

N° d'ordre : 2010-15

ANNÉE 2010

# THÈSE

présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir  
le titre de DOCTEUR  
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Johanna INGENITO

Vers une modélisation d'aide à la conception  
acoustique d'étages de compresseurs centrifuges  
subsoniques de turbomachines

Soutenue le 06 Juillet 2010 devant la Commission d'Examen

## JURY

Mme. Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA Directeur de Recherche CNRS, POEMS, ENSTA, Paris	<i>Rapporteur</i>
M. Yves AUREGAN Directeur de Recherche CNRS, LAUM, Université du Maine, Le Mans	<i>Rapporteur</i>
M. Mabrouk BEN TAHAR Professeur, laboratoire Roberval, UTC, Compiègne	<i>Examineur</i>
M. Xavier CARBONNEAU Professeur Associé, ISAE, Toulouse	<i>Examineur</i>
M. Yves GERVAIS Professeur, LEA, Poitiers	<i>Examineur</i>
M. Grégoire HANSS Docteur Ingénieur de Recherche, LTS, Toulouse	<i>Examineur</i>
M. Michel ROGER Professeur, LMFA, ECL, Lyon	<i>Directeur de Thèse</i>

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509  
École Centrale de Lyon



# Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

## École Centrale de Lyon

NOM Prénom	Corps grade	Laboratoire	Établissement
AURIOL Philippe	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
BURET François	<i>Maître de conférences</i>	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
KRAHENBUHL Laurent	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	<i>Directeur de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	<i>Chargé de recherche</i>	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	<i>Professeur</i>	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	<i>Maître de conférences</i>	AMPERE	ECL
HELLOUIN Yves	<i>Maître de conférences</i>	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	<i>Professeur</i>	DER EEA	ECL
GUIRALDENQ Pierre	<i>Professeur émérite</i>	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	<i>Professeur</i>	DER STMS	ECL
LOHEAC Jean-Pierre	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	<i>Professeur émérite</i>	ICJ	ECL
MARION Martine	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
MUSY François	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	<i>Professeur</i>	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	<i>Maître de conférences</i>	ICJ	ECL
DAVID Bertrand	<i>Professeur</i>	ICTT	ECL

CALLARD Anne-Ségolène	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	<i>Professeur</i>	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
GARRIGUES Michel	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	<i>Professeur</i>	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	<i>Chargé de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	<i>Professeur émérite</i>	INL	ECL
O'CONNOR Ian	<i>Maître de conférences</i>	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	<i>Professeur</i>	INL	ECL
ROBACH Yves	<i>Professeur</i>	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	<i>Chargé de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	<i>Chargé de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	<i>Directeur de recherche</i>	INL	CNRS/ECL
CHEN Liming	<i>Professeur</i>	LIRIS	ECL
BAILLY Christophe	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN Jean-Claude	<i>Professeur émérite</i>	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT Geneviève	<i>Professeur émérite</i>	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	<i>Maître de conférences</i>	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
HENRY Daniel	<i>Directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
JUVE Daniel	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
LE RIBAUTL Catherine	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
PERKINS Richard	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
ROGER Michel	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
SCOTT Julian	<i>Professeur</i>	LMFA	ECL
SHAO Liang	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL

SIMOENS Serge	<i>Chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	<i>Maître de conférences</i>	LMFA	ECL
BENAYOUN Stéphane	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	<i>Professeur émérite</i>	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	<i>Past</i>	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
JUVE Denyse	<i>Ingénieur de recherche</i>	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	<i>Chargé de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	<i>Directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
SIDOROFF François	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	<i>Maître de conférences</i>	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	<i>Professeur</i>	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	<i>Professeur émérite</i>	LTDS	ECL



# Remerciements

*Ca y est, c'est fait !*

Avant de repartir vers de nouveaux horizons, il est important de s'arrêter un instant et de remercier ici les gens qui m'ont entourée, soutenue et permis de réaliser cette étape de ma vie, aussi bien scientifique qu'humaine.

Cette thèse a commencé en janvier 2006 entre l'École Centrale de Lyon et Liebherr Aerospace Toulouse. Je remercie Francis Carla et Daniel Juvé de m'avoir accueillie dans leurs locaux et de m'avoir donné les moyens de travailler dans de bonnes conditions.

Je tiens d'abord à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Michel Roger, pour son temps, son soutien, son aide, ses qualités pédagogiques et scientifiques et sa patience à toute épreuve qui ont été très importants pour moi tout au long de la thèse et de sa rédaction. Toute ma reconnaissance s'adresse à Anne-Sophie Bonnet-Ben-Dhia et Yves Aurégan qui me font l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Mabrouk Ben Tahar, Xavier Carbonneau, Yves Gervais et Grégoire Hanss d'avoir accepté d'évaluer mon travail en tant que membres du jury.

Cette thèse s'est d'abord déroulée au sein du Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Je tiens donc à remercier l'ensemble du personnel du LMFA pour leur soutien et leur bonne humeur. Merci à Marc et Fred pour leurs conseils et jeux de mots rigolos. Une pensée particulière à tous les thésards que j'ai pu croiser durant cette période, en particulier Cédric, Nyannick, Héléne, les Julien(s), les Thomas(s), JB, Alex, Argan, Benjamin... pour les coinches et soirées festives. Je suis heureuse de vous avoir rencontrés durant cette période enrichissante. Merci à Ced d'avoir été là dans tous les moments agréables ou non et d'être encore là pour moi aujourd'hui. Il m'a permis de rencontrer Milie et avec l'aide de David Charvet, Franck qui sont des gens merveilleux qui font maintenant partis de ma vie.

Cette thèse s'est poursuivie à Liebherr Aerospace Toulouse, je tiens à remercier mes collègues et mes amis pour l'ambiance qui m'a permis de trouver Toulouse de plus en plus rose. Merci à Mireille Lemasson et Sylvain Miklaszewski de m'avoir accordé leur confiance sur ce sujet et de m'avoir accueillie au sein du service Recherche et Expertise Métier. Merci en particulier à l'équipe Aérodynamique et Acoustique de m'avoir soutenue, aidée et fait rire au quotidien : Matthieu, Estelle, Pierre, Christine, Sandrine (avé l'accent), Mathieu, Viviane et Grégoire. J'aimerais également remercier toutes les personnes m'ayant aidé et permis de réaliser l'essai de détection modale à LTS : les turbomachines - Philippe et Serge - les montages proto - Franco et Jean-Paul - et l'équipe des essais - Jean-Marie, Jean-Marc, Olivier... Un grand merci à toute l'équipe des Études Amonts pour leur soutien et leurs encouragements jusqu'au bout. Une pensée particulière pour la Mojito Team, Foufou, Jéjé, Vincent, François, Beber, Sylvain...

Un merci du fond du coeur à Nath pour ses précieux conseils et son amitié, à Milou et Clairette, mes deux danseuses préférées pour leur enthousiasme communicatif même dans les moments difficiles, elle m'ont permis de voir mon sujet de thèse sous un nouvel angle...

Merci à tous ceux que je n'ai pas cités ici mais que j'ai rencontrés durant ces quatre années et qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ma thèse et à mon équilibre quotidien.

Enfin je remercie mes parents et ma famille pour leur soutien au cours de ces longues années d'études et sans lesquels je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui.

**Merci.**



# Résumé

Les architectures actuelles des systèmes de conditionnement d'air utilisés en aéronautique évoluent. Ainsi le compresseur centrifuge d'un pack de conditionnement moderne devient une source de bruit prépondérante au sol lors des opérations de maintenance. Ce travail de thèse vise à la mise en place d'un outil d'aide à la conception acoustique des compresseurs centrifuges subsoniques. La source de bruit dominante est attribuée à l'impact des sillages du rotor sur les aubes du diffuseur. Les ondes acoustiques alors créées peuvent se propager dans les canaux inter-aubes du rotor en remontant l'écoulement jusqu'à l'entrée d'air pour rayonner à l'extérieur.

Cette hypothèse est confirmée par un essai de détection modale réalisé à l'aide d'une virole tournante instrumentée. En particulier, pour des vitesses de rotation proches du point de dimensionnement aérodynamique du compresseur, les modes créés par la source de bruit rotor/stator sont clairement présents lors des mesures réalisées et l'hypothèse de départ est validée.

L'approche analytique suivie ici revient à décomposer le trajet des ondes sonores en plusieurs étapes. Les modes engendrés par l'interaction se propagent d'abord dans les canaux inter-aubes. Cet aspect est traité par une approche de modes de conduit coudé lentement variable à section rectangulaire. Une comparaison avec un logiciel commercial montre l'importance des couplages inter-modaux, qui ne sont pas pris en compte pour l'instant dans le modèle développé.

Les ondes acoustiques se recomposent ensuite dans l'entrée d'air. Un modèle de raccordement modal entre les canaux inter-aubes et le conduit d'entrée d'air est développé en deux puis en trois dimensions selon deux techniques équivalentes qui ont été validées par un bilan de puissance. Cette méthode donne la possibilité de prendre en compte un écoulement débitant ou un écoulement tangentiel. La combinaison des deux écoulements nécessite des développements supplémentaires, qui feront l'objet d'une étude ultérieure.

L'objectif étant de déterminer une fonction de transfert propre d'un compresseur, l'étape suivante est la mise en place d'un modèle de propagation en conduit d'entrée d'air droit à extrémité libre, à partir de la technique de Wiener-Hopf.

Les trois modèles mis au point apportent des éclairages sur les mécanismes de propagation. Leur chaînage pour aboutir à un outil prédictif intégré est en cours de développement.



# Abstract

Noise reduction is an important issue for fan manufacturers, who need developing new prediction methods dedicated to low-noise design. The present work focuses on upstream noise propagation through the impeller of a centrifugal compressor. The main assumption is that the noise source arise from the impingement of the impeller wakes on the diffuser vanes. This mechanism forces in the inter-blade channels particular propagation modes that can be detected in the inlet duct. An experimental modal detection, limited to an azimuthal investigation, has been first carried out at inlet to validate the main assumption in the analytical approach. It has confirmed that the wake-interaction noise dominates the tonal noise of the compressor. Therefore, for the sake of analytical modelling the transmission path towards the compressor inlet duct is split into successive steps, each of which is addressed using a different analytical model.

The propagation inside the curved channels between adjacent blades is solved by the multiple-scale approximation for bent slowly-varying ducts adapted to channels of rectangular cross-section. Analytical results have been compared with exact solutions obtained with a commercial software. The discrepancies are attributed to a significant modal coupling inside the channels, ignored in the analytical approach.

The sound transmission from the channels towards the inlet duct has been solved as a problem of bifurcated waveguides by a mode-matching technique. This technique allows calculating the reflected and transmitted sound waves from imposed incident channel modes. To solve the mode-matching equations, a direct matrix inversion and a reformulation by residue identification have been investigated for a pure axial flow or a tangential one. When combining both flows, one issue concerning the relevant field variables to use at interfaces remains open and needs further investigation.

In this study, in order to compare different centrifugal compressor designs and therefore only focus on their respective transfer functions, the chosen inlet geometry is a straight duct. The far-field radiation at the inlet termination is modelled by the Wiener-Hopf technique.

All aforementioned analytical models are considered bricks of a future integrated prediction strategy, still in progress.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Préliminaires - Notions de bases sur la propagation guidée</b>	<b>9</b>
1.1 Cadre de l'étude	9
1.1.1 Mécanismes de génération du bruit de raies	10
1.1.2 Choix d'une méthodologie	11
1.2 Analyse dimensionnelle et hypothèses	13
1.3 Notions préliminaires sur la propagation en conduit	16
1.3.1 L'équation d'onde et sa résolution - Cas du canal plan	17
1.3.2 Propriétés des modes de conduit	18
1.3.3 Principaux résultats sur les guides d'ondes en trois dimensions	19
1.3.4 Extensions du formalisme modal	20
<b>2 Étude expérimentale</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	21
2.2 Instrumentation	22
2.3 Données et post-traitement	23
2.3.1 Rappel sur les bruits d'interaction rotor/stator	23
2.3.2 Méthode de post-traitement	24
2.4 Test sur un ventilateur électrique	25
2.4.1 Données du ventilateur	25
2.4.2 Résultats	25
2.5 Mesures sur le compresseur centrifuge	29
2.5.1 Mise en place de l'essai	29
2.5.2 Résultats des mesures	31
2.5.3 Analyse globale des résultats	35
2.6 Conclusion	37
<b>3 Propagation dans un conduit coudé à section variable - Application aux canaux inter-aubes</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction	39
3.2 Simplifications	39
3.2.1 Effet de l'écoulement	40
3.2.2 Effet des paramètres géométriques	41
3.2.3 Définition d'une géométrie pour la modélisation	44

3.3	Étude bibliographique - les deux techniques envisagées . . . . .	45
3.3.1	Propagation multimodale . . . . .	45
3.3.2	Décomposition modale lentement variable . . . . .	48
3.4	Modélisation analytique par l'approche modale lentement variable . . . . .	51
3.4.1	Mise en place des équations . . . . .	51
3.4.2	Résolution numérique . . . . .	54
3.4.3	Résultats et comparaisons . . . . .	55
3.5	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Raccordement modal sur un réseau de canaux - Application à l'entrée d'air d'un rouet centrifuge</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Modèle à deux dimensions . . . . .	71
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	71
4.2.2	Première technique de résolution : projection modale . . . . .	75
4.2.3	Deuxième technique de résolution : identification de résidus . . . . .	76
4.2.4	Vers une prise en compte de la rotation de la roue : le réseau de canaux défilant . . . . .	79
4.3	Extension du modèle à trois dimensions - Écoulement axial ( $M \neq 0, \Omega = 0$ ) . . . . .	82
4.3.1	Formulation du raccordement modal . . . . .	82
4.3.2	Écriture des équations de continuité . . . . .	82
4.4	Étude comparative et analyse des résultats . . . . .	85
4.4.1	Comparaison des deux techniques de résolution - Configuration bidimensionnelle . . . . .	85
4.4.2	Effet de l'écoulement débitant : identification des résidus . . . . .	89
4.4.3	Effet de la rotation sans vitesse débitante : projection modale . . . . .	89
4.4.4	Calculs en configuration annulaire - Effet du rapport des rayons $R_1/R_2$ . . . . .	94
4.5	Conclusion . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Propagation guidée en conduit droit ouvert - Application à l'entrée d'air</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Solution du problème de diffraction par l'extrémité d'un cylindre . . . . .	104
5.2.1	Expressions de Lordi <i>et al.</i> . . . . .	104
5.2.2	Adaptation des formules . . . . .	107
5.3	Validation et comparaison et avec d'autres prédictions . . . . .	108
5.3.1	Fonction de directivité . . . . .	108
5.3.2	Facteurs de réflexion . . . . .	110
5.4	Modifications dans les formules . . . . .	113
5.4.1	Bilan de puissance . . . . .	117
5.5	Conclusion . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Vers un modèle global de la propagation dans un compresseur</b>	<b>121</b>
6.1	Récapitulatif des sous-modèles développés . . . . .	121
6.2	Prise en compte d'une ogive . . . . .	123

6.3	Changements de bases modales . . . . .	123
6.4	Le couplage . . . . .	125
6.5	Exemple de stratégie . . . . .	127
6.6	Conclusion . . . . .	128
<b>Conclusion</b>		<b>129</b>
<b>A Définition des coefficients de normalisation des fonctions de Bessel</b>		<b>131</b>
<b>B Calculs des produits scalaires</b>		<b>133</b>
B.1	Calcul de la première intégrale . . . . .	133
B.2	Calcul de la seconde intégrale . . . . .	133
<b>C Écriture des équations de continuité de la pression et du déplacement relatif axial</b>		<b>137</b>
<b>D Lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au passage d'une surface de discontinuité</b>		<b>141</b>
D.1	Introduction . . . . .	141
D.2	Équations sur le champ moyen . . . . .	142
D.3	Équations aux perturbations . . . . .	142
D.4	Application au réseau de canaux . . . . .	143
<b>E Calcul de la puissance et de l'erreur relative</b>		<b>145</b>
<b>F Technique de propagation multimodale - Développement des calculs</b>		<b>147</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>155</b>



# Table des figures

1	Pack de climatisation actuel . . . . .	3
2	Schéma de principe de l'architecture d'un pack de climatisation de génération actuelle . . . . .	4
3	Futures architectures du pack de climatisation . . . . .	6
4	Schéma de principe du futur pack de climatisation . . . . .	6
1.1	Architecture type d'un compresseur centrifuge. . . . .	9
1.2	Localisation principale des sources de bruit liées à 1 : l'interaction des pales de la roue avec une distorsion amont - 2 : l'impact des sillages de la roue sur les aubes du diffuseur. . . . .	10
1.3	Schéma et dimensions caractéristiques d'un plan méridien et de la configuration modélisée dans l'étude : compresseur centrifuge avec un conduit d'entrée d'air droit - 1 : Génération du bruit par les aubes, propagation dans l'espace lisse et transmission dans la roue - 2 : Propagation dans les canaux inter-aubes - 3 : Raccordement modal roue/entrée d'air - 4 : Propagation dans le conduit d'entrée d'air et rayonnement à l'extérieur. . . . .	13
1.4	Paramètres dimensionnels et schématisation des sous-ensembles modélisés dans l'étude. . . . .	14
1.5	Schéma des guides d'ondes à deux dimensions et à trois dimensions. . . . .	18
2.1	Schéma technique de la virole motorisée et du conduit droit . . . . .	22
2.2	Vue de la virole motorisée instrumentée . . . . .	23
2.3	Spectre de bruit du ventilateur électrique ; (A) résonances longitudinales, (B) fréquence de coupure du conduit - 3 à 9 rangs des multiples de la FPP. . . . .	27
2.4	Résultats de la détection modale effectuée en amont du ventilateur électrique sur les multiples passants de la fréquence de passage des pales. . . . .	28
2.5	Résultats de la détection modale effectuée en amont du ventilateur électrique sur les multiples passants de la fréquence de passage des pales après recalage. À comparer à la figure 2.4. . . . .	29
2.6	Schéma de principe du montage . . . . .	30
2.7	Structure du turbo-compresseur, avec et sans le carter . . . . .	31
2.8	Résultats d'essai du compresseur centrifuge à 17000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi ; 1, 2, 3 : Rangs des multiples de la FPP - (b) - (c) - (d) : Détection modale effectuée sur les multiples de la FPP après recalage (1 : 4825 Hz - 2 : 9637 Hz - 3 : 14387 Hz) . . . . .	33

2.9	Résultats d'essai du compresseur centrifuge à 20000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi; 1, 2, 3 : Rangs des multiples de la FPP - (b) - (c) - (d) : Détection modale effectuée sur les multiples de la FPP après recalage (1 : 5662 Hz - 2 : 11312 Hz - 3 : 16962 Hz) . . . . .	34
2.10	Résultats d'essai du compresseur centrifuge à 27000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi - (b) : Détection modale effectuée sur la FPP après recalage (FPP = 7662 Hz). . . . .	35
2.11	Résultats d'essai du compresseur centrifuge à 30000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi - (b) : Détection modale effectuée sur la FPP après recalage (FPP = 8512 Hz). . . . .	36
2.12	Superposition des spectres de pression en paroi aux différents régimes testés - (a) : données brutes, (b) : données adimensionnées. . . . .	36
3.1	Simplifications successives de la géométrie d'un canal inter-aubes : (a) réelle avec <i>splitters</i> ; (b) avec torsion, sections de sortie et d'entrée planes ; (c) sans torsion ; (d) avec courbure et sections droites rectangulaires. . . . .	40
3.2	Amplitude de la pression acoustique au centre d'un canal, sans écoulement (trait plein), avec un écoulement moyen en entrée d'air de 80m/s (trait pointillé large) puis de 160m/s (trait pointillé serré) . . . . .	41
3.3	Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d'un canal sans hélicité (trait plein) et avec hélicité (trait pointillé) . . . . .	42
3.4	Comparaison de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d'un canal sans <i>splitter</i> (trait plein) et avec <i>splitters</i> (trait pointillé), l'aube intercalaire commençant à 35% de la ligne moyenne. . . . .	43
3.5	Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d'un canal avec courbure (trait pointillé) et du même canal redressé (trait plein). . . . .	44
3.6	Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d'un canal avec une section d'entrée en forme de trapèze (trait plein) et une section d'entrée de forme carré (trait pointillé). . . . .	45
3.7	Géométrie d'un canal inter-aubes sans torsion (Fig. 3.1(d)), avec le système de coordonnées curvilignes introduit pour les besoin de l'étude . . . . .	46
3.8	Évolution de la pression sur l'abscisse curviligne : comparaison entre le calcul analytique multimodal (ligne continue) et la simulation numérique SYSNOISE (ligne pointillée) . . . . .	48
3.9	Cartographie du nombre de Mach et de la pression dans le plan méridien d'un canal sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $M = 0.3$ . . . . .	57
3.10	Partie réelle des valeurs propres déterminées sans rotation ( $\Omega = 0$ - ligne continue) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ - ligne pointillée), $s = 0$ correspond au coté diffuseur. $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $M = 0.3$ . . . . .	58
3.11	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air jusqu'au diffuseur - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique. . . . .	59

3.12	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes se propageant vers l'amont depuis le diffuseur vers l'entrée d'air - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique. . . . .	60
3.13	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes coupés se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air vers le diffuseur - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique. . .	61
3.14	Cartographie du nombre de Mach et de la pression dans le plan méridien d'un canal sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $\Omega = 33000$ tr/min . . . . .	62
3.15	Partie réelle des valeurs propres déterminées sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ), $s = 0$ correspond au coté diffuseur. $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $\Omega = 33000$ tr/min . . . . .	63
3.16	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air jusqu'au diffuseur - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $\Omega = 33000$ tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.	64
3.17	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes se propageant vers l'amont depuis le diffuseur vers l'entrée d'air - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $\Omega = 33000$ tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.	65
3.18	Superposition du champ de pression sonore du mode (0,1) venant du diffuseur avec les lignes iso-Mach d'un écoulement opposé rapide ( $M = 0.7$ ) . . . . .	66
3.19	Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes coupés se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air vers le diffuseur - $f = 24000$ Hz - $m = 0$ - $\Omega = 33000$ tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.	67
3.20	Cartographie de la pression acoustique pour une onde se propageant depuis le diffuseur vers l'entrée d'air - sans écoulement. (a) : mode (0,0); (b) : mode (0,1).	67
3.21	Cartographie de la pression acoustique pour une excitation par le mode (0,0) depuis le diffuseur vers l'entrée d'air - Calcul sans écoulement. Simulation Actran en coupe (a) et en projection isométrique (b); (c) : Calcul analytique synthétisé avec une superposition arbitraire des modes (0,0) et (0,1). . . . .	68
4.1	Réflexion et transmission à l'interface entre un réseau de canaux plans à parois minces et rigides et un milieu non borné. Repère lié au réseau. . . . .	72
4.2	Réseau de canaux défilant avec vitesse débitante nulle - Définition du déplacement	80
4.3	Configuration pour la formulation du problème de transmission du son sur le front d'un réseau de canaux annulaire. . . . .	82
4.4	Comparaison des deux techniques de résolution. (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ dans les canaux, $k_0 a = 6.1164$ , $\alpha = 2$ , $M = 0$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.	87

4.5	Comparaison des deux techniques de résolution. (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ dans les canaux, $k_0a = 6.1164$ , $\alpha = 1$ , $M = 0.3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	88
4.6	Comparaison de la technique de résolution sans écoulement et avec un écoulement de nombre de Mach $M = 0.3$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ dans les canaux, $k_0a = 6.1164$ , $\alpha = 3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	90
4.7	Comparaison de la technique de résolution sans écoulement et avec un écoulement de nombre de Mach $M = 0.3$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 2$ dans les canaux, $k_0a = 6.2999$ , $\alpha = 1$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	91
4.8	Comparaison de la technique de résolution sans rotation et avec une rotation équivalente à $\Omega = 38000$ tr/min ( $M_t = 0.4932$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 0$ dans les canaux, $k_0a = 6.1164$ , $\alpha = 3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	92
4.9	Comparaison de la technique de résolution sans rotation et avec une rotation équivalente à $\Omega = 38000$ tr/min ( $M_t = 0.4932$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 2$ dans les canaux, $k_0a = 6.7280$ , $\alpha = 1$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	93
4.10	Comparaison 2D ( $R1 = 0.062$ ) – 3D annulaire étroit ( $R1/R2 = 0.98$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 0$ , $\Omega = 0$ tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	95
4.11	Comparaison 2D ( $R1 = 0.044$ ) – 3D annulaire étroit ( $R1/R2 = 0.88$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 2$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 5$ , $\Omega = 0$ tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	96
4.12	Effet de l'évolution du rapport de moyeu $R1/R2 = 0.71$ et $R1/R2 = 0.44$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ , $v_i = 0$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 0$ , $\Omega = 0$ tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion et de transmission, pourcentage de la puissance totale. . . . .	97
4.13	Effet de l'évolution du rapport de moyeu $R1/R2 = 0.71$ et $R1/R2 = 0.44$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 1$ , $v_i = 0$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 0$ , $\Omega = 0$ tr/min dans un plan méridien ( $\theta = 0$ ). De (c) à (d) : Champs de pression acoustique dans des sections droites ( $z = 0.1$ ). De (e) à (f) : Champs de pression acoustique en entrée d'air. . . . .	98

4.14	Effet de l'évolution du rapport de moyeu $R1/R2 = 0.73$ et $R1/R2 = 0.5$ . (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 2$ , $v_i = 0$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 0.5$ , $\Omega = 0$ tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion et de transmission, pourcentage de la puissance totale.	99
4.15	Effet de l'évolution du rapport de moyeu $R1/R2 = 0.73$ et $R1/R2 = 0.5$ . (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident $n_i = 2$ , $v_i = 0$ dans les canaux, $f = 11000$ Hz, $\alpha = 1$ , $M = 0.5$ , $\Omega = 0$ tr/min dans un plan méridien ( $\theta = 0$ ). De (c) à (d) : Champs de pression acoustique dans des sections droites ( $z = 0.1$ ). De (e) à (f) : Champs de pression acoustique en entrée d'air. . . . .	100
5.1	Différentes géométries de gamelles de compresseurs. (a) : entrée d'air en T, (b) : distribution sur deux compresseurs (C1,C2), (c) : maillage CAO d'une alimentation de compresseur. . . . .	103
5.2	Schéma du compresseur et son extension par un conduit d'entrée d'air cylindrique à bords libres ou bafflé. . . . .	104
5.3	Module de la fonction de directivité $f_{n_j}^*(\Theta)$ pour $k_0R_2 = 18.65$ (en dB) - Comparaison entre la théorie de Wiener-Hopf (trait plein) et l'approximation de la conduite bafflée (pointillés) . . . . .	109
5.4	Définition de la configuration et des conditions aux limites pour le calcul de simulation numérique ACTRAN . . . . .	110
5.5	Module de la fonction de directivité $f_{n_j}^*(\Theta)$ (en dB) - Comparaison entre les prédictions analytiques (trait continu) et numériques (pointillés) . . . . .	111
5.6	Comparaison des prédictions selon le modèle de Lordi <i>et al.</i> (trait continu)avec les résultats extraits de [29] (+) - Amplitude (a) et phase (b) des coefficients de réflexion du mode plan (0,0) en fonction de $k_0R_2$ . . . . .	112
5.7	Comparaison des résultats de la solution Wiener-Hopf avec les références [27, 30] représentées par les symboles (+) . . . . .	112
5.8	Comparaison des facteurs de réflexion calculés (trait continu) avec les résultats de Snakowska [46] (+) (Amplitude (a) et phase (b)) - Mode plan incident (0,0) en fonction de $k_0R_2$ . . . . .	112
5.9	Comparaison des facteurs de réflexion calculés (trait continu) avec les résultats de Snakowska [46] (+) (Amplitude (a) et phase (b)) - Mode incident (0,2) en fonction de $k_0R_2$ . . . . .	113
5.10	Module de $R_{n_{jl}}$ en fonction de $k_0R_2$ - Comparaison entre la solution numérique (pointillés) et le calcul analytique (trait plein) . . . . .	114
5.11	Comparaison entre les résultats extraits de [46] (croix bleu) et le calcul analytique (rouge plein) - Modes (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) en fonction de $k_0R_2$ . . . . .	115
5.12	Comparaison entre ACTRAN (pointillés) et le calcul analytique (trait plein) - Modes (1,1), (2,0), (3,0) et (3,1) en fonction de $k_0R_2$ - formulation initiale de Lordi <i>et al.</i> . . . . .	116
5.13	Comparaison entre ACTRAN (pointillés) et le calcul analytique (trait plein) - Modes (1,1), (2,0), (3,0) et (1,3) en fonction de $k_0R_2$ - recalage avec un terme multiplicatif . . . . .	117

6.1	Différentes étapes de la propagation modale dans un compresseur et sous-ensembles géométriques simplifiés pour la modélisation. Les flèches épaisses représentent les ondes prises en compte dans la version actuelle du modèle. . .	122
6.2	Partie réelle du potentiel acoustique dans l'entrée d'air d'un compresseur centrifuge pour un mode coupé qui devient passant au niveau du repère en $x/R_2 = 0.1$ . $k_0 R_2 = 13$ . Écoulement vers la gauche, mode se propageant vers la droite.	124
6.3	Comparaison entre les fonctions cosinus (trait continu) et leur projection sur une base de fonctions de Bessel (trait pointillé) . . . . .	125
6.4	Schéma de la configuration modélisée : compresseur centrifuge avec une ogive et un conduit d'entrée d'air droit. Les flèches en pointillés ne sont pas considérées dans la version actuelle du modèle. . . . .	126
6.5	Champ de pression acoustique en entrée d'air pour deux configurations à comparer. L'échelle de couleur (niveaux arbitraires) est identique. . . . .	128
D.1	Surface de contrôle élémentaire pour l'établissement des conditions de saut sur une surface de discontinuité fluide . . . . .	141

# Liste des tableaux

2.1	Multiples de la fréquence de passage des pales nominale du ventilateur, modes azimutaux les plus bas forcés par l'interaction rotor/stator et multiples de la fréquence de passage des pales du ventilateur relevés durant l'essai (Fig. 2.3). Les modes coupés sont mis entre parenthèses. . . . .	26
2.2	Données générales de l'essai sur le compresseur centrifuge. . . . .	31
2.3	Multiples $m$ de la fréquence de passage des pales du compresseur et modes azimutaux passants forcés par l'interaction rotor/stator. . . . .	32
5.1	Coefficients de recalage $B_{nl}$ . . . . .	116
5.2	Bilan de puissance - Erreur relative entre la puissance incidente et la somme des puissances rayonnée et réfléchie, selon le modèle de Lordi <i>et al.</i> corrigé. . .	118



# Nomenclature des principales notations utilisées

## Lettres romaines

$c_0$	célérité du son	[m.s <sup>-1</sup> ]
$f$	fréquence	[Hz]
$f_{nj}$	combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et seconde espèce	
$h_s$	rayon de courbure des canaux	[m]
$k_0$	nombre d'onde total	[rad.m <sup>-1</sup> ]
$k_z$	nombre d'onde axial ou longitudinal	[rad.m <sup>-1</sup> ]
$k_s$	nombre d'onde transversal	[rad.m <sup>-1</sup> ]
$p'$	fluctuation de pression	[Pa]
$s$	coordonnée de l'abscisse curviligne	
$v'$	vitesse acoustique	[m.s <sup>-1</sup> ]
$(x, y, z)$	coordonnées cartésiennes	
$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques	
$B$	nombre de pale du rouet centrifuge	
$J_n$	fonction de Bessel de première espèce	
$M$	nombre de Mach absolu axial uniforme	
$M_0$	nombre de Mach absolu	
$M_2$	nombre de Mach absolu dans un canal	
$M_3$	nombre de Mach absolu - Écoulement spiral	
$R_1$	rayon intérieur d'un conduit annulaire	[m]
$R_2$	rayon extérieur d'un conduit annulaire	[m]
$R_0 = (R_1 + R_2)/2$	rayon moyen d'un conduit annulaire	[m]
$U_0$	vitesse de l'écoulement	[m.s <sup>-1</sup> ]
$V$	nombre d'aube du diffuseur	
$Y_n$	fonction de Bessel de seconde espèce	
$Z$	impédance généralisée	
$p, m, n, j$	ordre modal	

**Lettres grecques**

$\omega$	pulsation	[rad.s <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	longueur d'onde	[m]
$\lambda_z$	longueur d'onde longitudinale	[m]
$\Omega$	vitesse de rotation du rouet	[rad.s <sup>-1</sup> ]
$\phi$	potentiel acoustique	
$\rho_0$	densité du fluide	[kg.m <sup>3</sup> ]
$\Theta$	angle d'une onde par rapport à l'axe de propagation	[rad]

**Symboles**

$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée particulaire
$\Delta$	laplacien

**Acronymes**

CFD	Computational Fluid Dynamics
FPP	Fréquence de Passage des Pales
HFPP	Harmonique de la Fréquence de Passage des Pales
LTS	Liebherr Aerospace Toulouse
RANS	Reynolds-Average Navier-Stokes

# Introduction

## Contexte de l'étude

LIEBHERR-AEROSPACE TOULOUSE (LTS) est un systémier aéronautique spécialisé dans le traitement d'air. Il fournit aux avionneurs des systèmes d'air directement intégrables à l'avion au stade de l'assemblage. LTS a pour activité l'étude, le développement, la production, le contrôle qualité et le service après vente de systèmes tels que le prélèvement d'air, le conditionnement d'air, la régulation de la pression cabine et du cockpit, l'antigivrage et enfin, le refroidissement des systèmes électroniques, avioniques et hydrauliques.

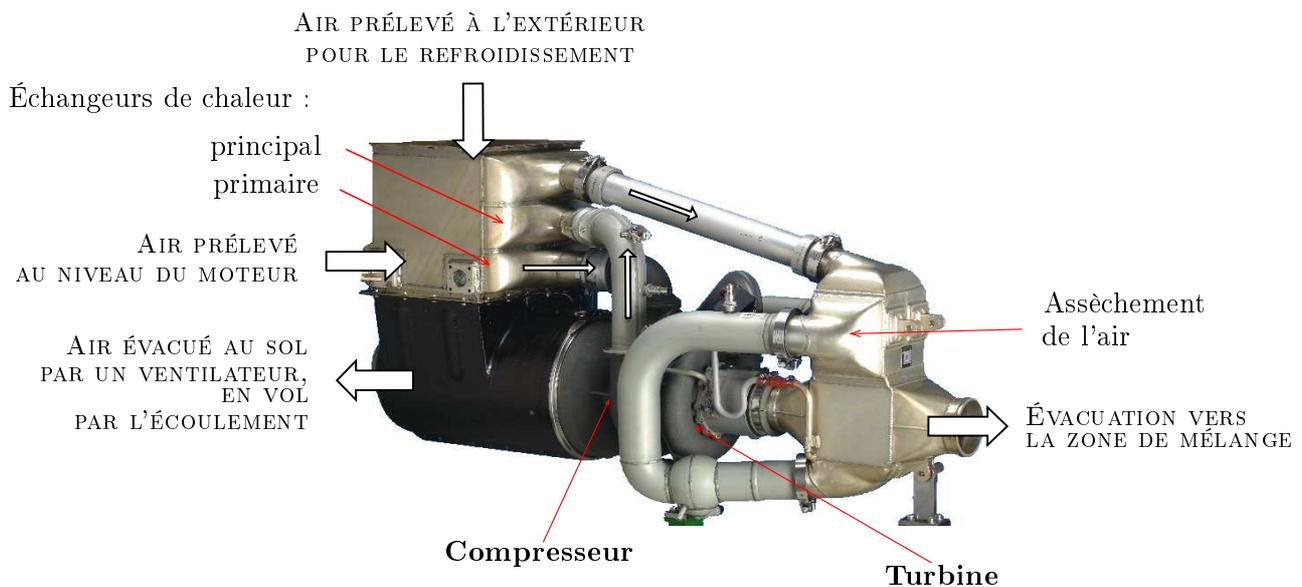


FIGURE 1 – Pack de climatisation actuel

Le composant principal des systèmes de traitement d'air est le pack de climatisation (Fig. 1). Il a pour rôle de maintenir une pression et une température constantes en cabine. Deux solutions techniques existent : le cycle à air et le cycle à vapeur. Le système choisi de préférence par LTS pour des applications sur avions est le cycle à air. Il offre en effet l'avantage d'avoir un fonctionnement simple et un coût de maintenance faible. Le cycle à air repose sur la détente d'air pressurisé prélevé sur les moteurs et refroidi par de l'air prélevé à l'extérieur. Le pack de climatisation est composé de 2 éléments principaux :

- la turbomachine, comprenant un compresseur, une turbine et un ventilateur ;

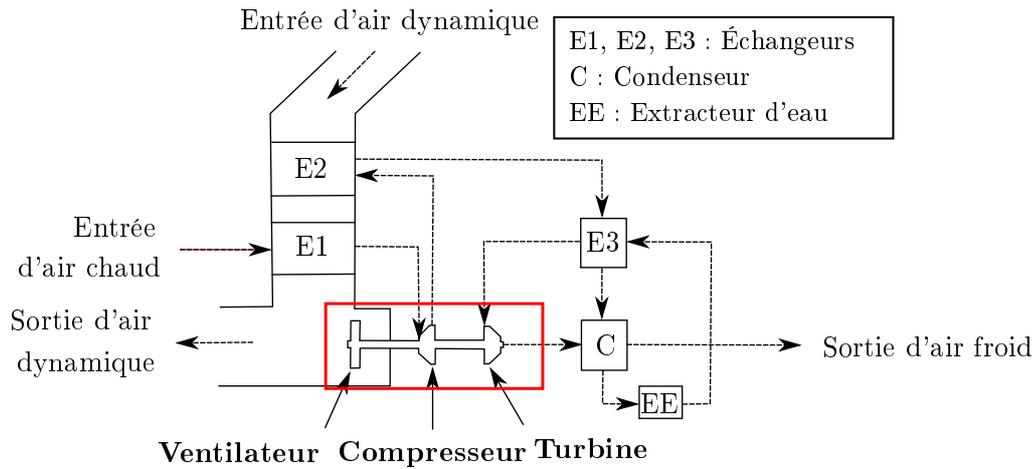


FIGURE 2 – Schéma de principe de l'architecture d'un pack de climatisation de génération actuelle

- des échangeurs thermiques ayant pour rôle principal de refroidir l'air sortant du compresseur.

Le circuit d'air est décrit sur la figure 2. L'air chaud est prélevé sur les moteurs. Il passe par un premier échangeur avant d'entrer dans le compresseur centrifuge qui augmente la pression pour permettre une plus grande détente dans la turbine. L'air est ensuite conduit vers un condenseur et un extracteur d'eau afin d'y être déshumidifié puis vers un second échangeur. Il est ainsi préparé pour entrer dans la turbine qui fournit la puissance froide vers la cabine. Le second flux est celui de l'air frais permettant le refroidissement des échangeurs. Le ventilateur assure la circulation de l'air sur les échangeurs de chaleur principalement lorsque l'avion est au sol. En vol, l'air froid est aspiré directement dans l'écope de l'avion.

La conception de la turbomachine est au centre des préoccupations. Le dimensionnement aérodynamique du compresseur et de la turbine a déjà fait l'objet d'études visant à augmenter la performance du système : pour la turbine, dans le prolongement des travaux de thèse de Xavier Carbonneau [9] et pour le compresseur par les travaux de Guillaume Dufour [13].

Les sources de bruit aérodynamique sont nombreuses dans un tel système. Elles peuvent être séparées en deux catégories, la première responsable du bruit au sol en phase de maintenance (*ramp-noise* en anglais) et la seconde responsable du bruit en cabine. Pour les architectures actuelles, la turbine radiale est la source de bruit principale en cabine, elle est cependant très atténuée par des traitements passifs placés à la sortie du pack de conditionnement d'air dans les conduits de distribution. Le problème est différent à la sortie d'air dynamique sous la peau de l'avion car les longueurs de conduit ne sont pas suffisantes pour traiter de façon correcte le bruit rayonné par le ventilateur, source principale de bruit au sol. C'est pourquoi il est nécessaire d'envisager une réduction à la source. En effet, la réglementation aéroportuaire sur les nuisances sonores évolue constamment, demandant aux industriels de ne pas dépasser des niveaux de bruit maximum au sol pour protéger le personnel lors des différentes phases de maintenance de l'avion. Dans ce contexte, les équipements doivent être améliorés pour satisfaire les nouvelles exigences. Pour cela, les aspects acoustiques doivent être intégrés dès les premières phases de la conception. Le ventilateur est monté sur le même arbre que le

compresseur et la turbine, en lien direct avec l'extérieur. La vitesse de rotation de l'arbre est très élevée (de l'ordre de 40000 tr/min) pour répondre aux besoins de rendement des turbomachines. Par ailleurs, le nombre de Mach en tête de pale du ventilateur est transsonique. De ce fait, le ventilateur est la source principale de bruit au sol. Les études portant sur l'acoustique des ventilateurs se limitent généralement aux basses vitesses. Dans cette configuration différents modèles sur le bruit de raies et le bruit à large bande sont proposés dans la littérature [2, 20, 32, 17, 15, 40]. Les ventilateurs fonctionnant aux très hautes vitesses ont fait l'objet de peu de travaux de recherche, parmi lesquels il faut citer ceux de Jean-Christophe Legros [26] qui a abouti à un outil de pré-dimensionnement aéraulique et acoustique.

Cependant, l'émergence de nouvelles technologies dans la conception des systèmes remet en question la hiérarchie des éventuelles sources de bruit.

## Évolution, enjeux industriels et scientifiques

Les avionneurs envisagent de construire des avions "plus électriques" pour des raisons économiques mais aussi environnementales. Aussi bien Outre Atlantique qu'en Europe, des projets de recherche sont lancés et confirment cette volonté de rupture. L'utilisation de l'énergie électrique au détriment des énergies mécanique, hydraulique et pneumatique redéfinit la tâche des systémiers comme LTS qui doivent s'adapter à ces changements. Ce choix a un impact majeur sur les systèmes de conditionnement d'air qui doivent être complètement repensés. Afin de diminuer la consommation de kérosène, l'idée est de supprimer le prélèvement de l'air sur les moteurs et de prélever l'air nécessaire pour les turbomachines directement à l'extérieur de l'avion. Cette conception implique de nouveaux organes :

- une trompe à air (*jet-pump* en anglais) assurant le rôle du ventilateur, dont le choix se justifie par des raisons de coût et de maintenance ;
- des compresseurs à forts taux parfois motorisés montés selon la figure 3. En effet, l'air étant prélevé à l'extérieur, les compresseurs centrifuges doivent assurer un taux de compression plus fort qu'auparavant lorsqu'il était prélevé, déjà pressurisé, sur les moteurs.

Un schéma de l'architecture des futurs équipements auxquels ce travail de thèse se rapporte, est montré sur la figure 4. L'air prélevé à l'extérieur alimente deux compresseurs centrifuges montés en parallèle. Le circuit de l'air à la sortie des compresseurs n'est pas modifié.

Une redistribution du rôle des diverses sources de bruit est à prévoir aussi bien en cabine qu'au sol. En effet, en plus du bruit de turbine existant sur les anciennes architectures s'ajoute le bruit dû aux moteurs à forte puissance (électromagnétique). À l'aspiration, le système est complètement modifié, le ventilateur est remplacé par la trompe et deux compresseurs centrifuges sont en communication directe avec l'extérieur. Le niveau de bruit des compresseurs est important et sa contribution doit donc être étudiée. De plus, tout du moins pour certaines applications, les compresseurs fonctionnent en régime totalement subsonique.

Les efforts en matière de méthodes prédictives menés par LTS depuis 2002 [12, 34, 21] sur l'acoustique des compresseurs centrifuges s'orientent vers des approches analytiques, qui offrent la possibilité de pouvoir séparer les mécanismes générateurs de bruit préalablement identifiés afin de les étudier indépendamment. En effet, une approche pleinement numérique,

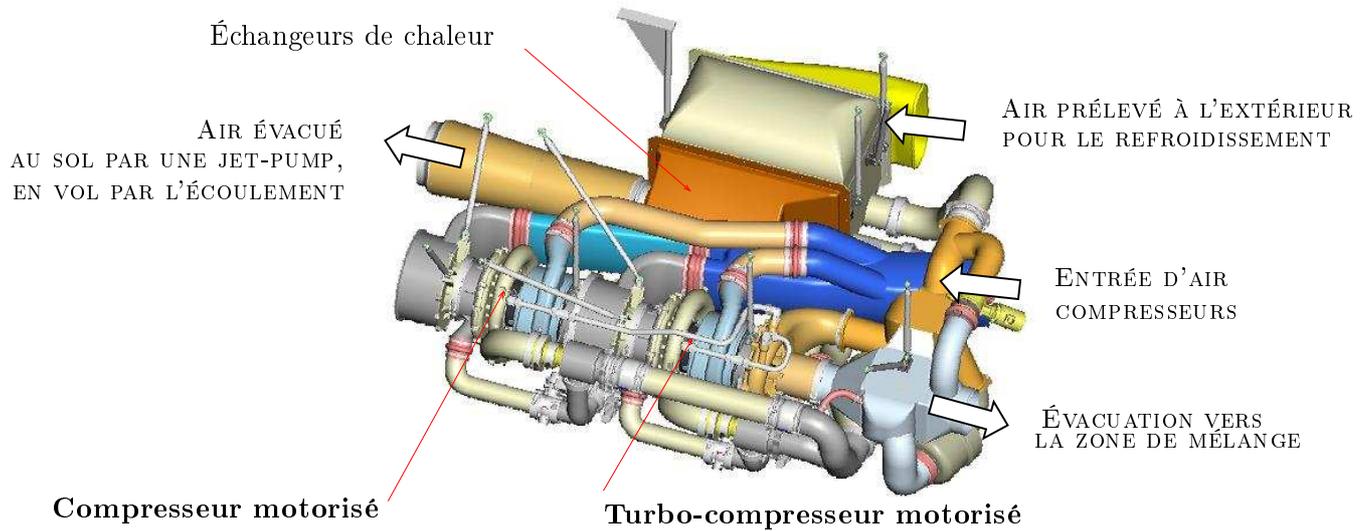


FIGURE 3 – Futures architectures du pack de climatisation

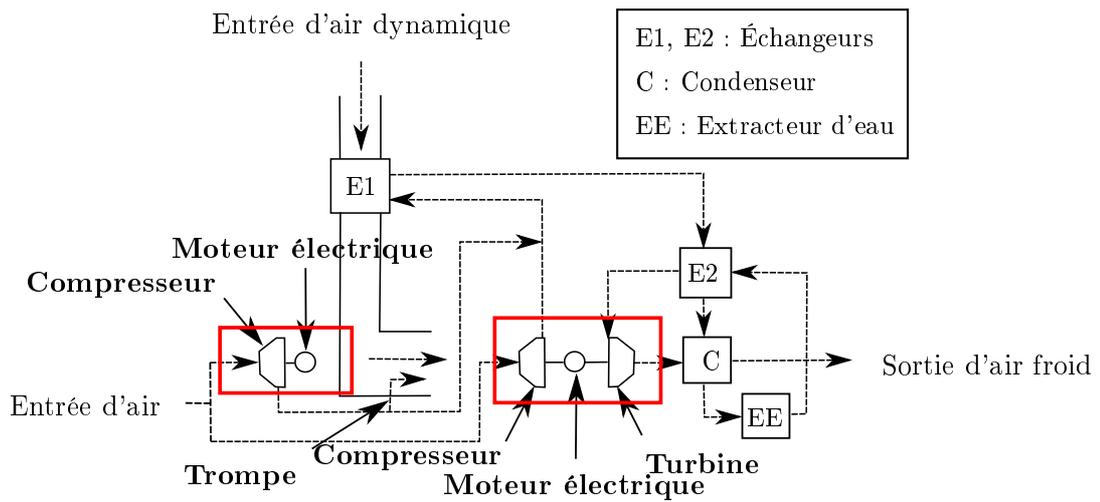


FIGURE 4 – Schéma de principe du futur pack de climatisation

dans une configuration aussi complexe, serait très coûteuse en temps de calcul et par conséquent peu compatible avec les délais de développement industriel. Le présent travail de thèse s'est donc orienté vers le développement d'une méthodologie analytique et d'un outil validé d'aide à la conception acoustique des compresseurs centrifuges subsoniques. Il a été réalisé dans le cadre d'une convention CIFRE entre le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon et LTS.

Plusieurs modèles partiels, chacun dédié à un élément de compresseur vu comme circuit acoustique menant des sources jusqu'à l'extérieur ont dû être mis au point, puis évalués et/ou validés. À l'heure actuelle leur chaînage complet n'est pas réalisé. Il convient de considérer le présent travail comme l'élaboration d'une boîte à outils, l'application finale à la conception acoustique d'un compresseur à moindre bruit faisant encore partie des perspectives futures.

Le **chapitre 1** regroupe quelques considérations préliminaires et définit la stratégie choisie. Une étude dimensionnelle est proposée pour justifier les hypothèses et choix faits dans la suite du mémoire. Les notions de base de la propagation dans les conduits, qui servent de préambule aux développements théoriques vus plus loin, sont rapidement rappelées.

Le **chapitre 2** est consacré à un essai de confirmation d'une hypothèse faite quant au mécanisme de bruit dominant, objet de l'étude, à savoir l'interaction de sillage rotor/stator. Un essai de détection modale dans un conduit d'entrée d'air droit a été mené et montre que le bruit d'interaction rotor/stator remonte l'écoulement et se propage effectivement jusqu'à l'extérieur.

Trois modèles sont ensuite développés et appliqués aux problématiques qui nous intéressent dans les chapitres suivants : un modèle de propagation dans les canaux inter-aubes, un modèle de raccordement modal avec l'entrée d'air et un modèle de rayonnement acoustique à l'extérieur.

Le **chapitre 3** traite de la propagation acoustique dans des conduits coudés à section rectangulaire variable. Deux techniques ont été évaluées, la première étant une approche multi-modale dérivée des études de S. Félix [16], la seconde provient de l'approche modale d'E. Brambley [5]. La première technique n'a pas été appliquée au modèle complet pour des raisons pratiques expliquées plus loin, la deuxième technique lui a été préférée.

Le **chapitre 4** propose un modèle de raccordement modal entre les canaux inter-aubes du rotor et l'entrée d'air. Cette méthode est inspirée de la théorie des réseaux électromagnétiques (Mittra & Lee [31]) et appliquée à notre problématique. Elle est développée en deux dimensions puis en trois dimensions. Elle permet de prendre en compte un écoulement débitant et un glissement tangentiel de façon indépendante. La prise en compte d'une combinaison des deux composantes d'écoulement est un problème qui s'est avéré difficile à écrire et n'est pas résolu aujourd'hui.

Le **chapitre 5** applique les expressions proposées par Lordi *et al.* [30] pour le champ diffracté à l'extrémité d'un conduit droit semi-infini. Des corrections sont apportées suite à une comparaison avec une étude numérique.

Les perspectives et la stratégie d'intégration des modèles dans un outil prédictif complet de bruit sont esquissées dans le **dernier chapitre**.



# Chapitre 1

## Préliminaires - Notions de bases sur la propagation guidée

### 1.1 Cadre de l'étude

L'étude est dédiée aux nouvelles architectures décrites sur la figure 3 et plus particulièrement au bruit rayonné à l'aspiration. C'est le compresseur centrifuge qui est à l'origine du bruit au sol. En effet, le compresseur aspire l'air à l'extérieur à travers une entrée d'air, de géométrie plus ou moins complexe en fonction de l'installation sur l'avion. Dans le compresseur, l'air traverse successivement la roue (rotor ou rouet centrifuge), l'espace lisse (espace entre le rotor et le stator), le diffuseur (stator radial) puis la volute (Fig. 1.1). Le compresseur étant relié directement avec l'extérieur à l'aspiration, les sources acoustiques engendrées dans la machine et en particulier au niveau du diffuseur peuvent *a priori* remonter l'écoulement pour contribuer aux nuisances sonores au sol.

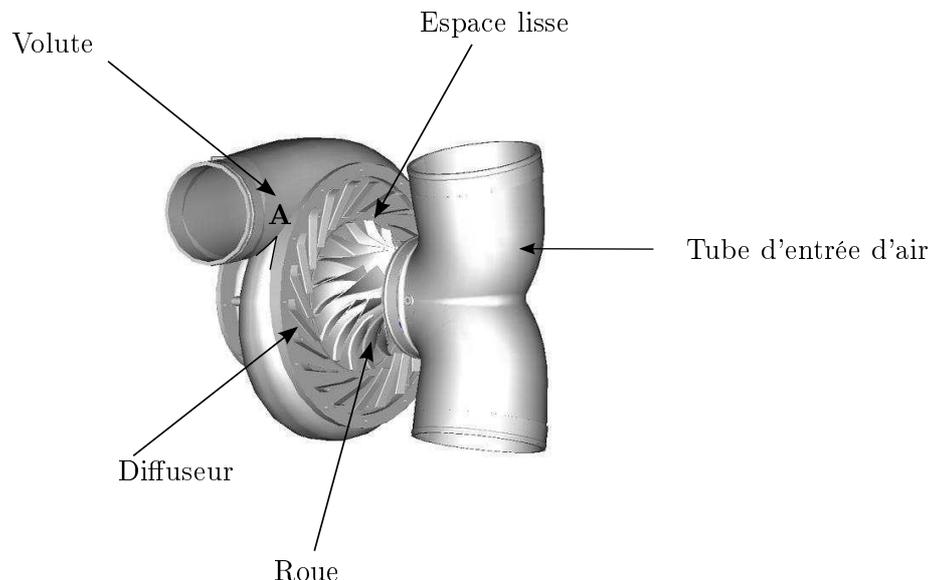


FIGURE 1.1 – Architecture type d'un compresseur centrifuge.

Rares sont les études existantes sur la conception acoustique complète des compresseurs centrifuges. Xu & Müller [48] se sont par exemple intéressés à la volute par des études nu-

mérique et expérimentale. Kennepohl *et al.* [24] ont travaillé sur la réduction du bruit de compresseurs centrifuges à l'aide de calculs numériques de mécanique des fluides (CFD pour *Computational Fluid Dynamics* en anglais) sur les pales et d'essais de validation. Raitor & Neise [36] ont, quant à eux, consacré une étude expérimentale aux sources de bruit en amont et en aval d'un compresseur centrifuge avec ou sans diffuseur aubé. Ils ont conclu que les sources de bruit prédominantes en entrée d'air étaient le bruit de jeu en tête de pale ainsi que le bruit du rotor seul, alors qu'en aval, les bruits dus au rotor seul ainsi qu'à l'interaction rotor/stator prédominaient. Nous verrons plus loin qu'il peut en être autrement selon la machine considérée ou son installation. Notamment, Raitor & Neise présentent des spectres de bruit prouvant l'existence d'instabilités dans l'écoulement. Dans la configuration traitée dans le cadre de cette thèse, sur les régimes de fonctionnement normaux, cela ne semble pas être le cas, et le bruit d'interaction rotor/stator remonte dans l'entrée d'air, où il constitue la source dominante.

### 1.1.1 Mécanismes de génération du bruit de raies

La présente étude privilégie des méthodes analytiques adaptées aux mécanismes générateurs de bruit se produisant dans un étage de compresseur centrifuge subsonique et se propageant vers l'amont. La première étape est donc de définir les sources susceptibles d'engendrer le bruit observé dans l'entrée d'air. D'après des mesures préliminaires réalisées par LTS, le bruit de raies est la nuisance principale puisqu'il émerge typiquement de 25 dB du bruit à large bande. Le bruit à large bande est donc négligé à juste titre dans cette thèse. Le bruit de raies peut être *a priori* attribué aux mécanismes suivants :

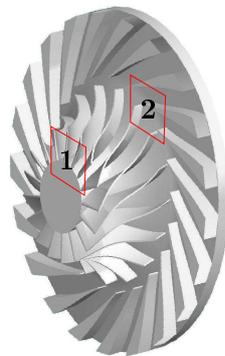


FIGURE 1.2 – Localisation principale des sources de bruit liées à 1 : l'interaction des pales de la roue avec une distorsion amont - 2 : l'impact des sillages de la roue sur les aubes du diffuseur.

- **Interaction de la distorsion amont avec les pales de la roue** (mécanisme pointé en 1 sur la figure 1.2). Du fait de la géométrie de l'entrée d'air du compresseur, l'écoulement arrivant en amont n'est pas nécessairement à symétrie de révolution. Il est caractérisé par une distorsion angulaire (et éventuellement radiale) dont l'interaction avec le bord d'attaque des aubes produit du bruit, susceptible de rayonner vers l'extérieur.

- **Interaction de sillages roue/diffuseur** (point noté **2** sur la figure 1.2). À la sortie de la roue, des sillages enroulés en spirales se constituent derrière les pales. Leur impact sur le diffuseur produit du bruit. Les sources sont fixes puisque localisées sur les aubes du diffuseur.
- **Bruit de charge stationnaire.** On se limite à l'étude du compresseur dans une phase de fonctionnement où la vitesse de rotation du rotor est constante. Même dans cette configuration, la rotation s'accompagne d'un bruit de charge stationnaire lié au champ de pression non perturbé autour des pales. Mais ce bruit est négligeable dans une machine subsonique carénée car il correspond à des structures de propagation coupées par le conduit (voir chapitre 1.3).
- **Interaction avec le bec de volute.** Sur un compresseur sans diffuseur, le bec de volute (point **A** sur la figure 1.1) est à proximité de la périphérie de la roue. Son voisinage est le lieu de fluctuations particulières qui contribuent au bruit de raies. Les sources sont réparties à la fois sur les pales et sur le bec de volute. Lorsque le bec de volute est éloigné de la roue du fait de la présence d'un diffuseur aubé, une interaction résiduelle peut persister. Mais cette contribution peut être considérée comme négligeable devant l'interaction de sillages vis-à-vis du rayonnement à l'extérieur.
- **Interaction potentielle.** Lorsque l'espace entre la périphérie de la roue et les aubes du diffuseur est réduit, des fluctuations peuvent être induites sur les pales par la distorsion de l'écoulement autour des aubes, produisant un bruit dit d'interaction potentielle. Cette source de bruit est négligée par la suite, ce qui suppose que l'espace lisse existant entre le rotor et le stator est suffisamment grand et que le bord d'attaque des aubes est suffisamment mince.

### 1.1.2 Choix d'une méthodologie

Compte tenu de l'architecture du compresseur, l'étude peut se restreindre uniquement aux sources dominantes du bruit de raies (pointées en **1** et **2** sur la figure 1.2). Étant donné qu'elle dépend de l'installation par l'intermédiaire de la forme de l'entrée d'air et n'est donc pas inhérente à la conception du compresseur lui-même, la distorsion angulaire de l'écoulement d'alimentation ne sera pas traitée ici. En revanche, l'interaction de sillages entre la roue et le diffuseur est un mécanisme intrinsèque, pour lequel on peut vouloir disposer de règles de conception à moindre bruit. C'est pourquoi cette thèse est consacrée uniquement à la modélisation de ce mécanisme.

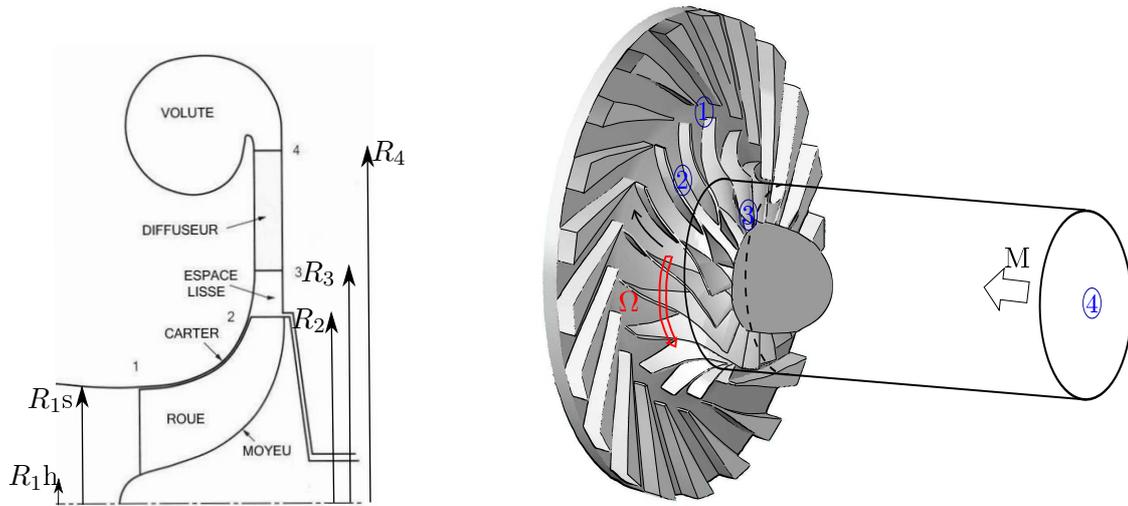
En l'absence de simulation numérique disponible, l'estimation des sources de bruit liées à l'impact des sillages sur le diffuseur pourrait en principe être réalisée par les théories linéarisées de l'aérodynamique instationnaire, par exemple la théorie d'Amiet [2] reposant sur une décomposition de Fourier du déficit de vitesse dans les sillages et sur une fonction de réponse de profil isolé. La même information pourrait également être obtenue par une simulation périodique (dite RANS pour *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*). Quelle que soit l'amplitude des sources, la propagation qui s'ensuit à travers le compresseur est déterminée par ses données

géométriques et aérodynamiques. La roue peut alors être comprise comme une fonction de transfert qui modifie le champ sonore qu'elle propage. Dans cette optique, et en vue de la recherche d'une architecture qui vise à réduire la transmission du bruit vers l'amont, seule la structure modale du mécanisme retenu importe, tant que l'on se restreint au champ d'hypothèses de l'acoustique linéaire. On se propose donc de travailler non pas directement sur une description précise de la source du bruit mais plutôt sur sa structure modale et la propagation jusqu'à l'extérieur. C'est pourquoi, un rappel succinct sur les bases de la propagation en conduit est proposé au paragraphe 1.3. Le bruit d'interaction de sillages se propage à travers l'espace lisse (entre le diffuseur et la roue), les canaux du rouet centrifuge et l'entrée d'air, avant de rayonner à l'extérieur. Il conviendra donc de décrire la propagation dans chaque élément de cette chaîne. L'hypothèse de départ sur la source dominante est fondamentale dans cette étude. Elle est validée par un essai de détection modale dans une entrée d'air droite prouvant que les modes observés sur les fréquences de passage des pales du rotor correspondent bien aux modes forcés par l'interaction rotor/stator. La conception du banc d'essais ainsi que les résultats seront discutés dans le chapitre 2.

