.16. Elle correspond parfaitement à la position réelle puisque les écarts sont inférieurs à  $10^{-3} L$  pour une distance de propagation de  $40 L$ . Les mêmes calculs pour une distance de  $20 L$  montrent que les écarts sont également divisés par 2 (figure 4.18, 4.17).

On peut donc affirmer que la turbulence, dans notre cas de figure, provoque une faible erreur sur la distance de la source au point d'observation. En revanche, on aura une forte erreur angulaire ; celle-ci est faible en moyenne mais instantanément (ici d'une réalisation à une autre) les fluctuations de la position de la source sont importantes. On retrouve le phénomène de scintillation bien connu en optique lorsque l'on observe une étoile à travers l'atmosphère terrestre.

#### 4.3.4 Dislocation de phase

##### Résultats expérimentaux

Des mesures de phase effectuées en chambre anéchoïque par Blanc-Benon ([BLANC-BENON 92a] et [BLANC-BENON 91a]) mettent en évidence des dislocations de phase le long de l'antenne de réception du signal. Ces sauts qui sont des multiples de  $\pi$  ne semblent pas dus à des problèmes de mesures. Il a donc paru

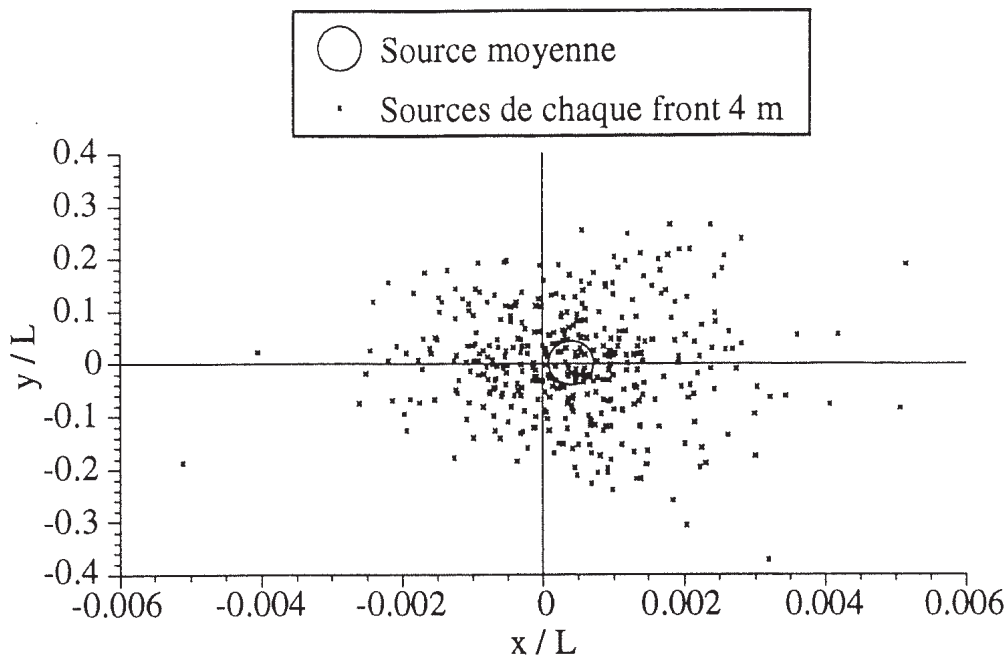


Figure 4.16 : Positions probables des sources de fronts perturbés, échelle dilatée selon  $x$ , distance à la source :  $40 L$

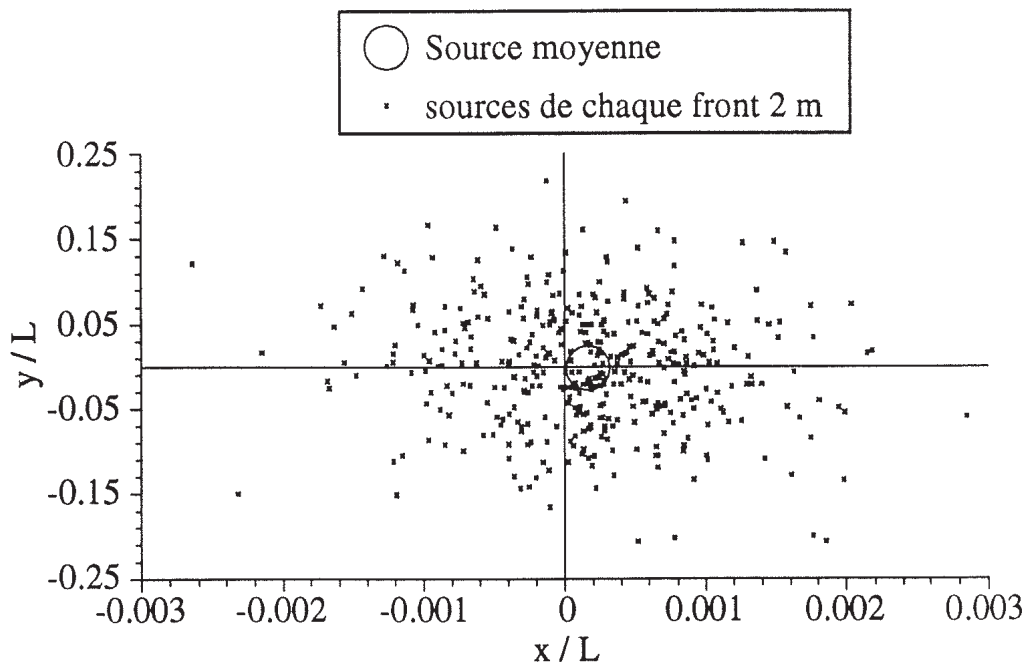


Figure 4.17 : Positions probables des sources de fronts perturbés, échelle dilatée selon  $x$ , distance à la source :  $20 L$

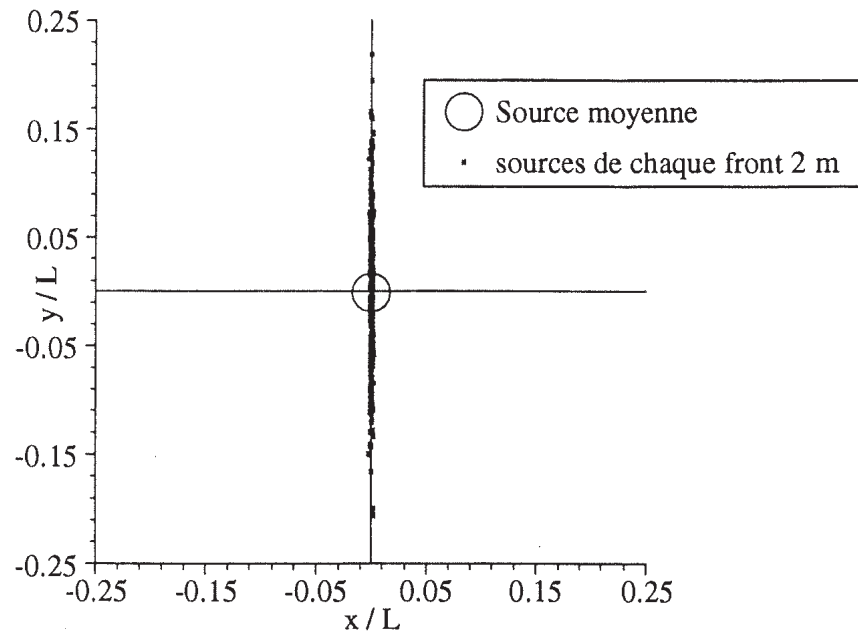


Figure 4.18 : Positions probables des sources de fronts perturbés, distance à la source :  $20 L$

intéressant de calculer numériquement la phase pour confirmer la nature réelle ou artificielle de ces sauts et éventuellement en donner une interprétation physique.

L'installation expérimentale (figure 4.19) est constituée d'une antenne de microphones répartis régulièrement sur un support rectiligne. Cette antenne est fixe devant un émetteur ultrasonore ayant un rayonnement quasi-sphérique. Le champ de turbulence thermique est obtenu par une grille de résistances chauffantes. Les fréquences, les distances de propagation ainsi que la valeur efficace des fluctuations de température mises en oeuvre sont comparables à celles de la simulation. La seule différence réside dans le fait que les simulations concernent un milieu 2D.

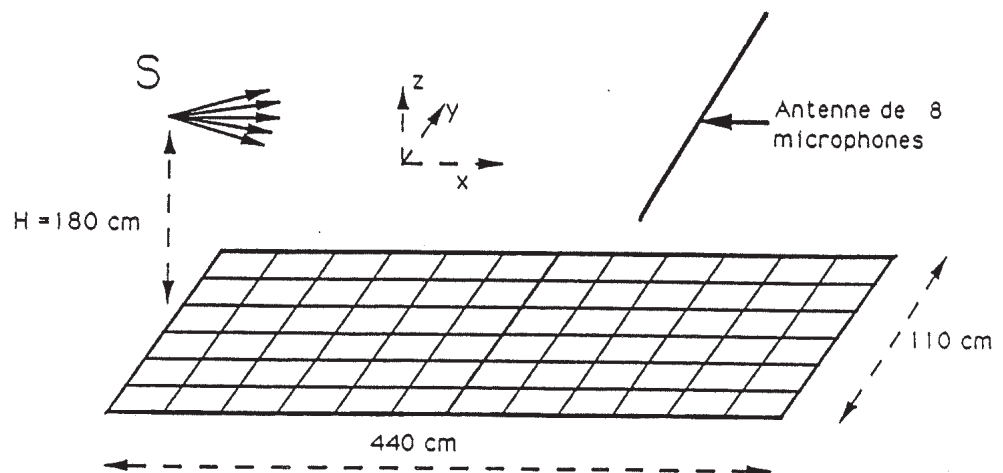


Figure 4.19 : Installation expérimentale de Blanc-Benon

Les principaux résultats sont des mesures d'écart instantanés de phase entre deux microphones qui permettent ensuite de reconstituer les évolutions temporelles des fronts de phase devant l'antenne. Des mesures du signal temporel de pression ont également été effectuées.

La figure 4.20 montre un exemple de mesure de phase sur lequel une variation brusque du signal est visible. En "grossissant" la région concernée (figure 4.21) on peut constater qu'il ne s'agit pas d'une discontinuité mais bien d'une variation continue. L'observation des signaux de pression des deux microphones (figure 4.22) montre bien cette évolution progressive de la phase avec un passage en opposition de phase accompagné d'une baisse sensible du niveau.

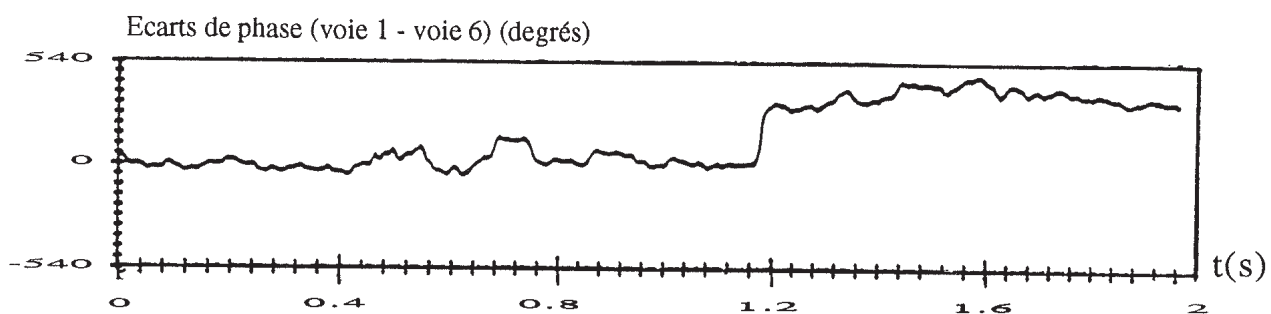


Figure 4.20 : Mesure des écarts de phase entre deux microphones

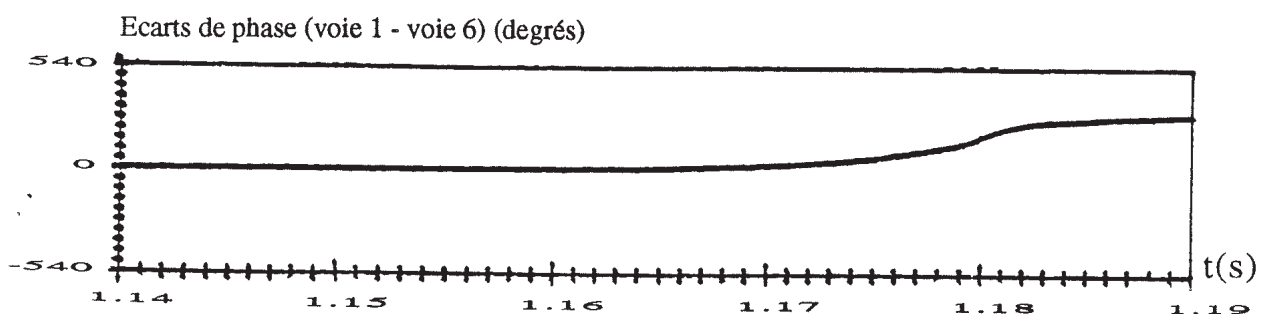


Figure 4.21 : Mesure des écarts de phase entre deux microphones : "zoom"

### Calcul numérique de la phase

**Méthode de reconstitution numérique** En utilisant l'équation parabolique, on accède facilement à la phase de l'onde acoustique dans le cas d'une source de

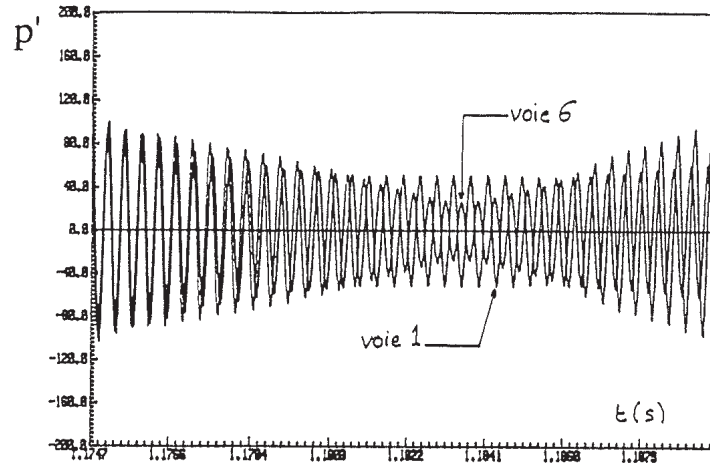


Figure 4.22 : Mesure des signaux de pression

type onde-plane. Le maillage adopté dans ce cas est assez proche des conditions expérimentales. En effet, le champ est calculé sur des lignes perpendiculaires à l'axe  $y$  de façon analogue au recueil du signal sur l'antenne de microphones.

Il ne s'agit évidemment pas d'une reconstitution complète des conditions expérimentales puisqu'ici le champ est 2D et l'onde plane. Cependant les phénomènes physiques mis en jeu sont les mêmes.

Le signal brut obtenu (figure 4.23) est inexploitable car il présente de nombreuses discontinuités dues à la méthode employée pour recueillir la phase. Ces sauts sont repérables car ce sont des sauts multiples de  $2\pi$  entre deux points de calculs ; après un traitement numérique relativement complexe assurant la continuité du signal on peut reconstituer la phase (figure 4.24) tant que la distance à la source n'excède pas quelques dizaines d'échelles intégrales. En effet, à grande distance, les dislocations sont trop proches les unes des autres pour utiliser cette méthode.

Ce traitement consiste à examiner la phase brute valeur après valeur et à rajouter ou ôter le nombre de multiples de  $2\pi$  nécessaire pour obtenir la continuité. La difficulté réside dans le choix de la discontinuité qui peut être confondue numériquement avec une variation réelle de la phase.

**Résultats numériques** Le signal traité (figures 4.25, 4.26, 4.27) contient les mêmes type d'accidents que le signal expérimental. On voit se surimposer à des fluctuations relativement faibles de la phase, des variations très rapides : les calculs retrouvent bien les résultats expérimentaux.

Ces écarts ne sont pas des discontinuités, car comme le montre la figure 4.28, ils contiennent plusieurs points de calcul. Plusieurs essais confirment qu'en raffinant le maillage on peut augmenter à loisir le nombre de points d'une région de dislocation.

L'amplitude de la variation est un multiple de  $\pi$  pour un seul front. Sur la figure 4.29 on peut observer les variations de phase entre deux fronts très proches. En partant de l'origine de l'axe les trois fronts sont confondus, puis au niveau de

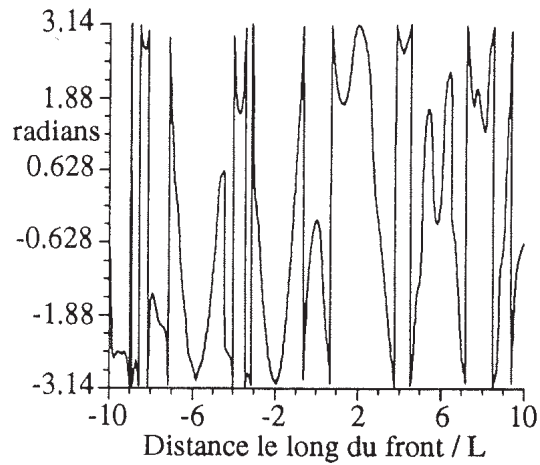


Figure 4.23 : Phase calculée par l'équation parabolique sans traitement

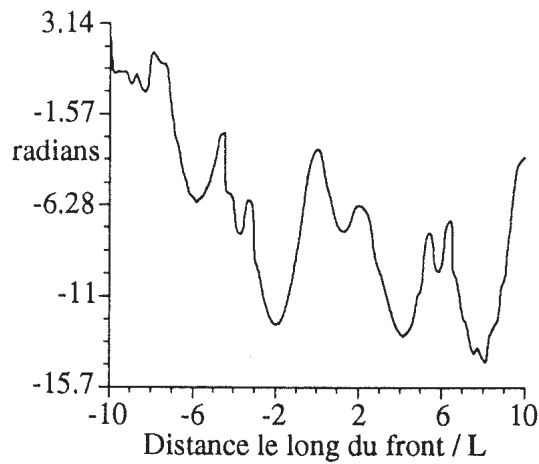


Figure 4.24 : Phase calculée par l'équation parabolique après traitement

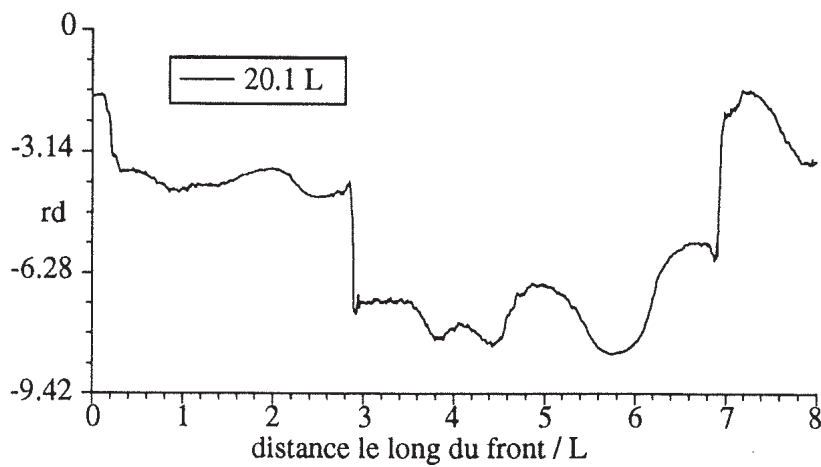


Figure 4.25 : Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source  $20.1 L$

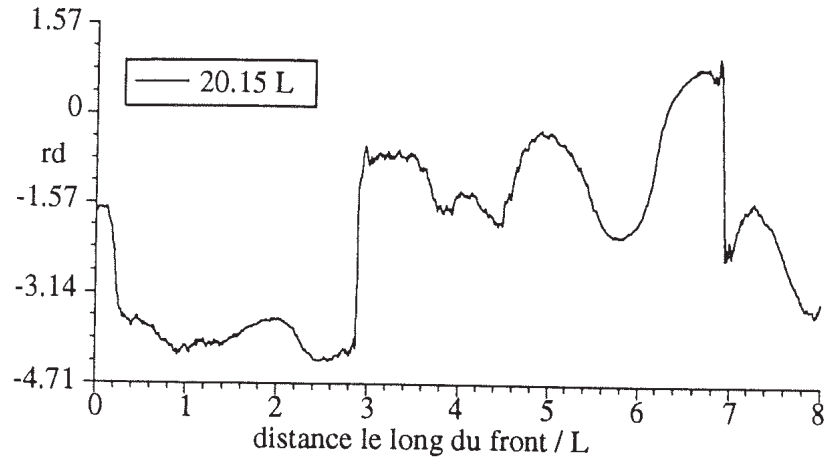


Figure 4.26 : Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source  $20.15 L$

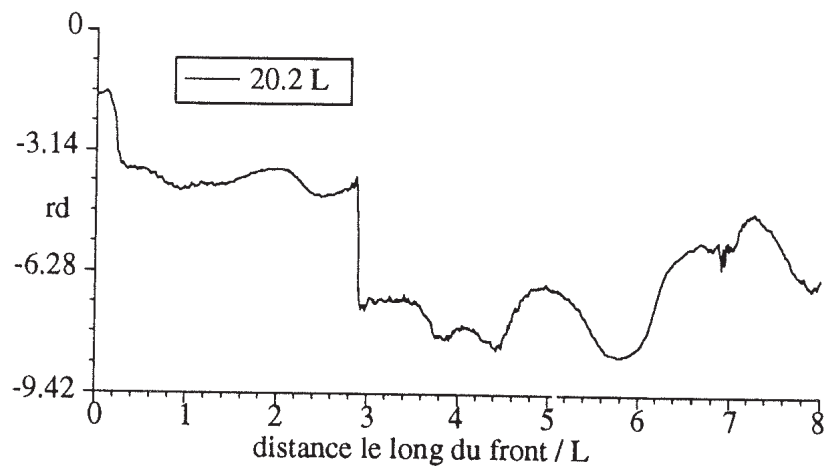


Figure 4.27 : Front de phase calculé par l'équation parabolique, distance à la source  $20.2 L$

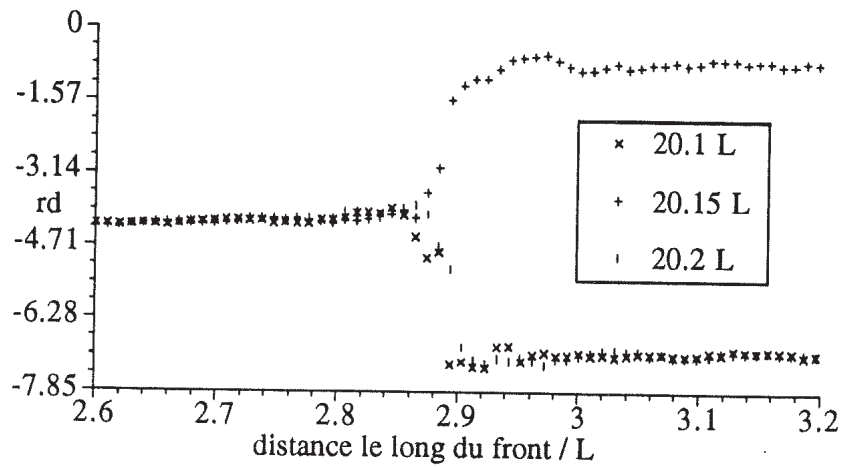


Figure 4.28 : Agrandissement d'une zone de dislocation de phase (1)



la dislocation certains sont décalés de  $+\pi$ , d'autres de  $-\pi$ , on constate ensuite un "recollement" de la phase. On obtient donc au niveau de la dislocation une différence de  $2\pi$ .

