N° d'ordre : 2005-47

ANNÉE 2005

THÈSE

présentée devant L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de DOCTEUR SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Olivier MARSDEN

CALCUL DIRECT DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DE PROFILS PAR UNE APPROCHE CURVILIGNE D'ORDRE ÉLEVÉ

Soutenue le 12 décembre 2005 devant la Commission d'Examen

JURY

- Examinateurs : M. Christophe BAILLY
 - M. Christophe BOGEY
 - M. Pierre COMTE (Rapporteur)
 - M. Daniel JUVE (Président)
 - M. Philippe LAFON
 - M. Sanjiva LELE (Rapporteur)
 - M. Geoffrey LILLEY
 - M. Serge PIPERNO

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509 École Centrale de Lyon

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier les personnes du Centre Acoustique qui y ont rendu mon séjour agréable : Christophe Bailly et Christophe Bogey, Pierre Roland, Evelyne Roche, Marie-Annick Galland, Pascal Souchotte, Michel Roger, Daniel Juvé, les autres doctorants Benoît, Vincent, Jean-Baptiste, Sébastien, les deux Juliens et les Thomas, Arganthaël. Christophe Bailly mérite un deuxième round de remerciements pour sa disponibilité sans faille, sa patience, et son encadrement de manière générale.

Je remercie vivement les rapporteurs, le professeur Sanjiva Lele et le professeur Pierre Comte, qui ont accepté de relire ce manuscrit, et également les autres membres du jury.

Je remercie EDF, et en particulier Philippe Lafon, de leur soutien financier par l'intermédiaire de la bourse de thèse BDI.

Enfin, mes remerciements particulièrement sincères vont à nouveau à Christophe Bogey, pour sa patience, sa bonne humeur et sa candeur naturelle, et surtout sa passion partagée pour la musique d'ascenseur et la constitution européenne.

Table des matières

1	Dév	eloppe	ement d'un code de simulation curviligne	9
	1.1	Trans	formation curviligne	9
		1.1.1	Termes visqueux	13
		1.1.2	Résolution numérique des équations	14
		1.1.3	Variables physiques, variables transformées	15
	1.2	Condi	itions aux limites	17
		1.2.1	Condition de rayonnement en 2-D	17
		1.2.2	Condition de rayonnement en 3-D	19
		1.2.3	Condition périodique	19
		1.2.4	Condition de sortie	21
		1.2.5	Condition de paroi	22
		1.2.6	Le filtrage comme modèle de sous-maille	24
	1.3	Valida	ations numériques	27
		1.3.1	Erreurs introduites par le traitement de la transformationcurviligne	27
		1.3.2	Validation sur un cas test de diffraction acoustique	33
		1.3.3	Importance des schémas et des filtres proche d'une paroi	38
_	•			
2	Out	ils nun	nériques pour le calcul à grande échelle	43
	2.1	Techn		43
		2.1.1	Interpolation par développement de laylor	43
		<u> 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1</u>		
		2.1.2	Interpolation par spline cubique	44
		2.1.2	Interpolation par spline cubique	44 44
		2.1.2 2.1.3 2.1.4	Interpolation par spline cubique	44 44 45
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp	Interpolation par spline cubique	44 44 45 48
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1	Interpolation par spline cubique Interpolation par polynômes de Lagrange Interpolation par polynômes de Lagrange Interpolation Comparaison des différentes méthodes en 1D Interpolation Polation 2-D Interpolation Méthode Interpolation	44 44 45 48 48
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2	Interpolation par spline cubique	44 45 48 48 51
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3	Interpolation par spline cubique	 44 44 45 48 48 51 53
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4	Interpolation par spline cubique	44 45 48 48 51 53 55
	2.2	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 Parall	Interpolation par spline cubique	44 45 48 48 51 53 55 61
	2.22.3	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 Parall 2.3.1	Interpolation par spline cubique	44 45 48 48 51 53 55 61 61
	2.2 2.3	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 Parall 2.3.1 2.3.2	Interpolation par spline cubiqueInterpolation par polynômes de LagrangeComparaison des différentes méthodes en 1Dcolation 2-DMéthodeAmélioration de l'interpolation 2-DVérification en 2-DCas test avec interpolationelisationEnvironnement matérielEnvironnement logiciel	44 45 48 51 53 55 61 61 62
	2.2 2.3	2.1.2 2.1.3 2.1.4 Interp 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 Parall 2.3.1 2.3.2 2.3.3	Interpolation par spline cubique	44 45 48 51 53 55 61 61 62 63

		2.3.4	Application à CURVESIA	65			
3	Ray	onnem	ent d'objets dans un écoulement	69			
	3.1	Écoule	ement laminaire autour d'un cylindre	69			
		3.1.1	Maillage	69			
		3.1.2	Écoulement de Reynolds 200 autour d'un cylindre	72			
		3.1.3	Écoulement autour d'un cylindre à un nombre de Reynolds de 150	78			
		3.1.4	Effets de la température	84			
	3.2	Étude	du bruit de profil	87			
		3.2.1	Les familles de profils	87			
		3.2.2	Maillage du profil	89			
		3.2.3	Résultats des calculs préliminaires 2-D	93			
	3.3	Simula	ation d'un profil 3-D	96			
		3.3.1	Éléments préliminaires	96			
		3.3.2	Simulation d'un profil 2D à un nombre de Reynolds de 500000	103			
		3.3.3	Simulations en trois dimensions à $\text{Re}_c = 500,000 \dots \dots \dots \dots$	107			
4	Con	clusion	l	117			
Α	Les	profils	NACA	127			
	A.1	Génér	ation des profils NACA	127			
		A.1.1	Famille de profils à quatre chiffres	127			
		A.1.2	Famille de profils à 5 chiffres	128			
		A.1.3	La famille 1X-XXX	129			
		A.1.4	Famille de profils laminaires	129			
В	Les profils Joukowski 13 [°]						
	B.1	Transf	ormation conforme	131			
	B.2	Profils	de Joukowski	131			
C	Solu	itions a	nalytiques des cas tests de diffraction	135			
D	Bruit de profil : notes de lectures						
	D.1	Bruit c	le bord d'attaque	147			
		D.1.1	Théorie	147			
	D.2	Bruit c	le bord de fuite	150			
		D.2.1	Approches inspirées de l'analogie de Lighthill	150			
		D.2.2	Fonctions de Green	152			
		D.2.3	Expériences	152			
		D.2.4	Expériences - résultats acoustiques	153			
Ε	Con	trôle de	e cavité	155			

Introduction

Bien que la simulation numérique des écoulements de fluides existe depuis le début de l'ère informatique, l'idée de calculer le champ acoustique rayonné grâce à ces simulations est bien plus recente. En effet, l'acoustique se montre nettement plus difficile à obtenir que les autres grandeurs de l'écoulement, car les fluctuations de pression acoustique sont typiquement plusieurs ordres de grandeur plus faibles que les fluctuations aérodynamiques [102]. De plus, leur longueur d'onde est généralement très grande par rapport aux dimensions des couches visqueuses qui sont rencontrées proche de surfaces rigides. Ainsi il faut un grand nombre de points pour résoudre à la fois une couche limite, et quelques longueurs d'onde du bruit émis.

Deux approches fondamentalement différentes peuvent être utilisées pour calculer le bruit aérodynamique en champ lointain.

La première approche, dite hybride, résout l'écoulement avec un code de calcul de type mécanique des fluides, et utilise les champs simulés comme données d'entrée d'une analogie acoustique. Les analogies acoustiques sont des reformulations astucieuses des équations de Navier-Stokes qui font apparaître une équation de propagation dans le membre de gauche et une expression plus ou moins compliquée à droite constituant le terme source. La résolution du champ aérodynamique par un code de mécanique des fluides permet d'évaluer ce terme source, et l'application d'une analogie acoustique permet alors de calculer le rayonnement au point voulu. Cependant ces formulations présentent des inconvénients en ce qui concerne leur résolution numérique. Elles sont mal-posées d'un point de vue mathématique, car la variable d'intérêt, la pression ou la densité, est souvent présente de chaque côté des équations. De plus, leur application dans un cas pratique nécessite la délimitation d'une *zone de sources*, et il faut tenir compte des effets de troncature aux frontières de cette zone. Enfin, l'influence de la précision des résultats servant à l'évaluation de ces termes sources n'est pas bien connue, mais sûrement pas négligeable [85].

La deuxième approche consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes de manière suffisamment précise pour obtenir directement le champ acoustique rayonné. On parle alors de calcul direct, car aucun modèle de type analogie n'est employé pour aboutir au champ acoustique. Les contraintes sur la méthode de résolution sont dans ce cas très fortes, car les différences d'échelle entre les fluctuations propagatives et les fluctuations hydrodynamiques, aussi bien au niveau des longueurs d'onde qu'au niveau de la phase et de l'amplitude des signaux, doivent être parfaitement captées et préservées. Il faut ainsi mettre en œuvre un système de résolution qui soit très peu dispersif sur la gamme de longueurs d'onde rencontrées pour ne pas modifier artificiellement le comportement fréquentiel des phénomènes simulés, et qui soit très peu dissipatif pour ne pas atténuer numériquement les fluctuations acoustiques pendant leur propagation. Une façon de respecter en partie ces contraintes est d'utiliser des solveurs traditionnels du domaine de la mécanique des fluides sur des maillages très bien résolus. En effet, de manière générale les caractéristiques d'un schéma numérique, aussi bien en terme de dispersion qu'en terme de dissipation, sont d'autant meilleures que la fréquence est basse. Ainsi par exemple un schéma de différences finies d'ordre 2 couplé à une intégration temporelle du premier ordre peut être utilisé pour propager une onde acoustique à condition de discrétiser cette onde par un grand nombre de points.

Une deuxième approche est de développer des schémas numériques performants, alliant une dissipation faible pour ne pas amortir les fluctuation recherchées, à une faible dispersion pour ne pas fausser les longueurs d'onde des phénomènes calculés, et celà avec une discrétisation spatiale aussi réduite que possible. Le maintien de bonnes caractéristiques numériques avec peu de points par longueur d'onde permet en effet, pour un cas test donné, d'utiliser un nombre minimal de points de maillage, et ainsi d'économiser à la fois du temps de calcul et de la mémoire vive.

Cette approche paraît plus avantageuse que la première, et à ce titre a connu un développement important pendant les dix dernières années. On parle dans ce cas de calcul aéroacoustique direct.

Au Centre Acoustique du LMFA, l'équipe d'aéroacoustique numérique effectue des calculs aéroacoustiques directs depuis environ 5 ans. Christophe Bogey a développé un solveur cartésien pendant sa thèse [11] qui permettait de résoudre les équations de Navier-Stokes en deux puis en trois dimensions, et l'a utilisé pour effectuer des études de bruit de jets ronds subsoniques. Xavier Gloerfelt [39] a par la suite développé des conditions de paroi pour ce code, et a examiné le rayonnement d'une cavité affleurée par un écoulement. L'objectif de ce travail est d'appliquer des méthodes similaires à des géométries plus complexes, pour permettre l'étude numérique du bruit rayonné par des objets de formes quelconques, et plus particulièrement arrondies.

Objectifs de la thèse

On sait depuis longtemps qu'un barreau rond placé dans un écoulement engendre un sillage fortement périodique de type allée de Von Kármán, et qu'il en résulte un rayonnement acoustique tonal qui peut être intense. Ce type d'écoulement est un exemple parmi d'autres de phénomènes aéroacoustiques qui ne peuvent être examinés avec un code purement cartésien tel ALESIA. Un autre cas, d'intérêt tout particulier pour l'industrie des transports, est celui du bruit rayonné par un profil d'aile placé dans un écoulement.

On souhaite ainsi développer un code curviligne permettant de faire des calculs aéroacoustiques directs de telles configurations, et plus généralement d'objets de formes arrondies dans un écoulement. On souhaite construire le code curviligne autour de schémas numériques explicites d'ordre élévé, pour bénéficier pleinement de l'expérience acquise dans ce domaine au sein de dans l'équipe d'aéroacoustique numérique du Centre Acoustique. Deux types d'écoulements seront examinés en détails.

L'écoulement autour d'un cylindre constitue un excellent premier cas à traiter avec un code curviligne. D'abord, d'un point de vue numérique il possède une géométrie simple qui ne pose aucun problème à mailler de façon orthogonale, et qui est aussi favorable pour la formulation des conditions aux limites. Ensuite, malgré la géométrie simple du cylindre, le comportement de l'écoulement est relativement complexe, ce qui en fait un cas intéressant pour une validation numérique. Enfin, il a fait l'objet d'innombrables études expérimentales mais aussi théoriques, et à ce titre il existe une grande variété de données de comparaison pour vérifier le bon comportement du code numérique.

L'étude du bruit de profil constituait le but à terme de ce travail. L'étude numérique du bruit de profil est plus ardue que celle du bruit de cylindre, à tel point qu'il existe à ce jour relativement peu de calculs numériques de bonne qualité établissant le comportement de l'écoulement autour du profil.

Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé comme suit. Dans une première partie, le développement d'un code de simulation curviligne est présenté. Après une présentation générale de l'approche suivie, les différents aspects numériques d'une simulation curviligne sont expliqués et leur influence sur la qualité des résultats est examinée. Des cas tests de propagation et de diffraction acoustiques sont réalisés pour vérifier le bon comportement du code de simulation.

La deuxième partie aborde des outils numériques qui facilitent la réalisation de simulations sur des domaines de forme compliquée et de grande taille. Une technique d'interpolation bidimensionnelle est développée dans l'optique de permettre des calculs sur des domaines composés de multiples maillages. Ce procédé d'interpolation est validé sur un cas test de diffraction à deux corps. Ensuite des notions de parallélisation sont présentées, et leur application au code de simulation curviligne est décrite.

La dernière partie est consacrée à l'étude d'écoulements plus réalistes et du bruit qu'ils rayonnent.

Notations

Les notations utilisées dans ce rapport sont présentées ici pour référence.

Coordonnées curvilignes

- ξ : coordonnée curviligne, prise parallèle à la paroi dans ce travail
- η : coordonnée curviligne, prise perpendiculaire à la paroi dans ce travail
- *J* : matrice jacobienne d'une transformation géométrique $J = \frac{\partial(\zeta, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}$

Fluides visqueux

C_p :	coefficient de pression	$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$
$ au_w$:	contrainte visqueuse à la paroi	$ au_w = \left. \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0}$
C_f :	coefficient de frottement	$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$
δ :	épaisseur de la couche limite	$u(x,\delta) = 0.99 \times U_{\infty}$
$\delta_1 = \delta^*$:	épaisseur de déplacement	$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy$
$\delta_2 = \delta_{\theta}$:	épaisseur de quantité de mouvement	$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy$
μ :	viscosité moléculaire	
ν :	viscosité dynamique	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$
$u_{\tau}, u_f:$	vitesse de frottement	$u_{\tau} = \sqrt{\tau_w/\rho}$
$x^+, y^+, z^+:$	coordonnées de paroi	$x^+ = \frac{xu_{\tau}}{v}$
u^+ :	vitesse normalisée	$u^+ = \frac{\overline{u}}{u_{\tau}}$

1 Développement d'un code de simulation curviligne

1.1 Transformation curviligne

La simulation par différences finies sur des maillages cartésiens ne permet pas aisément d'étudier des objets de géométries quelconques. En effet le traitement d'une frontière non confondue avec une ligne de maillage, bien que possible [58, 105], est peu pratique et souvent peu précis. Le recours à l'utilisation de techniques d'extrapolation peut engendrer des instabilités difficiles à contrôler, et rendre problématique l'établissement d'une condition de paroi robuste.

L'utilisation de coordonnées curvilignes permet d'éviter ce problème. Un maillage structuré de forme curviligne, épousant la géométrie de la forme à simuler, est d'abord construit. Une transformation mathématique est ensuite utilisée pour passer du domaine curviligne (le domaine physique), à un domaine cartésien parfaitement régulier dans lequel se fait la résolution des équations. La paroi de l'objet est ainsi représentée par une ligne de maillage dont une des coordonnées transformées - ou deux pour les objets tridimensionnels - est constante. Il s'agit donc d'effectuer un changement de variables sur les équations que l'on cherche à résoudre. Cette approche permet de bénéficier à la fois des avantages d'un maillage parallèle à la paroi, et de ceux de la résolution sur un maillage cartésien.

La première utilisation d'une transformation de coordonnées pour résoudre les équations de la mécanique des fluides sous forme conservative date de 1968 [6]. Cette formulation a été étendue à une transformation dépendante du temps quelques années plus tard [119].

Il existe d'ailleurs plusieurs formulations différentes des équations transformées. La reformulation présentée plus loin dans ce travaill a été choisie pour sa relative facilité d'implémentation, mais il est par exemple possible d'écrire les équations grâce à des termes contravariants. On rapelle que la i^{ime} composante v_i d'un vecteur v exprimé en forme covariante est perpendiculaire à toutes les directions $j, j \neq i$, alors que la composante v^i du même vecteur exprimé en forme contravariante est parallèle à la i^{ime} direction. Ainsi, un atout considérable d'écrire les équations sous une forme contravariante est que les directions des vecteurs vitesse sont alignées avec les lignes de maillage. Ceci est particulièrement intéressant sur des



FIG. 1.1 – Domaines physique (x, y) et transformé (ξ, η) .

maillages fortement déformés. En effet, on évite ainsi de projeter des termes non-nuls sur une base non-orthogonale, opération difficile à faire proprement de manière numérique. Cette approche a fait l'objet de nombreux travaux, dont les premiers datent des années 50, par Truesdell [115]. On peut citer Voke et Collins [120], qui furent les premiers à établir les équations de Navier-Stokes sous une forme faisant appel uniquement à des termes contravariants, en l'occurence la vitesse et la vorticité contravariantes, pour des coordonnées ne dépendant pas du temps. Depuis, de nombreuses formulations entièrement contravariantes ont été proposées [82, 61, 67].

Malgré les avantages liés à la formulation contravariante des équations, on choisit de ne pas suivre cette voie. En effet, les configurations de simulation envisagées devraient toutes utiliser des maillages localement quasi-orthogonaux, ce qui réduit l'intérêt d'avoir les vecteurs vitesse orientés selon les lignes de maillage. De plus, les équations contravariantes sont plus compliquées à programmer et plus coûteuses à résoudre, d'où le choix fait dans ce travail d'utiliser les équations traditionnelles sous forme covariante.

On s'intéresse simplement ici à une transformation indépendante du temps, et on choisit une formulation ne reposant que sur des termes covariants. La méthode est détaillée pour les équations régissant un écoulement non-visqueux en deux dimensions, *i.e.* les équations d'Euler 2-D :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{e}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{e}}}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

où

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e_t)^T$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{e}} = (\rho u, p + \rho u^2, \rho u v, (\rho e_t + p)u)^T$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{e}} = (\rho v, \rho u v, p + \rho v^2, (\rho e_t + p)v)^T$$

L'énergie totale e_t est donnée par $e_t = p/[(\gamma - 1)\rho] + (u^2 + v^2)/2$ pour un gaz parfait.

On souhaite résoudre le système d'équations (1.1) dans l'espace transformé (ξ,η). Les règles de dérivation conduisant par exemple à

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

sont appliquées aux flux suivant les directions *x* et *y* pour aboutir, après calculs, à la forme suivante des équations :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^*_{\mathbf{e}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}^*_{\mathbf{e}}}{\partial \eta} = 0$$
(1.2)

avec

$$\mathbf{U}^{*} = 1/J (\rho, \rho u, \rho v, \rho e_{t})^{T}$$

$$\mathbf{E}^{*}_{\mathbf{e}} = 1/J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\mathbf{E}_{\mathbf{e}} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\mathbf{F}_{\mathbf{e}}\right)^{T}$$

$$\mathbf{F}^{*}_{\mathbf{e}} = 1/J \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\mathbf{E}_{\mathbf{e}} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathbf{F}_{\mathbf{e}}\right)^{T}$$

où J est le jacobien de la transformation donné par

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Formellement ces équations ont la même structure que les équations d'Euler d'origine, et peuvent donc être résolues par les mêmes techniques numériques que celles développées pour un maillage cartésien [11, 13].