L'objectif final de ce travail est de mettre en place une méthode rapide de conception acoustique des compresseurs centrifuges dans leur phase de pré-dimensionnement. Pour ce faire, une configuration avec entrée d'air cylindrique simple a été définie. L'approche choisie est analytique et repose sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dont on espère qu'elles conservent la physique mise en jeu. Les hypothèses seront développées et explicitées dans le paragraphe 1.2 consacré à la formulation du problème mathématique sur la base de paramètres sans dimension. Du fait du contexte des hautes fréquences, l'idée est de recourir à une décomposition en modes de propagation afin d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes. Cette *approche modale* originale est justifiée car elle permet de traiter de la même façon la propagation acoustique tout le long du compresseur et de raccorder facilement des modèles partiels.

Le problème complet est décomposé en différentes étapes qui peuvent se traiter indépendamment dans le cadre de l'acoustique linéaire. Après leur création au niveau du diffuseur, les ondes sonores se transmettent et se propagent dans les canaux inter-aubes. Des développements spécifiques dédiés à la propagation en conduit coudé à section variable sont donc nécessaires. Ce point est abordé dans le chapitre 3. Les ondes sonores qui se sont propagées le long des canaux se raccordent ensuite au niveau du tube d'entrée d'air sur la face avant de la roue. Deux techniques de raccordement ont été envisagées pour traiter cet aspect et sont exposées dans le chapitre 4. Enfin les ondes se propagent le long du conduit droit et rayonnent à l'extérieur. La diffraction par l'extrémité est traitée par la technique de Wiener-Hopf explicitée dans le chapitre 5. L'aboutissement du travail est, à terme, le chaînage complet des modèles développés pour chaque étape. Bien que sortant du cadre de la thèse, la stratégie à suivre dans ce but est suggérée au chapitre 6.

Cette étude se veut une aide à la conception et au pré-dimensionnement des compresseurs centrifuges subsoniques et vise à proposer une vision claire des phénomènes physiques. L'étude globale permettra d'appréhender au mieux les différentes étapes de la propagation tout le long du compresseur et donc de hiérarchiser différentes géométries pour, une fois associée à une étude paramétrique, trouver une configuration à moindre bruit en évitant les calculs complets.



(a) Dimensions caractéristiques ( $R_1h \approx 3$  cm,  $R_2 \approx 9$  cm,  $R_4 \approx 15$  cm)

(b) Configuration modélisée

FIGURE 1.3 – Schéma et dimensions caractéristiques d'un plan méridien et de la configuration modélisée dans l'étude : compresseur centrifuge avec un conduit d'entrée d'air droit - **1** : Génération du bruit par les aubes, propagation dans l'espace lisse et transmission dans la roue - **2** : Propagation dans les canaux inter-aubes - **3** : Raccordement modal roue/entrée d'air - **4** : Propagation dans le conduit d'entrée d'air et rayonnement à l'extérieur.

## 1.2 Analyse dimensionnelle et hypothèses

La figure 1.3(b) donne une vue d'ensemble de la géométrie complexe étudiée dans cette thèse. La modélisation de la propagation acoustique à l'intérieur du compresseur centrifuge subsonique est décomposée en quatre étapes principales : - **1** : Génération du bruit par les aubes, propagation des ondes dans l'espace lisse et transmission dans la roue - **2** : Propagation acoustique dans les canaux inter-aubes - **3** : Raccordement modal entre la roue et l'entrée d'air - **4** : Propagation des ondes sonores dans le conduit d'entrée d'air et rayonnement à l'extérieur.

En principe, le champ sonore peut être décrit localement en terme de propagation modale dans chaque partie du compresseur et les champs acoustiques raccordés à l'aide de techniques de raccordement modal. Cependant, l'approche analytique repose sur un certain nombre d'hypothèses qu'il convient d'argumenter.

Tout d'abord le type de compresseur traité reste subsonique en tout point, ce qui rend possible la remontée des ondes sonores. Le modèle développé dans ce travail ne pourra donc pas être appliqué tel quel à des compresseurs ayant un écoulement transsonique ou supersonique.

Ensuite l'approche modale est pertinente uniquement à hautes fréquences, typiquement au delà de 5 kHz dans le cas présent, lorsque les longueurs d'onde sont inférieures aux longueurs caractéristiques du compresseur.

Les paramètres dimensionnels qui interviennent sont détaillés sur la figure 1.4. La géométrie complète peut être décomposée en sous-structures sous certaines conditions. Il faut que les longueurs d'onde des ondes qui se propagent dans les différentes parties du compresseur

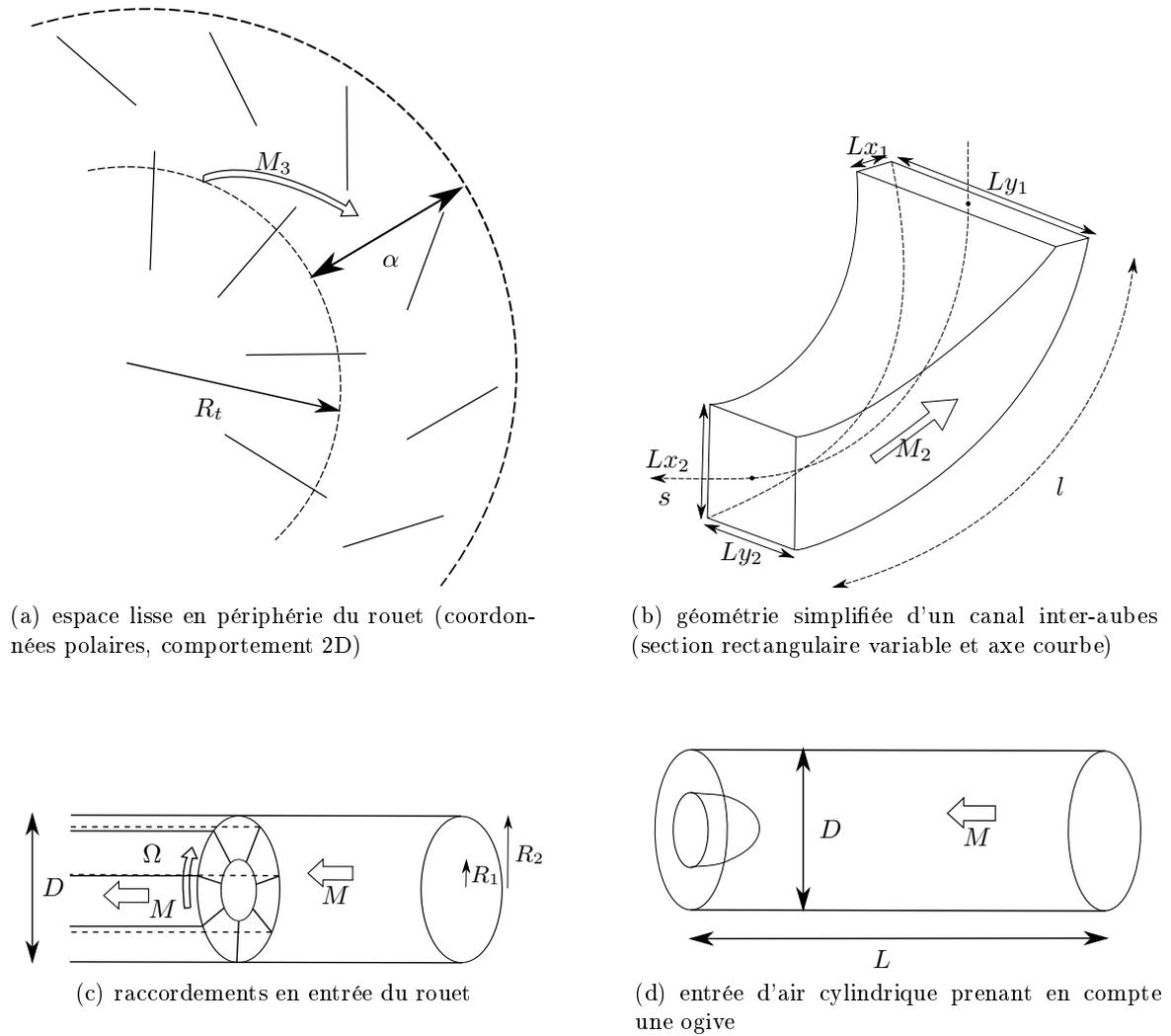


FIGURE 1.4 – Paramètres dimensionnels et schématisation des sous-ensembles modélisés dans l'étude.

restent inférieures aux dimensions caractéristiques de chaque partie :  $\lambda/h \leq 1$ ,  $h$  représentant tour à tour la longueur d'un canal inter-aubes  $l$ , le rayon du compresseur  $R_t$  ou encore la distance entre deux bords de fuite de pales adjacentes du rouet centrifuge  $Ly_1$ . En principe, une décomposition modale est par définition rigoureuse et resterait possible même sur un domaine d'étendue inférieure à la longueur d'onde, mais elle serait moins adaptée dans le sens où le champ local ne mettrait pas en évidence des structures modales claires. Les compresseurs dimensionnés à LTS remplissent les conditions précédentes, en effet, l'ordre de grandeur du rayon en sortie de roue  $R_2$  est d'une dizaine de centimètres. Les dimensions caractéristiques sont données sur la figure 1.3(a).

La structuration des sources de bruit et la propagation acoustique correspondante dans l'espace lisse (Fig. 1.4(a)) est un problème qui peut être traité en deux dimensions, en coordonnées polaires. En effet, la hauteur de la pale au niveau du bord de fuite est très petite devant la largeur du canal et devant les longueurs d'onde ( $L_{x1} \ll Ly_1, \lambda$ ). Le champ est donc homogène dans le sens axial ( $x_1$ ) à la sortie du rouet. Ce problème a été traité dans une étude précédente, ignorant la rotation du rouet, et ne sera pas développé ici [42]. L'écoulement simplifié pris en compte dans cette partie était un écoulement spiral de nombre de Mach  $M_3$  fonction du rayon. Si on considère l'interaction des sillages de la roue avec les aubes du diffuseur, on peut connaître les indices des modes générés même si l'amplitude, qui dépend des fluctuations de pression sur les aubes, est inconnue, en suivant les critères classiques de Tyler & Sofrin [47].

La roue comprend  $B$  pales également espacées et sa vitesse de rotation est notée  $\Omega$ . Le  $N^{\text{ième}}$  multiple de la fréquence de passage des pales du rouet est à la pulsation  $\omega = NB\Omega$ . Les sources de bruit induites sur les  $V$  aubes du diffuseur également espacées génèrent des ondes périodiques angulaires d'ordres  $n = NB - sV$ ,  $s$  étant un entier quelconque. Chacune de ces ondes est appelée mode spiral, en raison de la forme des fronts d'ondes associés [42]. À chaque mode correspond une vitesse de rotation de la phase  $\omega/n$  dans le repère fixe. La phase d'un mode varie donc en  $e^{-i(\omega t - n\theta)}$ , avec  $n$  positif pour un mode tournant dans le sens trigonométrique. Dans un repère attaché à la roue, la pulsation relative vaut  $\omega' = \omega - n\Omega = (NB - n)\Omega$ , si le rouet tourne également dans le sens trigonométrique ( $\Omega > 0$ ). De plus, le champ acoustique transmis dans deux canaux adjacents aux angles  $\varphi$  et  $\varphi + 2\pi/B$  est le même, décalé d'une phase de  $e^{in2\pi/B}$  pour le second. Quelque soit la propagation dans les canaux, le même décalage angulaire est produit en sortie des canaux, c'est-à-dire à l'entrée du rouet pour l'écoulement, et la reconstruction au niveau du conduit d'entrée d'air impose à nouveau, de préférence, le mode incident  $n$ , dans le repère fixe. Cependant sont également produits tous les modes diffractés d'ordres  $n - \sigma B$ ,  $\sigma$  étant un entier quelconque, en raison de la périodicité de la grille d'aubes du rouet. La même diffraction en terme de modes et de fréquences se produit de l'autre côté du rouet (côté espace lisse), et conditionne le champ réfléchi vers la volute. Dans cette étude, seule la diffraction du côté de l'entrée d'air est prise en compte et développée dans le chapitre 4.

La partie de ce travail concernant la propagation du champ acoustique dans les canaux inter-aubes traite une géométrie plus simple que la réelle géométrie d'un canal (Fig. 1.4(b)). En effet, un canal réel est coudé, avec une hélicité donnée et une section variable. Certains

aspects géométriques ont été négligés pour permettre la résolution analytique des équations de propagation. On considère ainsi que le canal a une section rectangulaire. Ceci suppose que le nombre de canaux est suffisamment important pour qu'une section droite qui en toute rigueur représente un secteur annulaire puisse être approchée par un rectangle. En toute rigueur cette condition s'écrit  $B \gg 1$ . Elle est acceptable ici car un rouet comporte typiquement 17 aubes. De plus, les dimensions d'une section d'un canal inter-aubes  $L_{x2}$  et  $L_{y2}$  en entrée ainsi que sa longueur  $l$  ne sont pas inférieures aux longueurs d'onde qui nous intéressent. La structure modale dans les canaux n'est donc pas uniforme dans les deux directions. De plus, l'hélicité (ou torsion) est également négligée pour cette étude, pour des raisons de simplicité. Elle ne change pas la structure modale des recompositions. Des calculs numériques, résumés dans le chapitre 3, ont permis d'estimer les erreurs dues à cette approximation géométrique. Seules la courbure dans un plan méridien et la variation de section sont finalement prises en compte. De plus, l'écoulement à l'intérieur d'un canal est très complexe. Les équations régissant l'écoulement devraient en principe prendre en compte les effets d'inertie liés à la rotation du compresseur, comprenant la force centrifuge et la force de Coriolis. Dans la modélisation, l'écoulement moyen sera supposé irrotationnel, ce qui est en contradiction avec l'accélération tangentielle de Coriolis. Cette dernière ne sera donc pas prise en compte dans les équations du champ moyen. L'écoulement  $M_2$  sera défini à partir de l'équation de Bernoulli incluant uniquement la force centrifuge.

Le choix de propager le champ acoustique décomposé sur une base modale nous amène à proposer un raccordement modal au niveau de l'entrée d'air du rouet centrifuge. Le modèle a été développé sur une géométrie correspondant à la figure 1.4(c). L'écoulement moyen  $M$  y est axial et uniforme. Il lui est associé une composante tangentielle représentant la rotation lorsque l'écoulement résultant est décrit dans le repère lié au rouet. Les ondes une fois raccordées se propagent dans un conduit fini droit (Fig. 1.4(d)) prenant en compte le même type d'écoulement axial homogène et uniforme  $M$ . La présence d'une ogive lentement variable peut également être prise en compte et sera abordée dans le chapitre 6. Le dernier chapitre propose également une stratégie d'assemblage des sous-modèles développés pour une étude future. Il faut noter que pour toute l'étude l'écoulement est orienté *a contrario* de la propagation acoustique, conformément à la configuration d'une entrée d'air simplifiée.

### 1.3 Notions préliminaires sur la propagation en conduit

Un rappel succinct des équations de propagation en conduit ainsi que de leur résolution est fait dans ce paragraphe [28, 41] afin de donner quelques bases qui seront reprises ensuite. Cette partie permet de mettre en place des notions et des notations permettant une meilleure compréhension de la suite du manuscrit. La démarche consiste à écrire l'équation d'onde avec des conditions aux limites imposées sur les parois d'un guide d'onde. La technique de résolution est présentée avec un écoulement uniforme dans le premier paragraphe (1.3.1) puis la notion de modes de propagation est développée sur un exemple de conduit droit en deux dimensions (1.3.2). Ensuite sont donnés les principaux résultats en conduits rectangulaire et circulaire en trois dimensions (1.3.3).

### 1.3.1 L'équation d'onde et sa résolution - Cas du canal plan

L'équation de propagation des ondes est déduite après linéarisation des équations de conservation de la masse et de l'équation d'Euler en fluide parfait. L'écoulement de base, supposé de vitesse  $U_0$  uniforme selon l'axe  $z$ , y est pris en compte par le nombre de Mach  $M_0 = U_0/c_0$ , où  $c_0$  est la célérité des ondes sonores. L'équation s'écrit, sur la fluctuation de pression  $p'$  :

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} = 0$$

avec  $D/Dt = \partial/\partial t + U_0 \partial/\partial z$ .

Cette équation, spécifiée pour des solutions harmoniques sous la forme

$$p'(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) \exp(i\omega t),$$

conduit à l'équation de Helmholtz convectée :

$$\Delta p' - M_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - 2iM_0 k_0 \frac{\partial p'}{\partial z} + k_0^2 p' = 0$$

avec  $k_0 = \omega/c_0$ . Pour les applications aux guides d'ondes d'axe  $z$ , cette équation est résolue par séparation des variables de façon immédiate en posant  $P(\mathbf{r}) = P_s(\mathbf{r}_s) Z(z)$ .  $\mathbf{r}_s$  correspond alors au vecteur de coordonnées dans une section droite,  $(x, y)$  en coordonnées cartésiennes ou  $(r, \theta)$  en coordonnées cylindriques.

Quelque soit le guide d'onde,  $Z(z) = \exp(-ik_z z)$ ,  $k_z$  étant le nombre d'onde axial ou longitudinal, et  $P(\mathbf{r}, z, t) = P_s(\mathbf{r}_s) \exp(i(\omega t - k_z z))$ . L'équation sur la dépendance transverse du champ se réduit à :

$$\Delta P_s + k_s^2 P_s(\mathbf{r}_s) = 0$$

et la relation qui relie les différents nombres d'onde  $(k_0 - M_0 k_z)^2 = k_z^2 + k_s^2$  est appelée relation de dispersion. C'est la composante  $P_s$  qui reste assujettie aux conditions aux limites de rigidité des parois, à savoir l'annulation de la dérivée normale de la pression.

Dans le cas particulier du guide d'onde à deux dimensions, appelé canal plan, en coordonnées cartésiennes, une solution propre particulière pour la fluctuation de pression à l'intérieur du guide d'onde, ou mode de propagation, s'écrit :

$$p'(x, z, t) = P_1 \cos(k_s x) e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

avec  $k_s = m\pi/H$ ,  $m$  entier et

$$k_z = -\frac{M_0 k_0}{\beta^2} \pm \frac{\sqrt{k_0^2 - \beta^2 k_s^2}}{\beta^2} \quad (1.1)$$

avec  $\beta = \sqrt{1 - M_0^2}$ .  $P_1$  représente alors l'amplitude modale pour la propagation selon les  $z$  positifs ou négatifs selon le signe de  $k_z$ .  $m$  est appelé l'ordre du mode et les modes forment une base complète orthogonale [28].

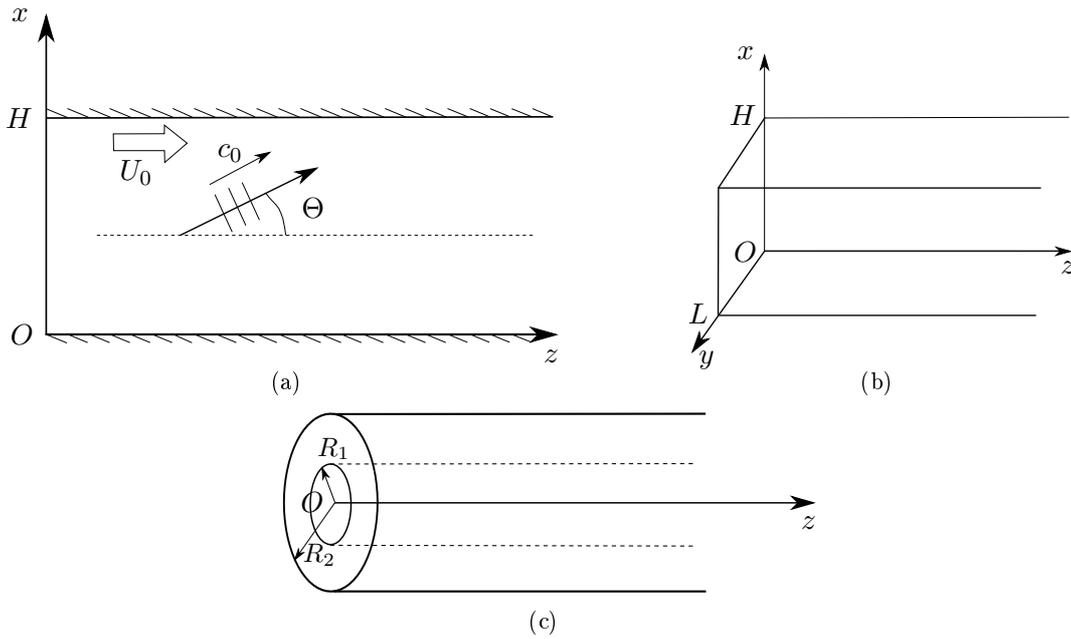


FIGURE 1.5 – Schéma des guides d'ondes à deux dimensions et à trois dimensions.

### 1.3.2 Propriétés des modes de conduit

Les solutions précédemment trouvées impliquent des propriétés particulières sur les modes.

*Sans écoulement :*

À une fréquence fixée  $f$ , le nombre d'onde total s'écrit  $k_0 = 2\pi f/c_0$  et la longueur d'onde est  $\lambda = 2\pi/k_0$ . Le paramètre  $k_s$  est le nombre d'onde transversal et  $k_z$  le nombre d'onde axial.

- Si  $k_0 > k_s$ ,  $k_z^2 > 0$  et donc la longueur d'onde longitudinale  $\lambda_z > \lambda$ ; l'onde se propage sans atténuation.
- Si  $k_0 < k_s$ ,  $k_z^2 < 0$  et donc  $k_z$  est imaginaire pur, l'onde ne se propage pas, on dit qu'elle est évanescente. Le mode est dit coupé. Son amplitude décroît de façon exponentielle depuis sa source.

À une fréquence donnée, le guide d'onde se comporte donc comme un filtre passe-bas en ordres de modes. Pour un mode donné  $m$ , le guide d'onde est un filtre passe-haut en fréquence.  $f_c = c_0 k_s / 2\pi = c_0 m / 2H$  est appelée la fréquence de coupure du mode  $m$ .

*Avec écoulement :*

La fréquence de coupure est désormais égale à  $f_c = \beta c_0 k_s / 2\pi$ . L'écoulement a donc pour effet d'abaisser les fréquences de coupure, un mode initialement coupé par le guide dans un milieu au repos peut devenir propagatif avec écoulement. L'écoulement est également responsable d'un transport des ondes sonores, traduit par le terme  $-M_0 k_0 / \beta^2$  de l'équation 1.1.

Chaque mode du canal plan est associé à un angle de propagation  $\Theta$  tel que  $\sin(\Theta_m) = m\pi/k_0 H$ . Cet angle donne une interprétation de la notion de coupure. En effet, pour une onde plane, la pression  $p'$  s'écrit alors de la façon suivante :

$$p'(x, z, t) = A_1 \cos(k_0 \sin(\Theta)x) e^{ik_0 \cos \Theta [z - (U_0 + c_0 / \cos \Theta)t]}.$$

On remarque alors que la vitesse de phase de l'onde (vitesse de trace des fronts d'ondes à la paroi) dépend de la vitesse de l'écoulement  $U_0$ . Elle vaut  $c_\varphi = U_0 + c_0 / \cos \Theta$ . L'écoulement introduit une asymétrie du rayonnement entre amont et aval.

- si  $\Theta > \pi/2$ , l'onde se propage en remontant l'écoulement, on parle de mode amont,
- si  $\Theta < \pi/2$ , l'onde se propage dans le sens de l'écoulement, on parle de mode aval,
- si  $\Theta > \pi/2$  et  $-\cos \Theta < M_0$ , l'onde se propage en remontant l'écoulement mais elle est convectée dans le sens de l'écoulement par rapport au conduit, on parle de mode amont inverse.

Ces comportements valent quelque soit le guide d'onde et en particulier elles se déclineront dans notre étude dans les guides d'ondes courbes (chapitre 3), dans la partie traitant des raccordements modaux entre la roue du compresseur et l'entrée d'air (chapitre 4) ou dans la propagation dans l'entrée d'air (chapitre 5).

### 1.3.3 Principaux résultats sur les guides d'ondes en trois dimensions

#### Conduit à section rectangulaire

Les raisonnements précédents se généralisent. Une solution propre de l'équation de propagation en conduit rectangulaire (Fig. 1.5(b)) est ainsi :

$$p'(x, y, z, t) = P_1 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

avec

$$k_x = \frac{m\pi}{H}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L}, \quad k_s^2 = k_x^2 + k_y^2 = (k_0 - M_0 k_z)^2 - k_z^2$$

$$f_c = \beta \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{m^2}{H^2} + \frac{n^2}{L^2}}$$

On désignera par son couple d'indices  $(m, n)$  un mode propre du conduit. On verra dans le chapitre 3 que la propagation dans les canaux inter-aubes coudés peut se ramener localement à la propagation dans un conduit à section rectangulaire.

#### Conduit annulaire

L'entrée d'air du compresseur est assimilée à un conduit droit de section circulaire ou annulaire, les développements de cette partie seront donc utilisés dans le chapitre 5.

Une solution propre dans un guide d'onde annulaire s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$p'(r, \theta, z, t) = f_{np}(r) e^{i(\omega t - m\theta - k_z z)}, \quad n = |m| \quad (1.2)$$

où selon la convention de Rienstra [39] :

$$f_{np}(r) = N_{np} (\cos(\tau_{np}) J_n(K_{np} r) - \sin(\tau_{np}) Y_n(K_{np} r)),$$

$J_n$  et  $Y_n$  étant les fonctions de Bessel de première et seconde espèce d'ordre  $n$ . Cette écriture est compatible avec toute application, en particulier lorsque le mode de conduit se réduit à la seule fonction  $Y_n$ . Les valeurs propres  $K_{np}$  sont déterminées à partir des conditions aux

limites suivantes  $f'_{np}(R_1) = f'_{np}(R_2) = 0$ . Les coefficients de normalisation sont donnés en annexe A.

Le signe de  $k_z$  nous informe sur le sens de propagation axiale de l'onde, le signe de  $n$ , sur son sens de rotation. Le nombre de lobes angulaires est donné par  $|n|$ .

La relation de dispersion ne change pas et vaut  $(k_0 - m_0 k_z)^2 = k_s^2 + k_z^2$  avec  $k_s = K_{np}$ . Comme pour le conduit rectangulaire, la propagation d'une onde dépend de deux entiers  $(n, p)$ . Le nombre entier  $n$  est appelé ordre azimutal, le nombre entier  $p$  est l'ordre radial. Si  $n$  est différent de 0, on dit que le mode est tournant, si  $n = 0$ , le mode est dit symétrique. Le mode  $(0, 0)$  correspond ici au mode plan. Le mode  $(n, p)$  ne se propage que si  $k_0 = \omega/c_0 \geq \beta K_{np}$ . La fréquence de coupure est donc

$$f_c = \frac{c_0 K_{np} \beta}{2\pi}$$

Le cas du conduit circulaire est un cas particulier du conduit annulaire où  $R_1$  tend vers 0. Dans ce cas,  $N_{np} \sin(\tau_{np})$  est nul et  $f_{np}$  s'écrit

$$f_{np}(r) = N_{np} \cos(\tau_{np}) J_n(K_{np} r).$$

### 1.3.4 Extensions du formalisme modal

Différentes extensions du formalisme précédemment explicité seront développées par la suite. En effet, la propagation dans les canaux inter-aubes demande de considérer des ondes dans un conduit coudé de section variable. L'influence d'un nez en entrée d'air a également été examinée, la section du conduit passe dans ce cas continuellement d'un conduit annulaire à un conduit circulaire.

#### Section variable

Les méthodes analytiques de propagation des ondes dans des guides peuvent être étendues à des conduits droits de section lentement variable par une technique d'échelles multiples développée grâce aux travaux de Rienstra [38]. L'écoulement est quant à lui également lentement variable dans le sens axial mais reste uniforme dans chaque section droite.

#### Conduit coudé

Il existe deux méthodes analytiques permettant de calculer la propagation acoustique dans des conduits coudés de section variable. Elles seront développées par la suite dans le chapitre 3. L'une d'entre elles, développée par Brambley & Peake [5] est une extension directe des travaux de Rienstra. Les modes de propagation sont modifiés par la courbure et l'écoulement moyen, potentiel, n'est plus uniforme dans une section droite.

Grâce à ces diverses extensions, des géométries réalistes peuvent être appréhendées sur la base de la description du champ en terme de modes adaptés à la géométrie.

## Chapitre 2

# Étude expérimentale

### 2.1 Introduction

Différentes techniques de détection des modes de propagation en conduit, azimutales et/ou radiales sont rapportées dans la littérature. Dans tous les cas, l'objectif est de récupérer les fluctuations de pression en aval ou en amont d'une source de bruit en un certain nombre de points et de mettre à profit l'orthogonalité théorique des modes pour les séparer par un traitement adéquat des signaux. Les deux principaux modes opératoires mettent en jeu :

- soit, un anneau d'essai comprenant de nombreux microphones. L'acquisition des signaux sur tous les points de mesure est faite simultanément. La mesure est alors préférentiellement effectuée en dehors du conduit pour des raisons d'encombrement, l'effet perturbateur de l'écoulement est donc moins important [11, 10] ;
- soit, un petit nombre de microphones placés sur une virole tournante et montés en affleurement de la paroi. A chaque rotation de la virole, de nouvelles acquisitions sont obtenues. Pour que cette méthode soit applicable, la source de bruit doit être stationnaire. En général les microphones sont placés derrière une cavité de façon à ce que le pseudo-son lié à l'écoulement soit amoindri. [14, 24, 25]

Fréquemment, dans les installations universitaires, les deux méthodes sont appliquées en parallèle afin de corroborer les mesures. En particulier, Sijtsma [43] fait une comparaison des deux types d'acquisition et de différents moyens de post-traiter les données selon les mesures effectuées.

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'essai qui a été réalisé durant ce travail de recherche. Le protocole expérimental en lui-même est très simple mais a le mérite d'apporter des réponses quant à l'hypothèse de départ d'une source liée à l'interaction de sillages. En effet, l'effort de modélisation repose sur l'idée que ce sont essentiellement les sources créées par l'impact des sillages de la roue sur les aubes du diffuseur qui rayonnent à contre courant, dans le rouet puis dans l'entrée d'air et jusqu'à l'extérieur. Or ce type de source a une signature modale angulaire particulière. Grâce à une détection modale en amont du compresseur, on peut donc confirmer la prédominance du mécanisme supposé. La détection est restreinte ici aux seuls modes azimutaux, dans un tube d'entrée d'air droit, et repose sur l'emploi d'une virole tournante.

Dans un premier temps, les données géométriques de la virole et des microphones utilisés (2.2) sont décrites, puis les résultats d'un test effectué avec un ventilateur électrique axial

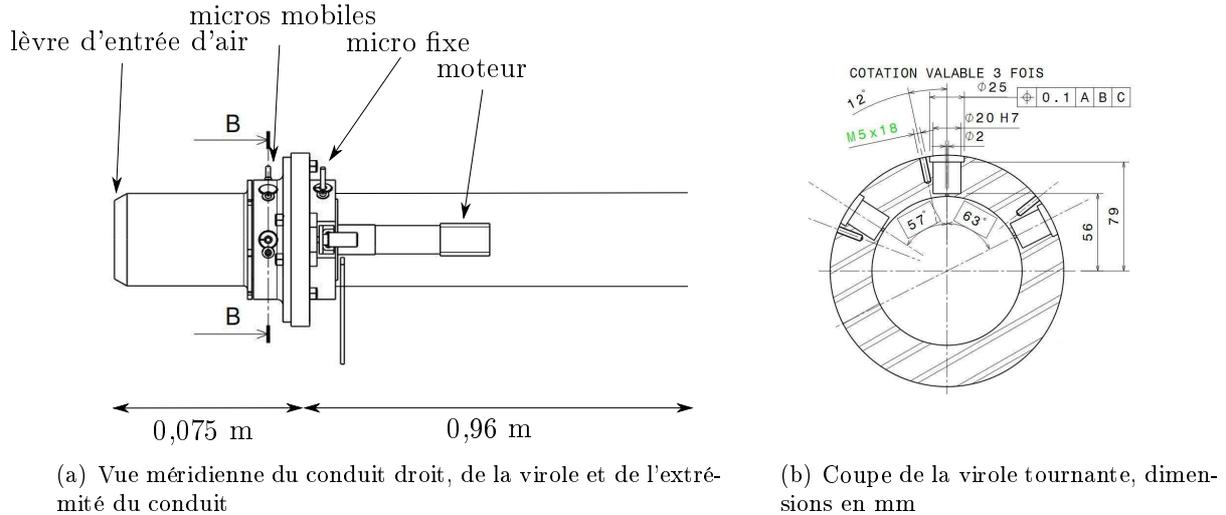


FIGURE 2.1 – Schéma technique de la virole motorisée et du conduit droit

comportant un stator redresseur (2.4) et enfin de la caractérisation du compresseur centrifuge (2.5) sont discutés.

## 2.2 Instrumentation

L'essai doit permettre d'identifier les modes qui se sont propagés jusque dans le conduit d'entrée d'air afin de les comparer aux éventuelles prédictions fondées sur l'*approche modale*. Le rouet centrifuge d'un compresseur, s'il est considéré comme un réseau de conduits courbés à section lentement variable (tel qu'il est étudié au chapitre 3), reproduit préférentiellement dans l'entrée d'air les modes azimutaux créés au niveau du diffuseur. Seule la structure radiale du champ est modifiée. C'est pourquoi cette dernière peut être ignorée. La mesure des fluctuations de pression en paroi du conduit renseigne sur les seuls modes azimutaux qui, en fin de compte, se prêtent à interprétation.

La mesure est faite en paroi d'un conduit cylindrique à l'aide d'une virole motorisée, à une distance de plusieurs diamètres de la source et à 0.7 diamètre de l'extrémité. Le tronçon de mesure a été dimensionné afin de pouvoir être réutiliser pour d'autres essais de détection modal. La virole motorisée (Fig. 2.1 et 2.2) comprend une partie fixe et une partie mobile offrant la possibilité d'implanter trois microphones suivant les angles de la figure 2.1(b). Les capteurs utilisés sont des microphones 1/4' B&K 4944-A. Ils sont disposés sans leur grille de protection dans une cavité ménagée derrière une perforation afin que les fluctuations liées à l'écoulement de couche limite ne couvrent pas le bruit dû aux sources. Les dimensions de la perforation peuvent être observées sur la figure 2.1(b) (diamètre = 2 mm ; profondeur = 2 mm). Le pignon motorisé permet de faire tourner la virole en continu, on peut donc choisir le pas angulaire des mesures en fonction du plus haut ordre modal que l'on veut pouvoir déterminer dans le conduit.

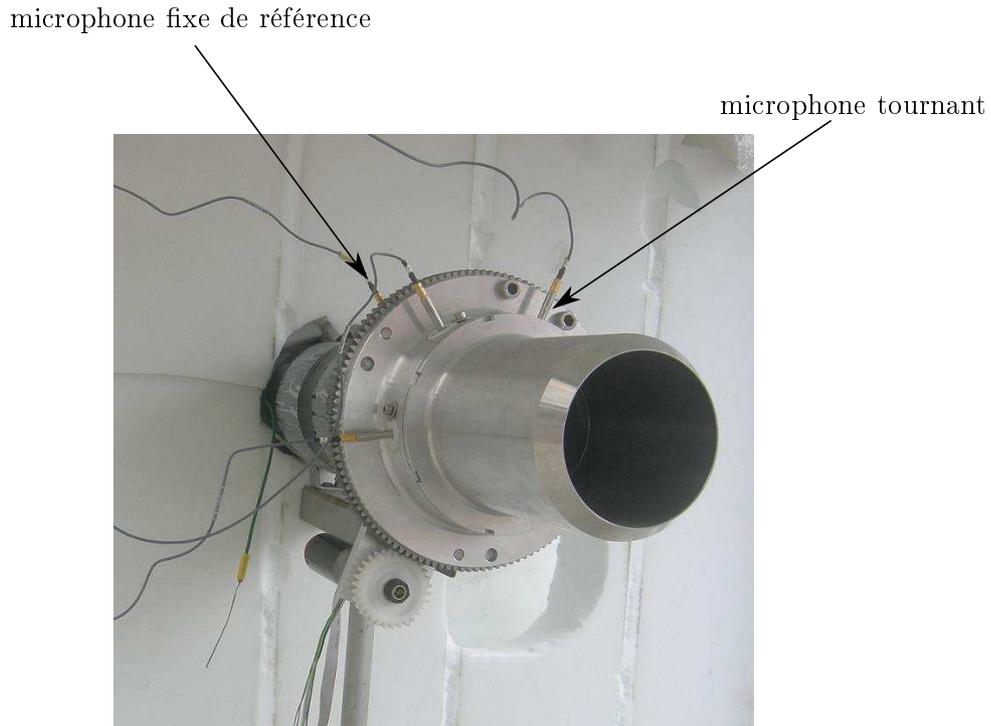


FIGURE 2.2 – Vue de la virole motorisée instrumentée

## 2.3 Données et post-traitement

### 2.3.1 Rappel sur les bruits d'interaction rotor/stator

Quel que soit le problème traité, pour le ventilateur ou le compresseur, on connaît à l'avance les modes qui sont forcés à chaque harmonique de la fréquence de passage des pales (HFPP) par les sources du bruit d'interaction de sillages.

Si on considère un étage rotor/stator avec  $B$  pales et  $V$  aubes, le rotor ayant une vitesse de rotation correspond à la pulsation  $\Omega$ , les HFPP sont définis par :

$$f = \frac{mB\Omega}{2\pi} \quad (2.1)$$

$m$  étant un entier strictement positif.

Les interactions périodiques induisent une structure de la pression acoustique qui est une combinaison linéaire de modes de propagation. Ainsi à une fréquence donnée le champ dans le conduit s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} p'(r, \theta, z, t) &= e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} e^{i(n\theta + k_{|n|j}z)} f_{|n|j}(r) \\ &= e^{-i\omega t} p'(r, \theta, z). \end{aligned}$$

On peut également écrire, à la paroi et donc dans une section particulière  $z = z_0$  qui en pratique sera celle où est effectué la mesure :

$$\begin{aligned}
p'(R_2, \theta, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} e^{ik_{|n|j}z_0} f_{|n|j}(R_2) \right) e^{in\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\theta} \equiv p(\theta).
\end{aligned}$$

Cette équation provient directement de l'équation 1.2 qui a été vue au chapitre 1. Les nombres de lobes associés aux modes angulaires s'écrivent  $n = mB \pm sV$  avec  $s$  un entier quelconque [47]. Chaque mode angulaire se décline *a priori* sur tous les modes radiaux  $(n, j)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Le mode  $(n, j)$  est passant si  $mB\Omega > c_0\beta K_{nj}$ . On connaît donc les modes structurés par l'interaction ainsi que ceux qui sont susceptibles de se propager dans le conduit.

### 2.3.2 Méthode de post-traitement

P.Sijtsma [43] compare quatre techniques de détection de modes azimutaux avec une virole dans un conduit avec écoulement ainsi qu'en champ lointain autour d'un jet libre. La méthode de post-traitement utilisée ici est celle préconisée dans cette référence pour les acquisitions en conduit avec écoulement. La méthode de détection modale s'applique à des fréquences isolées choisies. Elle repose sur une décomposition en série de Fourier angulaire et sur l'exploitation des intercorrélations entre les voies d'acquisition et un microphone de référence.

La trace de la pression acoustique en paroi du conduit  $p(\theta)$  peut s'écrire grâce à une décomposition en série de Fourier comme une somme sur les modes azimutaux de la façon suivante :

$$p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-in\theta} \quad p_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) e^{in\theta} d\theta,$$

étant entendu que seuls les modes passants contribuent.

La première étape avant d'entamer la détection modale à proprement parler est de récupérer le spectre de chaque acquisition pour chaque microphone. L'amplitude modale  $p_n$  est donc en principe obtenue par une intégrale angulaire. Dans l'expérience, cette intégrale est remplacée par une sommation sur des signaux issus de capteurs discrets en nombre limité. Notons  $\chi_k(t)$  la fluctuation de pression du microphone  $k$ , échantillonnée avec un pas de temps  $\Delta t$ . Les amplitudes des pressions complexes  $p_k(f)$  des signaux acquis par les microphones sont obtenues grâce à une transformation de Fourier discrète par bloc sur  $S$  échantillons de la façon suivante :

$$p_k(f) = \frac{2}{S} \sum_{s=1}^S \chi_{k,s} e^{-2\pi i f s \Delta t}.$$

L'étape suivante est d'approcher la transformée de Fourier azimutale sur les spectres de pression en paroi. La détection modale est réalisée à des fréquences fixées. Si on note  $\theta_k$  la position angulaire du microphone  $k$  et  $K$  le nombre de microphones, l'évaluation  $a_n$  de l'amplitude modale complexe  $p_n$  à une fréquence  $f$  s'écrit :

$$a_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_k(f) e^{in\theta_k}.$$

Cette technique requiert une mesure simultanée d'un grand nombre de données. Dans notre cas, un petit nombre de microphones a été utilisé sur une virole tournante pour des raisons pratiques : d'une part, ce tronçon de mesure pourra être réutilisé pour des essais ultérieurs avec d'autres machines, éventuellement via des conduits de raccordement adaptés, d'autre part, il offre la possibilité d'avoir des résolutions angulaires adaptées aux besoins. L'inconvénient de ce type de mesure est la perte de la référence temporelle. Toutes les acquisitions n'étant pas faites au même moment, il est nécessaire de post-traiter les signaux en les corrélant avec le signal d'un microphone de référence fixe acquis pendant la même plage de temps. Si l'indexage 0 représente alors les acquisitions du microphone de référence, l'amplitude modale complexe peut s'écrire :

$$a_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_k p_0^* e^{in\theta_k} / (p_0 p_0^*)^{1/2}, \quad (2.2)$$

où l'astérisque représente le complexe conjugué.

Un test de validation de l'algorithme de post-traitement a été effectué à partir d'un signal théorique bruité dont on a retrouvé les modes.

## 2.4 Test sur un ventilateur électrique

### 2.4.1 Données du ventilateur

Afin de valider la technique d'acquisition et le post-traitement associé sur un montage plus simple avant de s'intéresser au compresseur objet de l'étude, un premier test a été fait sur un ventilateur électrique directement monté sur le conduit droit et son instrumentation. Le ventilateur choisi est un ventilateur axial de diamètre extérieur 110 mm comprenant  $B = 7$  pales sur le rotor, et  $V = 10$  aubes sur le stator. Sa vitesse de rotation est de  $\Omega = 11000$  tr/min. Il a été connecté au conduit de mesure, environ à 96 cm de la virole. La fréquence de passage des pales est déterminée en utilisant la formule 2.1 et les modes angulaires attendus sont obtenus par le raisonnement explicité au paragraphe 1.2. Ils sont reportés dans le tableau 2.1.

D'après les valeurs propres  $K_{nj} R_2$  calculés à partir des conditions aux limites (données au chapitre 1.3.3) pour un conduit circulaire, on constate que les modes, forcés par l'interaction rotor/stator pour les deux premières raies du ventilateur, sont coupés par le conduit. On doit en revanche retrouver le mode azimutal 1 pour le troisième harmonique de la fréquence de passage des pales (FPP).

### 2.4.2 Résultats

Un spectre typique de la fluctuation de pression en paroi du conduit obtenue avec le ventilateur est tracé sur la figure 2.3. On retrouve un certain nombre de fréquences particulières habituelles aux bruits de ventilateurs ou bien liées à l'installation. En effet, les trois premiers

m	Fréquences nominales (Hz)	ordres azimutaux (n)	Fréquences observées durant l'essai (Hz)
1	1283	(-3); (7)	-
2	2567	(-6); (4)	-
3	3850	(-9); 1	3937
4	5133	-2; 8	5200
5	6417	-5; 5	6537
6	7700	-8; 2	7837
7	8983	-1; 9	9150
8	10266	-4; 6	10450
9	11549	-7; 3	11762

TABLE 2.1 – Multiples de la fréquence de passage des pales nominale du ventilateur, modes azimutaux les plus bas forcés par l'interaction rotor/stator et multiples de la fréquence de passage des pales du ventilateur relevés durant l'essai (Fig. 2.3). Les modes coupés sont mis entre parenthèses.

pics (représentés par la lettre (A)) correspondent aux résonances longitudinales qui se développent dans le conduit de longueur 1,035 m. La lettre (B) correspond à la fréquence de coupure du premier mode du conduit, de diamètre 0,108 m,  $f_c = 1919$  Hz. On observe à cet endroit une remontée brusque du niveau du bruit à large bande. Après ces fréquences particulières, on retrouve la signature des pales du ventilateur. Les multiples de la FPP sont représentés sur la figure par leur rang. La première fréquence émerge largement du bruit à large bande (numéro 3 sur la figure). Elle est située à une fréquence de 3925 Hz et correspond au troisième multiple de la FPP, puisque les deux précédents sont coupés. Nous remarquons ensuite tous les autres harmoniques de la FPP (rangs 4 à 9), résumés dans le tableau 2.1. Le quatrième multiple de la FPP n'émerge pas du bruit à large bande. On remarque que la fréquence de coupure du mode (2, 2), 5215 Hz, est très proche de la fréquence du quatrième multiple de la FPP, 5200 Hz. Le bruit à large bande remonte donc autour de cette fréquence et la masque. Les autres fréquences de coupure du conduit ne coïncident avec aucune HFPP. Les fréquences des raies mesurées lors de l'essai ne sont pas exactement celles calculées, en effet, la vitesse de rotation du ventilateur fluctue légèrement, les fréquences nominales et mesurées ainsi que les modes les plus bas associés sont donc reportés dans le tableau 2.1.

Un post-traitement modal des harmoniques de la FPP observés peut alors être mis en place sur la base de l'expression 2.2. Les résultats sont retranscrits sur la figure 2.4. Tous les diagrammes de modes qui suivent sont donnés en unités relatives arbitraires, toutes identiques. En effet, la mesure reste qualitative puisqu'elle vise à confirmer la présence de modes et non leur amplitude exacte.

On retrouve, sur certains graphes, les modes prévus au paragraphe 2.4.1. En particulier, on observe une bonne correspondance pour les HFPP à 3937 Hz (2.4(a)), 5200 Hz (2.4(b)), 7837 Hz (2.4(d)), 10450 Hz (2.4(f)) et 11762 Hz (2.4(g)). Sur ces figures, en plus des modes attendus donnés dans le tableau 2.4, on trouve d'autres modes qui sont parfois non négligeables. Ceci est peut être dû au fait que le niveau de la raie est faible, la mesure est davantage bruitée et la détection modale en devient donc moins performante. En particulier pour la quatrième raie (aux environs de 5200 Hz), le mode 8 prévu ne se dégage pas franchement des autres

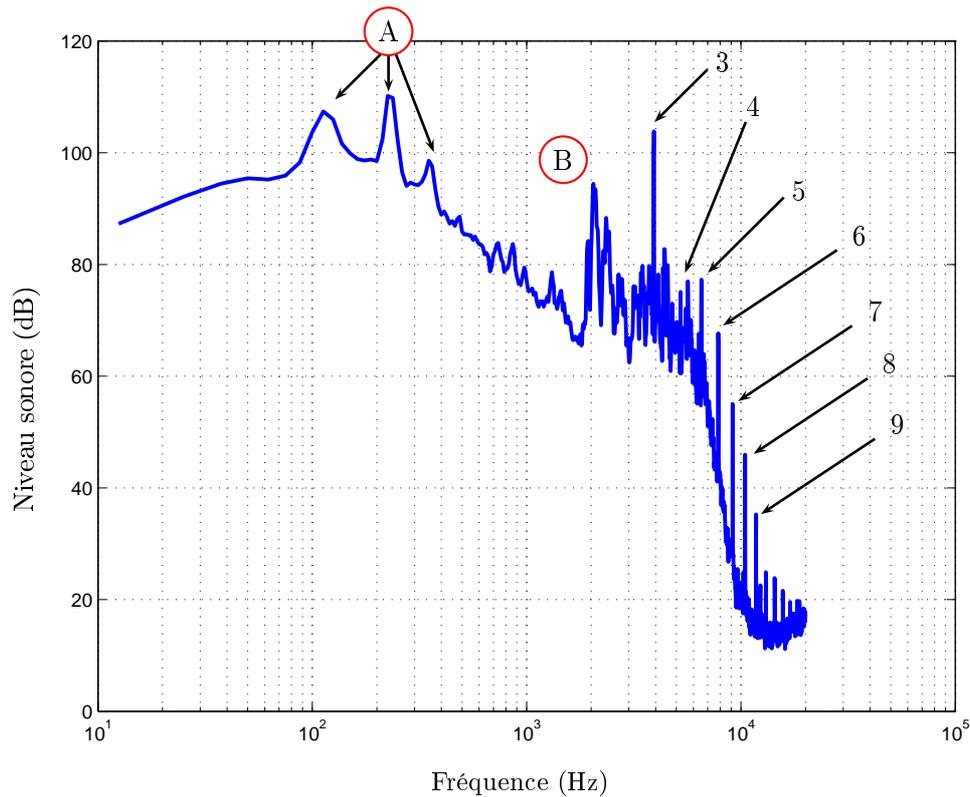


FIGURE 2.3 – Spectre de bruit du ventilateur électrique ; (A) résonances longitudinales, (B) fréquence de coupure du conduit - 3 à 9 rangs des multiples de la FPP.

modes et les niveaux des modes détectés sont très faibles (de l'ordre de  $10^{-4}$ ). Cependant sur le spectre du bruit du ventilateur (Fig. 2.3), on observe également que cette raie n'émerge que très peu du bruit à large bande. Le cinquième multiple de la FPP fait ressortir le mode 4 alors que l'on s'attend aux modes 5 ou  $-5$ . De manière identique, le septième multiple de la FPP fait ressortir le mode 1 alors qu'on s'attend au mode  $-1$ . Globalement on peut donc penser que la détection devient discutable aux très faibles niveaux ou bien qu'une autre source, indéterminée, se manifeste. En revanche, les raies principales sont bien attribuables à l'interaction rotor-stator.

En comparant tous les spectres des différentes mesures des pressions en paroi, un léger décalage sur les fréquences des raies est observable. Ce décalage est dû à la variation de la vitesse de rotation du ventilateur entre les acquisitions. La détection modale se fait à une fréquence précise. Il est donc nécessaire de recalibrer les fréquences des raies pour compenser les variations. C'est ce qui a été fait dans un deuxième temps. Les fréquences des raies observées sur les différents spectres sont détectées puis recalées sur une fréquence constante sur laquelle la détection modale est mise en place. Les résultats sont montrés sur la figure 2.5. Le quatrième harmonique de la FPP (à 5200 Hz) a été supprimé car la raie est noyée dans le bruit à large bande, elle n'est donc pas détectée dans le post-traitement recalé. Les résultats de la détection modale recalée en fréquence sont sensiblement les mêmes que sans recalage. Les modes dominants sont identiques. Seul le niveau diffère. Pour la première raie émergente (le troisième multiple de la FPP) par exemple, le niveau du mode d'ordre 1 passe de 0.0534 initialement à 0.0998 après recalage. Cette technique de recalage du régime est utilisée par la

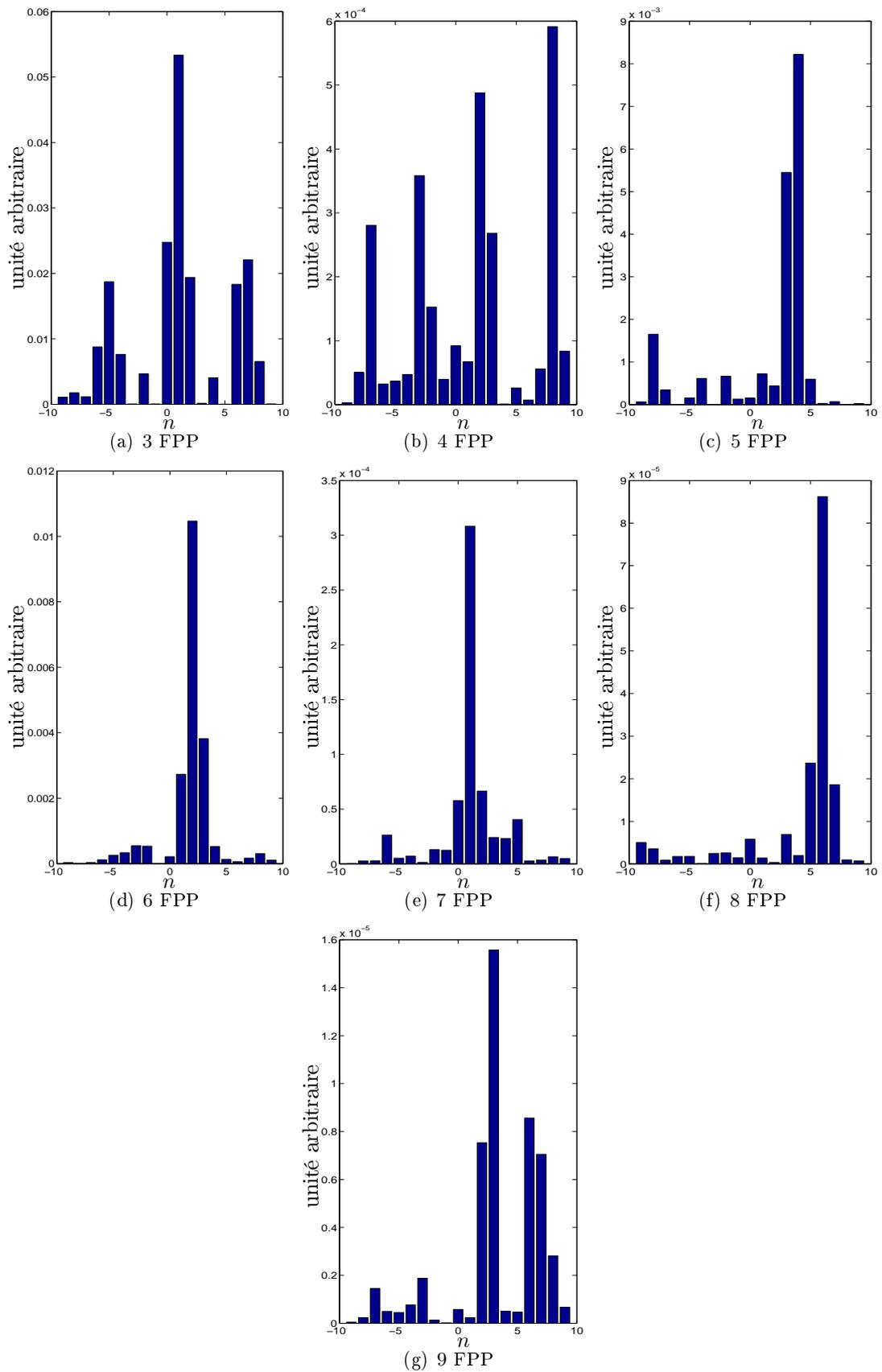


FIGURE 2.4 – Résultats de la détection modale effectuée en amont du ventilateur électrique sur les multiples passants de la fréquence de passage des pales.

suite. Néanmoins elle n'a qu'une influence faible qui ne modifie pas la conclusion de l'analyse modale faite ici dans un but uniquement qualitatif.

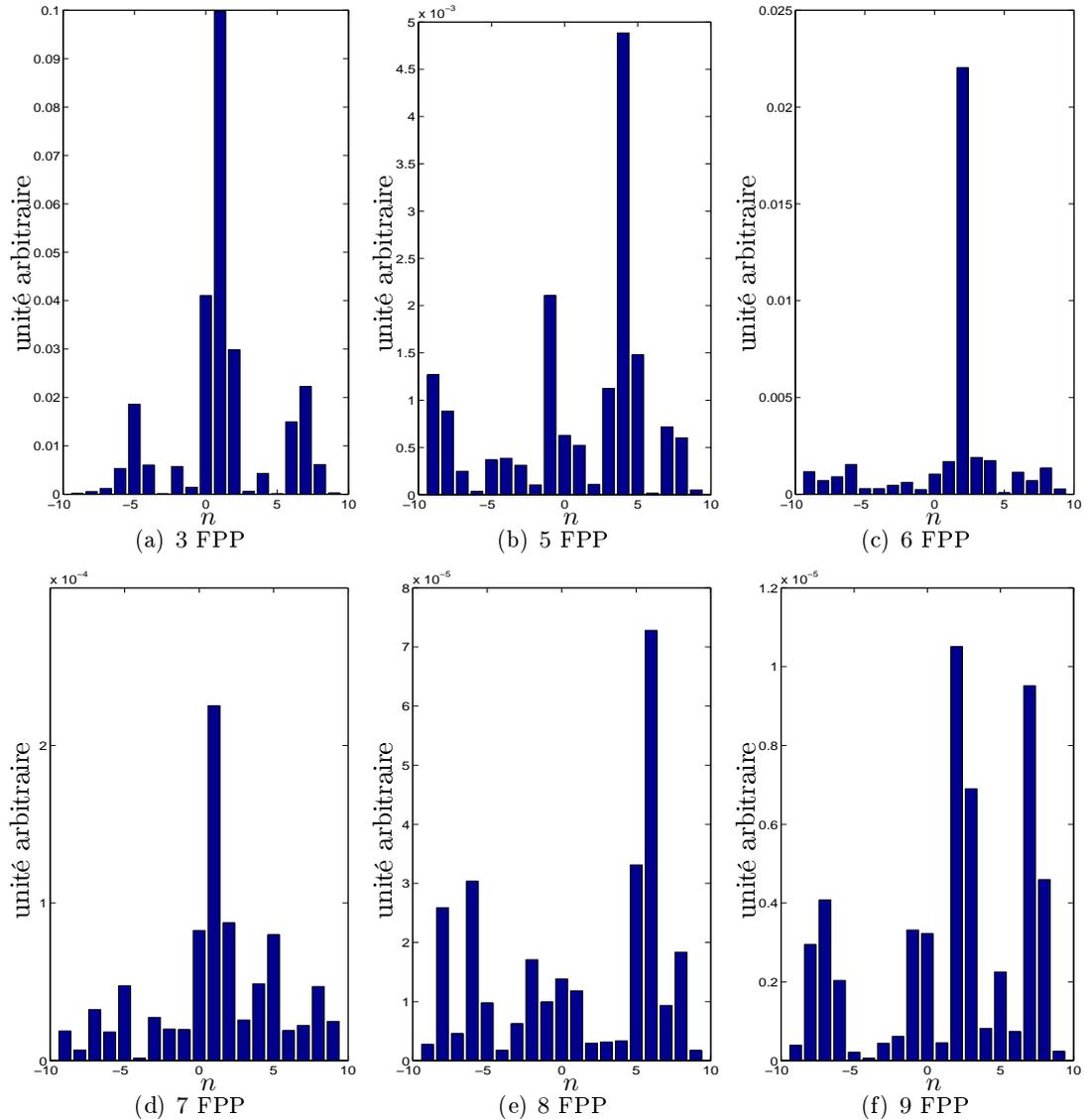


FIGURE 2.5 – Résultats de la détection modale effectuée en amont du ventilateur électrique sur les multiples passants de la fréquence de passage des pales après recalage. À comparer à la figure 2.4.