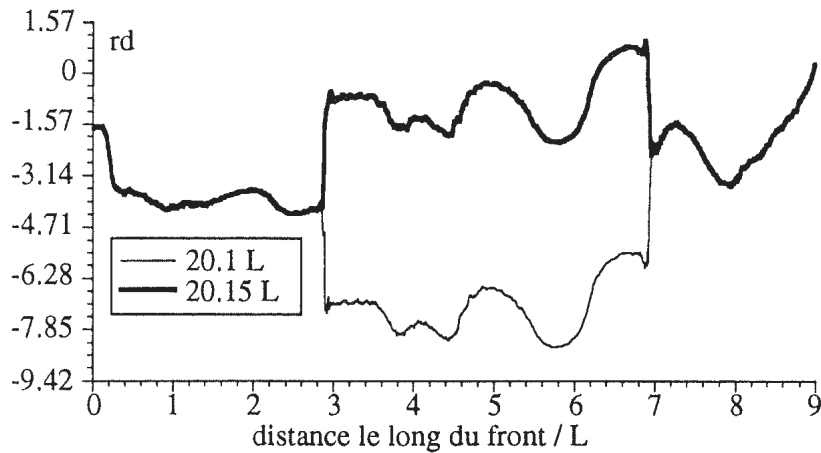


Figure 4.29 : Comparaison de deux fronts de phase proches

De tels phénomènes ont été déjà observés en acoustique et en optique ([FONTANELLA 87], [NYE 74]) et sont l'un des obstacles à la reconstitution de signaux bruités par la turbulence.

La simulation confirme également les résultats expérimentaux à propos de la baisse de l'intensité. Numériquement on constate que précisément au lieu d'une dislocation de phase se produit également une brusque chute, voir une annulation du niveau (figure 4.30).

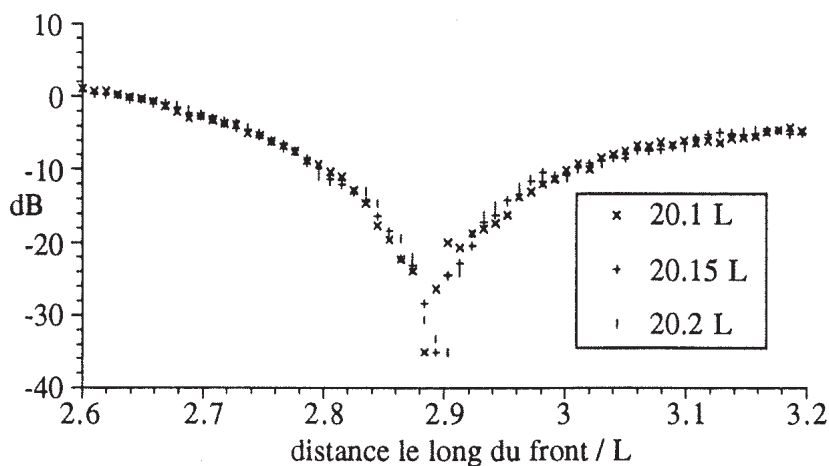


Figure 4.30 : Intensité près d'une zone de dislocation de phase (1)

Les figure 4.31 et 4.32 montrent la deuxième zone de "saut" de phase et la chute d'intensité correspondante.

Il est intéressant de comparer la localisation de ces "accidents" avec les lieux des caustiques. La figure 4.33 montre les caustiques calculées pour la même réalisation :

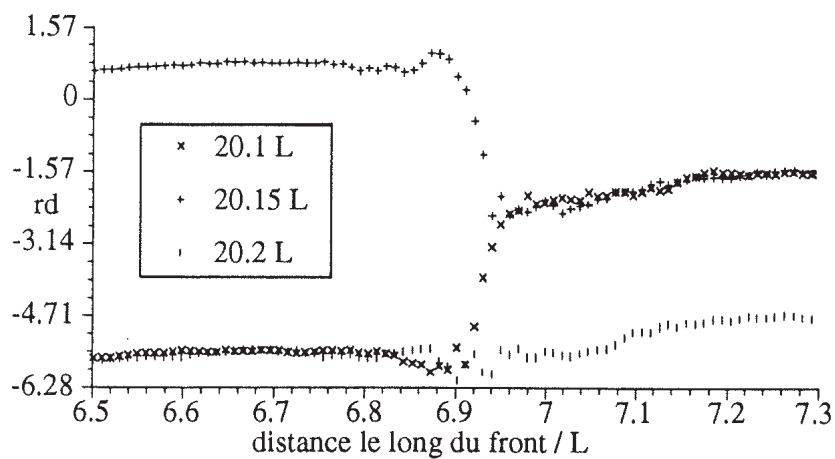


Figure 4.31 : Agrandissement d'une zone de dislocation de phase (2)

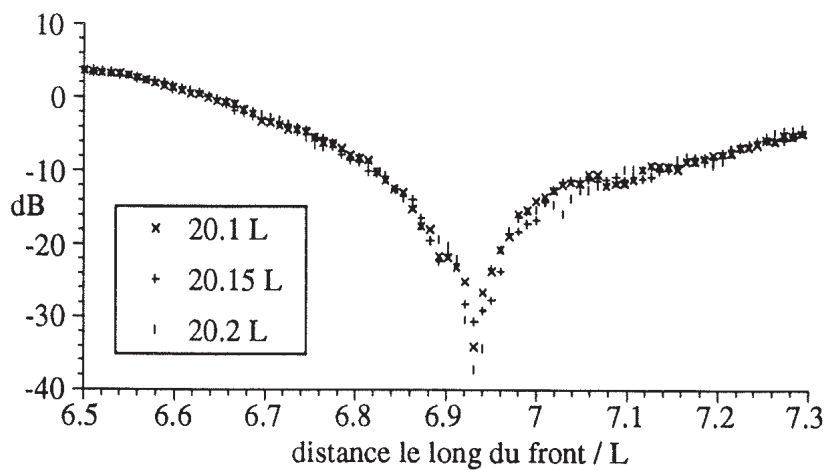


Figure 4.32 : Intensité près d'une zone de dislocation de phase (2)

les variations de phase se produisent près des caustiques mais la traversée d'une caustique ne correspond pas systématiquement à un saut de phase. On peut imaginer qu'à l'intérieur de la zone que délimite une caustique, la phase subit une variation de  $\pi$ . Cet effet diminue progressivement lorsque le point d'observation de la phase s'éloigne de la zone d'influence de la caustique produisant ainsi les dislocations observées. Le fait que le phénomène ne se produise pas toujours peut s'expliquer par la différence entre les deux techniques de calcul employées : le calcul des caustiques fait appel à une méthode de rayons : la fréquence n'intervient pas. En revanche le calcul de la phase par l'équation parabolique est dépendant de la fréquence.

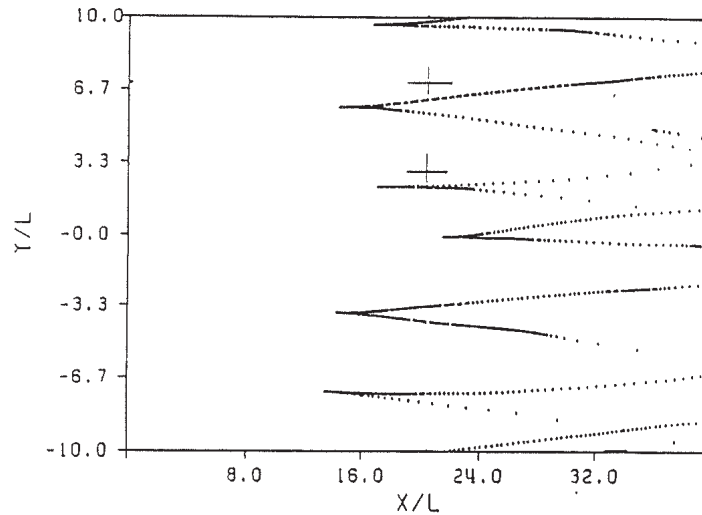


Figure 4.33 : Lieux des caustiques

## 4.4 Conclusion

L'étude de la phase a permis de retrouver par des calculs numériques certains faits expérimentaux. On constate en particulier une différence de comportement en fonction de la distance de propagation. Le franchissement des zones de caustiques est certainement responsable de ce changement : les deux approches utilisées (rayons et équation parabolique) concordent sur ce point. Une étude plus détaillée de l'intensité devrait permettre de conforter cette explication.



# Chapitre 5

## ETUDE DE L'INTENSITE 2D

### 5.1 Introduction

Pour accéder aux fluctuations d'intensité, l'équation parabolique (voir chapitre 3) est résolue par transformée de Fourier rapide. Cette modélisation du champ acoustique présente l'avantage de prendre en compte la fréquence du signal sonore, contrairement à une approximation géométrique.

Cette méthode comporte quelques inconvénients, en effet, elle n'est valable que pour un faisceau ayant un petit angle d'ouverture (environ  $15^\circ$ ) et ne donne pas accès à la partie rétrodiffusée de l'onde. Elle ne permet pas non plus d'intégrer des conditions limites de type réflexion sur une paroi. Cependant dans notre cas de figure ces limitations sont mineures. Nous nous sommes restreints à la propagation d'une onde plane, donc à petit angle d'ouverture, et seule la partie progressive nous intéresse. Le domaine d'étude envisagé est le cas théorique d'un milieu infini, nous n'avons donc pas de problèmes de conditions limites.

La résolution par transformée de Fourier rapide, rendue possible par le choix de l'équation parabolique, présente l'avantage déterminant d'un temps de calcul très court. Ceci est dû essentiellement à la faible contrainte sur le pas de calcul longitudinal (direction de propagation) par rapport à une méthode de différences finies.

Précédemment la méthode des rayons nous donnait directement la position des fronts d'onde quelque soit le type de la source, sphérique ou plane ; un calcul d'intensité nécessite un maillage adapté à la forme des fronts, c'est pourquoi nous nous contenterons d'une onde plane s'adaptant parfaitement au maillage cartésien (figure 5.5) qui produit les équations les plus simples.

### 5.2 Observation du champ acoustique sur une réalisation

L'observation d'une réalisation (figure 5.1) permet déjà d'avoir des informations sur la structure du champ acoustique. Cette carte représente les fluctuations d'intensité

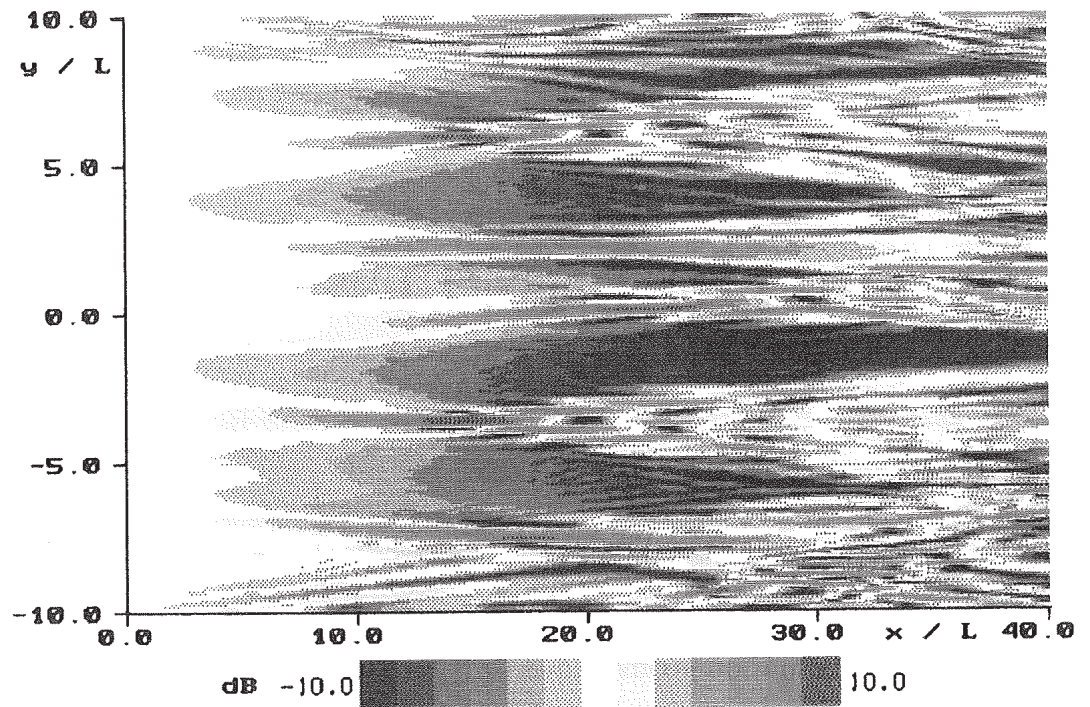


Figure 5.1 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$

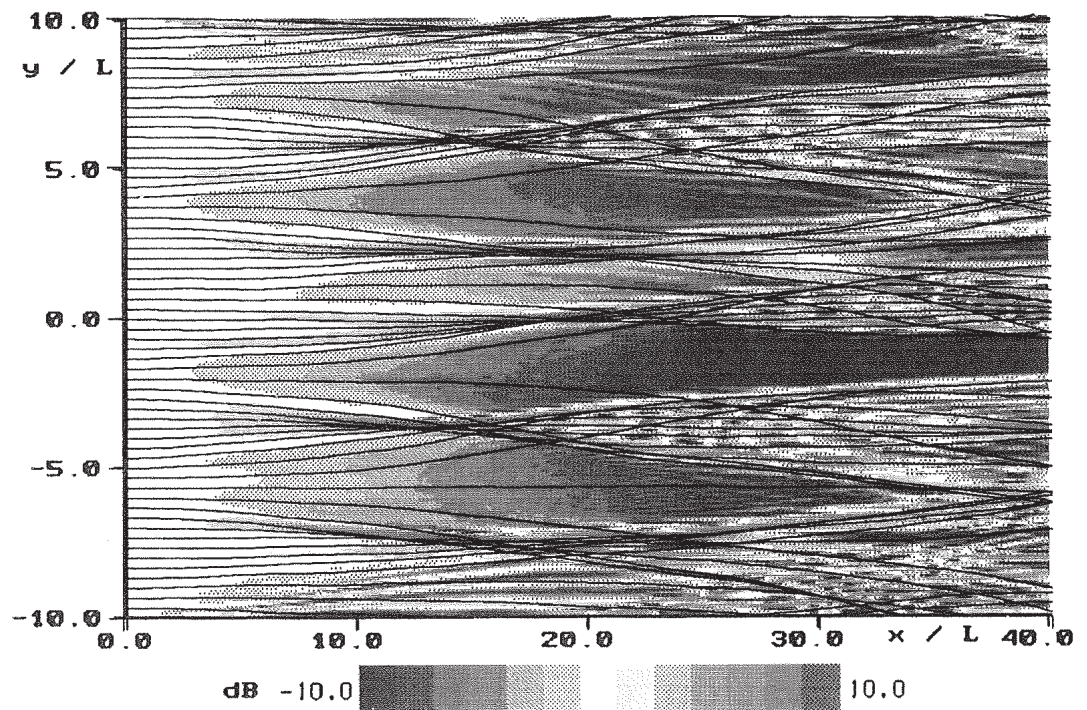


Figure 5.2 : Superposition d'un calcul de rayon et d'une carte de fluctuations d'intensité

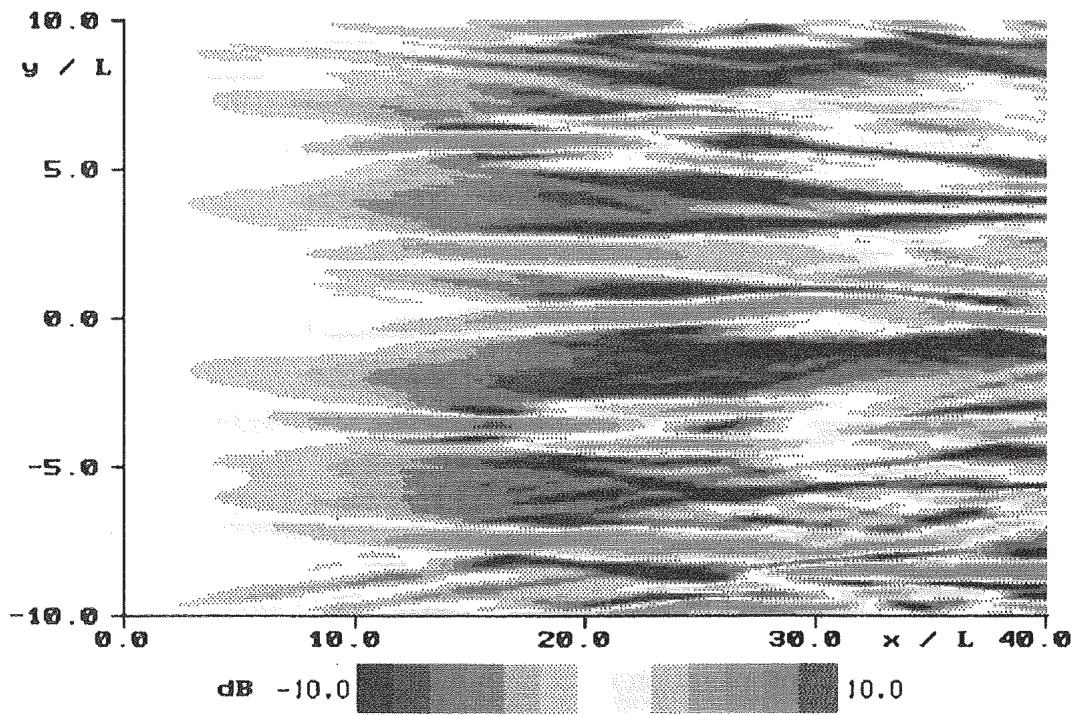


Figure 5.3 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$

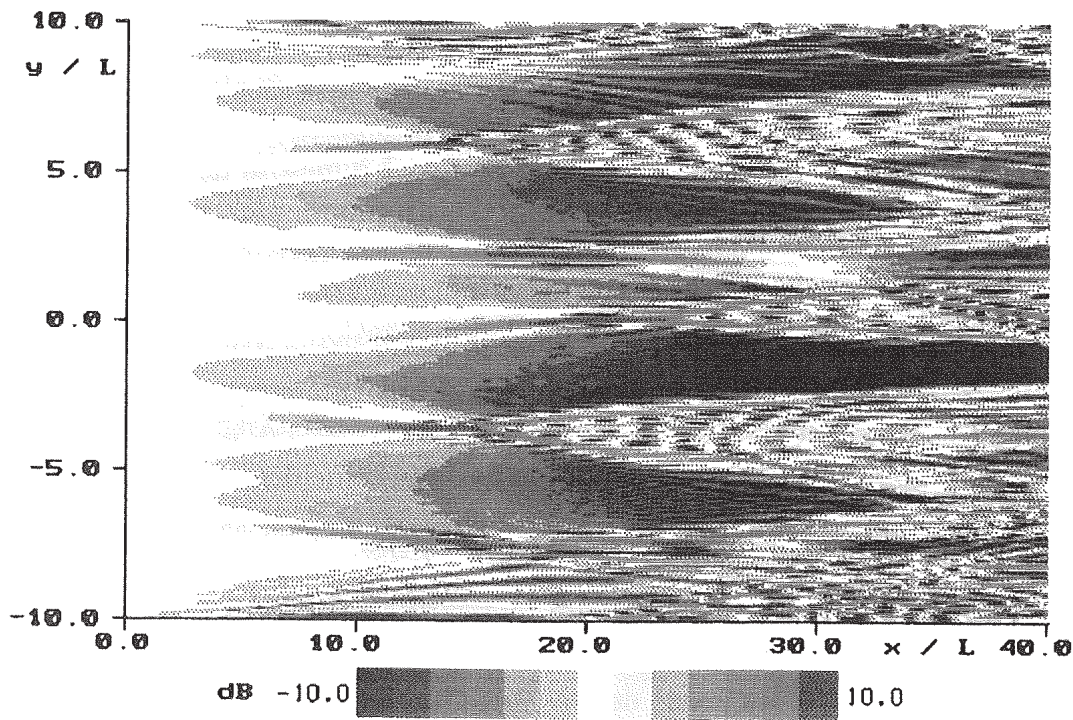


Figure 5.4 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$

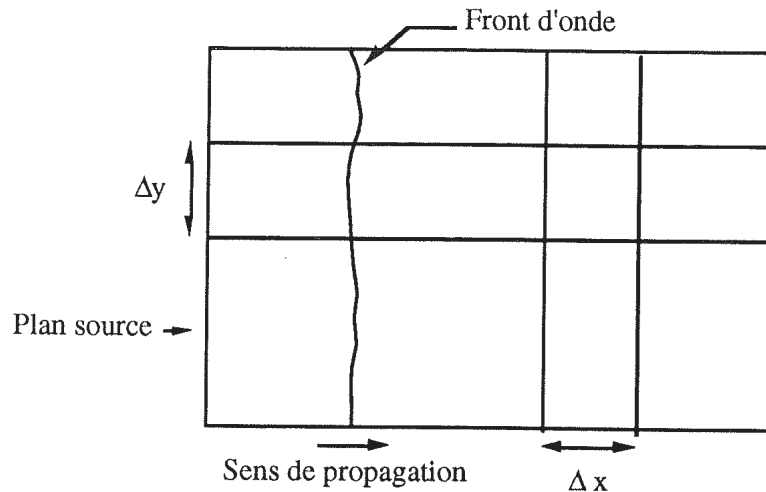


Figure 5.5 : Maillage adopté pour la résolution de l'équation parabolique

du champ acoustique après traversée d'une réalisation du champ thermique. On constate l'influence du champ thermique turbulent sur l'indice de réfraction du milieu. Dès que l'on dépasse quelques échelles intégrales, des structures et des zones caractéristiques de la propagation dans un milieu aléatoire se forment.