La métrique, c'est-à-dire l'ensemble des coefficients de la matrice jacobienne en chaque point du maillage, se calcule avant la simulation, à condition que le maillage du domaine à simuler ne varie pas avec le temps. Elle est stockée en mémoire pour servir pendant la simulation. Cette métrique doit être bien calculée car elle est utilisée à chaque itération (et même à chaque sous-itération de l'intégration de Runge-Kutta) : elle peut donc introduire un biais notable dans la solution calculée. Notons que pour certaines transformations il est possible de calculer la métrique analytiquement. Il est cependant intéressant de pouvoir traiter des transformations n'ayant pas de solutions analytiques, pour garder le plus de liberté possible sur les géométries simulables. Il faut donc pouvoir calculer la métrique numériquement.

Les termes de la matrice jacobienne traduisent les variations des coordonnées transformées en fonction de celles des coordonnées physiques. Or, par construction, on ne peut calculer directement que l'inverse, c'est-à-dire les termes de la matrice inverse donnant la variation des coordonnées physiques par rapport aux coordonnées transformées. Il faut donc reconstituer la matrice jacobienne à partir des termes de la matrice inverse. Ainsi, pour une transformation dans le plan, le point de départ de ce calcul est le tableau des coordonnées x et y des points du maillage. Le calcul des termes $\partial x/\partial \xi$, $\partial x/\partial \eta$, $\partial y/\partial \xi$, et $\partial y/\partial \eta$ est effectué en utilisant le même schéma de dérivation d'ordre élevé que celui du solveur. Il est alors possible d'obtenir les coefficients de la matrice jacobienne en utilisant des relations du type :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}}$$

En trois dimensions la matrice jacobienne d'une transformation quelconque $(x, y, z) \rightleftharpoons (\xi, \eta, \zeta)$ est constituée de neufs termes :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Chaque terme peut être calculé à l'aide de l'expression générale suivante :

$$J = \frac{1}{|J^{-1}|} \left[\text{cofacteurs}(J^{-1}) \right]^T$$

Par la suite les transformations 3-D utilisées conserveront la troisième direction ζ cartésienne, avec $\partial \zeta / \partial x = \partial \zeta / \partial y = 0$. La matrice jacobienne aura donc quatre termes nuls et se réduira à :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Ainsi pour une telle transformation le jacobien est identique au jacobien 2-D à un facteur $d\zeta/dz$ près.

1.1.1 Termes visqueux

Les équations régissant le comportement d'un écoulement visqueux font intervenir des dérivées doubles spatiales, et à ce titre leur transformation en coordonnées curvilignes est plus compliquée que celle des équations d'Euler.

On présente ici une transformation possible pour les équations de Navier-Stokes en 3 dimensions (extrait de [5], p 430-433) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{U}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \left[\xi_x (\mathbf{E_e} - \mathbf{E_v}) + \xi_y (\mathbf{F_e} - \mathbf{F_v}) + \xi_z (\mathbf{G_e} - \mathbf{G_v}) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \left[\eta_x (\mathbf{E_e} - \mathbf{E_v}) + \eta_y (\mathbf{F_e} - \mathbf{F_v}) + \eta_z (\mathbf{G_e} - \mathbf{G_v}) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{J} \left[\zeta_x (\mathbf{E_e} - \mathbf{E_v}) + \zeta_y (\mathbf{F_e} - \mathbf{F_v}) + \zeta_z (\mathbf{G_e} - \mathbf{G_v}) \right] \right\} = 0$$
(1.3)

où :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{pmatrix}$$

et où les flux respectivement Euleriens et visco-thermiques sont donnés par :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^{2} + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (\rho e_{t} + p)u \end{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_{x} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{F}_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^{2} + p \\ \rho v w \\ (\rho e_{t} + p)v \end{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_{y} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{G}_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w w \\ \rho w^{2} + p \\ (\rho e_{t} + p)w \end{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_{z} \end{pmatrix}$$

Les contraintes visqueuses sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu[2(\xi_{x}u_{\xi} + \eta_{x}u_{\eta} + \zeta_{x}u_{\zeta}) - (\xi_{y}v_{\xi} + \eta_{y}v_{\eta} + \zeta_{y}v_{\zeta}) - (\xi_{z}w_{\xi} + \eta_{z}w_{\eta} + \zeta_{z}w_{\zeta})] \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu[2(\xi_{y}v_{\xi} + \eta_{y}v_{\eta} + \zeta_{y}v_{\zeta}) - (\xi_{x}u_{\xi} + \eta_{x}u_{\eta} + \zeta_{x}u_{\zeta}) - (\xi_{z}w_{\xi} + \eta_{z}w_{\eta} + \zeta_{z}w_{\zeta})] \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu[2(\xi_{z}w_{\xi} + \eta_{z}w_{\eta} + \zeta_{z}w_{\zeta}) - (\xi_{x}u_{\xi} + \eta_{x}u_{\eta} + \zeta_{x}u_{\zeta}) - (\xi_{y}v_{\xi} + \eta_{y}v_{\eta} + \zeta_{y}v_{\zeta})] \\ \tau_{xy} &= \mu(\xi_{y}u_{\xi} + \eta_{y}u_{\eta} + \zeta_{y}u_{\zeta} + \xi_{x}v_{\xi} + \eta_{x}v_{\eta} + \zeta_{x}v_{\zeta}) \\ \tau_{xz} &= \mu(\xi_{z}u_{\xi} + \eta_{z}u_{\eta} + \zeta_{z}u_{\zeta} + \xi_{x}w_{\xi} + \eta_{x}w_{\eta} + \zeta_{x}w_{\zeta}) \\ \tau_{yz} &= \mu(\xi_{z}v_{\xi} + \eta_{z}v_{\eta} + \zeta_{z}v_{\zeta} + \xi_{y}w_{\xi} + \eta_{y}w_{\eta} + \zeta_{y}w_{\zeta}) \end{aligned}$$

Le flux de chaleur est régi par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

ce qui donne, pour les composants du flux de chaleur q_x , q_y , q_z ,

$$q_x = -k(\xi_x T_{\xi} + \eta_x T_{\eta} + \zeta_x T_{\zeta})$$

$$q_y = -k(\xi_y T_{\xi} + \eta_y T_{\eta} + \zeta_y T_{\zeta})$$

$$q_z = -k(\xi_z T_{\xi} + \eta_z T_{\eta} + \zeta_z T_{\zeta})$$

où $k = \mu c_p / \sigma$, μ est la viscosité dynamique moléculaire, c_p la capacité calorifique à pression constante et $\sigma = 0.72$ le nombre de Prandtl pour l'air à température ambiante.

Il existe d'autres formulations visqueuses des équations de Navier-Stokes, mais celle-ci possède l'avantage de rester formellement identique aux équations non-visqueuses, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \zeta} = 0$$
(1.4)

1.1.2 Résolution numérique des équations

Dans certains cas, des conditions mathématiques supplémentaires [109, 110] traduisant des notions de conservation sont à respecter dans la mise en œuvre du schéma numérique de dérivation. C'est le cas en particulier lorsque la transformation curviligne est faite en trois dimensions, ou lorsqu'elle dépend du temps.

La première loi de conservation a été publiée par Thomas et Lombard en 1978. Cette Loi

de Conservation Géométrique (Geometric Conservation Law ou GCL) traduit simplement le fait que pour un maillage dépendant du temps, la variation du volume de chaque maille est la somme algébrique des volumes balayés par ses différentes faces. En définissant une transformation générale 3-D inversible :

$$\mathcal{T}:(x,y,z,t)\underset{\mathcal{T}^{-1}}{\overset{\mathcal{T}}{\rightleftharpoons}}(\xi,\eta,\zeta,t)$$

entre l'espace physique et l'espace de résolution, la relation GCL peut s'écrire :

$$J_t + (\hat{\xi}_t)_{\xi} + (\hat{\eta}_t)_{\eta} + (\hat{\zeta}_t)_{\zeta} = 0$$
(1.5)

où *J* est le jacobien de la transformation, et où l'on note $\hat{\xi}_t = J\xi_t$. On remarque que cette relation est trivialement vérifiée pour des maillages immobiles.

La deuxième famille de relations à respecter est celle des annulations métriques. Il s'agit en fait de vérifier que les procédés de dérivation assurent :

$$\begin{aligned} (\hat{\xi}_{x})_{\xi} + (\hat{\eta}_{x})_{\eta} + (\hat{\zeta}_{x})_{\zeta} &= 0\\ (\hat{\xi}_{y})_{\xi} + (\hat{\eta}_{y})_{\eta} + (\hat{\zeta}_{y})_{\zeta} &= 0\\ (\hat{\xi}_{z})_{\xi} + (\hat{\eta}_{z})_{\eta} + (\hat{\zeta}_{z})_{\zeta} &= 0 \end{aligned}$$
(1.6)

En effet, ces relations sont utilisées pour établir les équations de Navier-Stokes transformées. Les relations sont faciles à démontrer formellement, mais ne sont pas nécessairement respectées lors du calcul d'une dérivée discrète quelconque.

Dans le cadre du travail présenté dans ce rapport, on envisage des simulations 2-D sur un maillage temporellement invariant, et les simulations 3-D font elles-aussi appel à des transformations 2-D. Ainsi les conditions de conservation sont respectées par construction. Par contre les conditions d'annulation sont plus difficiles à vérifier, en particulier près de parois où les dérivées sont calculées avec des schémas différents selon la direction de dérivation.

1.1.3 Variables physiques, variables transformées

La programmation des flux euleriens et visqueux suit exactement la décomposition des équations (1.4). Ainsi les deux types de flux sont calculés séparément, sommés, puis ensuite dérivés par rapport aux variables transformées. Cette démarche permet donc d'éviter le calcul séparé des dérivées des termes euleriens et visqueux. Les flux visqueux sont calculés avec des schémas d'ordre plus bas que les flux eulériens. Cette différenciation était déjà présente dans la version originelle du solveur ALESIA de Christophe Bogey, où les flux eulériens étaient traités avec les schémas DRP sur sept points de Tam et Webb [107, 106] alors que les flux visqueux n'étaient calculés qu'avec un schéma classique d'ordre 2 sur trois points, suffisant pour les écoulements libres à hauts nombres de Reynolds. Xavier Gloerfelt a examiné dans sa thèse [39] l'effet de la réduction de l'ordre du schéma, ainsi que l'influence de la méthode d'intégration temporelle, pour les flux visqueux, dans le cas d'un écoulement

de paroi. Cette étude a été effectuée sur le problème de la paroi oscillante de Stokes, dont le comportement peut être décrit par une fonction analytique. Au final, les résultats issus d'un traitement à l'ordre un en temps et en espace font apparaître une erreur environ trois fois supérieure à celle obtenue lors d'un calcul traitant les flux visqueux à l'ordre quatre en temps et en espace, et il s'avère que l'abaissement d'ordre spatial est plus pénalisant que l'abaissement d'ordre temporel.

Ces observations nous ont amené à adopter un traitement spatial à l'ordre quatre, couplé à un traitement temporel à l'ordre un, pour le calcul des flux visqueux. Le seul inconvénient de l'approche suivie est que le résultat du calcul des flux visqueux est dérivé à l'aide du schéma optimisé sur onze points, du fait de la sommation des flux visqueux aux flux euleriens à chaque étape de l'intégration Runge-Kutta. Cela peut paraître déraisonnable de dériver une deuxième fois des champs à un ordre supérieur à celui utilisé pour les obtenir, mais en réalité cette approche ne pose pas de problème et permet de gagner du temps de calcul.

Les équations curvilignes présentées précédemment portent sur les variables transformées. Cependant leur résolution pratique fait appel aux grandeurs physiques non-transformées, aussi bien pour les conditions aux limites que pour les flux euleriens et visqueux. Il est donc nécessaire à chaque étape de l'intégration temporelle de calculer les grandeurs physiques à partir des grandeurs transformées. Pour cela il suffit de multiplier les grandeurs transformées par le jacobien de la transformation, qui est calculé lors de l'évaluation de la métrique lors de l'initialisation de la simulation.

Malgré cette contrainte de connaître à la fois les grandeurs physiques et les grandeurs transformées, il n'a pas été nécessaire d'introduire de nouvelles matrices de variables par rapport à la résolution des équations cartésiennes faite dans ALESIA.

Ainsi la quantité de mémoire supplémentaire requise pour le passage à un maillage curviligne est due essentiellement au stockage des coefficients de la matrice jacobienne. Le surcoût en mémoire est donc de cinq valeurs scalaires par point de maillage, c'est-à-dire les quatre coefficients de la matrice jacobienne ainsi que la valeur du jacobien, stockée également pour accélérer le calcul.

Par contre le temps de calcul de chaque itération est allongé par les multiplications et divisions des variables par le jacobien, ainsi que par le temps de calcul des flux, dont les expressions sont plus compliquées que pour les équations non-transformées.

1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont d'une importance capitale pour les simulations directes du bruit où l'on cherche à préserver le champ acoustique rayonné. En effet, il suffit que de très petites fluctuations de pression soient émises par la réflexion d'ondes incidentes sur les conditions de rayonnement ou par la sortie du domaine de calcul de structures tourbillonnaires, pour fausser voire même masquer complètement le rayonnement sonore recherché, en général de très faible amplitude par rapport à celles des perturbations aérodynamiques. On décrit ici l'implémentation des conditions aux limites, de rayonnement, de paroi et de sortie fluide, dans le solveur curviligne.

1.2.1 Condition de rayonnement en 2-D

Il existe deux grandes familles de conditions de rayonnement. La première est composée des méthodes dites caractéristiques, developpées d'abord par Thompson [111, 112] puis par Poinsot et Lele [87]. Il s'agit dans ces méthodes de reformuler les équations d'Euler dans la direction perpendiculaire à la frontière du domaine, en faisant apparaître des quantités invariantes liées à des fluctuations acoustiques, de vorticité et d'entropie. Ces invariants peuvent alors être utilisés pour actualiser les variables sur la frontière du domaine de calcul. La deuxième famille de conditions de rayonnement est celle des formulations en champ lointain, dites asymptotiques, proposée d'abord par Bayliss et Turkel [9]. Cette approche consiste à linéariser les équations d'Euler autour d'un champ moyen, en supposant se trouver loin de la source de fluctuations, et a été beaucoup développée par l'équipe de Tam [107]. Il est généralement accepté que les conditions caractéristiques [45], d'où le choix de formulations asymptotiques dans CURVESIA.

La formulation aux limites en champ libre utilisée dans ce travail est celle de Tam et Dong [103], généralisation de la condition originelle de Tam et Webb [107]. Elle est obtenue pour le cas 2-D en calculant la solution asymptotique en champ lointain des équations d'Euler linéarisées autour d'un champ moyen non-uniforme, pour des perturbations acoustiques :

$$\frac{1}{V_g}\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r}\right)(Q) = 0$$
(1.7)

où :

$$\mathcal{Q} = \left(\begin{array}{c} \rho \\ u \\ v \\ p \end{array}\right)$$

La vitesse de groupe V_g est la somme de la vitesse moyenne du son $\overline{c} = \sqrt{\gamma \overline{p}/\overline{\rho}}$ et de la vitesse moyenne de l'écoulement $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u_x}, \overline{u_y})$, comme le montre la figure 1.2.



FIG. 1.2 – Calcul de la vitesse de groupe V_g des ondes acoustiques.

La vitesse de groupe est donc donnée par l'expression suivante :

$$V_g = \overline{\mathbf{u}}.\mathbf{e}_r + \sqrt{\overline{c}^2 - (\overline{\mathbf{u}}.\mathbf{e}_\theta)^2}$$

Les dérivées partielles de la vitesse, de la pression et de la densité par rapport à la direction radiale sont calculées en deux étapes. Les dérivées spatiales $\partial/\partial \xi$ et $\partial/\partial \eta$ des différentes variables non-transformées sont d'abord calculées avec le schéma de dérivation du solveur. Ensuite les dérivées par rapport à la direction radiale sont formées en utilisant la règle de dérivation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Les termes $\partial \xi / \partial r$ et $\partial \eta / \partial r$ sont calculés à l'aide des expressions vectorielles respectivement du sinus et du cosinus de deux vecteurs, le premier vecteur reliant l'origine au point de calcul des termes, et le deuxième étant un vecteur horizontal quelconque.

Dong [30] a également proposé une formulation asymptotique adaptée au cas où les fluctuations sortantes sont composées de perturbations acoustiques mais aussi tourbillonnaires et éventuellement entropiques. Cependant cette formulation s'avère nettement plus refléchissante pour l'acoustique, et on préfère donc coupler la condition de rayonnement acoustique à une zone tampon qui permet de dissiper la vorticité avant qu'elle n'atteigne le bord du domaine. Cette zone tampon, souvent appelée zone éponge, est décrite au paragraphe 1.2.4.

1.2.2 Condition de rayonnement en 3-D

Pour les simulations en trois dimensions, le même type d'approche est suivi. Il s'agit d'une généralisation en trois dimensions des conditions 2-D de Tam et Dong, effectuée par Bogey et Bailly [12]. Cette généralisation est valide pour un champ moyen uniforme.

Les équations à résoudre sont très semblables à celles en 2-D, si ce n'est que le facteur 1/2 provenant de la bidimensionnalité disparaît devant le terme en 1/r:

$$\frac{1}{V_g}\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)Q = 0$$
(1.8)

où Q est le vecteur des perturbations par rapport au champ moyen, donné par

$$\mathcal{Q}=\left(egin{array}{c}
ho' \ u' \ v' \ w' \ p' \end{array}
ight)$$

Il peut être utile dans certains calculs d'effectuer un rappel par rapport au champ moyen des variables de calcul dans les zones de rayonnement. Ceci est particulièrement vrai dans le cas où le domaine de calcul est relativement petit par rapport à l'objet placé dans l'écoulement, auquel cas le champ moyen peut ne pas être uniforme aux bords du domaine. Ce rappel est fait au moment de l'actualisation du champ instantané, par la soustraction d'un terme de la forme αQ , ce qui donne finalement la condition de rayonnement suivante :

$$\frac{1}{V_g}\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{V_g}\right)Q = 0$$

Une valeur même très faible du coefficient α permet de rendre la condition de rayonnement nettement plus robuste ; à titre d'exemple dans les calculs autour du profil d'aile, présentés au paragraphe 3.3, une valeur de $\alpha = 5 \times 10^{-4}$ est utilisée.

1.2.3 Condition périodique

Une condition périodique sur des frontières en vis-à-vis d'un domaine indique que toutes les grandeurs et leurs dérivées sont identiques sur les deux frontières. Un exemple de son utilisation est montré sur la figure 1.3, sous la forme d'un écoulement turbulent dans un conduit. Si l'on souhaite simuler un tel écoulement, on peut procéder de différentes manières. Il est possible de simuler une longueur de conduit très grande initialisée par un écoulement laminaire et espérer que cette longueur soit suffisante pour obtenir un tronçon d'écoulement turbulent avant la sortie du domaine. On peut également simuler un tronçon plus court et utiliser un champ stochastique comme donnée d'entrée au domaine de simulation. Cepen-





dant ces deux méthodes présentent des inconvénients. La première se montre onéreuse en temps de calcul, puisqu'il faut simuler un domaine de grande taille. En ce qui concerne la seconde, il est difficile de déterminer exactement l'influence du champ d'entrée sur le développement de la turbulence, et on se trouve donc confronté à des questions de pertinence physique de l'excitation amont. Une troisième possibilité pour simuler un écoulement turbulent dans un conduit est d'appliquer une condition périodique entre l'entrée et la sortie du domaine de simulation, et de laisser se développer un écoulement turbulent à l'intérieur du domaine. Le fluide simulé ne quitte jamais vraiment le domaine de calcul, et on peut espérer atteindre un régime permanent, ce qui n'est pas vraiment possible avec les deux autres approches.

Une condition périodique est souvent utilisée pour les limites de la direction de l'envergure dans les simulations 3-D où l'écoulement moyen est parallèle aux deux premières directions, et où on ne s'attend pas à trouver des effets de bord dominants.

L'implémentation d'une condition périodique dans une direction consiste à dupliquer les variables aux deux extrémités de cette direction. Le nombre de points qu'il faut dupliquer dépend du schéma utilisé pour calculer les dérivées spatiales. Dans CURVESIA les dérivées sont calculées sur onze points, donc aux deux extrémités cinq points de variables dupliquées sont utilisés. Il faut effectuer la duplication à chaque fois que des dérivées spatiales sont calculées, pour bien assurer la condition de périodicité.