## 2.5 Mesures sur le compresseur centrifuge

### 2.5.1 Mise en place de l'essai

L'essai dédié à la justification du modèle analytique de la thèse est fait sur un compresseur subsonique de turbomachine. Le schéma de principe du montage global est représenté sur la figure 2.6. La turbine est alimentée par une arrivée d'air sec comprimé. Elle entraîne l'arbre

de la turbomachine sur lequel est installée la roue de compresseur. Le compresseur est monté en aval du conduit droit instrumenté de la virole tournante (Fig. 2.2). Il aspire à l'air libre. Un écran vertical de mousse absorbante est installé à mi longueur du conduit afin d'isoler le système de mesure des bruits environnants (sources extérieures à l'essai et bruit de turbine) qui pourraient revenir vers l'entrée d'air. Un conduit de longueur 4,20 m est branché au refoulement du compresseur pour que le bruit rayonné en aval soit déporté. Un diaphragme est placé à l'extrémité du conduit de refoulement afin de mesurer le débit d'air.

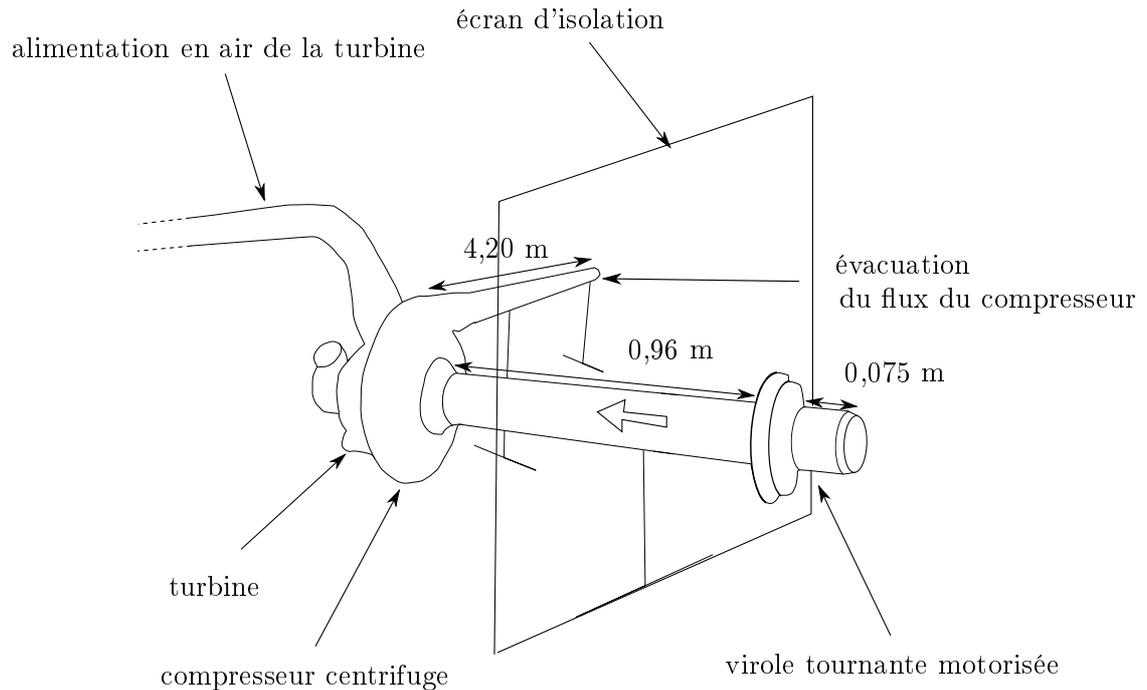


FIGURE 2.6 – Schéma de principe du montage

La turbomachine testée comprend deux roues, le compresseur et la turbine qui l'entraîne, toutes deux correspondant à des circuits d'air différents. Le rouet du compresseur comporte dix-sept pales ( $B = 17$ ), le diffuseur est composé de dix-neuf aubes ( $V = 19$ ). Une ogive a été dimensionnée pour garantir un écoulement le plus uniforme possible en entrée du compresseur. Ces éléments sont détaillés sur la figure 2.7(a). La machine est carénée et comprend une volute de sortie qui peut être observée sur la figure 2.7(b). Différents régimes de rotation sont testés, détaillés et étudiés dans ce qui suit.

La campagne d'essai a été réalisée sur une journée, la température extérieure ayant varié de  $16^\circ$  à  $19^\circ$  C. Le temps d'acquisition d'une mesure est de 20 secondes, le post-traitement est quant à lui réalisé sur 10 secondes. Les microphones mobiles récupèrent de l'information tous les  $7^\circ$  d'angle. Le temps total d'acquisition pour une vitesse de rotation fixée est d'environ 40 minutes. La vitesse de rotation de la machine n'est pas stable sur cette durée, elle varie de  $\pm 100$  tr/min à  $\pm 400$  tr/min selon le cas considéré. Les données principales des différents cas testés sont rassemblées dans le tableau 2.2.

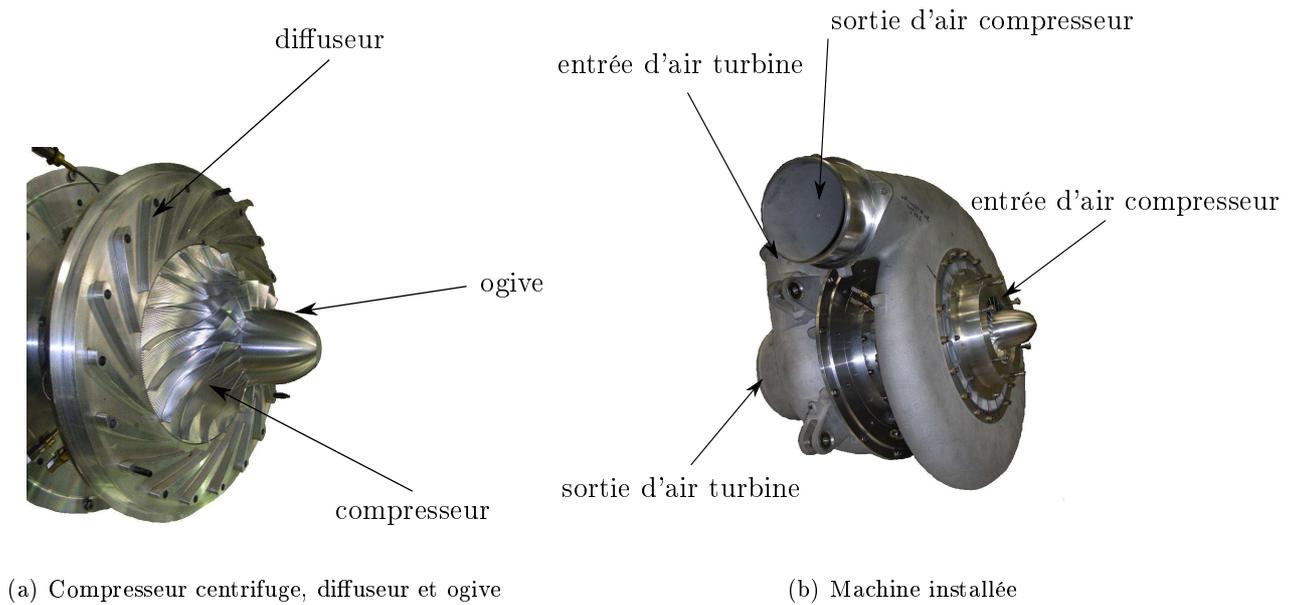


FIGURE 2.7 – Structure du turbo-compresseur, avec et sans le carter

Vitesse de rotation nominale (tr/min)	17000	20000	27000	30000
Vitesse de rotation moyenne mesurée (tr/min)	16966	20164	27042	30102
Vitesse de rotation minimum mesurée (tr/min)	16810	19940	26930	29950
Vitesse de rotation maximum mesurée (tr/min)	17070	20650	27190	30540
Fluctuation de la vitesse de rotation (tr/min)	260	710	260	590
Température extérieure (°C)	15.7	19.4	16.6	18
Débit (kg/s)	0.46	0.53	0.71	0.77
Vitesse de l'écoulement (m/s)	3.5	4.1	5.43	5.93

TABLE 2.2 – Données générales de l'essai sur le compresseur centrifuge.

### 2.5.2 Résultats des mesures

Les modes dominants créés par l'interaction de sillages dépendent uniquement des nombres  $B$  et  $V$  (paragraphe 2.3.1) et sont donnés dans le tableau 2.3. Les autres modes d'ordres angulaires élevés, sont coupés par le conduit d'entrée d'air.

Les analyses qui suivent sont détaillées selon les différentes vitesses de rotation  $\Omega$  testées. Rappelons que cette dernière détermine les fréquences du bruit mais ne joue pas sur sa structure modale.

#### 1<sup>er</sup> régime : $\Omega = 17000$ tr/min

Un exemple de spectre des fluctuations de pression mesurées en paroi est représenté sur la figure 2.8(a) pour une vitesse de rotation nominale de  $\Omega = 17000$  tr/min. La fréquence de passage des pales est alors 4817 Hz. Le compresseur est entraîné par la turbine qui elle-même ajuste sa vitesse de rotation en fonction de la pression et du débit d'alimentation. La vitesse

m	ordres azimutaux (n)
1	-2
2	-4
3	-6

TABLE 2.3 – Multiples  $m$  de la fréquence de passage des pales du compresseur et modes azimutaux passants forcés par l'interaction rotor/stator.

de rotation d'une telle machine peut donc fluctuer autour de la vitesse de rotation nominale choisie. Expérimentalement, on observe effectivement une fréquence qui émerge largement à 4825 Hz ainsi que ses harmoniques à 9637 Hz et 14387 Hz. Pour les essais de validation qui nous intéressent, la vitesse de rotation varie en moyenne de 100 à 200 tr/min autour de la vitesse de rotation nominale. Ceci induit une variation relative identique de la fréquence de passage des pales. La détection modale est faite sur une fréquence particulière supposée stabilisée. Comme lors de l'essai sur le ventilateur électrique, un recalage en fréquence est donc appliqué. Une fréquence de référence est choisie et les raies de chaque mesure sont recalées sur cette fréquence de référence.

Les résultats de la détection modale sont donnés sur la figure 2.8. Pour la fréquence de passage des pales, ils font ressortir clairement les modes  $-2$  et  $2$ . D'après les formulations rappelées dans la partie 2.3.1, seul le mode  $-2$  est imputable aux interactions de sillages. Pour le premier harmonique ( $m = 2$ ), c'est effectivement le mode  $-4$  qui est largement dominant, comme prévu. Enfin pour la dernière raie traitée, le mode  $-6$  attendu n'apparaît pas. Cependant, le niveau de la raie sur le spectre est très faible et les amplitudes modales détectées sont très petites, de l'ordre de  $10^{-4}$ . La mesure n'est donc pas jugée représentative.

### 2<sup>ème</sup> régime : $\Omega = 20000$ tr/min

On devrait observer les mêmes résultats lorsque le compresseur a une vitesse de rotation nominale de 20000 tr/min. Un exemple de spectre des fluctuations de pression en paroi est représenté figure 2.9(a), où la FPP et ses harmoniques sont évidemment décalés. Dans ce cas, les modes émergents détectés ne correspondent pas à ceux attendus. Le mode  $-2$  apparaît bien sur la figure 2.9(b) mais le mode 4 est celui qui est le plus énergétique. De la même façon, pour le deuxième multiple de la FPP, le mode 5 est le plus énergétique et le mode  $-4$  attendu n'apparaît pas du tout. Les niveaux des modes détectés sur la fréquence de la troisième raie sont très faibles.

### 3<sup>ème</sup> régime : $\Omega = 27000$ tr/min

Lorsque la vitesse de rotation est montée à 27000 tr/min, seule la raie fondamentale émerge du spectre en paroi (Fig. 2.10(a)). C'est donc uniquement à cette fréquence qu'est effectuée la détection modale recalée (Fig. 2.10(b)).

Les résultats sont cette fois excellents, dans la mesure où l'on observe uniquement le mode  $-2$  attendu.

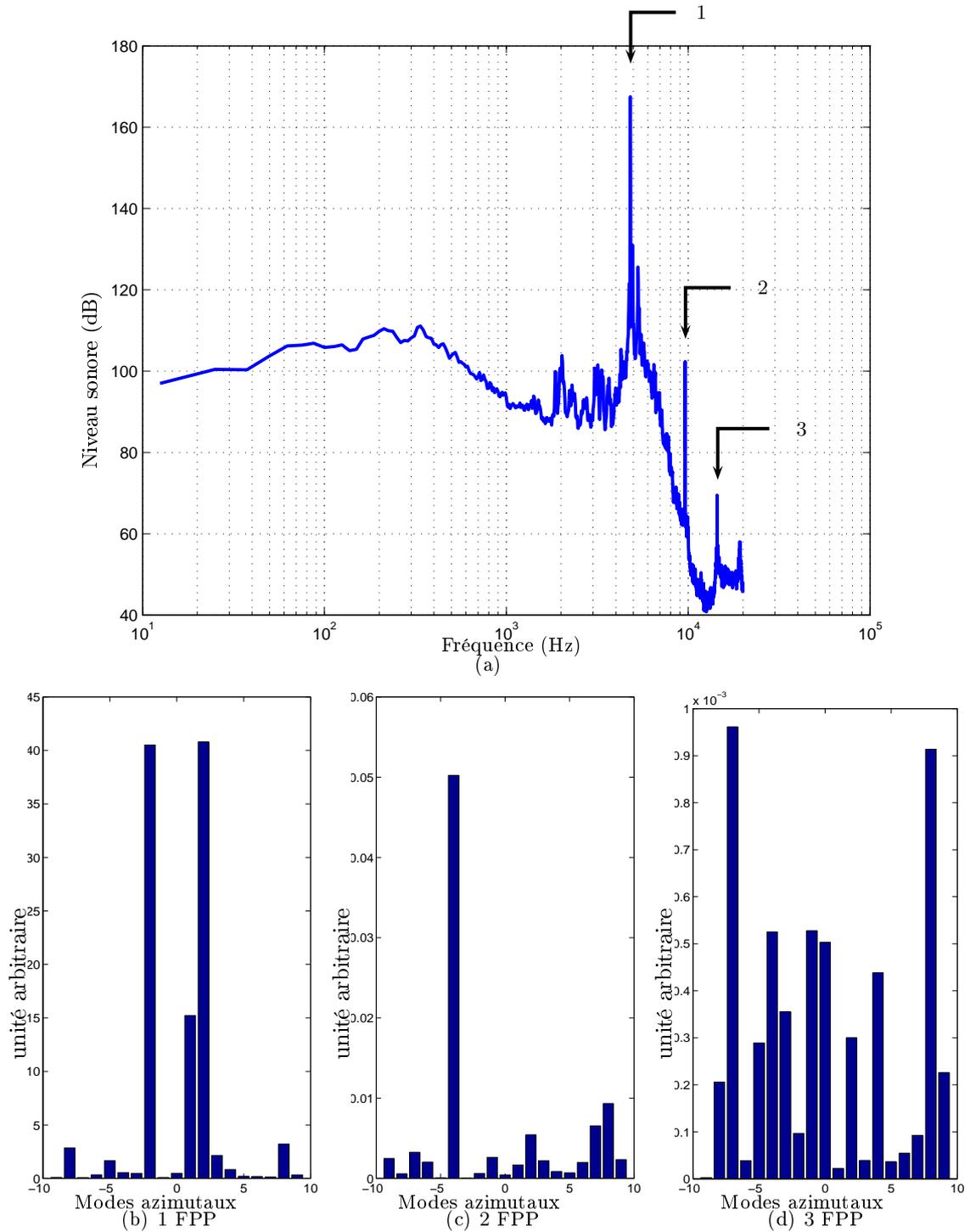


FIGURE 2.8 – Résultats d’essai du compresseur centrifuge à 17000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi ; 1, 2, 3 : Rangs des multiples de la FPP - (b)–(c)–(d) : Détection modale effectuée sur les multiples de la FPP après recalage (1 : 4825 Hz - 2 : 9637 Hz - 3 : 14387 Hz)

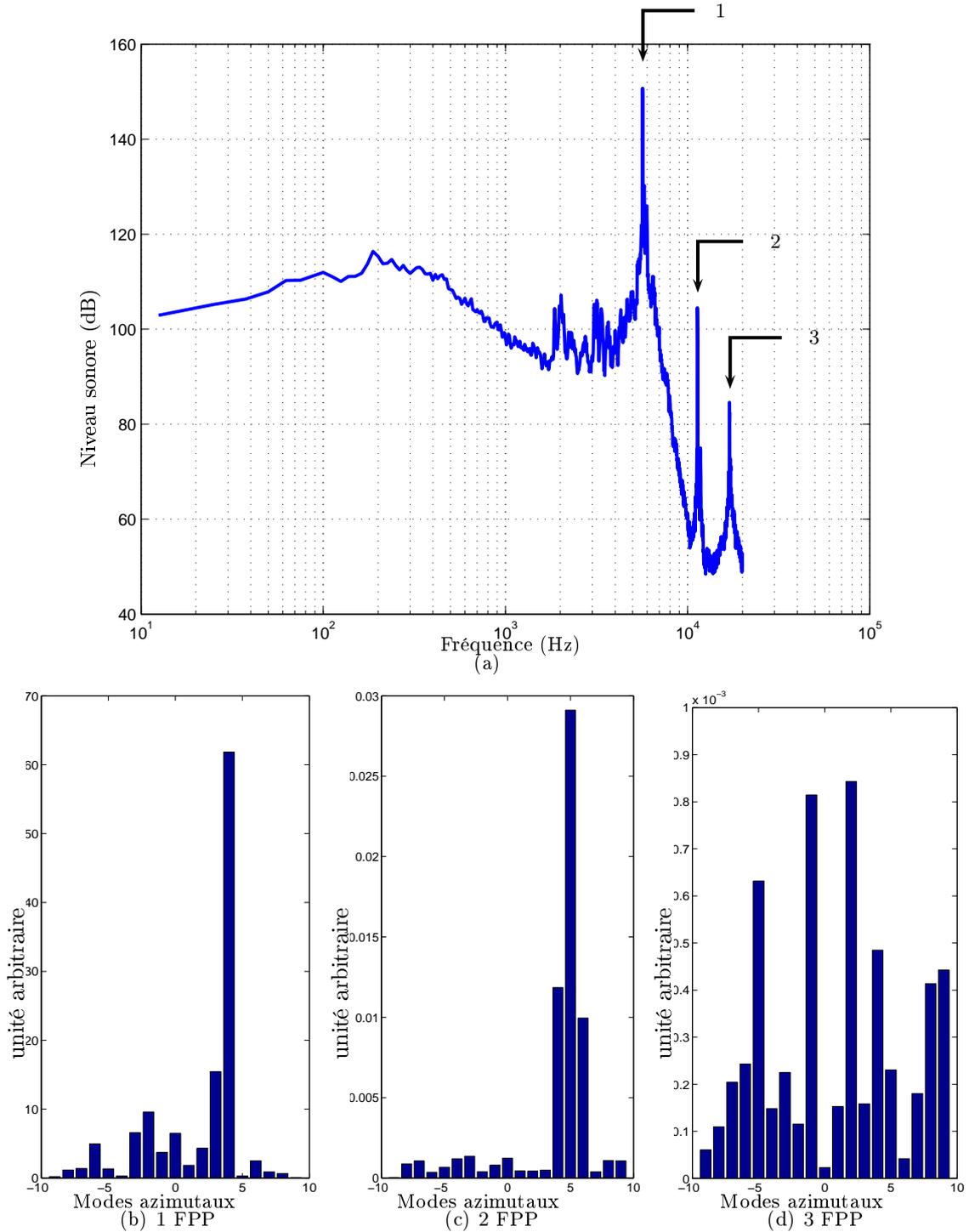


FIGURE 2.9 – Résultats d’essai du compresseur centrifuge à 20000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi ; 1, 2, 3 : Rangs des multiples de la FPP - (b) – (c) – (d) : Détection modale effectuée sur les multiples de la FPP après recalage (1 : 5662 Hz - 2 : 11312 Hz - 3 : 16962 Hz)

#### 4<sup>ème</sup> régime : $\Omega = 30000$ tr/min

De nouveau les résultats de la détection modale à la vitesse nominale de 30000 tr/min sont en parfait accord avec la prévision, comme en témoigne la figure 2.11, elle aussi correspondant

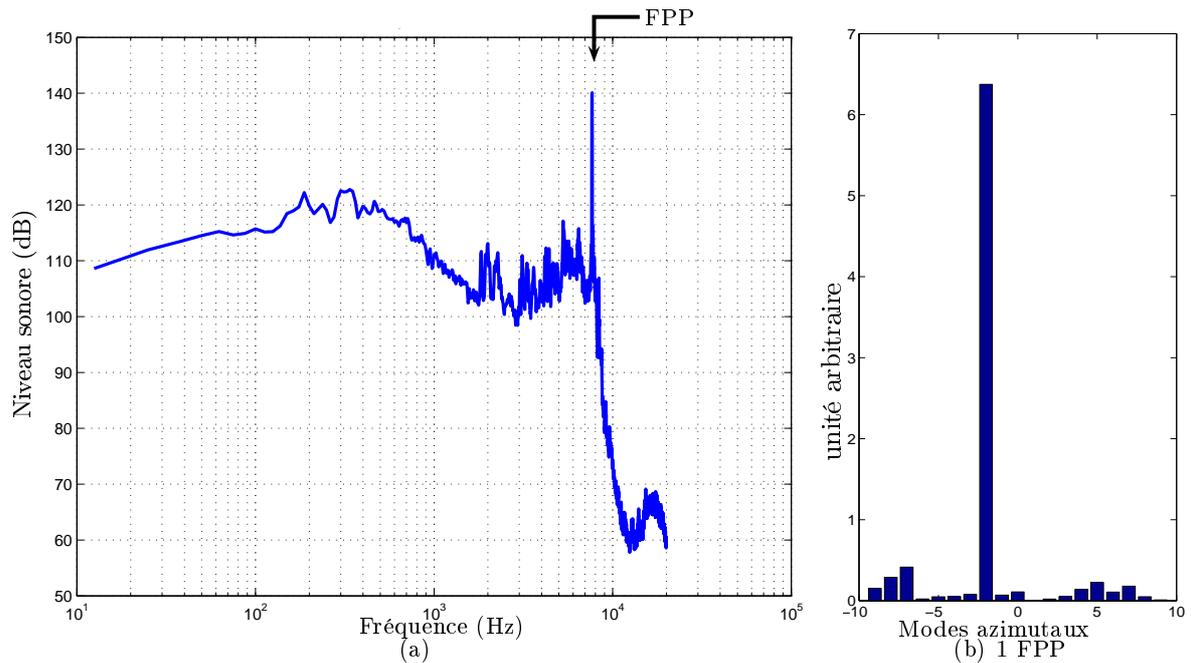


FIGURE 2.10 – Résultats d’essai du compresseur centrifuge à 27000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi - (b) : Détection modale effectuée sur la FPP après recalage (FPP = 7662 Hz).

à la seule fréquence de passage des pales.

### 2.5.3 Analyse globale des résultats

Dans un premier temps, les spectres de pression en paroi sont regroupés sur une même figure 2.12 puis représentés en fonction d’une fréquence réduite rapportée à la rotation. Le régime à 17000 tr/min est intrinsèquement beaucoup plus bruyant sur la raie fondamentale que les autres régimes. De plus, la détection modale montrait une contribution modale supplémentaire non attendue et fait donc suspecter une autre source de bruit. À cette vitesse de rotation, le niveau de bruit important sur la première raie peut donc être dû à une source de bruit supplémentaire ou simplement à des résonances non identifiées dans le rouet. De plus, l’adimensionalisation du niveau sonore par  $50 \log_{10} \Omega$  montrée sur la figure 2.12 confirme que le bruit est de nature dipolaire. En ce sens la mesure est donc conforme, en particulier elle n’est pas contaminée par un éventuel pseudo-son provenant de la turbulence des couches limites à l’endroit de la virole, car une fluctuation de pression en paroi de nature aérodynamique s’adimensionnerait selon une autre loi de puissance. Seule la bosse symbolisée par la lettre *A* n’est pas autosimilaire. Elle ne couvre pas non plus une gamme de fréquence fixes et ne provient donc pas d’un mécanisme de résonance dû à la géométrie. Les résultats dépendent donc du type de matériel et du point de fonctionnement testé. En l’occurrence, les résultats obtenus lors de notre essai diffèrent de ceux donnés par Raitor & Neise [36].

La décomposition modale appelle certaines remarques générales. Selon la vitesse de rotation et donc le point de fonctionnement du compresseur, les modes détectés en entrée d’air

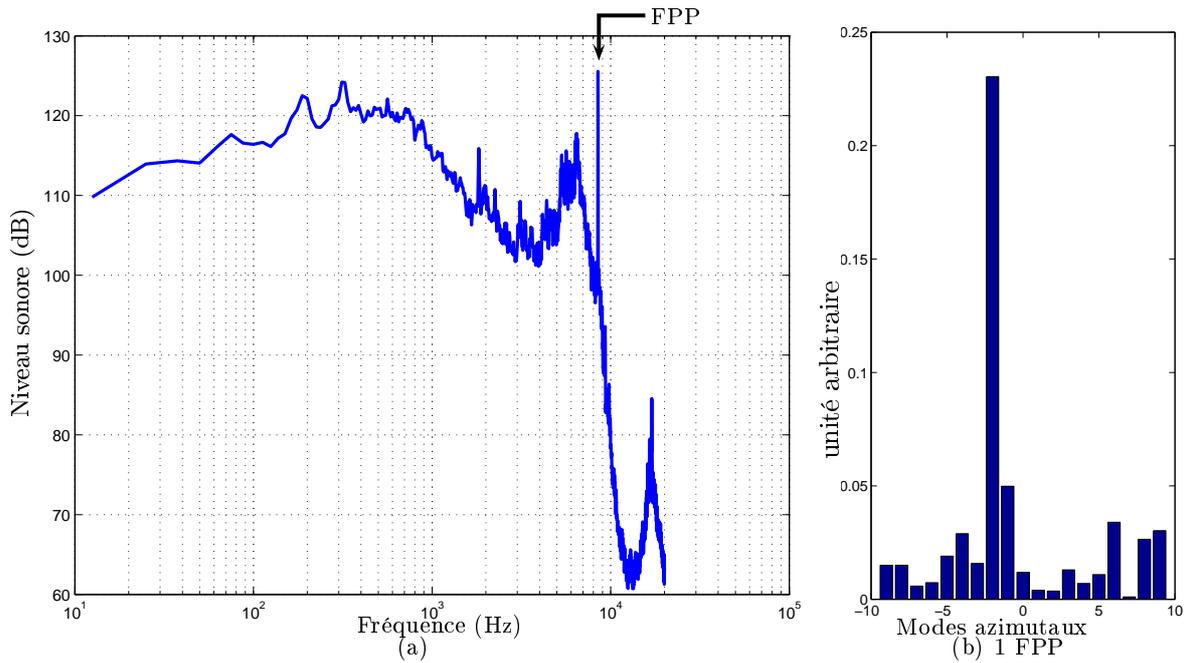


FIGURE 2.11 – Résultats d'essai du compresseur centrifuge à 30000 tr/min - (a) : DSP de la pression acoustique en paroi - (b) : Détection modale effectuée sur la FPP après recalage (FPP = 8512 Hz).

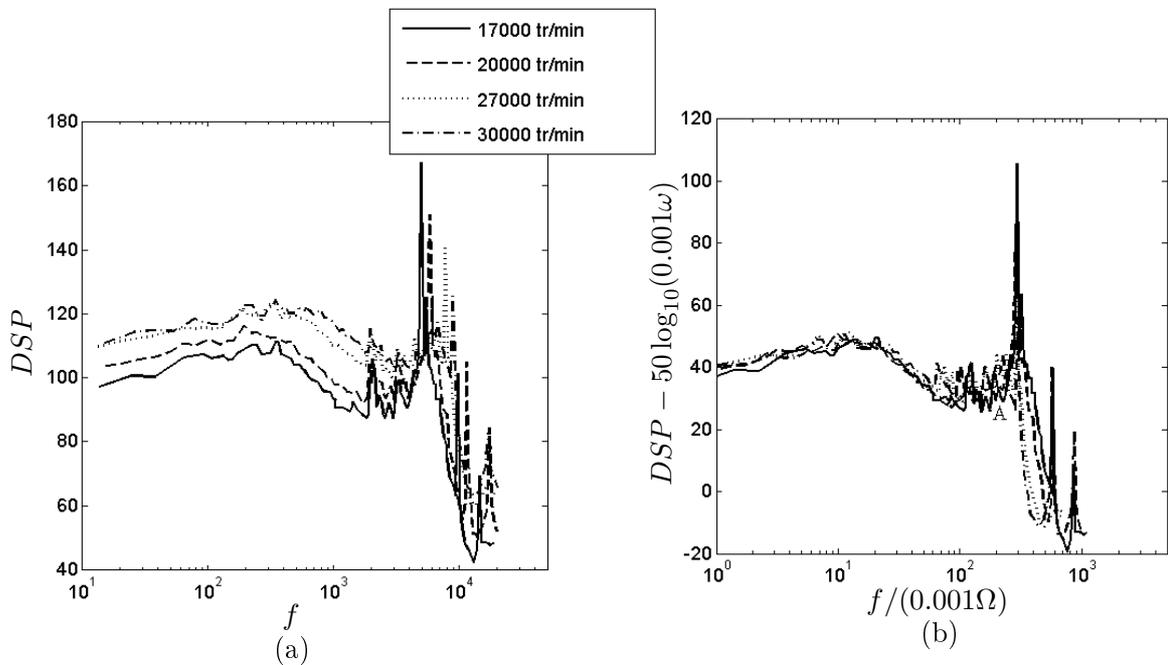


FIGURE 2.12 – Superposition des spectres de pression en paroi aux différents régimes testés - (a) : données brutes, (b) : données adimensionnées.

différent alors que le même harmonique de la FPP est traité. Plus précisément, lorsque la vitesse de rotation est élevée (pour 27000 et 30000 tr/min), les résultats confirment que le bruit provient intégralement de l'interaction de sillages. Le compresseur utilisé pour les essais a en fait été dimensionné pour une vitesse de rotation optimale de 33000 tr/min, l'écoulement est donc supposé être le plus adapté pour cette vitesse de rotation. Il est donc probable que les modes qui ne sont pas liés à l'interaction rotor/stator, obtenus pour des vitesses de rotation plus petites soient liés à une structure particulière de l'écoulement dans le compresseur centrifuge. Celle-ci peut être due à une instabilité de fonctionnement. Il est par exemple possible qu'une nouvelle source de bruit, liée à un décollement dans le compresseur, se manifeste et se propage dans l'entrée d'air du compresseur, masquant ainsi la source rotor/stator. On remarque également que lorsque les raies n'émergent pas clairement du bruit à large bande ou ont un faible niveau, la détection modale y est moins pertinente.

## 2.6 Conclusion

L'objectif de l'essai décrit dans ce chapitre était de détecter les sources susceptibles de se propager jusque dans l'entrée d'air d'un compresseur centrifuge. Bien que dans certains cas, d'autres sources de bruit non identifiées soient détectées aux faibles régimes, les modes caractéristiques de l'interaction rotor/stator sont clairement présents lors des mesures réalisées et restent les seuls dominants à fort régime. Cette conclusion valide notre hypothèse de départ, à savoir que les ondes sonores créées au niveau du diffuseur se propagent dans les canaux inter-aubes pour rayonner à l'extérieur.

La suite du travail est donc la mise en place progressive d'un modèle analytique de la propagation en remontant l'écoulement depuis la périphérie du rouet jusqu'à l'extérieur.



## Chapitre 3

# Propagation dans un conduit coudé à section variable - Application aux canaux inter-aubes

### 3.1 Introduction

L'étude expérimentale du chapitre précédent a confirmé que le bruit généré au niveau du diffuseur se propage vers l'extérieur en remontant via les canaux inter-aubes du rouet centrifuge. Puisque les mécanismes de transmission du son sont identiques d'un canal à l'autre moyennant un déphasage, la propagation acoustique peut être étudiée dans un canal unique. C'est ce qui est considéré dans ce chapitre. La géométrie d'un canal est néanmoins complexe, ce qui impose des simplifications expliquées au paragraphe 3.2. Différentes techniques peuvent être utilisées pour résoudre le problème de la propagation acoustique dans ce type de conduit. Deux techniques ont été étudiées durant ce travail de recherche. La première est une technique de propagation multimodale dont le principe sera donné au paragraphe 3.3.1. Le paragraphe 3.4 est quant à lui consacré à la technique de propagation modale usuelle. La dernière partie (paragraphe 3.4.3) montre des résultats de calculs et des comparaisons avec des simulations numériques menées sous ACTRAN/TM [1].

### 3.2 Simplifications

Un canal inter-aubes de rouet centrifuge a une forme générale coudée et en hélice avec une section droite variable de configuration complexe. De plus il peut comprendre des pales intercalaires (ou *splitters* en anglais). La géométrie réelle d'un canal inter-aubes est représentée sur la figure 3.1(a). Les modes de propagation dans les canaux inter-aubes ne peuvent donc pas être déterminés simplement. Des modèles analytiques peuvent néanmoins être développés moyennant des hypothèses simplificatrices sur la géométrie et sur l'écoulement dans les canaux. Une étude montrant l'importance des différents paramètres a été menée lors de travaux précédents [12, 21], l'objectif étant de simplifier la géométrie du canal afin de rendre les calculs analytiques abordables tout en conservant au mieux les comportements physiques dominants.

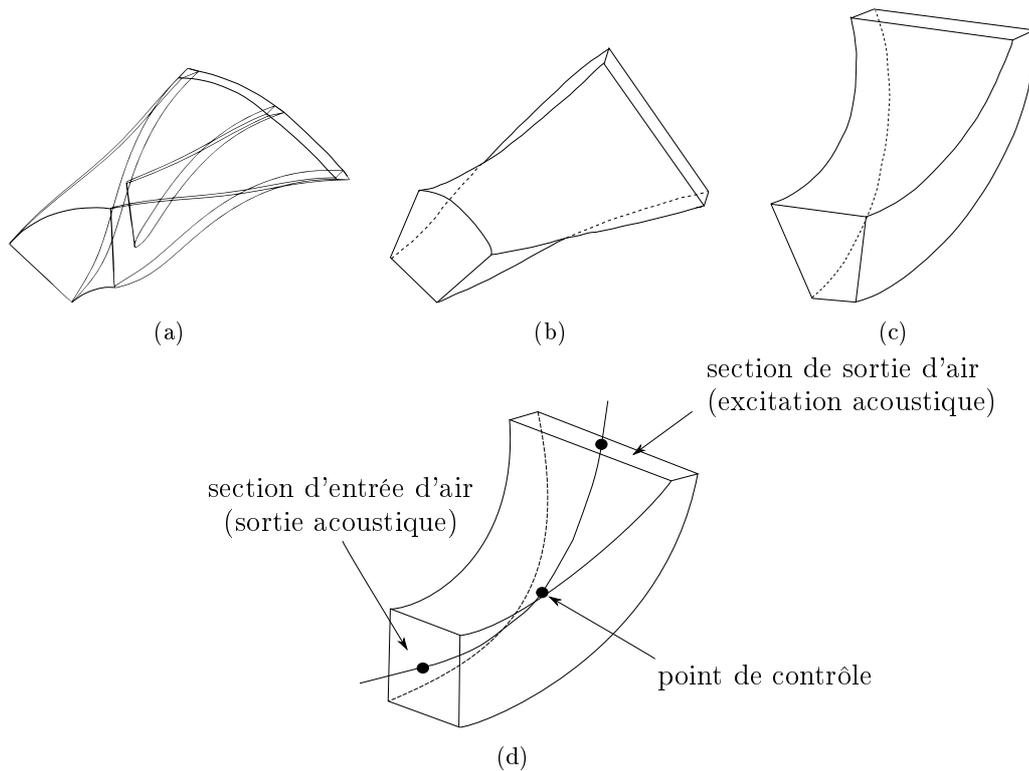


FIGURE 3.1 – Simplifications successives de la géométrie d'un canal inter-aubes : (a) réelle avec *splitters* ; (b) avec torsion, sections de sortie et d'entrée planes ; (c) sans torsion ; (d) avec courbure et sections droites rectangulaires.

Cette sélection des paramètres importants (aérauliques et géométriques) a été faite au moyen de calculs numériques par éléments finis et éléments infinis à l'aide des logiciels ACTRAN/TM et SYSNOISE.

### 3.2.1 Effet de l'écoulement

L'influence de la vitesse de l'écoulement, de la variation de la célérité du son et de la densité le long du canal a été étudiée par V.Cogne [12] sur une géométrie simplifiée ne prenant en compte que la courbure, la torsion et la variation de section (Fig. 3.1(b)). L'étude a conclu que l'influence de variations de la célérité du son et de la densité est assez faible pour pouvoir être négligée. L'écoulement a quant à lui un impact important sur la propagation acoustique.

On utilise pour cela une excitation de type piston plan de vitesse unitaire, en aval de la roue. On s'intéresse à l'information acoustique qui remonte le canal, dans le sens contraire de l'écoulement. Le milieu est caractérisé par une vitesse du son de 355 m/s et une densité de 0.576 kg/m<sup>3</sup>. Deux écoulements ont été testés :

- une vitesse d'entrée dans le canal de 160 m/s
- puis une vitesse de 80 m/s.

Le logiciel ACTRAN permet dans un premier temps de calculer les champs de vitesse d'un

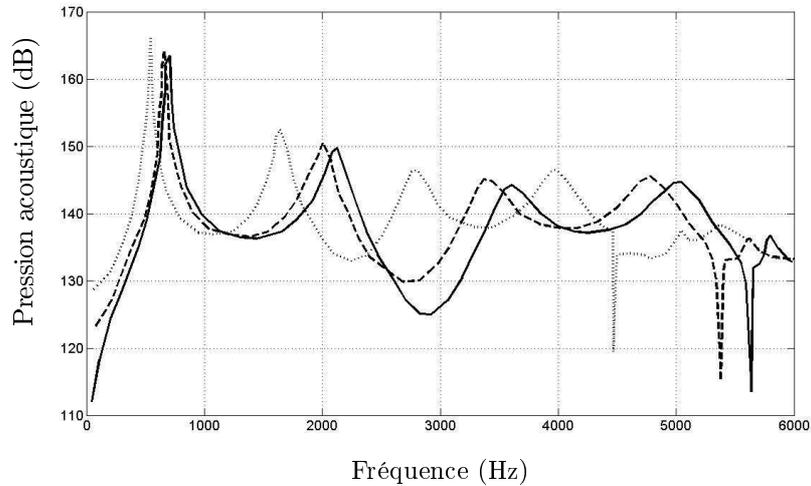


FIGURE 3.2 – Amplitude de la pression acoustique au centre d’un canal, sans écoulement (trait plein), avec un écoulement moyen en entrée d’air de 80m/s (trait pointillé large) puis de 160m/s (trait pointillé serré)

écoulement irrotationnel, puis de prendre en compte dans la propagation du son l’effet de convection lié à cet écoulement. L’évolution de la vitesse est calculée à partir de la conservation du débit et donc, pour un fluide isotherme et incompressible, elle suit l’évolution de la section du canal. Cependant, dans un compresseur, du fait des propriétés du fluide, la vitesse diminue le long du canal. Cet effet n’est pas pris en compte par le logiciel ACTRAN et les résultats présentés sur la figure 3.2 ont surtout une portée académique. Ils donnent néanmoins une information sur l’impact de l’écoulement moyen sur la propagation acoustique dans la géométrie étudiée.

La figure 3.2 retrace l’évolution de l’amplitude sonore au milieu d’un canal inter-aubes en fonction de la fréquence. Les calculs sont effectués sans écoulement et avec des vitesses de 80 et 160 m/s en entrée de canal. Les courbes obtenues sont d’allures similaires, mais avec un décalage des maxima vers les basses fréquences. Les pics de résonance sans écoulement correspondant à un tube ouvert/fermé sont présents : ce sont les multiples impairs de 830 Hz, associés à la longueur de la ligne moyenne de  $l=0.107$  m.

La configuration réelle du compresseur correspond à une vitesse en entrée proche de 80 m/s. L’effet est donc significatif mais *a priori* l’hypothèse d’un écoulement uniforme dans la méthode analytique suffit à rendre compte du décalage fréquentiel.

### 3.2.2 Effet des paramètres géométriques

Les calculs ont été menés en imposant une vitesse vibratoire uniforme à la sortie du canal inter aube et en considérant une condition de paroi rigide à l’entrée. La nature de ces conditions aux limites importe peu car il s’agit dans un premier temps de tester l’effet de certaines simplifications sur la propagation guidée.

L’hélicité, l’ajout de *splitters*, la courbure et la forme de l’entrée d’air ont également été étudiés [12, 21] afin de voir dans quelle mesure ils peuvent être négligés.

Une première approximation nous amène à négliger la torsion tout en gardant la courbure

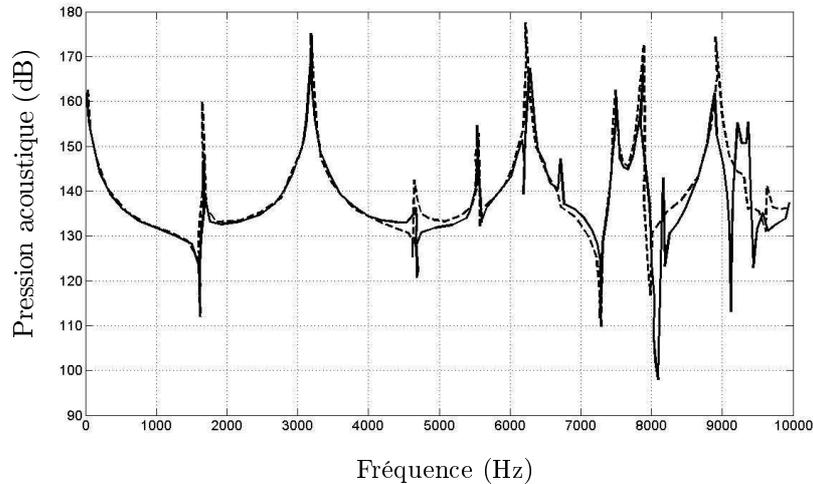


FIGURE 3.3 – Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d’un canal sans hélicité (trait plein) et avec hélicité (trait pointillé)

du canal dans un plan méridien (Fig. 3.1(c)). En effet la courbure est le paramètre moyen dans un compresseur centrifuge. Dans une seconde étape, l’entrée du canal est modifiée pour passer d’un secteur annulaire à un rectangle et la sortie, qui est un arc de cylindre, est assimilée elle aussi à un rectangle. Préserver la différence de géométrie imposerait des fonctions de forme différentes pour une description du champ en terme de modes dans la suite de l’étude. Pour un compresseur comprenant un grand nombre de pales, cette approximation est jugée correcte (Fig. 3.1(d)).

Toutes ces simplifications sont en pratique examinées dans ce paragraphe.

### Influence de l’hélicité

Des calculs ont été menés avec le logiciel SYSNOISE, sur deux géométries avec (Fig. 3.1(b)) et sans hélicité (Fig. 3.1(d)), sans écoulement. La figure 3.3 donne la pression acoustique au point milieu de la ligne moyenne. La conclusion est que jusqu’à 9000 Hz, si l’évolution des sections est respectée, l’hélicité joue un rôle peu important et pourra donc être négligée dans la modélisation analytique. Il faut cependant noter que l’hélicité implique aussi des sections terminales biseautées. Ces deux aspects géométriques sont négligés pour le moment ; il sera possible dans des études ultérieures de prendre par exemple en compte l’obliquité des parois des canaux par rapport à la section droite d’entrée d’air de la machine lors des raccordements modaux [31].

### Influence des *splitters*

Le rôle des aubes intercalaires a été également étudié par V.Cogne [12]. La géométrie du canal avec *splitters* est cette fois tirée des données CAO fournies par LTS (équivalentes à la géométrie donnée sur la figure 3.1(a)). La forme du canal est donc légèrement différente et plus élaborée que la géométrie dite « sans *splitter* » représentée par la figure 3.1(b). La comparaison entre le canal simplifié et le canal d’origine montre tout d’abord un décalage

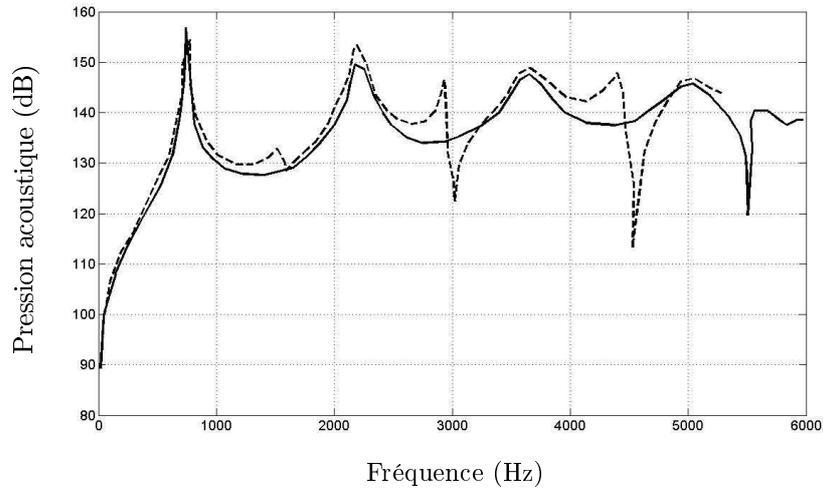


FIGURE 3.4 – Comparaison de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d'un canal sans *splitter* (trait plein) et avec *splitters* (trait pointillé), l'aube intercalaire commençant à 35% de la ligne moyenne.

fréquentiel des pics principaux (non illustré ici) correspondant à une différence de longueur des canaux. La figure 3.4 présente la réponse acoustique en un point situé au milieu du canal avec et sans aube intercalaire, les pics principaux étant recalés. L'aube intercalaire s'interprète comme une bifurcation pour la propagation guidée dans un canal. Elle est donc responsable de réflexion et transmission des ondes de part et d'autre de la bifurcation. Dans le cas étudié l'aube intercalaire commence à 35% de l'abscisse curviligne.

Les pics de résonance correspondant à un tube ouvert/fermé sont à nouveau présents. Les autres pics qui apparaissent sont les multiples pairs de cette fréquence. Ils n'avaient pas lieu d'être sans pales intercalaires mais étaient attendus avec, car les pales intercalaires agissent comme de nouvelles sources de bruit équivalentes aux recompositions du champ par réflexion-transmission dans les demi-canaux.

Il est donc à noter que les *splitters* engendrent des changements notables dans la réponse fréquentielle du canal. Cependant, les compresseurs centrifuges dimensionnés par LTS ne comprennent pas tous des pales intercalaires. Dans un premier temps, pour simplifier les modèles analytiques, les aubes intercalaires ne seront pas considérées. À terme, par décomposition en demi-canaux, les résonances liées aux pales intercalaires pourraient être introduites dans le modèle en rajoutant une surface de raccordement. Ceci consiste une extension future possible de l'étude.

### Influence de la courbure

L'effet de la courbure sur la réponse acoustique d'un canal inter-aubes reste à évaluer. Elle a été menée avec une entrée carrée du canal et les résultats obtenus au milieu d'un canal sont donnés sur la figure 3.5, pour un canal coudé dans le plan méridien, et le canal rectiligne correspondant. Les deux géométries sont équivalentes en basses fréquences. Cependant, les résultats divergent au-delà de 5000 Hz où l'effet de courbure est alors important.

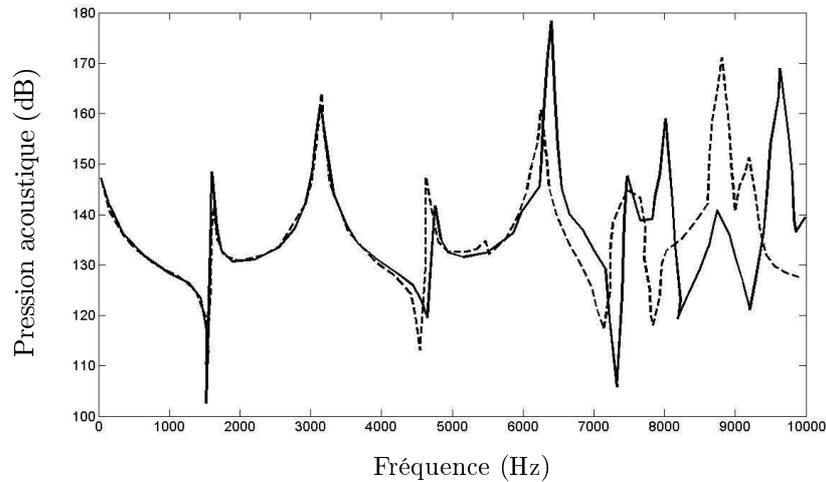


FIGURE 3.5 – Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d’un canal avec courbure (trait pointillé) et du même canal redressé (trait plein).

### Influence de l’évasement

Les faces latérales d’un canal ne sont pas parallèles mais évasées. Cet effet est ignoré lorsque la section droite est assimilée à un rectangle et l’impact sur la réponse d’un canal doit aussi être évalué. Des calculs ont donc été menés pour le canal avec courbure dans le plan méridien selon les géométries des figures 3.1(c) et 3.1(d). L’évasement est pris en compte en considérant que le rouet étudié possède 8 aubes. Une erreur est ainsi commise lorsque l’on néglige l’évasement ; elle sera jugée acceptable pour les fréquences basses mais elle devient importante lorsque l’on travaille à des fréquences supérieures à 8500 Hz. Les résultats sont donnés sur la figure 3.6. On note un pic à 8800 Hz sur les figures 3.3, 3.5 et 3.6 imputable à la géométrie rectangulaire des sections droites. Il correspond à une longueur de 19.3 mm et est attribuable à une résonance transversale du canal en sortie du canal.

### 3.2.3 Définition d’une géométrie pour la modélisation

Le but de ce chapitre est de construire un modèle de propagation adapté à un canal inter-aubes. Des simplifications géométriques sont nécessaires pour l’atteindre selon une approche analytique. La géométrie la plus appropriée pour rendre compte de tous les effets s’appuierait sur une ligne moyenne en forme d’hélice, selon la figure 3.1(b). Cette forme prend en effet en compte les deux directions de courbure des canaux. Malheureusement cette géométrie qui peut éventuellement être prise en compte dans l’approche multimodale (paragraphe 3.3.1) demande des temps de calcul importants. D’après l’étude paramétrique du paragraphe 3.2.2, si l’évolution de section est conservée, l’hélicité peut être négligée jusqu’à 9000 Hz. C’est pourquoi la deuxième géométrie envisageable revient à ne prendre en compte que la courbure du canal dans le plan méridien, donc à négliger l’hélicité mais en conservant la même évolution des sections droites (Fig. 3.1(d)). Une telle géométrie permet de s’affranchir des intégrales à calculer numériquement dans l’approche multimodale, ce qui représente un gain primordial. Rappelons par ailleurs que les sections de passage des canaux sont rectangulaires. Cette

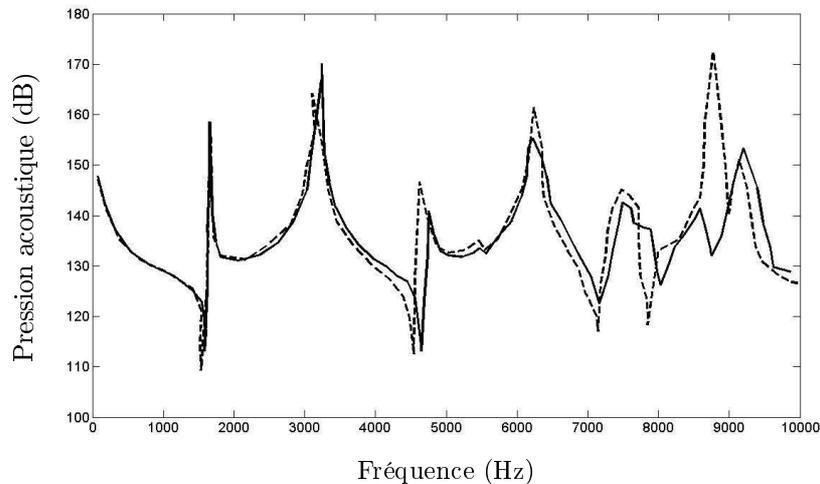


FIGURE 3.6 – Amplitude de la pression acoustique au centre (sur la ligne moyenne) d’un canal avec une section d’entrée en forme de trapèze (trait plein) et une section d’entrée de forme carré (trait pointillé).

hypothèse est d’autant plus fondée que le nombre de canaux inter-aubes est grand.

Le problème peut dans ce cas être également traité analytiquement, par une approche par échelles multiples, abordée au paragraphe 3.4.

### 3.3 Étude bibliographique - les deux techniques envisagées

#### 3.3.1 Propagation multimodale

La première technique de modélisation de la propagation dans un canal inter-aubes initialement envisagée durant cette étude est basée sur les travaux de S. Félix [16]. Il s’agit d’une formulation multimodale de la propagation en conduit. Cette référence aborde les différentes propriétés d’un conduit (coude, section variable) dans des configurations bidimensionnelles. Une application tridimensionnelle a également été décrite dans le cas d’un conduit de section circulaire. La technique multimodale a donc été reprise dans notre étude en trois dimensions pour un conduit coudé à section rectangulaire variable. L’effet d’hélicité a été négligé conformément au schéma de la figure 3.1(d) repris sur la figure 3.7. Cependant, pour des raisons de temps de calcul et des raisons pratiques de raccordement avec les autres modèles, la technique modale développée au paragraphe 3.4 lui a été préférée. Nous donnons donc ici le principe de résolution, les équations de départ ainsi qu’un résultat de comparaison entre un calcul par cette méthode et une simulation numérique effectuée à l’aide du logiciel SYSNOISE. Les calculs sont quant à eux développés en annexe F. Il est à noter que l’approche multimodale traite de la propagation par rapport à un écoulement moyen supposé connu au préalable.

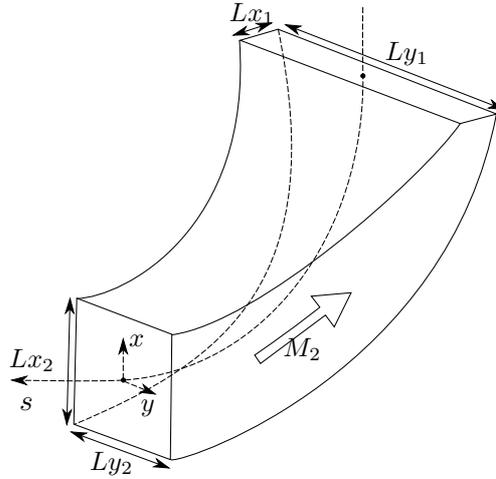


FIGURE 3.7 – Géométrie d'un canal inter-aubes sans torsion (Fig. 3.1(d)), avec le système de coordonnées curvilignes introduit pour les besoin de l'étude

### Équations et technique de résolution

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} p' \quad (3.1a)$$

$$-\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = \mathit{div} V_t \quad (3.1b)$$

soit encore, en régime harmonique de pulsation  $\omega$  avec une convention en  $e^{i\omega t}$  :

$$i\omega V_t = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} p' \quad (3.2a)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} i\omega p' = -\mathit{div} V_t \quad (3.2b)$$

De plus, les modes transversaux d'un guide de section rectangulaire de section variable sont définis par les fonctions :

$$\Psi_{mn}(x, y) = A_{mn} \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \quad (3.3)$$

en posant  $A_{mn} = \sqrt{2 - \delta_{0m}} \sqrt{2 - \delta_{0n}}$ . Ces fonctions sont orthogonales vis-à-vis du produit scalaire :

$$\iint_S \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} dS = S \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

où  $S$  est la section.

La formulation multimodale se décompose alors en plusieurs étapes :

- On écrit les équations de l'acoustique dans le repère lié au conduit selon l'abscisse curviligne  $s$  et le plan transverse  $(x, y)$ .
- On élimine les composantes transverses de la vitesse dans les équations. On obtient deux équations à deux inconnues sur la pression et la vitesse axiale.
- Les modes propres dans une section droite, solutions du problème transverse, forment une base complète locale. On peut donc écrire la vitesse longitudinale  $V_s$  et la pression  $p'$  sur cette base de la façon suivante :

$$p'(x, y, s) = \sum_{m,n} P_{mn}(s) \Psi_{mn}(x, y) = {}^t \Psi P$$

$$V_s(x, y, s) = \sum_{m,n} V_{mn}(s) \Psi_{mn}(x, y, s) = {}^t \Psi U$$

Les vecteurs  $P$  et  $U$  sont les composantes de la pression  $p'$  et de la vitesse le long de l'abscisse curviligne  $V_s$  sur la base des fonctions propres  $\Psi$ .

- les fonctions modales  $\Psi_{mn}$  sont données par l'équation 3.3. Il ne reste plus qu'à calculer  $P_{mn}(s)$  et  $V_{mn}(s)$  pour tout  $m$  et  $n$ . Pour cela les deux expressions précédentes sont projetées sur les modes propres afin d'obtenir des équations de la forme  $dP/ds = f_1(U, P)$  et  $dU/ds = f_2(U, P)$ .
- La résolution numérique de ces deux équations s'effectue par un algorithme de Runge-Kutta.

Cette technique a l'avantage de prendre en compte le couplage entre les modes se propageant dans le conduit, ce qui ne sera pas possible avec la décomposition modale classique. Cependant la mise en oeuvre pratique nécessite deux étapes importantes. Pour éviter des problèmes de convergence [16], on introduit une impédance généralisée  $Z$  telle que  $P = ZU$ . Le calcul se fait dans un premier temps sur l'impédance acoustique puis sur la pression acoustique le long de l'abscisse curviligne en utilisant un algorithme de Runge-Kutta avec un pas adaptatif. Le temps de calcul est coûteux. Les équations sont données en annexe F. Ensuite, la définition de l'impédance terminale nécessaire pour le calcul et peut être obtenu soit grâce à un calcul SYSNOISE, soit en se référant à la littérature. En outre, il est possible grâce au modèle actuel de retrouver les impédances en sortie de canal par mode en utilisant le modèle de raccordement modal et le calcul de propagation dans les canaux ne peut donc pas se faire indépendamment de la résolution du problème complet. Cette étape est cependant en cours de développement chez LTS.

### Comparaison avec une simulation numérique

Le calcul analytique multimodal a été comparé au code SYSNOISE dans le cas de la géométrie de la figure 3.7. La difficulté qui apparaît est de trouver un cas test valable pour les deux moyens de calculs. En effet, il n'existe pas de règle générale permettant de passer d'une condition d'impédance modale (utilisée dans la méthode multimodale) à une condition d'impédance telle qu'elle est imposée comme condition aux limites du code de simulation numérique. Pour une comparaison plus simple, les conditions aux limites choisies sont les suivantes :

- une condition sur la pression correspondant à une excitation vibratoire uniforme sur la

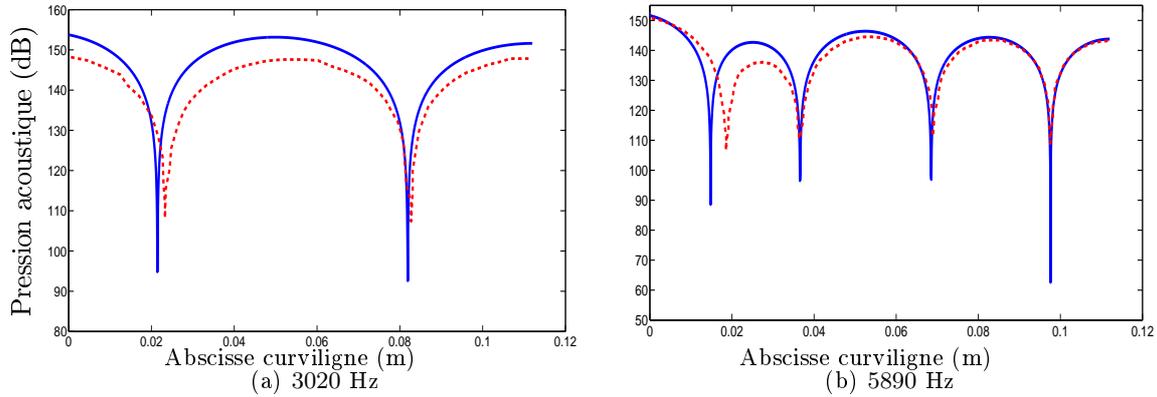


FIGURE 3.8 – Évolution de la pression sur l’abscisse curviligne : comparaison entre le calcul analytique multimodal (ligne continue) et la simulation numérique SYSNOISE (ligne pointillée)

- vitesse ( $P = ZU$ ) est utilisée comme condition initiale,
- une condition d’impédance infinie est choisie à la sortie acoustique du canal (réflexion totale).

L’évolution de la pression suivant l’abscisse curviligne montre une bonne correspondance entre le calcul analytique et le calcul numérique. On remarque cependant que la méthode analytique surestime la pression acoustique à 3020 Hz par rapport à la simulation numérique. Cependant, le comportement spatial est très bien respecté. Les noeuds et les ventres de pression sont parfaitement placés.