En effet très rapidement apparaît une alternance de zones de faible intensité et de régions de renforcement. Le fait que ces structures aient une forme de bandes horizontales est bien entendu le résultat produit par une source de type onde-plane. Les maxima d'intensité correspondent à des localisations assez précises jusqu'à une distance de  $20L$  à  $25L$ , ensuite le champ d'intensité prend une allure plus complexe et moins ordonnée.

Cette augmentation du désordre et cette homogénéisation du champ reflète la multiplication des effets d'interférence des différentes parties de l'onde avec l'accroissement de la distance à la source. En effet au fur et à mesure de l'avancée du front d'onde les zones de forts niveaux se comportent comme des sources secondaires émettant avec un angle d'ouverture qui devient non négligeable dès  $50$  à  $60L$  de la source principale (avec les paramètres de la figure 5.1) ce qui impose d'augmenter la largeur du domaine si l'on veut étudier la propagation à grande distance.

A ce stade, il est intéressant de comparer une même réalisation du champ d'intensité acoustique et du tracé des rayons. Comme on peut le voir sur la figure 5.2 la superposition des deux calculs montre la parfaite coïncidence des deux méthodes.

Les rayons se resserrent dans les zones de forte intensité et au contraire se raréfient lorsque le niveau s'affaiblit. En particulier, les rayons convergent sur les maxima d'intensité. D'un point de vue géométrique ces lieux de focalisation ou caustiques peuvent être déterminées précisément en calculant l'évolution des sections des tubes de rayon. Ici les zones de très forte intensité sont des régions probables de naissance de caustiques. Le tracé des rayons confirme bien la création de sources secondaires à une distance relativement constante ainsi qu'ensuite l'interaction d'un plus grand nombre de rayons du fait de l'ouverture angulaire.



Les figures 5.3 et 5.4 montrent la même réalisation que ci-dessus mais pour une fréquence plus faible ( $\lambda/L = 0.17$  au lieu de 0.085) et plus élevée ( $\lambda/L = 0.043$ ).

La structure globale reste inchangée simplement lorsque le rapport  $\lambda/L$  diminue la "résolution acoustique" augmentant par rapport au champ thermique turbulent, des détails plus fins apparaissent ainsi qu'une plus grande précision dans la localisation des minima et des maxima. On note en particulier un affinement des régions de fortes intensités (zones probables de caustiques) qui laisse présager une meilleure prévisibilité des plus fortes fluctuations de niveau lorsque  $\lambda/L$  est faible. Après ces points de focalisation le faisceau qui en est issu est de mieux en mieux défini lorsque  $\lambda/L$  diminue ce qui correspond bien à une diminution de la diffraction. En particulier pour  $\lambda/L = 0.043$  (figure 5.4) l'accord avec le tracé de rayons est très bon.

## 5.3 Indice de scintillation

### 5.3.1 Evolution de $\sigma_I^2$ en fonction de $\gamma$

Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, l'établissement, sous certaines conditions, de l'équation du moment d'ordre quatre du champ acoustique montre que  $\sigma_I^2$  ne dépend que du seul paramètre  $\gamma$ . Ce paramètre regroupant à la fois les caractéristiques du champ acoustique (fréquence) et du champ de fluctuations thermiques (échelle intégrale et intensité de turbulence) a pour expression dans le cas que nous avons traité (turbulence gaussienne) :

$$\gamma = k_0^3 \overline{\mu^2} L^3 \sqrt{\pi}$$

La méthode employée ici, contrairement aux autres approches citées ci-dessus, fait dépendre  $\sigma_I^2$  des trois paramètres  $k_0$ ,  $\overline{\mu^2}$  et  $L$ . On doit donc observer une invariance de  $\sigma_I^2$  vis à vis de la valeur de ces trois paramètres lorsqu'ils produisent des valeurs de  $\gamma$  identiques. Des tracés de  $\sigma_I^2$  (figure 5.6) pour une même valeur de  $\gamma$  mais pour plusieurs combinaisons du triplet ( $k_0$ ,  $\overline{\mu^2}$ ,  $L$ ) montrent une légère différence (quelques pourcents) entre les courbes.

Toutefois, le désaccord ne se produit qu'au niveau du pic c'est-à-dire pour les très forts niveaux. En outre, la bonne adéquation de nos résultats avec les courbes fournies par la littérature confirme le bien fondé de l'étude en fonction du seul paramètre  $\gamma$ .

Les courbes de  $\sigma_I^2$  ont une allure très caractéristique se décomposant en trois régions. On observe d'abord une montée rapide, ensuite un pic puis un plateau. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux faibles distances de propagations seule la première partie intervient et on peut alors utiliser une approximation analytique de type Born ou Rytov (voir Chapitre 1).

Nous avons pu comparer nos résultats avec ceux de Tur [TUR 82b] (figures 5.10, 5.11, 5.12) ainsi que Spivack et Uscinski [SPIVACK 88] (figures 5.13, 5.14, 5.15, 5.16).

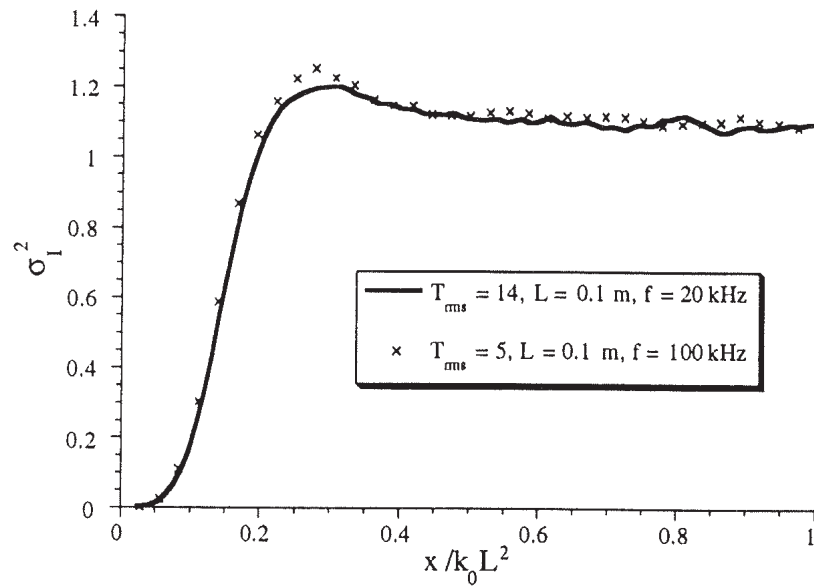


Figure 5.6 : Influence de  $(k_0, \overline{\mu^2}, L)$  à  $\gamma$  constant sur  $\sigma_I^2$

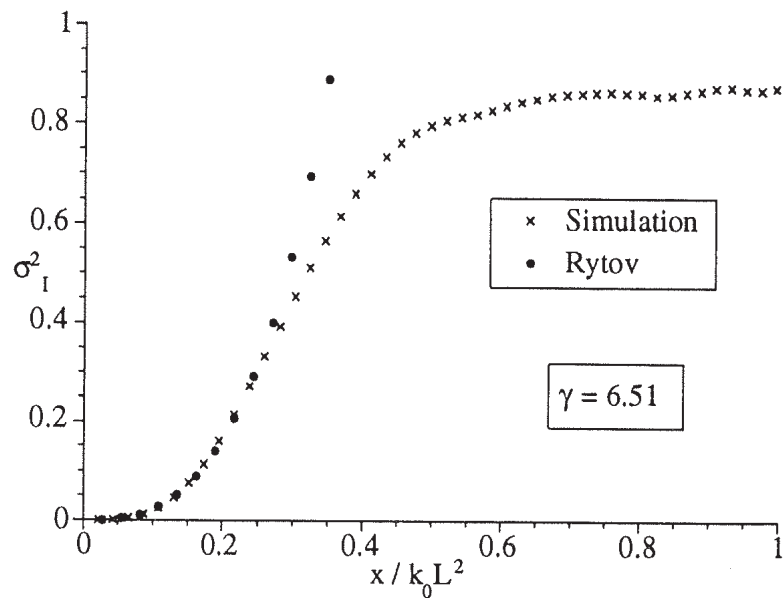


Figure 5.7 : Comparaison avec Rytov  $\gamma = 6.5$

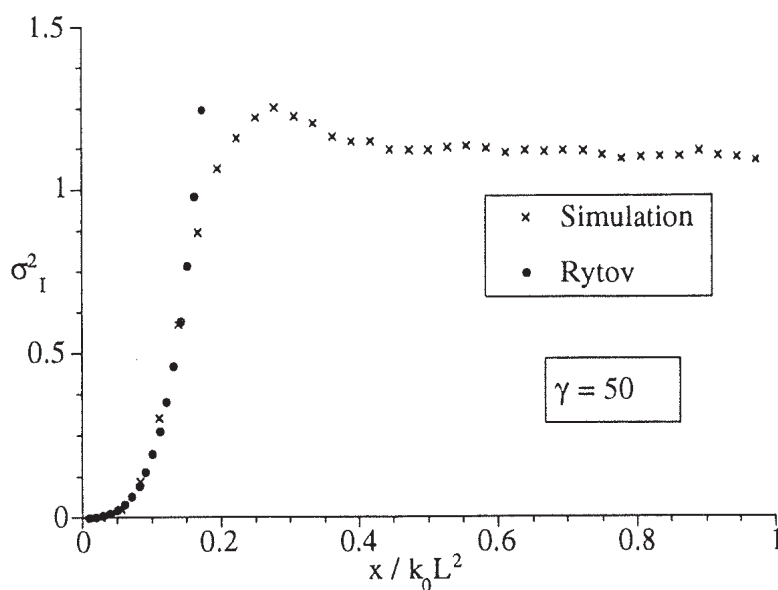


Figure 5.8 : Comparaison avec Rytov  $\gamma = 50$

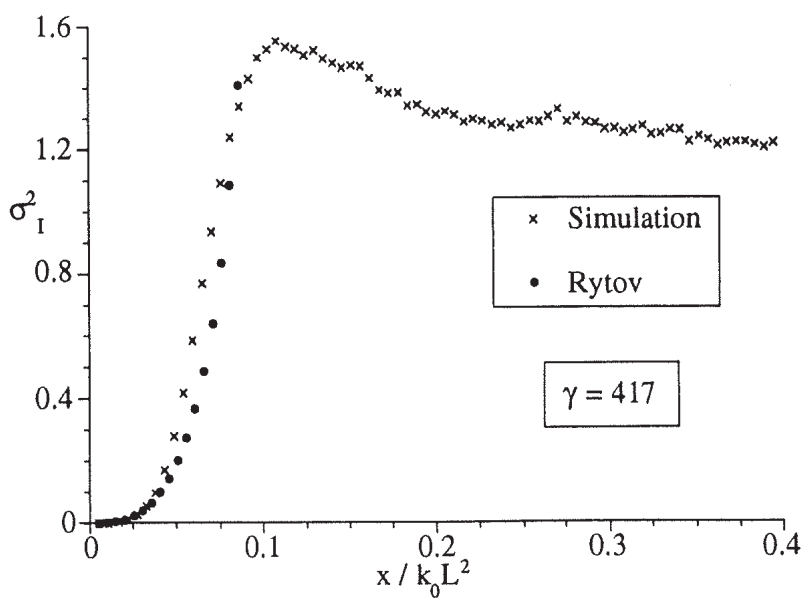


Figure 5.9 : Comparaison avec Rytov  $\gamma = 417$

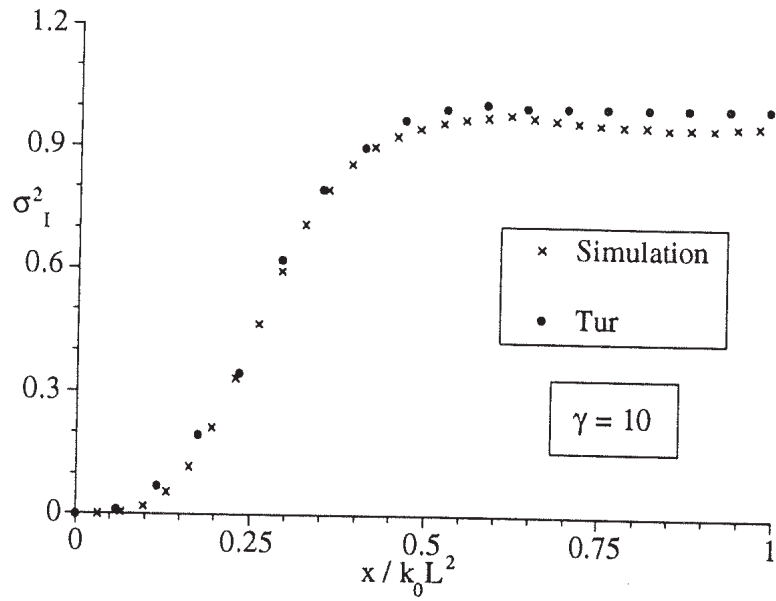


Figure 5.10 : Comparaison avec Tur  $\gamma = 10$

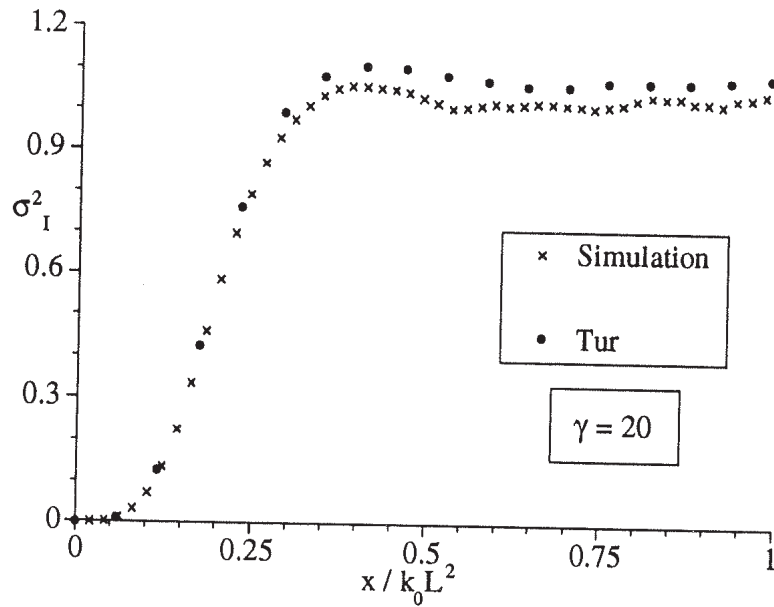


Figure 5.11 : Comparaison avec Tur  $\gamma = 20$

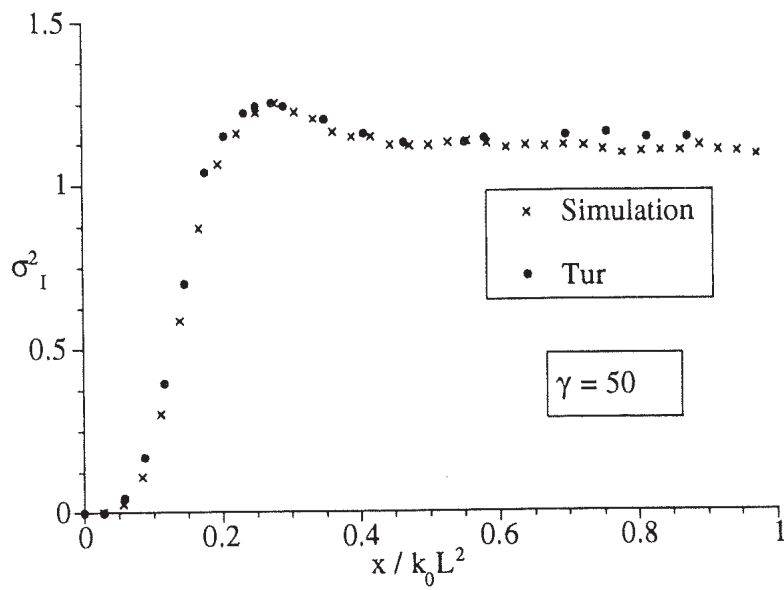


Figure 5.12 : Comparaison avec Tur  $\gamma = 50$

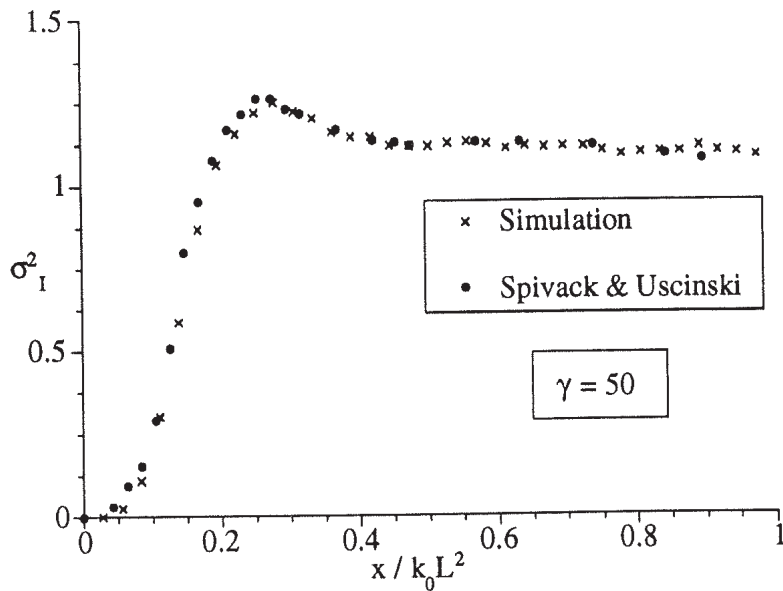


Figure 5.13 : Comparaison avec Spivack et Uscinski  $\gamma = 50$

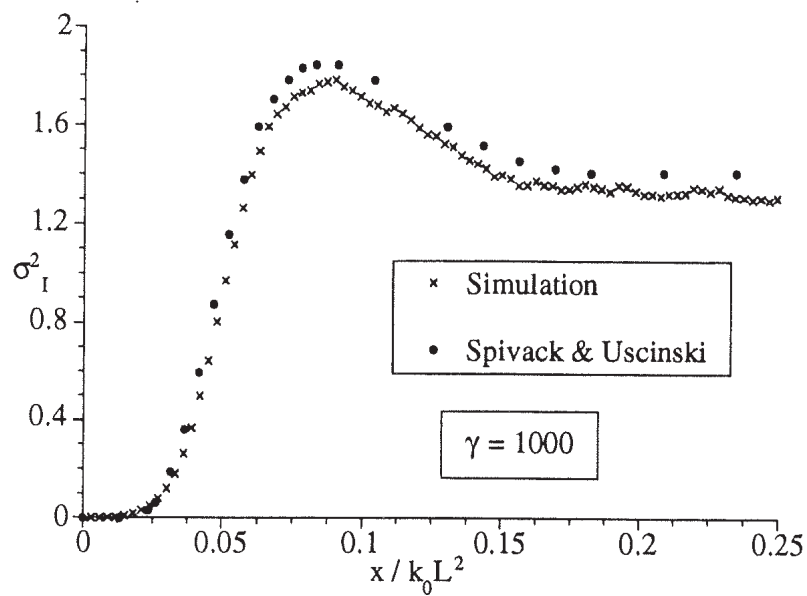


Figure 5.14 : Comparaison avec Spivack et Uscinski  $\gamma = 1000$

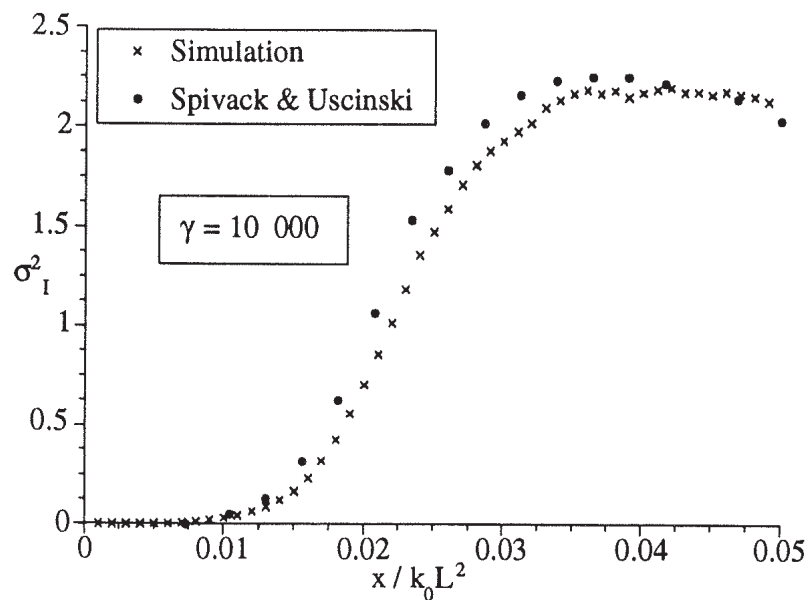


Figure 5.15 : Comparaison avec Spivack et Uscinski  $\gamma = 10000$

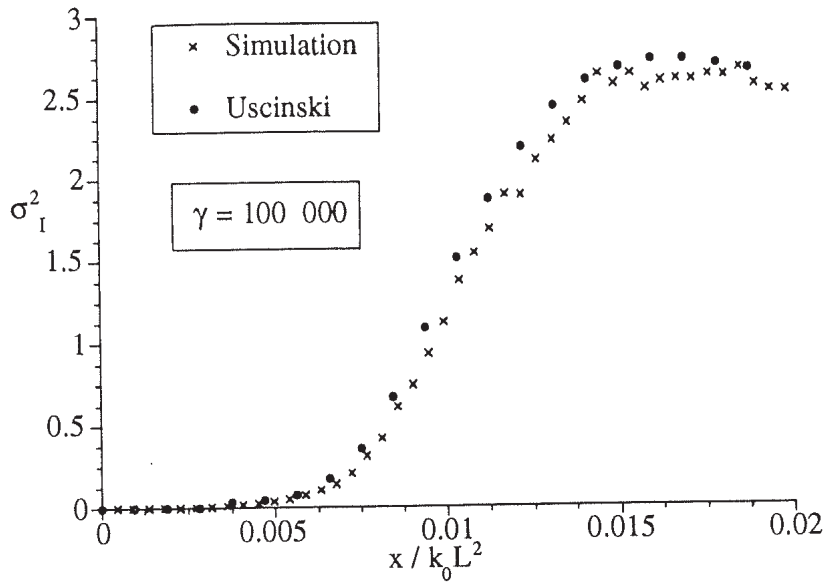


Figure 5.16 : Comparaison avec Spivack et Uscinski  $\gamma = 100000$

Tur a résolu l'équation du moment d'ordre quatre pour  $\gamma \leq 50$  alors que Uscinski a poursuivi cette étude dans le cas  $\gamma \geq 50$ . Dans les deux cas un très bon accord est obtenu avec la simulation pour une plage de valeurs de  $\gamma$  très étendue (de 10 à 100000). Nos résultats sont donc confirmés par ceux de la littérature en ce qui concerne l'évolution de  $\sigma_I^2$  en fonction de  $\gamma$ .