On peut mentionner également la condition de symétrie, dont la mise en œuvre est semblable à celle de la condition périodique. Il s'agit ici de ne simuler qu'une moitié d'un problème symétrique autour d'un axe : les calculs de diffraction d'une source par un cylindre constituent des exemples parfaitement adaptés à l'utilisation d'une condition de symétrie. Cette condition est mise en œuvre à nouveau en ajoutant des rangées de variables, comme l'illustre la figure 1.5. Les valeurs dupliquées sont imposées symétriques par rapport à l'axe



Frontières de la direction périodique

FIG. 1.4 – Duplication des variables pour une condition périodique.

pour toutes les variables excepté la vitesse normale à l'axe de symétrie, imposée antisymétrique. Ces rangées de variables dupliquées permettent d'utiliser le schéma numérique habituel jusqu'à l'axe de symétrie, et créent la condition de symétrie dans le champ simulé.



FIG. 1.5 – Duplication des variables pour une condition de symétrie.

1.2.4 Condition de sortie

Lorsqu'un tourbillon convecté par l'écoulement moyen sort du domaine de calcul en traversant une condition de rayonnement, il engendre des ondes de pression qui sont de l'ordre du pourcent de la pression hydrodynamique associée au tourbillon. Ainsi des tourbillons intenses peuvent engendrer des réflections d'amplitude comparable à celle du champ de pression que l'on désire calculer. Il faut donc trouver un moyen plus efficace de faire sortir la vorticité du domaine de calcul. Dong [30] a proposé une formulation asymptotique censée pouvoir faire sortir des fluctuations tourbillonnaires, mais en pratique cette condition s'avère être moins efficace pour la sortie des ondes acoustiques. La solution adoptée ici est celle d'une zone éponge, zone dans laquelle on cherche à dissiper l'énergie tourbillonnaire sans créer d'ondes acoustiques. On espère ainsi minimiser la force des structures turbulentes atteignant la frontière de sortie. La zone éponge repose sur l'association d'un étirement rapide du maillage dans la direction de l'écoulement moyen et d'un terme dissipatif de type laplacien, introduit progressivement. L'étirement du maillage réduit graduellement la discrétisation des structures turbulentes et permet ainsi au filtrage sélectif de les dissiper. Le terme laplacien peut être vu comme un terme de viscosité dynamique supplémentaire. En augmentant artificiellement la viscosité on augmente la dissipation visqueuse, ce qui permet de réduire l'intensité de la vorticité dans la zone de sortie. Le laplacien permet d'accentuer l'efficacité de la zone éponge, mais ne doit cependant pas être utilisé avec une trop grande amplitude, sous peine d'engendrer des réflections associées aux trop forts gradients du terme dissipatif.

Un bon compromis entre efficacité et coût de calcul supplémentaire, compromis utilisé pour la plupart des calculs présentés dans ce travail, est une zone d'étirement de 20 points de long combinée avec un terme laplacien d'une amplitude maximale de 0.1.

1.2.5 Condition de paroi

La zone de paroi a toujours été problématique en ce qui concerne la mécanique des fluides numérique et l'utilisation des différences finies. Physiquement, les équations à résoudre sont modifiées par la contrainte exercée par la paroi sur le fluide, c'est-à-dire une vitesse relative tangente à la paroi pour un fluide non-visqueux, et nulle pour un fluide dont la viscosité ne peut pas être négligée. À cette contrainte sur la vitesse il faut ajouter une contrainte sur la température ou le flux de chaleur, selon que l'on considère une paroi isotherme ou adiabatique.

Numériquement, la présence d'une paroi influe sur la résolution des équations par l'asymétrie qu'elle introduit sur le calcul des dérivées normales à la paroi. Il est nécessaire de connaître les dérivées secondes normales à la paroi des composantes de la vitesse à la paroi, pour traduire les effets de la viscosité. Or, le champ de vitesse n'est défini que d'un côté de la paroi, ce qui complique le bon calcul des dérivées normales. Ces dérivées peuvent facilement être calculées à l'aide de schémas de dérivation asymétriques d'ordre peu élevé, mais qui introduisent une dispersion et une dissipation considérables et fournissent donc des résultats peu précis. Il est possible également de calculer les dérivées grâce à des schémas d'ordre élevé plus précis, et ceci de plusieurs manières.

La technique peut-être la plus répandue est l'utilisation des caractéristiques 1-D de Thompson [111] avec la formulation visqueuse proposée par Poinsot et Lele [87]. Pour un fluide non-visqueux, il s'agit, comme nous l'avons déjà mentionné, de calculer les invariants tourbillonnaire, entropique et acoustiques dans la direction normale à la paroi, en diagonalisant les équations de la mécanique des fluides dans cette direction. On spécifie alors que l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente, en imposant l'égalité des invariants entrant et sortant ; on impose également la nullité des deux autres invariants convectés puisque la vitesse est tangente à la paroi. Les expressions des invariants permettent alors de calculer les valeurs inconnues. Dans le cas d'un fluide visqueux, il faut ajouter comme contrainte la nullité de la vitesse à la paroi. Cette méthode est intrinsèquement unidimensionnelle, et de fait fournit de bons résultats lorsque les perturbations arrivent orientées normalement à la condition de paroi. Par contre, elle est mal adaptée aux pertubations obliques, et son application au niveau de coins et d'angles vifs pose des problèmes particuliers.

Une autre technique est basée sur l'utilisation de points images associés à des schémas centrés. Dans cette méthode, on définit des rangées de points supplémentaires à l'intérieur de la paroi en imposant leurs valeurs, soit de manière antisymétrique par rapport à la paroi, pour la vitesse normale à la paroi, soit de manière symétrique, pour la pression, la densité et les autres composantes de la vitesse [40]. Un fluide visqueux requiert en plus la condition u = 0 sur la paroi. Le nombre de lignes de points images ou fantômes dépend du schéma de dérivation utilisé dans la direction normale à la paroi : il faut définir assez de points pour permettre l'utilisation du schéma de dérivation centré que l'on a choisi. Un schéma à l'ordre deux sur trois points nécessite une ligne de points images, alors que le schéma sur onze points utilisé dans ce travail a besoin de 5 lignes au total.

On peut enfin essayer d'évaluer tous les termes à la paroi à partir des points intérieurs en utilisant des schémas décentrés, et en imposant simplement une vitesse nulle à la paroi. Cette approche engendre d'autant plus facilement des instabilités numériques que les schémas décentrés sont d'ordre élevé, et elle nécessite donc des schémas et des filtres spécialement étudiés dont les caractéristiques doivent être établies avec soin [118, 10].

Dans ce travail, cette dernière technique est adoptée pour les calculs les plus récents. On écrit les équations complètes à une paroi en x = 0, en annulant les termes qui font intervenir la vitesse ou sa dérivée suivant y, ce qui donne les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \rho & & \rho \\ \rho u & & \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \rho v & & \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \rho w & & \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \rho e & & \frac{\gamma}{\gamma - 1}p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$
(1.9)

Ces équations sont utilisées pour actualiser la densité et la pression au point de paroi, à l'aide d'un schéma complètement décentré sur onze points. Ce sont en effet les deux seules variables à modifier, car les termes de vitesse sont nuls et la température est imposée dans la totalité des calculs présentés dans ce travail. Le point de paroi est ensuite filtré avec un filtre complètement décentré sur 4 points. Ce filtre étant nettement plus dissipatif pour les fréquences résolues que les autres filtres utilisés, il est appliqué avec un coefficient de fil-

trage plus faible pour minimiser la détérioration engendrée par celui-ci. Les points suivants jusqu'au cinquième point à partir de la paroi sont actualisés à partir des équations complètes de la mécanique des fluides, avec des schémas progressivement moins décentrés. Les détails sur ces schémas et leurs filtres associés sont disponibles dans [10]. Les points proches de la paroi sont tous filtrés avec des filtres décentrés pour enlever les oscillations hautes fréquences non-désirées. L'utilisation de schémas et de filtres décentrés pour les points proches de la paroi s'avère intéressante, car elle permet d'éviter le recours aux schémas centrés de bas ordre, néfastes en ce qui concerne la dispersion, et les filtres centrés de bas ordre, peu sélectifs.

Cette stratégie a été poussée encore plus loin dans les calculs en trois dimensions, en résolvant numériquement les mêmes équations sur tout le domaine de calcul, et en changeant simplement les schémas. Le seul traitement supplémentaire est d'imposer la nullité de la vitesse à la paroi, ainsi que la température ou le flux de chaleur selon le type de paroi que l'on souhaite simuler. Le comportement de cette technique a été vérifié en l'implémentant dans les cas tests de diffraction présentés au paragraphe 1.3.3.

Seuls les premiers calculs de l'écoulement autour d'un cylindre à un nombre de Reynolds de 200, présentés au paragraphe 3.1.2, ont été effectués avec des schémas de bas ordre près de la paroi. Il s'agit d'une condition à l'ordre deux, inspirée des travaux de Tam et Dong [103], et détaillée dans la thèse de Gloerfelt [39] au paragraphe 1.2.5.5.

1.2.6 Le filtrage comme modèle de sous-maille

Lorsque l'écoulement à la paroi est turbulent, le maillage de la zone de paroi devient critique. En effet, c'est dans cette zone que les structures turbulentes vont se développer, et donc que les gradients les plus forts se trouveront. On définit la coordonnée de paroi $y^+ = y u_f / v$ où $u_f = \sqrt{\tau_w / \rho}$ est la vitesse de frottement, et τ_w est le cisaillement à la paroi, donné par $\tau_w = \mu \partial \overline{u} / \partial y$.Les coordonnées de paroi sont utilisées comme échelle pour construire le maillage près de la paroi. Pour effectuer une DNS (Simulation Numérique Directe), dans laquelle toutes les échelles d'un écoulement turbulent sont résolues explicitement avec les équations de Navier-Stokes, il faut mailler toutes les échelles turbulentes jusqu'aux plus petites, et le critère généralement accepté est de respecter $y^+ \approx 1$ à la paroi. Cette approche est cependant trop coûteuse en mémoire et en temps de calcul pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, d'où le développement de la Simulation des Grandes Échelles (SGE ou LES), où on ne résoud explicitement qu'une partie des échelles turbulentes, les plus petites échelles restantes étant modélisées par un modèle de sous-maille. Nous n'avons pas fait d'étude détaillée sur l'effet de la modélisation des sous-mailles dans ce travail ; une brève description de l'approche suivie est faite ici.

D'après les travaux de Vreman [122] et al., les equations de Navier-Stokes compressibles

filtrées peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_t \bar{\rho} + \partial_j (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0$$

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \partial_j (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}) = \sigma_i^{\text{sgs}}$$

$$\partial_t (\bar{\rho} \check{e}_t) + \partial_i ((\check{e}_t + \bar{p}) \tilde{u}_i + \tilde{q}_i - \tilde{\tau}_{ij} \tilde{u}_j) = \sigma_e^{\text{sgs}}$$
(1.10)

où ρ représente la densité, u_i la vitesse, p la pression, τ_{ij} le tenseur visqueux et q_j le flux de chaleur. La barre dénote une quantité filtrée, et le filtrage est supposé commuter avec les opérations de dérivation temporelle est spatiale. Le tilde indique un filtrage de Favre $\tilde{u}_i = \overline{\rho u_i}/\bar{\rho}$. La variable \check{e}_t est définie comme l'énergie totale des variables filtrées, *i.e.* $\bar{\rho}\check{e}_t \equiv \bar{p}/(\gamma - 1) + \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_i/2$ pour un gaz parfait, où γ est le rapport des capacités calorifiques spécifiques. Les termes σ_i^{sgs} et σ_e^{sgs} dans le membre de droite de l'équation (1.10) sont les termes dits de sous-maille. Une définition détaillée de chacun des autres termes de (1.10) peut être trouvée dans les références [122, 15].

Lorsque un filtrage passe-bas est appliqué à un problème non-linéaire, on introduit des termes supplémentaires qui traduisent l'interaction entre les échelles résolues et celles non-résolues. Depuis les années 90, de nombreux travaux sur cet aspect ont été faits, qui ont abouti parfois à des modèles de sous-maille astucieux, voir par exemple la revue récente de Meneveau et Katz [75], et qui ont également amené une meilleure compréhension des interactions avec l'algorithme numérique de résolution des équations de comportement du fluide. Parallèlement à ces développements, plusieurs études ont mis en évidence les difficultés à reproduire correctement le comportement d'écoulements à hauts nombres de Reynolds [88], et d'écoulements cisaillés transitionnels. Ces difficultés sont particulièrement notables lorsque le modèle de sous-maille est basé sur la viscosité turbulente qui a la même forme fonctionnelle que la viscosité moléculaire.

Une alternative à la modélisation des termes de sous-maille est de récupérer les variables non-filtrées apparaissant dans ces termes. De telles méthodes de déconvolution ou plus généralement de "défiltrage" sont utilisées pour calculer directement les termes de sous-maille faisant apparaître des interactions non-linéaires entre les échelles supportées par le maillage de calcul mais résolues peu correctement par l'algorithme numérique. Cependant, le transfert d'énergie entre les échelles résolues et celles non-résolues doit également être modélisé. Dans la méthode ADM (Approximate Deconvolution Method) proposée par Stolz [101] *et al.*, un terme de rélaxation qui draine l'énergie vers les échelles non-résolues est introduit dans les équations pour prendre en compte les échelles non-supportées par le maillage et fournir une dissipation de sous-maille suffisante. Une revue de ces approches a été faite par Domaradzki et Adams [29].

Un algorithme de haute précision a été développé au Centre Acoustique de l'École Centrale de Lyon pour la résolution des équations compressibles de Navier-Stokes sur des maillages cartésiens [15, 14, 16], dans le but de faire des calculs directs du bruit rayonné par les écoulements turbulents. Dans ce travail, nous cherchons à utiliser la même approche sur des maillages curvilignes. Le nombre d'onde de coupure du maillage est donné par $k_c^g \Delta x = \pi$,



FIG. 1.6 – Échelles importantes pour l'algorithme de résolution LES. La fréquence de coupure du maillage est donnée par $k_c^g \Delta x = \pi$ mais seulement les échelles $k \le k_c^f$ sont résolues avec précision. Les échelles telles que $k_c^f < k < k_c^g$ sont filtrées. Il est à noter que la limite en précision du schéma de dérivation spatiale est telle que $k_c^s \ge k_c^f$.

et les oscillations maille-à-maille ayant ce nombre d'onde ne sont pas résolues. Elles sont enlevées par un filtrage hautement sélectif, qui joue également le rôle de modélisation de l'effet des échelles de sous-maille. Les coefficients du filtre G_0 ont été optimisés dans l'espace de Fourier [14]. Ce filtre possède, parmi d'autres qualités [116], celle d'avoir ses trois premiers moments nuls. Les nombres d'onde tels que $k\Delta x \leq k_c^f \Delta x = \pi/2$ ne sont pas modifiés par le filtrage, et sont également bien supportés par le maillage. Le filtre utilisé ici est semblable à celui proposé par Stolz [91, 101] et ses collègues dans l'approche ADM. Les différentes échelles mises en jeu dans la résolution numérique sont représentées sur la figure 1.6. En conclusion, nous résolvons les équations suivantes dans notre approche LES :

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = -(\sigma_d / \Delta t)(1 - G_0) * (\mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle)$$

où $\mathbf{U} = (\bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}}, \bar{\rho}\tilde{\mathbf{e}}_t)$, le vecteur **F** est donné par le membre de gauche de l'équation (1.10), et $\langle \cdot \rangle$ traduit une moyenne statistique. Tous les termes non-linéaires sont calculés à partir des quantités filtrées de la même manière que pour une approche sans modèle [91, 90, 73]. Remarquons également que l'indépendance des résults vis-à-vis du filtrage a récemment été étudiée dans le cas de calculs de jets turbulents sur des maillages cartésiens [17].

1.3 Validations numériques

Un grand nombre de tests a été effectué, pour vérifier d'abord l'absence d'erreurs dans la formulation choisie, mais aussi pour se faire une idée des limites numériques du traitement curviligne mis en œuvre. Des cas tests de propagation en champ libre ainsi que des cas tests de diffraction sont utilisés pour évaluer le comportement du solveur vis-à-vis de perturbations acoustiques.

1.3.1 Erreurs introduites par le traitement de la transformation curviligne

La propagation d'un pulse acoustique de forme gaussienne est utilisée pour vérifier l'adéquation de la méthode de calcul de la métrique. Un maillage non-cartésien dont la métrique est connue de manière analytique est utilisé pour effectuer la comparaison. La solution analytique pour la propagation d'un pulse est également connue [107], et rappelée en annexe C. Il s'agit de créer un maillage dont la déformation est le résultat d'une transformation analytique inversible. Il sera alors possible de calculer la métrique à la fois de manière analytique et de manière numérique. Pour cela, un maillage à espacement constant dans les deux directions est déformé de manière sinusoïdale suivant une des deux directions : les coordonnées *y* sont modulées par une fonction sinusoïdale de *x* (voir la figure 1.7). La transformation analytique \mathcal{T} peut s'écrire de la manière suivante :

pour
$$x : \xi = \mathcal{T}_x(x, y) = x$$

pour $y : \eta = \mathcal{T}_y(x, y) = y + \alpha \sin(\Omega x)$ (1.11)

La métrique peut donc être calculée de manière analytique selon l'expression suivante :

pour
$$x : x = \mathcal{T}_x^{-1}(\xi, \eta) = \xi$$

pour $y : y = \mathcal{T}_y^{-1}(\xi, \eta) = \eta - \alpha \sin(\Omega \xi)$



FIG. 1.7 – Transformation analytique du maillage.

Différents paramètres de déformation du maillage par rapport à un maillage homogène peuvent être modifiés en jouant sur l'amplitude α et la fréquence spatiale Ω du sinus dans (1.11).

Ainsi l'angle maximal de déformation des mailles (voir figure 1.11) peut être imposé, ainsi que la déformation maximale du maillage sur une molécule de calcul.

Ce dernier paramètre n'est pas intrinsèque au maillage car il dépend du schéma numérique employé, et plus particulièrement de la taille de la molécule de calcul. Il est cependant important d'examiner son influence sur la qualité des résultats, car pour la construction de maillages, ce paramètre est a priori plus contraignant sur le maillage que l'angle de déformation maximale des mailles.

Le champ acoustique est initialisé par un pulse de forme gaussienne centré en (x_0, y_0) :

$$p'(x,y) = p(x,y) - p_0(x,y) = \exp\left[-\ln 2\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{9(\Delta x)^2}\right]$$

Le champ acoustique à tout instant peut être comparé à la solution analytique [107], ainsi qu'à la solution fournie par le code ALESIA cartésien. Les erreurs dues à l'implémentation de la transformation curviligne devraient ainsi pouvoir être identifiées. La figure 1.8 donne une illustration de la propagation du pulse sur le maillage déformé. La période spatiale des



FIG. 1.8 – Pulse gaussien de pression se propageant sur un maillage oblique.

ondulations du maillage est de 50 Δx , et leur amplitude suivant les directions x et y est de 10 Δx . Les figures 1.9 permettent de vérifier de façon plus quantitative la bonne propagation du pulse de pression. La pression instantanée sur l'axe y = 0 est représentée sur la figure de gauche après un temps de propagation adimensionnel $c_0 t / \Delta x$ de 56. La figure de droite montre la différence entre la solution analytique et la solution obtenue par la simulation. L'erreur relative par rapport à l'amplitude du front est d'environ 0.2%.

S'il est intéressant de connaître l'erreur absolue entre la solution simulée et la solution analytique, il est plus intéressant encore d'examiner les différences entre la solution calculée avec le solveur cartésien, et celle calculée avec le solveur curviligne. En effet, cette dernière différence est plus représentative de la dégradation induite spécifiquement par la résolution en curviligne des équations. La figure 1.10 illustre justement cette comparaison, en traçant les erreurs relatives des deux solveurs par rapport à la solution analytique. On constate ainsi que les erreurs sont très proches, et que la valeur maximale obtenue par CURVESIA est environ 5% plus grande que celle obtenue avec le solveur cartésien.



FIG. 1.9 – Amplitude du pulse de pression et erreur par rapport à la solution analytique, après un temps de propagation adimensionné de 56.

Déformation maximale des mailles par rapport au maillage homogène

On cherche dans un premier temps à vérifier la robustesse de la méthode curviligne lorsque les cellules du maillage sont fortement déformées. Pour cela, un maillage de cellules en forme de losange est utilisé pour propager le pulse de pression utilisé précédemment, et on examine l'erreur par rapport à l'angle θ de déformation des cellules (voir la figure 1.11). La déformation du maillage sur une molécule de calcul est prise volontairement nulle, pour bien dissocier l'effet des deux types de déformation.

