

Classification
 Physics Abstracts
 43.30

Comparaison de trois équations paraboliques résolues par l'algorithme split step Fourier (*)

Daniel Juvé et Philippe Blanc-Benon

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, U.A. CNRS 263, Ecole Centrale de Lyon, B.P. 163, 69131 Ecully Cedex, France

(Reçu le 15 septembre 1987, révisé le 25 janvier 1988, accepté le 8 mars 1988)

Résumé. — La méthode de l'équation parabolique résolue par transformée de Fourier spatiale est un outil puissant de calcul en acoustique sous-marine. Diverses variantes de la technique de base ont été proposées dans la littérature et nous en rappelons ici deux. La première utilise un opérateur de propagation grand angle, tandis que la seconde effectue une correction *a posteriori* des résultats obtenus par l'équation standard. Les pertes par propagation fournies par ces différentes approches sont comparées au résultat exact dans le cas d'un milieu présentant un fort gradient de célérité du son selon la verticale. Sur cet exemple la méthode de Thomson et Chapman présente le meilleur compromis précision-temps de calcul et est aussi satisfaisante que la correction de phase *a posteriori* proposée très récemment par Thomson et Wood.

Abstract. — The parabolic equation solved by the split step Fourier algorithm is a powerful technique for the computation of underwater sound propagation. In the past various methods have been proposed to improve the accuracy of the basic technique. Two of these are described in this paper: the first one is based on a wide-angle propagator (Thomson and Chapman) while the second makes use of *a posteriori* corrections (DeSanto). The transmission losses computed by the different methods are compared in a difficult configuration with a strong sound velocity gradient. It is shown that the algorithm of Thomson and Chapman is the best trade off between accuracy and computing time. In this particular case the results obtained by this method are as good as those reported very recently by Thomson and Wood, using *a posteriori* phase corrections.

1. Introduction.

La méthode de l'équation parabolique est un outil efficace pour la modélisation de la propagation acoustique sous-marine, particulièrement lorsque les variations de la célérité du son selon l'horizontale doivent être prises en compte. Depuis son introduction par Tappert en 1973, de nombreuses variantes et améliorations de la méthode standard ont été proposées. Pour la plupart elles cherchent à s'affranchir de l'hypothèse de propagation sous de petits angles utilisée pour ramener l'équation de Helmholtz à une forme parabolique (approximation de Fresnel continue). Les mérites relatifs de ces différentes approches ne sont cependant pas toujours évidents et les comparaisons de résultats de calculs menés dans des conditions strictement identiques sont rares [1].

Dans cet article nous rappelons brièvement les raisonnements conduisant à l'équation parabolique standard [2], à la version grands-angles de Thomson et Chapman

[3] et à la correction *a posteriori* proposée par DeSanto [4]. Ces trois équations sont ensuite résolues grâce à un algorithme utilisant une transformée de Fourier selon la verticale (algorithme split step Fourier) dans un cas de propagation en milieu stratifié considéré comme difficile [1]: angle d'ouverture de la source assez grand, fort gradient de célérité du son. Les facteurs de perte par propagation obtenus à la profondeur de la source par les trois méthodes sont comparés au résultat *exact* obtenu par application du Fast Field Program [5] ainsi qu'à celui d'une méthode de correction *a posteriori* présentée très récemment par Thomson & Wood [6, 7]. On donne également des cartographies des niveaux dans tout le domaine de calcul qui mettent bien en évidence les déplacements des zones de convergence provoqués, dans des conditions difficiles, par l'application de l'approximation parabolique standard.

2. Equation parabolique standard et algorithme split step Fourier.

Par soucis de simplicité nous considérons le cas d'un océan stratifié dans lequel la célérité du son c est fonction de la seule profondeur z , la masse volumique étant

(*) Texte présenté aux 8^e Journées d'Etudes Sur la Propagation Acoustique (JESPA), Université Bordeaux I, 14-17 juin 1988.

uniforme. Nous utilisons un système de coordonnées cylindriques dont l'origine est choisie à la surface de l'océan et à la verticale de la source. Cette source, située à la profondeur z_s , est supposée ponctuelle et monochromatique (pulsation ω). La pression $p(r, z)$ est alors solution de l'équation de Helmholtz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(z) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_s) \quad (1)$$

dans laquelle $n = c_0/c$ est l'indice de réfraction, k_0 un nombre d'onde moyen, c_0 étant une célérité prise comme référence.