### 3.3.2 Décomposition modale lentement variable

De nombreuses études initiées par S.W.Rienstra [38, 37] décrivent de manière analytique le comportement approché des modes acoustiques dans des conduits droits à sections lentement variables. N.C.Ovenden [33] a ajouté par la suite le traitement des transitions de modes entre les régimes coupé/passant ou passant/coupé. Plus récemment, E.J.Brambley [5] a introduit la prise en compte d’une courbure dans des conduits à section variable circulaire. Ces trois points, dont les grandes lignes sont expliquées dans ce paragraphe, sont l’origine du modèle finalement retenu pour cette partie.

#### Propagation en conduit à section lentement variable

S.W.Rienstra développe en 1999 [38] une technique analytique de propagation acoustique dans des conduits droits à sections circulaire ou annulaire lentement variables, qu’il étend en 2003 [37] à des sections arbitraires acoustiquement traitées. La technique repose sur un développement en échelles multiples qui revient à introduire dans les équations de propagation un petit paramètre  $\varepsilon$  traduisant la variation lente de la section. La base de la résolution est l’équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{V}_t|^2 + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \text{constante}$$

où  $\Phi$  est le potentiel des vitesses,  $\mathbf{V}_t = \nabla\Phi$  la vitesse totale,  $c_0$  la vitesse du son et  $\gamma$  la constante des gaz parfaits. Cette équation peut être linéarisée et mène à un système d'équations qui décrit d'une part l'écoulement moyen et d'autre part le champ acoustique. Le champ moyen est considéré constant dans chaque section pour plus de simplicité. Le champ acoustique est exprimé à l'aide de modes de conduit lentement variables le long de l'axe. L'équation sur le champ moyen découle directement de la conservation de la masse intégrée sur la section :

$$2\pi \int_{R_1(X)}^{R_2(X)} D_0(X, r; \varepsilon) U_0(X, r; \varepsilon) r dr = \pi F$$

$F$  étant une constante,  $D_0$  la densité moyenne,  $U_0$  la vitesse moyenne selon la coordonnée axiale  $X$ ,  $R_1$  et  $R_2$  les rayons intérieur et extérieur du conduit (en configuration annulaire). L'équation du champ acoustique résulte de la linéarisation des équations de quantité de mouvement

$$\nabla \cdot (D_0 \nabla \phi) - D_0 (i\omega + \mathbf{V} \cdot \nabla) \left[ \frac{1}{C_0^2} (i\omega + \mathbf{V} \cdot \nabla) \phi \right] = 0,$$

avec  $\phi$  le potentiel acoustique,  $\mathbf{V}$  la vitesse moyenne,  $C_0$  le champ moyen de la vitesse du son et les conditions aux limites s'écrivent

$$(i\omega + \mathbf{V} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad \text{en} \quad r = R_i$$

La solution recherchée est une fonction de forme qui varie lentement suivant l'axe du conduit. Son amplitude ainsi que les nombres d'ondes axiaux et radiaux varient donc de la même manière. Afin de prendre en compte la variation de section, la méthode des échelles multiples consiste à écrire le potentiel acoustique de la façon suivante :

$$\phi(x, r, \theta; \varepsilon) = (A_0(X, r) + \varepsilon A_1(X, r) + \dots) \exp \left( -in\theta - i\varepsilon^{-1} \int^X \mu(\xi) d\xi \right).$$

avec  $n$  le nombre d'onde azimutal et  $\mu(X)$  le nombre d'onde radial dans la section. L'équation de propagation est ainsi déterminée, de même que les conditions aux limites. Au premier ordre, on résout le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} L(A_0) = 0 \quad \text{avec} \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{C_0^2} - \mu^2 - \frac{m^2}{r^2}, \quad \Omega = \omega - \mu U_0 \\ i\omega \frac{\partial A_0}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R_i \end{array} \right.$$

La fonction propre  $A_0$  est écrite dans les conduits à section annulaire ou circulaire comme une composition de fonctions de Bessel de la même manière que présenté dans le chapitre 1.3 :  $A_0(X, r) = N(X)J_m(\alpha(X), r) + M(X)Y_m(\alpha(X), r)$ . Dans le cas d'un conduit cylindrique ( $R_1 = 0$ )  $M(X) = 0$  et  $N(X)$  représente alors l'amplitude lentement variable des fonctions de forme des modes et s'écrit :

$$N(X) = Q \sqrt{\frac{C_0(X)}{\omega \sigma(X) D_0(X)}}$$

avec  $\sigma = \sqrt{1 - (C_0^2 - U_0^2) \alpha^2 / \omega^2}$  le nombre d'onde axial réduit et  $Q$  une constante reliée à l'amplitude de la source de bruit. Cette mise en place des équations permet de résoudre de façon analytique des problèmes de propagation acoustique dans des conduits à section lentement variable. Pour ce faire, les paramètres du champ moyen non perturbé (indice 0) sont préalablement déterminés en résolvant l'équation de conservation du débit par différences finies. Le champ est uniforme dans chaque section. Sous sa forme initiale en coordonnées cylindriques, la formulation a été notamment appliquée dans cette thèse pour prendre en compte l'ogive du rouet centrifuge (voir chapitre 6).

### Transition de modes dans les conduits à section variable

La méthode développée par S.W.Rienstra a pour principe de suivre un mode le long de l'axe du conduit. Cependant, le diamètre du conduit (ou plus généralement les dimensions de la section droite) et les conditions locales d'écoulement déterminent si l'onde peut se propager ou non. Un mode passant en entrée de conduit peut être coupé par la suite du fait d'un changement de section ou d'écoulement moyen. De la même façon un mode coupé peut devenir passant si les variations de conditions de propagation sont favorables. Les transitions de ce type engendrent une singularité dans la méthode aux échelles multiples et celle-ci doit être corrigée. N.C.Ovenden [33] a ainsi proposé une correction, notamment pour prendre en compte une transition passant/coupé. Lors d'une telle transition, un mode incident est intégralement réfléchi dans la section singulière. Du côté du mode incident il convient donc d'ajouter le mode réfléchi, ce qui conduit à une onde stationnaire, alors que du côté opposé l'onde est évanescence. La solution au voisinage de la transition est exprimée par des fonctions d'Airy. Après de nombreux développements analytiques, une solution englobant les résultats initiaux de Rienstra et le traitement de la transition est obtenue. Le potentiel acoustique s'écrit alors :

$$\phi = \check{Q} \sqrt{\frac{C_0}{\omega D_0}} \psi(r, \theta; X) \left[ -\frac{3}{2\varepsilon} \frac{1}{\sigma^3} \int_{X_t}^X \frac{\omega C_0 \sigma}{C_0^2 - U_0^2} dX' \right]^{1/6} \\ \times \text{Ai} \left[ \left( \frac{3i}{2\varepsilon} \int_{X_t}^X \frac{\omega C_0 \sigma}{C_0^2 - U_0^2} dX' \right)^{2/3} \right] e^{i/\varepsilon \int_{X_t}^X [\omega U_0 / (C_0^2 - U_0^2)] dX'}$$

avec  $\check{Q} = 2\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} Q$ . La fonction propre  $\psi(r, \theta; X)$  ainsi que le champ moyen sont déterminés de la même manière que dans la solution de base.

Le modèle de transition a aussi été appliqué pour tenir compte de l'ogive d'entrée d'air dans le calcul de la propagation dont un résultat sera donné au chapitre 6 [22].

### Propagation en conduit coudé à section lentement variable

E.J.Brambley et N.Peake [5] ont apporté une évolution au modèle précédemment développé. Ils proposent d'ajouter au conduit à section lentement variable une courbure de l'axe. Le modèle a été initialement développé pour des conduits à sections circulaire ou annulaire. La courbure est ajoutée sur la définition de la vitesse moyenne,  $U_0(S, r, \theta) = U^*(S)/h_s$  avec  $h_s = 1 - \kappa r \cos \theta$ ,  $\kappa$  étant la courbure. En particulier, ceci conduit à un écoulement de base qui n'est plus uniforme dans une section droite. L'équation de propagation est maintenant la

suivante :

$$\frac{1}{h_s D_0} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h_s D_0 \frac{\partial A_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r h_s D_0 \frac{\partial A_0}{\partial \theta} \right) \right] + \left( \frac{\Lambda^2}{C_0^2} - \frac{k^2}{h_s^2} \right) A_0 = 0,$$

avec  $\Lambda = \omega - kU_0/h_s$ . Cette nouvelle équation montre une forte dépendance de la fonction de forme  $A_0$  selon  $\theta$ . Elle ne peut donc pas, contrairement au cas du conduit droit, être résolue par une séparation de variables, et nécessite la mise en place d'un traitement numérique. La solution numérique consiste en la résolution d'un problème aux valeurs propres où les vecteurs propres constituent la fonction de forme des modes évoluant dans le conduit, et les valeurs propres sont les nombres d'onde axiaux le long de l'abscisse curviligne.

Ces travaux [5] peuvent donc être une alternative à la technique multimodale, bien qu'ils impliquent également des calculs numériques complexes et qu'ils ignorent les couplages inter-modaux. C'est cette technique qui a été reprise dans ce travail de thèse et adaptée pour des sections rectangulaires. Elle est donc détaillée dans le paragraphe suivant (3.4).

## 3.4 Modélisation analytique par l'approche modale lentement variable

### 3.4.1 Mise en place des équations

On considère un conduit coudé à section rectangulaire qui possède une courbure mais pas d'hélicité selon le schéma de la figure 3.7. En amont, pour les besoins de la résolution, cette portion coudée est supposée reliée à un conduit droit, de section constante avec un écoulement uniforme. Le conduit a une variation de section lente le long de l'abscisse curviligne de sa ligne centrale. Le système de coordonnées est centré sur l'abscisse curviligne  $(s, x, y)$ , où  $x, y$  sont les coordonnées cartésiennes dans un plan normal à la ligne centrale, avec  $s = -\infty$  correspondant à l'aval de l'écoulement (coté diffuseur, où les modes acoustiques sont produits). Les coordonnées radiale et transverse du conduit sont  $x_{i,e}(S)$  et  $y_{i,e}(S)$  et la courbure de l'abscisse curviligne est  $\kappa(S)$ , où  $S = \varepsilon s$  est la coordonnée lentement variable.

Le fluide étant supposé parfait et en écoulement irrotationnel on écrit les équations :

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial S} (DU) + \frac{\partial}{\partial x} (h_s DV) + \frac{\partial}{\partial y} (h_s DW) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial (Uh_s)}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial (Uh_s)}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial S} = 0,$$

Dans les références utilisant l'analyse en échelles multiples [38, 5], le conduit est immobile et les équations du fluide sont écrites dans un référentiel fixe. Dans le cas des canaux inter-aubes d'une roue centrifuge, les équations de l'écoulement doivent être réécrites dans le repère lié au canal afin de décrire au mieux le mouvement relatif du fluide. Ces nouvelles équations doivent en principe inclure les effets inertiels comprenant les forces centrifuges ainsi que les forces de Coriolis. Cependant, la rotationalité correspondant au cas général entre en conflit avec l'hypothèse d'un écoulement potentiel. Plus précisément, l'accélération de Coriolis est dirigée tangentiellement et donc perpendiculairement aux gradients de l'écoulement moyen simplifié, ce qui est en contradiction avec les équations. En pratique, elle est responsable de la

structuration des écoulements secondaires dans les turbomachines en général. Ces écoulements sont supposés sans effet notable sur l'acoustique dans la présente étude et les termes de Coriolis sont ignorés. Finalement, l'ajout de la rotation dans l'équation de Bernoulli ne retranscrit que les effets centrifuges sur le champ moyen. On écrit :

$$\frac{1}{2} |U_0^2 - \bar{\Omega}^2 \bar{R}^2| + \frac{D^{\gamma-1}}{\gamma-1} = E = \text{constante} \quad (3.4)$$

$$D = \left[ (\gamma-1) \left( E - \frac{U_0^2 - \bar{\Omega}^2 \bar{R}^2}{2} \right) \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (3.5)$$

où  $\bar{\Omega}$  est la vitesse de rotation du rouet centrifuge adimensionnée par la célérité,  $\bar{R}$  la coordonnée radiale dans la roue et  $E$  la constante introduite par Rienstra [38].

La vitesse moyenne dans le conduit est donnée par  $\mathbf{V} = U\mathbf{e}_s + V\mathbf{e}_x + W\mathbf{e}_y$ , la densité est  $D$ , et on considère que toutes les variables de l'écoulement moyen varient lentement le long du conduit.

$$U = U_0 + O(\varepsilon^2), \quad V = \varepsilon V_1 + O(\varepsilon^3), \quad W = \varepsilon W_1 + O(\varepsilon^3),$$

où

$$U_0(S, x, y) = \frac{U_+(S)}{h_s}.$$

avec  $h_s = 1 - \kappa(S)x = 1 - x/\bar{r}(S)$ . La valeur  $U_+(S)$  peut être déterminée en écrivant les équations de conservation de la masse le long de l'abscisse curviligne  $S$ , on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_e} \int_{y_i}^{y_e} U_0(S, x, y) D_0 dx dy = U_\infty D_\infty (x_e(\infty) - x_i(\infty)) (y_e(\infty) - y_i(\infty)).$$

On considère une petite perturbation  $(v', \rho', p')$  sur l'écoulement moyen  $(U, D, P)$ , avec une dépendance temporelle en  $e^{i\omega t}$ . On introduit le potentiel  $v' = \nabla\phi$ . À nouveau, pour résoudre le problème analytiquement, les équations linéarisées sont écrites en ignorant les termes complémentaires dus aux accélérations centrifuge et de Coriolis. On considère donc que la rotation du rouet a un impact sur l'écoulement moyen mais pas directement sur les fluctuations de pression et donc sur la propagation acoustique dans les canaux. Cette hypothèse simplifie grandement les équations et elle élimine les couplages possibles en principe entre les fluctuations acoustiques et des modes de fluctuation inertiels propres à la giration. La validité d'une telle simplification est considérée ici comme acquise, car prendre en compte les modes inertiels sort du cadre de l'étude (et ne peut s'accorder avec une résolution analytique). Les équations de la dynamique des fluides linéarisées se ramènent finalement à

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{C^2} \frac{D\phi}{Dt} \right) - \frac{1}{D} \nabla \cdot (D \nabla \phi) = 0 \quad (3.6)$$

où  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$  est la dérivée particulaire.

Les parois sont supposées rigides, les conditions aux limites sont donc :  $\partial\phi/\partial x = 0$  en  $x = x_{i,e}$  et  $\partial\phi/\partial y = 0$  en  $y = y_{i,e}$ .

De façon à prendre en compte la variation de section, on utilise de la même manière que

Rienstra [38] la technique des échelles multiples (approximation WKB) en posant :

$$\phi = [A_0(S, x, y) + \varepsilon A_1(S, x, y) + O(\varepsilon^2)] \exp \left\{ i\omega t - \frac{i}{\varepsilon} \int_{-\infty}^S k(S') dS' \right\}. \quad (3.7)$$

$\varepsilon$  étant un petit paramètre.

En ne gardant que les termes en d'ordre 1 dans l'équation 3.6 on obtient :

$$\frac{1}{h_s D_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h_s D_0 \frac{\partial A_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h_s D_0 \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) \right] + \left( \frac{\Lambda^2}{c_0^2} - \frac{k^2}{h_s^2} \right) A_0 = 0 \quad (3.8)$$

où  $\Lambda = \omega - kU_0/h_s$ . Les conditions aux limites s'écrivent

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = x_{i,e}(S) \quad \text{et} \quad \frac{\partial A_0}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = y_{i,e} \quad (3.9)$$

On constate alors que l'équation est séparable pour la variable  $y$ , ce qui simplifie la résolution pratique et justifie *a posteriori* le choix d'une section rectangulaire dans le modèle. On écrit alors  $A_0(S, x, y) = \cos(m\pi(y - y_i)/(y_e - y_i)) \times A_0^*(S, x)$ , moyennant quoi  $A_0^*(S, x)$  doit maintenant satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial^2 A_0^*(S, x)}{\partial x^2} - \frac{\kappa(S)}{h_s} \frac{\partial A_0^*(S, x)}{\partial x} + A_0^*(S, x) \left[ \frac{\Lambda^2}{c_0^2} - \frac{k^2}{h_s^2} - \left( \frac{m\pi}{y_e - y_i} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.10)$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial A_0^*}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = x_{i,e}(S) \quad (3.11)$$

On normalise la fonction  $A_0$  de telle sorte que  $A_0(S, x, y) = N(S)\hat{A}_0(S, x, y)$ , où  $N(S)$  est une fonction d'amplitude lentement variable et

$$\int_{x_i}^{x_e} \int_{y_i}^{y_e} \frac{U_0 D_0 \omega}{c_0^2} \hat{A}_0^2 dx dy = 1.$$

La fonction d'amplitude  $N(S)$  doit être déterminée par une condition de compatibilité obtenue en utilisant les termes en  $O(\varepsilon)$  de l'équation (3.6). Après calculs, on introduit une fonction  $F(S)$  telle que  $F(S)N^2(S)$  soit constant le long du conduit, ce qui peut être interprété pour les modes passants comme une propriété de conservation de l'énergie [38].

La fonction  $F(S)$  est donnée par l'expression :

$$F(S) = \int_{x_i}^{x_e} \int_{y_i}^{y_e} D_0 \hat{A}_0^2 \left[ \frac{\omega U_0}{c_0^2} + \frac{k}{h_s} \left( 1 - \frac{U_0^2}{c_0^2} \right) \right] dx dy \quad (3.12)$$

Nous avons donc, d'une part l'équation de propagation (3.6) pour laquelle le nombre d'onde axial local ainsi que la fonction propre locale sont déterminés par une technique de résolution numérique des équations (3.8) & (3.9), ainsi qu'une évolution de l'amplitude donnée par une

fonction lentement variable  $N(S)$ , d'autre part.

### 3.4.2 Résolution numérique

Les équations (3.10) & (3.11) peuvent être résolues numériquement afin de déterminer le nombre d'onde axial  $k(S)$  et la fonction d'onde correspondante  $A_0^*(S, x)$ .

L'équation de propagation pour les termes principaux  $A_0^*$  et  $k$  est traduite comme un problème aux valeurs propres généralisé. On écrit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^* \\ B_0^* \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{2\omega U_0}{h_s c_0^2} & \frac{1}{h_s^2} \left(1 - \frac{U_0^2}{c_0^2}\right) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^* \\ B_0^* \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où

$$\mathcal{L}A_0^* = \frac{\partial^2 A_0^*}{\partial x^2} - \frac{\kappa(S)}{h_s} \frac{\partial A_0^*}{\partial x} + A_0^* \left[ \frac{\omega^2}{c_0^2} - \left( \frac{m\pi}{y_e - y_i} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

Ce problème est résolu par une méthode pseudo-spectrale basée sur des polynômes de Chebyshev [8, 4]. Les étapes suivantes sont identiques à celles décrites par Brambley & Peake.

Posons  $n_x$  le nombre de points de collocation dans la direction  $x$ . L'intervalle  $[x_i, x_e]$  des valeurs de  $x$  est projeté linéairement sur l'intervalle  $\xi(x) \in [-1, 1]$ . Les polynômes de Chebyshev sont définis sur  $[-1, 1]$  par  $T_j(\cos \theta) = \cos(j\theta)$ , avec les points de collocation

$$\xi_j = \cos^{-1} \left( \frac{j\pi}{n_x - 1} \right)$$

Un changement de variable est effectué afin d'obtenir le domaine numérique qui est composé des points  $x_j$ , où

$$x_j = \frac{x_i + x_e}{2} + \frac{x_i - x_e}{2} \cos^{-1} \left( \frac{j\pi}{n_x - 1} \right)$$

Les valeurs obtenues numériquement seront donc les valeurs de la fonction considérée aux points  $b_j = f(x_j)$ , et ces points représentent l'unique fonction d'interpolation sous la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n_x-1} a_j T_j(x)$$

De plus, la multiplication de deux fonctions revient simplement à multiplier les coefficients et la dérivée par rapport à  $x$  est représentée par les matrices  $D_x$ , avec

$$D_{x(l,j)} = \frac{-2}{x_e - x_i} A_{lj}$$

et

$$\begin{aligned} A_{lj} &= \frac{c_l (-1)^{l+j}}{c_j \xi_l - \xi_j} & \text{si } l = j \\ A_{jj} &= \frac{-\xi_j}{2(1 - \xi_j^2)} & \text{si } 1 \leq l = j \leq n_x - 2 \\ A_{00} &= \frac{2(n_x - 1)^2 + 1}{6} = -A_{(n_x-1)(n_x-1)} \end{aligned}$$

avec  $c_n = 2$  si  $n = 0$  ou  $n = n_x - 1$ , et  $c_n = 1$  sinon.

Le système est maintenant discrétisé pour un conduit rectangulaire. Les conditions aux limites  $\partial\phi/\partial x = 0$  doivent être satisfaites aux points de collocation 0 et  $n_x - 1$ , et l'équation (3.13) doit, quant à elle, être satisfaite aux points de collocation  $j$  pour  $j = 1, \dots, n_x - 2$ .

Des simplifications sont alors possibles. Soit  $L$ , la matrice obtenue en discrétisant  $\mathcal{L}$  aux points intérieurs de collocation, et soit  $G_1$  et  $G_2$  les matrices représentant la multiplication par  $(2\omega U_0)/(h_s c_0^2)$  et  $(1 - U_0^2/c_0^2)/h_s^2$  aux points intérieurs de collocation, soit  $D_b$  la matrice des dérivées aux points extérieurs de collocation, obtenues à partir des valeurs de  $D_x$ , le problème discrétisé peut maintenant s'écrire de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_b & 0 \\ L & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} b_j \\ b_j^+ \end{pmatrix} = k \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_1 & G_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} b_j \\ b_j^+ \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

où  $b_j$  sont les valeurs de  $A_0^*$  aux points de collocation  $j$ , et  $b_j^+ = kb_j$ . Les valeurs de  $b_j^+$  sont nécessaires uniquement pour les points intérieurs, et non aux frontières où les conditions aux limites sont déjà fixées. La première colonne contient donc  $n_x$  colonnes, la seconde colonne comprend  $n_x - 2$  colonnes. La première ligne contient 2 lignes, la seconde,  $n_x - 2$  lignes, et la troisième  $n_x - 2$  lignes.  $b_j$  comprend une valeur pour chaque point de collocation et  $b_j^+$  contient des valeurs uniquement pour les points intérieurs de collocation.

La méthode développée par Ovenden [33] sur l'approche de Rienstra [38] permet un traitement correct des transitions de modes. Cette méthodologie peut être adaptée en principe aux conduits coudés à section variable moyennant des calculs délicats (Brambley [5]) mais des difficultés d'implémentation n'ont pas permis d'aborder ce point dans la thèse. Actuellement, le code prend en compte le changement des modes aux transitions par la modification du facteur de normalisation  $N(S)$  mais ne prend pas en compte les réflexions par transition passant/coupé. Des développements ultérieurs sont donc nécessaires.

Cependant, en dehors des transitions des modes le champ acoustique est correct.

### 3.4.3 Résultats et comparaisons

La modélisation choisie et implémentée fournit tous les modes passants ou coupés dans les canaux inter-aubes, dans les deux sens le long de l'abscisse curviligne et jusqu'à un rang choisi par l'utilisateur. Les modes sont visualisés par une cartographie de la pression sonore. Rappelons que pour un mode  $(n, j)$ ,  $n$  correspond au rang du mode dans la direction tan-

gentielle  $y$  et  $j$  au rang du mode selon la direction  $x$  normale à l'abscisse curviligne dans le plan méridien. L'impact de la prise en compte de la rotation du rouet sur la propagation est décrit dans ce paragraphe. Toutes les cartographies sont données à titre qualitatif, l'échelle n'est donc pas précisée.

### **Effet de la rotation du rouet**

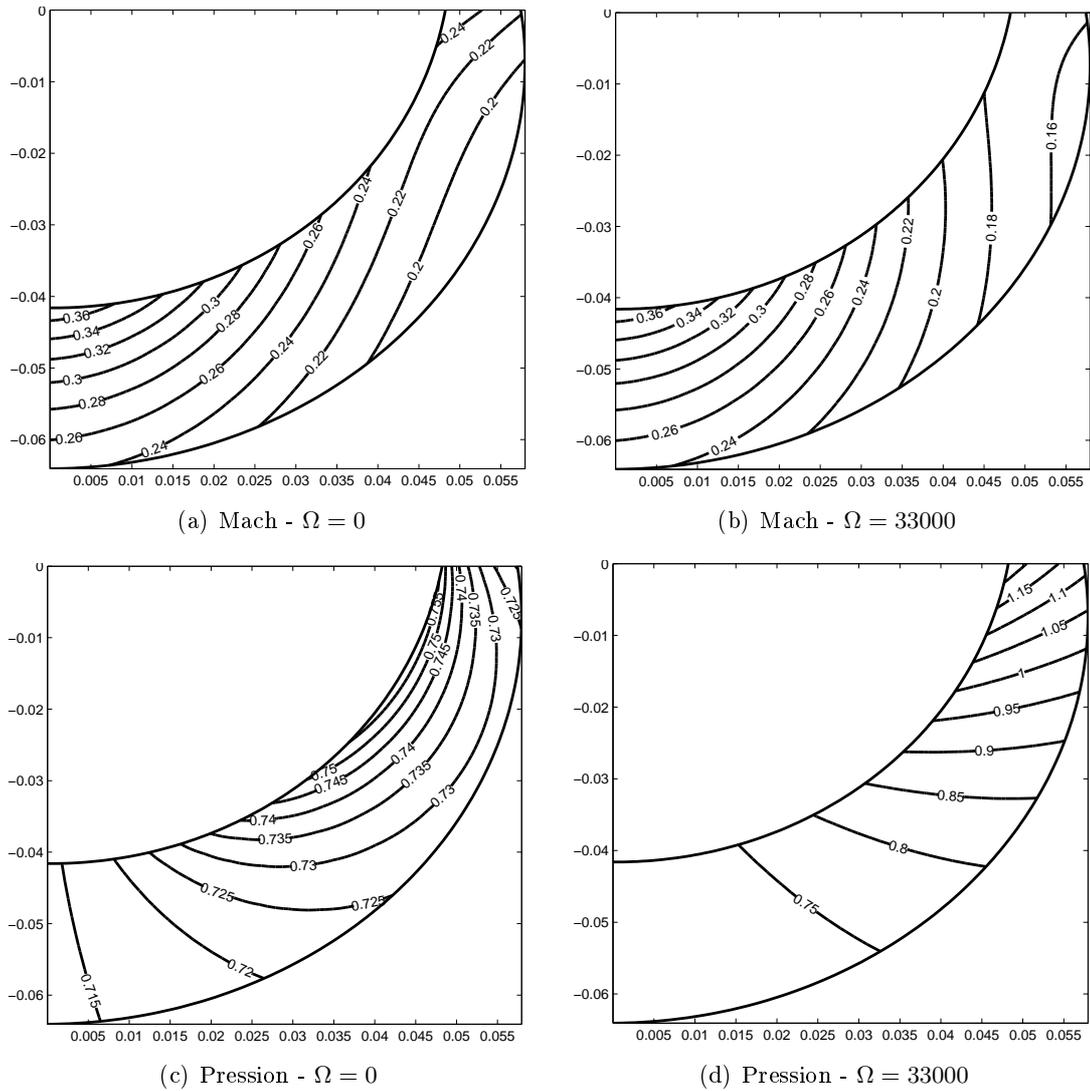
L'effet de la rotation est entendu dans ce chapitre comme la différence observée en intégrant ou non la centrifugation dans l'équation de Bernoulli (3.5), pour une même vitesse débitante. La prise en compte de la rotation ne change pas fondamentalement les profils de vitesse dans le plan méridien (Fig. 3.9(a), 3.9(b)) par rapport à ce que serait une évaluation la négligeant. En revanche, on remarque une augmentation nette de la pression vers la sortie des canaux inter-aubes lorsque l'on ajoute l'effet lié à la rotation de la roue. Rappelons que les efforts centrifuges agissent uniquement sur l'équation 3.4 régissant l'écoulement moyen. L'augmentation de pression dans le canal est une nécessité de consistance physique puisque le compresseur centrifuge est dimensionné à cette fin. Le profil de pression dans le canal avec rotation (Fig. 3.9(d)) représente bien ce qui est observé dans ce type de machine. Indirectement ces effets de la giration sur le champ moyen se répercutent sur les constantes de propagation des modes acoustiques. Ainsi des changements sont observés par exemple sur la partie réelle des valeurs propres  $k$  (Fig. 3.10).

L'effet de la rotation reste modeste sur la propagation modale dans les canaux inter-aubes. Étant donné que les équations régissant la propagation acoustique sont développées sur des profils de vitesse qui sont similaires, il n'y a pas de raison particulière pour que la propagation acoustique diffère notablement avec et sans rotation. Ceci est confirmé par les tracés de pression sonore pour différents modes (Fig. 3.11, 3.12).

L'impact de la rotation est plus marqué sur les modes coupés à une certaine position dans les canaux. La structure du champ peut être très différente lorsque l'on ajoute l'effet de la rotation sur les équations de l'écoulement moyen (Fig. 3.13). De plus, la rotation déplace l'abscisse des transitions, comme on l'observe sur la figure 3.10.

### **Effet de la vitesse débitante**

La vitesse débitante est définie ici par un nombre de Mach moyen en entrée d'air en amont du canal. La figure 3.14 donne les valeurs des nombres de Mach et de la pression dans un canal avec et sans écoulement avec une vitesse de rotation de 33000 tr/min. Il faut noter que les configurations de vitesse de rotation sans écoulement débitant ne sont pas réalistes mais permettent de voir l'impact de l'écoulement débitant seul. La vitesse débitante a un impact important sur la propagation des ondes acoustiques dans les canaux inter-aubes. En comparant les figures 3.15(a) et 3.15(b) concernant les valeurs propres déterminées par le calcul, on remarque que davantage de modes sont passants lorsque l'écoulement débitant augmente. Les fréquences de coupure sont déplacées vers des valeurs inférieures. Les résultats obtenus sont semblables aux résultats connus pour les guides d'onde droits classiques. Lorsque la propagation acoustique est dans le sens de l'écoulement débitant, les fronts d'onde ont tendance à s'écarter (Fig. 3.16), alors que lorsqu'elle est dans le sens contraire, les fronts d'onde ont tendance à se resserrer (Fig. 3.17). On note également une restructuration des fronts



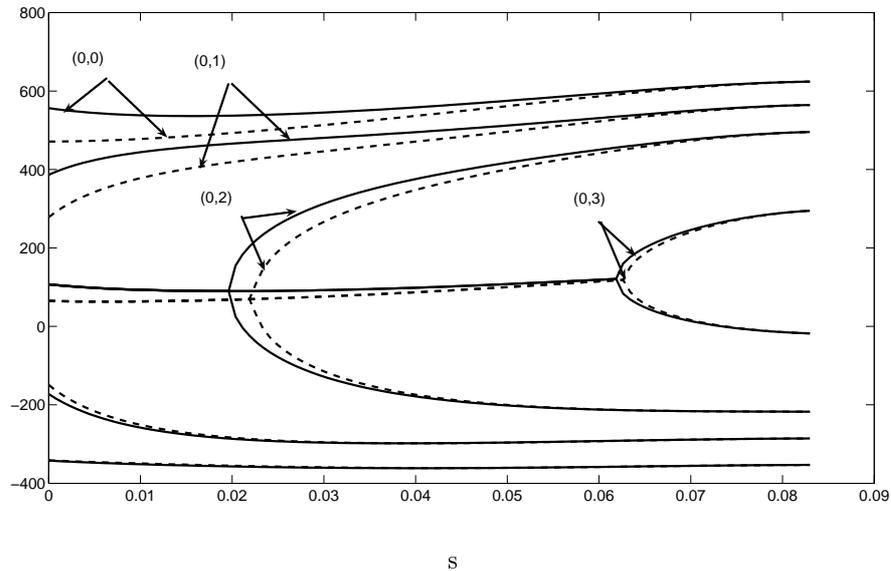


FIGURE 3.10 – Partie réelle des valeurs propres déterminées sans rotation ( $\Omega = 0$  - ligne continue) et avec rotation ( $\Omega = 33000$  - ligne pointillée),  $s = 0$  correspond au côté diffuseur.  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $M = 0.3$

d'onde assez surprenante lorsque l'écoulement a un nombre de Mach de 0.7. Les fluctuations acoustiques auraient tendance à se concentrer au carter en entrée d'air, lorsque les modes remontent l'écoulement depuis le diffuseur (Fig. 3.17(b) et 3.17(d)). Pour essayer d'expliquer ce phénomène, une superposition de la cartographie de la pression acoustique et des lignes d'égale vitesse moyenne est réalisée sur la figure 3.18. On constate que le comportement du mode peut être expliqué par une réfraction due à la poche de survitesse en entrée du canal, du côté du carter.

Lorsque les modes sont coupés entre l'entrée et la sortie du canal (Fig. 3.19), l'écoulement a tendance à étendre le champ sonore plus loin en aval, par convection. Ces résultats étaient attendus en tant que comportements typiques des guides d'onde.

### Comparaison avec un logiciel commercial

Un certain nombre d'hypothèses fortes dans le modèle analytique étant discutables, des calculs complémentaires ont été réalisés grâce au logiciel ACTRAN/TM [1]. Les comparaisons sont faites ici sans écoulement, ce qui revient à évaluer la géométrie en premier lieu [44]. Il convient de noter que les conditions aux limites implémentées dans ACTRAN/TM peuvent ne pas être physiques, car elles ont été choisies pour être le plus compatibles possible avec les hypothèses prises pour le calcul analytique. Un mode unique est donc imposé à la sortie du canal et une condition de non réflexion est traduite en entrée du canal.

Une première comparaison est montrée ici pour le mode incident (0,0) injecté du côté du diffuseur. Les solutions analytiques pour les modes (0,0) et (0,1) sont données pour mémoire sur les figures 3.20(a) et 3.20(b). La solution numérique est quant à elle donnée sur les figures 3.21(a) et 3.21(b). Plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord la simulation nu-

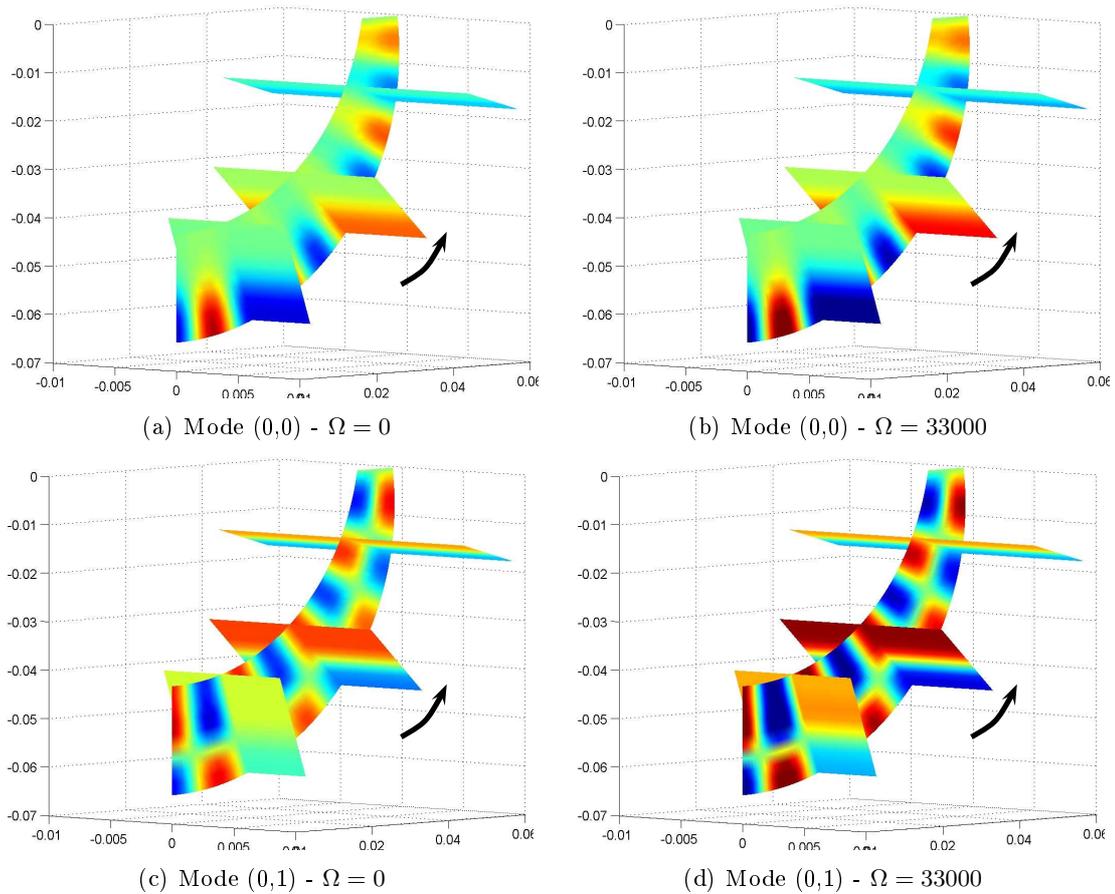


FIGURE 3.11 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air jusqu'au diffuseur -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique.

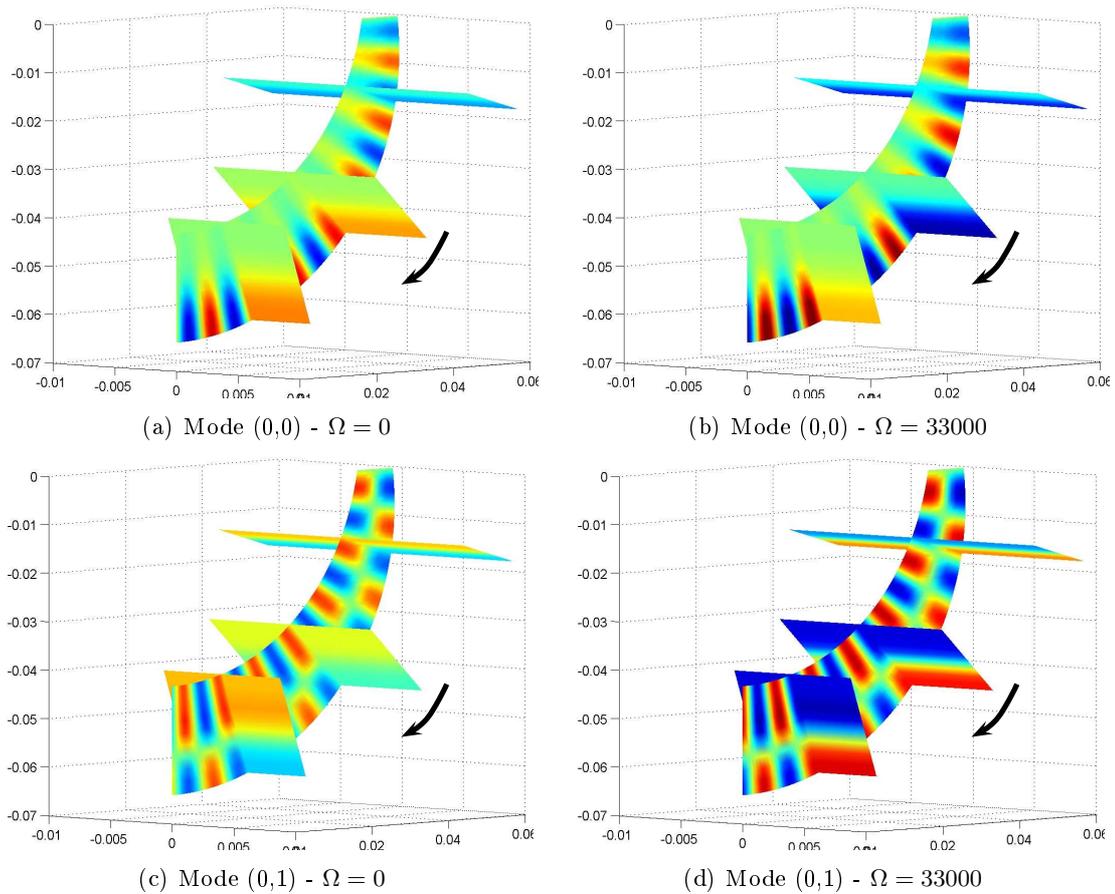


FIGURE 3.12 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes se propageant vers l'amont depuis le diffuseur vers l'entrée d'air -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique.

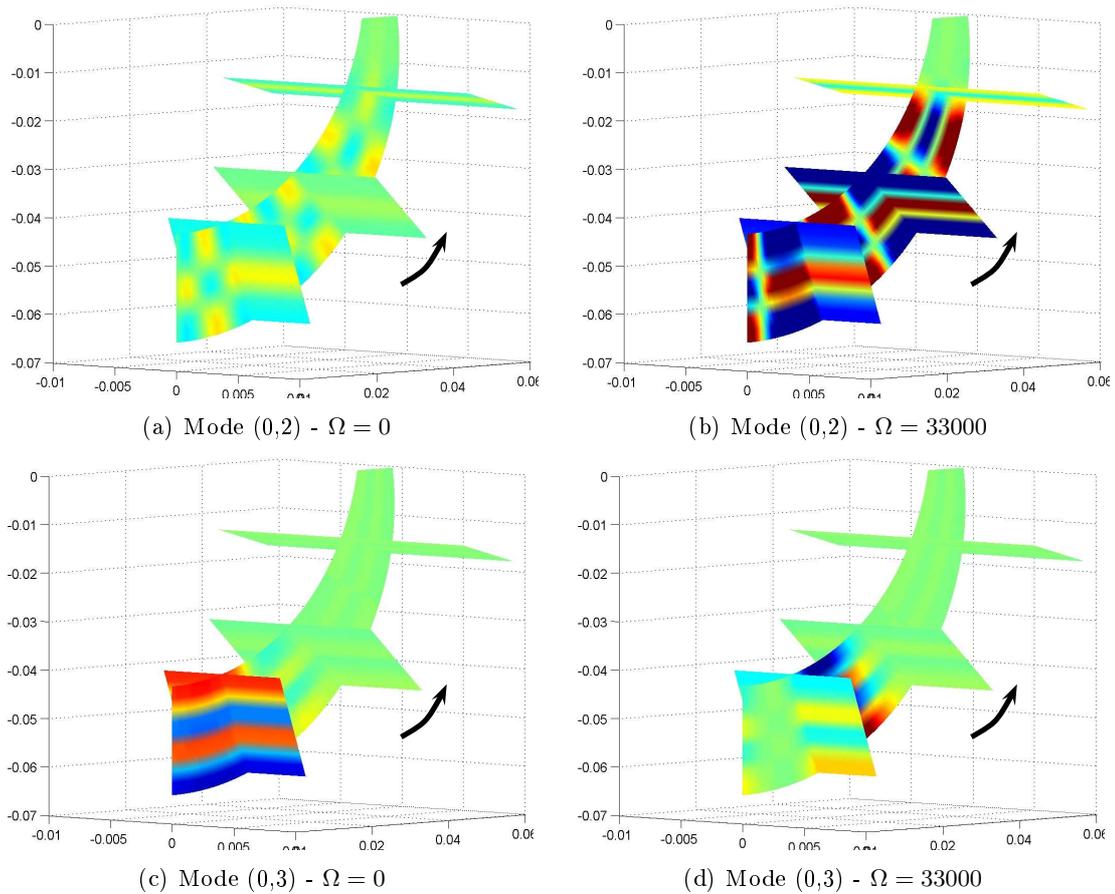


FIGURE 3.13 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans rotation ( $\Omega = 0$ ) et avec rotation ( $\Omega = 33000$ ) des modes coupés se propageant vers l'aval depuis l'entrée d'air vers le diffuseur -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $M = 0.3$ . La flèche représente le sens de propagation acoustique.

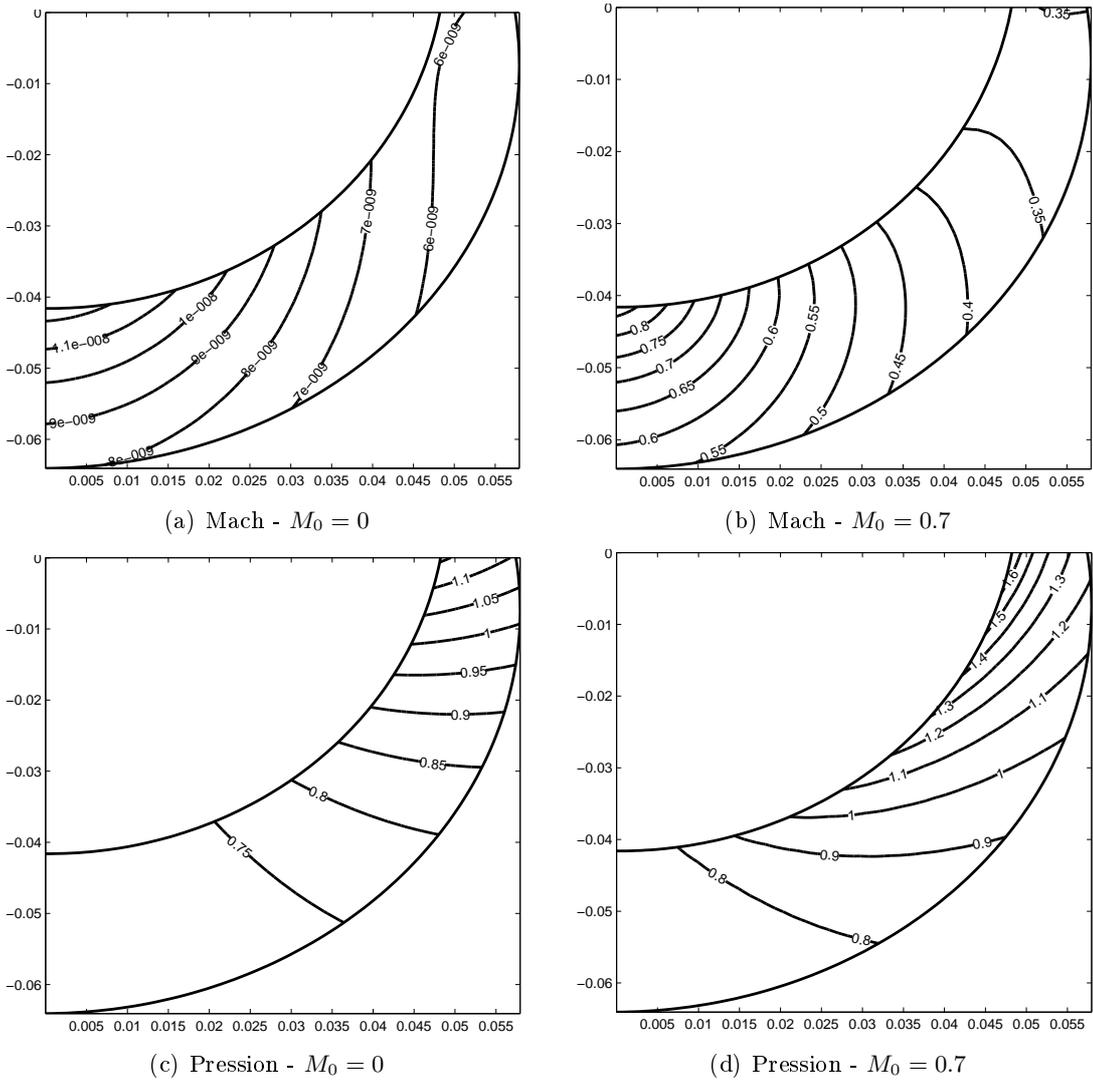


FIGURE 3.14 – Cartographie du nombre de Mach et de la pression dans le plan méridien d'un canal sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $\Omega = 33000$  tr/min

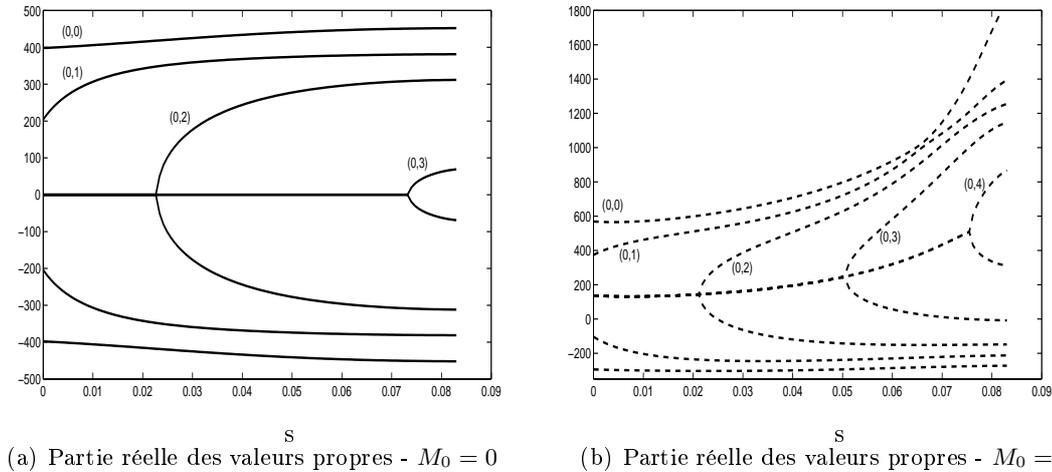


FIGURE 3.15 – Partie réelle des valeurs propres déterminées sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ),  $s = 0$  correspond au coté diffuseur.  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $\Omega = 33000$  tr/min

mérique fait état d'un champ qui varie peu dans la direction tangentielle (normale au plan méridien), hormis des effets de coins visibles sur la figure 3.21(b). Ceci confirme la quasi-homogénéité tangentielle imposée par la factorisation selon la variable  $y$ . Ensuite, les variations transverses (dans le plan méridien) produites par le code ne peuvent pas être expliquées par la présence d'un mode unique dans le canal. La comparaison entre les résultats numériques et le calcul analytique suggère donc l'existence de couplages inter-modaux dans le canal inter-aubes, attribués à la courbure. Sur la cartographie de pression de la figure 3.20(b), le mode (0,1) est coupé dans la partie rectangulaire de sortie du canal, là où il est imposé ; il s'atténue donc dans un premier temps mais devient passant lors de sa propagation par l'effet de changement de section. À ce titre il pourrait contribuer au champ sonore. Le modèle analytique développé lors de ce travail ne prend pas en compte les couplages entre les modes. En effet, la technique de résolution a pour principe de suivre l'évolution d'un mode unique le long d'une géométrie variable indépendamment des autres modes. Cependant, les conversions modales sont attendues dans des géométries courbées et à sections variables à l'endroit des transitions passant/coupé d'un mode. Il n'est pas possible de les prendre en compte par l'approche en échelles multiples réduite au premier ordre.

Pour statuer sur d'éventuels couplages inter-modaux, un test tout à fait indicatif a été effectué en combinant les cartographies des champs de pression des modes (0,0) et (0,1) sur la figure 3.21(c) et en jouant de façon arbitraire sur les amplitudes et les phases relatives. Bien que les résultats analytique et numérique ne coïncident pas, certaines caractéristiques comme le décalage des zones de surpression et dépression dans la direction transverse sont reproduites (pointillés noirs sur les figures 3.21(a) et 3.21(c)). Les structures de phase de la propagation modale sont très claires lorsque l'on suit un mode unique dans le canal (Fig. 3.20) mais les fronts d'onde montrent une distorsion nette lorsque l'on combine les modes ou sur la propagation par le logiciel ACTRAN (Fig. 3.21). Ceci suggère l'existence des conversions modales

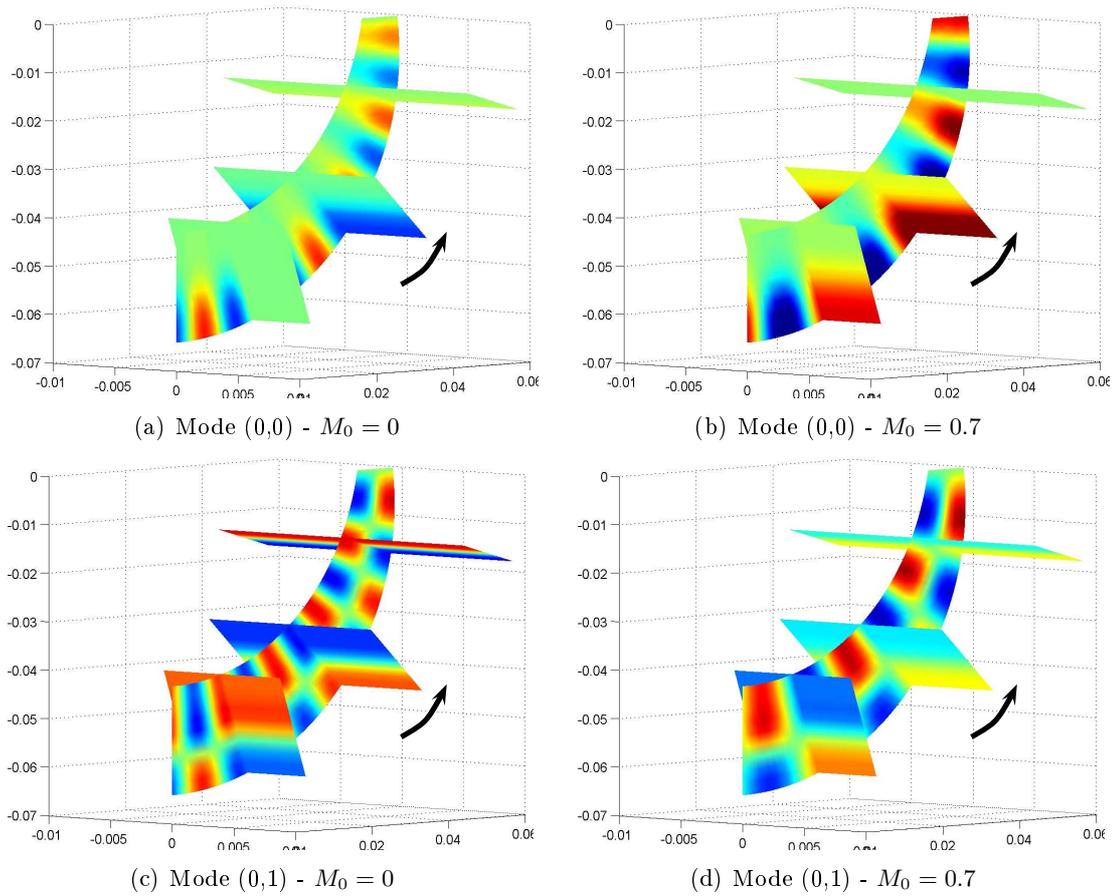


FIGURE 3.16 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes se propageant vers l’aval depuis l’entrée d’air jusqu’au diffuseur -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $\Omega = 33000$  tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.

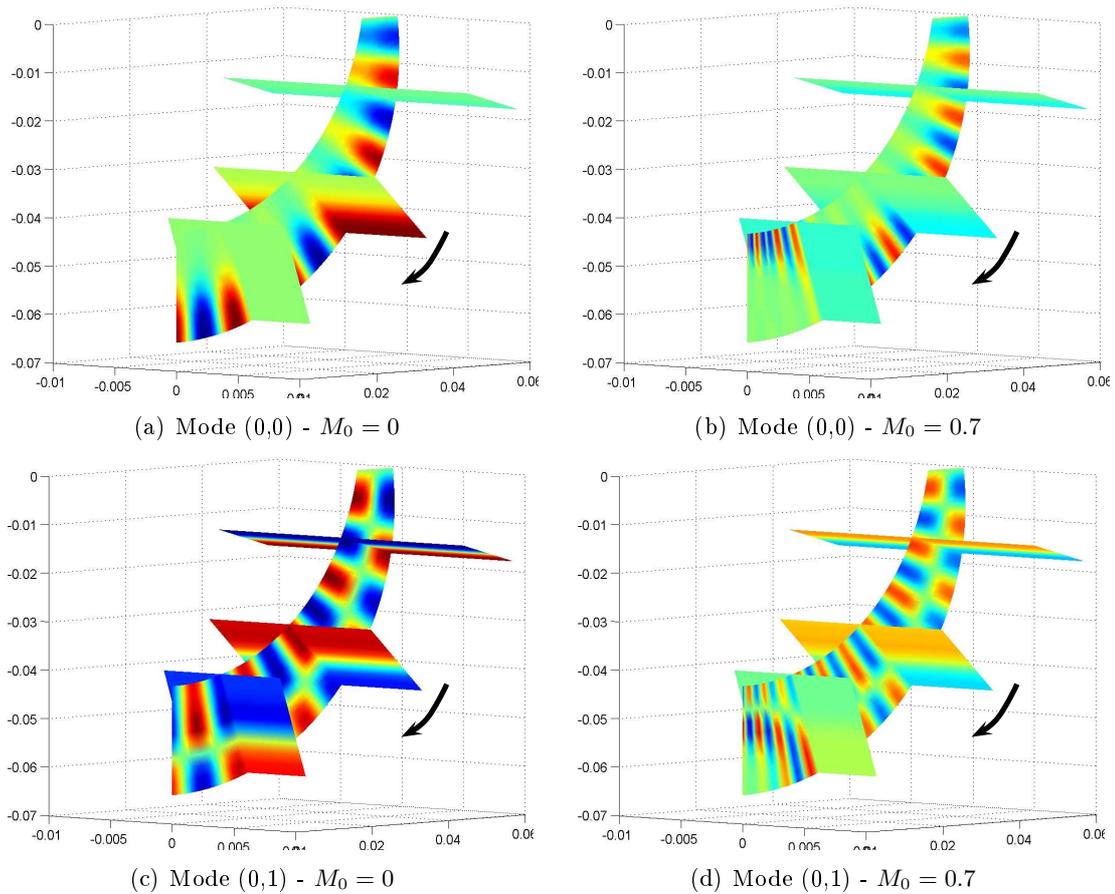


FIGURE 3.17 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes se propageant vers l'amont depuis le diffuseur vers l'entrée d'air -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $\Omega = 33000$  tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.

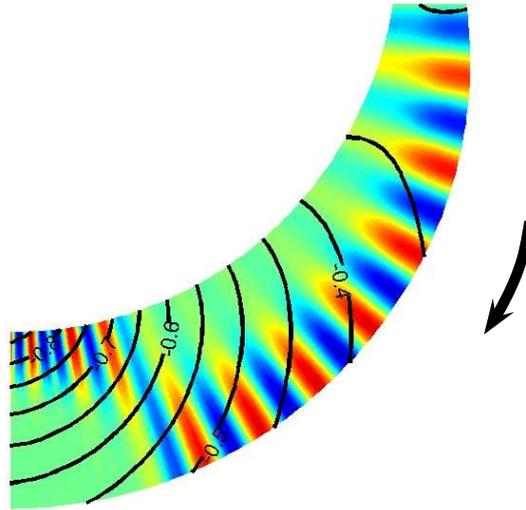


FIGURE 3.18 – Superposition du champ de pression sonore du mode  $(0, 1)$  venant du diffuseur avec les lignes iso-Mach d'un écoulement opposé rapide ( $M = 0.7$ )

fortes à l'intérieur du canal, dues à la courbure. Il est à noter que dans les calculs ACTRAN, des modes différents de ceux injectés sont automatiquement générés par les changements de section et de courbure de la géométrie traitée.

On peut d'ores et déjà conclure que les couplages inter-modaux ne peuvent pas être négligés lorsque la courbure est importante ou que la variation de section est rapide, ce qui est le cas ici. Il conviendrait donc de pousser les développements analytiques à l'ordre suivant pour inclure les couplages de modes dans l'approche par échelles multiples, ou de revenir à l'approche multimodale.