L'erreur RMS est calculée le long d'un des axes du maillage, à nouveau au temps de propagation adimensionné t = 56, et pour un coefficient de filtrage sélectif de 0.01. Elle est représentée avec une échelle verticale logarithmique sur la figure 1.12. On constate que l'erreur reste quasi-identique à celle obtenue pour un maillage cartésien – *i.e.* pour une déformation de 0° – jusqu'à un angle d'environ 51°, angle à partir duquel elle augmente très rapidement. La simulation diverge pour des angles de déformation supérieurs à 52°. La croissance de l'erreur RMS suivie de la divergence est due à l'apparition d'oscillations de longueurs d'onde 30



FIG. 1.10 – Comparaison avec l'erreur fournie par le solveur cartésien. Les erreurs sont représentées en pourcentage de l'amplitude maximale du pulse de pression. — CURVESIA – – ALESIA.

proches de la longueur d'onde de coupure du filtrage spatial. La longueur d'onde comprise entre trois et quatre Δx est en effet suffisamment élevée pour ne plus être beaucoup amortie par le filtrage sélectif sur onze points utilisé ici.



FIG. 1.11 – Angle de déformation θ d'une maille

Finalement l'erreur induite par la non-orthogonalité du maillage se montre être quasi indépendante de l'angle de déformation des cellules pour des angles inférieurs à 50° .



FIG. 1.12 – Erreur RMS en fonction de l'angle θ (en degrés) de déformation maximal des cellules.

Déformation maximale sur une molécule de calcul par rapport au maillage cartésien

Il est important de mesurer l'effet de ce paramètre de déformation, illustré sur la figure 1.13, indépendemment du paramètre précédent, même si sa valeur est dépendante du schéma numérique utilisé. En effet il n'est pas difficile de construire des maillages dont la déforma-



FIG. 1.13 – Déformation $\Delta \theta$ d'une molécule de calcul

tion maximale des mailles est bien contrôlée et inférieure à un seuil prédéterminé. Par contre la déformation sur une molécule de calcul est fixée par la courbure de la géométrie à simuler ainsi que par la taille maximale des mailles.

Ainsi lorsque la déformation doit être maintenue très faible, il faut employer des mailles de très petite taille, ce qui produit souvent un maillage de grandes dimensions au final.

Un pulse de pression de forme gaussienne est à nouveau utilisé pour quantifier l'erreur numérique induite par la déformation sur une molécule de calcul. La figure 1.14 représente l'erreur RMS calculée sur l'axe y=0 à l'instant t = 56. On constate que le traitement curviligne résiste sans problème à de fortes déformations, au-delà de 90° de déformation sur une



FIG. 1.14 – Erreur RMS en fonction de l'angle total $\Delta \theta$ de déformation d'une molécule de calcul.

molécule de onze points. Il est intéressant de noter que l'erreur se comporte de manière très différente à celle observée pour la déformation maximale d'une maille. En effet, ici l'erreur croît progressivement avec l'angle $\Delta\theta$ de déformation de la molécule, ce qui semble indiquer que l'erreur a une origine différente.

1.3.2 Validation sur un cas test de diffraction acoustique

Diffraction d'un pulse acoustique par un cylindre

Ce cas test étudie la diffraction d'un pulse acoustique par un cylindre. Il est tiré du 2^e "CAA workshop on benchmark problems" [1]. Sa formulation originelle est pour les équations d'Euler linéarisées, et le problème est construit de manière adimensionnelle. L'adimensionnalisation est construite sur le diamètre du cylindre pour l'échelle de longueur ainsi que la célérité du son pour l'échelle de temps. Un cylindre de rayon r=0.5 est placé au centre du domaine d'étude, au point (0,0) en coordonnées cylindriques. Un pulse de pression, de forme gaussienne et de demi-largeur adimensionnelle b = 0.2, situé en (r, θ) = (4,0), est utilisé comme condition initiale de la simulation. Ce pulse s'écrit de la manière suivante en coordonnées cartésiennes :

$$S = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{b^2}\right)$$

On mesure le signal de pression en (r, θ) = (5, π /2), de t=6 à t=10 en temps adimensionnel.



FIG. 1.15 – Configuration du cas test de diffraction d'un pulse acoustique par un cylindre.

La solution analytique est donnée dans les proceedings du workshop, mais comporte quelques erreurs de saisie. On montre en effet que la pression totale instantanée peut s'écrire :

$$p(r,\theta,t) = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty A(r,\theta,\omega)\omega\cos(\omega)d\omega\right)$$

avec :

$$\begin{split} A(r,\theta,\omega) &= -\frac{\exp(-\omega^2/(4b))}{2b} \bigg\{ J_0 \left(\omega \sqrt{r^2 + x_s^2 - 2rx_s \cos(\theta)} \right) \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\epsilon_k \, \mathrm{H}_k^{(1)}(r\omega) \cos(k\theta)}{\pi \left[\frac{2k}{\omega} \, \mathrm{H}_k \left(1 \right) (\omega/2) - \mathrm{H}_{k+1}^{(1)}(\omega/2) \right]} \right] \, . \\ &\int_0^{\pi} \frac{(0.5 - x_s \cos\eta) \, \mathrm{J}_1(\omega \sqrt{0.25 + x_s^2 - x_s \cos\eta}}{\sqrt{0.25 + x_s^2 - x_s \cos\eta}} \cos(k\eta) d\eta \bigg\} \end{split}$$

Le cas test est moins favorable qu'il ne pourrait y paraître à première vue pour le maillage curviligne. En effet il faut mailler radialement de r = 0.5 à environ r = 7, et s'assurer que en r = 5, c'est-à-dire au point de mesure, le maillage est suffisamment fin pour supporter le pulse gaussien de demi-largeur 0.2.

Pour avoir cinq points dans la demi-largeur du pulse en r = 5 il faut vérifier les conditions $dr_{r=5} \le b/5$ et $r d\theta_{r=5} \le b/5$. Cette deuxième condition impose le nombre minimum de points dans la direction azimutale ; en effet $d\theta = 2\pi/n_x$ où n_x est le nombre de points pour discrétiser la direction azimutale, ce qui conduit à $n_x \ge 780$.

Avec un nombre de points trop faible on n'arrive pas à obtenir de résultats satisfaisants. Lorsque le coefficient de filtrage est faible, on obtient des oscillations à la fréquence limite du maillage (deux points par longueur d'onde) qui contaminent et déstabilisent la résolution sur tout le domaine de calcul, alors que si ce coefficient fixé à une valeur assurant l'absence d'oscillations parasites, on filtre rapidement le rayonnement acoustique directement à l'emplacement de la source.

La figure 1.16 courbe montre la comparaison entre la solution analytique et la simulation pour un point d'observation en (r, θ) = (5, π /2). Cette simulation a été effectuée avec le traitement *centré* à la paroi, decrit au paragraphe 1.3.3.

Le premier pic correspond au front d'onde provenant directement du pulse initial. On voit ensuite arriver le résultat de la diffraction de ce même front d'onde par le cylindre. On constate que les deux courbes sont en parfait accord.


FIG. 1.16 – Signal temporel de pression au point d'observation. ––– : solution analytique, ––– : simulation numérique.

Diffraction d'une source harmonique par un cylindre

On présente maintenant le troisième cas test de la catégorie 1 du workshop [1]. La configuration géométrique de ce cas test est identique à celle du précédent cas. Par contre le pulse acoustique initial est remplacé par un monopôle acoustique de même envelope spatiale. La pulsation adimensionnalisée de celui-ci est de $\omega = 8 \pi$. On a donc l'expression suivante en coordonnées cartésiennes du terme source :

$$S = \sin(\omega t) \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{b^2}\right)$$

On cherche à tracer la directivité $D(\theta) = \lim_{r\to\infty} r < {p'}^2 > du$ champ diffracté à partir de la simulation.

En comparant la dimension de la source à sa fréquence on peut constater que la source est non-compacte. En effet, la longueur d'onde λ est donnée par $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$, soit $\lambda = c/4 = 0.25$; la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la dimension de la source (la demi-largeur de celle-ci valant b= 0.2).

Les remarques du cas test précédent concernant les exigences sur le maillage sont toujours de rigueur, mais la source périodique engendre un champ diffracté nettement plus difficile à résoudre proprement. Le but du cas test est de calculer la directivité $D = r < {p'}^2 >$ sur un arc de cercle autour du cylindre. La figure 1.17 illustre la configuration du cas test pour un arc de mesure situé à r = 7.5D du centre du cylindre. La solution analytique fournie dans le compte-rendu du workshop est de nouveau erronée. La solution analytique correcte, tracée sur la figure 1.18 et représentée également sur les figures 1.20, 1.21, 1.22 et 1.23 pour une distance de r = 7.5 depuis le centre du cylindre, est développée dans l'annexe 3.



FIG. 1.17 – Configuration du cas test de diffraction d'une source acoustique harmonique par un cylindre.

Cependant la directivité correspond bien à celle présentée sur les courbes du compte-rendu du workshop. La figure 1.18 montre une comparaison de la solution analytique avec un calcul utilisant les schémas de dérivation et les filtres décentrés développés par Berland *et al.* (à paraître, voir aussi [10]), et un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.9$. Enfin on montre une



FIG. 1.18 – Diffraction d'une source harmonique par un cylindre : directivité à r = 7.5. - : solution analytique, – – – : simulation avec un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.9$.

vue générale du champ instantané des fluctuations de pression autour du cylindre.



FIG. 1.19 – Vue instantanée du champ fluctuant de pression autour du cylindre, calculé avec les schémas et les filtres non-centrés optimisés.

1.3.3 Importance des schémas et des filtres proche d'une paroi

Il est intéressant d'examiner l'effet des schémas et filtres employés dans les zones proches d'une paroi, sur la qualité des résultats acoustiques en champ lointain.

La façon la plus simple de traiter la zone de paroi est de réduire progressivement la molécule de calcul des schémas et des filtres pour ne pas avoir à mettre en œuvre une approche décentrée. La réduction du nombre de points va entraîner une détérioration des caractéristiques des schémas et des filtres, mais on pourrait espérer que cette réduction n'affecte qu'un petit nombre de points et donc n'a pas d'effet significatif sur les résultats loin de la paroi.

Pour vérifier cette hypothèse, le cas test de la source monopôlaire se diffractant sur un cylindre est utilisé. Celui-ci est suffisamment exigeant pour pouvoir bien différencier les différentes approches numériques, et en même temps la géométrie est simple à mettre en œuvre et à mailler. Ce cas test est résolu avec les deux traitements de paroi, sur le même maillage, et pour deux valeurs $\sigma = 0.2$ et $\sigma = 0.8$ du coefficient de filtrage, soit au total quatre simulations.

On construit un maillage dont la discrétisation radiale vaut huit points par longueur d'onde partout. La discrétisation azimutale ne peut pas être imposée de la même manière, car celleci varie linéairement avec la distance depuis le centre du cylindre. Le facteur limitant concernant cette direction est la bonne discrétisation des fronts d'onde au niveau de la source, soit par exemple cinq points par longueur d'onde en r = 4. Le maillage comporte au final 280 points dans la direction radiale et 720 points dans la direction azimutale.

Le traitement *centré* à la paroi utilise un schéma sur deux points pour le point de paroi, sur trois points pour le point suivant, sur cinq points pour le deuxième point depuis la paroi, et enfin sur sept points pour les deux points suivants avant d'atteindre la zone où le schéma centré sur onze points est appliqué. Le filtrage centré n'est appliqué qu'à partir du premier point depuis la paroi ; les variables au point de paroi ne sont pas filtrées dans la direction radiale.

Le traitement *décentré* fait appel aux schémas et aux filtrages décentrés développés par Berland *et al.* [10]. Ceux-ci sont optimisés en terme d'erreur de phase et d'erreur d'amplitude pour être précis jusqu'à cinq points par longueur d'onde. Les schémas sont tous construits sur onze points, y compris pour le point de paroi, mais les molécules des filtres sont réduites à cinq points pour le point de paroi et sept points pour le point suivant, et onze points pour les autres.

Les résultats obtenus montrent clairement la dégradation résultant de l'utilisation des schémas et filtres centrés près de la paroi. Les figures 1.20 et 1.21 montrent les valeurs RMS de la directivité $D = r < p'^2 >$ en fonction de l'angle θ compris entre 90 et 180 degrés (voir la figure 1.17), sur un arc de mesure situé à r = 7.5D, pour un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.2$.

La directivité calculée avec l'approche centrée montre une tendance à peu près correcte, mais son niveau est nettement inférieur à celui de la solution analytique. Cette baisse de niveau est accompagnée d'une diminution des variations de la directivité. On peut expliquer ce lissage de la directivité par le fait que la dissipation accrue des filtres centrés n'affecte



FIG. 1.20 – Directivité $D(\theta) = r < p'^2 > a r/D = 7.5$. — solution analytique , - - - solution calculée avec les schémas centrés et un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.2$.



FIG. 1.21 – Directivité à r/D = 7.5 — solution analytique, - - - solution calculée avec les schémas et filtres non-centrés optimisés et un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.2$.

que le champ diffracté et non le champ direct, du moins sur une grande partie de l'arc de mesure. Ainsi, en amortissant uniquement une des deux composantes du champ total, on réduit l'intensité des franges d'interférence entre ces deux composantes. De plus, les positions des pics sont décalées, du fait de la dispersion plus élevée imposée par les schémas de bas ordre près de la paroi. La figure 1.21 montre que l'approche décentrée fournit une

directivité pratiquement indiscernable de celle obtenue à partir de la solution analytique. Les figures 1.22 et 1.23 présentent les résultats obtenus avec un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.8$. On observe que les résultats fournis par l'approche centrée sont détériorés par le renforcement du filtrage. Le niveau est fortement abaissé, ainsi que l'intensité des franges d'interférence. Par contre le positionnement des pics de directivité correspond à celui obtenu avec $\sigma = 0.2$. Les schémas optimisés souffrent nettement moins de l'augmentation du coefficient de filtrage, comme l'illustre la figure 1.23. Celle-ci fait apparaître une baisse perceptible mais très faible de la courbe de directivité. Une estimation rapide permet d'attribuer la baisse essentiellement au trajet dans le champ libre, c'est-à-dire à la dissipation engendrée par le filtrage optimisé sur onze points. En effet, le trajet acoustique entre la source et l'arc de mesure comporte au minimum 30 longueurs d'onde, et une période de source est discrétisée par 50 itérations temporelles, ce qui donne une durée minimale de propagation de 1500 itérations. Or à huit points par longueur d'onde, le filtre optimisé sur onze points [13] a une dissipation d'environ 3 \times 10⁻⁵, donc sur 1500 itérations avec σ = 0.8, un front d'onde est atténué de $1 - (1 - 0.8 \times 3 \times 10^{-5})^{1500} \approx 0.03$ soit une atténuation de 3%. Cette approximation est plutôt une majoration, car la construction du maillage fait que les fronts d'onde sont discrétisés par plus de huit points par longueur d'onde sur une grande partie de leur trajet. Cependant on peut en déduire que la dissipation induite par le filtre sur onze points contribue largement à la baisse du niveau acoustique en champ lointain.

En conclusion, l'utilisation de schémas de dérivation et de filtres centrés pour traiter les zones de paroi nuit sévèrement à la qualité des résultats. De plus, ces résultats sont fortement dépendants du coefficient de filtrage. L'approche décentrée permet non seulement d'obtenir des résultats en accord avec la solution analytique, mais en plus d'obtenir une quasi indépendance des résultats vis-à-vis de la force du filtrage.



FIG. 1.22 – Directivité à r/D = 7.5 — solution analytique, - - - solution calculée avec les schémas et filtres centrés, et un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.8$.



FIG. 1.23 – Directivité à r/D = 7.5 — solution analytique, - - - solution calculée avec les schémas et filtres non-centrés optimisés, et un coefficient de filtrage de $\sigma = 0.8$.

2 Outils numériques pour le calcul à grande échelle

2.1 Techniques d'interpolation

L'interpolation a été envisagée d'abord pour permettre la simulation d'un airfoil avec un maillage entièrement orthogonal, même au voisinage du bord de fuite. De manière plus générale la possibilité d'effectuer des simulations sur des domaines composés de multiples maillages est intéressante car elle rend possible l'étude du bruit rayonné par un objet de géométrie complexe, mais aussi celle du bruit résultant d'un écoulement autour de plusieurs objets. Cette technique est très récente en aéroacoustique, et fait l'objet actuellement de nombreuses publications [95, 27, 96]. Elle a été testée et mise au point sur un problème de type multi-blocs dans lequel le domaine de simulation est composé de plusieurs maillages qui se recouvrent partiellement. Différentes techniques d'interpolation ont été examinées :

- interpolation élémentaire d'ordre un ou deux
- interpolation avec des fonctions spline cubique
- interpolation avec les polynômes de Lagrange

Ces techniques sont présentées et comparées pour une fonction d'une variable.

2.1.1 Interpolation par développement de Taylor

Connaissant la valeur et la dérivée d'une fonction f en deux points x_1 et x_2 , il est facile d'obtenir une approximation d'ordre 2 de la fonction pour tout point x du segment :

$$f(x) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{x - x_1}{2} f'(x_1) + \frac{x - x_2}{2} f'(x_2)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les dérivées sont soit connues, soit facilement calculables

avec le schéma numérique déja existant. Ainsi cette méthode d'interpolation s'implémente sans difficulté, y compris jusqu'aux bords du domaine de simulation, car les schémas de dérivation pouvant traiter les points proches des frontières sont déja programmés.

2.1.2 Interpolation par spline cubique

L'utilisation de fonctions de type spline cubique est bien adaptée à une fonction f d'une variable. Il s'agit d'utiliser des polynômes d'ordre 3 par morceau pour joindre chaque paire de points consécutifs par une courbe qui soit continue, mais également de classe C^1 et C^2 . Dans le cas général, cette méthode nécessite la résolution d'un système tri-diagonal qui provient des conditions d'égalité des dérivées secondes à tous les points interpolants et du passage par les valeurs connues de f aux mêmes points. Il est possible de construire une spline cubique avec seulement quatre points, auquel cas le système tri-diagonal se simplifie à l'expression suivante : pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$f_{\text{interp}}(x) = x_{i-1} C_3(t) + x_i C_2(t) + x_{i+1} C_1(t) + x_{i+2} C_0(t)$$

où

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$C_3(t) = a t^3 - 2a t^2 + a t,$$

$$C_2(t) = (a + 2) t^3 - (a + 3) t^2 + 1,$$

$$C_1(t) = -(a + 2) t^3 + (2a + 3) t^2 - a t,$$

$$C_0(t) = -a t^3 + a t^2$$
(2.1)

Le paramètre *a* est compris entre -1 et 0.

2.1.3 Interpolation par polynômes de Lagrange

Cette méthode permet de trouver l'unique polynôme d'ordre n qui passe par n + 1 couples $(x_i, f(x_i))$. Le polynôme ainsi déterminé est utilisé pour interpoler la valeur de la fonction f en des points autres que les x_i . Le polynôme a la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_i(x) \text{ où } P_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Chaque polynôme P_i s'annule sur l'ensemble des points $x_{j,j\neq i}$ et vaut 1 en x_i . Cette formulation n'est pas celle d'un polynôme usuel $P(x) = \sum a_i x^i$, car on ne connaît pas directement l'expression explicite des a_i . De plus, si les dénominateurs des polynômes P_i sont calculables à l'avance connaissant l'ensemble des points x_i , les numérateurs ne le sont pas et doivent être recalculés pour chaque nouvelle valeur à interpoler. Le coût de l'interpolation est de l'ordre de $O(n^2)$.

L'erreur d'interpolation est bien contrôlée à condition de connaître suffisamment la fonction *f*. En effet, il est possible de montrer que pour toute fonction *f* de classe C^{n+1} on a la relation :

$$f(x) - P(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$$

Ainsi l'erreur maximale est limitée par la relation suivante valable pour $x \in [a, b]$:

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{|\prod(x - x_i)|}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Par contre si f n'est pas suffisamment connue, l'interpolation de Lagrange peut donner de mauvaises surprises, particulièrement lorsque l'ordre d'interpolation est élévé.