L'idée physique qui permet de transformer l'équation (1) en une équation parabolique est la suivante : compte tenu du caractère faiblement inhomogène et focalisant du milieu marin, le champ acoustique peut être décrit, sauf au voisinage immédiat de la source, comme une onde cylindrique modulée par une amplitude ψ lentement variable avec r sur l'échelle d'une longueur d'onde. Faisant alors le changement de fonction :

$$p(r, z) = r^{-1/2} e^{ik_0 r} \psi(r, z) \quad (2)$$

dans la forme homogène de l'équation de Helmholtz on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(z) - 1) \psi = 0. \quad (3)$$

L'équation parabolique standard en résulte lorsqu'on néglige le terme $\partial^2 \psi / \partial r^2$ devant $2ik_0 \partial \psi / \partial r$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{ik_0}{2} (n^2(z) - 1) \psi. \quad (4)$$

Cette équation peut être résolue de proche en proche à partir de la donnée d'un front initial en $r = r_0$. La méthode de solution proposée par Tappert, et qui est la plus efficace du point de vue des temps de calcul en océan profond, est fondée sur l'utilisation du découplage approché d'un opérateur exponentiel et d'une transformée de Fourier selon la profondeur. Posant :

$$A = \frac{ik_0}{2} (n^2 - 1) \quad \text{et} \quad B = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

l'équation (4) s'intègre formellement selon :

$$\psi(r + \Delta r, z) \simeq \exp \left(\int_r^{r+\Delta r} (A + B) dr \right) \times \psi(r, z). \quad (6)$$

Pour un pas Δr suffisamment petit on peut écrire :

$$\psi(r + \Delta r, z) \simeq \exp(A \Delta r + B \Delta r) \cdot \psi(r, z). \quad (7)$$

Enfin l'exponentielle peut être développée en produits, de façon approchée car A et B ne commutent pas, et on obtient :

$$\psi(r + \Delta r, z) \simeq \exp(A \Delta r) \exp(B \Delta r) \cdot \psi(r, z). \quad (8)$$

Les erreurs commises lors du passage de l'équation (4) à la forme (8) ont été exposées par Di Napoli et Deavenport [1]. Le terme

$$\exp \left(i \frac{\Delta r}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(r, z) \quad (9)$$

est calculé de façon élégante grâce à une transformée de Fourier (notée $F\{ \}$) selon la profondeur, ce qui conduit à l'expression finale :

$$\psi(r + \Delta r, z) = \exp \left(\frac{i}{2k_0} (n^2 - 1) \right) \times F^{-1} \left\{ \exp \left(-i \frac{\Delta r}{2k_0} k_z^2 \right) F \{ \psi(r, z) \} \right\}. \quad (10)$$

L'algorithme de calcul se déduit de cette relation qui se présente naturellement sous une forme vectorielle simple à programmer (éventuellement sur calculateur parallèle). Deux points délicats sont toutefois à signaler : l'initialisation du calcul et la prise en compte des conditions limites. L'approximation parabolique n'étant pas valable au voisinage de la source, l'initialisation de l'algorithme doit être effectuée soit grâce à une autre technique (rayons, modes), soit en utilisant en $r = 0$ une forme analytique correspondant au rayonnement en milieu homogène d'une source ponctuelle dans un secteur angulaire limité (gaussienne [2], fenêtre de Kaiser [3]). Le deuxième point est lié à la prise en compte du fond ; en effet l'utilisation de transformées de Fourier impose que le champ soit négligeable pour la profondeur maximale utilisée dans le calcul. Pour éviter toute réflexion numérique (repliement) on est conduit à prolonger la lame d'eau par un fond fictif fortement absorbant. La connaissance du type d'initialisation, de l'étendue du fond fictif et du taux d'atténuation sont des prérequis, pas toujours disponibles dans la littérature, à toute comparaison précise des différentes équations proposées.

En plus de l'hypothèse de champ lointain, l'écriture de l'équation parabolique standard suppose que trois conditions soient remplies, ce qui est clair d'après la dérivation physique donnée ci-dessus, et qui a été confirmée par des analyses de type modal ou de type géométrique :

- l'énergie rétrodiffusée doit être négligeable (dans le cas où le milieu est non stratifié, $c = c(r, z)$) ;
- les inhomogénéités doivent être faibles ;
- la propagation doit s'effectuer sous de petits angles par rapport à l'horizontale.