En représentant  $\sigma_I^2$  en fonction de  $Z = x/(k_0 L^2)$  (figure 5.17) on voit que lorsque  $\gamma$  croît le pic du maximum est de plus en plus prononcé alors que son abscisse se rapproche de l'origine. Le pic n'est observable que pour  $\gamma \geq 20$ , en dessous de cette valeur une fois le maximum atteint,  $\sigma_I^2$  conserve cette valeur et on a un plateau horizontal tendant vers 1. Il est donc beaucoup plus facile de prévoir la valeur de l'indice de scintillation pour des faibles valeurs de  $\gamma$  puisqu'il n'est pas utile de poursuivre le calcul une fois le maximum atteint.

En revanche lorsque  $\gamma \geq 20$ , l'obtention d'un plateau ne se fait qu'après parcours d'une distance supplémentaire augmentant avec  $\gamma$ .

### 5.3.2 Etude du pic de $\sigma_I^2$

Spirack et Uscinski [SPIVACK 88] se sont attachés à montrer que la hauteur du pic et son abscisse  $Z_p = x_p/(k_0 L^2)$  peuvent être prévus uniquement en fonction du paramètre  $\gamma$ . Ils obtiennent par une méthode analytique les expressions :

$$Z_p \approx 0.65\gamma^{-1/3} \quad (5.1)$$

$$\sigma_I^2(Z_p) \approx 0.437 + 0.161 \ln \gamma \quad (5.2)$$

En utilisant une approche numérique, ils trouvent :

$$Z_p \approx 0.84\gamma^{-0.34} \quad (5.3)$$

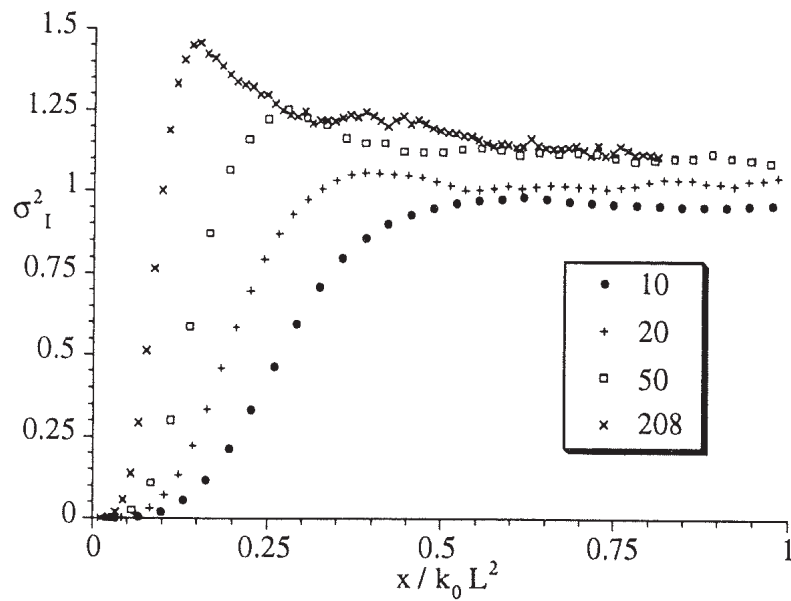


Figure 5.17 : Evolution de  $\sigma_I^2$  en fonction de  $\gamma$

$$\sigma_I^2(Z_p) \approx 0.56 + 0.185 \ln \gamma \quad (5.4)$$

Quant à notre simulation, en reprenant plusieurs cas nous obtenons :

$$Z_p \approx 1.03 \gamma^{-0.35} \quad (5.5)$$

$$\sigma_I^2(Z_p) \approx 0.42 + 0.195 \ln \gamma \quad (5.6)$$

(Les figures 5.18 et 5.19 montrent les courbes correspondantes.)

Nous sommes donc assez près de leurs prévisions en ce qui concerne la hauteur du pic, pour l'abscisse nous trouvons une pente (échelle log) comparable mais restons à une translation près. Cette différence peut s'expliquer pour la plus grande difficulté à déterminer la position du pic lorsque  $\gamma \geq 50$ .

L'apparition d'un pic suivi d'une saturation de niveau peut être rapprochée de l'allure d'une carte d'intensité sur une réalisation. Il semble logique de relier le pic aux points de focalisation, c'est-à-dire de naissance des caustiques. En effet, c'est à cette distance que l'on aura de très forts niveaux en certains points séparés par de grandes zones à niveau très faible. Ce que l'on observe spatialement sur une seule réalisation va se produire de la même façon d'une réalisation à une autre, l'axe  $y$  (perpendiculaire à la direction de propagation) étant remplacé par "l'axe" des réalisations.

De même qu'avant d'atteindre la zone des premières caustiques, les variations très faibles de niveau correspondent bien à la montée rapide du début des courbes (zone de validité de la solution de Rytov), avec cette zone la carte d'intensité montre une homogénéisation du champ qui est bien en accord avec le plateau des courbes de  $\sigma_I^2$ . La localisation des points focaux est d'autant plus précise que  $\gamma$  est élevé ce qui



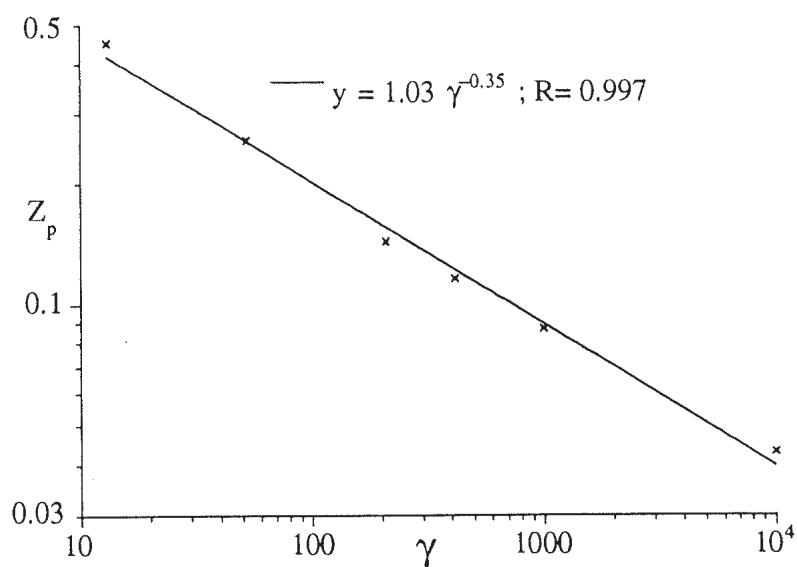


Figure 5.18 : Abscisse du pic de  $\sigma_I^2$

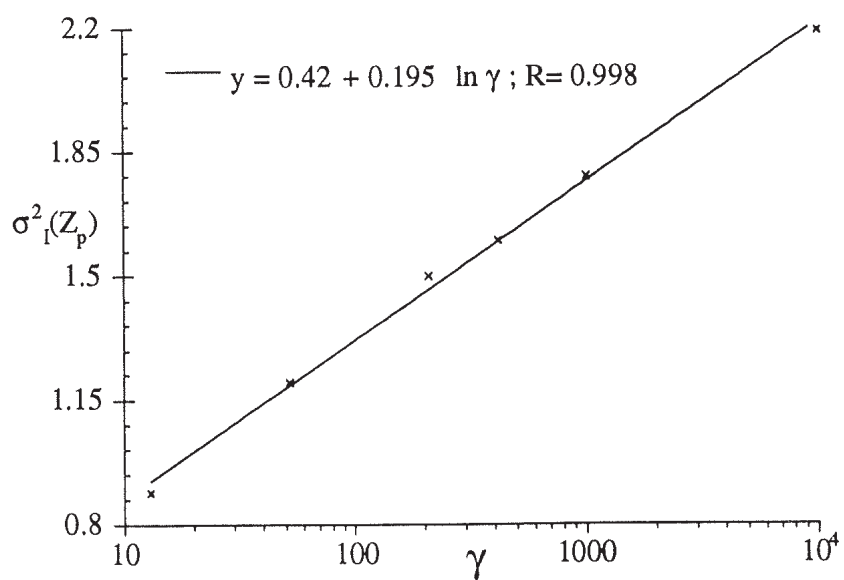


Figure 5.19 : Hauteur du pic de  $\sigma_I^2$

correspond à  $\overline{\mu^2}$  et  $L$  fixés à une fréquence élevée. Il semble donc que la position du pic soit gouvernée uniquement par les aspects géométriques du champ acoustique.

Kulkarny et White [KULKARNY 82] ont étudié le problème de la focalisation des ondes et de la naissance des caustiques dans un milieu turbulent bidimensionnel d'un point de vue géométrique. En résolvant les équations des tubes de rayons, ils ont pu calculer les densités de probabilité des distances d'apparition des caustiques (résultat confirmé par Blanc-Benon [BLANC-BENON 91b]).

Ces auteurs représentent leur densité de probabilité en fonction du paramètre  $x\mathcal{V}^{2/3}$  où  $x$  est la distance de propagation (abscisse curviligne d'un rayon  $\approx$  distance pour une onde plane) et  $\mathcal{V}$  est donné par :

$$\mathcal{V}^{2/3} = \frac{12^{2/3} \langle \mu^2 \rangle^{1/3} \pi^{1/6}}{L} \quad (5.7)$$

Notre raisonnement précédent nous conduit donc à représenter  $\sigma_I^2$  non plus en fonction de  $Z$  qui inclut l'influence de la fréquence, mais en fonction de  $x\mathcal{V}^{2/3}$  qui est purement "géométrique". On constate (Figure 5.20) qu'alors le pic est toujours à peu près à la même abscisse entre  $x\mathcal{V}^{2/3} = 1.5$  et  $x\mathcal{V}^{2/3} = 2$  ce qui confirme notre hypothèse compte tenu des erreurs numériques inévitables.

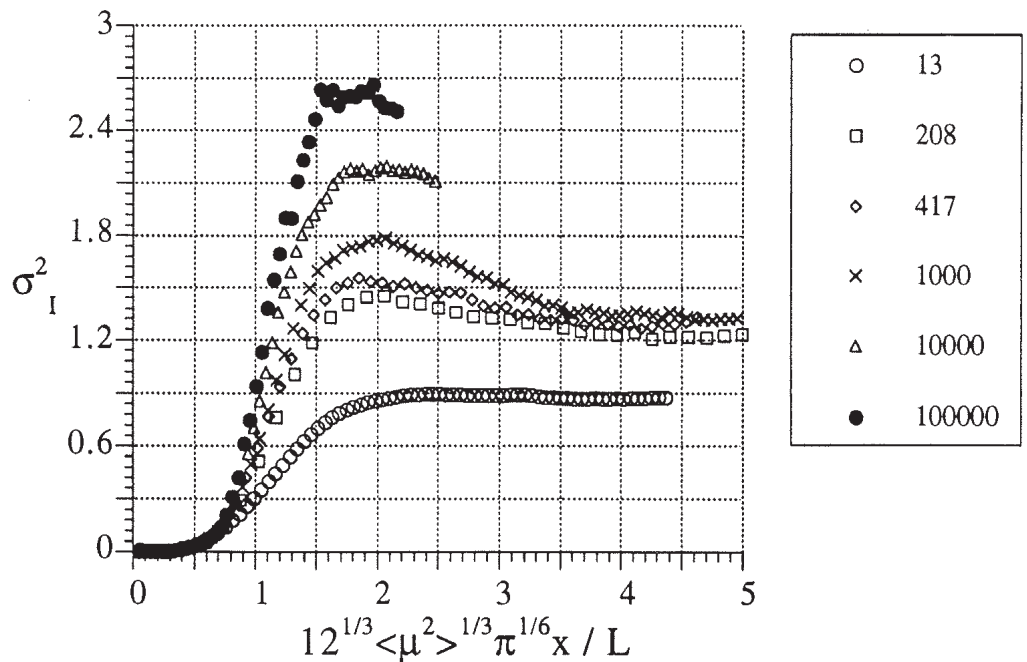


Figure 5.20 :  $\sigma_I^2$  en fonction du paramètre de Kulkarny et White

Comparons analytiquement la position du pic donné par Spivack et Uscinski et la position du maximum de la densité de probabilité d'apparition de la première caustique donnée par Kulkarny et White ; les premiers obtiennent (solution analytique) la loi donnée par les formules (5.1) et (5.2). D'où :

$$x_p = 0.65 \pi^{1/6} \langle \mu^2 \rangle^{-1/3} L$$

étant donnée l'expression de  $\gamma$ . Or, Kulkarny et White donnent pour le pic de la densité de probabilité de la première caustique :

$$x_p = 1.35\mathcal{V}^{-2/3}$$

d'où :

$$x_p = 12^{-1/3}\pi^{-1/6} \langle \mu^2 \rangle^{-1/3} L \times 1.35$$

On retrouve donc bien dans ces deux cas la proportionnalité à  $L \langle \mu^2 \rangle^{-1/3}$ . Plus précisément pour la première caustique K. et W. fournissent :

$$x_p = 0.487L \langle \mu^2 \rangle^{-1/3}$$

et U. et S. :

$$x_p = 0.537L \langle \mu^2 \rangle^{-1/3}$$

ces deux expressions sont presque identiques ; la position du pic de  $\sigma_I^2$  et le pic de la densité de probabilité de la première caustique semblent donc correspondre. En ce qui concerne nos calculs, le pic se situe entre  $x\mathcal{V}^{2/3} = 1.5$  et  $x\mathcal{V}^{2/3} = 2$ , donc légèrement décalé par rapport à la position des caustiques. Notons cependant que Uscinski obtient sa formule à partir d'expressions analytiques, la formule "numérique" donnant aussi un décalage par rapport aux caustiques.

Localement l'onde plane "focalisée" se comporte comme une onde sphérique et on doit nécessairement obtenir une nouvelle zone de focalisation, c'est à dire une nouvelle zone de caustiques.

Les théories géométriques prévoient cette nouvelle région de focalisation, qui devrait en principe être décelable sur les courbes de  $\sigma_I^2$ . Nous n'avons jamais pu observer de variation de niveau significative. On peut conjecturer que les perturbations engendrées par cette région ne produisent pas de fluctuations de niveau suffisantes pour être décelées dans les valeurs de  $\sigma_I^2$ , ou que le champ acoustique devient trop complexe.

La hauteur du pic dépend nécessairement de la fréquence puisqu'on a vu précédemment que  $\sigma_I^2$  serait probablement plus élevé lorsque la diffraction est faible et par conséquent les zones de caustiques peu étendues spatialement. Ceci implique donc une fréquence élevée. L'expression de Spivack et Uscinski le montre clairement puisque :

$$\sigma_I^2(Z_p) \approx 0.437 + 0.161 \ln \gamma$$

et

$$\ln \gamma = 3 \ln(k_0 L) + \ln \overline{\mu^2} + \ln \sqrt{\pi}$$

le pic sera d'autant donc plus haut que  $k_0 L$  sera grand.

## 5.4 Densité de probabilité de l'intensité

### 5.4.1 Evolution en fonction de $\lambda/L$

A partir du calcul des fluctuations d'intensité par l'équation parabolique on peut analyser le comportement de ces fluctuations acoustiques sous l'angle des probabilités. En se plaçant à une distance fixée de la source on peut calculer la densité de probabilité des fluctuations d'intensité recueillies le long d'un axe perpendiculaire à l'axe de propagation. Cette grandeur sera notée  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$ . Pour obtenir  $\mathcal{P}(I)$  l'intervalle des valeurs de l'intensité  $[0, I_{max}]$  est divisé en  $n$  classes dont il faut calculer le nombre d'éléments. La précision des résultats dépend du choix de  $n$  pour une valeur de  $I_{max}$  donnée. Les courbes ci-dessous sont calculées avec un rapport  $n/I_{max}$  de 32 (avec  $I_{max} = 8$ ) qui permet d'atteindre toutes les valeurs significatives de  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$ .

La figure 5.21 montre  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$  obtenue pour  $\lambda/L = 0.17$  (c'est à dire élevé, cela correspond à la figure 5.3) et une distance de propagation dans la turbulence comprise entre 5 et 20  $L$ . la loi obtenue est de type gaussienne jusqu'à 10  $L$ , puis elle commence à avoir une forme exponentielle pour les fortes valeurs de  $I$  à partir de 15  $L$ . Ce comportement se confirme pour les plus grandes distances de propagation :

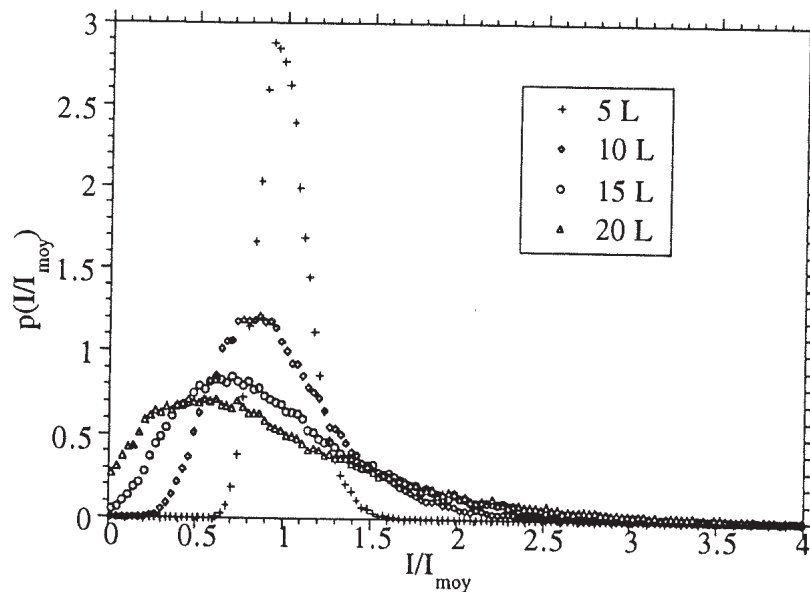


Figure 5.21 : Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation :  $\lambda/L = 0.17$ , distance de propagation : 5 à 20  $L$

sur la figure 5.22 le calcul à été poursuivi de 25 à 40  $L$ . Le caractère exponentiel pour les grandes distances de propagation est alors évident. On peut noter que cette plage de distance correspond au plateau des courbes de  $\sigma_I^2$  (zone de saturation). Le champ acoustique est alors suffisamment chaotique pour que l'intensité ait une loi de probabilité indépendante de la distance.

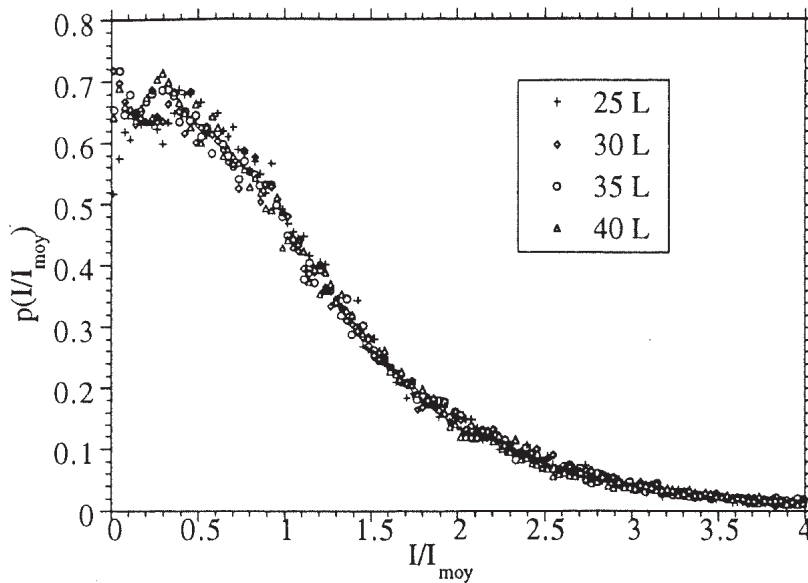


Figure 5.22 : Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation :  $\lambda/L = 0.17$ , distance de propagation : 25 à 40 L

Afin d'étudier l'évolution de  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$  avec le rapport  $\lambda/L$  des calculs on été réalisés pour une valeur plus faibles de ce dernier. Les figures 5.23 et 5.24 montrent  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$  obtenue pour  $\lambda/L = 0.043$ .

En comparant les figures 5.21 et 5.23 on voit que conformément aux observations faites pour une réalisation pour une faible distance (5 L) il n'y a pas de différence significative. En revanche dès 10 L la tendance vers une loi exponentielle est beaucoup plus nette dans le cas  $\lambda/L = 0.043$  avec un décalage sensible des maxima vers l'origine.