2.1.4 Comparaison des différentes méthodes en 1D

Les performances des différentes méthodes d'interpolation ont été comparées dans l'espace des nombres d'onde. La fonction d'erreur est calculée avec la formule suivante :

$$E_{\text{local}}^{1/2}(\alpha) = \left\{ \int_0^1 \left[\hat{f}_\alpha(x_i + \delta x) - f_\alpha(x_i + \delta x) \right]^2 \delta x \right\}^{\frac{1}{2}}$$

où α est le nombre d'onde.



FIG. 2.1 – Erreur d'interpolation en fonction du nombre d'onde : –·–·– Développement de Taylor d'ordre 2, – – – spline cubique sur 4 points, ––– polynômes de Lagrange sur 6 points

La figure 2.1 montre une première vue des différentes méthodes d'interpolation présentées précédemment. La méthode basée sur le développement de Taylor fournit une erreur qui est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que toutes les autres, et cette méthode ne sera donc pas considérée par la suite. La figure 2.2 présente une comparaison plus détaillée

des méthodes envisagées par la suite. Le domaine qui nous intéresse s'arrête à $\alpha \Delta x \approx 1$ car les fréquences physiques au delà de six points par longueur d'onde peuvent être évitées par construction de maillage.



FIG. 2.2 – Erreur d'interpolation en fonction du nombre d'onde. spline sur quatre points, – – – spline sur six points, – – – polynômes de Lagrange sur huit points, – – polynômes de Lagrange sur dix points.

La comparaison montre que la méthode de Lagrange sur quatre points est quasiment identique à l'application d'une spline cubique sur le même nombre de points. Ceci s'explique par le fait que les deux méthodes font appel à des polynômes de degré trois. On peut montrer de plus que sur des espacements constants, les deux méthodes sont mathématiquement équivalentes : elles utilisent l'unique polynôme de degré 3 passant par les quatre couples de valeurs connus. Cependant la méthode de Lagrange est mieux adaptée à l'interpolation sur des espacements non-constants, car elle tient compte explicitement des abscisses des deux points extrêmes, ce qui n'est pas le cas de la méthode par spline cubique sur 4 points.

Sur six points, la méthode de Lagrange se montre nettement plus performante pour $0.2 < \alpha \Delta x < 0.8$: l'écart moyen entre les deux méthodes est environ de $3. \times 10^{-5}$, et l'erreur reste inférieure à 1×10^{-5} deux fois plus longtemps avec les polynômes de Lagrange qu'avec une spline cubique. De plus la mise en œuvre de Lagrange est plus simple, car la spline sur six points nécessite la résolution d'un système linéaire alors que la méthode de Lagrange fait simplement appel à la multiplication de polynômes.

L'augmentation du nombre de points accentue encore les différences entre les deux méthodes, celle de Lagrange étant très nettement supérieure. Sur 10 points, celle-ci s'avère la plus performante des différentes méthodes testées, avec une erreur de 10^{-6} en $\alpha \Delta x = 0.7$, et inférieure à 5×10^{-5} pour toute fréquence discrétisée par plus de six points par longueur d'onde.

La figure 2.3 trace une comparaison uniquement des polynômes de Lagrange de différents





FIG. 2.3 – Erreur d'interpolation en fonction du nombre d'ondes : …… polynômes de Lagrange sur 4 points, – – – polynômes de Lagrange sur 6 points, – – – polynômes de Lagrange sur 8 points, — polynômes de Lagrange sur 10 points

Ainsi l'interpolation par les polynômes de Lagrange est la méthode la plus adaptée pour les fonctions d'une variable, lorsqu'une précision élévée est souhaitée sur une large bande de fréquences.

2.2 Interpolation 2-D

2.2.1 Méthode

Dans le cadre de nos simulations numériques on veut interpoler de l'information en deux dimensions.

Le problème générique auquel on s'intéresse est de calculer la valeur d'une fonction f(x, y) en un point *P* dit *receveur* à partir des valeurs de *f* aux points d'un maillage structuré supposé quasi-orthogonal dit le *maillage donateur*, représenté sur la figure 2.4.

L'interpolation multivariable directe étant encore un sujet de recherche et souffrant de problèmes à la fois théoriques et pratiques, l'approche choisie ici est d'effectuer N + 1 interpolations 1-D successives dans les deux directions perpendiculaires du maillage donateur, où N est le nombre de points utilisé pour chaque interpolation.

La figure 2.4 illustre l'approche suivie dans ce travail. La droite \mathcal{D} passant par le point P à



FIG. 2.4 – Interpolation 2-D sur un maillage donateur quasi-orthogonal avec N = 4.

interpoler et parallèle au segment [(i, j) (i + 1, j)] est tracée. Les points d'intersection de \mathcal{D} et des droites dans la direction radiale η , repérés par les symboles \circ sur la figure 2.4, sont ainsi obtenus, et leurs coordonnées curvilignes, particulièrement leurs coordonnées dans la direction η , calculées. Il faut alors trouver les coordonnées curvilignes du point P, à partir de ses coordonnées cartésiennes. Pour ce faire, le plus simple est de calculer le sinus et le cosinus de l'angle α illustré sur la figure 2.5, puis de multiplier ces valeurs par la distance \overline{AP} pour obtenir respectivement $\overline{AP_{\eta}}$ et $\overline{AP_{\xi}}$.

Une fois toutes les coordonnées calculées, on peut procédér à l'interpolation. Les valeurs de f aux points d'intersection de D et des droites radiales sont d'abord interpolées dans la



FIG. 2.5 – Calcul des coordonnées du point P.

direction des droites radiales. La valeur de f au point P est enfin interpolée à partir des valeurs obtenues précédemment aux points d'intersection. On a donc obtenu une estimation de la fonction f au point P, à partir de ses valeurs à d'autres points. L'ensemble des points issus du maillage donateur dont les valeurs ont été utilisées pour évaluer f au point P, est illustré par des symboles × sur la figure 2.4.

Plusieurs remarques sont à faire à propos de l'implantation de l'interpolation dans le code de calcul.

Premièrement la méthode présentée au-dessus n'est pas symétrique vis-à-vis des deux directions du maillage : l'interpolation est d'abord faite selon η et ensuite suivant ξ . Ce choix est dû à la construction des maillages utilisés jusqu'ici. En effet, pour des maillages cylindriques les lignes de maillage sont des droites dans la direction radiale η , mais pas dans la direction azimutale. Ainsi on interpole d'abord dans la direction radiale pour bénéficier des droites préexistantes lors des *N* premières interpolations. Dans le cas contraire, il faudrait calculer *N* droites additionnelles, soit de l'ordre de N^2 points d'intersection supplémentaires.

Deuxièmement, le calcul des coordonnées d'intersection doit être fait avec soin, particulièrement si les polynômes de Lagrange sont choisis pour effectuer les interpolations 1-D. En effet ceux-ci sont très susceptibles d'osciller lorsque les distances entre le point d'interpolation et les points du maillage donateur sont mal calculées : on modifie non seulement le point auquel on calcule les valeurs des polynômes de Lagrange, mais également les coefficients des polynômes eux-mêmes.

Enfin, la détermination du quadrilatère dans lequel se trouve le point à interpoler – c'està-dire la recherche du couple (i, j) pour lequel le point P est à l'intérieur du quadrilatère $[P_{i,j}; P_{i+1,j}; P_{i+1,j+1}; P_{i,j+1}]$ – peut être délicate lorsque le point en question est très proche d'une droite du maillage. Il faut surtout faire attention au traitement des divers cas particuliers qui peuvent apparaître, en particulier lorsque le point P se trouve sur une droite du maillage ou alors confondu avec un point du maillage.

La figure 2.6 montre une autre configuration dont il faut également tenir compte : le point d'intersection P_1 de la droite \mathcal{D} et de la droite radiale passant par (i + 2, j) n'est plus dans la même ligne du maillage que le point P. Il faut donc faire attention à prendre les bons indices i et j pour les points du maillage voisins du point P à interpoler. Cet aspect devient d'autant



FIG. 2.6 – Cas particulier du point *P* localisé près d'une ligne du maillage.

plus délicat que la molécule de calcul utilisée pour les interpolations est grande, et que les déformations locales des maillages sont importantes.

2.2.2 Amélioration de l'interpolation 2-D

La méthode d'interpolation précédente ne s'applique que difficilement sur des maillages quelconques, lorsque les deux directions présentent des variations curvilignes. En effet, il faut alors recréer les droites d'interpolation dans les deux directions, ce qui est lourd et coûteux d'un point de vue du temps de calcul.

Il est cependant possible de généraliser la méthode précédente, tout en la simplifiant et en maintenant une précision comparable. Au lieu d'effectuer les interpolations successives sur des droites, on peut les faire suivant les courbes données par le maillage et illustrées sur la figure 2.7, ce qui évite le calcul de tous les points d'intersection décrits au paragraphe 2.2.1. Ces courbes sont décrites par des valeurs de ξ où de η constantes. Formellement, on peut considérer que les opérations d'interpolation sont toujours effectuées sur des droites, mais dans le domaine transformé (ξ , η) et non plus dans le domaine physique (x, y). On calcule



FIG. 2.7 – Interpolation 2-D sur lignes courbes

les distances $\overline{AP_{\eta}}$ et $\overline{AP_{\xi}}$ du point *P* par rapport au maillage donateur de la même manière que précédemment. Ensuite, les interpolations curvilignes suivant les directions ξ et η sont effectuées en prenant comme abscisse curviligne du point d'interpolation les valeurs $\overline{AP_{\xi}}$ et $\overline{AP_{\eta}}$ respectivement.

Cette approche présente de nombreux avantages. On évite d'abord un nombre important de calculs, car les coordonnées projetées du point P (voir la figure 2.5) sont utilisées pour chacune des N + 1 interpolations. De plus, le traitement des deux directions est maintenant symétrique, car on ne repose plus sur l'utilisation de droites dans une des deux directions. La disparition de cette contrainte rend également la méthode plus générale, car des maillages présentant des variations curvilignes dans les deux directions, comme par exemple celui de la figure 2.7, peuvent être traités sans surcoût de calcul. Cette approche permet aussi d'éviter

les problèmes décrits sur la figure 2.6. En effet, par construction les lignes d'interpolation restent encadrées entre deux lignes de maillage, sans les intersecter.

2.2.3 Vérification en 2-D

Il est important de vérifier le bon comportement de notre approche pour l'interpolation en deux dimensions. En effet, les interpolations 1-D successives dans les deux directions ne sont pas découplées mais au contraire convoluées. Ainsi, les erreurs 1-D des interpolations ne sont pas sommées de manière linéaire, et le processus donnant l'erreur bidimensionelle finale est non-linéaire. On peut supposer que cette non-linéarité joue un rôle d'autant plus grand que l'ordre des polynômes utilisés dans les interpolations 1-D est élévé, car les polynômes d'ordre élévé ont plus tendance à osciller. L'évaluation qui suit est faite pour le procédé d'interpolation amélioré présenté au paragraphe 2.2.2.

Un test classique en 2-D est d'interpoler la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le maillage bidimensionnel et de constater l'erreur maximale obtenue. Cependant ce test est relativement peu contraignant car les longueurs d'ondes effectives présentes dans le champ quadratique sont basses, et donc les nombres de points par longueur d'onde élévés. On ne présente pas de courbes de résultats ici pour ce test, bien qu'il ait été effectué, car il n'apporte rien de supplémentaire par rapport aux résultats décrits ci-dessous.

Un test plus sélectif, et d'ailleurs plus représentatif des conditions réelles d'utilisation, est l'interpolation d'un champ oscillant de longueur d'onde connue. On choisit d'interpoler un champ de la forme

$$f(x,y) = \cos(k_x x + k_y y + \psi_x + \psi_y)$$

où les $k_{x,y}$ traduisent les périodes spatiales selon x et y, et les $\psi_{x,y}$ des déphasages de l'ondulation par rapport au maillage donateur. Il est ainsi possible d'effectuer un balayage en fréquence pour examiner précisément le comportement de l'interpolation pour des discrétisations qui nous intéressent.

On peut faire varier un grand nombre de paramètres dans l'étude du fonctionnement de l'interpolation. Il est d'abord possible d'isoler les erreurs dues à la projection des coordonnées du point receveur P sur le maillage donateur. En effet, lorsque le maillage donateur est quelconque, le calcul des coordonnées curvilignes de P par rapport à ce maillage est une approximation, à l'ordre 1 si la méthode présentée au paragraphe précédent est utilisée. Pour éviter cette approximation, on prend un maillage donateur parfaitement cartésien. Les coordonnées projetées exactes du point P sont ainsi simplement ses coordonnées physiques x et y. L'erreur commise sur le calcul de la valeur f(P) résultera alors uniquement du procédé d'interpolation bidimensionnelle. La figure 2.8 présente les erreurs moyennes d'interpolation en fonction de la longueur d'onde, pour des interpolations 1-D basées sur les polynômes de Lagrange sur 4, 6, 8 et 10 points.

Les erreurs ont été calculées en fonction de la position du point *P*, puis moyennées spatialement sur une maille. Les courbes en pointillés donnent les erreurs maximales atteintes en faisant varier ψ , et les courbes continues, les erreurs moyennées sur $0 \le \psi \le 2\pi$. Les décroissances logarithmiques des erreurs avec le nombre de points par longueur d'onde semblent



FIG. 2.8 – Erreurs moyennes – et maximales - - sur une maille. -: quatre points, -: six points, -: huit points, -: dix points

indiquer que l'interaction des interpolations successives n'est pas le facteur limitant la précision de la valeur obtenue au final.

2.2.4 Cas test avec interpolation

Le cas test suivant est issu du workshop d'aéroacoustique numérique de 2004 [117]. Il s'agit d'une généralisation du cas test pour un seul cylindre déjà exposé dans ce rapport, cette fois avec deux cylindres au lieu d'un seul. Le grand cylindre, à gauche sur la figure 2.9, a un diamètre de D = 1, et le petit cylindre de droite mesure la moitié de sa taille. Les deux cylindres sont séparés d'une distance de 8, et à mi-chemin se trouve la source acoustique. Celle-ci est le même monopôle non-compact que précédemment, donné par :

$$S = \sin(\omega t) \exp\left(-\ln(2)\frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{b^2}\right)$$

où $\omega = 8\pi$ et b = 0.2. La solution analytique à ce problème a été proposée par Sherer [94], et est résumée dans l'annexe 3. Scott Sherer nous a également envoyé des résultats tabulés. Plusieurs stratégies sont envisageables pour mailler le domaine du cas test. L'utilisation d'un maillage cylindrique pour chaque cylindre paraît être l'approche la plus immédiate. Les deux maillages cylindriques se recouvrent sur une bande verticale centrée sur la source, et ces recouvrement sont utilisés pour faire communiquer les deux maillages grâce à une étape d'interpolation bidimensionelle.



FIG. 2.9 - Configuration du cas test de diffraction

Ce choix de maillages conduit cependant à un nombre de points très important, du fait de la contrainte de discrétisation angulaire imposée au niveau de la source. Les résultats qui suivent ont été obtenus avec cette approche et ont nécessité par exemple des maillages de 1000 x 500 points pour chaque cylindre, impliquant donc des temps de simulation élévés. Une autre solution, peut-être plus élégante en terme d'adéquation du maillage au problème à résoudre, est de mailler séparément les deux cylindres avec des maillages curvilignes, mais de limiter ceux-ci aux zones proches de chaque cylindre respectif et de mailler le domaine entier avec un maillage cartésien. Cette approche permet de s'affranchir de la contrainte azimutale des maillages curvilignes, et d'utiliser ceux-ci uniquement là où ils sont utiles,



FIG. 2.10 – Maillages cylindriques utilisés pour la diffraction d'un monopôle par deux cylindres [2]

c'est-à-dire proche de la paroi des cylindres. Cette solution, bien que plus adaptée au castest en question, n'a pas été mise en œuvre pour des raisons de temps de développement.

Enfin on peut remarquer que le problème à étudier est symétrique autour de l'axe y = 0, donc on peut se contenter de ne mailler et ne résoudre qu'une moitié du domaine, la moitié du haut par exemple, et imposer une condition de "symétrie". Plus exactement, il s'agirait d'une condition de symétrie en ce qui concerne la densité, la vitesse selon x et la pression, mais d'antisymétrie pour la vitesse selon y, le long de l'axe y = 0, voir le paragraphe 1.2.3. Par contre, l'utilisation d'une condition périodique empêche de vérifier que le solveur récupère de lui-même la symétricité du champ diffracté. On choisit donc de ne pas imposer une telle condition symétrique, car l'objectif ici n'est pas tellement d'obtenir un résultat en y ayant passé le moins de temps possible, mais de vérifier le bon fonctionnement des méthodes mises en œuvre.

Il faut noter que les contraintes sur l'interpolation sont ici beaucoup moins fortes que dans le cas du sillage d'un profil d'aile. En effet les zones d'interpolation pour les cylindres ne contiennent aucun terme source ni même d'écoulement : il suffit de capter les caractéristiques des ondes acoustiques. Ainsi une erreur par exemple de un pour cent dans l'interpolation se répercutera par une erreur du même ordre de grandeur à la frontière du domaine de simulation.

Nous avons choisi de simuler d'abord deux cylindres de même rayon. Cette configuration permet de vérifier plus facilement la qualité des résultats, qui doivent montrer une symétrie par rapport à la source. Ces tests ont été utiles pour la vérification du code de calcul, mais n'apportent rien de supplémentaire par rapport au vrai cas test en ce qui concerne la validation. À ce titre, aucun résultat les concernant n'est présenté ici.

La simulation de la véritable géométrie du cas test a posé quelques problèmes de mis en

œuvre, mais également de temps de calcul. En effet il faut environ 3 heures sur une station de travail équipée d'un processeur de type Xeon cadencé à 2.0 Ghz pour effectuer 1000 itérations, lesquelles itérations correspondent environ à 3 périodes de la source. Ce temps de calcul est dû à la fois à la très grande taille des matrices de calcul et aussi à l'opération d'interpolation qui nuit fortement à la vectorisation de la boucle principale de calcul. Ainsi pour une simulation d'un écoulement autour d'un cylindre, ne faisant pas appel à l'interpolation, le passage du calcul d'une station de travail classique au calculateur ALPHA MARVEL 1280 composé de 16 processeurs EV7 du laboratoire LMFA, permet de diminuer le temps de calcul par un facteur de cinq, alors que dans le cas des deux cylindres il n'y a presque pas d'accélération du calcul.

Un premier calcul avec deux cylindres de diamètres différents a été fait en abaissant la fréquence adimensionnelle de la source monopolaire de 4 à 1, et en choisissant une source gaussienne de demi-largeur plus grande que celle du cas test. Cela permet d'utiliser des mailles de plus grandes dimensions, ce qui permet de réduire le nombre total de points dans le domaine de calcul, et également d'augmenter le pas temporel δt . Non seulement la durée de calcul pour chaque itération est réduite, mais de plus la simulation d'une période de la source nécessite un plus petit nombre d'itérations. Le temps de calcul effectif d'une simulation à fréquence réduite est ainsi environ dix fois plus court que celui du cas test final.

La figure 2.11 montre un champ instantané de pression résultant de cette simulation, réalisée sur deux maillages de 600×300 et de 600×330 points entourant respectivement le grand et le petit cylindre.

Cette configuration a essentiellement servi au réglage de différents aspects du code, tels la force et la fréquence du filtrage, le nombre de points par longueur d'onde dans la zone d'interpolation, et enfin surtout l'optimisation de la procédure d'interpolation. Il n'a pas été jugé utile d'examiner les résultats en détail; tout au plus des vérifications sommaires de stabilité et de symétrie ont été faites.

Après la mise au point sur une configuration et des paramètres plus simples que ceux du problème initial, des simulations ont été effectuées sur le cas test complet pour obtenir des résultats qui puissent être comparés à ceux issus de la solution analytique proposée par Sherer *et al.* [96]. Ces calculs ont été faits sur un domaine composé de deux maillages contenant respectivement 700×360 et de 700×400 points dans les directions azimutales et radiales. Les deux maillages forment une zone de superposition centrée autour de la source, contenant environ 5700 points pour chaque maillage. Cette zone de superposition est utilisée pour permettre la communication nécessaire entre les deux sous-domaines, laquelle communication est assurée par le procédé d'interpolation décrit au paragraphe 2.2.2, basé sur des polynômes de Lagrange d'ordre sept sur huit points. Le maillage contenant le plus grand nombre de points est utilisé pour mailler le petit cylindre, car il faut un plus grand nombre de points pour atteindre la même distance radiale. Les deux maillages sont étirés dans la direction radiale depuis la paroi jusqu'à l'obtention de mailles correspondant à des



FIG. 2.11 – Diffraction d'un champ monopôlaire par deux cylindres de rayons différents.

discrétisations de huit points par longueur d'onde. On ne prend pas une valeur constante $\delta r = \lambda/8$ partout car les mailles proches de la paroi auraient alors un rapport d'aspect très large. En effet, le pas azimutal à la paroi du petit cylindre est $r \ \delta \theta = 0.5 \times 2\pi/700 \approx 0.0045$, soit $\lambda/(r \ \delta \theta) \approx 55$ points par longueur d'onde, et le rapport d'aspect vaut alors 7. La stabilité numérique du solveur n'est pas améliorée par un tel rapport d'aspect très grand proche d'une paroi, où la naissance d'oscillations numériques est plus ou moins inévitable.