Pour s'affranchir au moins en partie des deuxième et troisième conditions tout en restant dans un cadre parabolique, de nombreuses propositions ont été faites que l'on peut classer en deux familles : celles qui cherchent à établir de nouvelles équations dites grands angles, et celles qui essaient de corriger *a posteriori* les résultats obtenus par l'équation parabolique standard. Dans le paragraphe suivant nous décrivons deux méthodes se rapportant respectivement à chacune de ces deux familles, méthodes qui conservent la possibilité d'utiliser l'algorithme split step Fourier.

3. Equations paraboliques modifiées.

3.1 EQUATION GRANDS-ANGLES. — L'établissement d'équations de validité plus générale que celle de l'équation standard a été envisagé dès l'origine par Tappert lui-même [2]. La première étape consiste à factoriser l'équation de Helmholtz pour faire apparaître les ondes directes et réfléchies (cette factorisation n'étant qu'approchée en milieu non stratifié). Nous reprenons les notations de Tappert en introduisant les opérateurs

$$P = \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{et} \quad Q = \left(n^2(z) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

En champ lointain l'équation satisfaite par $u = r^{1/2} p$ est :

$$(P^2 + k_0^2 Q^2) u(r, z) = 0 \quad (12)$$

que l'on peut factoriser en :

$$(P - ik_0 Q)(P + ik_0 Q) u(r, z) = 0. \quad (13)$$

Les ondes directes u^+ et réfléchies u^- sont découplées en milieu stratifié et u^+ est solution de :

$$(P - ik_0 Q) u^+ = 0. \quad (14)$$

Cette équation est de type parabolique, mais la difficulté est d'évaluer l'opérateur Q , racine carrée de Q^2 . Après avoir posé :

$$Q = (1 + \varepsilon + \mu)^{1/2}; \quad \varepsilon = n^2(z) - 1; \quad \mu = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (15)$$

l'approche naïve consiste à effectuer des développements limités en supposant que les inhomogénéités sont faibles ($\varepsilon \ll 1$) et/ou les angles de propagation également ($\mu \approx \sin^2 \theta \ll 1$). Le développement le plus simple :

$$Q_1 \approx 1 + \varepsilon/2 + \mu/2 \quad (16)$$

conduit, pour $\psi = u^+ e^{-ik_0 r}$, à l'équation parabolique standard. Un développement quadratique

$$Q_2 \approx 1 + (\varepsilon + \mu)/2 - (\varepsilon + \mu)^2/8 \quad (17)$$

paraît être la suite logique et a été utilisé par Grandvillemin [8]. Malheureusement la présence de termes produits $\varepsilon\mu$ et $\mu\varepsilon$ interdit d'utiliser le découplage de l'exponentielle indispensable à l'application de l'algorithme split step et une méthode de différences finies doit alors être employée. Il en est de même lorsque la racine carrée est approchée par un rapport de polynômes (approximation des 45°, Claerbout [9], St Mary et Ding Lee [10]). L'approximation de Q la plus efficace dans le cadre de l'algorithme split step a été proposée initialement par Feit et Fleck [11] et introduite en acoustique sous-marine par Thomson et Chapman [3]. Elle s'exprime de la façon suivante :

$$Q_3 \approx (1 + \mu)^{1/2} + ((1 + \varepsilon)^{1/2} - 1). \quad (18)$$

Cette formule est rigoureuse en milieu homogène ($n = 1$), aucune approximation n'étant faite sur la valeur

des angles de propagation. Thomson et Chapman ont analysé les erreurs résultant de (18); ils ont montré qu'elles étaient nettement plus faibles que celles induites par $Q = Q_1$ et par une autre approximation proposée par Tappert [2].

Si on utilise l'identité suivante :

$$(1 + \mu)^{1/2} = 1 + \mu ((1 + \mu)^{1/2} + 1)^{-1} \quad (19)$$

il est possible d'éliminer le terme de phase à variation rapide $\exp(ik_0 r)$. On obtient alors une équation pour ψ (au lieu de u^+) pour laquelle un pas de calcul en r plus grand peut être employé. L'application de la technique split step conduit immédiatement à la relation :

$$\psi(r + \Delta r, z) \approx \exp(ik_0(n - 1)\Delta r) \times F^{-1}\{\exp(ik_0 \Delta r(1 - k_z^2/k_0^2)^{1/2}) \cdot F\{\psi(r, z)\}\} \quad (20)$$

Remarquons que Thomson et Chapman utilisent pour leur part un découplage symétrique de l'exponentielle qui, en principe, introduit une erreur plus faible $O(\Delta r^2)$ au lieu de $O(\Delta r^3)$. Cependant en pratique, et dès que le nombre de pas de calcul est élevé, la différence entre les deux algorithmes est négligeable (Fleck *et al.* [12]). Indiquons aussi que le terme de propagation en espace libre de l'équation (20) est identique à celui proposé par Tappert [2], la seule différence provenant du terme d'inhomogénéité dans lequel $(n - 1)$ remplace $(n^2 - 1)/2$.