Pour de plus grandes distances ( figures 5.22 et 5.24) les différence sont encore plus marquée : la partie "gaussienne" de  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$  est pratiquement absente pour  $\lambda/L = 0.043$  et la probabilité des faibles niveaux est beaucoup plus élevée. Dans le cas  $\lambda/L = 0.17$  la répartition des niveaux est beaucoup moins tranchée ce qui correspond bien à une diffraction plus élevée.

### 5.4.2 Modélisation par une loi Gamma généralisée

Il est intéressant d'essayer de modéliser l'évolution de  $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$  par une loi de probabilité connue. Blanc-Benon et Juvé [BLANC-BENON 90b] suggèrent, pour des résultats expérimentaux, d'utiliser la loi Gamma généralisée à deux paramètres  $b$  et  $\kappa$  soit :

$$\mathcal{P}_\Gamma(I) = bv^\kappa/\Gamma(\kappa)I^{b\kappa-1}e^{-vI^b} \quad (5.8)$$

$$v = \left( \frac{\Gamma(\kappa + 1/b)}{\Gamma(\kappa)} \right)^b \quad (5.9)$$

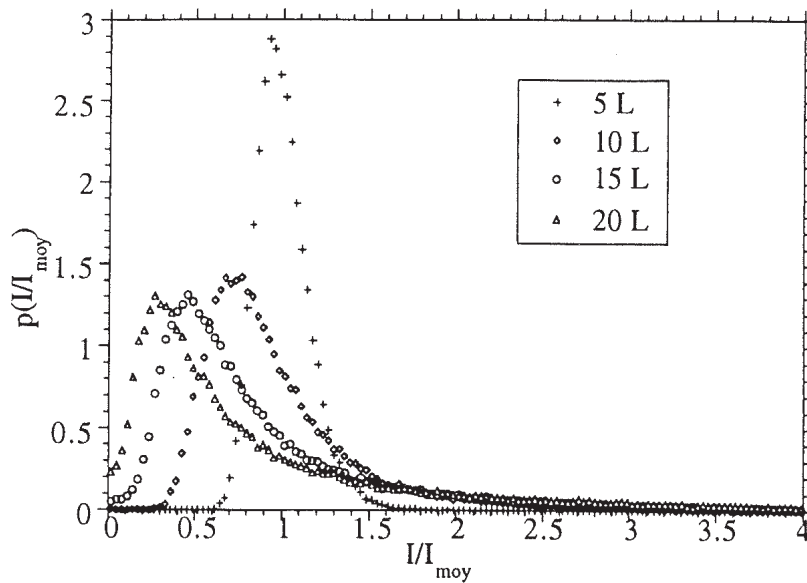


Figure 5.23 : Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation :  $\lambda/L = 0.043$ , distance de propagation : 5 à 20 L

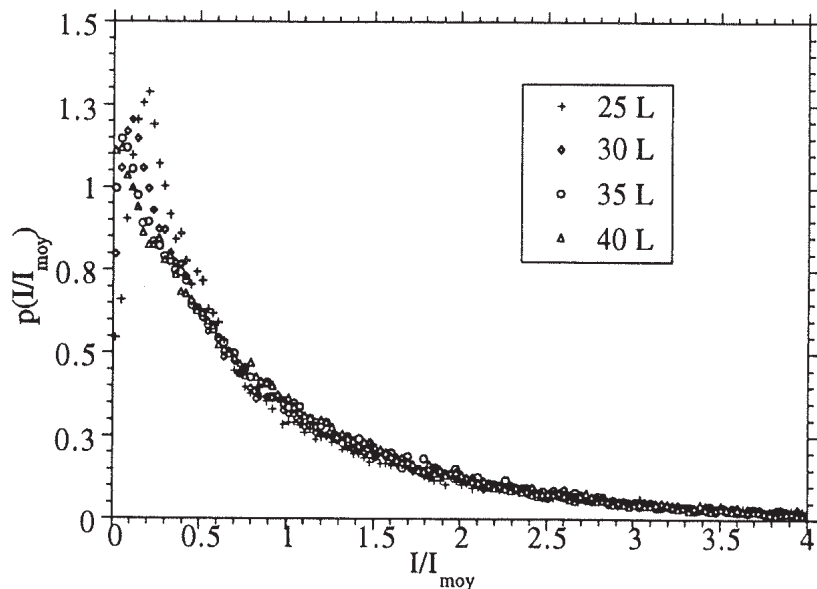


Figure 5.24 : Densité de probabilité des fluctuations d'intensité de propagation :  $\lambda/L = 0.043$ , distance de propagation : 25 à 40 L

où  $\Gamma(\kappa)$  est la fonction  $\Gamma$ . Lorsque  $\kappa \rightarrow \infty$  on retrouve la loi log-normale et lorsque  $b = \kappa = 1$  on obtient la loi exponentielle. Pour évaluer les paramètres  $b$  et  $\kappa$  il faut résoudre le système non linéaire associé aux équations des moments d'ordre 2 et 3,  $m_2^\Gamma$  et  $m_3^\Gamma$  de  $\mathcal{P}_\Gamma(I)$  :

$$m_2^\Gamma = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\Gamma(\kappa)\Gamma(\kappa + 2/b)}{\Gamma^2(\kappa + 1/b)} \quad (5.10)$$

$$m_3^\Gamma = \frac{\langle I^3 \rangle}{\langle I \rangle^3} = \frac{\Gamma(\kappa)^2\Gamma(\kappa + 3/b)}{\Gamma^3(\kappa + 1/b)} \quad (5.11)$$

On peut constater sur les figures 5.25, 5.26, 5.27, 5.28 une excellente adaptation de la loi Gamma pour  $\lambda/L = 0.17$  quelque soit la distance de propagation. Ce résultat confirme donc la validité de ce modèle qui présente une très grande plage d'utilisation, en outre cela montre que le modèle numérique bidimensionnel à le même type de comportement que les valeurs mesurées.

## 5.5 Conclusion

La résolution de l'équation parabolique par Transformée de Fourier associée à la génération de turbulence par modes de Fourier aléatoires se révèle être une méthode souple et efficace pour décrire les fluctuations d'intensité acoustique dans le cas d'une onde plane pour un milieu bidimensionnel. En effet, si les temps de calculs sont relativement long (de dix à trente heures sur Alliant FX2800 pour un calcul de ce chapitre), il n'y a pas de limitation sur l'ordre du moment du champ acoustique.

Le calcul de  $\sigma_I^2$  par cette méthode permet d'éviter la résolution d'un équation spécifique tout en fournissant des résultats aussi précis. On supprime ainsi la nécessité de faire l'hypothèse de delta-corrélation pour le champ turbulent ce qui offre la possibilité de modéliser un milieu plus complexe. On peut noter cependant la nécessité de bien décrire le champ thermique en prenant un nombre de modes suffisant (100 modes dans les cas traités). Un rapprochement avec des résultats sur les caustiques obtenus dans le cadre d'une théorie géométrique a permis de préciser l'influence de celles-ci sur l'indice de scintillation.

La densité de probabilité des fluctuations d'intensité décrit bien le comportement du champ acoustique. Elle confirme les observations d'une réalisation et permet notamment de mettre en évidence les effets d'une plus ou moins grande diffraction. Tout en confortant les résultats obtenus avec  $\sigma_I^2$  ce calcul donne accès de façon simple à tout les moments statistiques des fluctuations d'intensité. Cela a permis en particulier de montrer que cette loi de probabilité est très bien modélisée par une loi Gamma généralisée à deux paramètres.

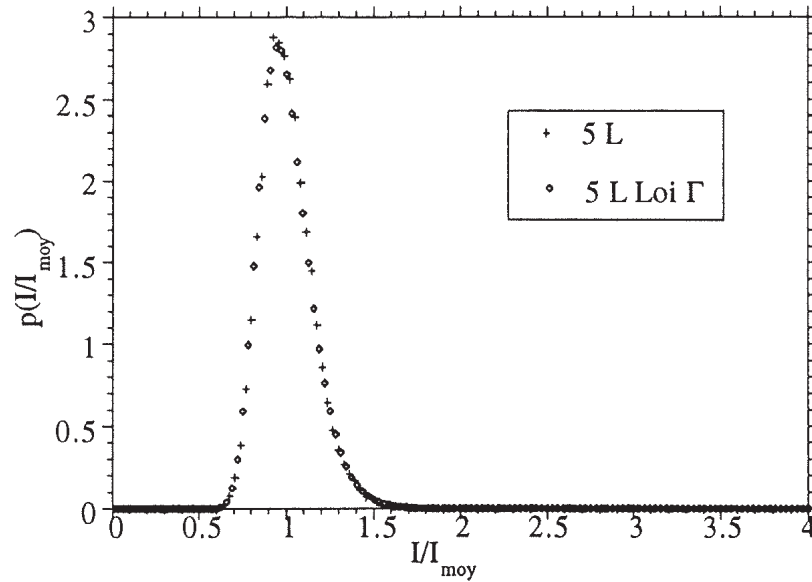


Figure 5.25 : Comparaison avec la loi Gamma généralisée :  $\lambda/L = 0.17$ , 5 L de propagation

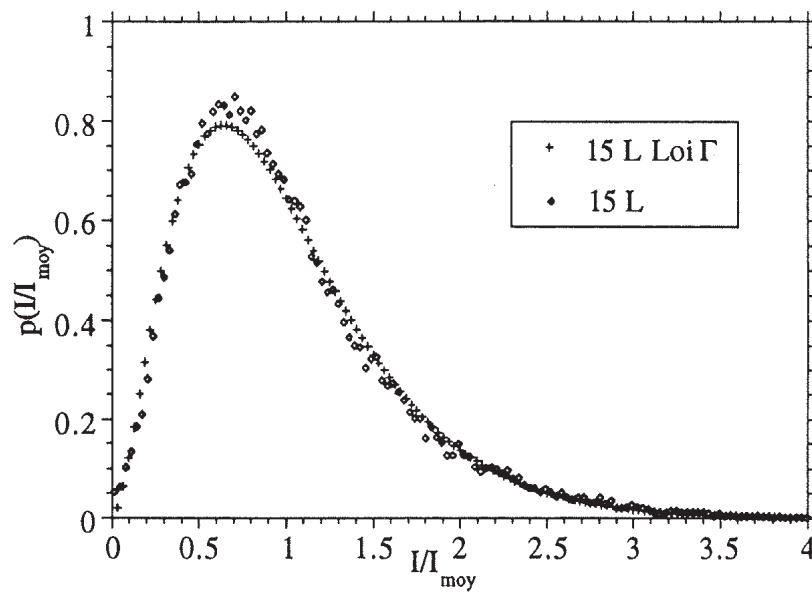


Figure 5.26 : Comparaison avec la loi Gamma généralisée :  $\lambda/L = 0.17$ , 15 L de propagation



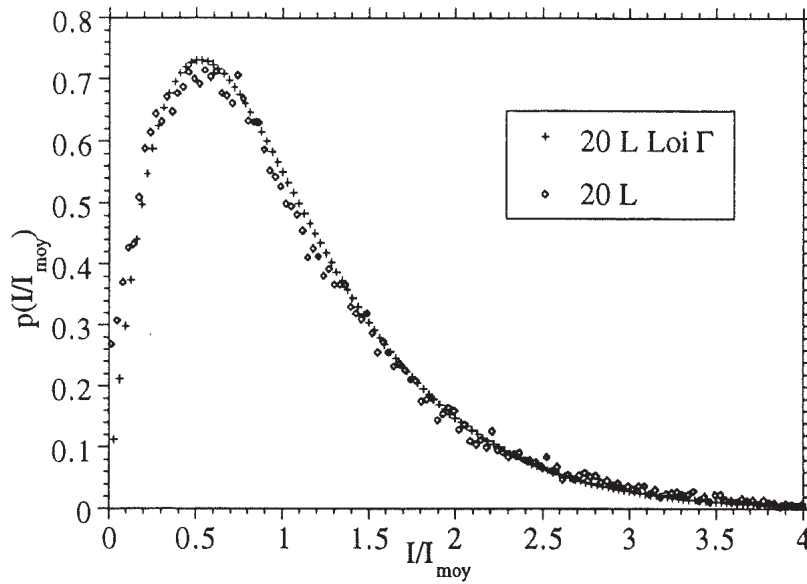


Figure 5.27 : Comparaison avec la loi Gamma généralisée :  $\lambda/L = 0.17$ , 20 L de propagation

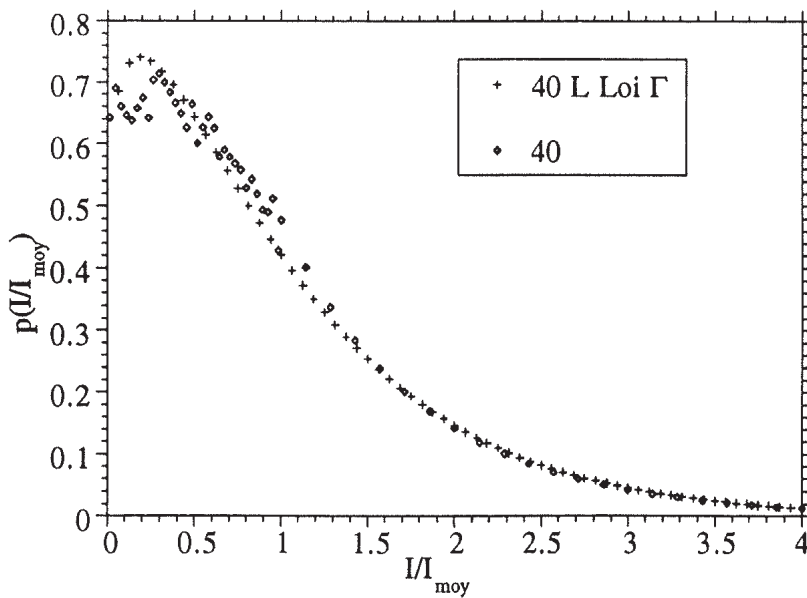


Figure 5.28 : Comparaison avec la loi Gamma généralisée :  $\lambda/L = 0.17$ , 40 L de propagation



# Chapitre 6

## ETUDE DE L'INTENSITE 3D

### 6.1 Introduction

L'étude qui précède concerne un milieu 2D, elle montre que, qualitativement, ce modèle reflète bien certains fait expérimentaux, malgré sa rusticité. Cependant un modèle 2D peut masquer certains comportements physiques ou au contraire rajouter des informations inhérentes à cette simplification.

Le besoin d'une vérification plus approfondie du bien-fondé du modèle 2D nous a donc conduit à étendre une partie de l'étude au cas du milieu tridimensionnel.

Les principes de construction des fluctuations thermiques turbulentes restent les mêmes (voir chapitre 2). La grandeur acoustique choisie pour cette étude, l'intensité, est obtenue par l'équation parabolique. On peut ensuite accéder au calcul de l'indice de scintillation et mettre ainsi en évidence le rôle des caustiques, plus facilement qu'en utilisant une méthode de rayons. En particulier la position et la hauteur du pic de  $\sigma_I^2$  constituent des points de repères importants pour déceler des changements de comportement entre le cas 2D et le cas 3D.

### 6.2 Observation du champ acoustique sur une réalisation

Les figures 6.1, 6.2, 6.3, montrent une coupe du champ acoustique selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x$ . Ces cartographies des niveaux acoustiques ont été calculées pour une même réalisation du champ thermique mais pour trois fréquences différentes du signal propagé ( $\lambda/L = 0.17$ ,  $\lambda/L = 0.085$ ,  $\lambda/L = 0.043$ ) après une distance de propagation dans la turbulence de  $10L$ .

Ces tracés mettent bien en évidence l'effet de la turbulence thermique sur la répartition de l'énergie acoustique dans le plan  $(y, z)$ . On voit en effet apparaitre des structures assez nettes correspondant à des faibles niveaux sonores ; ces zones étant relativement étendues comparativement aux régions de fortes intensités dont la localisation est beaucoup plus précise.