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre traitait d'un point fondamental pour la transmission du son dans un rouet centrifuge, à savoir la propagation le long des canaux inter-aubes. Le choix s'est porté sur une approche modale réduite au premier ordre d'un développement en échelles multiples, adaptée des travaux de Brambley & Peake [5] essentiellement pour des raisons de simplicité et de compatibilité avec les modèles complémentaires du chapitre suivant. Des tests effectués mode par mode ont mis en évidence l'impact de la giration de l'écoulement moyen et l'effet de la vitesse débitante sur la propagation. Un test préliminaire de comparaison du modèle avec le logiciel commercial ACTRAN/TM [1] a montré l'importance des couplages inter-modaux lors de la propagation acoustique dans une géométrie complexe telle que celle traitée. Ces couplages sont pour l'instant ignorés. Leur prise en compte pourrait justifier une extension du développement en échelles multiples aux ordres supérieurs. Une autre solution serait de reprendre la modélisation multi-modale moyennant un coût de calcul accru. Un autre point

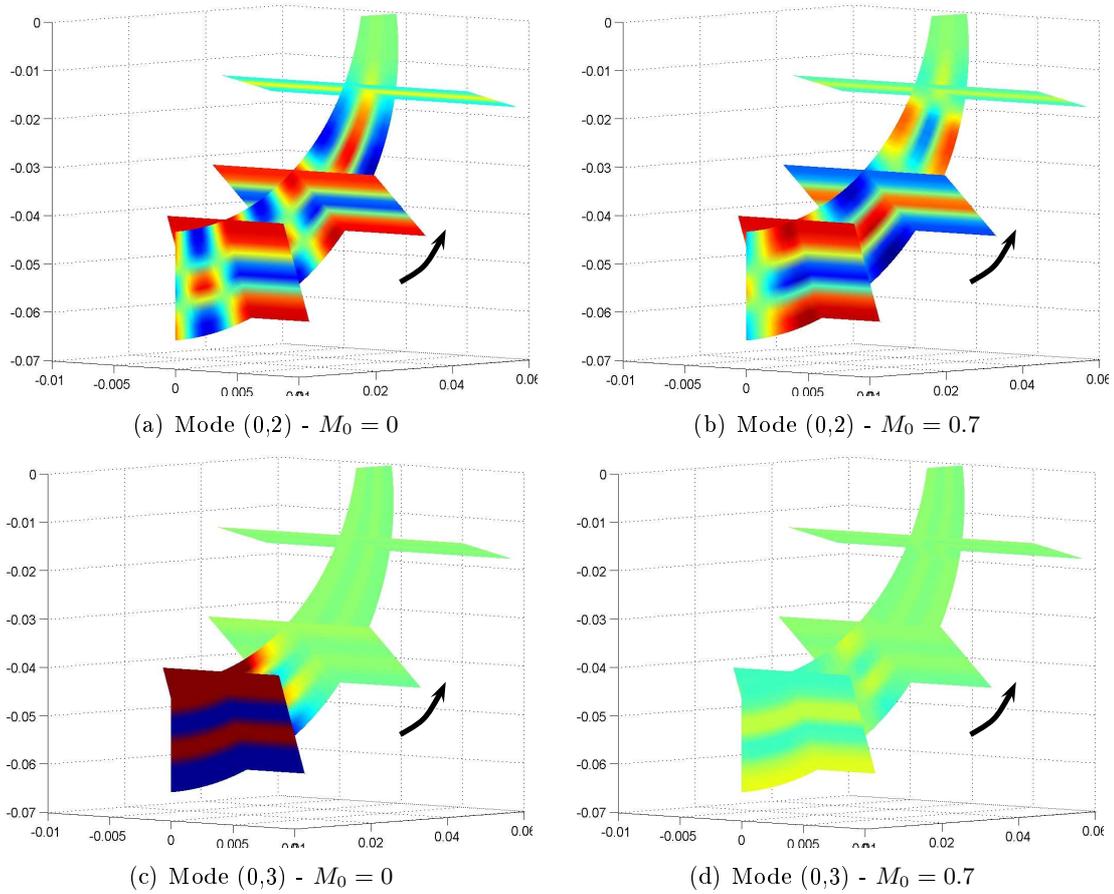


FIGURE 3.19 – Cartographie de la partie réelle de la pression sonore dans un canal. Comparaison sans écoulement ( $M_0 = 0$ ) et avec écoulement ( $M_0 = 0.7$ ) des modes coupés se propageant vers l’aval depuis l’entrée d’air vers le diffuseur -  $f = 24000$  Hz -  $m = 0$  -  $\Omega = 33000$  tr/min. La flèche représente le sens de propagation acoustique.

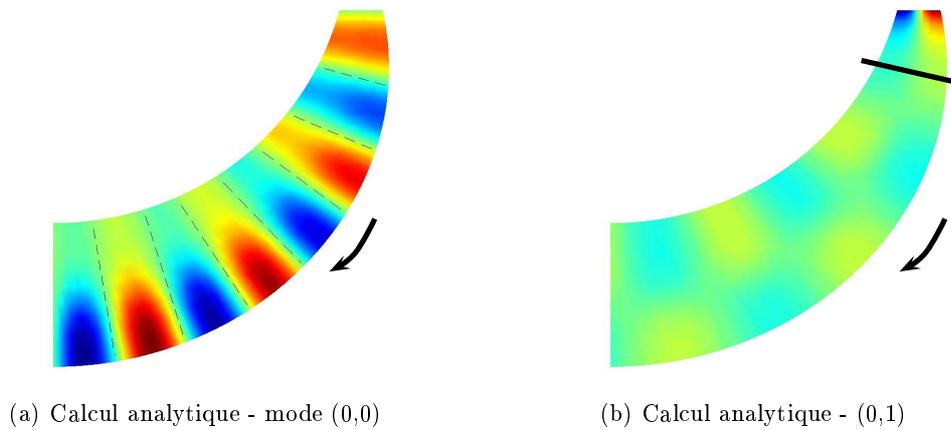


FIGURE 3.20 – Cartographie de la pression acoustique pour une onde se propageant depuis le diffuseur vers l’entrée d’air - sans écoulement. (a) : mode (0,0) ; (b) : mode (0,1).

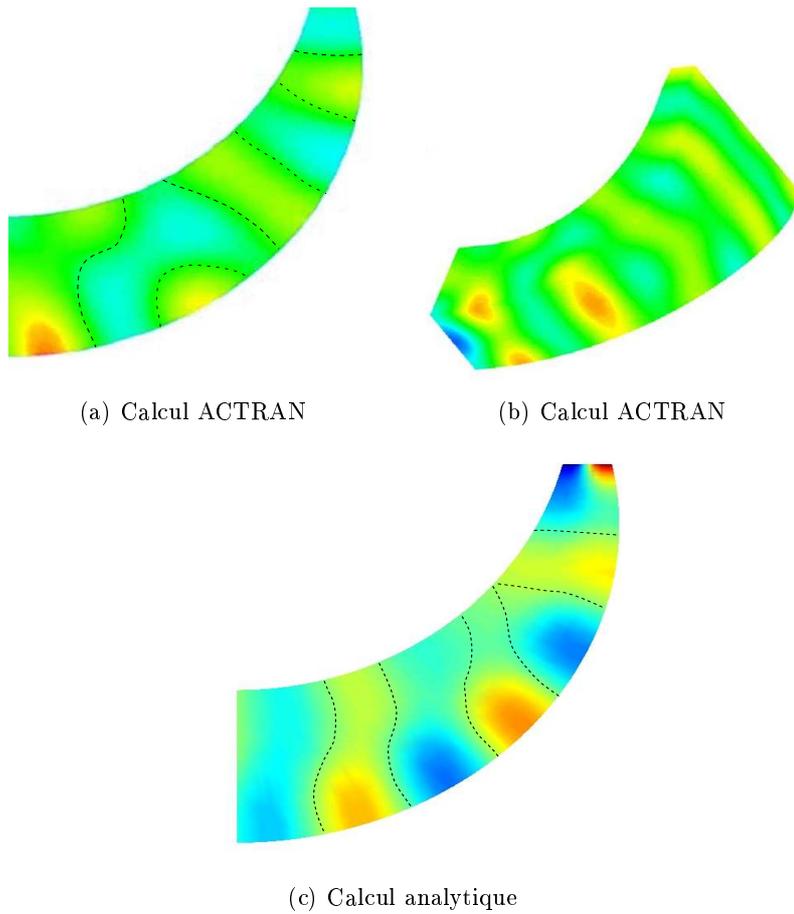


FIGURE 3.21 – Cartographie de la pression acoustique pour une excitation par le mode  $(0,0)$  depuis le diffuseur vers l'entrée d'air - Calcul sans écoulement. Simulation Actran en coupe (a) et en projection isométrique (b) ; (c) : Calcul analytique synthétisé avec une superposition arbitraire des modes  $(0,0)$  et  $(0,1)$ .

lié à la technique multimodale est le recours à une impédance en sortie acoustique du canal. Cette dernière peut être déterminée en principe grâce au modèle de raccordement modal à l'interface développé dans le chapitre suivant. Ces voies d'amélioration devront être évaluées dans une étude ultérieure.



## Chapitre 4

# Raccordement modal sur un réseau de canaux - Application à l'entrée d'air d'un rouet centrifuge

### 4.1 Introduction

Lorsque le champ sonore s'est propagé depuis la périphérie le long des canaux inter-aubes d'un rouet centrifuge, il se recompose à leurs extrémités pour continuer à se propager dans le conduit d'entrée d'air jusqu'à l'extérieur. C'est cette recombinaison qui fait l'objet de la suite du mémoire.

Le sujet est rendu délicat par la géométrie de la roue et par sa rotation. C'est pourquoi cette étude a été effectuée par étape, en commençant d'abord par une géométrie simplifiée en deux dimensions (4.2) sans tenir compte de la rotation. L'ajout de cette dernière dans les équations de raccordement engendre une difficulté mathématique dont aucune solution satisfaisante n'a pu être identifiée lors de ce travail de thèse. Une solution partielle est apportée lorsque l'on ne tient pas compte de la vitesse débitante mais uniquement de l'effet de rotation (4.2.4), ou l'inverse, car alors les conditions de raccordement sont clairement établies. L'étude a ensuite été reproduite en trois dimensions avec un écoulement axial (4.3) afin de se rapprocher progressivement de la géométrie réelle de l'entrée d'air d'un compresseur centrifuge. Une étude comparative et une analyse des différents résultats sont proposées dans la dernière partie de ce chapitre.

### 4.2 Modèle à deux dimensions

#### 4.2.1 Formulation du problème

L'impact des sillages du rouet sur les aubes du diffuseur engendre des modes acoustiques spiraux qui se traduisent par des excitations acoustiques identiques déphasées dans les différents canaux inter-aubes [42]. Une fois propagées jusqu'à l'entrée du rouet, ces différentes excitations se recomposent dans le conduit d'entrée d'air. Pour une première analyse, le mécanisme peut être décrit dans un cadre bidimensionnel, en représentant le rouet par un réseau de canaux plans parallèles, conformément à la figure 4.1.

Les parois des canaux sont supposées parfaitement minces et rigides et la périodicité du réseau est assurée en considérant un nombre infini de canaux numérotés par un indice  $m$ . L'interface est définie par l'axe  $z$  et l'axe  $x$  est orienté par convention du côté de l'aspiration, donc dans le sens inverse de l'écoulement débitant, supposé uniforme de nombre de Mach  $M$ . La rotation de la roue, à la vitesse angulaire  $\Omega$ , prise en compte par la suite, est traduite par un glissement du demi-espace ( $x > 0$ ), de vitesse  $-\Omega R_0 \mathbf{z}$ , c'est-à-dire que le problème est posé dans le référentiel lié au réseau.

Une onde incidente (i) constituée par un mode de propagation guidé quelconque est imposée dans chaque canal ( $x < 0$ ). Le déphasage entre les différents canaux intervient comme paramètre. Des ondes réfléchies (r) sont générées dans les canaux et des ondes obliques (t) sont transmises sous différents angles dans le demi-espace ( $x > 0$ ). Une condition de périodicité est imposée selon  $z$  afin de tenir compte de la géométrie annulaire de départ.

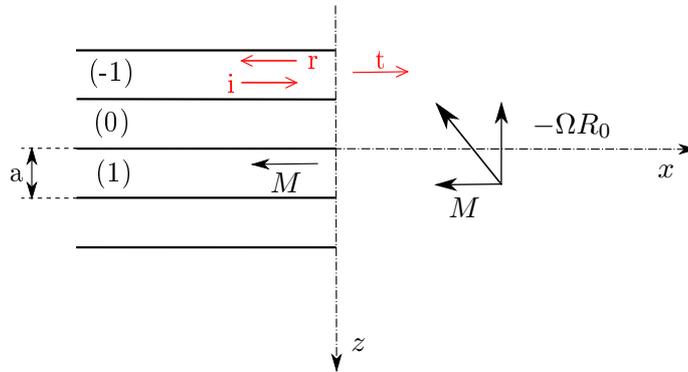


FIGURE 4.1 – Réflexion et transmission à l'interface entre un réseau de canaux plans à parois minces et rigides et un milieu non borné. Repère lié au réseau.

Le problème est ici abordé par étapes, en prenant d'abord en compte une seule composante de vitesse. Cette hypothèse n'est pas réaliste dans l'entrée d'air d'un rouet centrifuge mais permet d'appréhender l'écriture des équations de raccordement. Nous considérons par la suite que les équations sont correctes à partir du moment où le bilan d'énergie est nul. L'écriture des équations de raccordement à l'interface dans le cas général reste un problème ouvert et peut dépendre des hypothèses consenties sur le comportement du fluide à son voisinage. Dans notre configuration, à l'interface  $x = 0$ , des équations de continuité sont écrites sur la pression et la vitesse normale lorsque la roue n'est pas en rotation ( $\Omega = 0$ ), et sur la pression et le déplacement axial relatif si l'on tient compte du mouvement de la roue ( $\Omega \neq 0$ ) sans vitesse débitante. Un système d'équations sur les coefficients des modes (coefficients de réflexion et de transmission) en est déduit.

Ce type de problème peut être formulé par raccordement de solutions élémentaires, ou modes. Deux techniques peuvent être utilisées pour résoudre le système linéaire de rang infini obtenu, dont les inconnues sont les coefficients des modes. La plus directe consiste à procéder à une projection modale qui revient à inverser le système matriciel équivalent après troncature. Une autre consiste à identifier les coefficients aux résidus d'une fonction complexe particulière. Les deux techniques sont héritées de la théorie des réseaux électromagnétiques (Mitra & Lee [31]). Étendues ici pour tenir compte de la présence d'un écoulement, elles sont développées dans la suite. Une tentative pour prendre en compte la rotation de la roue est proposée en

deux dimensions (4.2.4). Ces résultats sont comparés dans la dernière partie (4.4).

### Formulation sans écoulement

Il s'agit de raccorder entre elles des solutions fondamentales de l'équation de Helmholtz à la pulsation  $\omega$ , sachant que par convention la dépendance temporelle des champs est supposée en  $e^{-i\omega t}$  (la convention choisie ici est différente de celle choisie au chapitre précédent) et que la présence des écoulements modifie la forme de l'équation dans chaque demi-espace. Soit donc l'onde incidente constituée par le mode de propagation guidée d'ordre  $n_i$  et de phase  $e^{imu}$  dans le canal de rang  $m$ , où  $u = k_0 a \sin \Theta_0$ ,  $k_0 = \omega/c_0$  désignant le nombre d'onde total. Ce déphasage particulier tendrait à forcer de façon privilégiée l'onde oblique d'angle  $\Theta_0$  dans le demi espace  $x > 0$ , dans le cas d'une excitation particulière par l'onde plane ( $n_i = 0$ ). Dans la pratique, le paramètre  $\alpha = uR_0/a$ ,  $R_0$  étant le rayon de la roue, est utilisé comme donnée d'entrée au code de calcul.

En absence d'écoulement le potentiel acoustique  $\phi$  choisi ici comme variable satisfait l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k_0^2 \phi = 0$$

Le potentiel acoustique correspondant à l'onde incidente s'écrit :

$$\phi_i = e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i \pi}{a} (z - ma) \right] e^{ik_{n_i} x} \quad x < 0, \quad ma < z < (m+1)a,$$

avec  $k_{n_i} = \sqrt{k_0^2 - (n_i \pi/a)^2}$ . Le mode incident est supposé passant, donc  $k_{n_i}$  est un nombre réel positif. La réflexion dans le canal de rang  $m$  comprend *a priori* tous les modes possibles et son potentiel est :

$$\phi_r = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m \cos \left[ \frac{n\pi}{a} (z - ma) \right] e^{-ik_{n_i} x} \quad x < 0, \quad ma < z < (m+1)a,$$

en posant  $k_n = \sqrt{k_0^2 - (n\pi/a)^2}$  pour un mode passant et  $k_n = i\sqrt{(n\pi/a)^2 - k_0^2}$  pour un mode coupé. Enfin l'onde transmise à l'extérieur du réseau pour  $x > 0$  comporte toutes les ondes planes obliques susceptibles de s'accorder avec les ondes précédentes sur l'interface, conformément au principe de trace [31]. Elle prend la forme d'une décomposition dite de Floquet :

$$\phi_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s e^{i\alpha_s z} e^{iK_s x} \quad x > 0$$

avec

$$\alpha_s = k_0 \sin \Theta_0 + s \frac{2\pi}{a} = \frac{u + 2s\pi}{a}$$

et  $K_s = \sqrt{k_0^2 - \alpha_s^2}$  ou  $K_s = i\sqrt{\alpha_s^2 - k_0^2}$  selon que l'onde transmise d'ordre  $s$  est rayonnante ou évanescente. Pour les besoins de la résolution par l'identification des résidus, on utilisera aussi indifféremment les notations :

$$\gamma_n = [(n\pi/a)^2 - k_0^2]^{1/2} \quad \Gamma_s = [\alpha_s^2 - k_0^2]^{1/2}$$

telles que  $\gamma_n = -ik_n$ ,  $\Gamma_s = -iK_s$ , ou encore  $k_n = i\gamma_n$  et  $K_s = i\Gamma_s$ .

Dans un milieu au repos, la pression  $p'$  en régime harmonique s'exprime à partir du potentiel  $\phi$  par la relation  $p' = i\rho_0\omega\phi$ , et la vitesse  $\mathbf{v}'$  par  $\mathbf{v}' = \text{grad}\phi$ . La continuité de la pression (respectivement de la vitesse normale) à l'interface  $x = 0$  se traduit par l'égalité de la pression (vitesse normale) de l'onde transmise, d'une part, et de la pression (vitesse normale) cumulée des ondes incidentes et réfléchies, d'autre part. Il est suffisant de traiter le problème pour le canal de référence  $m = 0$ . Le système d'équations obtenu sur les coefficients  $C_n^m$  et  $T_s$  est constitué par :

– l'équation de continuité de la pression acoustique

$$e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i\pi}{a}(z - ma) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m \cos \left[ \frac{n\pi}{a}(z - ma) \right] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s e^{i\alpha_s z}$$

– l'équation de continuité de la vitesse normale acoustique

$$ik_{n_i} e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i\pi}{a}(z - ma) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (-ik_n) C_n^m \cos \left[ \frac{n\pi}{a}(z - ma) \right] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (iK_s) T_s e^{i\alpha_s z}$$

En divisant ces relations par  $e^{imu}$  et compte tenu du fait que  $\alpha_s z - mu = \alpha_s(z - ma)$ , modulo  $2\pi$ , on obtient des expressions où ne figure que l'argument  $z - ma$ . Il s'ensuit que l'on peut écrire  $C_n^m = C_n^0 e^{imu}$  pour toutes les valeurs de  $n$  et  $m$ . Les champs réfléchis sont tous identiques dans les différents canaux mais déphasés de la même quantité  $u$ , par voie de continuité avec l'onde incidente. Il suffit donc de traiter le problème du canal de référence  $m = 0$ . Ainsi le système d'équations précédent devient :

$$\cos \left( \frac{n_i\pi}{a} z \right) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} z \right) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s e^{i\alpha_s z} \quad (4.1)$$

$$ik_{n_i} \cos \left( \frac{n_i\pi}{a} z \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-ik_n) C_n^0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} z \right) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (iK_s) T_s e^{i\alpha_s z} \quad (4.2)$$

### Formulation avec écoulement purement axial ( $M \neq 0$ , $\Omega = 0$ )

Le potentiel acoustique doit satisfaire l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2ik_0 M \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_0^2 \phi = 0$$

Les ondes incidentes réfléchies et transmises sont écrites de la même manière que sans écoulement, seules les valeurs de  $u$ , de  $\alpha_s$  et des nombres d'onde sont changées. On pose :

$$u = \frac{k_0 a \sin \Theta_0}{1 - M \cos \Theta_0}, \quad \alpha_s = \frac{k_0 \sin \Theta_0}{1 - M \cos \Theta_0} + s \frac{2\pi}{a},$$

puis, en notant  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ ,

$$k_{n_i} = \frac{k_0 M + \sqrt{k_0^2 M^2 - \beta^2 \left[ (n_i \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}}{\beta^2}$$

$$k_n = \frac{-k_0 M + \sqrt{k_0^2 M^2 - \beta^2 \left[ (n \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}}{\beta^2}$$

$$K_s = \frac{k_0 M + \sqrt{k_0^2 M^2 - \beta^2 (\alpha_s^2 - k_0^2)}}{\beta^2}$$

Les relations qui lient le potentiel acoustique à la pression et à la vitesse dans un écoulement uniforme de vitesse  $U = M c_0$  s'écrivent :

$$p' = -\rho_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \text{grad} \phi \right), \quad \mathbf{v}' = \nabla \phi.$$

Les équations de continuité deviennent :

– pour la pression acoustique

$$(k_0 + k_{n_i} M) \cos \left( \frac{n_i \pi}{a} z \right) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 (k_0 - k_n M) \cos \left( \frac{n \pi}{a} z \right) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s (k_0 + K_s M) e^{i \alpha_s z} \quad (4.3)$$

– pour la vitesse normale

$$i k_{n_i} \cos \left( \frac{n_i \pi}{a} z \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-i k_n) C_n^0 \cos \left( \frac{n \pi}{a} z \right) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (i K_s) T_s e^{i \alpha_s z} \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Première technique de résolution : projection modale

#### Sans écoulement

Le système d'équations à résoudre est celui constitué des équations 4.1 et 4.2. Une condition de périodicité est imposée dans la représentation bidimensionnelle développée au rayon  $R_0$ , afin de respecter la géométrie cylindrique du problème initial. Naturellement, on pose :

$$z = R_0 \theta, \quad a = \frac{2\pi R_0}{B},$$

où  $B$  est le nombre d'aubes du rouet et  $\theta$  la coordonnée angulaire.

Afin de simplifier les sommes infinies, une technique consiste à effectuer une projection sur la base modale d'un canal :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos \left( \frac{\mu B \theta}{2} \right) (\bullet) d\theta$$

où  $(\bullet)$  désigne la quantité sur laquelle s'applique l'opérateur. Après calculs (annexe B), le système d'équations obtenu est le suivant :

$$\frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) + C_{\mu}^0 \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \quad (4.5)$$

$$k_{n_i} \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) - k_n C_{\mu}^0 \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} K_s T_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \quad (4.6)$$

avec

$$\Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} = \frac{i\alpha_s R_0 \left[ 1 - (-1)^{\mu} e^{i\alpha_s R_0 \frac{2\pi}{B}} \right]}{\left[ (\alpha_s R_0)^2 - \left( \frac{\mu B}{2} \right)^2 \right]}. \quad (4.7)$$

L'élimination du coefficient  $C_{\mu}^0$  entre les équations 4.5 et 4.6 mène à une unique équation sur les coefficients  $T_s$  qui peut être résolue à l'aide d'une projection modale ou inversion de matrice. Les coefficients  $C_{\mu}^0$  peuvent alors être déduits des équations 4.5 et/ou 4.6.

### Avec écoulement

La résolution en présence d'un écoulement se fait de manière identique. Le système d'équations à résoudre à partir des équations 4.3 et 4.4 devient :

$$(k_0 + k_{\mu} M) \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) + C_{\mu}^0 (k_0 - k_{\mu} M) \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s (k_0 + K_s M) \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu}$$

$$k_{\mu} \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) - k_{\mu} C_{\mu}^0 \frac{\pi}{B}(1 + \delta_{\mu 0}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} K_s T_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu}$$

avec

$$\Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} = \frac{i\alpha_s R_0 \left[ 1 - (-1)^{\mu} e^{i\alpha_s R_0 \frac{2\pi}{B}} \right]}{\left[ (\alpha_s R_0)^2 - (\mu B/2)^2 \right]}.$$

## 4.2.3 Deuxième technique de résolution : identification de résidus

### Sans écoulement

L'un des moyens de réduire le système composé des équations 4.1 et 4.2, proposé par Mitra & Lee [31] dans le cas d'une onde plane incidente dans les canaux et aisément généralisable aux modes supérieurs, consiste à introduire un produit scalaire par le biais d'une projection intégrale sur un des angles des ondes obliques transmises. Pour ce faire, on multiplie par  $e^{-i\alpha_{s_0} z}$  et on intègre sur la largeur du canal, de 0 à  $a$ . Il en découle les propriétés suivantes :

$$\int_0^a e^{i(\alpha_s - \alpha_{s_0})z} dz = a \delta_{s, s_0}$$

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) e^{-i\alpha_{s_0} z} dz = i\alpha_{s_0} \frac{[1 - (-1)^n e^{-iu}]}{K_{s_0}^2 - k_n^2}$$

En notant désormais  $s$  en lieu et place de  $s_0$ , les équations 4.1 et 4.2 deviennent, une fois projetées :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 \frac{[1 - (-1)^n e^{-iu}]}{K_s^2 - k_n^2} + \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{K_s^2 - k_{n_i}^2} = -i \frac{aT_s}{\alpha_s} \quad (4.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n C_n^0 \frac{[1 - (-1)^n e^{-iu}]}{K_s^2 - k_n^2} - k_{n_i} \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{K_s^2 - k_{n_i}^2} = i \frac{aT_s}{\alpha_s} K_s \quad (4.9)$$

Pour la résolution proprement dite, il convient de multiplier l'équation 4.8 par  $K_s$  et de faire la somme et la différence, ce qui conduit au système :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 \frac{[1 - (-1)^n e^{-iu}]}{K_s - k_n} + \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{K_s + k_{n_i}} = 0 \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 \frac{[1 - (-1)^n e^{-iu}]}{K_s + k_n} + \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{K_s - k_{n_i}} = -2i \frac{aK_s T_s}{\alpha_s} \quad (4.11)$$

La méthode utilisée alors fait intervenir les résidus d'une fonction complexe particulière. Le principe y est développé ici. Supposons que soit connue une fonction d'une variable complexe  $w$ ,  $f(w)$ , ayant les propriétés suivantes :

- $f(w)$  est analytique, sauf aux pôles simples  $w = \gamma_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  et  $w = -\gamma_{n_i}$  ;
- $f(w)$  admet des zéros simples aux valeurs  $w = \Gamma_s$ ,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ;
- le résidu de  $f$  en  $w = -\gamma_{n_i}$  est  $\text{Res}f(-\gamma_{n_i}) = 1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}$  ;
- $f(w)$  se comporte comme  $w^{-3/2}$  lorsque  $|w| \rightarrow \infty$ .

Considérons ensuite les intégrales suivantes :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(w)}{w - \Gamma_s} dw, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(w)}{w + \Gamma_s} dw,$$

où  $(C)$  désigne un contour circulaire de rayon tendant vers l'infini dans le plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique. Les intégrandes se comportant comme  $w^{-5/2}$  lorsque  $|w| \rightarrow \infty$ , ces deux intégrales tendent vers zéro. Par application du théorème des résidus, il vient alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(w)}{w - \Gamma_s} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Res}f(\gamma_n)}{\gamma_n - \Gamma_s} - \frac{\text{Res}f(-\gamma_{n_i})}{\gamma_{n_i} + \Gamma_s} = 0$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(w)}{w + \Gamma_s} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Res}f(\gamma_n)}{\gamma_n + \Gamma_s} - \frac{\text{Res}f(-\gamma_{n_i})}{\gamma_{n_i} - \Gamma_s} + f(-\Gamma_s) = 0$$

soit encore, du fait de la construction de la fonction  $f(w)$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Res}f(\gamma_n)}{\gamma_n - \Gamma_s} = \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{\Gamma_s + \gamma_{n_i}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Res}f(\gamma_n)}{\gamma_n + \Gamma_s} - \frac{[1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}]}{\gamma_{n_i} - \Gamma_s} = -f(-\Gamma_s)$$

Compte tenu des liens entre les paramètres  $(\gamma_n, \Gamma_s)$ , d'une part, et  $(k_n, K_s)$ , d'autre part, l'identification avec les équations (4.10) et (4.11) conduit à la solution :

$$C_n^0 = \frac{\text{Res}f(\gamma_n)}{1 - (-1)^n e^{-iu}} \quad T_s = i \frac{\alpha_s}{2a\Gamma_s} f(-\Gamma_s)$$

Il reste alors à déterminer la fonction  $f(w)$ , ce qui constitue l'étape la plus délicate de la méthode. Les contraintes imposées par les pôles et zéros suggèrent la construction de  $f(w)$  sur la base de produits infinis, qui sont ensuite corrigés pour assurer le comportement asymptotique en  $w^{-3/2}$ . La solution fournie par Mittra & Lee [31] dans le cas d'une excitation par le mode plan ( $n_i = 0$ ) peut être généralisée sous la forme suivante dans le cas présent :

$$f(w) = \frac{1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}}{w + \gamma_{n_i}} e^{[(w+\gamma_{n_i})a/\pi] \ln 2} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_0}{1 - w/\gamma_0} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_m}{1 - w/\gamma_m} e^{-(w+\gamma_{n_i})a/(m\pi)} \\ \times \frac{1 - w/\Gamma_0}{1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_0} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{(1 - w/\Gamma_s)(1 - w/\Gamma_{-s})}{(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_s)(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_{-s})} e^{(w+\gamma_{n_i})a/(s\pi)} \quad (4.12)$$

Par suite, les coefficients de réflexion sont :

$$C_n^0 = -\frac{1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}}{1 - (-1)^n e^{-iu}} \exp \left\{ \frac{(\gamma_n + \gamma_{n_i})a}{\pi} \left( \ln 2 - \frac{1}{n} \right) \right\} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_0}{1 - \gamma_n/\gamma_0} \\ \times \prod_{m=1}^{\infty} \binom{(n)}{m} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_m}{1 - \gamma_n/\gamma_m} e^{-(\gamma_n + \gamma_{n_i})a/(m\pi)} \\ \times \frac{1 - \gamma_n/\Gamma_0}{1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_0} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{(1 - \gamma_n/\Gamma_s)(1 - \gamma_n/\Gamma_{-s})}{(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_s)(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_{-s})} e^{(\gamma_n + \gamma_{n_i})a/(s\pi)} \quad (4.13)$$

pour  $n \neq 0$ , avec comme convention pour le symbole  $\binom{(n)}{m}$  en exposant du produit le fait que le terme d'ordre  $m = n$  est supprimé, et :

$$C_0^0 = -\frac{1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}}{1 - e^{-iu}} \exp \left\{ \frac{(\gamma_0 + \gamma_{n_i})a}{\pi} \ln 2 \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_m}{1 - \gamma_0/\gamma_m} e^{-(\gamma_0 + \gamma_{n_i})a/(m\pi)} \\ \times \frac{1 - \gamma_0/\Gamma_0}{1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_0} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{(1 - \gamma_0/\Gamma_s)(1 - \gamma_0/\Gamma_{-s})}{(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_s)(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_{-s})} e^{(\gamma_0 + \gamma_{n_i})a/(s\pi)}$$

De même, les facteurs de transmission répondent à la formule générique :

$$T_s = \frac{i\alpha_s}{2a\Gamma_s} \frac{1 - (-1)^{n_i} e^{-iu}}{\gamma_{n_i} - \Gamma_s} e^{[(\gamma_{n_i} - \Gamma_s)a/\pi] \ln 2} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_0}{1 + \Gamma_s/\gamma_0} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \gamma_{n_i}/\gamma_m}{1 + \Gamma_s/\gamma_m} e^{-(\gamma_{n_i} - \Gamma_s)a/(m\pi)} \\ \times \frac{1 + \Gamma_s/\Gamma_0}{1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_0} \prod_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(1 + \Gamma_s/\Gamma_\sigma)(1 + \Gamma_s/\Gamma_{-\sigma})}{(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_\sigma)(1 + \gamma_{n_i}/\Gamma_{-\sigma})} e^{(\gamma_{n_i} - \Gamma_s)a/(\sigma\pi)} \quad (4.14)$$

### Avec écoulement

En présence d'un écoulement axial uniforme, différents changements de variables décrits dans la référence [7] permettent de se ramener aux mêmes équations canoniques que dans le problème sans écoulement. Les changements de variables utilisés sont les suivants :

$$k_1 = \frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}} \quad x_1 = \frac{x}{\sqrt{1-M^2}} \quad \psi = \phi e^{-ik_1 M x_1}$$

La technique de résolution s'applique de manière similaire aux potentiels modifiés pour les nouvelles ondes incidentes ( $\psi_i$ ), réfléchies ( $\psi_r$ ) et transmises ( $\psi_t$ ) et la fonction  $f(w)$  reste la même. Les coefficients de réflexion  $C_n^0$  et de transmission  $T_s$  ont la même forme que précédemment en remplaçant les valeurs de  $\gamma_n$ ,  $\gamma_{n_i}$  et  $\Gamma_s$  par leurs nouvelles valeurs obtenues grâce au changement de variables.

Il est aussi à noter que le même type de problème à deux dimensions peut être résolu grâce à la technique de Wiener-Hopf, mise en oeuvre notamment par Mittra & Lee [31], Glegg [18] et Posson & Roger [35]. L'avantage de la méthode des raccordements modaux dans notre cas est une plus grande facilité d'enchaîner différents modèles développés pour prédire le bruit transmis depuis les aubes du diffuseur jusqu'à l'entrée d'air du compresseur en gardant la notion de modes comme fil conducteur.

La formulation développée par Mittra & Lee [31] peut également être étendue à des canaux présentant un calage, c'est-à-dire dont les parois ne sont pas perpendiculaires au front du réseau. Cette extension n'a pas été considérée ici mais elle pourrait faire l'objet d'une étude ultérieure.

#### 4.2.4 Vers une prise en compte de la rotation de la roue : le réseau de canaux défilant

La prise en compte conjointe de l'écoulement débitant et du défilement des canaux (représentant la rotation du rouet) pose le problème du choix des variables du champ sur lesquelles écrire les conditions de raccordement. Ce problème reste ouvert à l'issue de la thèse, cependant les pistes envisagées sont expliquées à la fin de ce paragraphe. La première partie est consacrée à la résolution du système lorsque l'écoulement débitant est nul.

#### Défilement des canaux sans vitesse débitante ( $\Omega \neq 0$ - $M = 0$ )

Rappelons que la rotation est représentée par un mouvement de translation du demi-espace ( $x > 0$ ), avec la vitesse  $\Omega R_0$  dans le sens des  $z$  décroissants (Fig. 4.2).

Les ondes incidentes et réfléchies dans les canaux doivent comme précédemment au paragraphe 4.2.1 sans écoulement débitant, satisfaire l'équation de Helmholtz. Leurs potentiels s'écrivent :

$$\phi_i = e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i \pi}{a} (z - ma) \right] e^{ik_{n_i} x} \quad x < 0, \quad ma < z < (m+1)a,$$

avec

$$u = k_0 a \sin \theta_0 \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

$k_0$  étant le nombre d'onde total, et

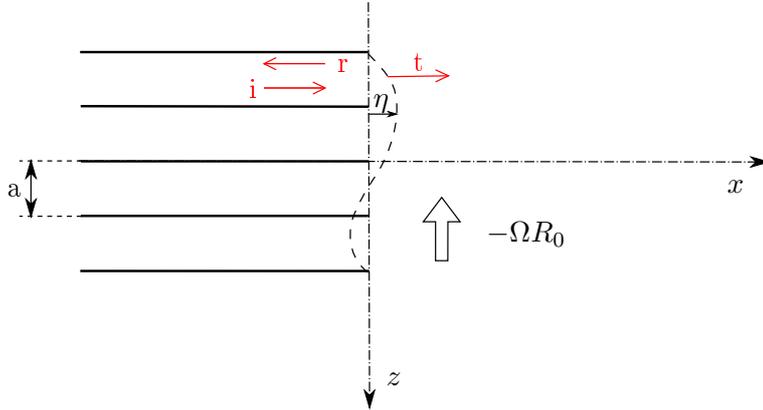


FIGURE 4.2 – Réseau de canaux défilant avec vitesse débitante nulle - Définition du déplacement

$$\phi_r = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m \cos \left[ \frac{n\pi}{a}(z - ma) \right] e^{-ik_n x} \quad x < 0, \quad ma < z < (m+1)a,$$

L'onde transmise doit, quant à elle, satisfaire une équation de propagation de Helmholtz convectée intégrant une vitesse perpendiculaire à l'axe :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \left( 1 - \frac{(\Omega R_0)^2}{c_0^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2ik_0 \left( \frac{\Omega R_0}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k_0^2 \phi = 0$$

Pour cette équation les nombres d'onde des solutions fondamentales sont :

$$k_{n_i} = \sqrt{- \left[ (n_i \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}$$

$$k_n = \sqrt{- \left[ (n \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}$$

$$K_s = \sqrt{k_0^2 - \left( 1 - (\Omega R_0)^2 / c_0^2 \right) \alpha_s^2 + 2k_0 \Omega R_0 / c_0 \alpha_s}$$

Le potentiel transmis s'écrit sous la forme :

$$\phi_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s e^{i\alpha_s z} e^{iK_s x} \quad x > 0$$

avec

$$\alpha_s = k_0 \sin \Theta_0 + s \frac{2\pi}{a} = \frac{u + 2s\pi}{a}$$

Si l'on choisissait d'imposer des conditions de raccordement en pression et vitesse, l'adjonction d'un mouvement de glissement reviendrait à ajouter une équation modale supplémentaire, non redondante, sur la fluctuation de vitesse parallèle à l'interface. L'ensemble des trois équations obtenues se prêterait mal à la résolution par projection modale. La littérature des problèmes de transmission à une interface fluide avec cisaillement suggère d'imposer plutôt la continuité du déplacement normal à l'interface. C'est ce qui est fait par exemple pour

traduire le comportement des ondes à la surface d'un revêtement absorbant sous écoulement rasant, lorsque cet écoulement est supposé uniforme [3]. La situation présente est identique si l'on considère que les canaux défilent tangentiellement, sans vitesse débitante ( $M = 0$ ). Une couche de cisaillement se forme alors en  $x = 0$ , couche que l'on peut ramener à une interface fluide parfaite. Cette couche fluctue et son oscillation est décrite par un déplacement normal  $\eta$ , représenté sur la figure 4.2. On choisira donc d'imposer la continuité de la pression et du déplacement relatif axial dans le cas où  $M = 0$ . Ce point est développé dans l'annexe C.

Les nouvelles équations de continuité, sont alors :

$$\begin{aligned} k_0 \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n_i} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_0 \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n} \\ = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \left( k_0 + \frac{\Omega R_0}{c_0} \alpha_s \right) \end{aligned}$$

$$k_{n_i} \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n_i} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_n \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n} \right] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s K_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \left( 1 - \frac{\Omega R_0}{\omega_m} \alpha_s \right)$$

où  $\omega_m = \omega + \Omega R_0 \alpha_s$  et  $\Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu}$  reste défini par l'équation 4.7.

L'implémentation de cette formulation montre un bilan de puissance correct (moins de 2% d'erreur). La continuité du déplacement normal est donc une hypothèse de travail pertinente pour un écoulement rasant sur le réseau sans vitesse débitante. La résolution est effectuée grâce à une inversion de matrice qui a été appliquée pour déterminer les inconnues  $C_n^0$  et  $T_s$ . La technique d'identification des résidus n'est actuellement pas adaptée aux équations modifiées avec réseau défilant.

### Défilement des canaux avec vitesse débitante ( $\Omega \neq 0$ - $M \neq 0$ )

Une première idée consiste à généraliser le point de vue précédemment exposé en admettant qu'on peut encore écrire la continuité du déplacement relatif lorsque  $M \neq 0$ , le déplacement étant considéré par rapport au transport axial moyen lié au nombre de Mach  $M$ . Cependant, pour certaines configurations l'erreur sur le bilan de puissance s'est avérée importante : soit la formulation est non adaptée à la présence d'un écoulement oblique en entrée d'air, soit l'hypothèse d'une conservation de l'énergie doit être reconsidérée.

Une réécriture des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au passage d'une discontinuité a ensuite été envisagée [6]. Les développements correspondants sont donnés en annexe D. Ils n'ont pas permis de déduire des cartographies de champ sonore jugées réalistes. Les deux pistes de modélisation du cas général ont donc été abandonnées. La question reste ouverte et justifiera une recherche spécifique ultérieure.

Pour ces raisons, il a été choisi d'étendre la formulation à un espace tridimensionnel annulaire représentatif de l'entrée d'air d'un rouet centrifuge, en ne considérant qu'un flux débitant, sans tenir compte de la rotation. Il convient donc de concevoir cette extension comme une première étape visant à mettre en place une architecture de code qui n'aura plus qu'à

être déclinée différemment, lorsqu'un choix de variables de raccordement sera rigoureusement déterminé.

### 4.3 Extension du modèle à trois dimensions - Écoulement axial ( $M \neq 0, \Omega = 0$ )

#### 4.3.1 Formulation du raccordement modal

Le problème est maintenant traité dans un cadre tridimensionnel, conformément à la figure 4.3. Dans le système de coordonnées cylindriques, les parois des canaux sont toujours supposées parfaitement minces et rigides. Le réseau périodique est composé d'un nombre de canaux égal à  $B$ . L'écoulement est toujours supposé uniforme, de nombre de Mach  $M$  et dirigé selon l'axe ( $-\mathbf{z}$ ). Une onde incidente (i) constituée par un mode de propagation guidée quelconque est imposée dans chaque canal ( $z < 0$ ), avec le déphasage entre les différents canaux représentatif de l'excitation. Des ondes réfléchies (r) sont générées dans les canaux et des ondes transmises (t) sont excitées avec différents angles d'hélicité dans le demi-espace ( $z > 0$ ).

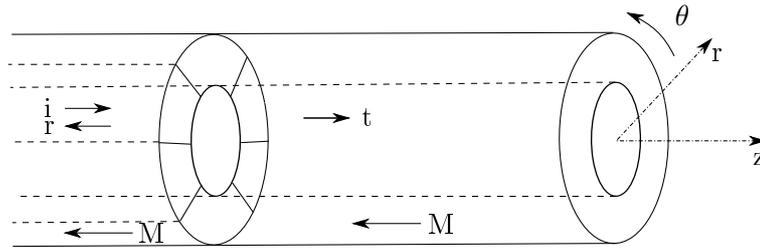


FIGURE 4.3 – Configuration pour la formulation du problème de transmission du son sur le front d'un réseau de canaux annulaire.

#### 4.3.2 Écriture des équations de continuité

Le principe est similaire au problème à deux dimensions. À l'interface  $z = 0$ , des équations de continuité sont écrites sur la pression et la vitesse normale. Un système d'équations sur les coefficients des modes (coefficients de réflexion et de transmission) en est déduit. Les ondes incidente, réfléchies et transmises doivent satisfaire l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2ik_0 M \frac{\partial \phi}{\partial z} + k_0^2 \phi = 0$$

Soit donc l'onde incidente constituée par le mode de propagation guidée d'ordre  $(n_i, p)$  et de phase  $e^{imu}$  dans le canal de rang  $m$ , où  $u = (2\pi/B) \times (k_0 R_0 \sin \Theta_0 / (1 - M \cos \Theta_0)) = (2\pi/B)\alpha$  et  $R_0 = (R_1 + R_2)/2$ . Ce déphasage tendrait à forcer de façon privilégiée le mode angulaire particulier  $\alpha$  dans le conduit d'entrée d'air dans le cas d'une excitation particulière par l'onde plane dans chaque canal. Le potentiel acoustique correspondant à l'onde incidente s'écrit :

$$\phi_i = f_{n_i p}(r) e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i B}{2} \left( \theta - \frac{2\pi m}{B} \right) \right] e^{ik_i n_i p z} \quad z < 0,$$

### 4.3 Extension du modèle à trois dimensions - Écoulement axial ( $M \neq 0, \Omega = 0$ ) 83

Les fonctions  $f_{n_i p}$  sont défini de la même manière qu'à la partie 1.3 de la sorte :

$$f_{n_i p}(r) = N_{n_i p} \left( \cos(\tau_{n_i p}) J_{n_i B/2}(K_{n_i p} r) - \sin(\tau_{n_i p}) Y_{n_i B/2}(K_{n_i p} r) \right)$$

Les valeurs propres  $K_{n_i p}$ , les conditions aux limites ainsi que les coefficients  $N_{n_i p}$ ,  $\cos(\tau_{n_i p})$  et  $\sin(\tau_{n_i p})$  sont donnés dans l'annexe A.

Le nombre d'onde de l'onde incidente peut s'écrire :  $ki_{n_i p} = [k_0 M + \sqrt{k_0^2 - \beta^2 K_{n_i p}^2}]/\beta^2$ . Le mode incident est supposé passant, donc  $ki_{n_i p}$  est un nombre réel positif.

La réflexion (r) dans le canal de rang  $m$  comprend *a priori* tous les modes possibles et son potentiel est :

$$\phi_r = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{st}^m f_{st}(r) \cos \left[ \frac{sB}{2} \left( \theta - \frac{2\pi m}{B} \right) \right] e^{-ikr_{st}z} \quad z < 0,$$

la fonction  $f_{st}(r)$  étant définie de la même manière que pour l'onde incidente. Ici  $kr_{st} = [-k_0 M + \sqrt{k_0^2 - \beta^2 K_{st}^2}]/\beta^2$  pour un mode passant et  $kr_{st} = [-k_0 M + i\sqrt{\beta^2 K_{st}^2 - k_0^2}]/\beta^2$  pour un mode coupé.

Enfin l'onde transmise (t) à l'extérieur du réseau pour  $z > 0$  comporte tous les modes de conduit susceptibles de s'accorder avec les ondes précédentes sur l'interface, conformément au principe de trace. Elle prend la forme :

$$\phi_t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} U_{ln}(r) e^{i(\alpha+lB)\theta} e^{ikt_{ln}z} \quad z > 0$$

avec

$$U_{ln}(r) = N_{ln} \left( \cos(\tau_{ln}) J_{(\alpha+lB)}(K_{ln} r) - \sin(\tau_{ln}) Y_{(\alpha+lB)}(K_{ln} r) \right)$$

et  $kt_{ln} = [k_0 M + \sqrt{k_0^2 - \beta^2 K_{ln}^2}]/\beta^2$  ou  $kt_{ln} = [k_0 M + i\sqrt{\beta^2 K_{ln}^2 - k_0^2}]/\beta^2$  selon que le mode transmis d'ordre  $(l, n)$  est passant ou coupé.

La continuité de la pression à l'interface  $z = 0$  s'écrit

$$\begin{aligned} f_{n_i p}(r) (k_0 - Mki_{n_i p}) e^{imu} \cos \left[ \frac{n_i B}{2} \left( \theta - \frac{2\pi m}{B} \right) \right] \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{st}^m (k_0 + Mkr_{st}) f_{st}(r) \cos \left[ \frac{sB}{2} \left( \theta - \frac{2\pi m}{B} \right) \right] \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} (k_0 - Mkt_{ln}) U_{ln}(r) e^{i(\alpha+lB)\theta} \end{aligned}$$

La continuité de vitesse, de même, conduit à l'équation :

$$\begin{aligned}
 & k i_{n_i p} f_{n_i p}(r) e^{i m u} \cos \left[ \frac{n_i B}{2} \left( \theta - \frac{2 \pi m}{B} \right) \right] - \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{st}^m k r_{st} f_{st}(r) \cos \left[ \frac{s B}{2} \left( \theta - \frac{2 \pi m}{B} \right) \right] \\
 & = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} k t_{ln} U_{ln}(r) e^{i(\alpha+l B)\theta}
 \end{aligned}$$

Du fait de la périodicité,  $C_{st}^m = C_{st}^0 e^{i m u}$ . En divisant les expressions précédentes par  $e^{i m u}$ , compte tenu du fait que les champs réfléchis sont tous identiques dans les différents canaux mais déphasés, il suffit de traiter le problème du canal de référence  $m = 0$ . Ainsi le système d'équations précédent se réduit à :

$$\begin{aligned}
 & f_{n_i p}(r) (k_0 - M k i_{n_i p}) \cos \left( \frac{n_i B \theta}{2} \right) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{st}^0 (k_0 + M k r_{st}) f_{st}(r) \cos \left( \frac{s B \theta}{2} \right) \\
 & = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} (k_0 - M k t_{ln}) U_{ln}(r) e^{i(\alpha+l B)\theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k i_{n_i p} f_{n_i p}(r) \cos \left( \frac{n_i B \theta}{2} \right) - \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{st}^0 k r_{st} f_{st}(r) \cos \left( \frac{s B \theta}{2} \right) \\
 & = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} k t_{ln} U_{ln}(r) e^{i(\alpha+l B)\theta}
 \end{aligned}$$

Les fonctions de Bessel vérifient la propriété d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \int_{R_1}^{R_2} f_{n_i p}(r) f_{\mu\nu}(r) r \cos \left( \frac{n_i B \theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\mu B \theta}{2} \right) dr d\theta = (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} \delta_{n_i \mu} \delta_{p \nu}$$

qui peut être utilisée pour réduire le système d'équations de continuité. Pour ce faire, on multiplie par  $f_{\mu\nu}(r) r \cos(\mu B \theta / 2)$  et on intègre sur la hauteur (entre le rayon intérieur  $R_1$  et le rayon extérieur  $R_2$ ) et sur la largeur du canal, de 0 à  $2\pi/B$ .

$$\begin{aligned}
 & (k_0 - M k i_{\mu\nu}) (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} + C_{\mu\nu}^0 (k_0 + M k r_{\mu\nu}) (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} \\
 & = \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \int_{R_1}^{R_2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} (k_0 - M k t_{ln}) U_{ln}(r) e^{i(\alpha+l B)\theta} f_{\mu\nu}(r) r \cos \left( \frac{\mu B \theta}{2} \right) dr d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ki_{\mu\nu} (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} - C_{\mu\nu}^0 kr_{\mu\nu} (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \int_{R_1}^{R_2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} kt_{ln} U_{ln}(r) e^{i(\alpha+lB)\theta} f_{\mu\nu}(r) r \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) dr d\theta
\end{aligned}$$

Les deux intégrales apparaissant dans les membres de droite des équations sont notées :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{B}} e^{i(\alpha+lB)\theta} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) d\theta &= \Lambda_{\alpha+lB}^\mu \\
\int_{R_1}^{R_2} U_{ln}(r) f_{\mu\nu}(r) r dr &= X_{l\mu}^{\nu}
\end{aligned}$$

La première se calcule analytiquement selon le développement de l'annexe B, la deuxième intégrale est calculée numériquement. Le système devient avec ces nouvelles notations :

$$\begin{aligned}
(k_0 - Mki_{\mu\nu}) (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} + C_{\mu\nu}^0 (k_0 + Mkr_{\mu\nu}) (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} = \\
\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} (k_0 - Mkt_{ln}) \Lambda_{\alpha+lB}^\mu X_{l\mu}^{\nu}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$ki_{\mu\nu} (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} - C_{\mu\nu}^0 kr_{\mu\nu} (1 + \delta_{\mu 0}) \frac{\pi}{B} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{ln} kt_{ln} \Lambda_{\alpha+lB}^\mu X_{l\mu}^{\nu} \tag{4.16}$$

L'élimination du coefficient  $C_{\mu\nu}^0$  entre les équations 4.15 et 4.16 mène à une unique équation sur les coefficients  $T_{ln}$  qui peut être résolue par projection modale. Les coefficients  $C_{\mu\nu}^0$  peuvent alors être déduits des équations 4.15 et/ou 4.16.

## 4.4 Étude comparative et analyse des résultats

### 4.4.1 Comparaison des deux techniques de résolution - Configuration bi-dimensionnelle

Les deux techniques présentées au paragraphe 4.2 pour résoudre les équations modales sont mathématiquement équivalentes. Il peut néanmoins subsister des problèmes pour la technique de projection modale, en raison de la troncature modale et d'un éventuel mauvais conditionnement de matrice. Afin de s'assurer de la validité des résultats obtenus et de comparer les deux méthodes, un bilan de puissance a été effectué. La conservation de l'énergie impose que la puissance des ondes incidentes est égale à la somme des puissances des ondes réfléchies et transmises. La puissance d'une onde dans un écoulement uniforme est définie de la manière suivante [19] :

$$W = \int_{(S)} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

où  $S$  est une surface fermée entourant la source (réduite à des sections droites dans le cas des conduits) et où  $\mathbf{I}$  est le vecteur intensité acoustique moyenne qui s'écrit :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left( \frac{p'}{\rho_0} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}' \right) \times (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{U})^* \right\}$$

$\mathbf{U}$  étant la vitesse de l'écoulement.

Après le développement de cette expression pour chaque onde et son intégration sur la section droite (calcul effectué en annexe E), on obtient les résultats suivants pour les puissances respectives des ondes incidente  $W_i$ , réfléchies  $W_r$  et transmises  $W_t$  :

$$W_i = \frac{Z_0}{2} \text{Re} \left\{ k [k_{n_i} (1 - M^2) - kM]^* e^{ik_{n_i}x} \left( e^{ik_{n_i}x} \right)^* \times \left\| \begin{array}{l} aB \quad \text{si } n_i = 0 \\ \frac{aB}{2} \quad \text{sinon} \end{array} \right\| \right\}$$

$$W_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_0}{2} \text{Re} \left\{ A_n^m (A_n^m)^* k [-k_n (1 - M^2) - kM]^* e^{-ik_nx} \left( e^{-ik_nx} \right)^* \times \left\| \begin{array}{l} aB \quad \text{si } n_i = 0 \\ \frac{aB}{2} \quad \text{sinon} \end{array} \right\| \right\}$$

$$W_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{Z_0}{2} \text{Re} \left\{ B_s (B_s)^* k [K_s (1 - M^2) - kM]^* e^{iK_sx} \left( e^{iK_sx} \right)^* aB \right\}$$

Deux cas sont exposés ici pour lesquels les deux procédés de calcul s'avèrent équivalents.

- La figure 4.4 donne les résultats pour une fréquence de 10000 Hz, un mode incident  $n_i = 1$ , un angle  $\alpha = 2$  (correspondant au déphasage entre les différents canaux), sans écoulement ( $k_0 a = 6.1164$ ),
- La figure 4.5 donne les résultats pour la même fréquence, un mode incident  $n_i = 1$ , un angle  $\alpha = 1$  et un écoulement axial de nombre de Mach 0.3.

On observe en parallèle les cartographies de pression et les graphes des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, sur lesquels sont mentionnés les pourcentages d'énergies réfléchi et transmise.

Dans la configuration de la figure 4.4, le bilan de puissance pour la méthode par projection modale donne une erreur relative de  $\epsilon = 7.21 \times 10^{-2}\%$  alors que celui effectué par la méthode des résidus donne une erreur relative de  $\epsilon = 4.52 \times 10^{-5}\%$ . De plus, la recombinaison des modes en entrée d'air du canal est similaire (Fig. 4.4(a) & 4.4(b)). Dans ce cas, quasiment toute la puissance injectée dans les canaux est transmise. La recombinaison des modes transforme le mode 1 incident en un mode  $-1$  prépondérant en entrée d'air. De même, dans la deuxième configuration (Fig. 4.5), le bilan de puissance pour la méthode par projection modale donne une erreur relative de  $\epsilon = 9.66 \times 10^{-2}\%$  alors que celui effectué par la méthode des résidus donne une erreur relative de  $\epsilon = 8.69 \times 10^{-5}\%$ . Une partie significative de l'énergie incidente est réfléchi sur le mode 2 par l'effet du réseau de canaux. Ceci est permis par le fait qu'en présence d'écoulement, les coupures ont été déplacées, le mode 2 devenant passant alors qu'il était coupé sans écoulement.

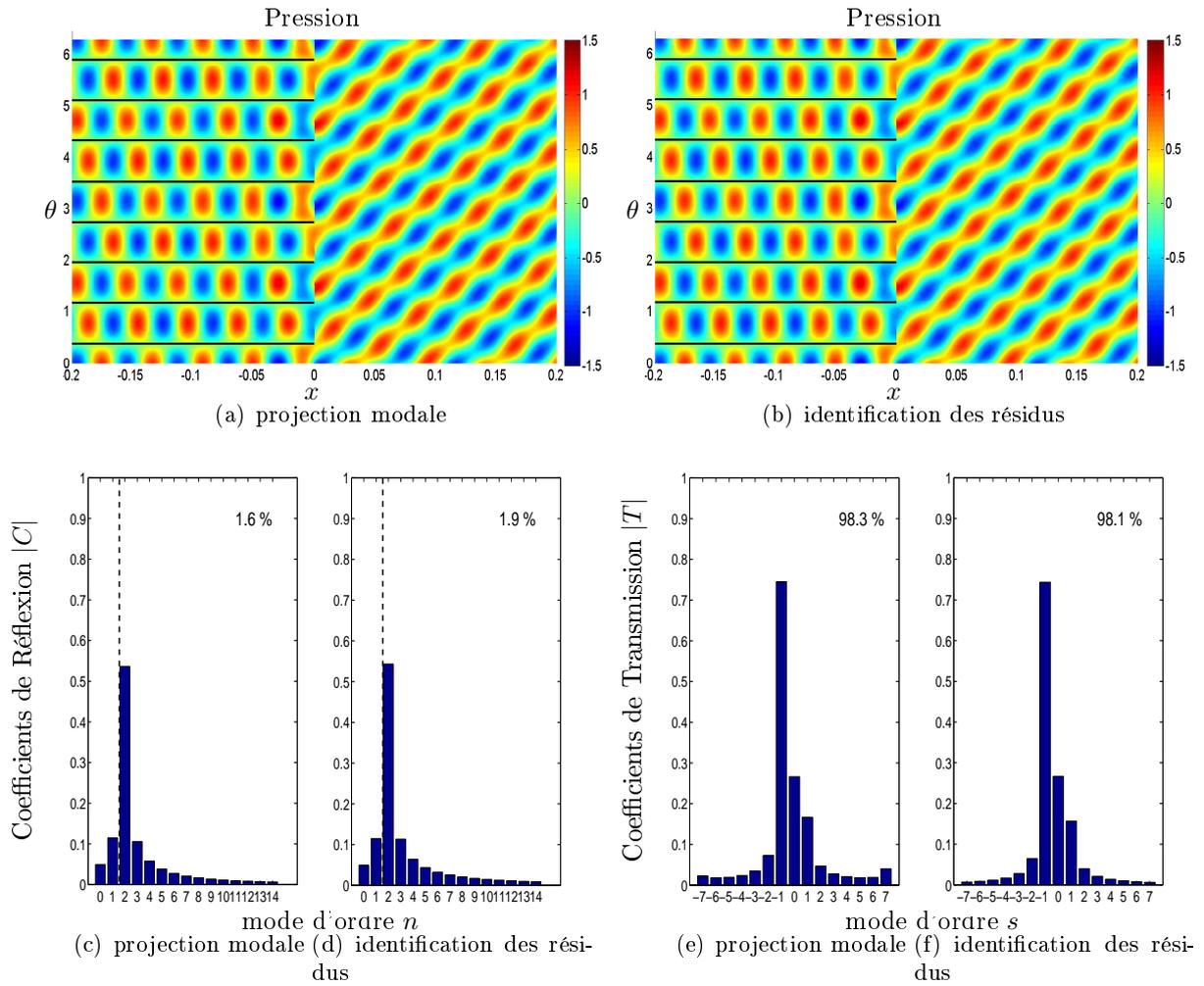


FIGURE 4.4 – Comparaison des deux techniques de résolution. (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.1164$ ,  $\alpha = 2$ ,  $M = 0$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

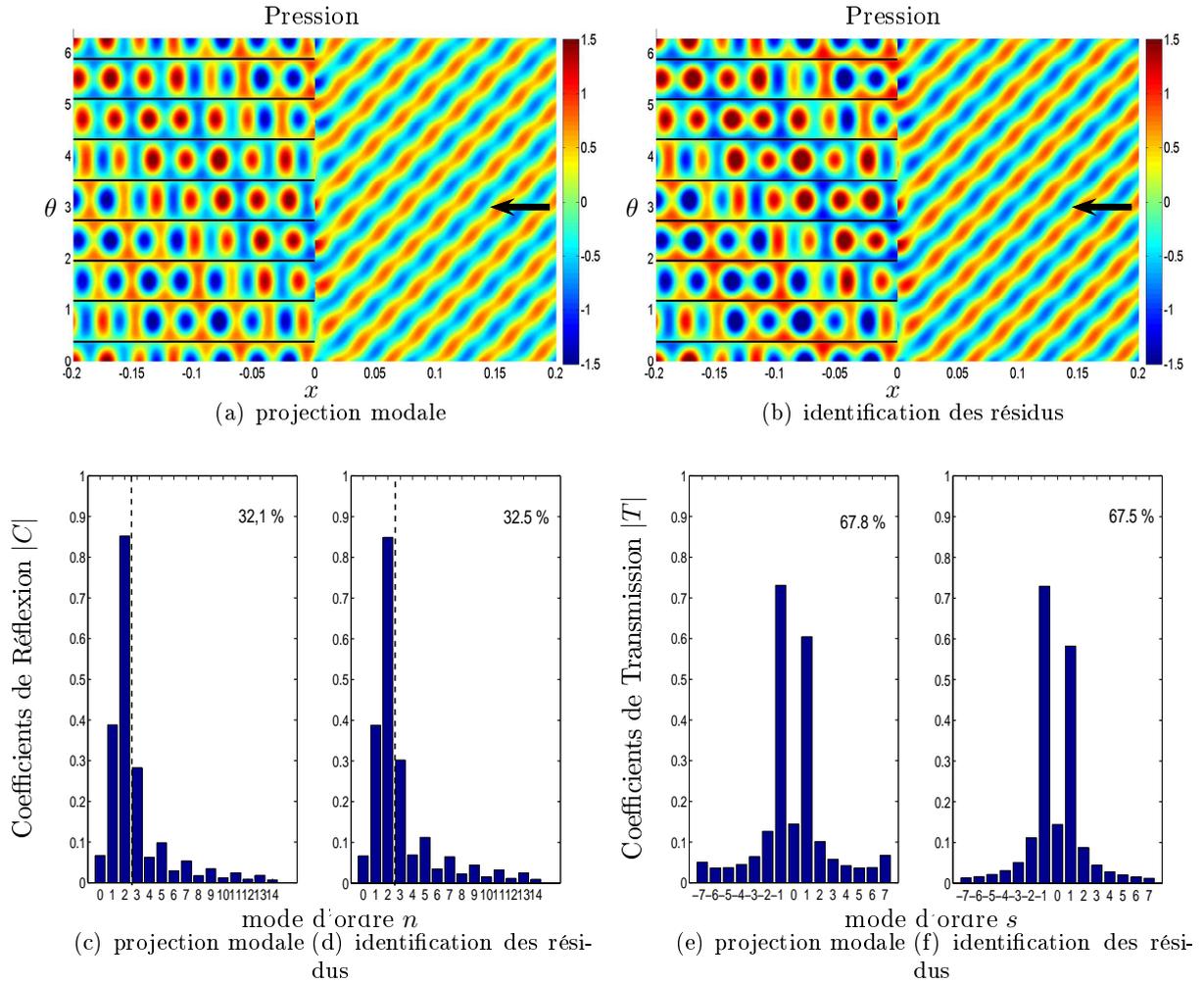


FIGURE 4.5 – Comparaison des deux techniques de résolution. (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.1164$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0.3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

La correspondance entre les deux méthodes est pour l'application visée quasi parfaite. La méthode des résidus donne un bilan de puissance beaucoup plus précis car elle repose sur une expression exacte des coefficients de réflexion et de transmission. Le calcul est par ailleurs plus rapide et les résultats ne sont tronqués qu'au niveau des produits infinis impliqués dans les formules 4.12, 4.13 et 4.14. Néanmoins la projection modale reste très efficace de ce point de vue.