Du point de vue de l'implémentation sur ordinateur, la forme corrigée se présente de façon semblable à l'équation standard si bien que les temps de calcul seront pratiquement identiques.

3.2 CORRECTION a posteriori. — Une approche foncièrement différente de la précédente a été utilisée par DeSanto [4]. Elle consiste à résoudre l'équation standard et à corriger le résultat obtenu en se fondant sur une relation de type intégral qui existe entre la solution de l'équation de Helmholtz $p(r, z)$ et la solution de l'équation standard $\psi(r, z)$. En milieu stratifié cette relation, due initialement à Polyanskii [13], s'écrit :

$$p(r, z) = A_0 \int_0^\infty \psi(t, z) \times \exp\left(i \frac{k_0}{2t} (r^2 + t^2)\right) t^{-1} dt \quad (21)$$

où A_0 est une constante.

L'intégrale ci-dessus a été évaluée par DeSanto en appliquant la méthode de la phase stationnaire autour de $t = r$. On obtient alors :

$$p(r, z) \approx \psi(r, z) + \frac{1}{8 k_0^2 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, z) + \frac{ir}{2 k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}(r, z). \quad (22)$$

Le terme en dérivée première est négligeable du point de vue numérique [14] et on est donc conduit à utiliser la

formule :

$$p(r, z) \approx \psi(r, z) + \frac{ir}{2k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}(r, z), \quad (23)$$

ψ est obtenue par l'algorithme standard en $r + \Delta r$; quant à la dérivée seconde, elle est calculée par différence finie à partir des valeurs $\psi(r)$, $\psi(r + \Delta r)$ et $\psi(r + 2\Delta r)$. On voit donc que le calcul d'un pas de la solution corrigée nécessite le calcul de deux pas de la solution parabolique standard. Le temps de calcul est donc approximativement deux fois plus élevé, les tableaux de stockage étant pour leur part trois fois plus importants. Notons également que des instabilités de l'algorithme peuvent apparaître si le pas de calcul est trop petit.

4. Résultats numériques.

4.1 PARAMÈTRES DU MODÈLE. — Les équations standard (10), grands-angles (20) et la correction (23) ont été résolues par application de l'algorithme split step Fourier. Les résultats sont illustrés par un cas tiré du workshop de 1981 sur l'équation parabolique [1] et utilisé par de nombreux auteurs. Les caractéristiques du profil de célérité sont données dans le tableau I. Les transformées de Fourier ont été calculées sur 1 024 points, 512 étant destinés à respecter la condition limite à la surface en introduisant une source image (pas vertical $\Delta z = 4$ m). Le pas horizontal vaut 50 m dans tous les essais, sauf pour la correction de DeSanto qui s'est révélée instable pour cette valeur (on a alors pris $\Delta r = 100$ m). La source (et le récepteur pour le tracé des facteurs de perte par transmission) est située à la profondeur $z = 500$ m. Sa fréquence d'émission est de 25 Hz. L'initialisation du calcul a été réalisée selon la méthode proposée par Thomson et Chapman [3]. Le champ en $r = 0$ est donné par la formule :

$$\psi(0, z) = \left(\frac{2\pi c_0}{\omega} \right)^{1/2} (\pi(z - z_s))^{-1} \times \sin \left(\frac{\omega}{c_0} (z - z_s) \operatorname{tg} \theta_0 \right) I_0(xy)/I_0(x) \quad (24)$$

où I_0 désigne la fonction de Bessel modifiée d'ordre

Tableau I. — Paramètres du cas test (les caractéristiques varient de façon linéaire entre les points donnés).

[Environmental profile (the data are linear functions of depth between given points).]