La figure 2.12 montre des vues du champ de pression fluctuante autour des deux cylindres avec les paramètres numériques du cas test du workshop. La vue du champ de pression sur le domaine entier permet d'illustrer la complexité des réseaux d'interférence qui se créent, alors que sur la vue agrandie du grand cylindre de gauche, on peut voir à droite de ce dernier l'onde stationnaire qui résulte de la réflexion de la source entre les deux cylindres, et à gauche du cylindre dans la zone d'ombre le rayonnement propagatif provenant purement de la diffraction par la paroi du cylindre.

Les résultats, présentés sous la forme de fluctuations RMS de pression, ont été calculés à partir d'une durée de signal correspondant à cinq périodes temporelles de la source, après un régime transitoire de 140 périodes, soit environ 20000 itérations de calcul. Les calculs ont tourné pour la majeure partie sur un processeur Intel Xeon cadencé à 2 GHz. Sur ce processeur, le temps de calcul était de l'ordre de 2.5 heures par 1000 itérations, une période temporelle de la source nécessitant 140 itérations. Ces résultats sont comparés aux valeurs fournies par la solution analytique sur les figures 2.13 et 2.14.

On y voit des écarts d'amplitude de l'ordre de 5%, ce qui, compte tenu de la sévérité du



FIG. 2.12 – **Cas test de diffraction par deux cylindres**. Vue instantanée de la pression fluctuante sur le domaine de calcul entier, vue agrandie autour du grand cylindre de gauche. L'échelle de couleur est comprise entre -10^{-6} et 10^{-6} Pa.



FIG. 2.13 – Pression RMS sur l'axe horizontal entre les deux cylindres. — solution analytique de Visbal et Sherer [94] , + valeurs simulées.



FIG. 2.14 – Pression RMS sur le cylindre de gauche de diamètre D=1. — solution analytiqu de Visbal et Sherer [94] , + valeurs simulées.

cas test, paraît raisonnable. En effet, ce problème a été formulé pour les équations d'Euler linéarisées, et sa résolution à l'aide des équations de Navier-Stokes requiert une précision supplémentaire d'environ 5 ordres de grandeur par rapport aux équations linéarisées.

2.3 Parallelisation

De manière générale, la simulation directe aéroacoustique fait appel à des maillages de grande taille, et nécessite donc un espace mémoire et des temps de calcul conséquents. Le coût informatique est encore accru lorsqu'on s'intéresse à des écoulements en présence de parois, car la discrétisation spatiale doit être réduite à leur proximité pour pouvoir simuler correctement le comportement de la couche limite.

Les calculs par différences finies se prêtent généralement bien à la vectorisation car les maillages sont structurés et les boucles de calcul de grande longueur. On peut ainsi bénéficier au maximum de la puissance des supercalculateurs de type vectoriel.

Cependant il est intéressant d'essayer de paralléliser le code de calcul, ne serait-ce parce que l'informatique de pointe semble de plus en plus se diriger vers des supercalculateurs parallèles plutôt que vectoriels.

2.3.1 Environnement matériel

Les machines parallèles sont essentiellement constituées d'un grand nombre de processeurs et d'une grande quantité de mémoire vive. La mémoire vive peut être soit partagée soit distribuée.

Les machines à mémoire partagée permettent à plusieurs processeurs d'accéder à la même mémoire vive. Ceci enlève les problèmes liés au découpage et à la répartition des données, mais permet toujours le découpage des tâches et ainsi un gain de temps. De plus les programmes séquentiels peuvent être exécutés quasiment sans modification du code de programmation. Cependant cette approche est limitée car elle nécessite du matériel très spécifique, et en particulier des cartes-mère qui permettent à plusieurs processeurs d'accéder à la même mémoire. On peut ainsi facilement trouver des systèmes à quatre processeurs, mais beaucoup plus difficilement des systèmes possédant un plus grand nombre de processeurs partageant la même mémoire. Il faut également posséder des compilateurs capables de générer des executables fiables, c'est-à-dire qui gèrent proprement les accès simultanés par plusieurs processeurs à la même zone physique de la mémoire.

Les machines à mémoire dite distribuée ont de la mémoire vive propre à chaque nœud. En simplifiant un peu, il s'agit d'ordinateurs standards reliés par un réseau de communication. Une telle configuration ne connaît pas de limite particulière au niveau de la taille, car on peut théoriquement relier ensemble autant de nœuds que l'on souhaite. De plus le matériel de calcul, hormis l'infrastructure réseau, coûte beaucoup moins cher car il peut être standard. Cependant l'utilisation de tels systèmes exige un effort de programmation non négligeable pour répartir efficacement les données et les tâches et ainsi pour profiter pleinement de la puissance parallèle. En outre leur performance est hautement dépendante de la rapidité du réseau de communication reliant les nœuds. Aujourd'hui les machines parallèles sont souvent constituées d'un grand nombre de nœuds, chacun composé de processeurs à mémoire

partagée.

Les réseaux de communication, autrefois facteurs limitants sur le type de calcul réalisable sur une machine massivement parallèle, sont actuellement très rapides, et aujourd'hui un réseau ethernet basique permet un débit de 1000 Mbits/s, soit plus de 100 megaoctets par seconde, alors que des réseaux dédiés, faisant appel à du matériel et de la connectique spécifiques (et chers), peuvent atteindre des débits de quelques gigaoctets par seconde. Les coûts de transfert ne sont pas uniquement dûs au débit maximal du réseau de communication utilisé. Le délai d'établissement d'une communication, communément appelé la latence du réseau, peut en effet être un facteur critique, selon la fréquence des appels aux fonctions de communication. Un réseau à latence élevée pénalisera beaucoup un calcul parallèle basé sur des communications courtes mais très fréquentes, même si son débit maximal est *a priori* suf-fisant. Les réseaux classiques de type ethernet possèdent une latence élevée, généralement de l'ordre d'une dizaine de millisecondes. Les réseaux dédiés ont une latence nettement plus faible, variable selon les procédés, mais n'excédant pas quelques dizaines de microsecondes.

2.3.2 Environnement logiciel

La communication entre processeurs se fait à l'aide de bibliothèques de fonctions préprogrammées. Ces bibliothèques fournissent toutes les fonctions de base nécessaires à l'envoi et à la réception de paquets d'information, et à la synchronisation de processus multiples. Deux bibliothèques bien distinctes existent, MPI (Message-Passing Interface) et PVM (Parallel Virtual Machine). Actuellement, la plus utilisée et également la plus suivie est MPI, et c'est donc cette interface qui a été employée ici. MPI propose des fonctions de niveau d'abstraction élévé permettant le transfert de variables individuelles de type prédéfini, de tableaux ou sous-tableaux de variables, et même de structures définies par l'utilisateur. Le transfert de structures complexes peut permettre de réduire le nombre d'appels à des fonctions de communication, et ainsi de minimiser les pertes de temps dues à la latence du réseau. Selon le temps mis par les transferts, il peut être intéressant d'essayer d'optimiser la transmission d'information. Les fonctions simples d'envoi et de réception en MPI sont dites bloquantes, c'est-à-dire qu'elles bloquent le déroulement du programme jusqu'à la confirmation du bon déroulement du transfert. Il existe également des fonctions de transfert non-bloquantes, qui permettent au processus de continuer ses calculs pendant la durée des transferts. Celles-ci devraient pouvoir permettre de minimiser le temps pendant lequel les processeurs ne calculent pas. Ces fonctions sont malgré tout à manier avec précaution, du moins en ce qui concerne un code de simulation numérique, car il faut s'assurer que les calculs de dérivées spatiales proche des frontières ne se fassent qu'après la bonne réception des informations nécessaires depuis l'autre sous-domaine. Leur utilisation n'est pas présentée dans le cadre de ce travail.

Il existe enfin d'autres approches logicielles pour le calcul parallèle, et en particulier les approches *SMP* ou *Symmetric Multi Processor*. Les compilateurs *SMP* permettent de générer du

code qui s'exécute efficacement sur les machines à mémoire partagée. La principale famille de directives qui spécifie l'usage de la mémoire partagée est le standard *OpenMP*, mais il existe également les directives *HPF* (High-Performance Fortran) qui permettent d'aboutir au même résultat pour la programmation en Fortran. Il est à noter que certains compilateurs basés sur ce type de directives sont capables dans une certaine mesure de réaliser de l'autoparallélisation sur des machines à mémoire partagée. Le résultat en terme d'accélération est certes potentiellement moins bon que dans le cas d'une parallélisation manuelle, mais ce résultat peut être obtenu sans effort aucun de la part du programmeur, et permet de bénéficier de deux, voire quatre processeurs.

On peut également mentionner les nombreuses bibliothèques scientifiques qui fournissent des opérateurs matriciels extrèmement optimisés. Parmi celles-ci, citons les plus connues qui sont LAPACK (Linear Algebra PACKage) pour les supercalculateurs à mémoire partagée, et SCALAPACK (SCalable LAPACK) pour les systèmes à mémoire distribuée tels les clusters. Ces bibliothèques fournissent des fonctions très performantes pour le traitement des opérations coûteuses en temps de calcul, comme par exemple les multiplications matricielles ou encore les inversions de matrices, grâce à une attention portée à la fois sur le choix de méthodes numériques performantes, sur l'optimisation des lignes de code, et sur le parallélisme. Ces bibliothèques ne sont cependant pas d'une grande utilité dans un code explicite tel que celui développé dans ce travail, car toutes les opérations portant sur des matrices sont de type terme à terme.

2.3.3 Exemples d'utilisation de MPI

On peut définir deux cas de figure qui amènent à paralléliser un code :

- l'accélération d'un calcul nécessitant peu de mémoire
- la possibilité d'effectuer un calcul à grande mémoire

En pratique, on recherche souvent les deux objectifs, à la fois celui d'augmenter la mémoire disponible, et celui d'accélérer le calcul.

Accélération d'un calcul petite mémoire

L'interface *MPI* propose des fonctions pré-programmées d'opérations sur des matrices réparties. Cette famille de fonctions inclue des opérations mathématiques telles les opérations arithmétiques élémentaires et la localisation de maxima et de minima (*MPI_REDUCE*), mais aussi des fonctions de distribution et de centralisation de données matricielles (*MPI_SCAT-TER, MPI_GATHER*). Ces dernières sont construites sur le principe que chaque processus déclare la même grande matrice bien qu'il ne travaille que sur une portion de celle-ci. Ainsi cette approche ne permet pas de répartir la mémoire nécéssaire sur les multiples processus : chacun doit allouer la mémoire correspondant à la matrice en entier.

La figure 2.15 illustre la répartition d'une matrice lors d'un calcul de ce type : chaque processus alloue le domaine entier mais ne traite que la partie grisée.



FIG. 2.15 – Accélération du traitement d'une matrice : fonctions MPI préexistantes. La matrice entière est allouée par chaque processus.

Passage d'un calcul grande mémoire

Lorsque l'on désire travailler avec des matrices de grandes dimensions, l'approche précédente est peu satisfaisante car la limite en mémoire allouable n'est pas affectée par le nombre total de processus. Au contraire, elle ne dépend que des caractéristiques de chaque nœud de calcul. Il est possible d'effectuer des calculs nécessitant plus de mémoire que ce dont dispose chaque processus, mais à condition de découper soi-même la matrice, et de construire les opérateurs mathématiques de manière parallèle à partir de fonctions élémentaires de MPI.

La figure 2.16 illustre la répartition d'une matrice lors d'un calcul de ce type.



FIG. 2.16 – Parallélisme manuel grâce aux fonctions élémentaires de transfert : chaque processus ne reçoit qu'une partie de la matrice à traiter.

En pratique, on a souvent envie de cumuler les deux avantages, à la fois de vitesse accrue et

aussi de traitement de grandes matrices. Il faut alors se tourner vers la deuxième approche.

2.3.4 Application à CURVESIA

Le principe de calcul adopté dans ce travail est de répartir le domaine initial de simulation sur plusieurs processeurs ou *nœuds* qui en calculent chacun une petite partie. C'est une approche de programmation de type *SPMD / SIMD* ou *Single Program-Multiple Data / Single Instruction-Multiple Data*, c'est-à-dire qu'on applique le même programme à plusieurs paquets de données.

L'utilisation de maillages structurés facilite grandement le découpage du domaine de simulation en vue de la parallélisation du code. En effet, il est facile de le découper suivant les lignes ou les colonnes du maillage pour obtenir des sous-domaines sous forme de matrices bloc. La présence des dérivées spatiales rend obligatoire un flux d'informations aux frontières de chaque sous-domaine. On peut donc écrire une procédure générique de communication dont le rôle est d'envoyer et de recevoir toute l'information nécessaire sur une frontière. Il suffit ensuite d'appeler cette procédure sur les bonnes frontières de telle sorte à s'assurer que le calcul des dérivées spatiales se fasse toujours sur les variables mises à jour. La figure 2.17 montre l'exemple d'un point P sur la frontière du domaine 1, auquel on veut calculer la dérivée spatiale d'un champ scalaire S suivant la direction x, avec des différences finies sur onze points. On constate que le processus consacré au domaine 1 doit connaître les



FIG. 2.17 – Communication entre deux sous-domaines.

valeurs de *S* aux 5 points en gris qui ne sont pas dans son domaine. Ces cinq valeurs doivent donc lui être fournies par le processus du domaine 2. La réciproque est également vraie : le domaine 1 doit fournir cinq valeurs au domaine 2 pour permettre le calcul d'un point de la frontière du domaine 2. Ainsi la communication laisse inchangée la précision de résolution du schéma, car le schéma sur onze points est utilisé jusqu'aux frontières des domaines, et de plus la structure des boucles de programmation est simplifiée car il n'est plus nécessaire de décentrer progressivement les schémas à proximité des frontières.

Il est facile de chiffrer approximativement les quantités d'information à transmettre aux

frontières entre les sous-domaines. En se basant sur les différences finies sur onze points utilisées dans *CURVESIA*, chaque point d'une frontière nécessite la transmission et la réception des cinq variables physiques (en 3-D) sur cinq points de profondeur dans la direction perpendiculaire à la frontière, la direction *x* sur la figure 2.17 par exemple, soit 50 valeurs pour chaque point de la frontière. Imaginons que nous voulions simuler un domaine parallélépipédique mesurant $300 \times 100 \times 50$ points, et que nous disposions de deux processeurs. Dans ce cas nous choisirions de couper le domaine en deux suivant la première direction, c'est-à-dire la plus longue, pour obtenir la surface de communication minimale de $100 \times 50 = 5000$ points. Pour cette frontière de 5000 points, il faut transmettre à chaque itération $100_{points} \times 50_{points} \times 50_{valeurs} \times 64_{bits double-précision} \times 6_{sous-itérations}$ bits d'information au moins, soit environ 12 megaoctets. Ce sont donc de grosses quantités d'information qu'il faut transmettre, et leur envoi et réception sur un réseau classique de type ethernet peut donc prendre une durée non-négligeable par rapport au temps de calcul nécessaire pour chaque domaine, si celui-ci possède beaucoup de frontières par rapport à la taille de son domaine intérieur.

Des tests partiels de performance ont été effectués, mais les comparaisons ne sont pas exhaustives. Pour ces tests, on a utilisé le code de simulation d'un écoulement autour d'un profil d'aile, présenté au paragraphe 3.2. Des tests de un à sept processeurs ont été faits sur la machine parallèle locale (un cluster de biprocesseurs de type opteron), et des tests de un à vingt-six processeurs sur le cluster *nickel* du CEA (Compaq Alpha server de noeuds quadriprocesseurs de type EV68). De plus, les tests effectués sur moins de onze processeurs n'ont été parallélisés que dans la direction ξ décrivant le périmètre du profil d'aile, alors que les calculs effectués au CEA ont été parallélisés à la fois dans la direction périmétrique et la direction radiale. Ces derniers calculs sont donc doublement pénalisés en termes de communication, car le rapport (*nombre de points à transférer*)/(*nombre de points intérieurs*) est plus grand que pour les premiers calculs, et de plus le nombre d'appels aux fonctions de transfert est plus élevé. Cependant le réseau du cluster local est bâti autour d'un réseau de type ethernet tranditionnel, alors que le serveur de calcul du CEA repose sur un réseau rapide dédié, ce qui rend la comparaison effectuée au CEA favorable.

Idéalement, l'accélération apportée serait parfaitement linéaire, et la vitesse d'exécution sur *n* processeurs serait *n* fois celle sur un processeur. La réalité n'est malheureusement que très rarement idéale, et l'accélération obtenue est inférieure au facteur *n* à cause du temps de communication entre les processus. Or le temps de communication dépend fortement de la géométrie du domaine simulé ainsi que du découpage de ce domaine, donc ces valeurs sont à prendre à titre indicatif.

La figure 2.3.4 donne une illustration de l'accélération que l'on obtient grâce à la parallélisation mise en œuvre dans CURVESIA. L'accélération réelle y est comparée à l'accélération théorique maximale qu'on peut espérer, qui est égale directement au nombre de processeurs mis en jeu. Cette courbe est issue de calculs effectués sur le calculateur du CEA, et on observe que sur cette machine à réseau de communication dédié, la parallélisation ne coûte que très peu en temps de communication, sur le nombre relativement modeste de processeurs utilisé



FIG. 2.18 – Accélération permise par le calcul parallèle.

– accélération théorique maximale, + - - + accélération obtenue par le code CURVESIA , sur le serveur de calcul du CEA.

dans cette étude.

3 Rayonnement acoustique d'un cylindre et d'un profil

3.1 Écoulement laminaire autour d'un cylindre

De par sa géométrie simple, le cylindre dans un écoulement constitue un cas test à la fois sans difficultés majeures concernant le maillage, et exigeant en ce qui concerne la qualité des résultats aérodynamiques et acoustiques obtenus. De nombreuses quantités, telles le coefficient de pression à la surface du cylindre, les coefficients de traînée et de portance, la fréquence de l'échappement tourbillonnaire, peuvent être calculés pour vérifier la fidé-lité de la simulation numérique. A ce titre la simulation du niveau acoustique rayonné par un cylindre dans un écoulement a fait l'objet d'un cas test de workshop en 1996 [1]. Il existe beaucoup de littérature sur le cylindre, aussi bien sur des travaux expérimentaux que numériques. La revue de Williamson [127] est très complète dans ce domaine. Notons cependant que la grande majorité des simulations numériques concerne des cylindres à des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés que celui examiné ici. Le choix d'un cylindre à faible nombre de Reynolds a été fait pour préserver la pertinence d'une simulation en deux dimensions.

3.1.1 Maillage

Un maillage de type "O" est choisi pour sa relative simplicité de mise en œuvre. Ce maillage est obtenu à partir du maillage rectangulaire de départ en le courbant de telle sorte que les deux côtés courts du rectangle d'origine se superposent, voir le schéma de la figure 3.1.

Il s'agit en fait d'un maillage cylindrique, mais utilisé sans cette hypothèse (simplificatrice en ce qui concerne les équations) lors de la simulation. La figure 3.3 illustre la technique adoptée pour le traitement de la condition de 2π -périodicité dans la direction azimutale autour du cylindre. Formellement il suffirait d'imposer que les valeurs des variables sur les côtés A et C du rectangle de la figure 3.1 soient identiques. Cependant ceci obligerait de changer de schéma numérique proche de cette frontière pour que la molécule de calcul reste dans les limites du maillage, ce qui nuirait à la précision de la simulation dans cette zone.