La comparaison permet de valider la méthode des projections modales, qui pourra donc être utilisée dans d'autres cas, notamment en trois dimensions lorsque la méthode des résidus n'est pas généralisable.

#### 4.4.2 Effet de l'écoulement débitant : identification des résidus

Lorsque c'est possible, la technique de résolution par identification des résidus est préférée. Elle est donc utilisée dans cette partie. Une étude paramétrique de l'effet de l'écoulement illustrant des comportements particuliers est faite dans ce qui suit à partir des résultats obtenus par la méthode des résidus, sur les figures 4.6 et 4.7, sachant qu'on ne considère pas le défilement du réseau ( $\Omega = 0$ ). L'écoulement est choisi avec un nombre de Mach de 0.3.

Pour les deux cas présentés, tous les canaux sont excités avec la même amplitude et un même décalage sur la phase, le paramètre  $\alpha$  étant un indicateur de ce décalage. L'écoulement modifie notablement la structure du champ sonore. On observe ainsi le resserrement des fronts d'onde attendu entre les figures 4.6(a) et 4.6(b), puisque la propagation est globalement *a contrario* de l'écoulement. De plus sur ces mêmes visualisations, on observe une combinaison de plusieurs modes qui interfèrent dans le demi espace associé à l'entrée d'air, alors qu'un seul mode est forcé dans chaque canal. Un autre phénomène est observé sur la deuxième configuration (Fig. 4.7). En effet, alors que peu d'énergie était transmise (15.1%) depuis les canaux sans écoulement, la transmission est accrue lorsque l'on ajoute l'écoulement (43.7%). Encore une fois celui-ci décale les fréquences de coupure des modes vers des valeurs inférieures et permet donc à certaines ondes précédemment coupées de se propager. Ce phénomène est également observé directement sur les valeurs des coefficients de transmission qui sont plus importants pour un nombre de Mach de 0.3 (4.7(f)) que sans écoulement (4.7(e)). De plus, on constate sur la figure 4.7 que le champ dans le réseau sans écoulement (4.7(a)) n'est pas homogène dans la mesure où la pression acoustique peut être quasi nulle dans certains canaux, alors que les canaux véhiculent la même amplitude sonore avec un écoulement débitant (4.7(b)). Plus précisément sur la figure 4.7(a) on constate que les canaux ne sont pas identiques du point de vue du champ total (incident + réfléchi) alors qu'ils le sont à un déphasage près sur le champ incident ou le champ réfléchi pris séparément. Dans le cas de cet exemple le mode privilégié pour la réflexion dans les canaux correspond au mode injecté ( $ni = 2$ ). En l'absence d'écoulement, le mode  $ni = 2$  fonctionne très près de sa coupure, ce qui explique la structure particulière du champ.

#### 4.4.3 Effet de la rotation sans vitesse débitante : projection modale

L'étude de l'effet de la rotation du rouet est faite dans ce qui suit à partir des résultats obtenus par la méthode des projections modales, la technique de résolution par identification des résidus n'étant pas possible dans ce cas. Elle correspond, dans le cadre du modèle bidimen-

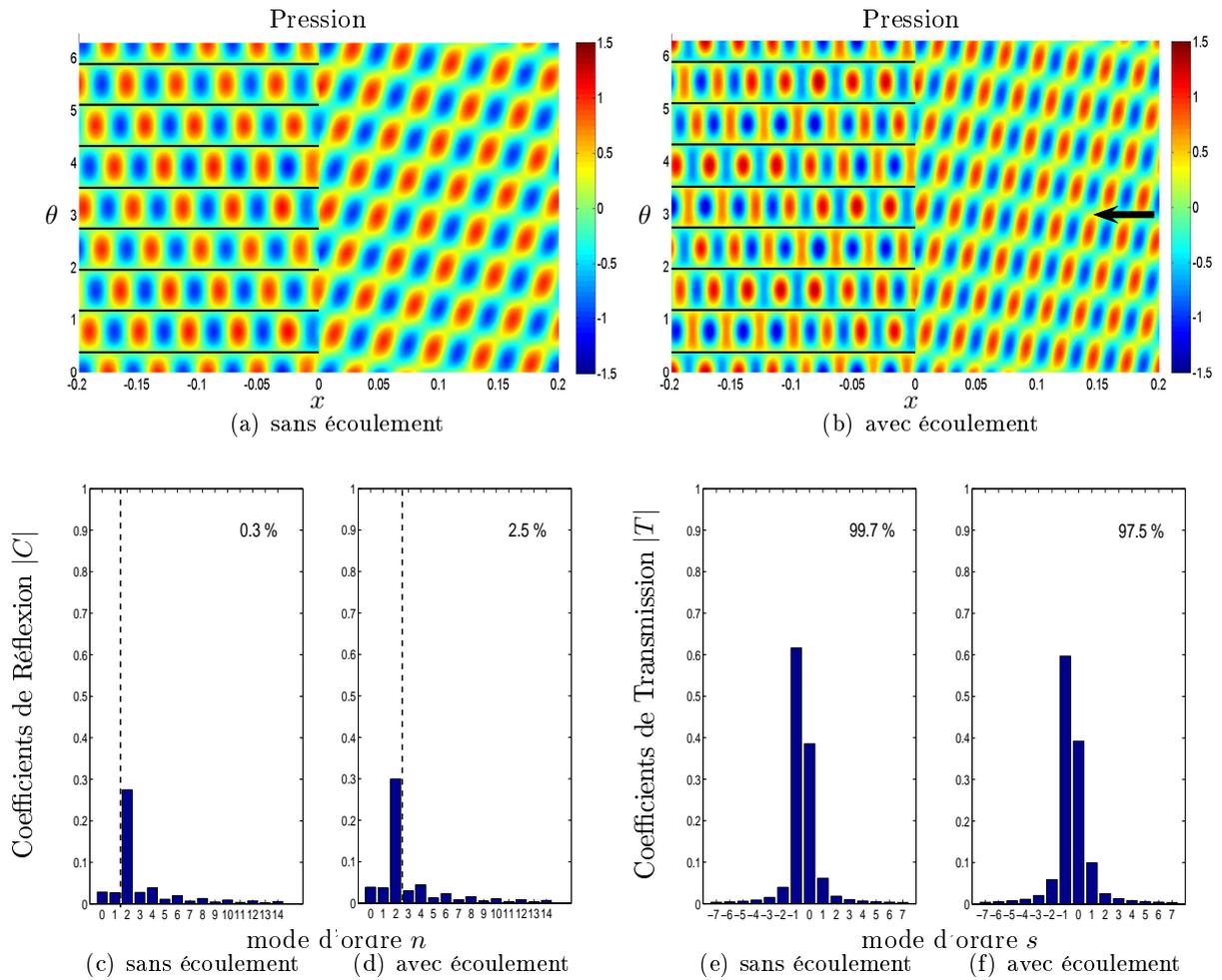


FIGURE 4.6 – Comparaison de la technique de résolution sans écoulement et avec un écoulement de nombre de Mach  $M = 0.3$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.1164$ ,  $\alpha = 3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

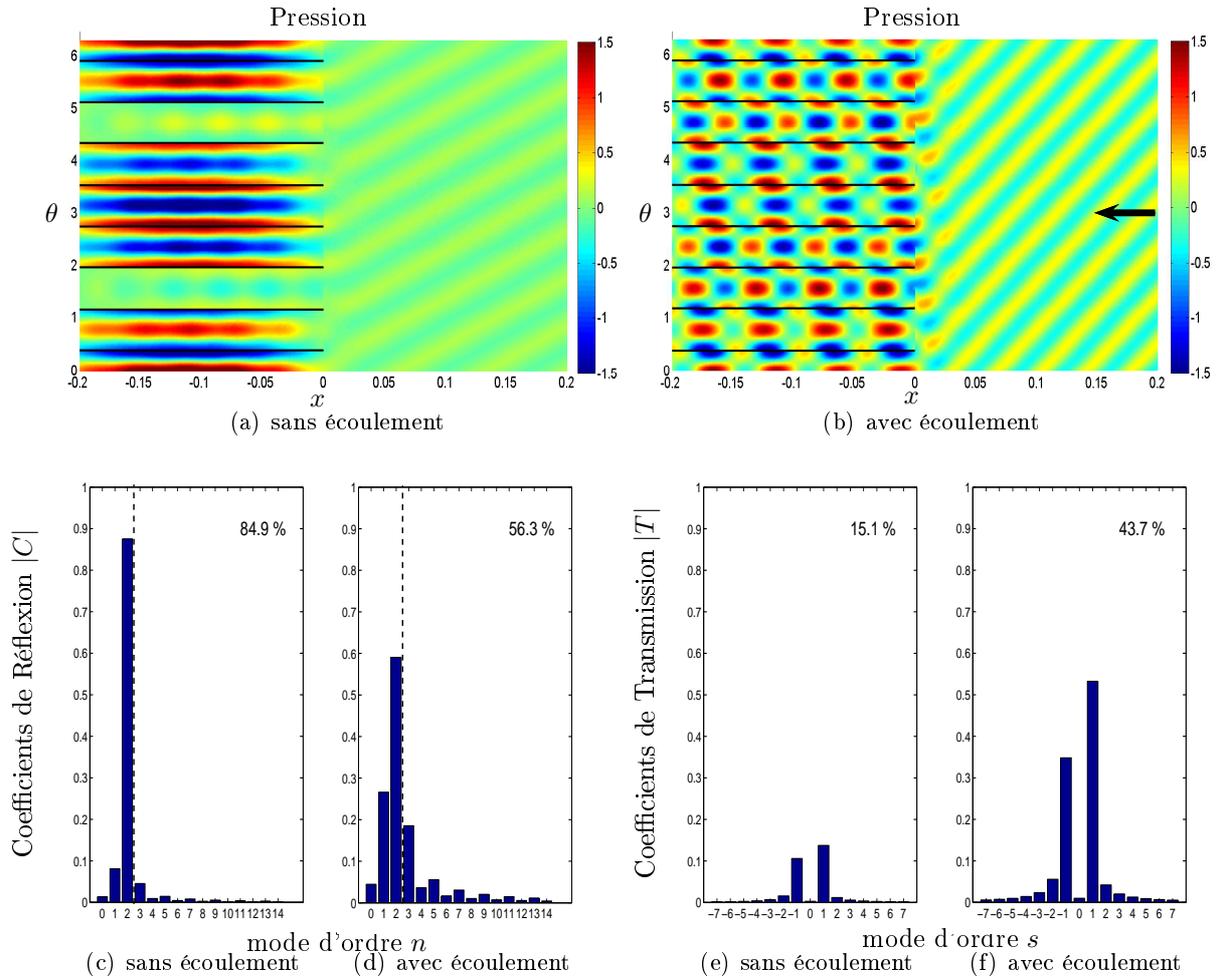


FIGURE 4.7 – Comparaison de la technique de résolution sans écoulement et avec un écoulement de nombre de Mach  $M = 0.3$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 2$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.2999$ ,  $\alpha = 1$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

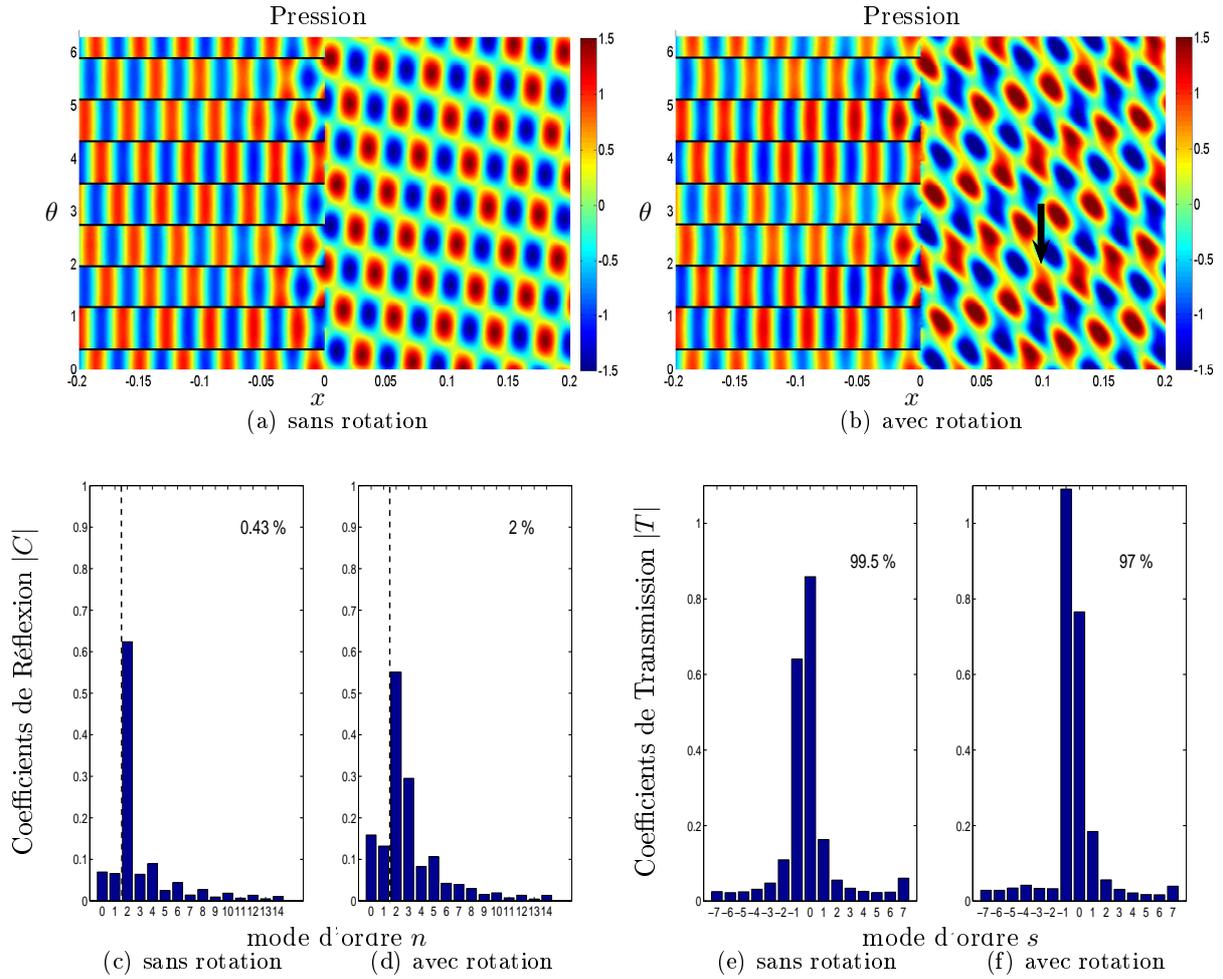


FIGURE 4.8 – Comparaison de la technique de résolution sans rotation et avec une rotation équivalente à  $\Omega = 38000$  tr/min ( $M_t = 0.4932$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 0$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.1164$ ,  $\alpha = 3$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

sionnel à un défilement des canaux sans vitesse débitante. La rotation du rouet est traduite par un glissement du demi-espace ( $x > 0$ ) dans le sens contraire de l'axe des  $z$  (Fig. 4.1). L'étude étant faite dans le référentiel lié au réseau de canaux, ceci équivaut à un défilement des canaux dans la direction  $z > 0$ . Les résultats montrent donc uniquement l'influence du cisaillement correspondant sur la transmission à l'interface.

La première configuration traitée (Fig. 4.8) illustre un changement de la structure d'interférence des ondes transmises dans le demi-espace ( $x > 0$ ) pour un cas de forte transmission. Le défilement a pour effet d'inverser les amplitudes relatives des modes  $s = -1$  et  $s = 0$ . Par ailleurs, la transmission en énergie est diminuée. La deuxième configuration (Fig. 4.9) correspond à un cas de moindre transmission. Elle indique que l'angle de l'onde transmise dominante peut être modifié au point de changer son sens de rotation de phase. Cette particularité peut encore être observée sur les figures 4.9(e) et 4.9(f) donnant les amplitudes des

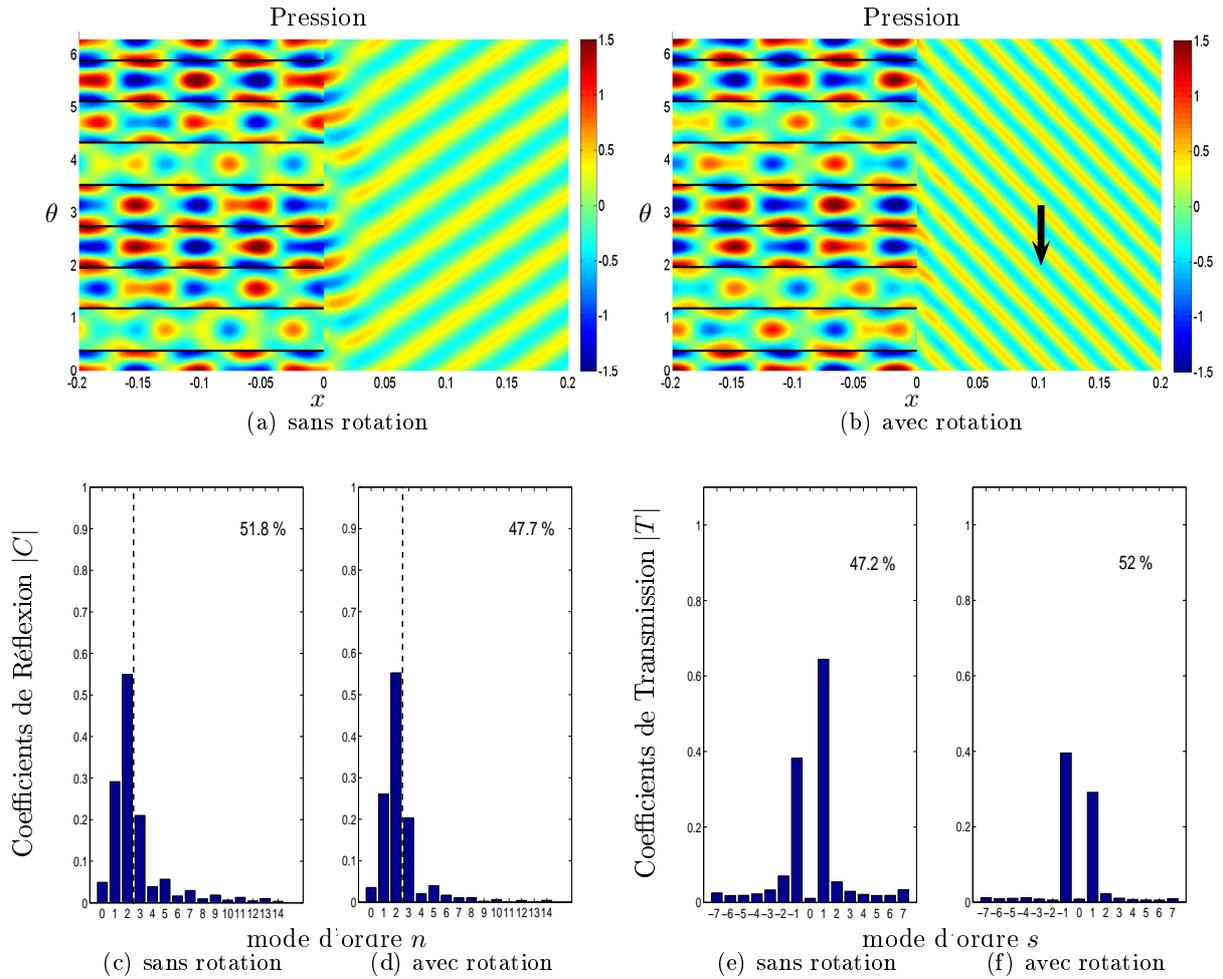


FIGURE 4.9 – Comparaison de la technique de résolution sans rotation et avec une rotation équivalente à  $\Omega = 38000$  tr/min ( $M_t = 0.4932$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 2$  dans les canaux,  $k_0 a = 6.7280$ ,  $\alpha = 1$ . De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

facteurs de transmission de chaque mode. Le mode dominant  $s = +1$  dans la configuration sans rotation est relayé par le mode dominant  $s = -1$  lorsque l'on considère un nombre de Mach transverse non nul.

Ceci suggère un impact majeur de la rotation sur la structuration des modes transmis prépondérants.

#### **4.4.4 Calculs en configuration annulaire - Effet du rapport des rayons $R_1/R_2$**

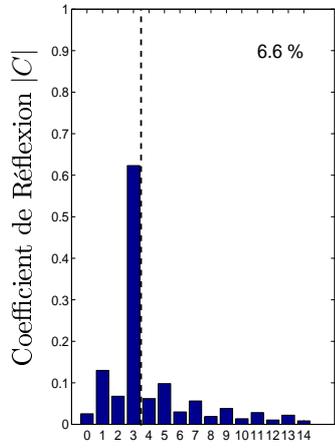
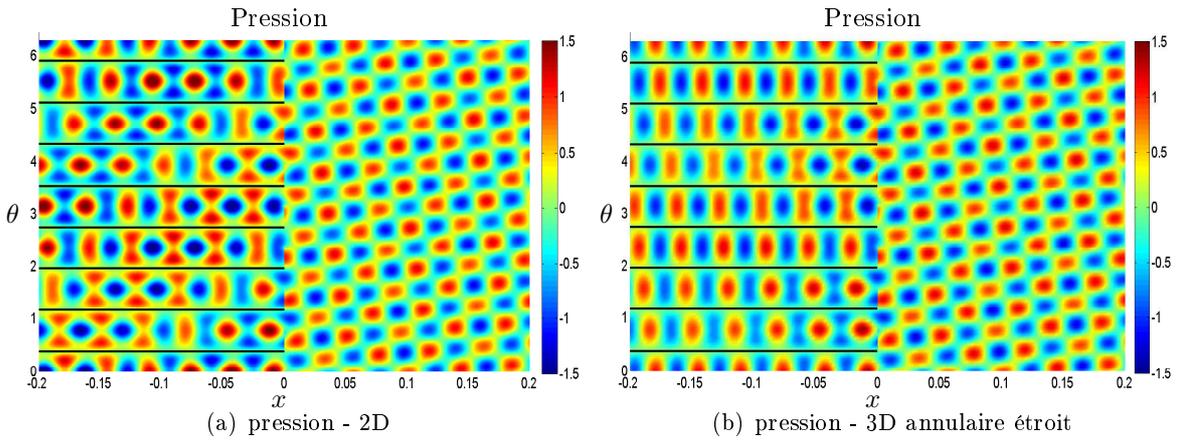
##### **Canal annulaire étroit - Comparaison avec le modèle bidimensionnel**

Dans un conduit annulaire étroit, lorsque la hauteur des canaux est très faible ( $(R_2 - R_1)/R_1 \ll 1$ ), la propagation réelle peut être assimilée à la propagation en deux dimensions, et le conduit est ramené à une représentation plane. En effet, les modes radiaux supérieurs n'ont pas la possibilité de se développer. Les figures 4.10 et 4.11 illustrent ainsi, pour différents cas, la comparaison entre les calculs effectués en deux dimensions grâce à l'identification des résidus et les calculs menés en trois dimensions d'après les équations développées dans la partie 4.3 selon une coupe cylindrique au rayon  $(R_1 + R_2)/2$ . Les résultats sont similaires dans les deux calculs, ce qui est aussi un moyen de valider les développements faits en trois dimensions. L'erreur relative calculée à partir du bilan de puissance reste faible, elle est de l'ordre de 1 % au maximum.

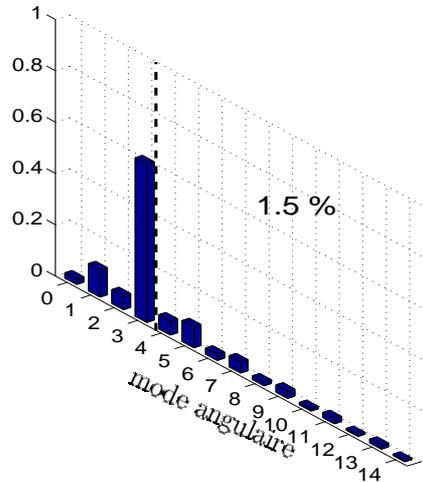
##### **Canal annulaire quelconque**

Pour une meilleure visualisation des résultats des calculs tridimensionnels dans un cas quelconque selon la formulation du paragraphe 4.3, des coupes montrant une cartographie de la partie réelle de la pression sonore sont effectués dans des directions complémentaires et réunies sur une même représentation. Les figures 4.13 et 4.15 comportent ainsi une coupe selon un plan méridien (Fig. 4.13(a), 4.13(b), 4.15(a), 4.15(b)) et une coupe dans une section droite du conduit d'entrée d'air après recombinaison modale (Fig. 4.13(c), 4.13(d), 4.15(c), 4.15(d)).

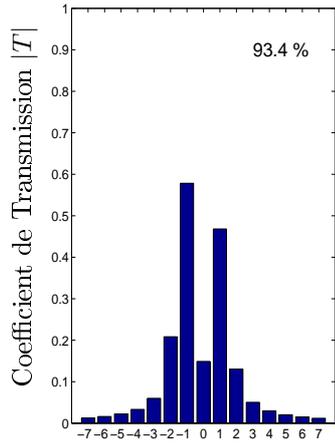
Les résultats illustrent l'importance des aspects tridimensionnels liés à la géométrie annulaire et à la hauteur  $R_2 - R_1$  des canaux et du conduit d'entrée d'air. Notamment, on peut comparer la propagation acoustique selon que la hauteur soit faible ou plus importante. La différence observée sur les figures 4.12(a) et 4.12(b) ainsi que sur les figures 4.14(a) et 4.14(b) est due au fait que la cartographie du champ sonore est réalisée sur une coupe cylindrique déroulée, de rayon moyen  $(R_1 + R_2)/2$  alors que le rapport de moyeu est différent. Il est cependant intéressant d'observer les modes radiaux qui se multiplient lorsque le rapport de moyeu diminue. Les figures 4.14 et 4.15 montrent qu'une partie de l'énergie qui était transmise lorsque la hauteur des canaux était faible se réfléchit lorsqu'on l'augmente. Par ailleurs, pour un faible rapport de moyeu (Fig. 4.13 ( $R_1/R_2 = 0.44$ ) et 4.15 ( $R_1/R_2 = 0.5$ )), le champ acoustique se concentre à la paroi du conduit d'entrée d'air, conformément à l'effet de peau généralement observée en propagation guidée. En revanche, l'amplitude de la pression sonore peut se répartir plus uniformément selon le rayon à l'intérieur des canaux inter-aubes. La possibilité pour l'onde de se propager azimuthalement favorise donc la concentration de l'énergie



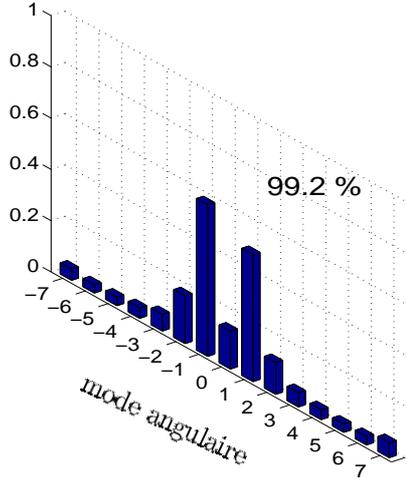
(c) coefficients de réflexion - 2D



(d) coefficients de réflexion - 3D annulaire



(e) coefficients de transmission - 2D



(f) coefficients de transmission - 3D annulaire

FIGURE 4.10 – Comparaison 2D ( $R1 = 0.062$ ) – 3D annulaire étroit ( $R1/R2 = 0.98$ ). (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0$ ,  $\Omega = 0$  tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

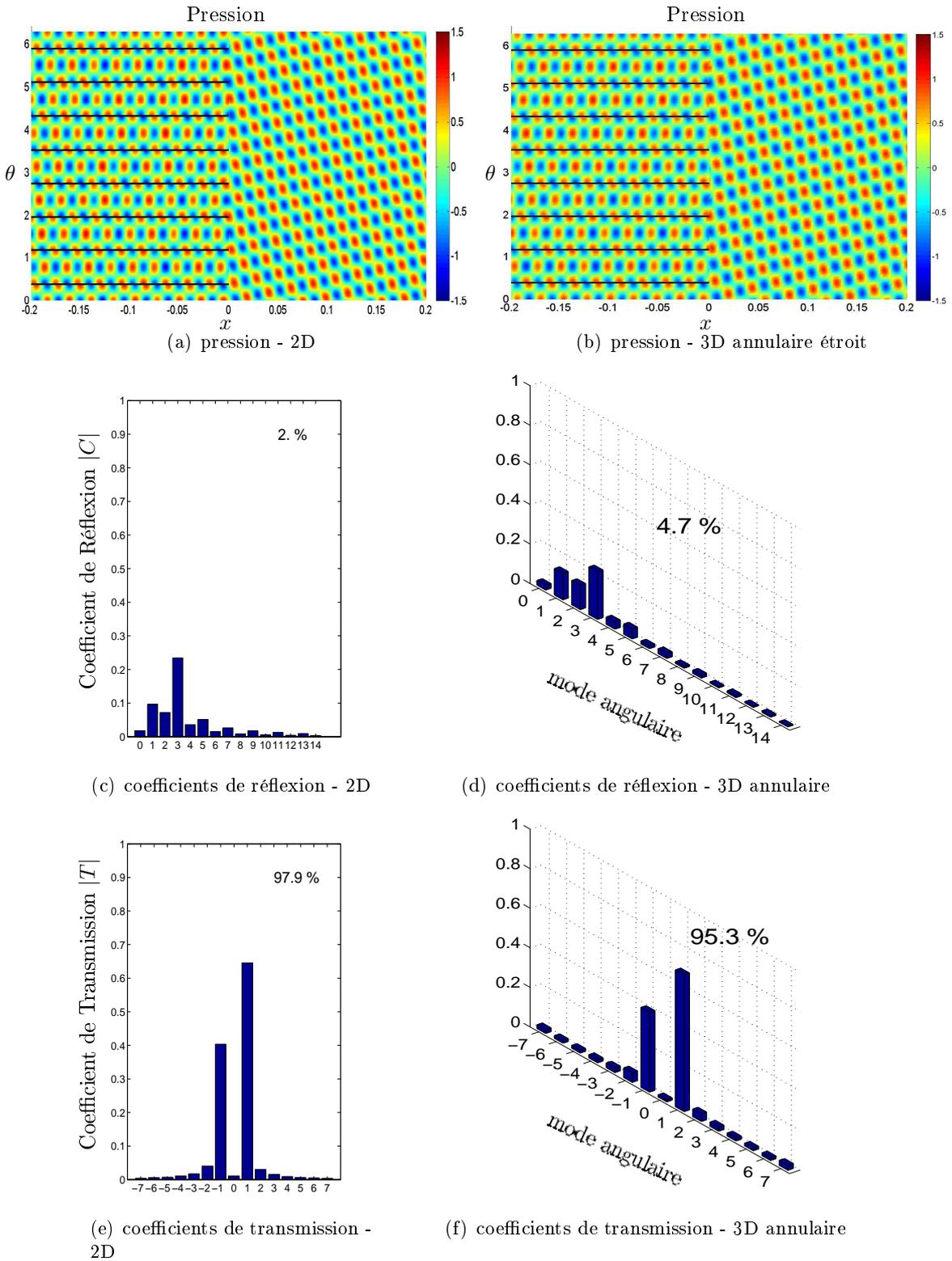


FIGURE 4.11 – Comparaison 2D ( $R1 = 0.044$ ) – 3D annulaire étroit ( $R1/R2 = 0.88$ ). (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 2$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 5$ ,  $\Omega = 0$  tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion (les modes à droite de la ligne pointillée sont coupés) et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

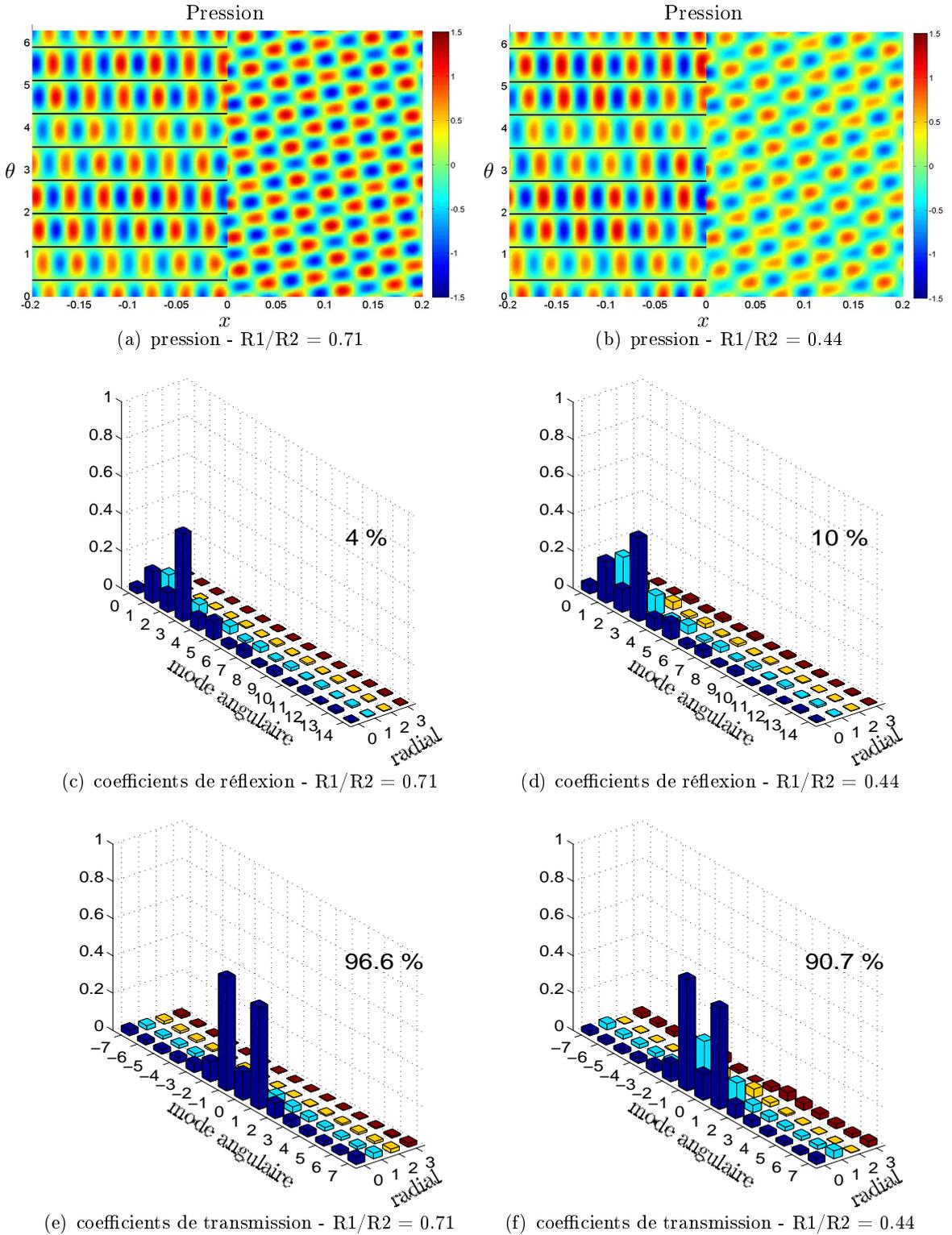


FIGURE 4.12 – Effet de l'évolution du rapport de moyeu  $R1/R2 = 0.71$  et  $R1/R2 = 0.44$ . (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$ ,  $v_i = 0$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0$ ,  $\Omega = 0$  tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

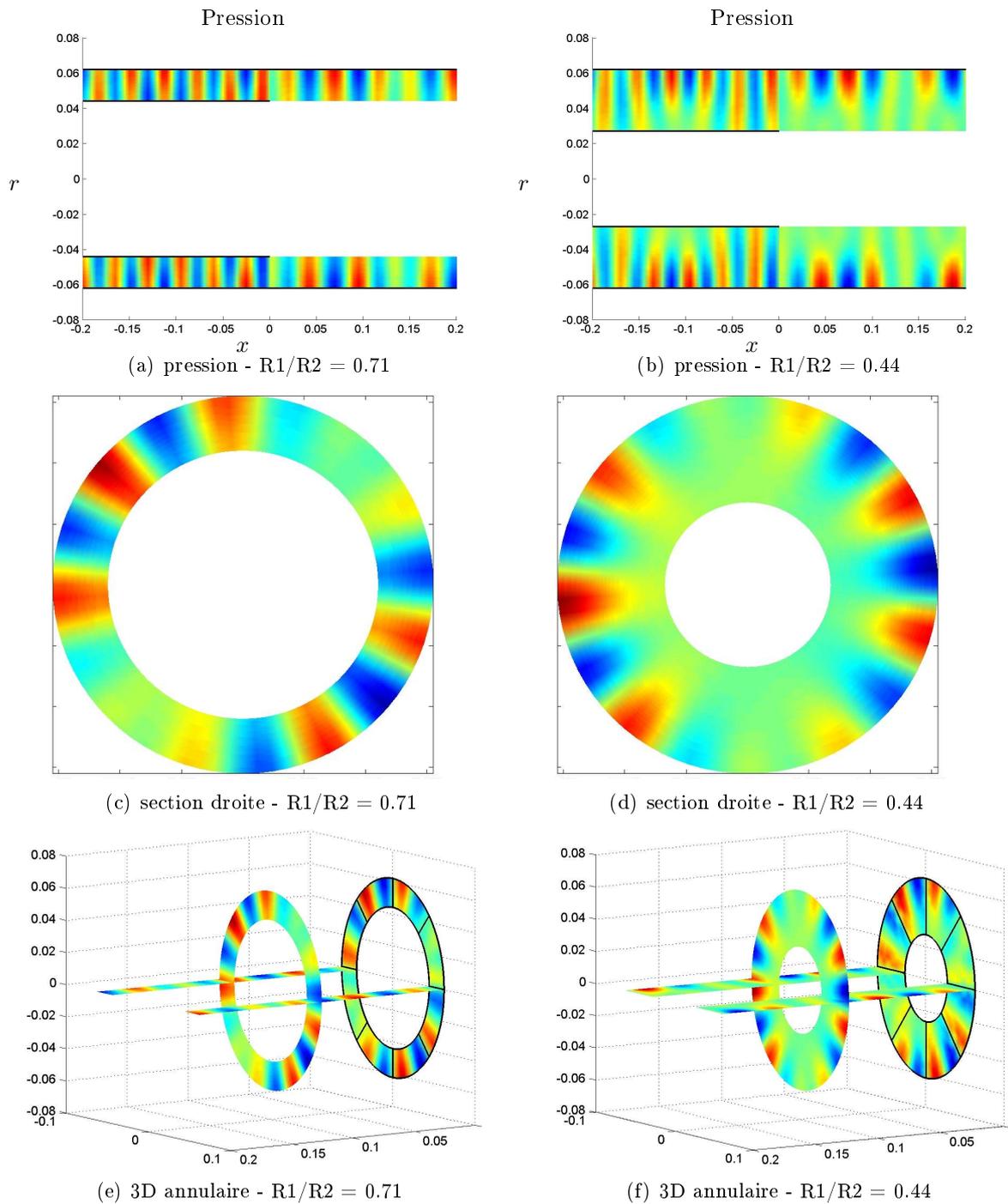


FIGURE 4.13 – Effet de l'évolution du rapport de moyeu  $R1/R2 = 0.71$  et  $R1/R2 = 0.44$ . (a) & (b) : Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 1$ ,  $v_i = 0$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0$ ,  $\Omega = 0$  tr/min dans un plan méridien ( $\theta = 0$ ). De (c) à (d) : Champs de pression acoustique dans des sections droites ( $z = 0.1$ ). De (e) à (f) : Champs de pression acoustique en entrée d'air.

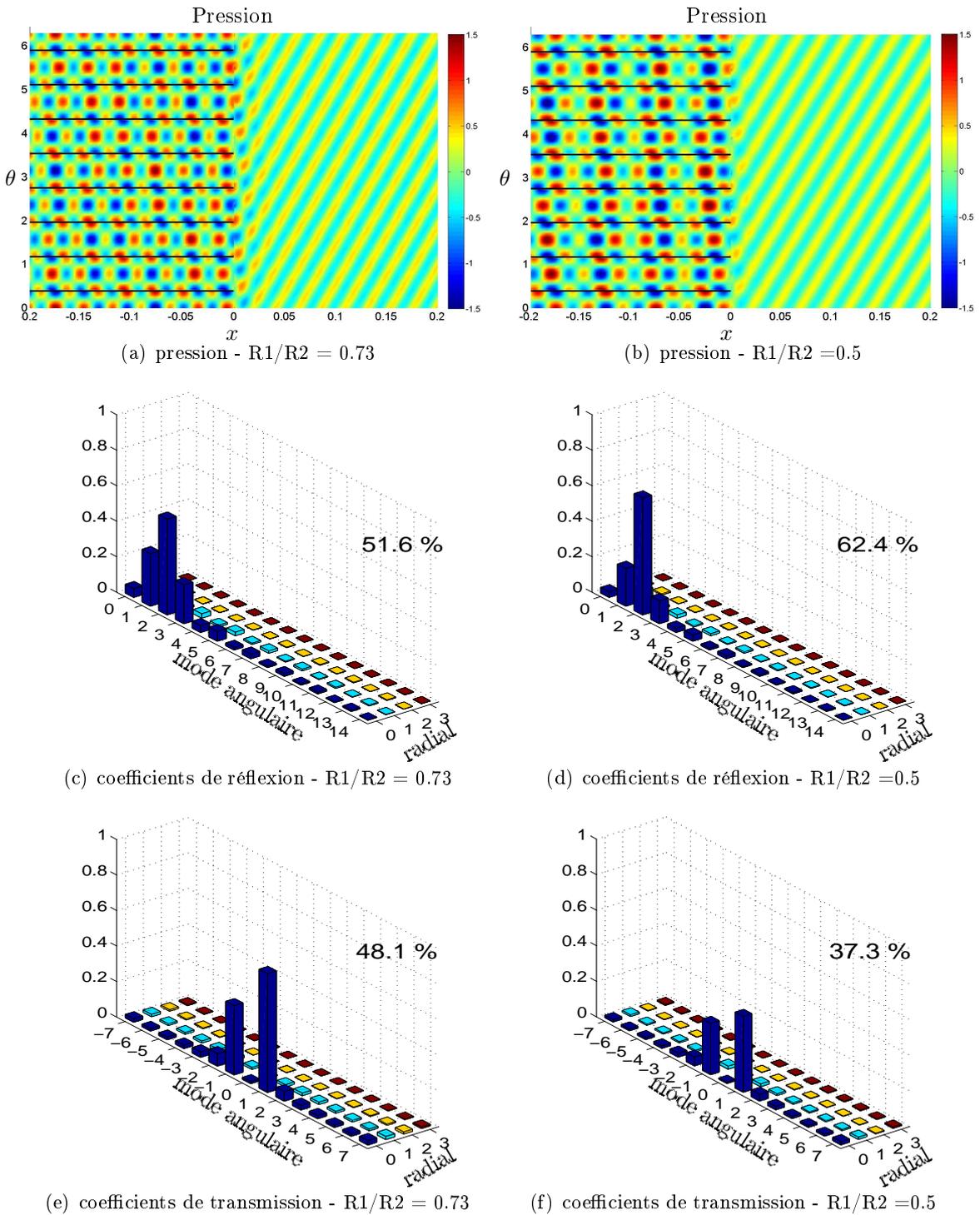


FIGURE 4.14 – Effet de l'évolution du rapport de moyeu  $R1/R2 = 0.73$  et  $R1/R2 = 0.5$ . (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 2$ ,  $v_i = 0$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0.5$ ,  $\Omega = 0$  tr/min. De (c) à (f) : coefficients de réflexion et de transmission, pourcentage de la puissance totale.

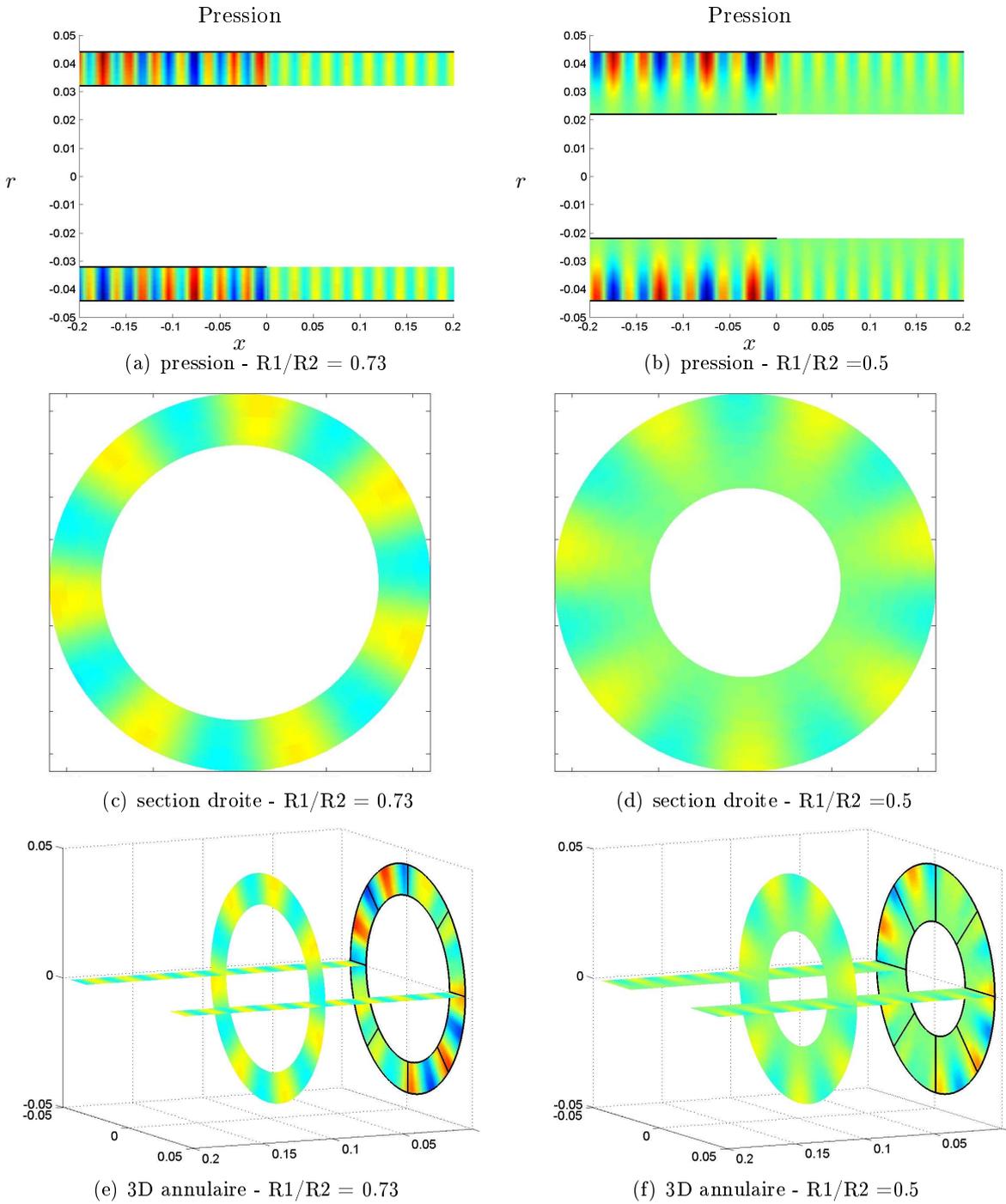


FIGURE 4.15 – Effet de l'évolution du rapport de moyeu  $R1/R2 = 0.73$  et  $R1/R2 = 0.5$ . (a) & (b) :Champs de pression acoustique pour un mode incident  $n_i = 2$ ,  $v_i = 0$  dans les canaux,  $f = 11000$  Hz,  $\alpha = 1$ ,  $M = 0.5$ ,  $\Omega = 0$  tr/min dans un plan méridien ( $\theta = 0$ ). De (c) à (d) : Champs de pression acoustique dans des sections droites ( $z = 0.1$ ). De (e) à (f) : Champs de pression acoustique en entrée d'air.

sur les paroi du guide.

Il est à noter que lorsque le rayon intérieur  $R_1$  tend vers zéro, ce type de calcul entraîne des défauts de bilan énergétique très importants. De telles configurations pointent donc les limites du modèle. Elles ne sont cependant pas réalistes car aucune technologie ne comporte un réseau de canaux avec un rapport de moyeu  $R_1/R_2$  faible à l'endroit du raccordement. Le modèle, tel qu'il est programmé à l'heure actuelle, reste donc robuste pour les applications envisagées. Par ailleurs, ramener une configuration réelle à un cas de raccordement annulaire qui étend le moyen de rayon  $R_1$  du côté de l'entrée d'air n'est pas préjudiciable. En effet le modèle est destiné à être raccordé avec un autre modèle de propagation le long du conduit d'entrée d'air, dans lequel le moyeu peut se terminer par une ogive.

## 4.5 Conclusion

Le raccordement entre les canaux inter-aubes et l'entrée d'air est un point très important dans l'objectif de couplage entre les différents modèles de propagation acoustique dans le compresseur centrifuge. Ce chapitre a permis de mettre en place une méthodologie de raccordement modal sur un réseau de canaux en deux puis en trois dimensions. Le modèle, sous ses différentes déclinaisons, met en lumière les mécanismes principaux de la diffraction par les réseaux. En revanche la formulation des équations de raccordement dans le cas général reste inachevée. Elle devra faire l'objet de développements ultérieurs.



## Chapitre 5

# Propagation guidée en conduit droit ouvert - Application à l'entrée d'air

### 5.1 Introduction

Une fois recomposé après sa transmission dans les canaux inter-aubes, le bruit d'interaction de sillages se propage dans le conduit d'entrée d'air avant de rayonner à l'extérieur. Le conduit est dans la réalité intégré à une architecture dont la géométrie peut être très diversifiée (gamelle, T ... -Fig. 5.1) pour des soucis d'intégration dans l'avion. Cette partie de la machine n'est donc pas un élément intrinsèque. Elle a pourtant un rôle important de fonction de transfert qui change la signature acoustique propre du compresseur. Pour en tenir compte, seuls des calculs numériques sont adaptés.

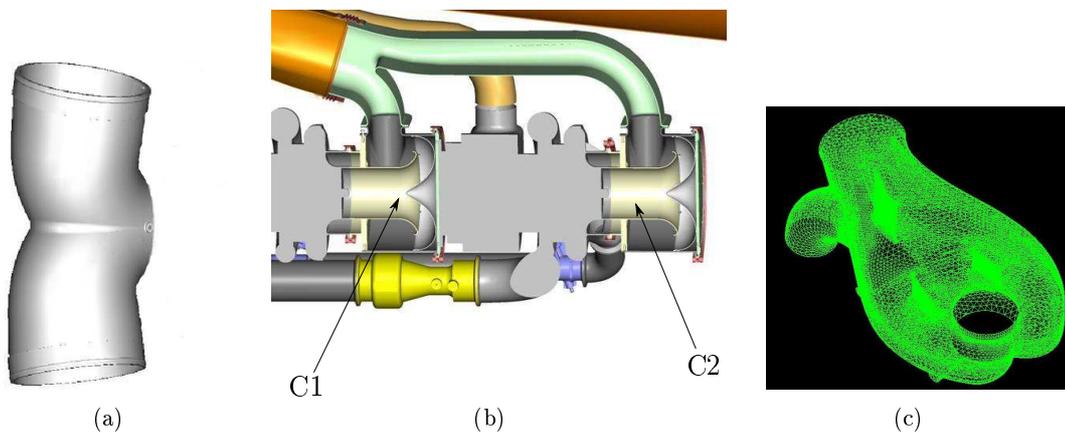


FIGURE 5.1 – Différentes géométries de gamelles de compresseurs. (a) : entrée d'air en T, (b) : distribution sur deux compresseurs (C1,C2), (c) : maillage CAO d'une alimentation de compresseur.

Dans le cadre de cette thèse, le but est de mettre au point des techniques analytiques capables de simuler la transmission depuis les sources jusqu'à un observateur extérieur, de façon à évaluer l'impact de modifications faites sur les sources. Il convient donc de privilégier les aspects intrinsèques du mécanisme d'interaction. C'est pourquoi il a été choisi de considérer

comme entrée d'air un conduit droit de longueur finie raccordé directement sur la face avant (sortie acoustique) du rouet.

L'objectif de ce chapitre est ainsi de modéliser le rayonnement acoustique par ce conduit droit dont l'extrémité débouchant à l'atmosphère est assimilée à celle d'un cylindre semi-infini à paroi rigide et à section circulaire (conduit non bafflé), selon la représentation de la figure 5.2. *A priori* s'intéresser au rayonnement par l'entrée d'air peut paraître superflu par rapport à l'objectif de caractérisation des sources. Néanmoins il constitue un moyen de comparer des calculs analytiques de rayonnement avec des mesures externes qui pourraient être faites sur le banc d'essai du chapitre 2. Il représente le maillon final d'une chaîne allant des sources jusqu'à l'observateur dans une configuration idéalisée.

Le point délicat de cette étape est le calcul de la diffraction par l'extrémité, qui repose sur une formulation analytique exacte obtenue par la technique de Wiener et Hopf. Les expressions du champ diffracté proposées par Lordi *et al.* [30] ont été choisies ici pour leur simplicité de programmation. Ce chapitre n'a pas la prétention de les redémontrer mais elles sont reprises dans le paragraphe 5.2 et comparées à d'autres références [29, 46, 41] ainsi qu'à des calculs numériques (paragraphe 5.3). Suite à des écarts observés et probablement dus à des erreurs de retranscription de la solution d'origine, des modifications sont proposées au paragraphe 5.4.

## 5.2 Solution du problème de diffraction par l'extrémité d'un cylindre

Un mode acoustique se propageant dans un conduit cylindrique jusqu'à son extrémité libre subit une diffraction donnant lieu à une onde réfléchie dans le conduit ainsi qu'à un rayonnement à l'extérieur.

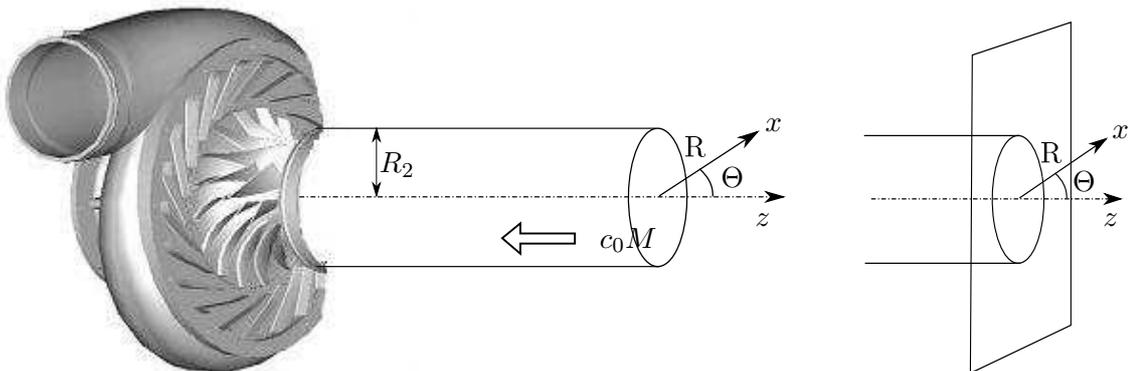


FIGURE 5.2 – Schéma du compresseur et son extension par un conduit d'entrée d'air cylindrique à bords libres ou bafflé.

### 5.2.1 Expressions de Lordi *et al.*

L'expression retenue dans cette étude pour la solution du problème de diffraction est celle proposée par Lordi, Homicz et Rehm [30]. Soit un mode incident d'ordres  $(n, j)$ , d'amplitude

$A_{nj}$  dont la fluctuation de pression acoustique dans le conduit s'écrit :

$$p'(r, \theta, z, t) = N_{nj} A_{nj} J_n(K_{nj} r) e^{i(\omega t + \bar{k}_{nj} \bar{z} + n\theta)} e^{i\bar{k} M \bar{z}} \quad (5.1)$$

avec successivement :

$$\bar{k}_{nj} = \sqrt{\bar{k}^2 - K_{nj}^2} \quad \bar{k} = \frac{k}{\beta} \quad \bar{z} = \frac{z}{\beta} \quad (5.2)$$

$$\beta = \sqrt{1 - M^2} \quad J'_n(K_{nj} R_2) = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Les valeurs propres  $K_{nj}$  sont déterminées à partir de la condition aux limites  $f'_{nj}(R_2) = 0$ . La normalisation est choisie telle que :  $\int_0^{R_2} f^2(r) r dr = 1$ . La fonction  $f_{nj}$  prend donc la forme :

$$f_{nj}(r) = N_{nj} J_n(K_{nj} r)$$

où  $N_{nj}$  est le facteur de normalisation. La solution fournit l'amplitude des modes d'indices  $(n, l)$  réfléchis, par l'intermédiaire de coefficients de réflexion partiels  $R_{njl}$ , ainsi que le rayonnement extérieur en champ lointain, par l'intermédiaire d'une fonction de directivité  $f_{nj}(\Theta)$ . On peut remarquer que les modes réfléchis gardent le même indice angulaire que le mode incident. En effet, pour des raisons de continuité du champ à l'extrémité du conduit, un mode tournant incident d'ordre  $n$  produit uniquement le mode tournant réfléchi de même ordre. En revanche, le mode radial incident d'ordre  $j$  donne lieu *a priori* à une réflexion sur tous les modes radiaux possibles. De plus, les expressions données par cette formulation sont valables uniquement loin de l'extrémité du conduit, aussi bien pour ce qui concerne le champ intérieur que pour ce qui concerne le champ extérieur.

Le champ de pression acoustique résultant à l'intérieur du conduit, en tenant compte de l'onde incidente ainsi que des ondes réfléchies s'écrit :

$$p'(r, \theta, z, t) = N_{nj} A_{nj} e^{i(\omega t + n\theta)} e^{i\bar{k} M \bar{z}} \left\{ e^{i\bar{k}_{nj} \bar{z}} J_n(K_{nj} r) + \sum_{l=0}^{\infty} P_{njl}^* e^{-i\bar{k}_{nl} \bar{z}} J_n(K_{nl} r) \right\} \quad (5.4)$$

Avec  $\bar{k} = k_0/\beta$ .

$$\bar{k}_{nj} = \sqrt{\bar{k}^2 - K_{nj}^2} \quad \text{pour un mode passant} \quad (5.5)$$

$$\bar{k}_{nj} = \bar{k}'_{nj} = i\sqrt{K_{nj}^2 - \bar{k}^2} \quad \text{pour un mode coupé} \quad (5.6)$$

$$P_{njl}^* = \frac{\bar{k} - M\bar{k}_{nl}}{\bar{k} + M\bar{k}_{nj}} R_{njl}^* \quad (5.7)$$

(\*) désignant le complexe conjugué.