Profondeur (m)	Célérité du son (m/s)	Atténuation (dB/m)
0	1 500	0
1 000	1 520	0
1 500	1 744	0
2 048	1 744	0,05

zéro, θ_0 est l'angle d'ouverture du faisceau (ici 30°), x est une valeur numérique (4,298) et y est défini par $y = \left[1 - \left(\frac{z - z_s}{z_{\max} - z_s} \right)^2 \right]^{1/2}$. La célérité du son de référence c_0 a été prise égale à 1 510 m/s. Cette initialisation est identique à celle utilisée par Thomson et Wood [6, 7] ce qui permet une comparaison valable des différents résultats.

4.2 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES. — Les facteurs de perte par transmission obtenus par les différentes méthodes sont tracés sur les figures 1 à 3 par comparaison avec les résultats réputés exacts (en champ lointain) obtenus par le Fast Field Program (FFP) et tirés de Thomson et Wood [6]. Il est clair que l'équation parabolique standard donne des résultats qui s'écartent sensiblement de ceux du FFP dès que la distance de

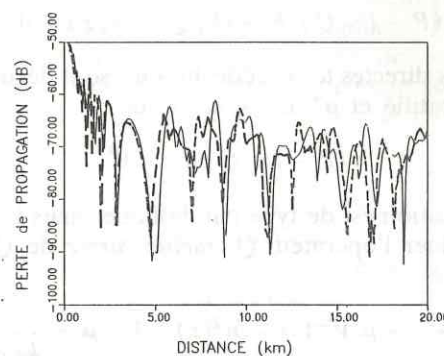


Fig. 1. — Perte par propagation calculée par l'équation parabolique standard (—) et par le Fast Field Program (---). Fréquence 25 Hz, profondeurs de la source et du récepteur 500 m, pas $\Delta r = 50$ m.

[Transmission loss versus range predicted by the standard parabolic equation (—) and by the Fast Field Program (---). Frequency 25 Hz, source and receiver depth 500 m, range step $\Delta r = 50$ m.]

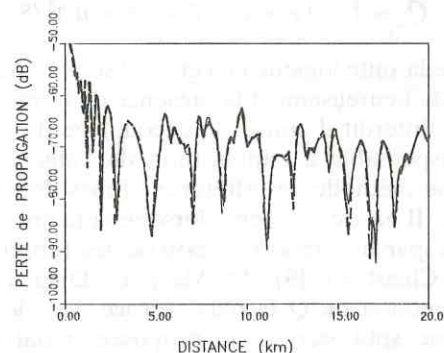


Fig. 2. — Perte par propagation calculée par l'équation parabolique grands angles (—) et par le Fast Field Program (---) (mêmes conditions qu'en Fig. 1).

[Transmission loss versus range predicted by the wide-angle parabolic equation (—) and by the Fast Field Program (---). Same conditions as in figure 1.]

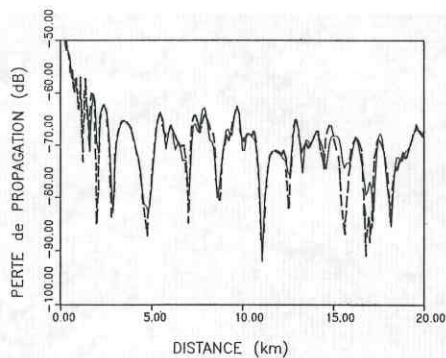


Fig. 3. — Perte par propagation calculée par l'équation parabolique standard avec la correction *a posteriori* de DeSanto (—) et par le Fast Field Program (---) (mêmes conditions qu'en Fig. 1, sauf $\Delta r = 100$ m).

[Transmission loss *versus* range predicted by the *a posteriori* correction of DeSanto (—) and by the Fast Field Program (---). Same conditions as in figure 1, except $\Delta r = 100$ m.]

propagation est supérieure à 5 km. On note surtout d'importants déplacements des positions des maximums et des minimums, ce qui correspond à une évolution de la figure d'interférence des différents modes dont la phase est mal approchée par l'équation parabolique standard (Mc Daniel [15]). Au contraire, la version de Thomson et Chapman est remarquablement proche de la solution de référence, si on excepte l'amplitude des minimums trop sensible au choix des pas vertical et horizontal et aux erreurs numériques. La méthode de DeSanto fournit également d'excellents résultats, légèrement moins bons toutefois pour $r > 15$ km. On doit se rappeler cependant que le pas de calcul est ici de 100 m au lieu de 50 m pour la version de Thomson et Chapman (et que le temps de calcul est 2 fois plus élevé). Pour finir, indiquons que Thomson et Wood [6, 7] ont proposé très récemment une correction de phase *a posteriori* fondée sur l'utilisation de la relation de DeSanto mais évitant l'approximation de la phase stationnaire. L'avantage de cette technique est qu'elle est rigoureuse dans le cas stratifié et peut