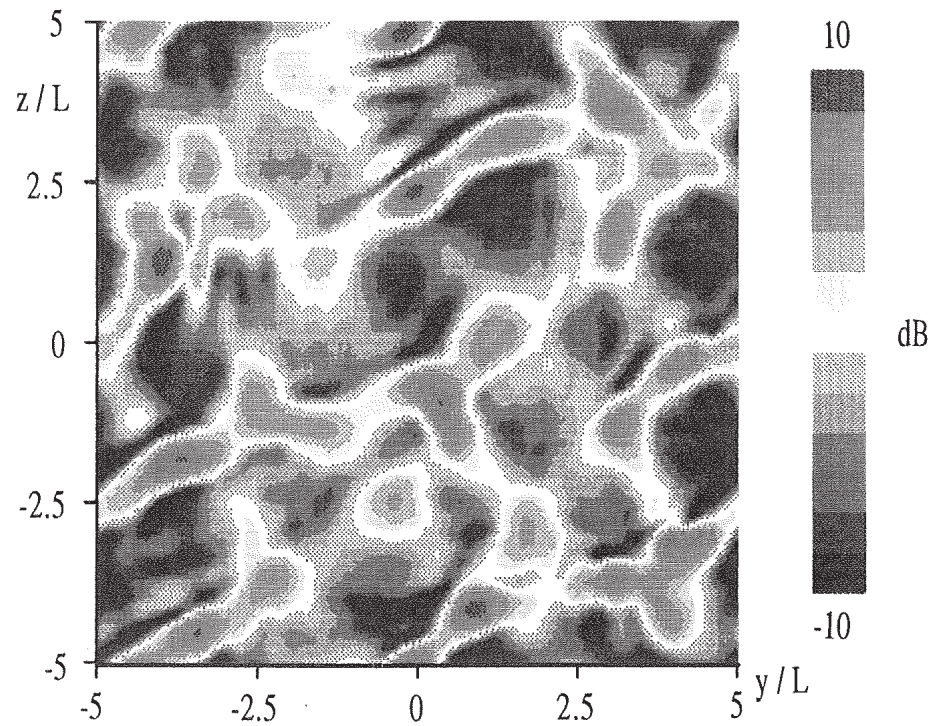


Figure 6.1 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$

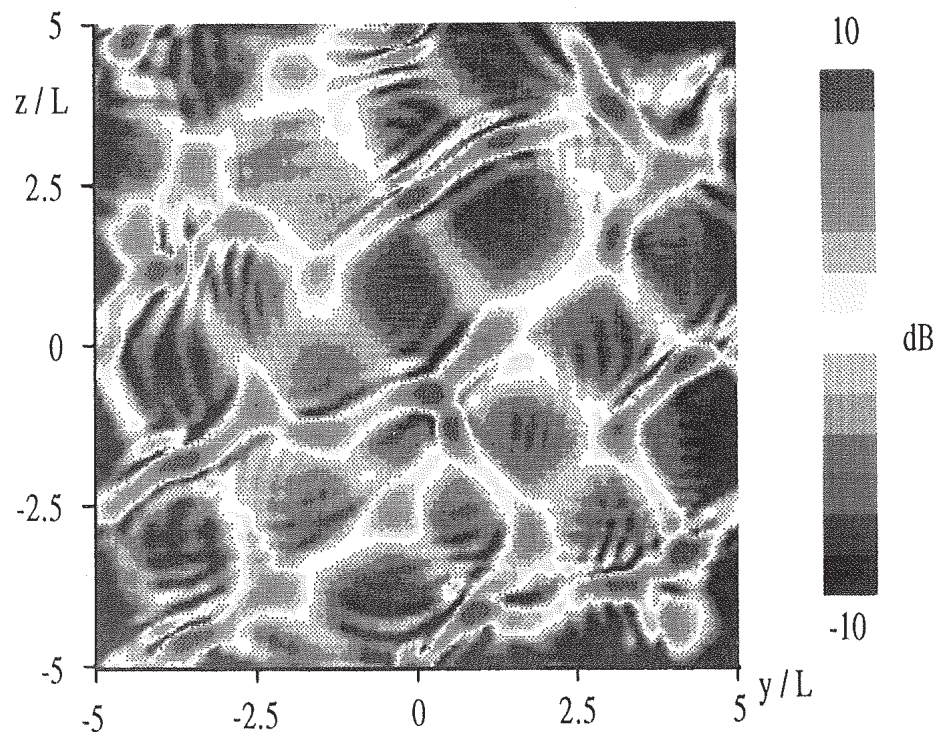


Figure 6.2 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$

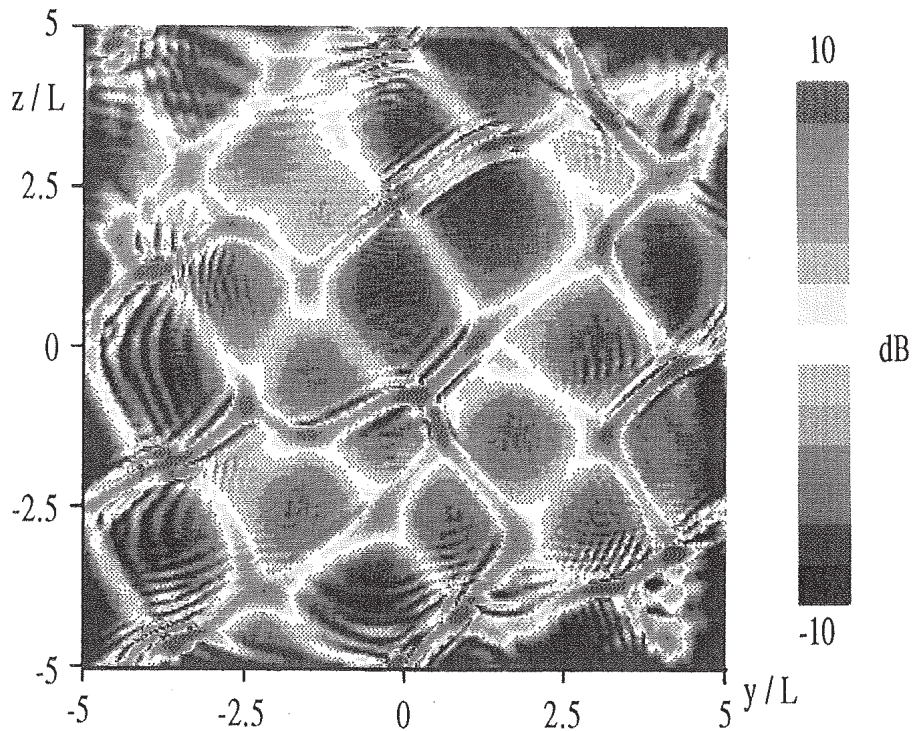


Figure 6.3 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$

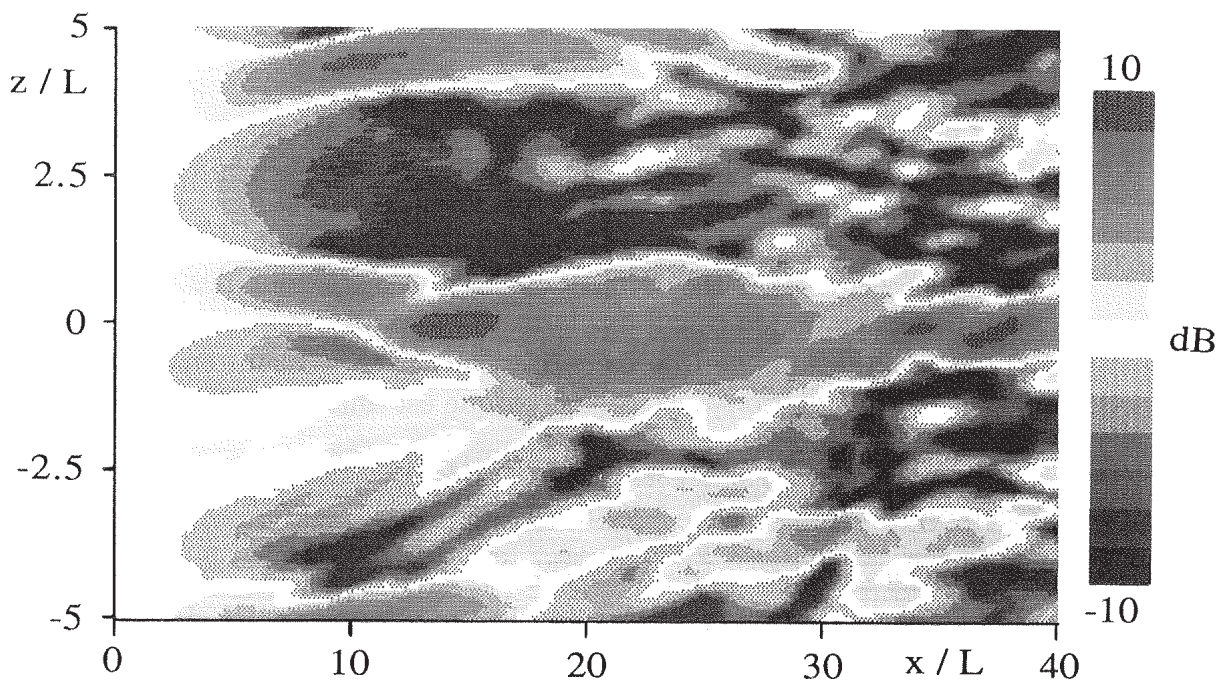


Figure 6.4 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation

Cette distinction s'accroît lorsque  $\lambda/L$  diminue, la diffraction étant moins importante, les renforcements de niveaux sont situés dans des régions de moindre étendue spatiale. On constate en particulier que des "îlots" de forte intensité à basse fréquence, se révèlent être composés de plusieurs zones distinctes à plus haute fréquence. Cet effet de la fréquence illustre bien les différences que l'on peut constater entre une approche de type "rayon" et une approche faisant intervenir la fréquence. Cela permet de comprendre les difficultés à relier les "sauts de phase" (voir chapitre 4) ou d'intensité calculés par l'équation parabolique, aux positions des caustiques qui correspondraient bien dans le cas d'une très haute fréquence.

La vue d'une coupe  $(y, z)$  met donc bien en évidence la présence de "faisceaux" où se concentre l'intensité ; c'est bien le même comportement qui avait été observé pour le modèle 2D. Les figures 6.4, 6.5, 6.6 montrent le champ acoustique selon des plans orthogonaux aux précédents. Une coupe dans un plan  $(z, x)$  à  $y$  fixé (parallèle à la direction de propagation) n'est pas directement comparable au plan 2D correspondant. En effet dans le cas 3D le choix du plan (choix de  $y$ ) peut correspondre à un cas particulier où les niveaux seront peu représentatifs puisque les faisceaux de forts niveaux observés sur les coupes n'ont aucune raison de rester confinés dans un seul plan. Cela explique pourquoi les niveaux peuvent apparaître faibles sur des régions plus étendues qu'en 2D.

Malgré ce problème de visualisation on voit que le champ a la même forme en 3D avec une évolution similaire selon l'axe  $x$ .

## 6.3 Indice de scintillation

### 6.3.1 Comportement général

Le calcul de  $\sigma_I^2$  a été effectué sur une plage étendue de valeurs de  $\gamma$  (de 6.5 à 1000). Les plus grandes valeurs de  $\gamma$  choisies sont inférieures à celle du cas 2D pour des raisons de temps de calcul.

Les courbes 6.7 à 6.11 montrent l'évolution de  $\sigma_I^2$  pour des valeurs croissantes de  $\gamma$  comparées au même calcul par la méthode de Rytov. On constate que le comportement général de la courbe reste le même qu'en 2D sauf en ce qui concerne la hauteur du pic. Cette nouvelle caractéristique est analysée à la section 6.3.2.

On obtient une bonne adéquation avec la méthode de Rytov pour des valeurs assez élevées de  $\sigma_I^2$  ( $\sigma_I^2 \approx 1,5$  pour le cas  $\gamma = 52$ ) ce qui confirme la validité du calcul pour cette zone des courbes.

La zone de saturation débute, pour chaque valeur de  $\gamma$ , à des abscisses  $x/k_o L^2$  tout-à-fait comparable au cas 2D, la valeur du plateau étant très proche du cas 2D l'indice de scintillation tendant vers 1,4.

Les différences de comportement entre 2D et 3D sont donc clairement limitées à la zone du pic.

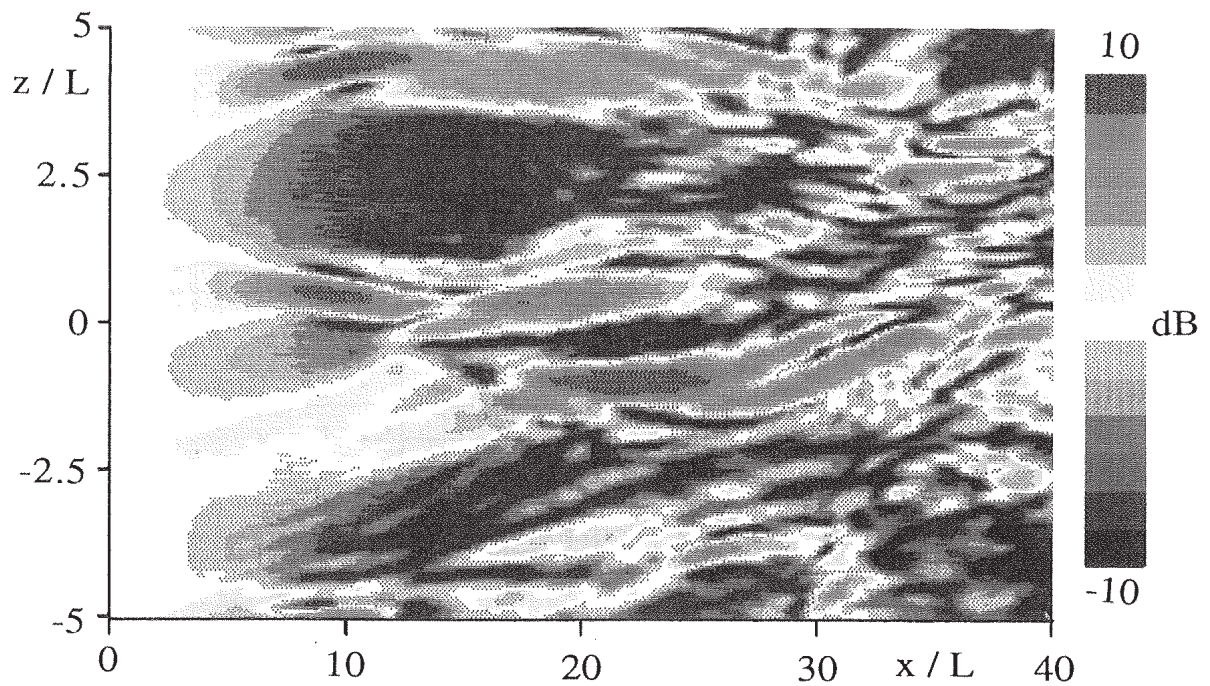


Figure 6.5 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation

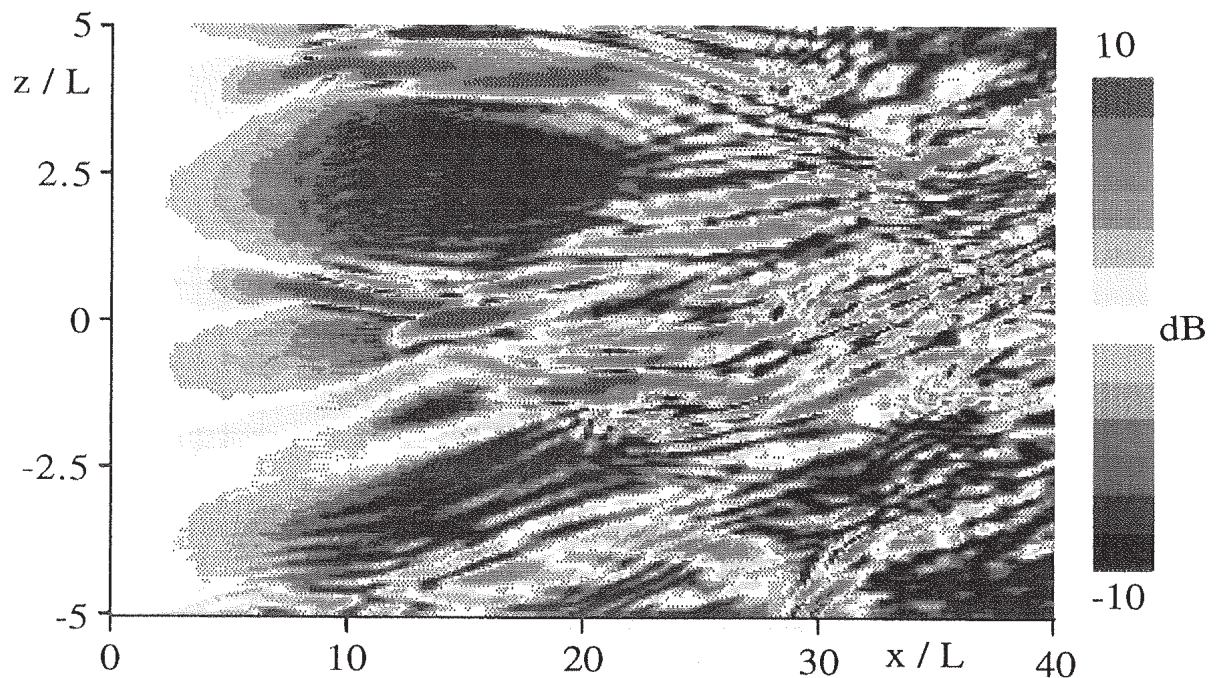


Figure 6.6 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation

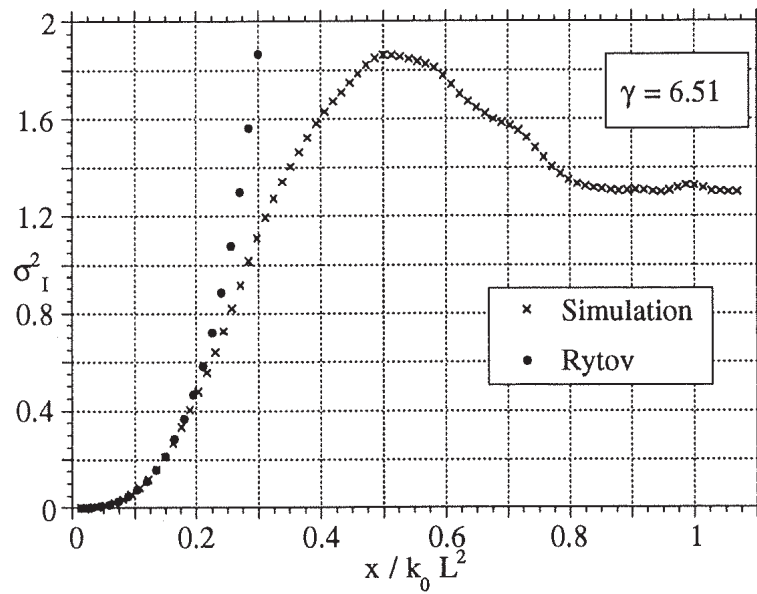


Figure 6.7 :  $\sigma_I^2$  3D comparaison avec Rytov  $\gamma = 6.5$

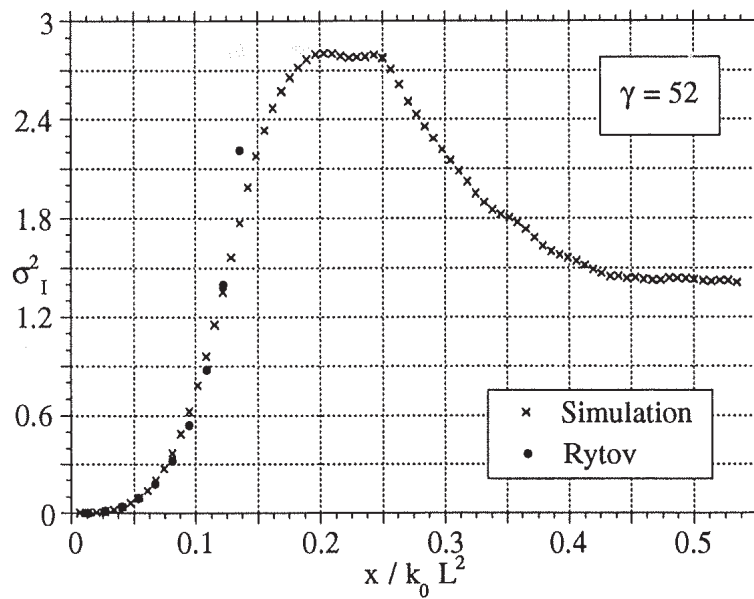


Figure 6.8 :  $\sigma_I^2$  3D comparaison avec Rytov  $\gamma = 52$



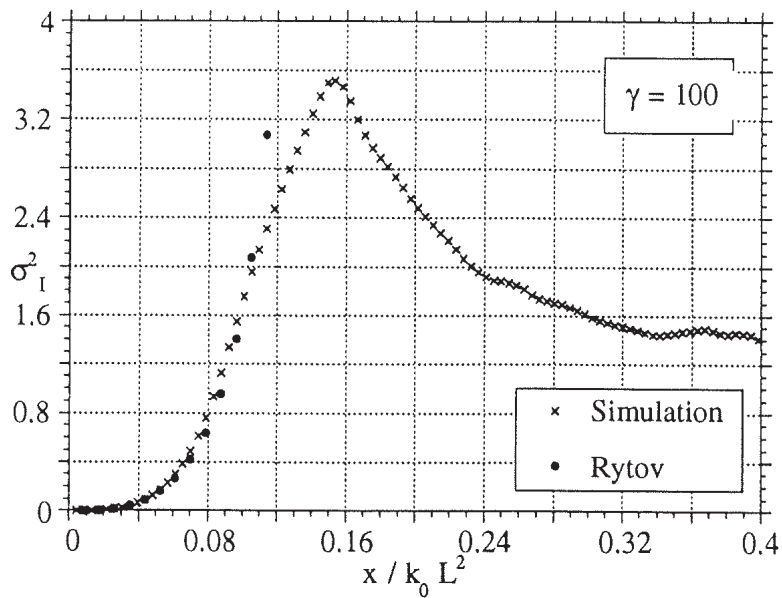


Figure 6.9 :  $\sigma_I^2$  3D comparaison avec Rytov  $\gamma = 100$

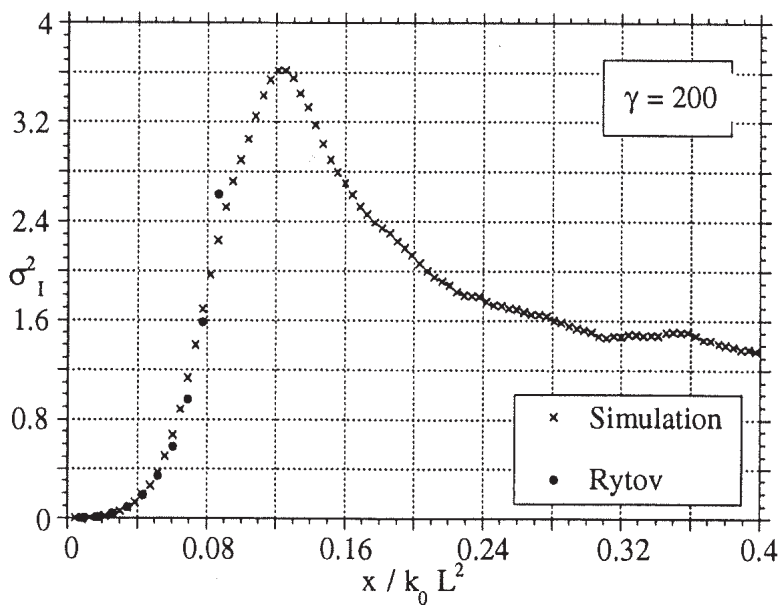


Figure 6.10 :  $\sigma_I^2$  3D comparaison avec Rytov  $\gamma = 200$

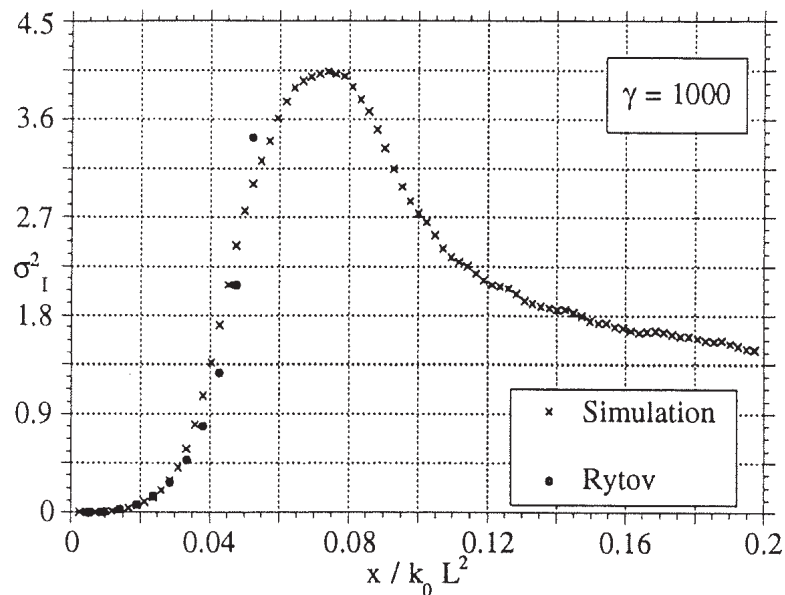


Figure 6.11 :  $\sigma_I^2$  3D comparaison avec Rytov  $\gamma = 1000$

Une comparaison plus complète avec une résolution de l'équation de moment d'ordre 4 serait intéressante. Martin et Flatté [MARTIN 88] ont utilisé une technique similaire à la nôtre (méthode des "écrans de phase") pour étudier la propagation de signaux optiques, cependant les paramètres caractérisant leur milieu sont trop différents pour permettre une comparaison quantitative.

### 6.3.2 Evolution du pic de $\sigma_I^2$ en fonction de $\gamma$

Par rapport au 2D on constate que d'une part la forme générale de la courbe reste la même, d'autre part le pic est beaucoup plus prononcé. En particulier le pic se détache nettement pour des valeurs beaucoup plus faibles de  $\gamma$  ( $\gamma = 6.5$ ) alors que dans le cas 2D il fallait au moins atteindre  $\gamma = 20$  pour obtenir un pic.

Le tableau 6.1 montre qu'en moyenne la hauteur du pic est environ deux fois plus élevée en 3D, alors que l'abscisse  $x/k_0 L^2$  reste peu modifiée.

Cette différence révèle les limites d'une modélisation bidimensionnelle sur le plan quantitatif. Le pic de  $\sigma_I^2$  est provoqué par l'apparition des zones de focalisation à une distance particulière de la source : en ces lieux les apports d'énergie convergent vers un seul point. Or dans le cas 2D ces "flux" extérieurs ne peuvent provenir que des deux demi-plans que sépare une caustique ; en revanche en 3D c'est tout le volume entourant le faisceau donnant naissance à la caustique qui va contribuer au renforcement du niveau. A priori on aura donc plus de chance d'obtenir de très forts niveaux dans un espace 3D.

$\gamma$	$\sigma_I^2$ 2D	$\sigma_I^2$ 3D	$\sigma_I^2$ 3D/2D	$Z_p$ 3D	$Z_p$ 2D	$Z_p$ 3D/2D
6.5	0.95	1.86	1.96	0.51	0.73	0.70
52	1.2	2.8	2.33	0.21	0.257	0.82
200	1.5	3.6	2.4	0.13	0.144	0.90
1000	1.78	4.04	2.3	0.074	0.087	0.85

Tableau 6.1 : Comparaison des hauteurs et abscisses du pic de  $\sigma_I^2$  entre les modèles 2D et 3D

Ce raisonnement conduit également à l'idée d'une plus rapide formation des caustiques en 3D. On devrait donc constater un rapprochement de l'abscisse du pic de  $\sigma_I^2$  vers l'origine.

Afin d'évaluer ces hypothèses, il est intéressant de représenter  $\sigma_I^2$  en fonction du paramètre de Kulkarny et White. On peut montrer que ce facteur d'adimensionnalisation reste identique dans le cas 3D pour le cas particulier d'un champ turbulent scalaire.

La figure figure 6.12 permet de constater la validité de cette représentation dans le cas d'une turbulence tridimensionnelle.