FIG. 3.1 – Transformation géométrique donnant un maillage cylindrique



FIG. 3.2 – Coordonnées curvilignes / cylindriques

Pour éviter cette dégradation, la condition de périodicité est appliquée sur cinq points de chaque côté de la frontière, comme le montre la figure 3.3. Ainsi les variables des cinq premiers et cinq derniers points dans la direction azimuthale, correspondant aux zones E et H de la figure 3.3, ne sont réellement calculées mais simplement recopiées depuis respectivement les zones G et F. Cela permet d'utiliser le schéma numérique centré sur onze points sur toute la circonférence du cylindre. Ce maillage du cylindre possède plusieurs propriétés intéressantes.

D'abord, du fait de l'orthogonalité du maillage ainsi que de sa symétrie de révolution, les conditions aux limites sont facilement écrites. En effet le centre du cylindre convient parfaitement comme point d'origine de bruit dans la formulation de Tam et Dong (voir l'équation 1.7); la distance entre ce point source et la frontière est constante sur toute la périphérie du domaine. De plus la direction du point source est directement donnée par la direction radiale du maillage, ce qui facilite la projection de la vitesse sur les directions u_r et u_{θ} .




3.1.2 Écoulement de Reynolds 200 autour d'un cylindre.

Un cylindre de diamètre $D = 3 \times 10^{-5}$ m est placé dans un écoulement de nombre de Mach M=0.3. Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre est alors de 204. Il s'agit de l'état dit de transition dans le sillage, par opposition aux états de transition dans la couche limite pour des nombres de Reynolds plus élévés, ou du sillage laminaire pour les nombres de Reynolds plus bas.

Le pas de maillage radial proche de la paroi est fixé après essais à $\delta r = 2.5 \times 10^{-7}$ m, pour s'assurer d'un minimum de 5 points dans la couche limite autour du cylindre tout en minimisant le nombre de points nécessaires à la simulation et donc le temps de calcul. Le pas de temps résultant de la plus petite maille, avec un CFL de 0.9, vaut 2.11×10^{-10} s.

Le choix du nombre de Reynolds a été fait à la suite d'une lecture préliminaire sur le cylindre. Il s'est avéré par la suite que ce nombre de Reynolds n'est pas parfaitement adapté à une première comparaison simulation-expérience car il se trouve dans la zone de transition entre un écoulement 2-D et un écoulement 3-D. De plus cette transition présente expérimentalement un phénomène d'hystérisis sur le nombre de Reynolds de la transition. Cette zone de transition implique des changements rapides du nombre de Strouhal et du coefficient de pression à l'aval du cylindre en fonction du nombre de Reynolds.

Validations des grandeurs caractéristiques de l'écoulement

On souhaite utiliser le cas test de l'écoulement autour d'un cylindre pour valider autant que possible le bon fonctionnement du code vis-à-vis de la mécanique des fluides. Pour ce faire, on effectue autant de comparaisons que possible entre les grandeurs mesurées dans les expériences et celles obtenues par la simulation. On peut séparer les grandeurs de comparaison en une catégorie de paramètres instationnaires, tel par exemple la fréquence du lâcher de tourbillons, et une catégorie de paramètres stationnaires, dont font partie toutes les grandeurs moyennes liées à l'écoulement. Les simulations stationnaires de type RANS ne fournissent que cette dernière catégorie de paramètres, mais à l'inverse les calculs instationnaires du type de ceux développés dans ce travail, ne simulent que des valeurs instantanées. Ainsi les valeurs moyennes obtenues dans ces simulations sont calculées en moyennant un grand nombre de champs instantanés, et doivent être de bons indicateurs de la qualité du calcul.

Le nombre de Strouhal du lâcher tourbillonnaire obtenu dans le calcul est d'environ St \simeq 0.21. La valeur du Strouhal est à la limite haute de la fourchette des valeurs experimentales, comme le montre la figure 3.4, issue du livre de Zdravkovich [128]. Il est à noter que cette fourchette est plus large que pour des configurations à nombres de Reynolds plus élévés. En effet à Re_D = 204 on se trouve encore dans le domaine de croissance quasi-linéaire du Strouhal avec le nombre de Reynolds, zone de croissance qui se termine aux alentours de Re_D = 1000 avec St \simeq 0.21.

L'angle de décollement maximal, défini comme l'angle maximal ou la vorticité change de signe au cours d'une période du lâcher, est également conforme aux valeurs expérimentales :



FIG. 3.4 – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds. D'après Zdravkovich [128].

Mesures de l'UTIA, Roshko, Kovsznay, Relf, Hiebtone et Strouhal.

ici $\theta \approx 75^{\circ}$.

La courbe de pression C_p est comparée sur la figure 3.5 aux mesures de Thom (1933) pour des nombres de Reynolds de 174 et de 250 respectivement. Le coefficient de pression C_p est donné par :

$$C_p = \frac{p_{cyl} - p_0}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2}$$

Les profils de la vitesse moyenne vérifient la théorie développée par Schlichting (1930) pour les sillages laminaires. Le déficit de vitesse, tracé en fonction de la coordonnée tranverse adimensionnée sur la figure 3.6, présente une bonne similarité dans la direction de l'écoulement, sur une distance variant d'environ un rayon derrière le cylindre jusqu'à plus de 25 rayons derrière celui-ci. Le déficit de vitesse est adimensionné par sa valeur maximale au centre du sillage. Le terme $b_{1/2}$ est la distance transverse pour laquelle le déficit de vitesse est réduit de moitié par rapport à son maximum. La courbe continue est la courbe théorique issue de la solution autosimilaire du sillage plan lointain. Enfin l'écartement des tourbillons est conforme aux données expérimentales présentées sur la figure 3.7 : le carré solide à $\text{Re}_D = 204$ montre la valeur trouvée dans nos simulations. La distance *a* est celle séparant deux tourbillons au même moment de phase dans le lâcher tourbillonnaire. Sur la figure 3.8 suivante montrant le champ de vorticité, on voit nettement l'allée de Von Kármán créée dans le sillage du cylindre. La figure 3.9 suivante montre les fluctuations de pression autour du cylindre. Le caractère dipôlaire du rayonnement y est nettement visible, ainsi que la grande compacité acoustique de la source.

On peut également remarquer le rapprochement des fronts d'onde à l'amont du cylindre et



FIG. 3.5 – Coefficient de pression C_p en fonction de la position angulaire θ autour du cylindre. D'après Thom (1933) dans [128]. \star mesures à Re_D=174, • mesures à Re_D=250,



FIG. 3.6 – Déficit de vitesse en fonction de la distance transverse adimensionnelle • simulation numérique, — solution autosimilaire $f(\eta) = \exp(-\ln(2)\eta^2)$ avec $\eta = y/b_{1/2}$



FIG. 3.7 – Écartement des tourbillons en fonction du nombre de Reynolds [128], simulation numérique à $\text{Re}_D = 204$.

leur étirement à l'arrière de celui-ci, dûs à l'effet Doppler dont l'intensité est relativement importante pour le nombre de Mach considéré ici, soit M=0.3.



FIG. 3.8 – Ecoulement bidimensionnel autour d'un cylindre à $\text{Re}_D = 204$. Vue instantanée du champ de vorticité.



FIG. 3.9 – Vue instantanée du champ de pression rayonné par un cylindre à Re_D =204.

3.1.3 Écoulement autour d'un cylindre à un nombre de Reynolds de 150

Suite à une meilleure connaissance de la dynamique du sillage d'un cylindre dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, des simulations ont été refaites à un nombre de Reynolds de 150. Ce choix de nombre de Reynolds permet en effet de se placer de manière sûre endessous du seuil d'apparition des premiers effets tri-dimensionnels dans le sillage [129].

Les résultats provenant d'expériences faites en dessous du nombre de Reynolds seuil montrent une dispersion très faible des grandeurs aérodynamiques mesurées. Cette faible dispersion devrait permettre une évaluation plus précise du comportement du code de simulation. On choisit donc de simuler un cylindre de rayon $r = 1.0 \times 10^{-5}$ m, dans un écoulement de nombre de Mach M= 0.33, ce qui fournit le nombre de Reynolds désiré de Re_D = 150. L'illustration des données expérimentales et numériques [126, 80, 62, 34, 129, 113, 44, 86, 57, 89] plus regroupées est faite sur la figure 3.10 traçant l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds. On y montre également des résultats issus d'autres simulations numériques récentes. Ces résultats proviennent de la compilation effectuée par Posdziech et Grundmann [89].

On met en évidence le bon accord entre la valeur mesurée dans ce travail, soit St $\simeq 0.182$, et les valeurs observées expérimentalement. Nous retrouvons également un bon accord avec des travaux numériques précédents concernant la valeur du coefficient de traînée *Cd*, présenté sur la figure 3.11.

Une vérification de l'indépendance des résultats par rapport au maillage a été faite. Pour cela, le même cylindre a été simulé en faisant varier le pas radial du maillage. Les résultats ont été comparés grâce au coefficient de portance, qui est assez représentatif du rayonnement acoustique pour ce cas, et qui présente l'intérêt de converger plus rapidement que le signal acoustique loin du cylindre. Les résultats montrent une bonne indépendance par rapport à ce paramètre. En effet, entre une valeur du pas radial de $\delta r = 1 \times 10^{-6}$ et une valeur de $\delta r = 5 \times 10^{-8}$, correspondant respectivement à environ trois points et soixante points dans la couche limite peu après le point de stagnation, la valeur du coefficient de traînée ne varie que de deux pour cent. En deça de 3 points dans la couche limite, le calcul a tendance à diverger dans la zone du point de stagnation.





Résultats expérimentaux :

+ Williamson (1989), · · · · · Norberg (1994), – – – Leweke et Provansal (1995), – · – · Fey (1998),

Résultats numériques :

▷ Zhang *et al* (1995), □ Thompson *et al* (1996), — Henderson (1997), ○ Persillon et Braza (1998), △ Kravchenko *et al* (1999), ● Posdziech et Grundmann (2001), ■ travail présenté ici à $\text{Re}_D = 150$



FIG. 3.11 – Évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds dans le régime 2-D. Résultats numériques : — Henderson (1995), \triangleright Zhang *et al* (1995), \Box Thompson *et al* (1996), \circ Persillon et Braza (1998), \triangle Kravchenko *et al* (1999), \bullet Posdziech et Grundmann (2001), \blacksquare travail présenté ici à Re_D = 150

La figure 3.12 montre le champ instantané de pression sur tout le domaine de calcul. Le domaine de calcul étant plus grand sur la simulation à Re_D =204, on remarque plus nettement la compression et l'étirement des fronts d'onde correspondant à l'effet Doppler.

Enfin la figure 3.13, sur laquelle sont superposées des trajectoires de particules au champ de vorticité, illustre la forte déviation des particules par les tourbillons dans le sillage.



FIG. 3.12 – Vue instantanée du champ de pression rayonné par un cylindre à un nombre de Reynolds de 150.



FIG. 3.13 – Visualisation des trajectoires de particules lâchées uniformément en amont du cylindre, superposées au champ de vorticité. Écoulement à un nombre de Reynolds de 150.

Difficultés liées à la résolution temporelle explicite

La simulation du cylindre à un faible nombre de Reynolds connaît une période transitoire très longue. Cette période se caractérise par un sillage symétrique parfaitement stable, ressemblant à un sillage laminaire. Les conditions d'initialisation étant parfaitement symétriques, il faut en effet attendre que la couche limite et le sillage se déstabilisent naturellement. Pour cette configuration de cylindre, et avec un CFL de 0.9, il faut attendre environ 100000 itérations pour que la déstabilisation soit complète et que l'allée de Von Kármán soit établie.

Une condition initiale asymétrique a été testée pour tenter de raccourcir la période transitoire. Différentes méthodes ont été utilisées pour détruire la symétrie de l'écoulement, comme par exemple des profils de vitesse à la paroi différents pour les moitiés supérieures et inférieures du cylindre, ou une condition de paroi visqueuse sur une moitié et nonvisqueuse sur l'autre.



FIG. 3.14 - Vue instantanée de vorticité pendant la phase de transition accélérée

La figure 3.14 montre la vorticité autour du cylindre après seulement 12000 itérations d'une simulation dont les conditions initiales ne sont pas symétriques. Le sillage est déja clairement déstabilisé, alors qu'après le même nombre d'itérations une simulation initialisée de manière symétrique est encore parfaitement stable. Ainsi le temps de déstabilisation est fortment réduit. Cependant l'écoulement moyen se symétrise très lentement, et il faut attendre plusieurs dizaines de milliers d'itérations avant d'obtenir un comportement moyen parfaitement symétrique. Au final le temps gagné dans la phase de déstabilisation est reperdu dans la phase de convergence de l'écoulement moyen : cette approche n'est donc pas intéressante, du moins aux faibles nombres de Reynolds étudiés ici.

Un deuxième problème intrinsèque au maillage cylindrique autour du cylindre est l'agrandissement des mailles avec l'éloignement radial. La résolution du sillage derrière le cylindre est donc progressivement détériorée, avec une dégradation directement liée au pas azimutal $d\theta$.

Une technique qui a été étudiée durant ce travail pour réduire cet effet est d'étirer le maillage dans la direction azimutale. Ceci permet de reserrer le maillage dans la zone du sillage, et ainsi d'obtenir une meilleure résolution de celui-ci.

3.1.4 Effets de la température

Dans les calculs initiaux de propagation et de diffraction acoustiques, ainsi que dans les calculs précédents autour d'un cylindre, les effets de la température n'avaient pas encore été pris en compte : les flux de chaleur n'étaient pas calculés et la variation de μ avec la température était négligée. Par la suite, il a été jugé utile de compléter le code avec ces deux aspects, même si pour les configurations utilisées jusqu'à présent, ces aspects devraient avoir des effets faibles.

Ainsi la température, calculée avec la loi des gaz parfaits, est utilisée pour calculer les flux de chaleur selon la loi de Fourier $\mathbf{q} = -(\mu c_p/\sigma)\nabla T$, et la valeur de la viscosité moléculaire μ est déterminée par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_s \left(\frac{T}{T_s}\right)^{1.5} \frac{T_s + T_c}{T + T_c}$$

où T_c vaut 110.4 pour l'air, et μ_s est la valeur de μ à la température T_s . On prend en général $T_s = 273.15$, et la valeur de μ_s correspondante est 1.71 kg.m⁻¹.s⁻¹

Il n'a pas été fait de validation quantitative concernant la prise en compte de la température dans CURVESIA . Par contre, des simulations de configurations particulières ont été faites, permettant de visualiser quelques effets qualitatifs.

Le premier calcul prend les mêmes paramètres que le cylindre du paragraphe 3.1.3 : un cylindre de rayon r= 1.0×10^{-5} m dans un écoulement de nombre de Mach M= 0.33. A ces conditions initiales il faut maintenant préciser la température du fluide dans l'écoulement amont, qui est de $T_{\infty} = 300$ K. Le cylindre quant à lui est chauffé, c'est-à-dire que la température à sa surface est imposée : il s'agit donc d'une paroi traitée de manière isotherme.

La figure 3.15 montre le champ de pression fluctuante autour d'un cylindre dont la moitié inférieure est maintenue à la température T_{∞} alors que la moitité supérieure est chauffée cycliquement, à une fréquence temporelle égale à celle du lâcher de tourbillons dans le sillage. L'amplitude des oscillations de température à la surface du cylindre est de 100K. On observe que le rayonnement est fortement modifié par le chauffage cyclique, sans pour autant que le niveau global des fluctuations soit notablement modifié. Il est intéressant de remarquer que le rayonnement est devenu quasiment monopôlaire : le déphasage de π présent habituellement dans le rayonnement d'un cylindre est absent ici.

La figure 3.16 donne un autre exemple de rayonnement modifié par le même procédé de chauffage cyclique de la paroi, avec un déphasage différent entre le signal de température et le signal de pression à la paroi. On y voit que le rayonnement est principalement orienté vers le bas, c'est-à-dire vers le côté de la paroi non-chauffée, et à nouveau sans augmentation du niveau du rayonnement. Le chauffage de la paroi semble donc pouvoir atténuer le rayonnement. Des tests plus détaillés de l'effet d'un chauffage parietal n'ont pas été effectués dans le cadre de ce travail, mais il semble que l'on puisse jouer avec ce phénomène pour modifier sensiblement le rayonnement acoustique.



FIG. 3.15 – Champ de pression autour d'un cylindre partiellement chauffé, à un nombre de Reynolds de 150.



FIG. 3.16 – Champ de pression autour d'un cylindre partiellement chauffé, à un nombre de Reynolds de 150.

3.2 Étude du bruit rayonné par un profil d'aile dans un écoulement

Le bruit de profil est présent dans de nombreux domaines industriels. Il constitue souvent une gêne acoustique, comme dans les cas du bruit de ventilateur ou du bruit aérodynamique des avions pendant les phases de décollage et surtout d'attérissage. Il peut également engendrer des risques mécaniques du fait des vibrations qu'il peut occasionner.

La simulation numérique directe du bruit rayonné par un profil dans un écoulement amenera une meilleure compréhension des différents mécanismes responsables du bruit, et permettra à terme d'étudier des techniques de réduction de celui-ci.

Le bruit de profil est composé de plusieurs phénomènes différents. Lorsque l'écoulement en amont du profil est turbulent, la vorticité peut interagir avec le bord d'attaque et les gradients de vitesse autour du profil en emettant des ondes acoustiques [3, 8, 28]. Le bord de fuite est également source de bruit lorsque l'écoulement qui le traverse est instable ou turbulent [4, 50]. Bien qu'il ait été beaucoup étudié, le bruit de bord de fuite reste relativement mal-compris, et fait encore l'objet de travaux expérimentaux, théoriques et numériques.

L'étude dans le cadre de ce travail d'un profil NACA 0012 à un nombre de Reynolds de 500,000 présente des difficultés supplémentaires par rapport au cas du cylindre dévelopé au paragraphe 3.1. Le maillage est plus compliqué à mettre en œuvre, à cause de la courbure non-constante de la surface du profil, mais surtout de la présence de l'angle vif que constitue le bord de fuite. De plus le nombre de Reynolds visé dans le cadre de cette étude est nettement plus élévé que celui pris pour les calculs autour du cylindre, et les couches limites autour du profil, ainsi que le sillage de celui-ci, devraient atteindre un état turbulent. De ce fait, le maillage comporte un grand nombre de points, les mailles proches de la paroi sont de petite taille, et le pas de temps est par conséquent lui aussi petit. Malgré la parallélisation du calcul, le temps de calcul reste très long.

3.2.1 Les familles de profils

Bien que le phénomène de portance d'une plaque plane ait été découvert pendant la première moitié du 19^e siècle, il a fallu attendre la fin de ce même siècle pour apprendre que la portance d'un objet dépend de sa forme et particulièrement de sa courbure. H.F. Phillips a été un des premiers à faire des études quantitatives de différentes formes de profils, à l'aide d'une des toutes premières souffleries, dans les années 1880. A titre anecdotique, la figure 3.17 montre des formes de profils brevetés par Phillips en 1884.

Il existe aujourd'hui plusieurs types de profils d'aile, qui se différencient essentiellement par la manière de définir leur géométrie. Les profils les plus simples sont définis à l'aide d'une



FIG. 3.17 – Les premiers profils à être brevetés par H.F. Phillips en 1884

fonction analytique. Parmi ceux-ci, citons d'abord les profils de Joukowski, définis par une transformation conforme du type :

$$z' = z + \frac{\lambda^2}{z}, \quad z = x + \mathrm{i}\,y$$

appliquée à un cercle. La position du centre du cercle et son rayon par rapport au paramètre λ font varier la cambrure et la finesse du profil obtenu; des détails complémentaires sont donnés en annexe B. Les profils d'aile de type NACA (National Advisory Committee for Aeronautics, prédécesseur de la NASA) à quatre chiffres sont également définis de façon analytique, et sont peut-être les profils les plus utilisés dans les études académiques. Leur formulation a été développée par Eastman Jacobs dans les années 1930, et repose sur des paramètres géométriques souhaités tels la cambrure, la position le long de la corde de la cambrure maximale, et l'épaisseur relative maximale.

Il existe également d'autres familles NACA, développées ultérieurement pour obtenir des profils aux performances aérodynamiques accrues sous des conditions d'utilisation spécifiques. Les profils NACA à 5 chiffres ne diffèrent de leurs frères à quatre chiffres que par la forme de la courbure. La famille de profils laminaires constitue réellement une rupture, puisque la géométrie n'est pas posée a priori, mais calculée à partir d'une distribution de pression que l'on souhaite approcher. Ces profils étaient les premiers à être conçus pour maximiser la zone de couche limite laminaire. Les annexes 1 et 2 donnent plus de détails sur la construction de ces différentes familles de profils.