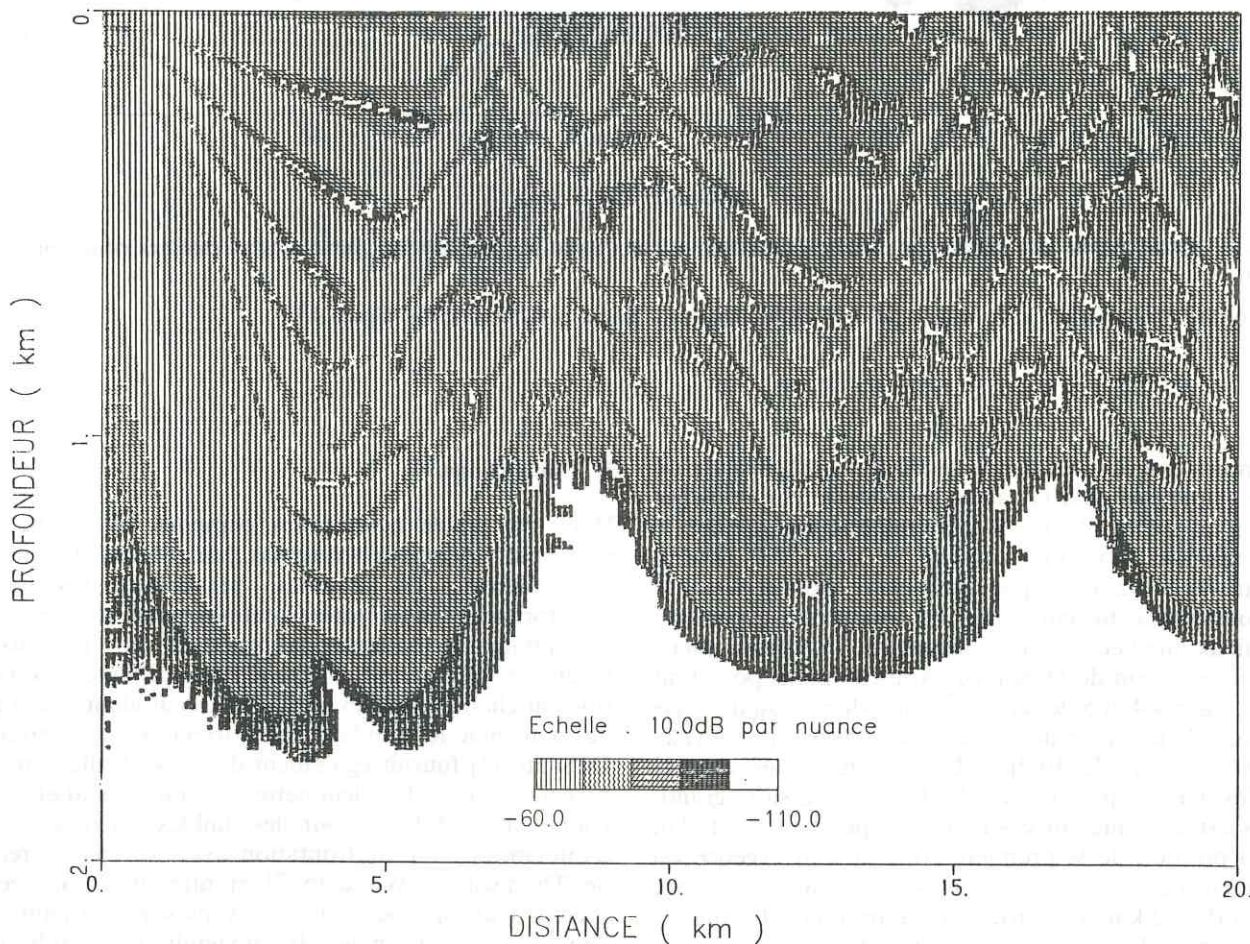


Fig. 4. — Cartographie des pertes par propagation obtenue par l'équation parabolique standard, fréquence 25 Hz, profondeur de la source 500 m, pas $\Delta r = 100$ m.

[Map of the transmission loss. Standard parabolic equation, frequency 25 Hz, source depth 500 m, range step $\Delta r = 100$ m.]