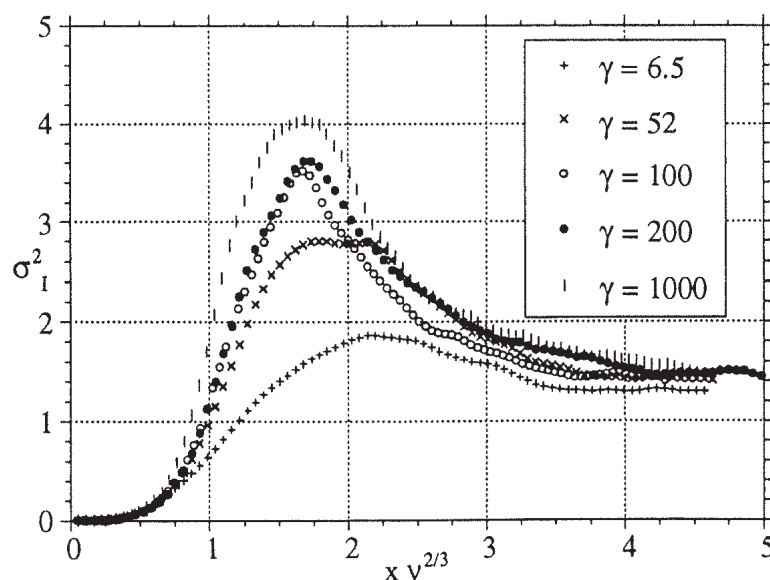


Figure 6.12 :  $\sigma_I^2$  en fonction du paramètre de Kulkarny et White

Le modèle 3D confirme les résultats obtenus en 2D : le pic de  $\sigma_I^2$  reste situé dans l'intervalle  $x\nu^{2/3} = 1,5$  à 2. White a calculé analytiquement la probabilité

d'apparition des caustiques dans le cas d'un milieu 3D en utilisant la même approche qu'en 2D [KULKARNY 82]. Il considère également en 3D une situation similaire à la nôtre : onde plane dans un milieu statistiquement homogène et isotrope caractérisé par des fluctuations d'indice dont on connaît la fonction de corrélation. Les résultats qu'il obtient en 3D confirment que qualitativement la densité de probabilité d'apparition des caustiques en fonction de la distance de propagation est similaire au cas 2D mais le pic de la ddp est décalé vers l'origine.

La représentation de  $Z_p$  en fonction de  $\gamma$  (figure 6.13) permet d'obtenir par les moindres carrés l'expression :

$$Z_{p(3D)} \approx 0,99\gamma^{-0,38} \text{ avec } R = 0,998$$

à comparer au cas 2D :

$$Z_{p(2D)} \approx 1,03\gamma^{-0,35} \text{ avec } R = 0,997$$

L'abscisse du pic obéit donc à la même loi en 2D et en 3D.

En revanche, la hauteur du pic  $\sigma_I^2(Z_p)$  n'est pas prévisible par un modèle 2D. La figure 6.14 montre l'évolution de  $\sigma_I^2(Z_p)$  en fonction de  $\gamma$ , les moindres carrés donnant :

$$\sigma_I^2(Z_p)_{(3D)} \approx 1,13 + 0,45 \ln \gamma \text{ avec } R \approx 0,97$$

on constate donc que qualitativement la hauteur du pic évolue de façon analogue en 3D en fonction de  $\gamma$  puisqu'on a un bon accord avec une loi de la forme  $\sigma_I^2(Z_p) = a + b \ln \gamma$ . Cela montre que le modèle 2D décrit bien les phénomènes physiques fondamentaux mis en jeu.

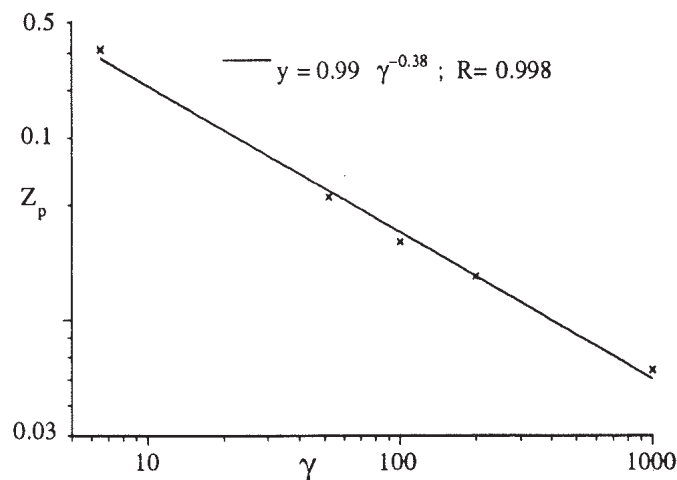


Figure 6.13 : Abscisse du pic de  $\sigma_I^2$

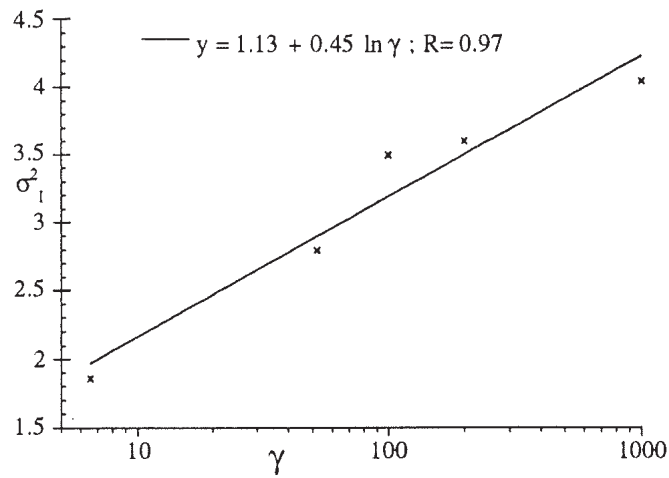


Figure 6.14 : Hauteur du pic de  $\sigma_1^2$

## 6.4 Conclusion

Cette brève étude d'un modèle tridimensionnel limitée à l'intensité apporte deux informations :

- la restriction à un espace 2D ne semble pas réduire la portée des résultats sur le plan de l'interprétation qualitative des phénomènes physiques.
- on constate que les fluctuations de niveau acoustique sont beaucoup plus fortes en 3D

Une étude plus approfondie devrait permettre de quantifier précisément cette différence et éventuellement d'établir une relation entre les hauteurs des pics 2D et 3D.



## CONCLUSION

Ce travail a permis de valider la méthode des modes de Fourier aléatoires ; cette technique s'est révélée très souple et efficace pour étudier la propagation des ondes acoustiques dans un milieu soumis à un champ thermique turbulent.

Les résultats obtenus par l'étude de la phase pour un milieu 2D reproduisent bien des phénomènes physiques détectés expérimentalement ; il s'agit de variations brusques mais continues de la phase qui semblent localisées à proximité des caustiques. Le calcul des fronts par la méthode des rayons a mis en évidence la difficulté de caractériser la perte de cohérence des fronts par une fonction de corrélation. Ce calcul a cependant permis de simuler la localisation d'une source, montrant ainsi l'effet prédominant de la turbulence sur l'erreur angulaire. Des calculs de la variance du temps de parcours d'un rayon confirment des études précédentes, utilisant un champ turbulent cinématique et montrant une évolution non linéaire avec la distance liée très probablement au franchissement de la zone des caustiques.

L'étude de l'indice de scintillation pour un milieu bidimensionnel a permis de nombreuses comparaisons avec des résultats obtenus par des approches différentes ; pour une grande plage de variation des paramètres caractérisant l'onde acoustique et le champ turbulent nos résultats coïncident avec ceux de la littérature. Le rôle des caustiques dans l'apparition d'un pic sur la courbe de l'indice de scintillation a pu être conforté par un rapprochement avec une méthode géométrique. Le calcul de la répartition statistique de l'intensité acoustique montre que sa densité de probabilité obéit à une loi gamma généralisée à deux paramètres, ce résultat obtenu en milieu 2D est en accord avec l'expérience.

L'extension à un milieu 3D du calcul de l'indice de scintillation a montré que le modèle 2D reflétait bien la réalité physique sur le plan qualitatif.

La simulation par modes de Fourier aléatoire se révèle donc très efficace pour réaliser de véritables "expériences numériques" et peut être utilisée pour valider des démarches plus classiques.

Des prolongements de cette étude sont possibles sans grande modification du modèle utilisé. En effet on peut envisager facilement d'adopter une fonction de corrélation plus réaliste afin de pouvoir comparer les résultats numériques à l'expérience. Il est possible également de superposer aux fluctuations aléatoires de la vitesse du son un profil de célérité déterministe autorisant la représentation des conditions réelles rencontrées dans l'atmosphère et l'océan.





# Bibliographie

- [BARABANENKOV 71] **BARABANENKOV Yu. N., KRAVTSOV Yu. S., RYTOV S. M., TATARSKI V.I. (1971)**  
“Status of the theory of propagation of waves in a randomly inhomogeneous medium”.  
Soviet Physics, Vol. 13, no. 5, p. 551-680.
- [BLANC-BENON 90a] **BLANC-BENON Ph., JUVE D., M.KARWEIT, COMTE-BELLOT G. (1990)**  
“Simulation numérique de la propagation des ondes acoustiques à travers une turbulence cinématique”.  
J. Acoustique, no. 3, p. 1-8.
- [BLANC-BENON 90b] **BLANC-BENON Ph., JUVE D. (1990)**  
“Fluctuations d’intensité d’une onde sphérique traversant une turbulence thermique”.  
Colloque de physique, Colloque C3, supplément au no. 17, Tome 51, p. 13-22.
- [BLANC-BENON 91a] **BLANC-BENON Ph., HUGON-JEANNIN Y., JUVE D., PEDRI C., ROLAND P. (1991)**  
“Déformation des surfaces équiphases lors de la traversée d’une turbulence thermique par une onde acoustique”.  
Contrat METRAFLU-DRET no. 88-488, 1989-1991.
- [BLANC-BENON 91b] **BLANC-BENON Ph., JUVE D., COMTE-BELLOT G. (1991)**  
“Occurrence of caustics for high-frequency acoustic waves propagating through turbulent fields”.  
Theor. Comput. Fluid Dynamics, 1991, Vol. 2, p. 271-278.
- [BLANC-BENON 92a] **BLANC-BENON Ph., HUGON-JEANNIN Y., JUVE D., (1992)**  
“Reconstruction de fronts d’onde distordus par la turbulence”.  
Journal de Physique IV, Colloque C1, supplément au no. 3, Vol. 2, p. C1-545/C1-548.

- [CHERNOV 60] **CHERNOV L.A. (1960)**  
"Wave propagation in random medium".  
Mc Graw-Hill, New-York.
- [CORRSIN 72] **CORRSIN S., KARWEIT M.J. (1972)**  
"The mixing of scalar stripes by an isotropic ensemble of single velocity modes".  
Lect. Notes Phys., Vol. 12, Springer, Berlin, p. 327-332.
- [CRISTOL 87] **CRISTOL X. (1987)**  
"Résolution numérique par transformée de Fourier de l'équation parabolique application à l'acoustique sous-marine".  
Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale de Lyon.
- [FONTANELLA 87] **FONTANELLA J.C. et SEVA A. (1987)**  
"Reconstruction of turbulence-degraded images using the Knox-Thompson algorithm".  
J. Opt. Soc. Am., Vol. 4, no. 3, p. 438-448.
- [ISHIMARU 78] **ISHIMARU A. (1978)**  
"Wave propagation and scattering in random media".  
Vol. 2, Academic Press, New-York.
- [JUVE 88] **JUVE D. et BLANC-BENON Ph. (1988)**  
"Comparaison de trois équations paraboliques résolues par l'algorithme split-step Fourier".  
J. Acoustique, no. 1-2, p. 15-21.
- [KARWEIT 91] **KARWEIT M., BLANC-BENON Ph., JUVE D., COMTE-BELLOT G. (1991)**  
"Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field : a study of phase variance".  
J. Acoust. Soc. Am., Vol. 89, no. 1, p. 52-62.
- [KNEPP 83] **KNEPP D.L. (1983)**  
"Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves".  
Proceedings of the IEEE, Vol. 71, no. 6, p. 722-737.
- [KRAICHNAN 70] **KRAICHNAN R.H. (1970)**  
"Diffusion by a random velocity field".  
Phys. Fluids, Vol. 13, p. 22-31.
- [KULKARNY 82] **KULKARNY V.A. et WHITE B.S. (1982)**  
"Focusing of waves in turbulent inhomogeneous media".  
Phys. Fluids, Vol. 25, no. 10., p. 1770-1784

- [MARTIN 88] **MARTIN J.M. et FLATTE S.M. (1988)**  
"Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media".  
Applied Optics, Vol. 27, no. 11, p. 2111-2126.
- [MARTIN 90] **MARTIN J.M. et FLATTE S.M. (1990)**  
"Simulation of point-source scintillation through three-dimensional media".  
J. Opt. Soc. Am., Vol. 7, no. 5, p. 838-847.
- [NYE 74] **NYE J.F. et BERRY M.V. (1974)**  
"Dislocations in wave trains".  
Proc. R. Soc. Lond., A 336, p. 165-190.
- [PRESS 86] **PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUTOLSKY S.A., VETTERLING W.J. (1986)**  
"Numerical Recipes".  
Cambridge University Press.
- [SHISHOV 72] **SHISHOV V.I. (1972)**  
"Strong fluctuations of the intensity of a plane wave propagating in a random refractive medium".  
Soviets Physics JETP, Vol. 34, no. 4, p. 744-748.
- [SPIVACK 88] **SPIVACK M. et USCINSKI B.J. (1988)**  
"Accurate numerical solution of the fourth-moment equation for very large values of  $\Gamma$ ".  
Journal of Modern Optics, Vol. 35, no. 11, p.1741-1755.
- [TAPPERT 79] **TAPPERT F.D. (1979)**  
"The parabolic equation method".  
"Wave propagation in ocean acoustics",  
Springer Verlag, p. 224-287.
- [TATARSKI 71] **TATARSKI V.I. (1971)**  
"The effect of turbulent atmosphere on wave propagation".  
I.P.S.T Keter Press, Jerusalem.
- [TATARSKI 61] **TATARSKI V.I. (1961)**  
"Wave propagation in a turbulent medium".  
Mc Graw-Hill, New-York.
- [THOMSON 83] **THOMSON D.J. et CHAPMAN N.R. (1983)**  
"A wide angle split-step algorithm for the parabolic equation".  
J. Acoust. Soc. Am., Vol. 74, no. 6, p. 1848-1854.
- [TUR 82a] **TUR M., WHITMAN A.M., FRANKENTHAL S. (1982)**

- “Multiple foci in the range dependence of the intensity fluctuations of a plane wave propagating in a random medium”.  
Optics Letters, Vol. 7., no. 4, p.171-173.
- [TUR 82b] **TUR M. (1982)**  
“Numerical solution for the fourth moment of a plane wave propagating in a random medium”.  
J. Opt. Soc. Am., Vol. 72, no. 12, p. 1683-1691.
- [USCINSKI 77] **USCINSKI B.J. (1977)**  
“The elements of wave propagation in random media”.  
Mc Graw-Hill, New-York.
- [USCINSKI 85] **USCINSKI B.J. (1985)**  
“Analytical solution of the fourth-moment equation and interpretation as a set of phase screens”.  
J. Opt. Soc. Am., Vol. 2, no. 12, p. 2077-2091.
- [WHITE 84] **WHITE B.S. (1984)**  
“The stochastic Caustic”.  
SIAM J. APPL. MATH., Vol. 44, no. 1, p. 127-149.

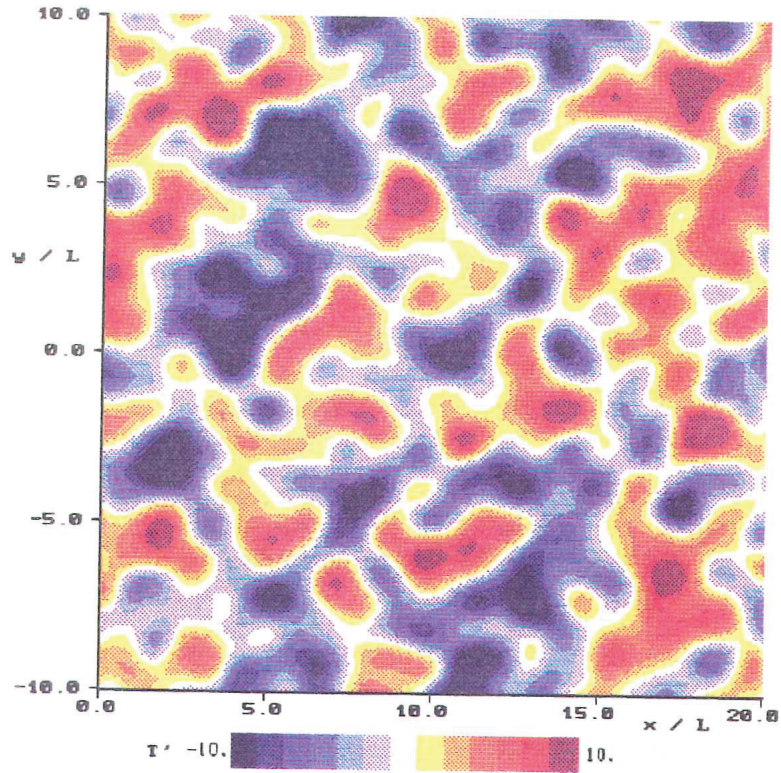


Figure 2.3 : Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 2D

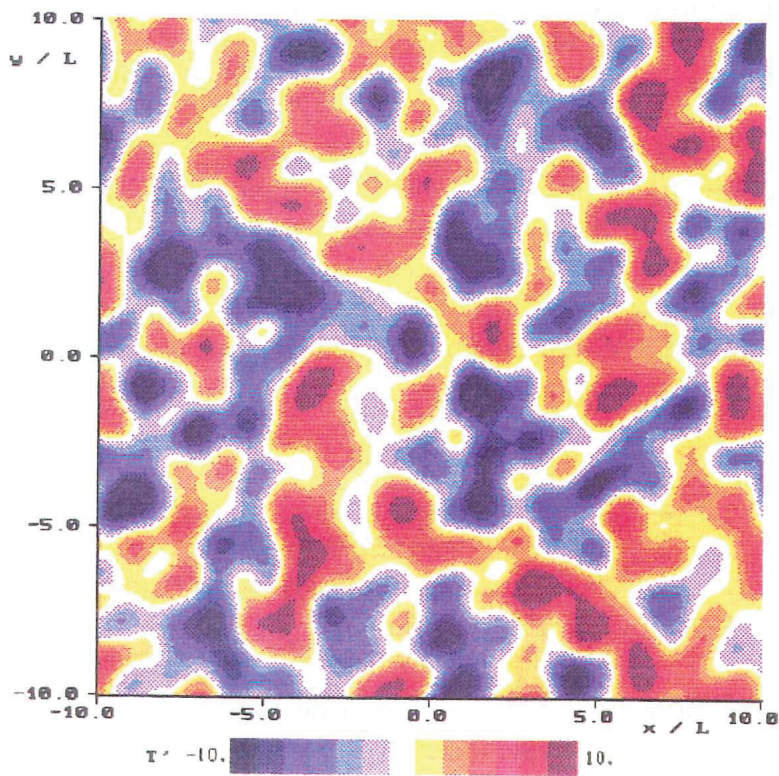


Figure 2.4 : Exemple de réalisation du champ thermique turbulent 3D

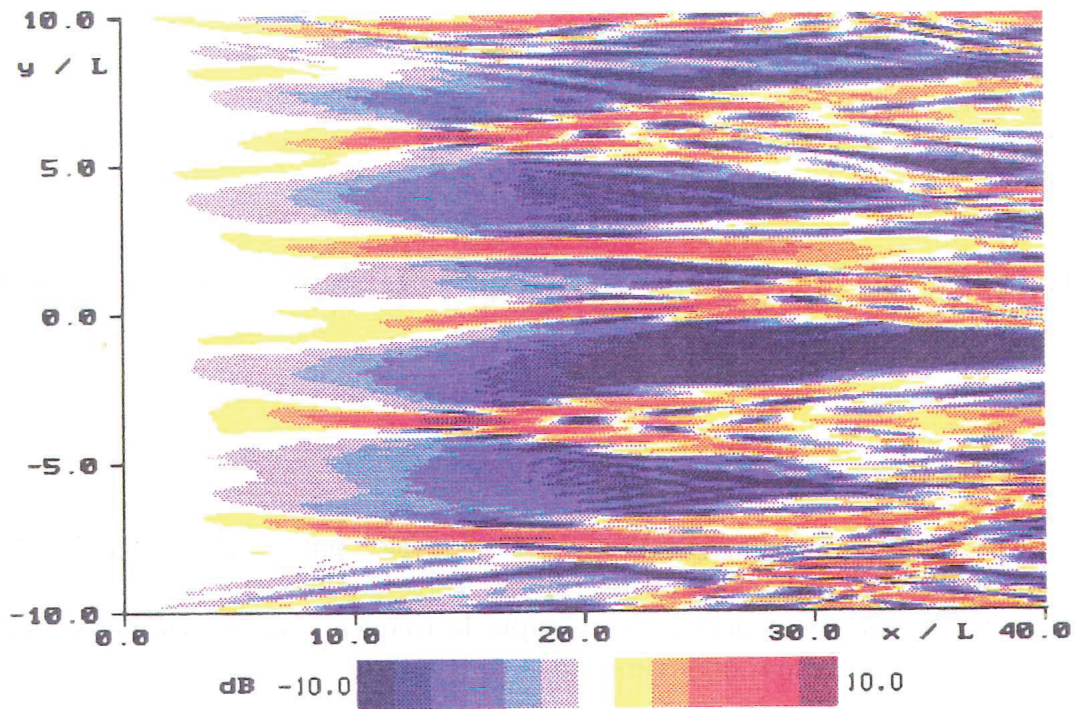


Figure 5.1 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$

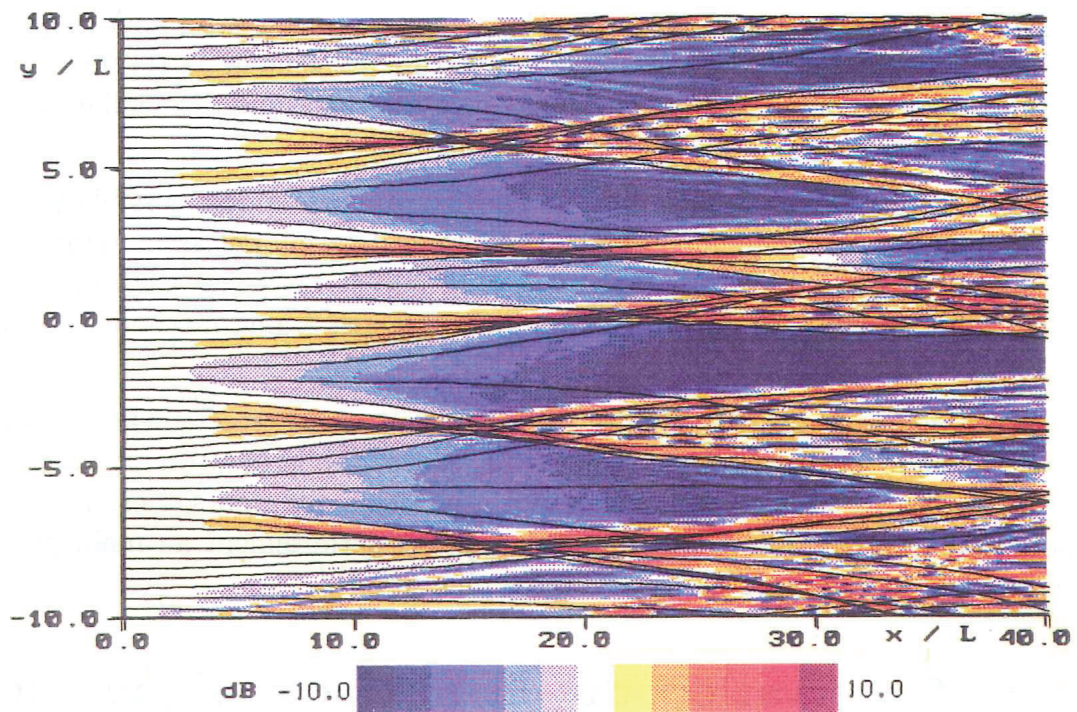


Figure 5.2 : Superposition d'un calcul de rayon et d'une carte de fluctuations d'intensité