Le facteur du coefficient de réflexion du mode  $(n, j)$  sur les modes  $(n, l)$ ,  $R_{njl}$  est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 R_{njl} &= -2 \frac{K_{nl} \bar{k}_{nj}}{K_{nj} (\bar{k}_{nj} + \bar{k}_{nl})} \frac{J_n(K_{nj} R_2)}{J_n(K_{nl} R_2)} \\
 &\times \sqrt{\frac{K_{nj}^2 R_2^2 - n^2}{K_{nl}^2 R_2^2 - n^2} \prod_{s=s_1 \neq j}^{s_0} \frac{\bar{k}_{ns} + \bar{k}_{nj}}{\bar{k}_{ns} - \bar{k}_{nj}} \prod_{s=0 \neq l}^{s_0} \frac{\bar{k}_{ns} + \bar{k}_{nl}}{\bar{k}_{ns} - \bar{k}_{nl}}} \\
 &\quad \times e^{\frac{1}{2}[S(\bar{k}_{nl}) + S(\bar{k}_{nj})]} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Dans cette expression,  $s_1 = 0$  si  $n = 0$  et  $s_1 = 1$  si  $n > 0$ .  $s_0$  désigne le rang du dernier mode radial passant, c'est à dire que pour  $s > s_0$ ,  $K_{ns} > \bar{k}$ . La fonction  $S$  sera explicitée plus loin.

Par ailleurs, toujours selon la formulation retenue, le champ acoustique lointain s'écrit :

$$p'(R, \Theta, \theta, t) = A_{nj} e^{i(\omega t + n\theta)} \frac{e^{i\bar{k}R}}{R} e^{i\bar{k}M\bar{z}} F_{nj}^*(\Theta) \quad (5.9)$$

avec :

$$F_{nj}^*(\Theta) = \frac{\bar{k}(1 + M \cos \bar{\Theta})}{\bar{k} + M\bar{k}_{nj}} f_{nj}^*(\Theta) \quad (5.10)$$

La fonction de directivité  $f_{nj}^*(\Theta)$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 f_{nj}(\Theta) &= -\frac{\bar{k}_{nj} J_n(K_{nj} R_2)}{\bar{k} \cos \bar{\Theta} - \bar{k}_{nj}} \sqrt{\frac{\prod_{s=1}^{s_0} \bar{k}_{ns} - \bar{k} \cos \bar{\Theta}}{\bar{k}_{ns} + \bar{k} \cos \bar{\Theta}}} \\
 &\times \sqrt{\frac{K_{nj}^2 R_2^2 - n^2}{\pi K_{nj}^2} \sin \Omega_n(\bar{k} R_2 \sin \bar{\Theta}) \prod_{s=1 \neq j}^{s_0} \frac{\bar{k}_{ns} + \bar{k}_{nj}}{\bar{k}_{ns} - \bar{k}_{nj}}} \\
 &\quad \times e^{\frac{1}{2}[S(\bar{k}_{nj}) - S(\bar{k} \cos \bar{\Theta})]} e^{\frac{i}{2}[\pi - \Omega_n(\bar{k} R_2 \sin \bar{\Theta})]} \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{R} = \frac{R}{\beta} \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \Theta} \quad (5.12)$$

$$\cos \bar{\Theta} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \Theta}} \quad \sin \bar{\Theta} = \frac{\beta \sin \Theta}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \Theta}} \quad (5.13)$$

La fonction  $S$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 S(\xi) &= \frac{1}{\pi} P_c \int_{-\bar{k}}^{\bar{k}} \Omega_n \left( R_2 \sqrt{\bar{k}^2 - \omega^2} \right) \frac{d\omega}{\omega - \xi} \pm i \Omega_n \left( R_2 \sqrt{\bar{k}^2 - \xi^2} \right) \\
 &\quad + \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \log \frac{\bar{k}'_{ns} + \xi}{\bar{k}'_{ns} - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Omega_n \left( R_2 \sqrt{\bar{k}^2 - \omega^2} \right) \frac{d\omega}{\omega - \xi} \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

où le symbole  $P_c$  signifie que la première intégrale est à évaluer au sens de la valeur principale de Cauchy.

Enfin, la fonction  $\Omega_n$  est définie de la façon suivante :

$$\Omega_n(X) = \arctan\left(\frac{Y'_n(X)}{J'_n(X)}\right) \pm \frac{\pi}{2} \quad (5.15)$$

avec le signe  $+$  si  $n = 0$  et le signe  $-$  si  $n > 0$ . On peut donc remarquer que  $\Omega_n(0) = 0$  pour toute valeur de  $n$ .

La dérivée de la fonction  $\Omega_n$  peut être écrite :

$$\Omega'_n(X) = \frac{Y''_n(X)J'_n(X) - Y'_n(X)J''_n(X)}{[J'_n(X)]^2 + [Y'_n(X)]^2} \quad (5.16)$$

et, pour des faibles valeurs de  $X$ , on a :

$$\Omega'_n(X) \sim -\frac{\pi}{n!(n-1)!} \left(\frac{X}{2}\right)^{2n-1} \quad \text{si } n > 0 \quad (5.17)$$

$$\Omega'_0(X) \sim \frac{\pi X}{2} \quad (5.18)$$

### 5.2.2 Adaptation des formules

La fonction  $S(\xi)$  fait intervenir deux intégrales qui nécessitent un traitement numérique. La première intégrale (celle définie selon la valeur principale de Cauchy) a donc été modifiée grâce à un changement de variable  $\omega = \bar{k}u$ , puis par une intégration par partie, et enfin par un second changement de variable  $u = \sin \Psi$ . La seconde intégrale, quant à elle, a été modifiée par deux changements de variables successifs,  $\omega = i\bar{k}x$  puis  $x = \xi u/\bar{k}$ . Finalement, la fonction  $S(\xi)$  s'écrit de façon équivalente :

$$S(\xi) = \frac{1}{\pi} P_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{k} R_2 \sin \Psi \ln \left| \sin \Psi - \frac{\xi}{\bar{k}} \right| \Omega'_n(\bar{k} R_2 \cos \Psi) d\Psi \pm i \Omega_n \left( R_2 \sqrt{\bar{k}^2 - \xi^2} \right) \\ + \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \log \frac{\bar{k}'_{ns} + \xi}{\bar{k}'_{ns} - \xi} + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_n \left( R_2 \bar{k} \sqrt{1 + \left[ \frac{u\xi}{\bar{k}} \right]^2} \right) \frac{du}{(1+u^2)} \quad (5.19)$$

La fonction  $\Omega_n$  peut être déterminée de différentes manières. Pour la version actuellement programmée sur Matlab 7.0.1, cette fonction est implémentée directement telle qu'elle est définie ici. Dans ce cas,  $\cos(\Omega_n)$  est discontinu.

## 5.3 Validation et comparaison et avec d'autres prédictions

### 5.3.1 Fonction de directivité

#### Comparaison avec l'approximation de la membrane bafflée

Le calcul exact des coefficients de réflexion (Éq. 5.8) et de la fonction de directivité (Éq. 5.11) est délicat. On peut donc le remplacer par une approximation. La solution la plus simple consiste à recourir à l'approximation dite de la membrane bafflée pour laquelle on considère que le conduit est intégré à un baffle rigide d'étendue infinie. On suppose alors qu'un mode incident rayonne comme une membrane circulaire (ou annulaire) qui vibrerait avec la vitesse acoustique axiale de ce mode, et on néglige les ondes réfléchies. On dispose d'une expression analytique approchée pour le champ rayonné, sous la forme [47] :

$$p'_{nj}(R, \Theta, t) = \frac{ik_{nj}}{2\pi R} A_{nj} e^{-i(\omega t - kR - n\theta)} \pi (R_2^2 - R_1^2) 2 \left[ \frac{f_{nj}(r) kr \sin \Theta J'_n(kr \sin \Theta)}{(R_2^2 - R_1^2) (K_{nj}^2 - k^2 \sin^2 \Theta)} \right]_{R_1}^{R_2} \quad (5.20)$$

Le tube d'entrée d'air est dans notre cas un conduit à section circulaire, l'équation 5.20 est donc considérée pour  $R_1 = 0$ . Le module de la fonction de directivité de la solution exacte  $f_{nj}^*(\Theta)$  peut ensuite être comparé au modèle du conduit bafflé. Dans toutes les visualisations de fonctions de directivité qui suivent, le conduit est placé sur le demi-axe à  $\Theta = 180^\circ$ .

Les résultats (Fig. 5.3) montrent un très bon accord entre l'approximation et la solution exacte du conduit droit tant que l'angle de rayonnement reste notablement inférieur à  $90^\circ$ . En revanche la solution approchée s'écarte de la solution exacte lorsque l'observateur s'approche du baffle ( $\Theta = 90^\circ$ ). De plus, l'approximation de la membrane bafflée ne donne pas accès à la propagation sous les angles supérieurs à  $90^\circ$ . Elle ne peut donc être utilisée en lieu et place de la solution exacte que si l'observateur reste en pratique à des angles inférieurs à  $75^\circ$ .

#### Comparaison avec des calculs numériques ACTRAN

Une étude numérique a été réalisée parallèlement à la thèse, afin de valider la méthode et le code de calcul, en collaboration avec la société Vibratéc [45]. Les calculs ont été effectués avec le logiciel ACTRAN/TM [1]. Le champ sonore est écrit sur la base d'un écoulement moyen potentiel et incompressible et résout l'équation de Helmholtz convectée. Une description analytique est programmée pour la propagation modale dans les conduits. Les schéma numérique utilisé comprend des éléments finis et infinis, et le modèle est axisymétrique. Pour des contraintes d'implémentation numérique, le conduit est affecté d'une épaisseur très faible mais non nulle. Son extrémité est bizautée et le maillage y est raffiné (Figure 5.4). Le modèle et le maillage ont été choisis afin de représenter au mieux la configuration du modèle analytique. Le domaine de calcul s'étend sur plusieurs diamètres dans la partie interne du conduit et se termine par une section droite où les conditions sont homogènes et où est imposée une excitation modale. À l'extérieur, le domaine se prolonge au delà du conduit, qui est artificiellement terminé par un culot. Cette partie du domaine a une influence négligeable sur les résultats.

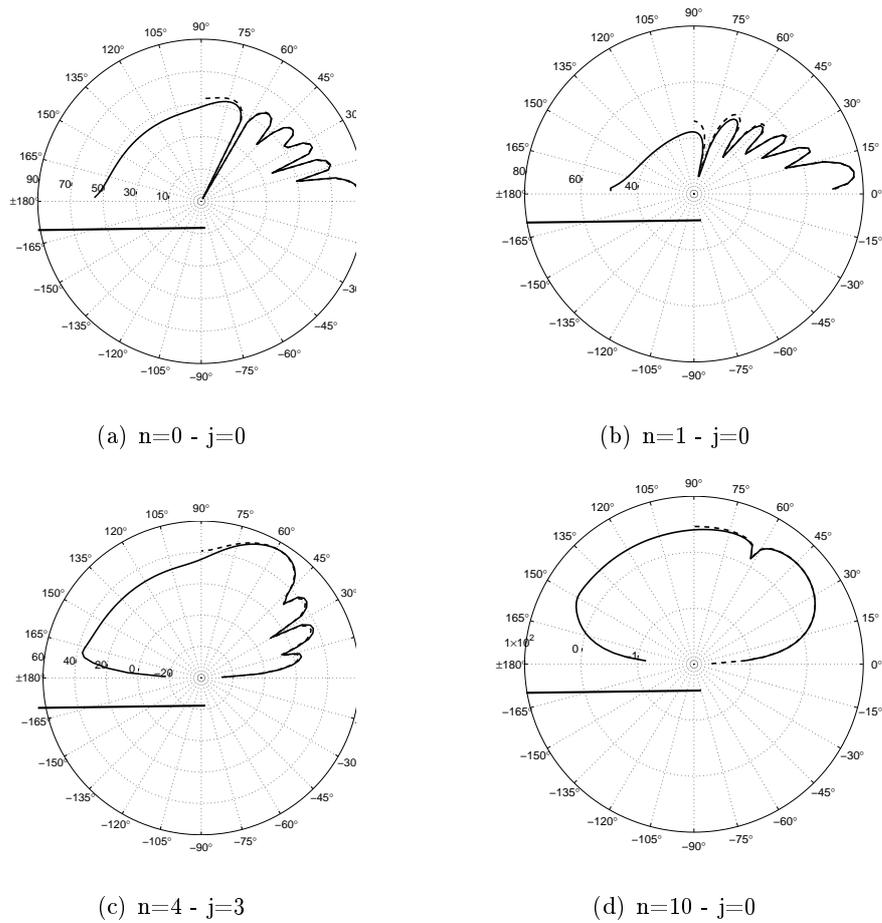


FIGURE 5.3 – Module de la fonction de directivité  $f_{nj}^*(\Theta)$  pour  $k_0 R_2 = 18.65$  (en dB) - Comparaison entre la théorie de Wiener-Hopf (trait plein) et l'approximation de la conduite bafflée (pointillés)

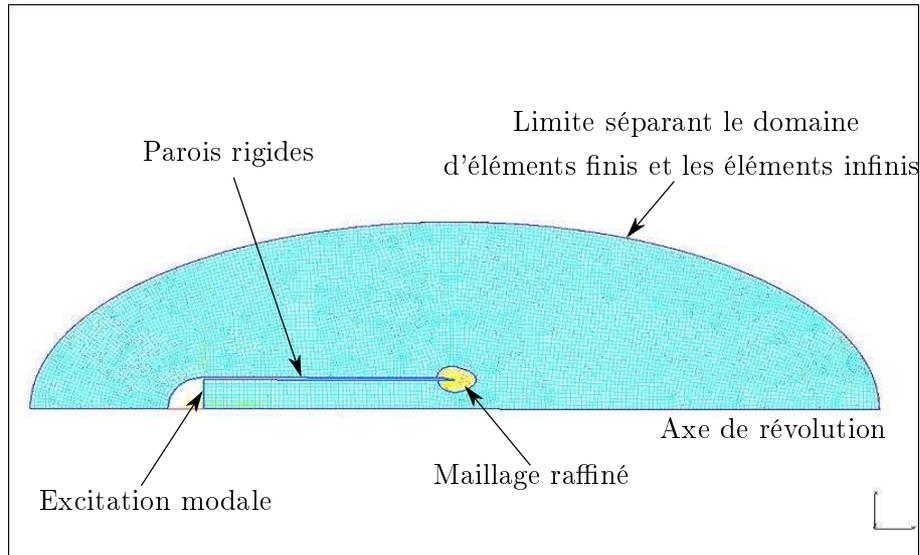


FIGURE 5.4 – Définition de la configuration et des conditions aux limites pour le calcul de simulation numérique ACTRAN

Les comparaisons sont données sur la figure 5.5 où le niveau en dB est tracé pour une amplitude d'excitation arbitraire mais identique dans les deux calculs. Les résultats analytiques et numériques sont en très bon accord pour ce qui est de la prédiction des lobes de directivité dans tous les cas testés.

### 5.3.2 Facteurs de réflexion

#### Comparaison avec des solutions de référence

Lors de la programmation de la formulation de Lordi *et al.* [30], des résultats surprenant ont été obtenus, concernant certains facteurs de réflexion en amplitude. En effet, aux fréquences légèrement supérieures à la coupure, les amplitudes des facteurs de réflexion dépassaient 1. Il a été vérifié qu'une autre programmation de la même formulation effectuée par Lidoine *et al.* [29] menait à un constat identique. Il semble donc que des erreurs de retranscription rendent la formulation de Lordi *et al.* discutable telle qu'elle est publiée, pour le calculs des coefficients de réflexion.

Une comparaison avec d'autres formulations du même problème, disponibles dans la littérature, a donc été effectuée. Notamment des résultats complets ont été publiés par A.Snakowska & R.Wyrzykowski [46] pour les modes symétriques ( $n = 0 - j = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) avec une écriture différente de la solution de Wiener-Hopf. Ces résultats ne coïncident pas avec ceux obtenus ici selon la formulation plus générale de Lordi *et al.* [30]. Néanmoins, ils semblent plus consistants car ils respectent les lois de la physique avec des facteurs de réflexion qui ne dépassent jamais 1.

#### Comparaison avec des calculs numériques ACTRAN/TM

Les écarts précédemment observés justifient un recours au calcul numérique pour prédire les coefficients de réflexions. Ces derniers sont encore déduits par le code ACTRAN/TM. Une

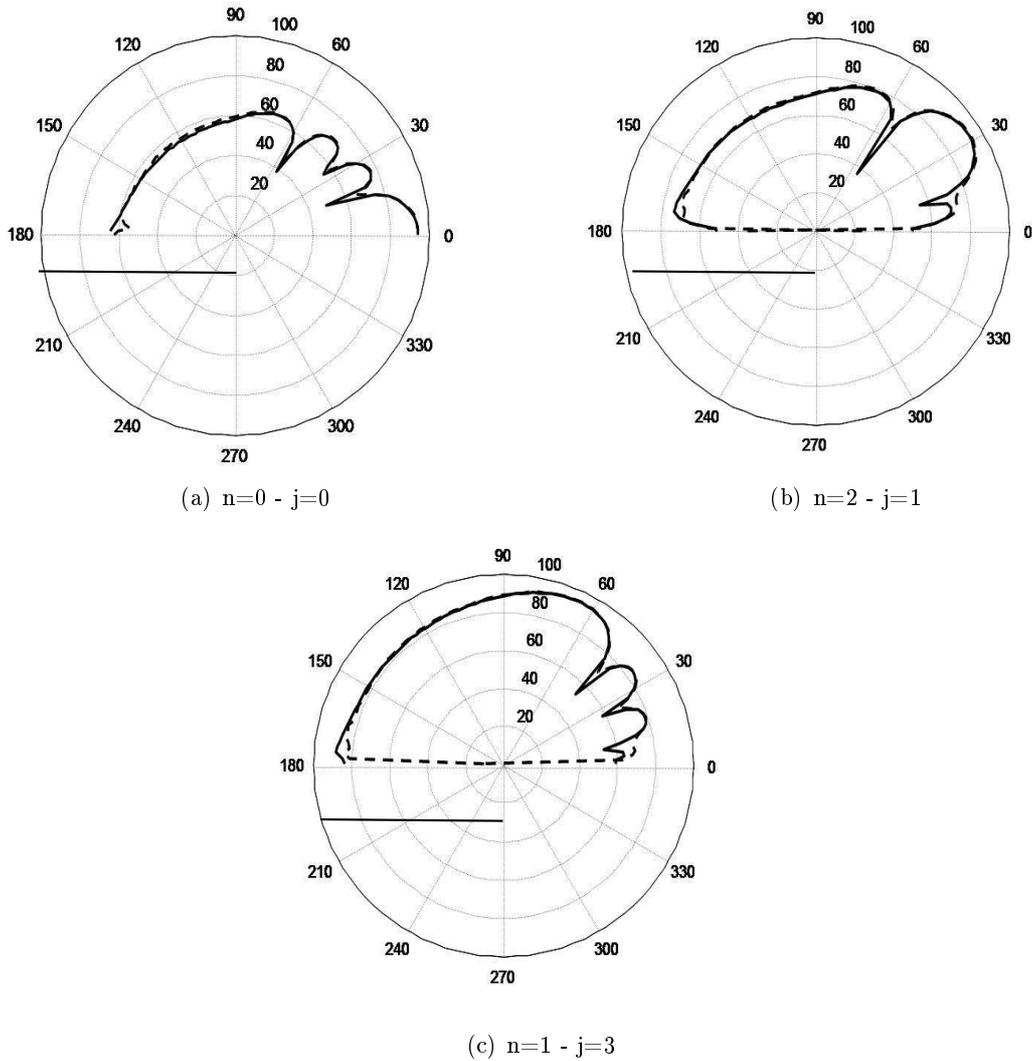


FIGURE 5.5 – Module de la fonction de directivité  $f_{nj}^*(\Theta)$  (en dB) - Comparaison entre les prédictions analytiques (trait continu) et numériques (pointillés)

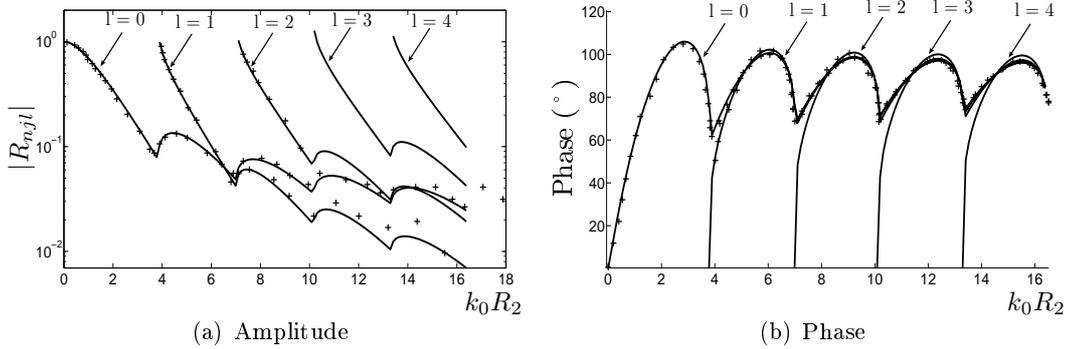


FIGURE 5.6 – Comparaison des prédictions selon le modèle de Lordi *et al.* (trait continu) avec les résultats extraits de [29] (+) - Amplitude (a) et phase (b) des coefficients de réflexion du mode plan (0,0) en fonction de  $k_0 R_2$

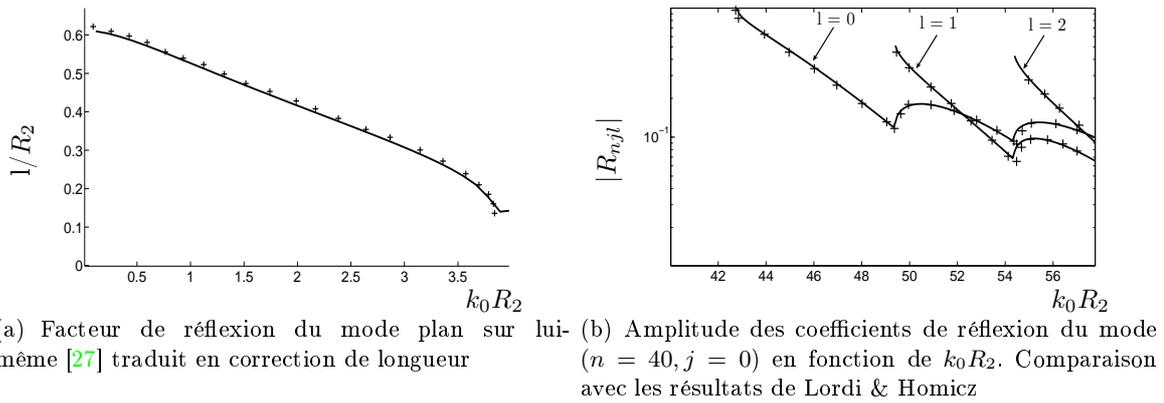


FIGURE 5.7 – Comparaison des résultats de la solution Wiener-Hopf avec les références [27, 30] représentées par les symboles (+)

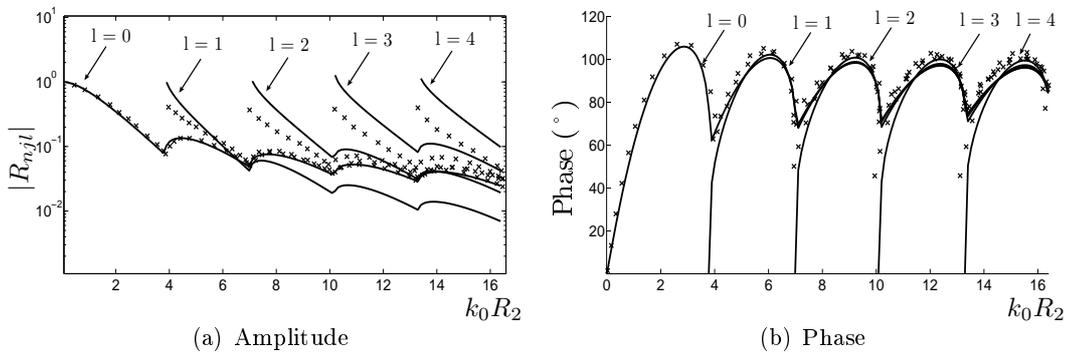


FIGURE 5.8 – Comparaison des facteurs de réflexion calculés (trait continu) avec les résultats de Snakowska [46] (+) (Amplitude (a) et phase (b)) - Mode plan incident (0,0) en fonction de  $k_0 R_2$

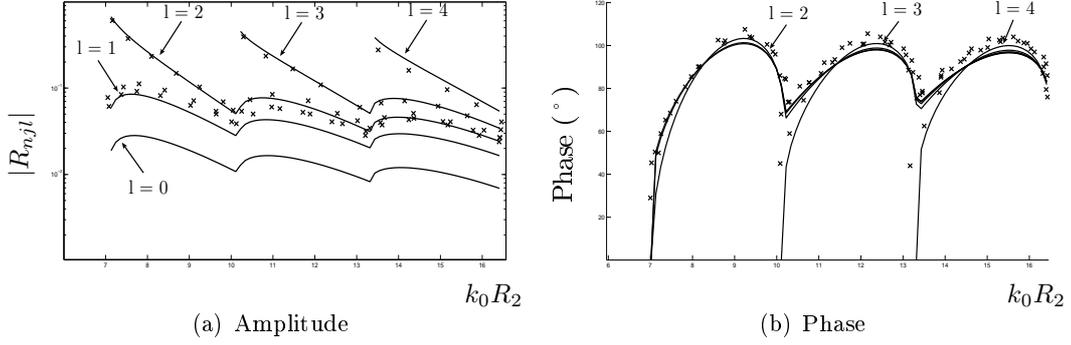


FIGURE 5.9 – Comparaison des facteurs de réflexion calculés (trait continu) avec les résultats de Snakowska [46] (+) (Amplitude (a) et phase (b)) - Mode incident (0, 2) en fonction de  $k_0 R_2$

grande différence a encore été observée entre la solution analytique et les résultats numériques (Fig. 5.10) et confirme une erreur dans les expressions publié par Lordi *et al.*

## 5.4 Modifications dans les formules

Les résultats indiquent que la formulation choisie coïncide avec d'autres pour des cas particuliers (réflexion du mode incident sur lui-même) et s'en écartent dans des cas plus généraux, ce qui laisse supposer des erreurs d'indices. Des tests ont donc été menés pour proposer des corrections sans avoir à reprendre intégralement la formulation (très complexe) d'origine. Une version corrigée de la formulation de Homicz & Lordi [30] est donnée dans ce paragraphe sans démonstration.

Pour les modes symétriques, la nouvelle expression proposée pour le coefficient de réflexion  $R_{0jl}$  est :

$$R_{0jl} = -2 \frac{K_{0l} \bar{k}_{0j}}{K_{0j} (\bar{k}_{0j} + \bar{k}_{0l})} \times \sqrt{\frac{K_{0j}^2 R_2^2}{K_{0l}^2 R_2^2} \prod_{s=0 \neq j}^{s_0} \frac{\bar{k}_{0s} + \bar{k}_{0j}}{\bar{k}_{0s} - \bar{k}_{0j}} \prod_{s=0 \neq l}^{s_0} \frac{\bar{k}_{0s} + \bar{k}_{0l}}{\bar{k}_{0s} - \bar{k}_{0l}}} \times e^{\frac{1}{2}[S(\bar{k}_{0l}) + S(\bar{k}_{0j})]} \quad (5.21)$$

$s_0$  désigne, comme précédemment, le rang du dernier mode radial passant. La fonction  $S$  ne change pas. La correction consiste à calculer tous les produits à partir de  $s = 0$ . De plus, le terme  $J_n(K_{nj} R_2) / J_n(K_{nl} R_2)$  doit être supprimé pour que les résultats coïncident avec les courbes de référence [46] ou la validation numérique. L'accord obtenu est alors parfait pour tous les modes symétriques, à de petits écarts près sans conséquence.

Des écarts substantiels non résolus persistent pour les modes non symétriques. Les premiers résultats obtenus après le changement dans les indices sont donnés sur la figure 5.12. On remarque que les courbes sont identiques à une constante près. Cette constante peut être déterminée pour chaque mode réfléchi, et elle est attribuable à un facteur erroné constant dans l'expression 5.8. Il semble finalement que le rapport des fonctions de Bessel soit le terme

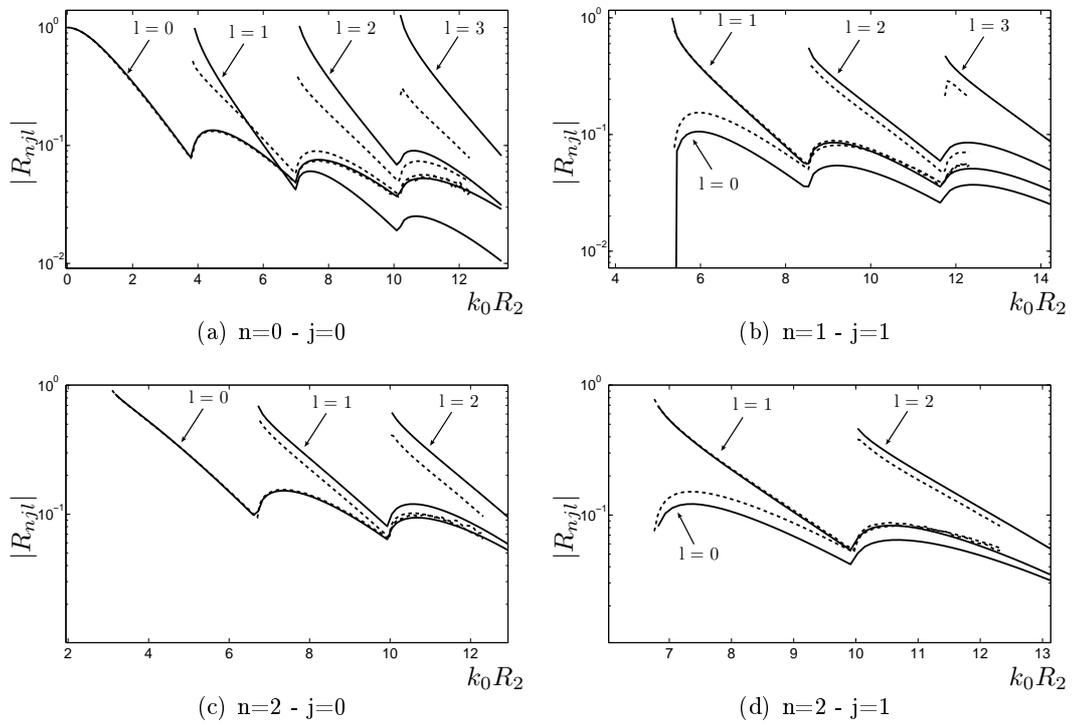


FIGURE 5.10 – Module de  $R_{njl}$  en fonction de  $k_0 R_2$  - Comparaison entre la solution numérique (pointillés) et le calcul analytique (trait plein)

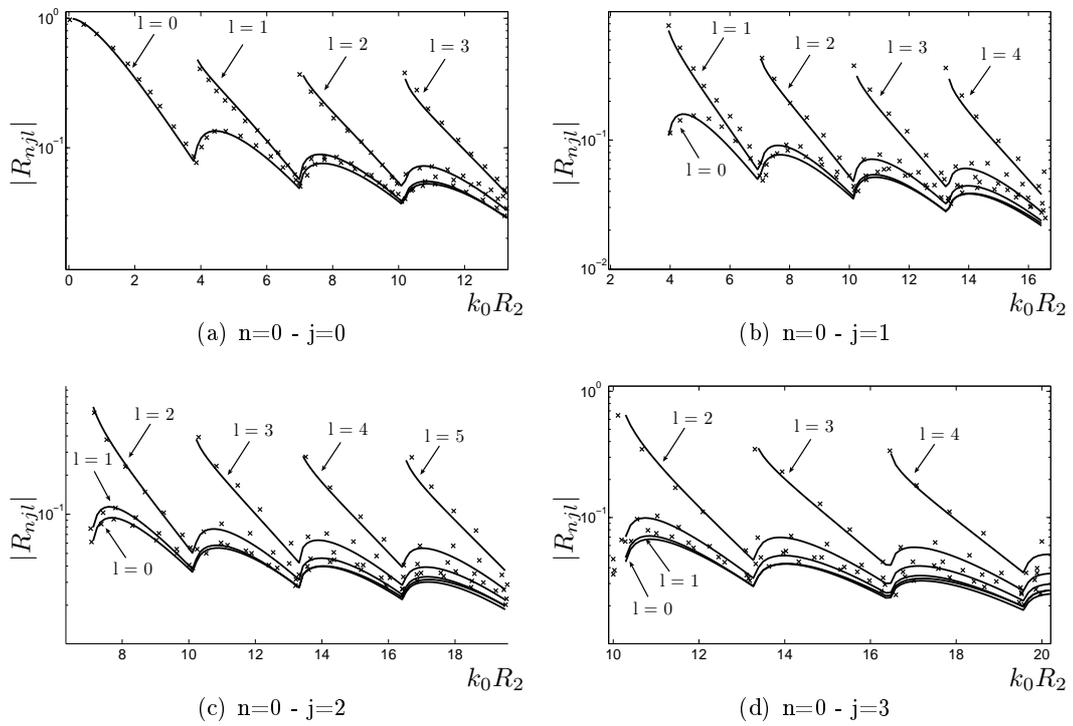
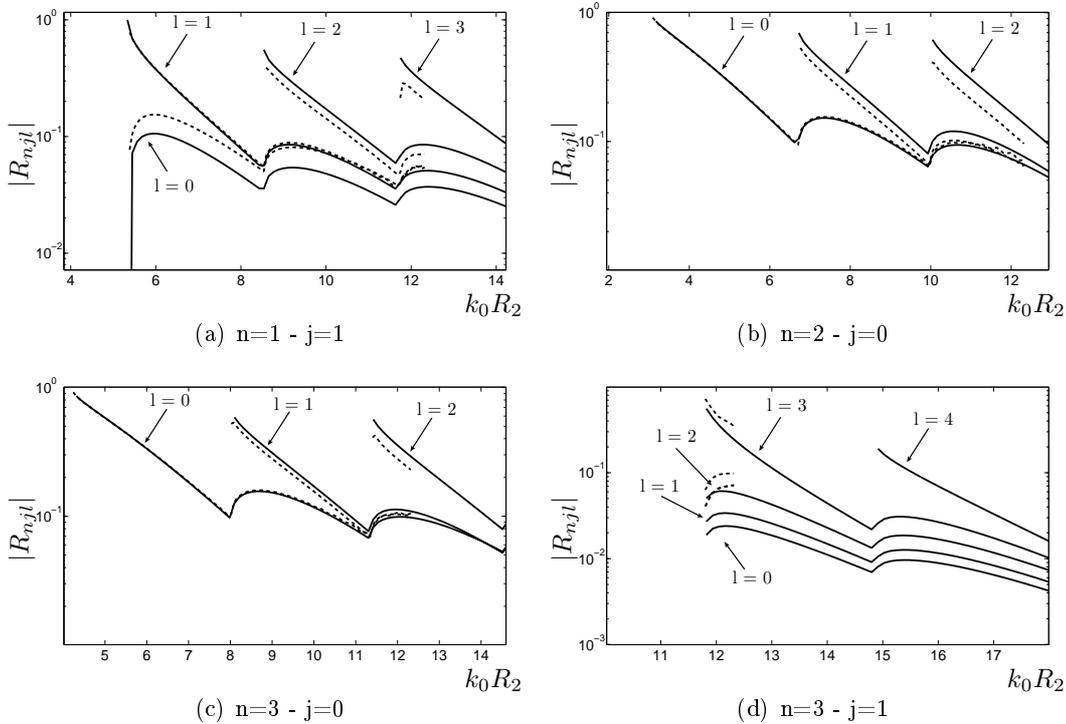


FIGURE 5.11 – Comparaison entre les résultats extraits de [46] (croix bleu) et le calcul analytique (rouge plein) - Modes (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) en fonction de  $k_0 R_2$

principalement incriminé car la réflexion du mode incident sur lui même reste correctement prédite. Les nouveaux résultats après recalage sont donnés sur la figure 5.13. Les coefficients de recalage  $B_{nl}$  qui doivent remplacer les rapports de fonction de Bessel sont fournis dans le tableau 5.1. La formulation des coefficients de réflexion est alors la suivante :

$$R_{njl} = -2 \frac{K_{nl} \bar{k}_{nj}}{K_{nj} (\bar{k}_{nj} + \bar{k}_{nl})} B_{nl} \times \sqrt{\frac{K_{nj}^2 R_2^2 - n^2}{K_{nl}^2 R_2^2 - n^2} \prod_{s=0 \neq j}^{s_0} \frac{\bar{k}_{ns} + \bar{k}_{nj}}{\bar{k}_{ns} - \bar{k}_{nj}} \prod_{s=0 \neq l}^{s_0} \frac{\bar{k}_{ns} + \bar{k}_{nl}}{\bar{k}_{ns} - \bar{k}_{nl}}} \times e^{\frac{1}{2}[S(\bar{k}_{nl}) + S(\bar{k}_{nj})]}$$

mode incident	mode réfléchi (n, 0)	(n, 1)	(n, 2)	(n, 3)	(n, 4)
$n = 2 - j = 0$	1	1.3	1.3	—	—
$n = 3 - j = 0$	1	1.38	1.4	—	—
$n = 1 - j = 1$	0.86	1	1.05	1.08	1.1
$n = 1 - j = 3$	0.87	1.04	1.03	—	—
$n = 1 - j = 2$	0.87	1.04	1	1.05	1.08
$n = 2 - j = 1$	0.68	1	1.07	1.08	—

 TABLE 5.1 – Coefficients de recalage  $B_{nl}$ 

 FIGURE 5.12 – Comparaison entre ACTRAN (pointillés) et le calcul analytique (trait plein) - Modes (1, 1), (2, 0), (3, 0) et (3, 1) en fonction de  $k_0 R_2$  - formulation initiale de Lordi *et al.*

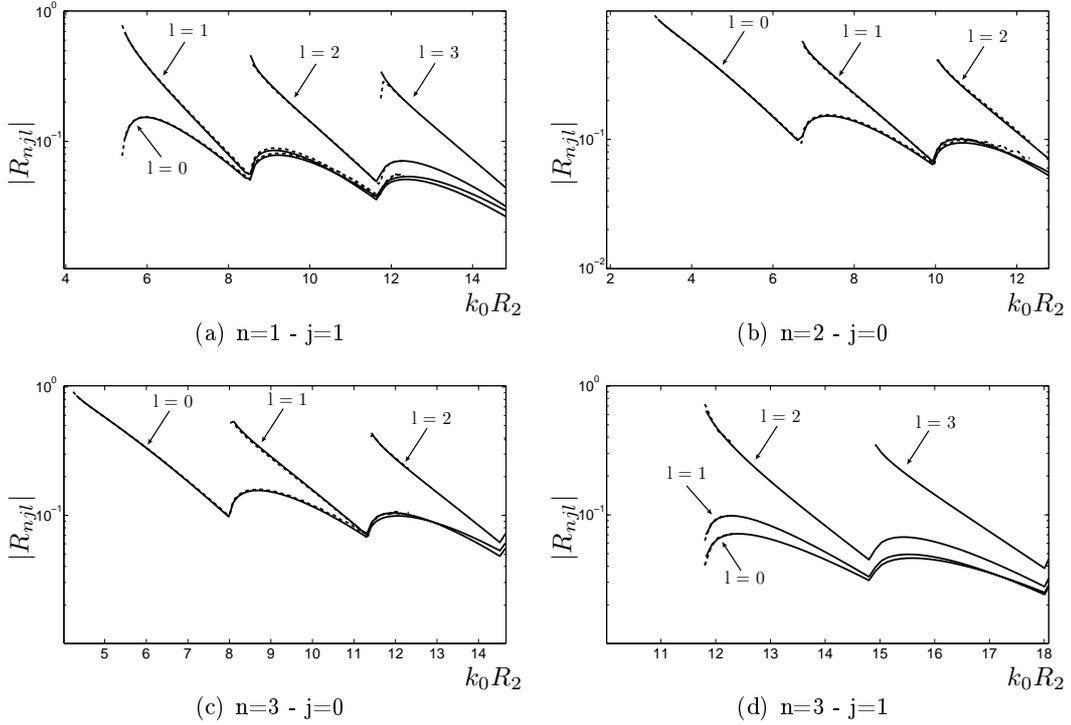


FIGURE 5.13 – Comparaison entre ACTRAN (pointillés) et le calcul analytique (trait plein) - Modes (1, 1), (2, 0), (3, 0) et (1, 3) en fonction de  $k_0 R_2$  - recalage avec un terme multiplicatif

#### 5.4.1 Bilan de puissance

Après ces modifications et afin de connaître l'erreur faite lors de la détermination des coefficients de réflexion et du facteur de directivité, un bilan de puissance a été évalué. Il s'agit de vérifier que la puissance incidente est bien égale à la somme des puissances transmise (rayonnée) et réfléchi. Les calculs sont donnés ici sans écoulement.

La puissance est définie de la manière suivante :

$$W = \int_{(S)} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.22)$$

avec  $\mathbf{I} = p' \times v'^*$ ,  $p'$  étant la pression acoustique et  $v'$ , la vitesse acoustique.

Pour un mode incident  $(n, j)$ , les expressions des puissances incidentes et réfléchies sont donc les suivantes :

$$W_i = \frac{2\pi A_{nj}^2}{\rho c} \int_0^r J_n(K_{nj}r)^2 r dr \quad (5.23)$$

$$W_r = \sum_{l=l_1}^{\infty} |P_{jnl}^*|^2 \frac{2\pi A_{nj}^2}{\rho c} \int_0^r J_n(K_{nl}r)^2 r dr \quad (5.24)$$

La puissance acoustique transmise est calculée par intégration de l'intensité rayonnée sur une sphère d'écoute, selon l'expression du champ lointain. L'intégration est faite de façon

numérique par la méthode des trapèzes.

L'erreur relative est définie comme la puissance résiduelle du bilan rapportée à la puissance de l'onde incidente. Les résultats obtenus grâce à ce calcul de puissance sont reportés dans le tableau 5.2.

Fréquence réduite	mode $(n, j)$	erreur relative
$k_0 R_2 = 0.9735$	(0, 0)	$\epsilon = 0.063\%$
$k_0 R_2 = 1.9469$	(0, 0)	$\epsilon = 0.567\%$
$k_0 R_2 = 2.9204$	(0, 0)	$\epsilon = 1.315\%$
$k_0 R_2 = 3.8938$	(0, 0)	$\epsilon = 1.749\%$
$k_0 R_2 = 4.8673$	(0, 0)	$\epsilon = 0.906\%$
$k_0 R_2 = 5.8407$	(0, 0)	$\epsilon = 1.173\%$
$k_0 R_2 = 9.7345$	(0, 0)	$\epsilon = 1.162\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(0, 0)	$\epsilon = 1.871\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(0, 1)	$\epsilon = 0.625\%$
$k_0 R_2 = 56.99$	(0, 1)	$\epsilon = 1.098\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(0, 2)	$\epsilon = 0.267\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(0, 5)	$\epsilon = 1.894\%$
$k_0 R_2 = 3.89$	(1, 0)	$\epsilon = 0.862\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(2, 0)	$\epsilon = 0.893\%$
$k_0 R_2 = 5.84$	(2, 0)	$\epsilon = 0.686\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(5, 0)	$\epsilon = 0.275\%$
$k_0 R_2 = 10.7$	(2, 2)	$\epsilon = 1.687\%$
$k_0 R_2 = 11.68$	(2, 2)	$\epsilon = 1.218\%$
$k_0 R_2 = 19.469$	(2, 2)	$\epsilon = 0.654\%$
$k_0 R_2 = 23.36$	(2, 2)	$\epsilon = 0.883\%$
$k_0 R_2 = 56.46$	(40, 0)	$\epsilon = 0.679\%$

TABLE 5.2 – Bilan de puissance - Erreur relative entre la puissance incidente et la somme des puissances rayonnée et réfléchie, selon le modèle de Lordi *et al.* corrigé.

On remarque que même à proximité des fréquences de coupure des modes, l'erreur reste inférieure à 2%, ce qui est acceptable; elle pouvait approcher les 7% avant les modifications apportées à la formulation. Finalement, les modifications sur les facteurs de réflexion des modes symétriques sont validées par comparaison avec les travaux d'A.Snakowska & R.Wyrzykowski [46] (confirmés aussi par Rienstra [39]). Les coefficients donnés par les formules de Lordi & Homicz conservent une erreur pour les modes tournants, surtout importante au voisinage des fréquences de coupure des modes. Pour l'instant, ces erreurs n'ont pas été corrigées autrement qu'au coup par coup grâce à un recalage sur un calcul numérique. Une correction plus probante demanderait un nouvel examen de la procédure de résolution par la technique de Wiener-Hopf, travail qui ne faisait pas partie du propos de la thèse. L'impact de ce défaut est faible. Les erreurs n'affectent en effet que la réflexion en extrémité du conduit d'entrée d'air et lorsque celle-ci est notable, donc au voisinage de la coupure d'un mode. Tant qu'un calcul complet de la transmission depuis les sources vers l'extérieur, comprenant des réflexions multiples aux différentes interface, n'est pas mis en application, de telles erreurs ne portent pas à conséquence. L'effet majeur de la diffraction par l'extrémité, à savoir la structu-

---

ration du rayonnement en champ lointain est correctement prédit par la formulation de Lordi *et al.*. Le modèle remplit donc les objectifs principaux attendus dans le cadre de cette thèse.

## 5.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de calculer la propagation acoustique dans un conduit droit à l'extrémité libre en prenant en compte un écoulement débitant. L'étude a été menée à partir de la formulation analytique de Lordi *et al.* [30] fondée sur la technique de Wiener-Hopf. Après des comparaisons avec la littérature des doutes sont apparus sur la détermination des facteurs de réflexion, et des calculs numériques complémentaires ont été menés sur ACTRAN/TM [45]. Des corrections simples ont été proposées, à l'issue desquelles le résultat est validé pour les modes symétriques. La question de la correction systématique pour les modes tournants reste ouverte, mais elle peut être traitée par un calcul numérique, à faire une fois pour toutes. Le modèle recalé est donc utilisable comme dernier maillon d'un chaînage avec les modèles proposés dans les autres chapitres, pour représenter la configuration du banc d'essai du chapitre 2.



## Chapitre 6

# Vers un modèle global de la propagation dans un compresseur

Ce travail de thèse s'inscrit dans une recherche à plus long terme visant la mise en place d'un modèle de propagation acoustique à travers un compresseur centrifuge. La particularité de cette étude consiste en son approche modale. En effet, tous les sous-modèles développés et présentés dans les chapitres précédents sont basés sur le principe d'une décomposition modale qui vise à suivre l'évolution d'un mode le long de la géométrie. L'étape suivante consistera à coupler les sous-modèles développés. Elle n'a pas pu être réalisée totalement durant cette thèse mais le principe du chaînage est décrit dans ce dernier chapitre, comme une ouverture sur des perspectives ultérieures. À cette occasion, quelques procédures annexes nécessaires pour décrire la propagation sont décrites.

Le modèle complet devra fournir à l'utilisateur la fonction de transfert entre les sources et le bruit à l'extérieur d'un compresseur centrifuge, et permettre alors de déterminer, au stade du prédimensionnement, une configuration à moindre bruit. Cette démarche s'entend au sens de l'application de la transmission, indépendamment de l'amplitude des sources.

### 6.1 Récapitulatif des sous-modèles développés

L'étude concerne la propagation du champ sonore produit par l'interaction rotor/stator. Les différents sous-modèles présentés dans les précédents chapitres ou développés lors de précédentes études sont listés ci-dessous, chacun associé à une géométrie simplifiée.

- Fig. 6.1(a) : Raccordement entre le diffuseur et la roue [42], visant à définir une excitation acoustique à la périphérie.
- Fig. 6.1(b) : Propagation dans les canaux inter-aubes (Chapitre 3)
- Fig. 6.1(c) : Raccordement entre la roue et le conduit d'entrée d'air (Chapitre 4)
- Fig. 6.1(d) : Propagation dans le conduit d'entrée d'air et rayonnement (Chapitre 5)

Chaque sous-modèle a été développé indépendamment et permet dans un premier temps de comprendre et d'appréhender des phénomènes fondamentaux existant dans des configurations complexes. En effet, le champ acoustique engendré par les sources de bruit rotor/stator est restructuré par la géométrie des canaux et l'écoulement qui y transite. Ces phénomènes ont été décrits dans le chapitre 3. L'objectif final de l'étude est la conception d'un compresseur à

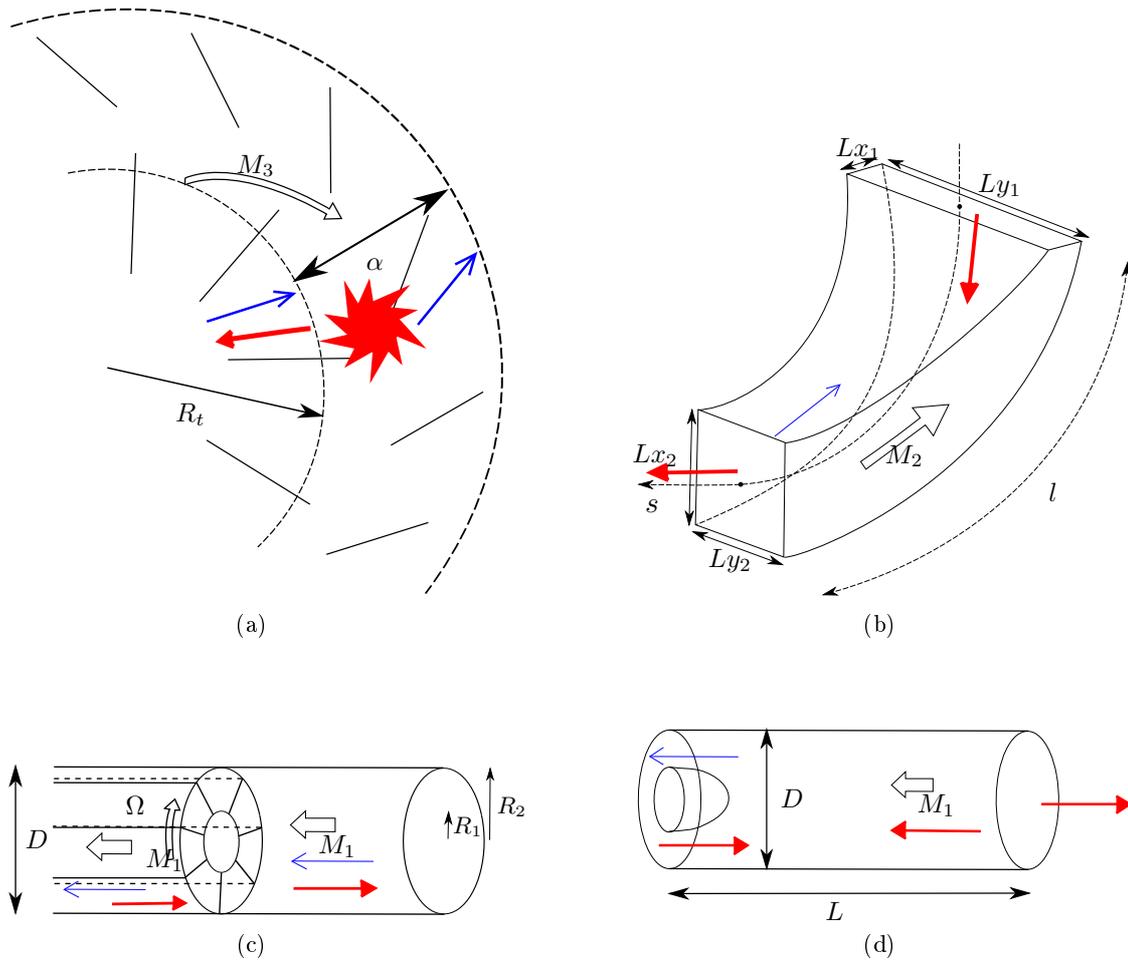


FIGURE 6.1 – Différentes étapes de la propagation modale dans un compresseur et sous-ensembles géométriques simplifiés pour la modélisation. Les flèches épaisses représentent les ondes prises en compte dans la version actuelle du modèle.

moindre bruit. Les choix de nombres de pales ou d'aubes qui influencent directement la géométrie des canaux peuvent être proposés puis étudiés afin d'agir si possible sur les modes affectés d'une transmission maximale. La recombinaison du champ acoustique total a été étudiée dans le chapitre 4. Les effets de l'écoulement, de la hauteur et du nombre de canaux ont été observés et impactent l'énergie réfléchie ou transmise en entrée d'air. Une étude paramétrique, en accord avec l'aérodynamique, permettra donc de choisir la géométrie la plus apte à minimiser la remontée d'énergie acoustique en entrée d'air. La dernière partie est la propagation dans un conduit droit et son rayonnement à l'extérieur (chapitre 5). Le rayonnement acoustique à l'extérieur montrerait des lobes de directivité maximale en fonction des modes dominants. On peut donc chercher à éviter le rayonnement direct sur les points de maintenance, où un certain niveau de bruit maximum ne doit pas être dépassé.

## 6.2 Prise en compte d'une ogive

Un chaînon supplémentaire peut être ajouté au modèle lors du raccordement à l'entrée du rouet pour tenir compte de l'ogive équipant certains compresseurs. L'ogive améliore l'écoulement et assure une transition géométrique continue entre une section annulaire et une section circulaire. Les développements donnés par Rienstra et Ovenden [38, 33] ont été repris tels quels à cette fin. Les équations ont été écrites au paragraphe 3.3.2. L'effet d'une ogive est illustré ici à travers un exemple [22]. La section annulaire est progressivement élargie en conservant le rayon extérieur  $R_2$  et en réduisant le rayon intérieur  $R_1$  jusqu'à 0. Cet effet géométrique tend à abaisser les fréquences de coupure, ce qui peut rendre passant un mode initialement coupé. Le mode contribue alors au champ acoustique à l'extérieur et doit être pris en compte. Un mode initialement passant peut, éventuellement, être coupé par l'effet d'une accélération de l'écoulement dénotant *a contratio* de la propagation acoustique. Cependant, dans l'entrée d'air du type de compresseur centrifuge étudié ici, les nombres de Mach ne sont en général pas suffisants pour permettre cette configuration. Il est plus probable qu'un mode coupé devienne passant du fait de la géométrie. Un résultat qualitatif est montré sur la figure 6.2. Le rapport de moyeu du côté annulaire est  $R_1/R_2 = 0.5$ , la fréquence adimensionalisée est choisie à  $k_0 R_2 = 13$  et le nombre de Mach en entrée d'air vaut 0.3.

Sur la figure 6.2, le mode (4,2) est imposé avec une amplitude arbitraire en  $x/R_2 = -0.5$ . Initialement coupé, il devient passant au niveau du repère vertical en  $x/R_2 = 0.1$ . La transition s'opère suffisamment près de la source pour que le mode ne puisse pas être ignoré dans la description du champ au delà.

## 6.3 Changements de bases modales

Le principe du chaînage des sous-modèles consiste à de considérer la sortie de l'un comme l'entrée de l'autre. Cette étape n'est pas toujours immédiate, comme lors du raccordement entre les canaux inter-aubes et le conduit d'entrée d'air. En effet, les bases modales sur lesquelles sont projetées les ondes acoustiques ne sont pas les mêmes. C'est pour cette raison qu'il a été nécessaire d'effectuer quelques vérifications, à savoir s'il était pratique de projeter une base de cosinus sur des fonctions de Bessel ou inversement.

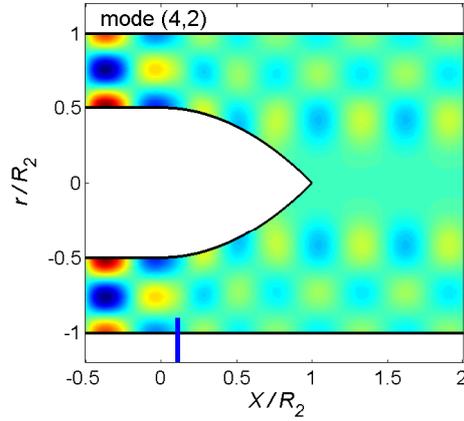


FIGURE 6.2 – Partie réelle du potentiel acoustique dans l’entrée d’air d’un compresseur centrifuge pour un mode coupé qui devient passant au niveau du repère en  $x/R_2 = 0.1$ .  $k_0 R_2 = 13$ . Écoulement vers la gauche, mode se propageant vers la droite.

En effet, la section exacte d’un canal inter-aubes en entrée de rouet est un secteur angulaire qui s’accorde avec des modes en cosinus dans la direction angulaire et des fonctions de Bessel dans la direction radiale. Pour les besoins de la résolution au chapitre 3, la même section a été assimilée à un rectangle. Les deux descriptions sont compatibles dans le sens où les conditions aux limites en  $r = R_1$  et  $r = R_2$  peuvent être satisfaites aussi bien par les fonctions de Bessel que par les cosinus. En revanche le raccordement sur le conduit d’entrée d’air se fait naturellement en coordonnées cylindriques avec une formulation sur la base des fonction de Bessel.

Pour le chaînage envisagé, il est donc nécessaire de projeter la base de fonctions cosinus sur une base de fonctions de Bessel, et vice versa.

Les équations de projection sont les suivantes :

$$\cos\left(\frac{p\pi(R_2 - r)}{R_0}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m f_{n_i m}(r),$$

$n_i$  étant fixé par l’ordre du mode azimutal, et

$$A_m = \int_{R_1}^{R_2} f_{n_i m}(r) \cos\left(\frac{p\pi(R_2 - r)}{R_0}\right) r dr$$

Les résultats donnés sur la figure 6.3 montrent que les fonctions cosinus peuvent être approchées par une base de fonctions de Bessel dès lors que l’ordre du cosinus est supérieur à 0, c’est-à-dire que l’amplitude modale n’est plus uniforme dans la section. Sur la figure 6.3, seul une dizaine de coefficients  $A_m$  ont suffi.

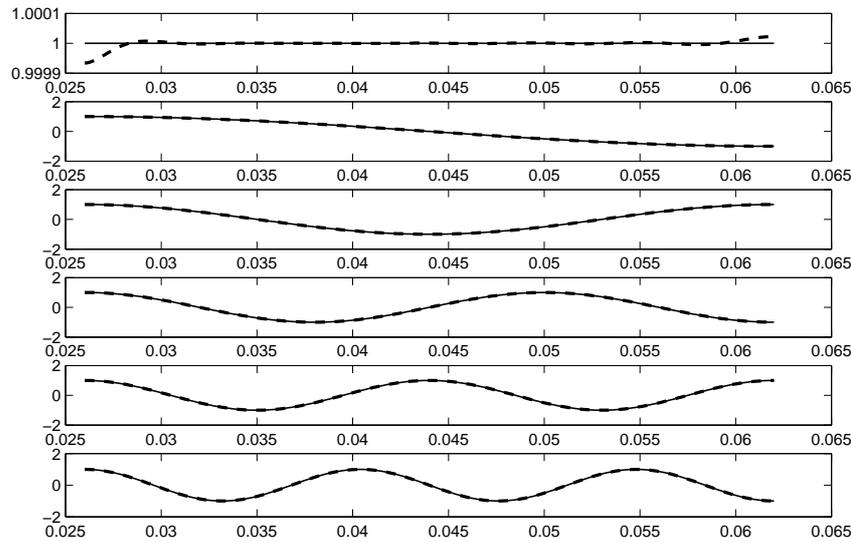


FIGURE 6.3 – Comparaison entre les fonctions cosinus (trait continu) et leur projection sur une base de fonctions de Bessel (trait pointillé)

## 6.4 Le couplage

Le principe de cette étude est de suivre l'évolution des modes créés au niveau du diffuseur jusqu'à leur rayonnement à l'extérieur du compresseur. Cette propagation est schématisée sur la figure 6.4 [23]. Les ondes sonores prises en compte dans un premier temps sont représentées en trait plein, les ondes qui sont pour l'instant ignorées apparaissent en pointillé.

Le couplage entre les sous-modèles est *a priori* exécuté en utilisant un processus de cascade : chaque modèle résout les équations de continuité d'une interface et le résultat d'un premier modèle est pris comme entrée du suivant. Cependant, il faut souligner que chaque raccordement produit des ondes additionnelles réfléchies et transmises. En conséquence, chaque interface couple quatre sommes infinies d'ondes, les ondes se propageant contre l'écoulement et dans la direction de l'écoulement et cela des deux cotés du raccordement. Dans les sous-modèles pris indépendamment, seuls trois systèmes d'ondes incidentes, réfléchies et transmises sont étudiées. Le chaînage complet demandera un travail supplémentaire pour ré-écrire toutes les équations en rajoutant le quatrième groupe d'ondes. Par exemple, le raccordement à l'entrée de la roue a été développé en prenant en compte un mode unique se propageant dans les canaux inter-aubes depuis le diffuseur (Chapitre 3). Le procédé de raccordement fournit les modes réfléchis dans les canaux inter-aubes et les modes transmis dans le conduit d'entrée d'air. Les ondes réfléchies devraient être prises en compte jusqu'au diffuseur où elles seraient à nouveau réfléchies dans les canaux et transmises à la périphérie. Les réflexions secondaires doivent donc être ajoutées dans la définition des ondes incidentes du sous-modèle de raccordement. Toutes ces modifications ne changent pas la résolution des équations de départ mais augmentent seulement la taille et/ou le contenu des matrices à inverser.