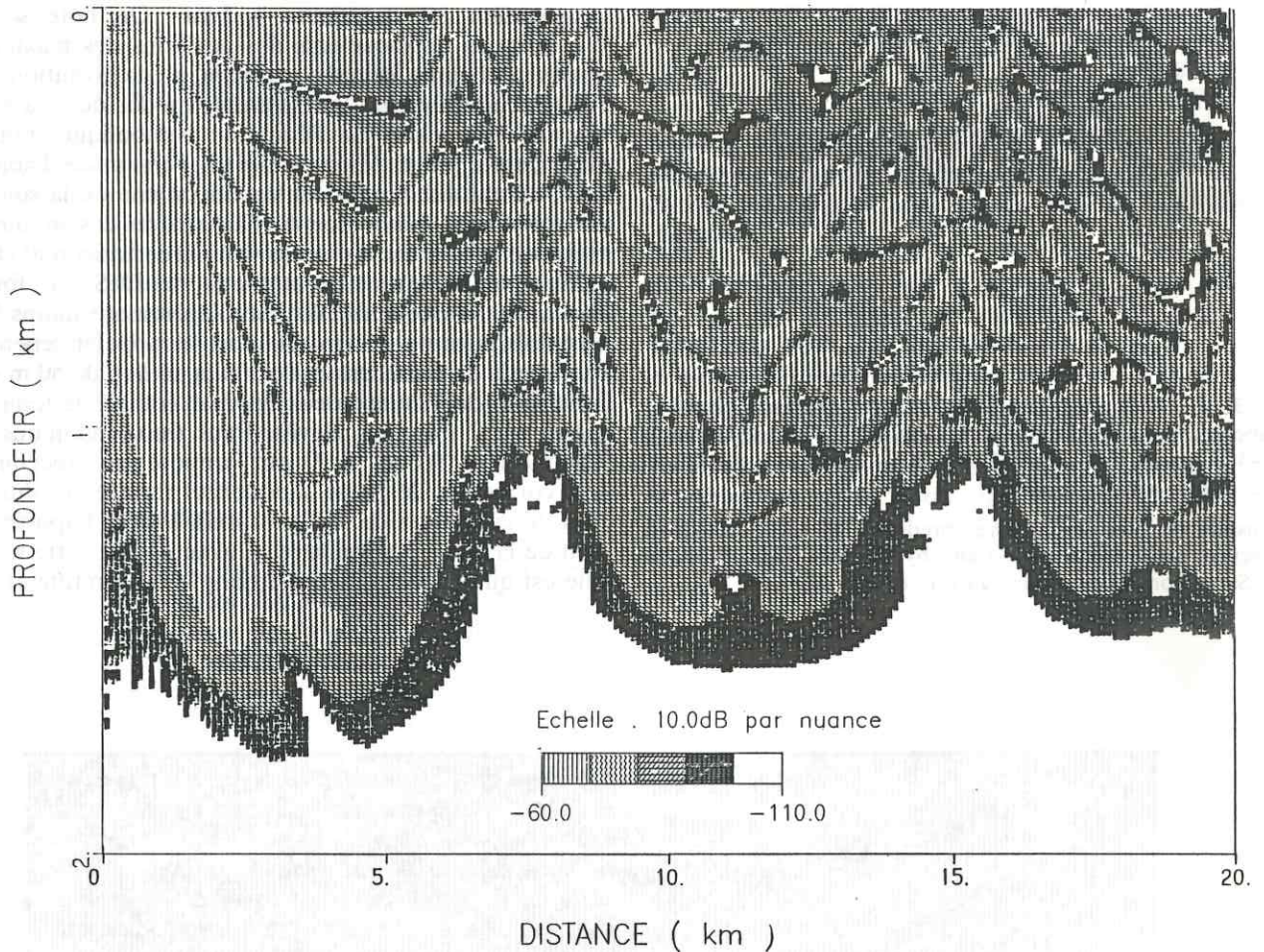


Fig. 5. — Cartographie des pertes par propagation obtenue par l'équation parabolique grands angles (mêmes conditions qu'en Fig. 4).

[Map of the transmission loss, wide-angle parabolic equation. Same conditions as in figure 4.]