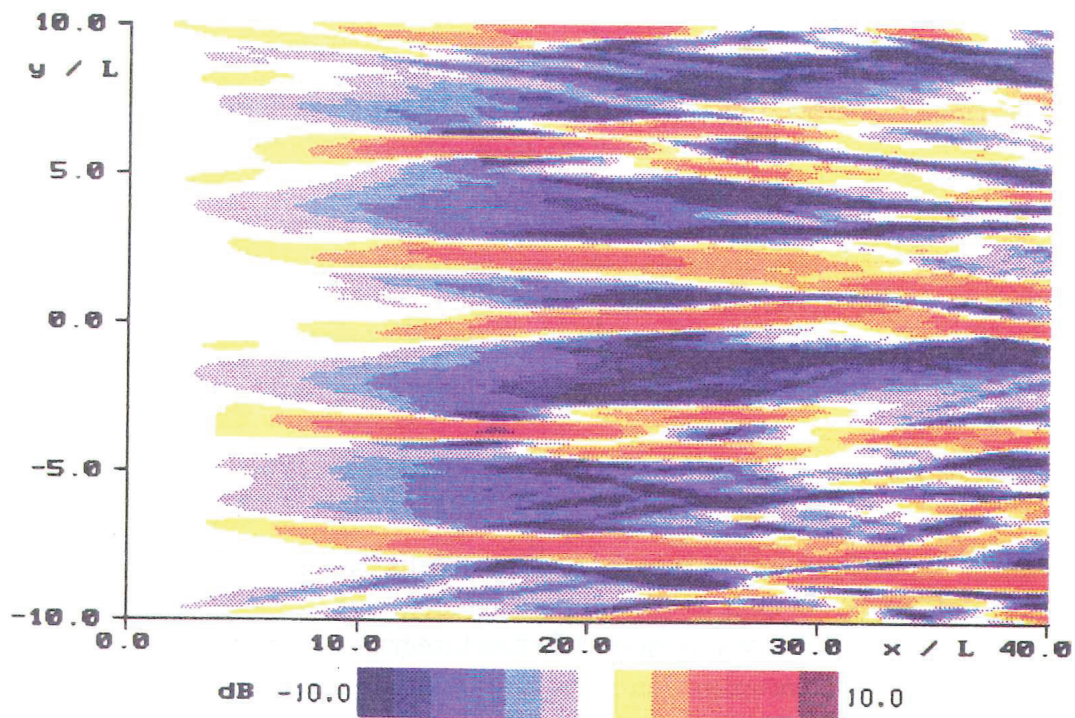


Figure 5.3 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$

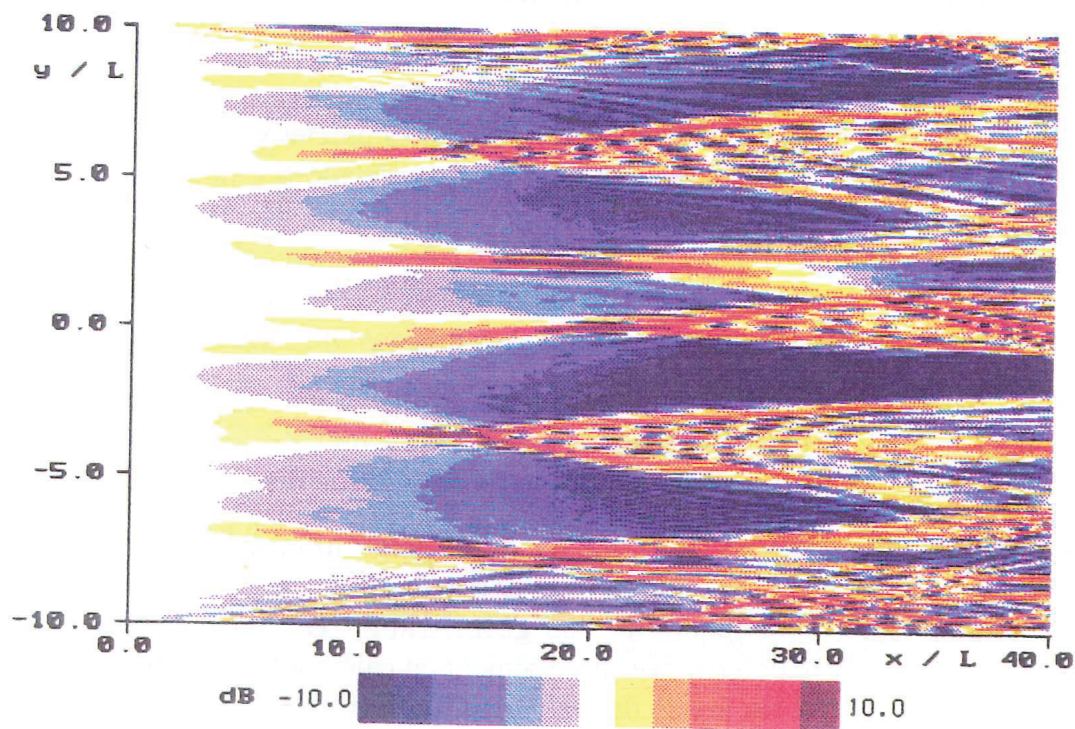


Figure 5.4 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$

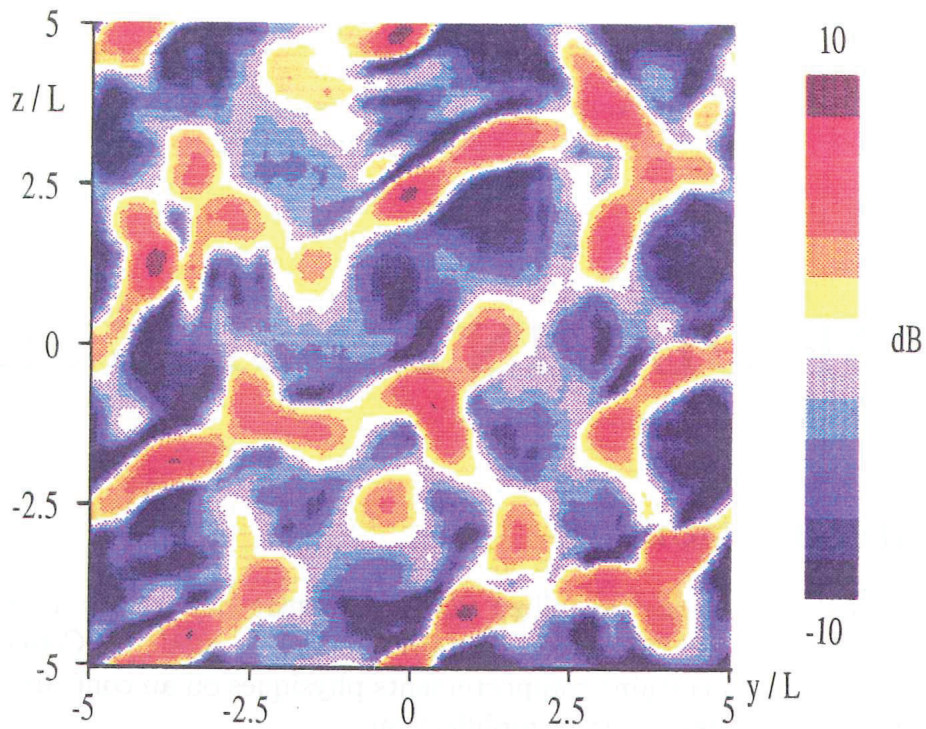


Figure 6.1 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$

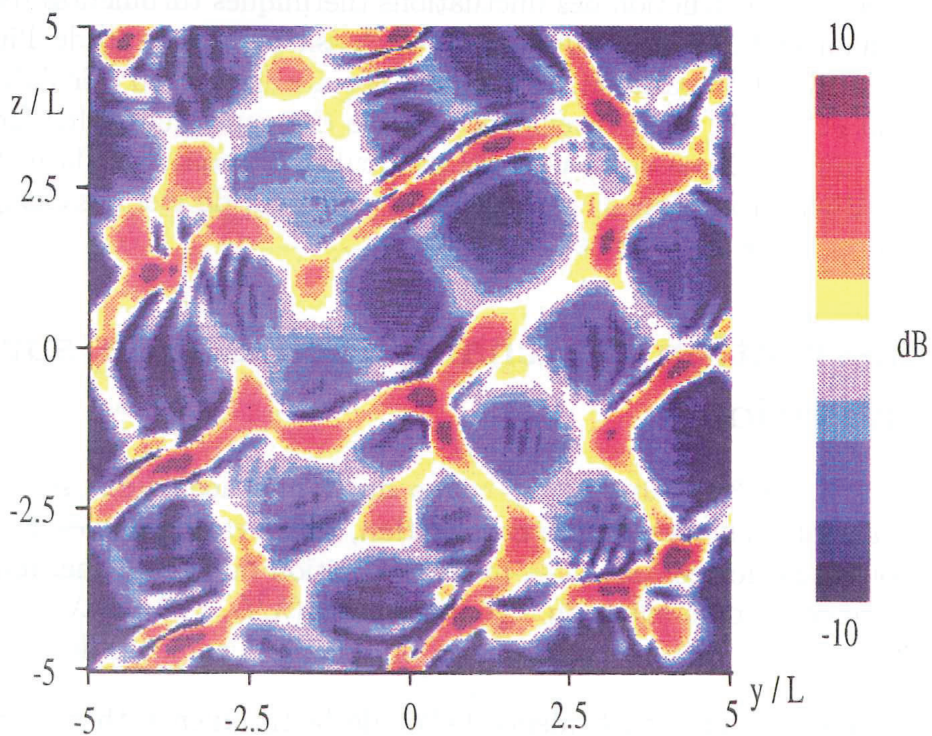


Figure 6.2 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$



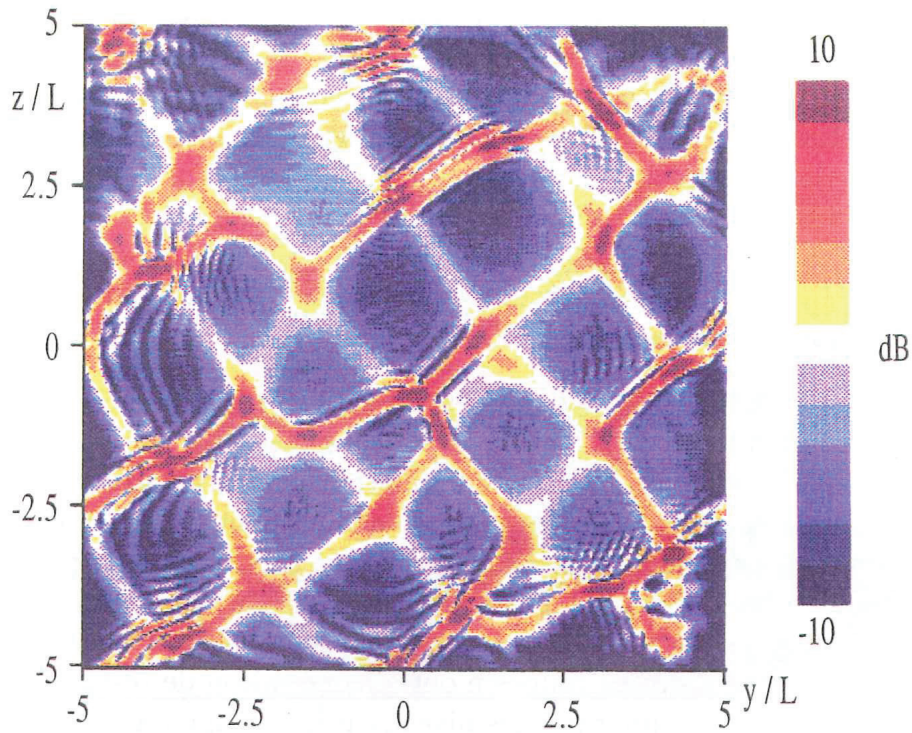


Figure 6.3 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(y, z)$  perpendiculaire à la direction de propagation,  $x = 10 L$

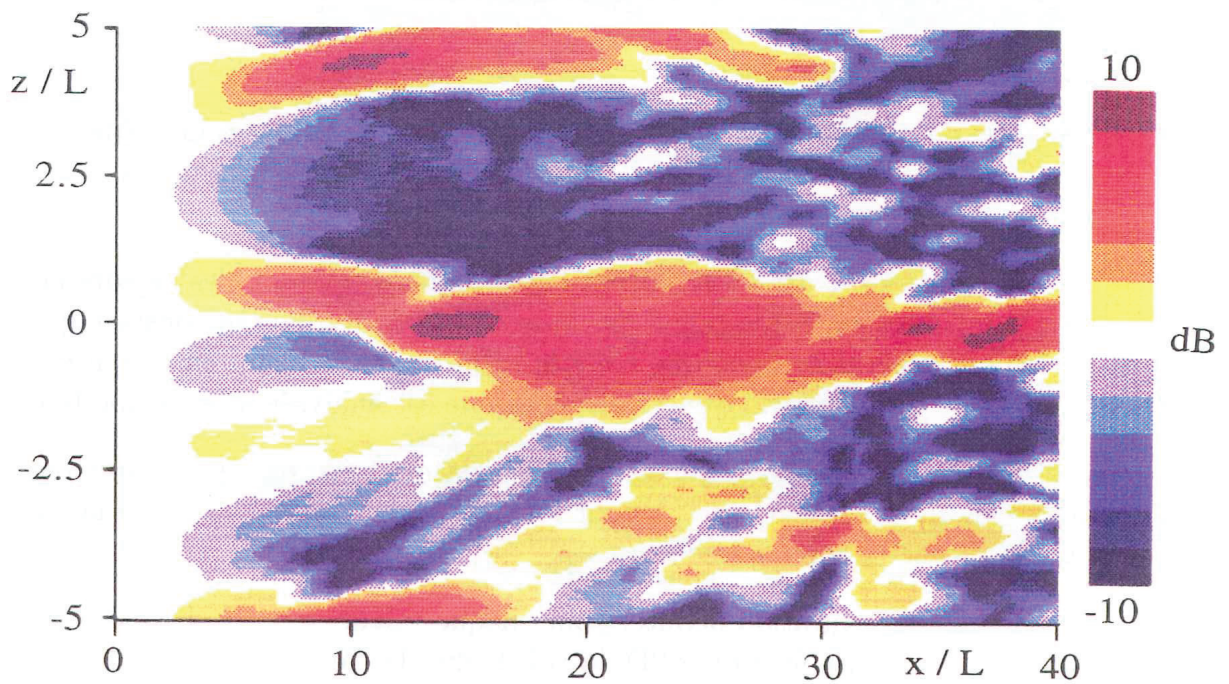


Figure 6.4 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.17$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation

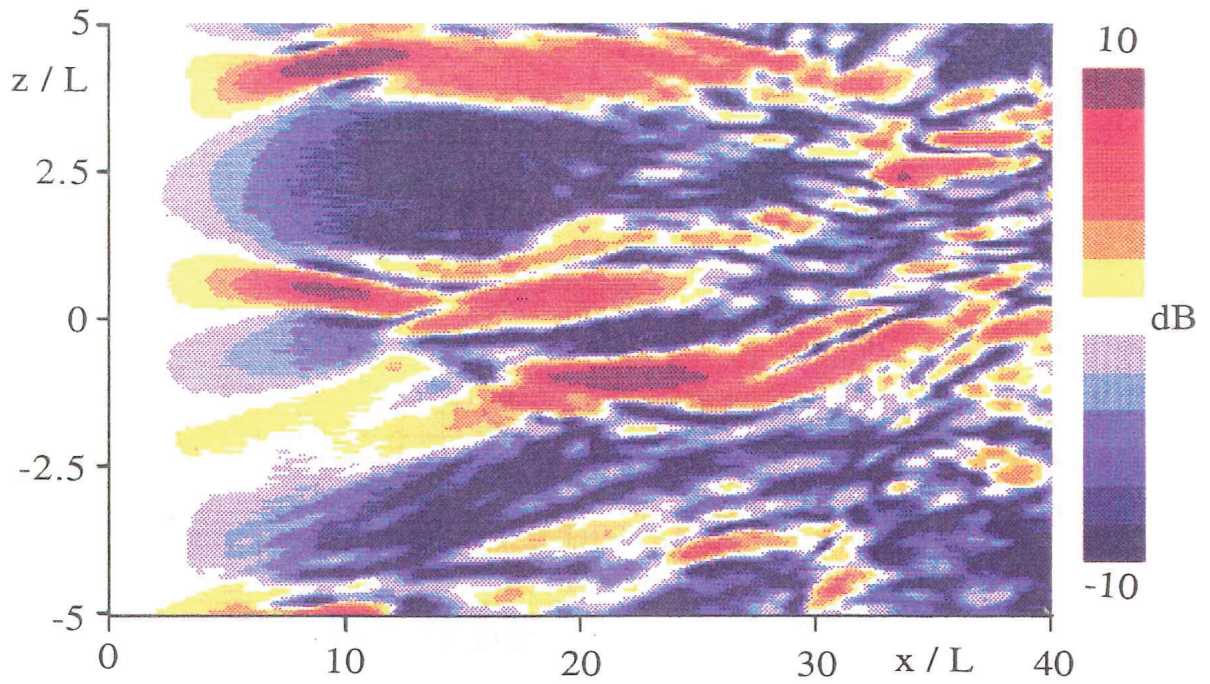


Figure 6.5 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.085$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation

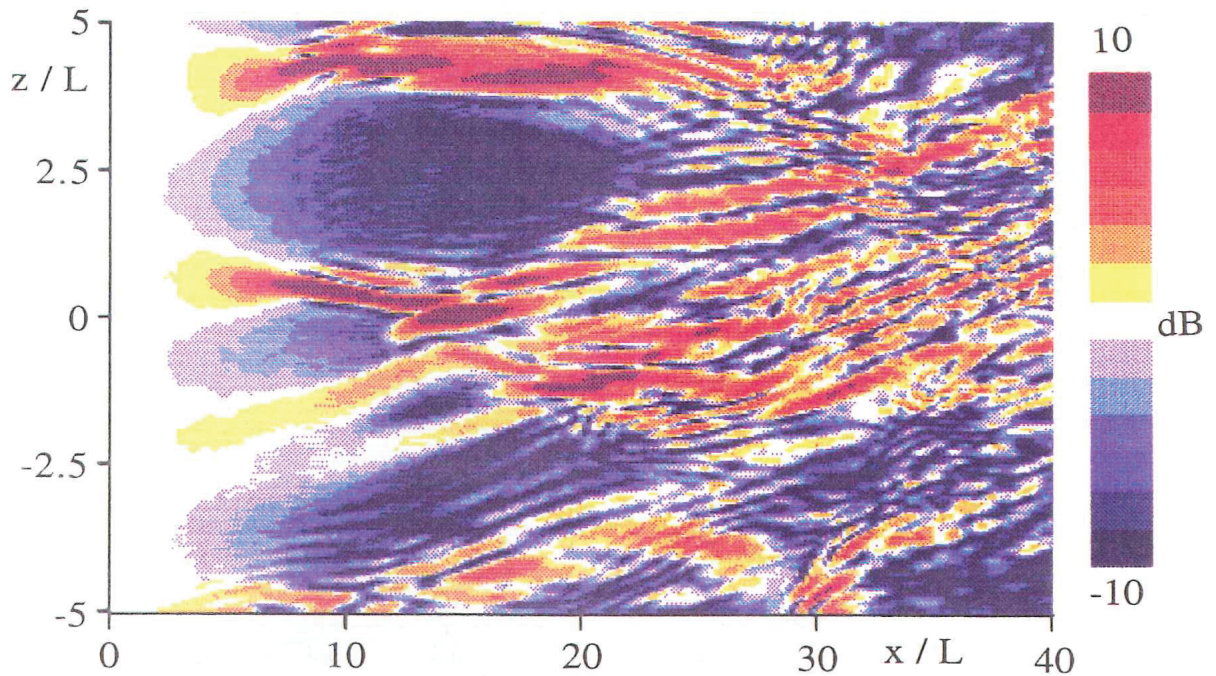


Figure 6.6 : Fluctuations d'intensité calculées par l'équation parabolique  $\lambda/L = 0.043$ , calcul 3D, coupe selon le plan  $(x, z)$  parallèle à la direction de propagation