Pour un meilleur suivi des ondes, les équations peuvent également être résolues par un

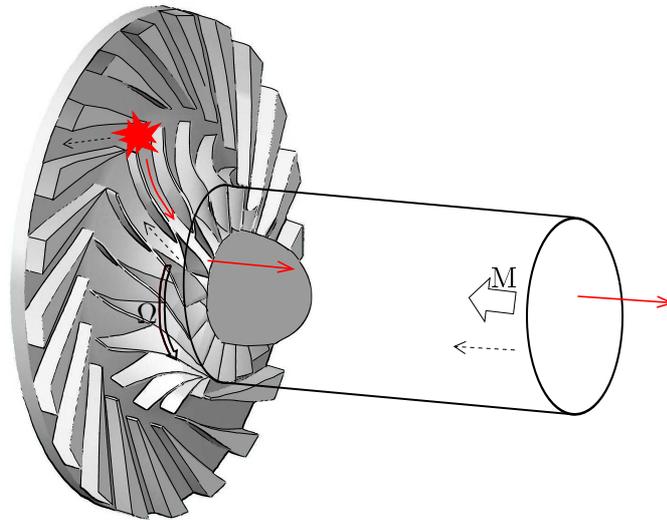


FIGURE 6.4 – Schéma de la configuration modélisée : compresseur centrifuge avec une ogive et un conduit d'entrée d'air droit. Les flèches en pointillés ne sont pas considérées dans la version actuelle du modèle.

procédé itératif, comme suit :

- une première onde incidente est considérée sur une interface en ignorant toute réflexion venant d'une autre interface,
- les ondes réfléchies et transmises à partir de cette première approximation sont donc déterminées,
- les ondes secondaires réfléchies en sont déduites en résolvant les équations à la seconde interface.
- Ces nouvelles ondes redéfinissent alors les ondes incidente sur la première interface, et ainsi de suite.

On s'attend à ce qu'un tel procédé itératif converge rapidement puisqu'il reproduit la chronologie de la propagation des modes. Pour un premier couplage, des approximations peuvent être acceptées. Typiquement, les modes d'ordre élevé évoluant dans un conduit cylindrique sont connus pour être fortement réfléchis en bout de conduit seulement pour une fréquence juste supérieure à leur fréquence de coupure, alors que dans les autres cas, ils sont presque intégralement transmis. Par conséquent en première instance les ondes réfléchies par l'extrémité du conduit d'entrée d'air (flèches fines sur la figure 6.1) peuvent être négligées devant les ondes transmises (flèches épaisses).

Les couplages entre les sous-ensembles des figures 6.1(a) et 6.1(b) ainsi que les figures 6.1(c) et 6.1(d) restent à mettre en place. Aujourd'hui, seul le couplage entre la propagation dans les canaux et le raccordement en entrée de rouet est implémenté.

## 6.5 Exemple de stratégie

Un exemple d'application est esquissé dans ce paragraphe pour le couplage entre la propagation dans les canaux et le raccordement avec l'entrée d'air. La méthode est pour l'instant incomplète mais elle permet de comparer deux architectures de compresseurs centrifuges. L'objectif est de montrer l'impact d'un changement du nombre d'aubes  $V$  du diffuseur. La géométrie de la roue du compresseur n'est pas changée. Bien que les sous-modèles aient leurs limites, l'outil peut être utilisé d'un point de vue comparatif. En effet, pour rappel, la propagation dans les canaux inter-aubes néglige les couplages inter-modaux et le raccordement modal ne prend pas en compte pour l'instant l'effet de la rotation.

Les ondes spirales créées par l'impact des sillages de la roue sur les aubes du stator sont décrites sur une base de fonctions angulaires  $\exp(in\theta)$ ,  $n$  étant le mode azimutal forcé en deux dimensions dans l'espace lisse. Si l'on néglige l'effet de réseau en périphérie en supposant que l'excitation entre en totalité dans le rouet, une première évaluation des modes excités dans la roue peut être obtenue en projetant  $\exp(in\theta)$  sur une base de cosinus. La projection s'écrit donc

$$e^{in\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{mB\theta}{2}\right)$$

et

$$A_m = \frac{B}{(\pi(1 + \delta_{0m}))} \int_0^{2\pi/B} e^{in\theta} \cos\left(\frac{mB\theta}{2}\right) d\theta$$

Les deux configurations considérées pour l'exemple sont :

- $B = 17 - V = 19$ . Le mode principal forcé par l'interaction rotor/stator est le mode  $-2$ , la fréquence de passage des pales est 9350 Hz. La fréquence de propagation dans le repère relatif est changée par l'effet Doppler, elle vaut  $FPP - 2 * \Omega/60 = 8250$  Hz pour une rotation  $\Omega$  de 33000 tr/min. Seul le mode plan se propage alors dans le canal. Après projection sur la base cosinus, l'amplitude relative du mode plan est  $A_0 = 0.91 - 0.35i$ .
- $B = 17 - V = 21$ . Le mode principal forcé par l'interaction rotor/stator est maintenant le mode  $-4$ , la fréquence de passage des pales est toujours 9350 Hz. La fréquence de propagation dans le repère relatif vaut  $FPP - 4 * \Omega/60 = 7150$  Hz pour la même vitesse de rotation du rouet  $\Omega = 33000$  tr/min. De nouveau, seul le mode plan se propage dans le canal. Cette fois, son amplitude relative est  $A_0 = 0.67 - 0.61i$ .

Le mode plan est alors propagé pour les deux configurations dans les canaux selon le modèle du chapitre 3. La projection des fonctions cosinus sur une base de fonctions de Bessel est ensuite appliquée pour déterminer les amplitudes des modes incidents selon la description en coordonnées cylindriques. Les cartographies de pression fluctuante sont données enfin dans l'entrée d'air sur les figures 6.5(a) et 6.5(b) après résolution des équations de raccordement.

Sur ces figures, on remarque que les modes excités en priorité du côté de la périphérie sont retrouvés comme modes dominants en entrée d'air. La configuration 1 avec 17 pales et 19 aubes semble être la moins bruyante après propagation dans les canaux, bien que l'amplitude de l'excitation soit plus importante que pour la configuration 2. Cependant, cette configuration donne la possibilité au mode  $(0,1)$  de se propager également dans les canaux alors que la configuration 2 permet uniquement au mode fondamental de se propager. Une possible conversion modale, non simulée ici, peut donc remettre ces conclusions préliminaires en cause.

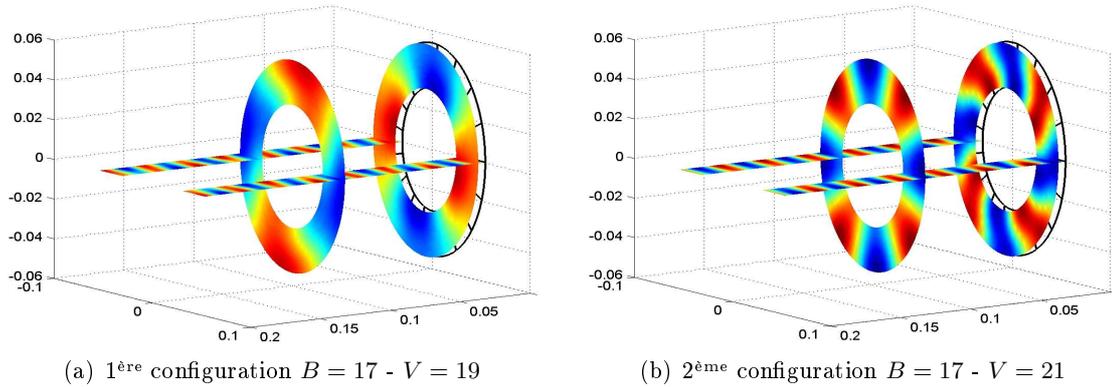


FIGURE 6.5 – Champ de pression acoustique en entrée d’air pour deux configurations à comparer. L’échelle de couleur (niveaux arbitraires) est identique.

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre dressait l’ébauche du couplage nécessaire entre les modèles partiels pour aboutir à un modèle complet. Chaque modèle doit encore être amélioré indépendamment mais le couplage d’ores et déjà réalisé rend possible une comparaison entre des configurations de compresseurs centrifuges. Une étude supplémentaire est nécessaire pour poursuivre cette mise en place. Des études paramétriques pourront ensuite être effectuées pour prendre en compte l’impact des changements géométriques sur la propagation acoustique des sources de bruit rotor/stator d’un compresseur centrifuge.

# Conclusion

L'objectif de ce travail de thèse était de mettre en place un outil d'aide au pré-dimensionnement acoustique des compresseurs centrifuges subsoniques développés par Liebherr Aerospace Toulouse. En effet, les architectures actuelles des systèmes de conditionnement d'air sont en phase d'évolution pour des raisons économiques mais également environnementales. Cette remise en question des architectures fait également évoluer les sources de bruit créées par les systèmes. Les compresseurs centrifuges deviennent alors une source de bruit prépondérante au sol lors des opérations de maintenance. Plus précisément, la source de bruit dominante dans un compresseur centrifuge est due à l'impact des sillages du rotor sur les aubes du stator. Les ondes acoustiques alors créées peuvent se propager le long de la géométrie du compresseur en remontant l'écoulement jusqu'à l'entrée d'air pour rayonner à l'extérieur.

Le premier objectif de ce travail a donc consisté à confirmer que les sources de bruit rotor/stator rayonnent bien à l'extérieur. Un essai a été mis en place dans ce but. Il comprend une virole tournante équipée de microphones placée à l'extrémité d'un conduit droit en entrée d'air. La virole permet de récupérer les fluctuations de pression en paroi et après post-traitement les modes angulaires propagés depuis le compresseur vers l'extérieur. Selon les conditions de fonctionnement du compresseur, les modes récupérés en entrée d'air sont différents. Cependant, pour des vitesses de rotation proches du point de dimensionnement aérodynamique du compresseur, les modes créés par la source de bruit rotor/stator sont clairement présents lors des mesures réalisées. Cet essai a donc permis de valider l'hypothèse de départ.

Le bruit produit par les sources se propage alors dans les canaux inter-aubes. La géométrie est complexe et y décrire la propagation acoustique peut s'avérer délicat par des méthodes analytiques. Les canaux sont donc simplifiés pour mener à bien la mise en place d'un outil permettant de comprendre le comportement des ondes acoustiques dans un compresseur. Différentes méthodes analytiques ont été approchées, le choix final s'est porté sur une modélisation modale pour les conduits courbés à section variable rectangulaire. Un écoulement tenant compte de la giration y est ajouté. La validation de ce modèle par comparaison avec un logiciel commercial montre l'importance des couplages inter-modaux lors de la propagation acoustique dans de telles géométries, couplage non pris en compte dans le modèle développé.

Les ondes acoustiques se recomposent ensuite à la sortie des canaux. Un modèle de raccordement modal entre les canaux inter-aubes et le conduit d'entrée d'air est développé à partir des travaux de la théorie des réseaux électromagnétiques. L'outil est décliné en deux puis en trois dimensions selon deux techniques équivalentes et validées par un bilan de puissance. Cette méthode permet de prendre en compte un écoulement débitant ou un écoulement tan-

gentiel. La combinaison des deux écoulements est un point actuellement ouvert et nécessite des développements supplémentaires.

Pour finir et pouvoir déterminer le rayonnement acoustique des compresseurs centrifuges à l'extérieur, le choix a été de mettre en place un outil de propagation en conduit droit à extrémité libre. En effet, les compresseurs centrifuges sont généralement équipés de gamelles d'entrée d'air dont la géométrie varie selon l'encombrement dans l'avion. Afin de déterminer une fonction de transfert propre au compresseur, un conduit droit a été supposé en lieu et place. L'étude est menée à partir de la technique de Wiener-Hopf. Cette formulation analytique bien connue a été mise en doute à propos des facteurs de réflexion. Des corrections simples ont été proposées, le résultat est maintenant validé pour les modes symétriques. La question reste ouverte pour les modes tournants.

Dans la dernière étape, les modèles ont été partiellement couplés afin de pouvoir déterminer une fonction de transfert globale. La fonction de transfert globale permettra de classer les différentes géométries possibles pour définir un compresseur « à moindre bruit ». Cette dernière étape n'a pas pu être finalisée dans sa totalité, mais les premiers résultats partiels sont encourageants.

## Perspectives

Bien que les sous-modèles proposés permettent d'ores et déjà de comprendre la propagation acoustique dans toutes les géométries traitées, des études supplémentaires sont nécessaires pour finaliser le travail.

En effet, la propagation dans les canaux inter-aubes ne prend actuellement pas en compte les couplages inter-modaux qui s'avèrent très importants lorsque la courbure est forte. Il faut donc déterminer la possibilité d'ajouter ce couplage à la méthode actuellement choisie. Aujourd'hui, le calcul permet de propager indépendamment chaque mode dans la géométrie des canaux simplifiée. De plus, la torsion des canaux est actuellement négligée. La possibilité d'ajouter ce paramètre aux développements analytiques est envisageable moyennant de lourds calculs, si l'on a recours à l'approche multimodale.

Dans leur état actuel, les raccordements modaux ne donnent pas la possibilité de coupler la rotation des canaux avec une vitesse débitante. Une extension des conditions de continuité entre les deux domaines reste à mettre en place.

Le couplage global des modèles reste à finaliser. Il sera effectué au cours des prochains mois au sein de Liebherr Aerospace Toulouse. Par ailleurs, de nouveaux essais sur des compresseurs centrifuges auront lieu afin de valider cet outil et de le rendre utilisable au stade de pré-dimensionnement aérodynamique et acoustique.

Une étude supplémentaire sur les compresseurs centrifuges multi-étages peut être intéressante, afin de déterminer si les sources de bruit des étages supérieurs peuvent remonter jusqu'à l'entrée d'air mais cette extension semble difficile sur des bases analytiques.

## Annexe A

# Définition des coefficients de normalisation des fonctions de Bessel

La normalisation est choisie telle que :

$$\int_{R_1}^{R_2} f^2(r) r dr = 1. \quad (\text{A.1})$$

Les coefficients  $N_{np}$ ,  $\cos(\tau_{np})$  et  $\sin(\tau_{np})$  ont été choisis de telle sorte qu'ils permettent d'éviter les discontinuités. Ils valent :

$$N_{np} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi K_{np}/R_2}{\left\{ \frac{1-n^2/K_{np}^2}{J_n'(K_{np})^2 + Y_n'(K_{np})^2} - \frac{1-n^2/K_{np}^2(R_1/R_2)^2}{J_n'(K_{np}R_1/R_2)^2 + Y_n'(K_{np}R_1/R_2)^2} \right\}^{1/2}}$$

$$\cos(\tau_{np}) = \text{sign}(Y_n'(K_{np})) \frac{Y_n'(K_{np})}{\sqrt{J_n'(K_{np})^2 + Y_n'(K_{np})^2}}$$

$$\sin(\tau_{np}) = \text{sign}(Y_n'(K_{np})) \frac{J_n'(K_{np})}{\sqrt{J_n'(K_{np})^2 + Y_n'(K_{np})^2}}$$



## Annexe B

# Calculs des produits scalaires

### B.1 Calcul de la première intégrale

Si  $\mu \neq \pm l$  :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{lB\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \left( \cos\left[(\mu+l)\frac{B\theta}{2}\right] + \cos\left[(\mu-l)\frac{B\theta}{2}\right] \right) d\theta = 0$$

Si  $\mu = \pm l \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{lB\theta}{2}\right) d\theta &= \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos^2\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{B}} \left( 1 + \cos\left[\frac{\mu B\theta}{2}\right] \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{B} \end{aligned}$$

Si  $\mu = \pm l = 0$  :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{lB\theta}{2}\right) d\theta = \frac{2\pi}{B}$$

### B.2 Calcul de la seconde intégrale

Si  $\alpha_s R \neq \pm \frac{\mu B}{2}$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) e^{i\alpha_s R\theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{B}} e^{i\alpha_s R\theta} \left( e^{i\frac{\mu B\theta}{2}} + e^{-i\frac{\mu B\theta}{2}} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(\alpha_s R + \frac{\mu B}{2})\theta}}{i\left(\alpha_s R + \frac{\mu B}{2}\right)} + \frac{e^{i(\alpha_s R - \frac{\mu B}{2})\theta}}{i\left(\alpha_s R - \frac{\mu B}{2}\right)} \right]_0^{\frac{2\pi}{B}} \\
&= \frac{(\alpha_s R - \frac{\mu B}{2}) \left[ e^{i(\alpha_s R + \frac{\mu B}{2})\frac{2\pi}{B}} - 1 \right] + (\alpha_s R + \frac{\mu B}{2}) \left[ e^{i(\alpha_s R - \frac{\mu B}{2})\frac{2\pi}{B}} - 1 \right]}{2i \left[ (\alpha_s R)^2 - \left(\frac{\mu B}{2}\right)^2 \right]} \\
&= \frac{\alpha_s R e^{i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} \left[ e^{i\mu\pi} - 2e^{-i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} + e^{-i\mu\pi} \right]}{2i \left[ (\alpha_s R)^2 - \left(\frac{\mu B}{2}\right)^2 \right]} + \frac{\frac{\mu B}{2} e^{i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} \left[ e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi} \right]}{2i \left[ (\alpha_s R)^2 - \left(\frac{\mu B}{2}\right)^2 \right]} \\
&= \frac{\alpha_s R e^{i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} \left[ \cos(\mu\pi) - e^{-i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} \right]}{i \left[ (\alpha_s R)^2 - \left(\frac{\mu B}{2}\right)^2 \right]} \\
&= \frac{i\alpha_s R \left[ 1 - (-1)^\mu e^{i\alpha_s R \frac{2\pi}{B}} \right]}{\left[ (\alpha_s R)^2 - \left(\frac{\mu B}{2}\right)^2 \right]} \\
&= \Lambda_{\alpha_s R}^\mu
\end{aligned}$$

Si  $\alpha_s R = \pm \frac{\mu B}{2} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) e^{i\alpha_s R\theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{B}} e^{2i\alpha_s R\theta} d\theta + \frac{\pi}{B} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{2i(\alpha_s R)\theta}}{2i\alpha_s R} \right]_0^{\frac{2\pi}{B}} + \frac{\pi}{B} \\
&= +\frac{\pi}{B}
\end{aligned}$$

Si  $\alpha_s R = \pm \frac{\mu B}{2} = 0$  :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B\theta}{2}\right) e^{i\alpha_s R\theta} d\theta = \frac{2\pi}{B}$$

Si  $\alpha_s R = 0$  &  $\frac{\mu B}{2} \neq 0$  :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{B}} \cos\left(\frac{\mu B \theta}{2}\right) e^{i\alpha_s R \theta} d\theta = 0$$



## Annexe C

# Écriture des équations de continuité de la pression et du déplacement relatif axial

Les conditions cherchées sur l'interface entre l'entrée d'un réseau de canaux et un milieu en écoulement oblique doivent être compatibles avec la conservation de l'énergie. On ne considère donc aucun effet dissipatif sur les ondes acoustiques. Soit  $\eta$  la fonction définissant l'évolution de l'interface située en  $x = 0$  au repos, on écrit donc  $x = \eta(z, t)$ . On introduit la fonction  $g$  définie telle que  $g = x - \eta(z, t)$ . Concernant le fluide en amont (dans les canaux), on a :

$$\frac{dg}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V}_s \text{grad}g = 0 \quad (\text{C.1})$$

avec  $\mathbf{V}_s$ , la vitesse totale du fluide dans les canaux. Pour le fluide en aval (dans le conduit d'entrée d'air),

$$\frac{dg}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad}g = 0 \quad (\text{C.2})$$

avec  $\mathbf{V}$ , la vitesse totale du fluide dans le conduit d'entrée d'air.

L'équation C.1 devient :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_{s_n} - V_{s_z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

L'équation C.2 devient quant à elle :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_n - V_z \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

On peut maintenant définir les vitesses  $V_s$  et  $V$ .

La composante normale de la vitesse du fluide dans les canaux vaut  $V_{s_n} = v'_{s_n}$ , sa composante tangentielle est égale à  $V_{s_z} = v'_{s_z}$ . Pour le fluide dans le conduit d'entrée d'air, la composante normale vaut  $V_n = v'_n$  et la composante tangentielle,  $V_z = v'_z - \Omega R_0$ .

On peut alors écrire :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + v'_{s_n} - v'_{s_z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + v'_n - v'_z \frac{\partial \eta}{\partial z} + \Omega R_0 \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

Après avoir simplifié les termes d'ordre 2, et en combinant les deux dernières équations, on trouve :

$$v'_{s_n} = v'_n + \Omega R_0 \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

De plus,  $\eta = \int v'_n dt = \frac{1}{-i\omega_m} v'_n$ , on a donc :

$$v'_{s_n} = v'_n + \Omega R_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{-i\omega_m} v'_n \right)$$

Les vitesses normales du fluide dans les canaux et à l'extérieur peuvent être écrites de la manière suivante :

$$v'_n = \text{grad} \phi_t \cdot \mathbf{x}$$

$$= i \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s K_s e^{i\alpha_s z} e^{iK_s x}$$

$$v'_{s_n} = \text{grad} (\phi_i + \phi_r) \cdot \mathbf{x}$$

$$= i \left( e^{imu} k_{n_i} \cos \left[ \frac{n_i \pi}{a} (z - ma) \right] e^{ik_{n_i} x} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m k_n \cos \left[ \frac{n\pi}{a} (z - ma) \right] e^{-ik_n x} \right)$$

Il s'agit maintenant de déterminer  $\omega_m$  :

$$\frac{d\eta}{dt} = v'_n$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial t} - \Omega R_0 \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

avec  $\eta = -v'_n / i\omega_m$

On en déduit donc la valeur de  $\omega_m$  :

$$\omega_m = \omega + \Omega R_0 \alpha_s$$

Finalement,

$$\begin{aligned} v'_{s_n} &= v'_n + \Omega R_0 \frac{-1}{i\omega_m} i\alpha_s v'_n \\ &= v'_n \left( 1 - \frac{\Omega R_0 \alpha_s}{\omega_m} \right) \end{aligned}$$

L'équation symbolisant la continuité des déplacements peut maintenant être écrite pour  $m = 0$  :

$$\begin{aligned} k_{n_i} e^{ik_{n_i} x} \cos\left(\frac{n_i \pi}{a} z\right) - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_n e^{-ik_n x} \cos\left(\frac{n \pi}{a} z\right) \\ = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s K_s e^{i\alpha_s z} e^{iK_s x} \left( 1 - \frac{\Omega R_0 \alpha_s}{\omega_m} \right) \end{aligned}$$

Plusieurs simplifications sont possibles. Tout d'abord les changements de variable  $z = R_0 \theta$  et  $a = 2\pi R_0/B$ , puis le produit de l'équation obtenu par  $\cos(\mu B \theta/2)$  et l'intégrale entre 0 et  $2\pi/B$  conduisent pour  $x = 0$ , à

$$\begin{aligned} k_{n_i} \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n_i} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_n \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n} \right] \\ = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s K_s \Lambda_{\alpha_s R}^{\mu} \left( 1 - \frac{\Omega R_0 \alpha_s}{\omega_m} \right) \end{aligned}$$

Les nouvelles équations de continuité, sont alors :

$$\begin{aligned} k_0 \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n_i} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_0 \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n} \\ = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \left( k_0 + \frac{\Omega R_0}{c_0} \alpha_s \right) \end{aligned}$$

$$k_{n_i} \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n_i} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0 k_n \left[ \frac{\pi}{B} (1 + \delta_{\mu 0}) \delta_{\mu n} \right] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_s K_s \Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu} \left( 1 - \frac{\Omega R_0}{\omega_m} \alpha_s \right)$$

où  $\omega_m = \omega + \Omega R_0 \alpha_s$  et  $\Lambda_{\alpha_s R_0}^{\mu}$  reste défini par l'équation 4.7.

Ces résultats sont repris dans le paragraphe 4.2.4.



## Annexe D

# Lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au passage d'une surface de discontinuité

### D.1 Introduction

L'écriture des conditions de raccordement de pression et de vitesse normale, ou de pression et de déplacement acoustique à l'interface entre les canaux de la roue et l'entrée d'air ne donne pas de résultats corrects lorsque l'on considère la combinaison d'une vitesse débitante et du défilement des canaux correspondant à la rotation. D'après Bruneau [6], on dispose d'équations traduisant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au passage d'une surface de discontinuité qui peuvent être reprises pour répondre à notre problématique. Elles sont donc exposées ici, en tant qu'élément pour aider à étendre les équations classiques de raccordements.

Considérons un petit volume de contrôle qui englobe une interface sur laquelle la vitesse moyenne du flux change de direction (Fig. D.1).

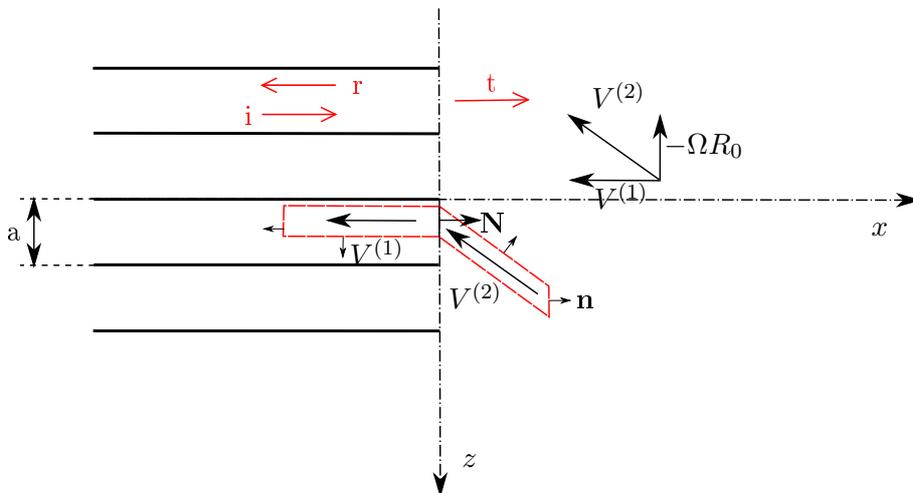


FIGURE D.1 – Surface de contrôle élémentaire pour l'établissement des conditions de saut sur une surface de discontinuité fluide

## D.2 Équations sur le champ moyen

Les parties latérales de la surface de contrôle sont alignées avec la vitesse moyenne et les sections d'entrée et de sortie du flux alignées avec l'interface. Si l'on essaie d'appliquer les lois fondamentales de la dynamique en faisant tendre vers zéro le volume de contrôle, on doit considérer que le changement brusque de direction de vitesse se fait par l'intermédiaire d'un passage à la limite, via un coude de courbure progressive dont on fait tendre le rayon vers zéro. Cette courbure n'est pas physique sans l'ajout d'une force équivalente à une injection latérale de quantité de mouvement. on considère donc une force donnée de composante  $\mathbf{F}$  selon  $z$ .

Le théorème intégral de la quantité de mouvement s'écrit donc, en omettant tout effet visqueux :

$$\int_{\Sigma} \rho(V \cdot \mathbf{n})V d\Sigma = - \int_{\Sigma} P\mathbf{N}d\Sigma + \mathbf{F}$$

En notant  $V_{x,z}^j$  les composantes de vitesse projetées sur les deux axes, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}V_x^{(2)2} - \rho^{(1)}V_x^{(1)2} &= P^{(1)} - P^{(2)} \\ \rho^{(2)}V_x^{(2)}V_z^{(2)} - \rho^{(1)}V_x^{(1)}V_z^{(1)} &= \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{F}}$  est une force appliquée par unité de surface. De plus,  $V_z^{(1)} = 0$  et le bilan de masse à travers la surface de contrôle vaut  $\rho^{(2)}V_x^{(2)} = \rho^{(1)}V_x^{(1)}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} P^{(2)} - P^{(1)} + \rho^{(2)}V_x^{(2)}(V_x^{(2)} - V_x^{(1)}) &= 0 \\ \rho^{(2)}V_x^{(2)}V_z^{(2)} &= \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned}$$

On note que la force  $\tilde{\mathbf{F}}$  s'annule lorsque la composante  $V_z^{(2)}$  est nulle, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de déviation du flux, et lorsque la composante  $V_x^{(2)}$  est nulle, c'est-à-dire lorsque le flux est rasant et seulement présent dans le demi-espace noté (2).

## D.3 Équations aux perturbations

Appliquons à présent le théorème de la quantité de mouvement et la loi de conservation de la masse en régime instationnaire, un champ fluctuant étant superposé au champ moyen. Le bilan intégral de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_{\Theta} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} d\Theta + \int_{\Sigma} \rho(V \cdot \mathbf{n})V d\Sigma = - \int_{\Sigma} P\mathbf{N}d\Sigma + \mathbf{F}$$

où  $\Theta$  désigne le volume de contrôle. Le bilan de masse quant à lui vaut :

$$\int_{\Theta} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} d\Theta + \int_{\Sigma} \rho(V \cdot \mathbf{n})d\Sigma = 0$$

Faisons tendre le volume de contrôle vers zéro en distinguant le champ moyen par un indice

0 et en notant le champ fluctuant en minuscule. Après linéarisation et après avoir retranché le bilan sur le champ moyen du bilan total, on obtient pour la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} & \rho_0^{(2)} v_x^{(2)} V_0^{(2)} + \rho^{(2)} V_x^{(2)} V_0^{(2)} + \rho_0^{(2)} V_x^{(2)} v^{(2)} + p^{(2)} e_x \\ & = \rho_0^{(1)} v_x^{(1)} V_0^{(1)} + \rho^{(1)} V_x^{(1)} V_0^{(1)} + \rho_0^{(1)} V_x^{(1)} v^{(1)} + p^{(1)} e_x + \tilde{f} e_z \end{aligned}$$

où  $\tilde{f}$  est un terme fluctuant. L'équation de bilan de masse donne :

$$\rho_0^{(2)} v_x^{(2)} + \rho^{(2)} V_x^{(2)} = \rho_0^{(1)} v_x^{(1)} + \rho^{(1)} V_x^{(1)}$$

Après projection des équations sur les deux axes  $x$  et  $z$  et en posant  $Q_0 = \rho_0 V_x$  et  $q = \rho_0 v_x + \rho V_x$ , on a :

$$\begin{aligned} Q_0(v_x^{(2)} - v_x^{(1)}) + q(V_x^{(2)} - V_x^{(1)}) + (p^{(2)} - p^{(1)}) &= 0 \\ Q_0(v_z^{(2)} - v_z^{(1)}) + qV_z^{(2)} &= \tilde{f} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où la densité moyenne reste constant, le bilan de masse à travers la surface de contrôle  $\rho^{(2)} V_x^{(2)} = \rho^{(1)} V_x^{(1)}$  se simplifie et donne  $V_x^{(2)} - V_x^{(1)} = 0$ . Il en découle également l'égalité des pressions moyennes.

Concernant les équations de perturbations, il peut y avoir plusieurs façons d'imposer des conditions de raccordement dans notre configuration. Les hypothèses de travail que nous avons pris pour poursuivre le développement sont les suivants :

- de part et d'autre de l'interface, la célérité du son reste identique,
- les fluctuations de densité (purements acoustiques) sont proportionnelles aux fluctuations de pression  $p = c_0^2 \rho$ ,
- **on suppose le terme fluctuant  $\tilde{f}$  nul.**

On obtient alors les équations qui suivent :

$$\begin{aligned} (p^{(2)} - p^{(1)}) + \rho_0 V_x (v_x^{(2)} - v_x^{(1)}) &= 0 \\ \rho_0 V_x (v_z^{(2)} - v_z^{(1)}) + \rho_0 V_z^{(2)} (v_x^{(2)} - v_x^{(1)}) &= 0 \end{aligned}$$

à partir desquelles on peut généraliser les équations de raccordement.

## D.4 Application au réseau de canaux

Afin de résoudre le problème posé durant l'étude, on écrit les potentiels acoustiques incidents, réfléchi et transmis comme précédemment. Les quantités dont on impose la continuité sont donc :

$$p + \rho_0 V_x v_x \quad \text{et} \quad V_x v_z + V_z^{(2)} v_x$$

L'équation de Helmholtz devient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \left( 1 - \frac{(\Omega R_0)^2}{c_0^2} \right) + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2ik_0 \left( \frac{\Omega R_0}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial z} + M \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - 2 \frac{\Omega R_0}{c_0} M \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + k_0^2 \phi = 0$$

équation pour laquelle les nombres d'onde des solutions fondamentales ont pour expressions :

$$k_{n_i} = \frac{k_0 M + \sqrt{k_0^2 M^2 - \beta^2 \left[ (n_i \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}}{\beta^2}$$

$$k_n = \frac{-k_0 M + \sqrt{k_0^2 M^2 - \beta^2 \left[ (n \pi / a)^2 - k_0^2 \right]}}{\beta^2}$$

$$K_s = \frac{M \left( k_0 + \frac{\Omega R_0}{c_0} \alpha_s \right) + \sqrt{\left( k_0 M + M \frac{\Omega R_0}{c_0} \alpha_s \right)^2 + \beta^2 \left( k_0^2 - \left( 1 - \frac{(\Omega R_0)^2}{c_0^2} \right) \alpha_s^2 + 2k_0 \frac{\Omega R_0}{c_0} \alpha_s \right)}}{\beta^2}$$

On cherche maintenant à obtenir  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$ ,  $V_x$ ,  $V_z^{(2)}$ ,  $v_x^{(1)}$ ,  $v_x^{(2)}$ ,  $v_z^{(1)}$  et  $v_z^{(2)}$ . On écrit  $V_x = M c_0$  et  $V_z^{(2)} = \Omega R_0$ .  $p^{(1)}$  est la somme des pressions acoustiques incidente et réfléchie tandis que  $p^{(2)}$  est la pression acoustique transmise. De la même façon,  $v_x^{(1)}$  est la somme des vitesses normales acoustiques incidente et réfléchie,  $v_z^{(1)}$  est la somme des vitesses tangentielles acoustiques incidente et réfléchie,  $v_x^{(2)}$  est la vitesse normale acoustique transmise et  $v_z^{(2)}$  est la vitesse tangentielle acoustique transmise.

Ces valeurs ont été calculées de la même manière que dans le corps du manuscrit et implémentés grâce à la technique de projection modale. Les tests effectués à partir de cette méthode donnent des résultats qui ne sont pas physiques. Il est nécessaire pour trouver une solution à cette problématique d'y travailler spécifiquement.

## Annexe E

# Calcul de la puissance et de l'erreur relative

Le calcul de la puissance est écrit ici pour l'onde incidente, les puissances des autres ondes sont calculées de la même manière.

La puissance d'une onde est définie de la manière suivante [19] :

$$W = \int_{(S)} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS$$
$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left( \frac{p}{\rho_0} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \right) \times (\rho_0 \mathbf{u} + \rho' \mathbf{U})^* \right\}$$

$\mathbf{U}$  étant la vitesse de l'écoulement, et :

$$p = -\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{U} \text{grad} \Phi \right) \quad \mathbf{u} = \nabla \Phi \quad \rho' = \frac{p}{c_0^2}$$

On a donc :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left[ - \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \mathbf{U} \text{grad} \Phi_i \right) + \mathbf{U} \text{grad} \Phi_i \right] \times \left[ \rho_0 \text{grad} \Phi_i - \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \mathbf{U} \text{grad} \Phi_i \right) \mathbf{U} \right]^* \right\}$$

Avec :

$$\text{grad} \Phi_i = \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \mathbf{x} \right), \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \mathbf{z} \right)$$

De plus, par convention, la dépendance temporelle des champs est supposée en  $e^{-i\omega t}$ . On obtient alors :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = -i\omega \Phi_i$$

Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est orienté suivant  $\mathbf{x}$ .  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$  a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{I.n} &= \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \omega \Phi_i \times \left[ \left( k_{n_i} - \frac{\omega}{c_0^2} U - \frac{U^2}{c_0^2} k_{n_i} \right) \times \Phi_i \right]^* \right\} \\ &= \frac{Z_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ k_0 \Phi_i \times \left[ (k_{n_i} (1 - M^2) - k_0 M) \times \Phi_i \right]^* \right\} \end{aligned}$$

On obtient donc après intégration les canaux les expressions suivantes :

$$W_i = \frac{Z_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ k [k_{n_i} (1 - M^2) - kM]^* e^{ik_{n_i}x} \left( e^{ik_{n_i}x} \right)^* \times \left\| \begin{array}{l} aB \quad \text{si } n_i = 0 \\ \frac{aB}{2} \quad \text{sinon} \end{array} \right\| \right\}$$

$$W_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ A_n^m (A_n^m)^* k [-k_n (1 - M^2) - kM]^* e^{-ik_nx} \left( e^{-ik_nx} \right)^* \times \left\| \begin{array}{l} aB \quad \text{si } n_i = 0 \\ \frac{aB}{2} \quad \text{sinon} \end{array} \right\| \right\}$$

$$W_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{Z_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ B_s (B_s)^* k [K_s (1 - M^2) - kM]^* e^{iK_sx} \left( e^{iK_sx} \right)^* aB \right\}$$

## Annexe F

# Technique de propagation multimodale - Développement des calculs

Ici sont développés les calculs permettant d'implémenter la méthode de propagation multimodale :

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement donnent après adimensionnalisation de  $P$  par  $\rho_0 c_0$  et simplification :

$$V_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{F.1a})$$

$$V_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{F.1b})$$

$$V_s = -\frac{1}{ik} \frac{1}{h_s} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (\text{F.1c})$$

$$-ikP = -\frac{1}{ik} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right] + \frac{1}{h_s} \frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} \frac{1}{ik} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial y} \frac{1}{ik} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{F.2})$$

De plus,  $P$  et  $V_s$  sont écrits sur la base des fonctions propres au conduit (3.3.1 et 3.3.1). Les équations F.1c et F.2 s'écrivent alors ainsi :

$$-ikh_s {}^t\Psi V = \frac{\partial {}^t\Psi P}{\partial s} \quad (\text{F.3a})$$

$$-ik {}^t\Psi P = - \left[ \frac{\partial {}^2 {}^t\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial {}^2 {}^t\Psi}{\partial y^2} \right] \frac{P}{ik} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial {}^t\Psi V}{\partial s} - \frac{1}{h_s} \left( \frac{\partial h_s}{\partial x} \frac{\partial {}^t\Psi}{\partial x} + \frac{\partial h_s}{\partial y} \frac{\partial {}^t\Psi}{\partial y} \right) \frac{P}{ik} \quad (\text{F.3b})$$

Il ne reste plus qu'à projeter ces équations sur la base des fonctions propres. Les calculs nécessaires pour obtenir le résultat souhaité sont lourds mais ils ne présentent pas de problème particulier. Les calculs sont développés dans la suite.

Tout d'abord pour l'équation F.3a, la projection sur les modes propres donne :

$$\iint_{xy} -ikh_s^t \Psi V \Psi dx dy = \iint_{xy} \frac{\partial^t \Psi P}{\partial s} \Psi dx dy$$

ou encore :

$$E1 = \iint_{xy} -ikh_s \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} V s dx dy = \iint_{xy} \frac{\partial \Psi_{m'n'} P}{\partial s} \Psi_{mn} dx dy \quad (\text{F.4})$$

De plus,

$$\iint_{xy} \frac{\partial \Psi_{m'n'} P}{\partial s} \Psi_{mn} dx dy = \underbrace{\iint_{xy} \frac{\partial \Psi_{mn} P \Psi_{m'n'}}{\partial s} dx dy}_{I1} - \underbrace{\iint_{xy} \Psi_{m'n'} P \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial s} dx dy}_{I2}$$

Le théorème de Leibniz donne l'égalité suivante :

$$\int_{r_e}^{r_i} \frac{\partial p \Psi_\alpha}{\partial s} dr = \frac{\partial}{\partial s} \left( \int_{r_e}^{r_i} p \Psi_\alpha dr \right) - r'_i [p \Psi_\alpha]_{r_i} + r'_e [p \Psi_\alpha]_{r_e}$$

D'après la manière dont est défini  $\Psi_{mn}(x, y)$  dans notre problème (Éq. 3.3), l'intégrale  $I1$  peut être développée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I1 &= \int_{x_e(s)}^{x_i(s)} \int_{y_e(s)}^{y_i(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ P A_{mn} \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times A_{m'n'} \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right] dx dy \\ &= A_{mn} A_{m'n'} \iint_{xy} \left( P' \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) + P \frac{\partial}{\partial s} \left[ \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right] \right) dx dy \\ &= A_{mn} A_{m'n'} \left[ P' \times \int_x \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) dx \right. \\ &\quad \left. \times \int_y \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + P \times \int_x \frac{\partial}{\partial s} \left[ \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \right] dx \right. \\ &\quad \left. \times \int_y \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + P \times \int_x \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) dx \right. \\ &\quad \left. \times \int_y \frac{\partial}{\partial s} \left[ \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right] dy \right] \end{aligned}$$

De plus,

$$\int_x \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) dx = \frac{(x_i(s) - x_e(s))}{(2 - \delta_{m0})} \delta_{mm'}$$

En appliquant le théorème de Leibniz, L'intégrale  $I1$  devient ainsi :

$$\begin{aligned} I1 &= A_{mn}A_{m'n'} \left[ P' \times \frac{(x_i(s) - x_e(s))}{(2 - \delta_{m0})} \delta_{mm'} \times \frac{(y_i(s) - y_e(s))}{(2 - \delta_{n0})} \delta_{nn'} \right. \\ &\quad + P \times \int_x \frac{\partial}{\partial s} \left[ \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \right] dx \times \frac{(y_i(s) - y_e(s))}{(2 - \delta_{n0})} \delta_{nn'} \\ &\quad \left. + P \times \frac{(x_i(s) - x_e(s))}{(2 - \delta_{m0})} \delta_{mm'} \times \int_y \frac{\partial}{\partial s} \left[ \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \right] dy \right] \\ &= P' \times (x_i(s) - x_e(s)) (y_i(s) - y_e(s)) + P \times A_{mn}A_{m'n'} \frac{(y_i(s) - y_e(s))}{(2 - \delta_{n0})} \delta_{nn'} \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{2} (x'_i(s) - x'_e(s)) \delta_{mm'} (1 + \delta_{m0}) - x'_i(s) + x'_e(s) (-1)^{m+m'} \right] + P \times A_{mn}A_{m'n'} \\ &\quad \times \frac{(x_i(s) - x_e(s))}{(2 - \delta_{m0})} \delta_{mm'} \left[ \frac{1}{2} (y'_i(s) - y'_e(s)) \delta_{nn'} (1 + \delta_{n0}) - y'_i(s) + y'_e(s) (-1)^{n+n'} \right] \\ &= \frac{dP}{ds} \times S + P [(x'_i(s) - x'_e(s)) (y_i(s) - y_e(s)) + (x_i(s) - x_e(s)) (y'_i(s) - y'_e(s))] \\ &\quad + A_{mm'} P (y_i(s) - y_e(s)) \delta_{nn'} (x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)) \\ &\quad + A_{nn'} P (x_i(s) - x_e(s)) \delta_{mm'} (y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)) \end{aligned}$$

avec  $S = (x_i(s) - x_e(s)) (y_i(s) - y_e(s))$ .

Il s'agit maintenant de développer et de simplifier l'intégrale  $I2$ . Pour cela, il faut d'abord calculer la dérivée de  $\Psi_{mn}$  par rapport à  $s$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial s} &= A_{mn} \left[ m\pi \left( \frac{x'_i(s) (x_i(s) - x_e(s)) - (x_i(s) - x) (x'_i(s) - x'_e(s))}{(x_i(s) - x_e(s))^2} \right) \right. \\ &\quad \times -\sin \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \cos \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \\ &\quad + n\pi \left( \frac{y'_i(s) (y_i(s) - y_e(s)) - (y_i(s) - y) (y'_i(s) - y'_e(s))}{(y_i(s) - y_e(s))^2} \right) \\ &\quad \left. \times -\sin \left( n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)} \right) \cos \left( m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)} \right) \right] \end{aligned}$$

L'intégrale  $I2$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
I2 = & P \times A_{mn} A_{m'n'} \left[ m\pi \int_x \frac{x'_i(s)(x_i(s) - x_e(s)) - (x_i(s) - x)(x'_i(s) - x'_e(s))}{(x_i(s) - x_e(s))^2} \right. \\
& \times -\sin\left(m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) \cos\left(m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) dx \\
& \times \int_y \cos\left(n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)}\right) \cos\left(n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)}\right) dy \\
& + n\pi \int_y \frac{y'_i(s)(y_i(s) - y_e(s)) - (y_i(s) - y)(y'_i(s) - y'_e(s))}{(y_i(s) - y_e(s))^2} \\
& \times -\sin\left(n\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)}\right) \cos\left(n'\pi \frac{y_i(s) - y}{y_i(s) - y_e(s)}\right) dy \\
& \left. \times \int_x \cos\left(m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) \cos\left(m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) dx \right]
\end{aligned}$$

Il est nécessaire de calculer l'intégrale  $I3$  suivante :

$$\begin{aligned}
I3 = & \int_{x_e(s)}^{x_i(s)} \frac{x'_i(s)(x_i(s) - x_e(s)) - (x_i(s) - x)(x'_i(s) - x'_e(s))}{(x_i(s) - x_e(s))^2} \\
& \times -\sin\left(m\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) \times \cos\left(m'\pi \frac{x_i(s) - x}{x_i(s) - x_e(s)}\right) dx
\end{aligned}$$

Cette intégrale se calcule sans grande difficulté, on trouve :

$$I3 = \begin{cases} \left( x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s) \right) \frac{m}{\pi(m^2 - m'^2)} & \text{si } m \neq m' \\ -\frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{4\pi m} & \text{si } m = m' \end{cases}$$

L'intégrale  $I2$  est donc égale à :

Si  $m \neq m'$  et  $n \neq n'$ .

$$I2 = 0$$

Si  $m \neq m'$  et  $n = n'$ .

$$I2 = P \times A_{mm'} \left( x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s) \right) \frac{m^2}{m^2 - m'^2} \times (y_i(s) - y_e(s))$$

Si  $m = m'$  et  $n \neq n'$ .

$$I2 = P \times A_{nn'} \left( y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s) \right) \frac{n^2}{n^2 - n'^2} \times (x_i(s) - x_e(s))$$

Si  $m = m'$  et  $n = n'$ .

$$I2 = -\frac{P}{4} [(x'_i(s) - x'_e(s)) (y_i(s) - y_e(s)) (2 - \delta_{m0}) + (y'_i(s) - y'_e(s)) (x_i(s) - x_e(s)) (2 - \delta_{n0})]$$

L'équation F.4 peut maintenant être écrite sous la forme suivante :

Si  $m \neq m'$  et  $n \neq n'$ .

$$\begin{aligned} E1 &= I1 - I2 \\ &= \frac{dP}{ds} \times S + P \times S \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \right] + A_{mm'} P \times S \times \delta_{nn'} \\ &\quad \times \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + A_{nn'} P \times S \times \delta_{mm'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \end{aligned}$$

Si  $m \neq m'$  et  $n = n'$ .

$$\begin{aligned} E1 &= I1 - I2 \\ &= \frac{dP}{ds} \times S + P \times S \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \right] + A_{mm'} P \times S \times \delta_{nn'} \\ &\quad \times \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + A_{nn'} P \times S \times \delta_{mm'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \\ &\quad - P \times S \times A_{mm'} \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} \frac{m^2}{m^2 - m'^2} \end{aligned}$$

Si  $m = m'$  et  $n \neq n'$ .

$$\begin{aligned} E1 &= I1 - I2 \\ &= \frac{dP}{ds} \times S + P \times S \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \right] + A_{mm'} P \times S \times \delta_{nn'} \\ &\quad \times \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + A_{nn'} P \times S \times \delta_{mm'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \\ &\quad - P \times S \times A_{nn'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \frac{n^2}{n^2 - n'^2} \end{aligned}$$

Si  $m = m'$  et  $n = n'$ .

$$\begin{aligned}
E1 &= I1 - I2 \\
&= \frac{dP}{ds} \times S + P \times S \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \right] + A_{mm'} P \times S \times \delta_{nn'} \\
&\quad \times \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + A_{nn'} P \times S \times \delta_{mm'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \\
&\quad - S \frac{P}{4} \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} (2 - \delta_{m0}) + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} (2 - \delta_{n0}) \right]
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{dP}{ds} = -ikV_s B - (D - E) P$$

en posant :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{S} \iint_{xy} h_s \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} dx dy \\
D &= 0 && \text{si } m \neq m' \text{ et } n \neq n' \\
&= A_{mm'} \frac{x'_e(s) (-1)^{m+m'} - x'_i(s)}{x_i(s) - x_e(s)} \frac{m^2}{m^2 - m'^2} && \text{si } m \neq m' \text{ et } n = n' \\
&= A_{nn'} \frac{y'_e(s) (-1)^{n+n'} - y'_i(s)}{y_i(s) - y_e(s)} \frac{n^2}{n^2 - n'^2} && \text{si } m = m' \text{ et } n \neq n' \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} (2 - \delta_{m0}) + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} (2 - \delta_{n0}) \right] \\
&\quad + \frac{x'_i(s) - x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + \frac{y'_i(s) - y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)} && \text{si } m = m' \text{ et } n = n' \\
E &= A_{mm'} \delta_{nn'} \times \frac{x'_i(s) - (-1)^{m+m'} x'_e(s)}{x_i(s) - x_e(s)} + A_{nn'} \delta_{mm'} \frac{y'_i(s) - (-1)^{n+n'} y'_e(s)}{y_i(s) - y_e(s)}
\end{aligned}$$

Le même principe de développement est employé pour l'équation F.3b. On projette cette équation sur les modes propres du conduit, on trouve :

$$\begin{aligned}
\iint_{xy} -ik \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} P dx dy &= \iint_{xy} - \left[ \frac{\partial^2 \Psi_{m'n'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{m'n'}}{\partial y^2} \right] \frac{P \Psi_{mn}}{ik} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial s} V_s \Psi_{mn} \\
&\quad - \frac{1}{h_s} \left( \frac{\partial h_s}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial x} + \frac{\partial h_s}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial y} \right) \frac{P \Psi_{mn}}{ik} dx dy
\end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial x^2} = - \left( \frac{m\pi}{x_i(s) - x_e(s)} \right)^2 \times \Psi_{mn} \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial y^2} = - \left( \frac{n\pi}{y_i(s) - y_e(s)} \right)^2 \times \Psi_{mn} \quad (\text{F.6})$$

Les équations ci-dessus (F.6) donnent :

$$\begin{aligned} \iint_{xy} \frac{1}{h_s} \frac{\partial \Psi_{m'n'} V_s}{\partial s} \Psi_{mn} dx dy &= \iint_{xy} -ik \Psi_{mn} \Psi_{m'n'} P + \frac{1}{h_s} \left( \frac{\partial h_s}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial x} + \frac{\partial h_s}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial y} \right) \frac{P \Psi_{mn}}{ik} \\ &\quad - \left[ \left( \frac{m\pi}{x_i(s) - x_e(s)} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{y_i(s) - y_e(s)} \right)^2 \right] \frac{\Psi_{m'n'} P \Psi_{mn}}{ik} dx dy \end{aligned}$$

Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient :

$$\frac{dV_s}{ds} = \frac{1}{ik} (KB + C) P - (D - E) V_s$$

Avec

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{S} \iint_{xy} \left( \frac{\partial h_s}{\partial x} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial x} + \frac{\partial h_s}{\partial y} \frac{\partial \Psi_{m'n'}}{\partial y} \right) \Psi_{mn} \\ K &= (k^2 - \mu_{mn}^2) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \\ \mu_{mn}^2 &= \left[ \left( \frac{m\pi}{x_i(s) - x_e(s)} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{y_i(s) - y_e(s)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Si on ne considère pas l'hélicité du conduit, les intégrales  $B$  et  $C$  peuvent être calculées analytiquement, elles sont égales à :

$$\begin{aligned} B &= \delta_{mm'} \delta_{nn'} + \frac{A_{mn} A_{m'n'}}{R\pi^2} \frac{\delta_{nn'}}{2 - \delta_{n0}} (x_i(s) - x_e(s)) \left( 1 - (-1)^{m+m'} \right) \left( \frac{m^2 + m'^2}{m^2 - m'^2} \right) && \text{si } m \neq m' \\ &= \delta_{nn'} - \frac{A_{mn} A_{m'n'}}{4R} \frac{\delta_{nn'}}{2 - \delta_{n0}} (x_e(s) + x_i(s)) && \text{si } m = m' \\ C &= \frac{A_{mn} A_{m'n'}}{R(x_i(s) - x_e(s))} \frac{m^2}{m^2 - m'^2} \frac{\delta_{nn'}}{2 - \delta_{n0}} \left( (-1)^{m+m'} - 1 \right) && \text{si } m \neq m' \\ &= 0 && \text{si } m = m' \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] *Actran - Users Manual 2006 Aeroacoustics solutions : Actran/TM and Actran/LA. Version 1th of December 14, 2005.*
- [2] **Amiet R.** : Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *J. Sound Vib.*, 41, p. 407–420, 1975.
- [3] **Aurégan Y., Starobinski R. & Pagneux V.** : Influence of grazing flow and dissipation effects on the acoustic boundary conditions at a lined wall. *J. Acous. Soc. Am*, 109(1), p. 59–64, 2001.
- [4] **Boyd J. P.** : *Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Second Edition.* DOVER Publications, Inc., 2000.
- [5] **Brambley E. & Peake N.** : Sound transmission in strongly-curved slowly-varying cylindrical and annular lined ducts with flow. *AIAA Paper*, 2006-2582, 2006.
- [6] **Bruneau M.** : *Manuel d'acoustique fondamentale.* Hermes, 1998.
- [7] **Candel S. M.** : *Analytical studies of some acoustic problems of jet engines.* Thèse de doctorat, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1972. For the Degree of Doctor of Philosophy.
- [8] **Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A. & Zang T.** : *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* Springer-Verlag, 1988.
- [9] **Carbonneau X.** : *Contribution à l'optimisation des turbines centrifètes de faibles dimensions.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1998.
- [10] **Castres F., Joseph P. & Astley J.** : Mode detection in turbofan inlets from acoustic pressure measurements in the radiated field. *AIAA Paper*, (2004-2953), May 10-12 2004.
- [11] **Castres F. O. & Joseph P. F.** : Mode detection in turbofan inlets from near field sensor arrays. *J. Acous. Soc. Am*, Volume 121, Issue 2, p. 796–807, 2007.
- [12] **Cogne V.** : Rapport de fin d'étude : Bruit de compresseur. Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [13] **Dufour G.** : *Contributions à la modélisation et au calcul des écoulements dans les compresseurs centrifuges : Application à la conception par lois de similitude.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2006.
- [14] **Enghardt L., Tapken U., Kornow O. & Kennepohl F.** : Acoustic mode decomposition of compressor noise under consideration of radial flow profiles. *AIAA Paper*, (2005-2833), May 23 - 25 2005.

- [15] **Envia E.** : Fan noise reduction : an overview. *International Journal of Aeroacoustics*, Volume 1, Number 1, p. pp. 43–64(22), 2002.
- [16] **Felix S.** : *Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes & problème avec source dans un écoulement cisailé*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale de l'Université du Maine, France, 2002.
- [17] **Glegg S.** : Broadband noise from ducted prop fans. *AIAA Paper*, 93-4402, 1993.
- [18] **Glegg S.** : The response of a swept blade row to a three-dimensionnal gust. *J. Sound Vib.*, 227, p. 29–64, 1999.
- [19] **Goldstein M. E.** : *Aeroacoustics*. Mc Grawhill, New York, 1976.
- [20] **Howe M.** : A review of the theory of trailing edge noise. *J. Sound Vib.*, 61(3), p. 437–465, 1978.
- [21] **Ingenito J.** : Rapport de fin d'étude : Bruit d'un compresseur centrifuge, mise au point d'un modèle de prédiction. Master Recherche *Fluide Acoustique et Energétique*, Université de Poitiers, 2005.
- [22] **Ingenito J. & Roger M.** : Analytical modelling of sound transmission through the passage of centrifugal compressors. *AIAA Paper*, (2007-3704), May 21-23 2007.
- [23] **Ingenito J. & Roger M.** : Measurement and prediction of the tonal noise of a centrifugal compressor at inlet. *AIAA Paper*, (2009-3360), May 11-13 2009.
- [24] **Kennepohl F., Gründel H., Kahl G. & Enghardt L.** : Compressor noise reduction with cfd blade design : Numerical studies and rig tests. *ISABE*, (2005-1188), 2005.
- [25] **Lazreq Z., Tahar M. B., Ville J. M. & Auger J. M.** : A mixed experimental and theoretical method for noise propagation and radiation prediction of a cowled axial fan. *J. Acous. Soc. Am*, Volume 100 Issue 1, p. 166–177, 1996.
- [26] **Legros J.-C.** : *Contribution à l'optimisation aéro-acoustique des ventilateurs de groupe de conditionnement d'air pour avion*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, France, 2002. Thèse de Docteur en Aéro-Acoustique.
- [27] **Levine H. & Schwinger J.** : On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. i. *Phys. Rev.*, 74(8), p. 958–974, Oct 1948.
- [28] **Lewy S.** : *Fondements de l'acoustique industrielle et de l'aéroacoustique*. Hermès science publications, Paris, 2001.
- [29] **Lidoine S., Roger M., Batard H., Troyes S. & Delnevo A.** : Acoustic radiation modelling of aeroengine intake. comparison between analytical and numerical methods. *AIAA Paper*, (2001-2140), May 28-30 2001.
- [30] **Lordi J., Homicz G. & Rehm R.** : Effects of finite duct length and blade chord on noise generation by a rotating blade row. *AIAA Paper*, (74-555), 1974.
- [31] **Mitra R. & Lee L.** : *Analytical techniques in the theory of guided waves*. The Mac-Millan Company, 1971.
- [32] **Neise W.** : Review of fan noise generation mechanisms and control methods. *Fan noise INCE Symposium*, 1992.

- [33] **Ovenden N.** : A uniformly valid multiple scales solution for cut-on cut-off transition of sound in flow ducts. *J. Sound Vib.*, 286, p. 403–416, 2005.
- [34] **Pham X.-H.** : Rapport de fin d'étude : Compressor noise. prediction model. Ecole Centrale de Lyon, 2004.
- [35] **Posson H. & Roger M.** : Parametric study of gust scattering and sound transmission through a blade row. *AIAA Paper*, (2007-3690), May 21-23 2007.
- [36] **Raitor T. & Neise W.** : Sound generation in centrifugal compressors. *AIAA Paper*, (2006-2579), May 8-10 2006.
- [37] **Rienstra S. W.** : Sound propagation in slowly varying lined flow ducts of arbitrary cross section. *J. Fluid Mech*, 495, p. 157–173, 2003.
- [38] **Rienstra S.** : Sound transmission in slowly varying circular and annular lined ducts with flow. *J. Fluid Mech*, 380, p. 279–296, 1999.
- [39] **Rienstra S. & Hirschberg A.** : *An introduction to acoustics*. 2004.
- [40] **Roger M. & Moreau S.** : Broadband self-noise from loaded fan blades. *AIAA Journal*, 42, p. 536–544, 2004.
- [41] **Roger M.** : Aero-acoustique (cours en langue anglaise).
- [42] **Roger M.** : Analytical modelling of wake-interaction noise in centrifugal compressors with vaned diffusers. *AIAA Paper*, (2004-2994), May 10-12 2004.
- [43] **Sijtsma P. & Zillmann J.** : In-duct and far-field mode detection techniques. *AIAA Paper*, (2007-3439), May 21-23 2007.
- [44] **Singh P.** : Implementation of an analytical model to predict the noise radiated by a centrifugal compressor : numerical validation of analytical models. step 2 : Numerical validation of brambley model. University of Royal Institute of Technology (KTH), 2007.
- [45] **Singh P.** : Implementation of an analytical model to predict the noise radiated by a centrifugal compressor : numerical validation of analytical models. step 1 : Numerical validation of wiener-hopf models. University of Royal Institute of Technology (KTH), 2007.
- [46] **Snakowska A. & Wyrzykowski R.** : Calculation of the acoustical field of a semi-infinite cylindrical wave-guide by means of the green function expressed in cylindrical coordinates. *Archives of Acoustics*, pages 261–285, 1986.
- [47] **Tyler J. & Sofrin T.** : Axial flow compressor noise studies. *SAE Transactions*, 70, p. 309–332, 1962.
- [48] **Xu C. & Müller M.** : Development and design of a centrifugal compressor volute. *International Journal of Rotating Machinery*, 3, p. 190–196, 2005.