être moins coûteuse en temps de calcul dans la mesure où on ne s'intéresse qu'à la valeur de la perte par transmission en un nombre limité de profondeurs (typiquement il faut effectuer une FFT directe et une FFT inverse portant sur 8 192 points par profondeur choisie). Dans le cas considéré cette correction ne fonctionne cependant pas mieux que l'équation grands angles (et à peine mieux que la correction de DeSanto). Nous donnons pour finir sur les figures 4 et 5 des cartographies du niveau de perte dans tout le domaine de calcul (512×200 points, niveau variant par pas de 10 dB). La similitude des champs calculés par l'équation standard et sa version grands angles est évidente sur ces cartes. Cependant il est clair que la position de la première zone de convergence est nettement décalée (vers 7,2 km pour l'équation standard au lieu de 6,2 km environ). D'autre part dans la zone de convergence la structure des interférences est plus complexe dans la version grands angles. Un calcul des différentes familles de rayons possibles (exactes, paraboliques et paraboliques grands angles) devrait permettre d'interpréter simplement ces divers déplacements.

5. Conclusions.

Dans cet article nous avons comparé les résultats de perte par propagation obtenus dans un cas difficile par trois variantes de l'équation parabolique résolue par transformation de Fourier spatiale (split step Fourier). L'avantage de la méthode proposée par Thomson et Chapman [3] apparaît clairement : excellente reconstitution du champ pour un temps de calcul identique à celui de la technique standard. La correction *a posteriori* de DeSanto [4] fournit également de bons résultats mais au prix d'un temps de calcul nettement plus grand et avec le risque d'instabilités pour les faibles valeurs du pas d'intégration. La confrontation avec les calculs récents de Thomson et Wood [6, 7] montre que, dans ce cas précis, leur approche n'est pas plus performante que l'équation grands-angles. Il conviendrait d'étendre cette confrontation (dans le sens du compromis précision-temps de calcul) à des cas de propagation encore plus difficiles et si possible aux autres types d'équations paraboliques résolues par différentes finies.

Bibliographie

- [1] DAVIS, J. A., WHITE, D., CAVANAGH, R. C., NORDA parabolic equation workshop, *NORDA Tech. Note* 143 (1982).
- [2] TAPPERT, F. D., The parabolic equation method, *wave propagation and underwater acoustics*, Eds. J. B. Keller et J. S. Papadakis (Springer-Verlag) 1977.
- [3] THOMSON, D. J., CHAPMAN, N. R., A wide-angle split step algorithm for the parabolic equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **74** (1983) 1848-1854.
- [4] DESANTO, J. A., Relation between the solution of the Helmholtz and parabolic equation for sound propagation, *J. Acoust. Soc. Am.* **62** (1977) 295-297.
- [5] DINAPOLI, F. R., DEAVENPORT, R. L., Numerical models of underwater acoustic propagation, *Ocean acoustics*, Ed. J. A. DeSanto (Springer-Verlag) 1979.
- [6] THOMSON, D. J., WOOD, D. H., *a posteriori* phase corrections to the parabolic equation, *progress in underwater acoustics*, Ed. H. M. Merklinger (Plenum Press) 1987 pp. 425-431.
- [7] THOMSON, D. J., WOOD, D. H., A post processing method for removing phase errors in the parabolic equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **82** (1987) 224-232.
- [8] GRANDVUILLEMIN, B., Application de l'approximation parabolique à l'acoustique sous-marine, Thèse Doct. 3^e cycle, Aix-Marseille II. (1985).
- [9] CLAERBOUT, J. F., Fundamentals of Geophysical data processing (Mc Graw-Hill) 1976.
- [10] ST. MARY, D. F., LEE DING, Analysis of an implicit finite difference solution to an underwater wave propagation problem, *J. Comput Phys.* **57** (1985) 378-390.
- [11] FEIT, M. D., FLECK, J. A., Jr., Light propagation in graded index fibers, *Appl. Opt.* **17** (1978) 3990-3998.
- [12] FLECK, Jr., J. A., MORRIS, J. R., FEIT, M. D., Time dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere, *Appl. Phys.* **10** (1976) 129-160.
- [13] POLYANSKI, E. A., Relationship between the solutions of the Helmholtz and Schrodinger equations, *Sov. Phys. Acoust.* **20** (1974) 90.
- [14] DESANTO, J. A., PERKINS, J. S., BAER, R. N., A correction to the parabolic equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **64** (1978) 1664-1666.
- [15] MC DANIEL, S. T., Propagation of a normal mode in the parabolic approximation, *J. Acoust. Soc. Am.* **57** (1975) 307-311.