Les différentes familles génériques de profil ont progressivement disparu dans les applications industrielles, la puissance de calcul des ordinateurs ainsi que la qualité des méthodes inverses disponibles aujourd'hui permettant à chacun de dessiner un profil optimisé pour ses conditions d'utilisation précises. Cependant l'étude des profils d'une famille NACA reste d'actualité, car elle permet l'examen précis des mécanismes mis en jeu dans l'écoulement autour d'un profil.

3.2.2 Maillage du profil

A l'inverse du cylindre, l'airfoil possède un point anguleux au niveau du bord de fuite. La prise en compte de celui-ci introduit des difficultés supplémentaires pour la simulation numérique.

En amont du bord de fuite, il faut calculer une condition de paroi et plus précisément la dérivée de la vitesse normale à la paroi, alors qu'en aval il faut faire recoller les deux parties du maillage pour correctement traiter le sillage. Le calcul direct de la dérivée à la paroi demande un maillage orthogonal à celle-ci, mais la jonction des deux moitiés d'un tel maillage est alors difficile à effectuer.

Les deux méthodes envisagées pour mailler le bord de fuite sont illustrées dans les deux paragraphes suivants.

Dans tous les maillages créés autour d'un profil de type NACA 0012, les coefficients d'origine [52] sont modifiés de telle sorte que le bord de fuite soit fermé. Pour celà le dernier coefficient a_4 (voir l'annexe A) est modifié, et prend la valeur $a_4 = -0.1036$ au lieu de la valeur de -0.1015 définie à l'origine.

Maillage orthogonal avec interpolation

Un maillage orthogonal est créé autour de l'airfoil, et les deux extrêmités sont prolongées vers l'aval pour recouvrir la zone de sillage. Une zone de recouvrement des deux parties du maillage est ainsi créée, zone dans laquelle les points supérieurs et inférieurs ne sont pas confondus. Les points de la moitié inférieure du maillage (zone A de la figure 3.18) sont résolus jusqu'à la droite horizontale quittant le bord de fuite (droite y = 0), alors que les points de la moitié supérieure du maillage (zone B) sont résolus au-dessus de cette horizontale. Ensuite des zones ayant une hauteur de cinq points, en dessous et au-dessus de la horizontale appartenant respectivement à la moitié supérieure et la moitié inférieure du maillage, sont calculées en interpolant sur les points de maillage déja résolus, voir figure 3.19. Ces zones interpolées permettent d'utiliser le schéma sur onze points tout autour de l'airfoil. Il est important de noter que les zones d'interpolation se trouvent dans le sillage de l'airfoil, c'est-à-dire dans des zones de sources acoustiques potentielles. Il faut donc assurer une précision du même ordre pour l'interpolation et pour le schéma numérique employé.



FIG. 3.18 – Maillage orthogonal autour du bord de fuite d'un airfoil.



zone interpolée

FIG. 3.19 – Zone d'interpolation A de la partie haute du maillage autour d'un airfoil.

Maillage non-orthogonal

Il est possible de s'affranchir de l'interpolation à condition de pouvoir utiliser un maillage non-orthogonal à la paroi proche du bord de fuite, comme le montre la figure 3.20. Dans cette configuration les deux moitiés du maillage se superposent sur une bande de cinq



FIG. 3.20 – Maillage non-orthogonal autour du bord de fuite d'un airfoil.

points, un peu comme pour le cylindre, à la différence près que pour l'airfoil il s'agit d'un maillage de type "C" alors que pour le cylindre il s'agissait d'un maillage de type "O". En effet dans le cas du cylindre, la jonction du maillage se fait sur deux bords entiers, alors que pour l'airfoil ainsi maillé, la jonction se fait sur deux parties d'un unique bord, comme le montre la figure 3.21.



FIG. 3.21 – Maillages type "O" et type "C".

Les avantages de cette approche sont multiples. La précision de la simulation dans la zone du sillage est mieux connue car elle ne dépend plus d'une opération d'interpolation. La qualité des résultats est ainsi plus facilement maîtrisée. De plus le temps de calcul est considérablement réduit par la suppression de l'interpolation, coûteuse en opérations. Enfin le maillage lui-même est plus facile à construire qu'un maillage orthogonal car ses propriétés géométriques s'expriment aisément. Cependant le calcul d'une condition de paroi explicite sur un maillage non-orthogonal à celle-ci est légèrement plus coûteux à mettre en œuvre que dans le cas orthogonal. Ce dernier point était d'importance pour les calculs bidimensionnels autour de l'airfoil, car une condition de paroi explicite, décrite au paragraphe 1.2.5 et plus particulièrement le système d'équations 1.9 y était mise en œuvre. En ce qui concerne les calculs tridimensionnels, la condition décrite à la fin du paragraphe 1.2.5 est utilisée, ce qui n'engendre aucun surcoût pour un maillage non-orthogonal à la paroi.

3.2.3 Résultats des calculs préliminaires 2-D

Le caractère 2-D des premières simulations limite leur pertinence à des configurations où l'écoulement reste relativement laminaire, et par conséquent où le nombre de Reynolds reste bas, comme cela a déjà été indiqué à propos du cylindre. Cependant l'expression *nombre de Reynolds très bas* n'a pas le même sens pour le cylindre et pour l'airfoil : compte tenu de l'échelle de longueur de référence utilisée, l'écoulement autour d'un profil reste laminaire à des nombres de Reynolds beaucoup plus élévés qu'autour d'un cylindre.

La première configuration a donc été un profil NACA0012 d'une corde de 5 mm plongé dans un écoulement de 100 m/s, ce qui fournit un nombre de Reynolds Re_c \approx 33000 très bas pour un profil. Le profil NACA0012 a été choisi car il semble être le plus étudié d'un point de vue expérimental, bien qu'il ne possède pas de portance intrinsèque et ne soit donc pas d'un grand intérêt pour les applications industrielles. Le maillage est non-orthogonal près du bord de fuite, pour permettre aux moitiés supérieure et inférieure du maillage de communiquer sans avoir recours à un procédé d'interpolation. Un soin tout particulier est pris pour minimiser les variations trop brutales dans les termes de la matrice jacobienne au voisinage du bord de fuite. Cela permet en effet d'assurer des variations continues des dérivées de trois des quatre termes de la matrice ; seul le terme $\partial \eta / \partial x$ connaît nécessairement une cassure de pente en traversant le bord de fuite suivant la direction ζ .

Le maillage autour du profil est constitué de 1021 points autour de la périphérie et 220 points dans la direction radiale. Sur ces 1021 points périphériques, 320 sont contenus dans la zone de sillage. Le pas radial de maillage à la paroi est de 2.5×10^{-6} m, ce qui correspond à environ 50 points dans la couche limite proche du bord de fuite. Cette discrétisation peut paraître importante, mais elle est due à l'épaississement progressif de la couche limite depuis le bord d'attaque, et au fait qu'il faut un nombre minimum de points, de l'ordre de 6, dans la couche limite à l'amont. La qualité du maillage s'avère cruciale lorsque des schémas de grande taille sont utilisés. Le critère de qualité est, comme mentionné ci-dessus, la continuité des quatre dérivées partielles composant la matrice jacobienne par rapport à ξ et à η .

La figure 3.22 montre le champ de pression instantané autour du profil d'aile, obtenu après une période transitoire de 500,000 itérations. Cette période transitoire est nettement plus longue que ce qui est nécessaire pour faire converger les champs moyens, et elle a été considérée pour deux raisons : d'abord pour s'assurer que la simulation reste stable sur une longue période, ce qui est bien le cas, et ensuite parce que en deux dimensions, le calcul ne prend pas un temps déraisonnable. On observe de fortes fluctuations de pression aérodynamique liées aux allées de von Kármán laminaires dans le sillage du profil, ainsi qu'un rayonnment acoustique périodique provenant de la zone du bord de fuite. La forte périodicité du rayonnement reflète le bas nombre de associé à cette simulation. Ce rayonnement est dirigé majoritairement vers l'amont, avec une directivité maximale autour de 70° par rapport à la direction amont. Il est fortement dipôlaire, comme attendu vu la géométrie. La longueur d'onde des fluctuations acoustiques est d'environ un quart de la corde. Sur la figure



FIG. 3.22 – Champ de pression instantané autour d'un profil NACA 0012 de Re_c = 33000 et $M_{\infty} = 0.29$. L'échelle de couleurs est comprise entre -30 et 30 Pa.

de pression, on constate que les oscillations dans le sillage disparaissent brusquement aux alentours d'une corde en aval du bord de fuite. Ce changement correspond au début de la zone éponge, et le sillage n'est donc pas contenu en entier dans le domaine de simulation, à l'inverse des simulations effectuées autour d'un cylindre. La figure 3.23 montre la vorticité autour du profil d'aile et dans la zone de sillage proche du bord de fuite. On peut y remarquer la très forte ressemblance avec le sillage derrière un cylindre à bas nombre de Reynolds.



FIG. 3.23 – Champ de vorticité instantanée autour d'un profil NACA 0012 à $\text{Re}_c = 33000$ et $M_{\infty} = 0.29$. L'échelle de couleurs est comprise entre -5×10^5 et 5×10^5 .

3.3 Simulation d'un profil 3-D

3.3.1 Éléments préliminaires

Notre objectif est d'effectuer une simulation complète d'un profil 3-D invariant dans la troisième direction, sur lequel se développe un écoulement initialement laminaire qui transitionne vers une couche limite turbulente. La figure 3.24 schématise les différents phénomènes rencontrés dans l'écoulement autour d'un airfoil.



FIG. 3.24 – Développement de l'écoulement autour d'un profil d'aile (image de la NASA)

Travaux numériques précédents

Il existe peu d'études numériques instationnaires d'écoulements autour de profils d'aile à des nombres de Reynolds comparables. On peut citer les travaux de Wang, qui étudie d'abord des profils NACA 0012 à bas nombre de Reynolds, légèrement inclinés [123]. Ses calculs sont effectués à un nombre de Reynolds de 10000, à l'aide d'un code DNS pour un écoulement incompressible en deux dimensions, et des résultats acoustiques en champ lointain sont obtenus grâce à l'équation de Lighthill en calculant le terme source à partir des champs aérodynamiques simulés. Par la suite, il étudie la zone de bord de fuite de l'écoulement se développant sur une plaque plane biseautée de manière asymétrique, à un nombre de Reynolds de Re_c = 2.15×10^6 . L'écoulement est turbulent à un tel nombre de Reynolds, et par conséquent les équations de fluide incompressible sont résolues en trois dimensions [124]. Le rayonnement acoustique en champ lointain est calculé avec une formulation intégrale de l'équation de Lighthill, en approximant la fonction de Green du profil par celle d'une plaque plane infiniment mince. Récemment, dans la même équipe des tentatives d'optimisation de forme ont été effectuées en résolvant les équations de Navier-Stokes pour un écoulement autour d'un profil d'aile bidimensionnel [70]. Dans cette approche, une équation de coût acoustique est formulée à partir de l'équation de Curle, basée sur la dérivée temporelle de

l'intégrale du tenseur du tenseur $p_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij}$. En supposant qu'une réduction de cette fonction de coût entraîne une réduction du bruit rayonné en champ lointain, il s'agit ensuite de calculer la sensibilité de cette fonction de coût à des variations de forme du profil d'aile, grâce à la résolution des équations de Navier Stokes.

Manoha *et al.* à l'ONERA ont également étudié numériquement les écoulements autour de profils d'aile. L'étude d'une demi-plaque plane par LES des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible a constitué leur premier cas d'étude [69]. Le champ acoustique résultant est calculé à l'aide de la formulation de Curle. Differentes géométries ont été par la suite simulées en trois dimensions en écoulement compressible : un profil NACA 0012 à un nombre de Reynolds de $\text{Re}_c = 2.86 \times 10^6$ et à 5° d'incidence [68] et un profil de type A [38] à un nombre de Reynolds de $\text{Re}_c = 2.1 \times 10^6$ et à 13° d'incidence [71, 72]. Le champ acoustique lointain a été calculé à l'aide de la formulation de Kirchhoff ou des équations d'Euler linéarisées.

Delfs *et al.* au DLR ont également effectué de nombreuses études de phénomènes nonvisqueux autour de profils d'aile. On peut citer leurs travaux sur l'interaction entre un tourbillon et le bord d'attaque d'une plaque plane mince [28], où le rayonnement résultant est calculé en champ lointain. Par la suite, des calculs tridimensionnels d'impact de tourbillon contre un profil d'aile de type Joukowski ont été faits [42], et plus récemment une approche similaire a été suivie pour étudier le bruit émis par un tourbillon traversant un bord de fuite [66]. Dans cette dernière simulation, le but est d'étudier l'effet du nombre de Mach et des non-linéarités sur le rayonnement acoustique. Le champ moyen est obtenu grâce à un calcul de type RANS, et l'acoustique est propagée avec des équations de perturbation nonlinéaries.

De nombreux autres auteurs ont étudié numériquement la réponse de plaques planes ou de bords de fuite de profils d'aile à des tourbillons [7, 64, 98].

Enfin on peut citer des travaux qui s'orientent vers le calcul d'une aile d'avion réaliste avec bec et volet. Singer *et al.* ont simulé une aile complète à 3 éléments par une approche URANS en deux dimensions [99] et ont calculé l'acoustique en champ lointain à l'aide de l'équation de Ffowcs-Williams et Hawkings. Plus récemment ils ont effectué des calculs de la cavité comprise entre le bec et le bord d'attaque de l'aile, avec une approche URANS très bien résolue [54, 55]. Manoha *et al.* ont également effectué des calculs dans la même zone de cavité à l'amont de l'aile, avec une approche mixte LES-RANS pour la zone aérodynamique et une propagation en champ lointain à l'aide des équations d'Euler linéarisées [108].

Il n'existe à notre connaissance pas de publications concernant le calcul direct du bruit rayonné par un profil d'aile dont les couches limites sont turbulentes.

Comportement d'une couche limite laminaire

La transition d'une couche limite sur une plaque plane a fait l'objet de très nombreux travaux aussi bien expérimentaux que théoriques. Prandtl est le premier à s'intéresser aux équations régissant le comportement d'une couche limite, et Blasius donne dès 1908 la solution pour une plaque plane finie d'épaisseur négligeable. En supposant l'épaisseur de la couche limite δ faible par rapport à la longueur de la plaque, une analyse dimensionelle des équations de Navier-Stokes permet de déduire que δ varie avec le nombre de Reynolds comme $\delta \propto 1/\sqrt{\text{Re}}$. Avec cette même hypothèse, les équations de Navier-Stokes peuvent être grandement simplifiées. Ce sont les équations dites de Prandtl pour la couche limite :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
(3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

écrites ici pour une paroi en y = 0. À ces équations il faut ajouter les conditions de vitesse nulle à la paroi u = v = 0 et de raccord avec l'écoulement extérieur $y \to \infty$: u = U(x,t) et P = P(x,t). On retrouve le fait que le décollement de la couche limite, défini par $\frac{du}{dy}\Big|_w = 0$, ne peut avoir lieu qu'en présence d'un gradient de pression défavorable dp/dx > 0. On a en effet :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}$$

Pour une plaque plane ces équations peuvent encore être simplifiées, pour obtenir une équation différentielle portant uniquement sur la fonction de courant adimensionnée. La résolution de cette équation permet de trouver l'expression de l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta = 4.92 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$$
 (Blasius)

où *x* est la distance depuis le bord d'attaque.

Facteurs influant la transition vers un état turbulent

Quelques paramètres critiques semblent influer grandement la transition. Le rayon de courbure de la surface solide joue un rôle important dans la transition. Dès les années 1930 des études ont été faites pour examiner cet effet [25, 93]. C'est à cette époque qu'il a été remarqué que la transition d'une couche limite laminaire vers un état turbulent se fait nettement plus en aval sur un profil d'aile que sur une plaque plane de même longueur.

La présence d'un gradient de pression défavorable accélère la transition. L'effet du gradient de pression a été examiné par Falkner et Skan [33] dans le cas de couches limites laminaires. Ceux-ci ont montré que si le rapport $(\delta/\tau_w)(dp/dx)$ est maintenu constant le long de la couche limite, alors les profils de vitesse $u/U = f(y/\delta)$ où U est la vitesse à l'extérieur de la couche limite, se superposent, bien que le nombre de Reynolds évolue avec l'abscisse x. De plus, le rapport (x/q)(dp/dx), où x est l'abscisse mesurée depuis l'origine de la couche limite et q est la pression dynamique locale à l'exterieur de la couche limite $q = 0.5\rho U^2$, reste

constant le long de la couche limite. On peut en déduire que U est proportionnel à x^m avec m dépendant de l'abscisse et du gradient de pression.

Cependant ces développements ne tiennent plus pour des couches limites turbulentes, sans même parler de la présence d'un gradient de pression. Ludwieg et Tillmann font des mesures en 1949 [65] qui laissent penser que la loi classique de $u/u_f = f(y u_f/v)$, avec f linéaire dans la sous-couche laminaire et logarithmique sur une large zone au-delà, est valable proche de toute surface lisse, que la couche limite soit ou non soumise à un gradient de pression. Ils sont également les premiers à constater une réduction du coefficient de frottement c_f par le gradient de pression défavorable, mais sans pouvoir relier quantitativement c_f à dp/dx. Clauser [24] donne les premiers éléments d'un dimensionnement plus adapté aux couches limites turbulentes. Il remarque que les définitions classiques d'épaisseur de couche limite, à savoir l'épaisseur δ , l'épaisseur de déplacement δ_1 et enfin l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 , ne sont pas adaptées au traitement des profils de vitesse turbulents. L'épaisseur δ est difficile à mesurer précisément pour une couche limite turbulente, et n'est donc pas pratique pour le dimensionnement des profils de vitesse. En ce qui concerne les autres épaisseurs, pour obtenir une représentation autosimilaire des profils de vitesse turbulents dans le cas d'une couche limite turbulente sans gradient de pression, il faut représenter le déficit de vitesse u - U adimensionné par la vitesse de frottement u_f , et les épaisseurs δ_1 et δ_2 ne peuvent être exprimées uniquement en fonction de ce $(u - U)/u_f$ sans dépendance sur c_f et donc sur le nombre de Reynolds. Pour contourner ce problème il définit une nouvelle épaisseur $\Delta = \int_0^\infty \frac{U-u}{u_f} dy$ qui est proportionnelle à l'épaisseur δ , et qui peut donc remplacer celle-ci dans les analyses. Clauser définit également un paramètre de forme, $G = \int_0^\infty \left(\frac{U-u}{u_f}\right)^2 dy / \int_0^\infty \frac{U-u}{u_f} dy = \int_0^\infty \left(\frac{U-u}{u_f}\right)^2 d(y/\Delta).$ Ce paramètre de forme devrait caractériser une couche limite sous l'influence d'un gradient de pression donné. Clauser arrive alors à relier le coefficient de frottement aux paramètres $\operatorname{Re}_{\delta_1}$, G et $\operatorname{Re}_k = k u_f / \nu$ le nombre de Reynolds basé sur la rugosité par l'expression suivante :

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = 5.6 \log \operatorname{Re}_{\delta_1} - \frac{\Delta u_1}{u_f} \left(\operatorname{Re}_k \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + \frac{\Delta u_2}{u_f} (G)$$

où $\Delta u_1/u_f$ est le déplacement vertical par rapport à la courbe $u/u_f = 5.6 \log_{10}(u_f y/v) + 4.9$ sous l'effet d'une rugosité k, et $\Delta u_2/u_f$ est le déplacement vertical correspondant par rapport à la courbe $(u - U)/u_f = 5.6 \log(y/\Delta) + 0.6$ sous l'effet du gradient de pression. Ainsi, l'effet du gradient de pression sur le coefficient de frottement à la paroi est connu en fonction de trois paramètres mesurables de la couche limite. De plus, à partir des valeurs expérimentales de G mesurées pour trois valeurs différentes du gradient de pression, Clauser montre que le coefficient de frottement baisse sensiblement avec l'augmentation du gradient défavorable de pression, ce qui va à l'encontre des travaux antérieurs qui supposaient le coefficient de frottement indépendant du gradient de pression [121].

Plus récemment, Durbin et Belcher [31] ont appliqué une analyse asymptotique pour montrer que le profil de vitesse se sépare non plus en deux régions comme pour les couches limites sans gradient de pression, mais en trois zones avec une zone ou la vitesse varie suivant $y^{1/2}$ qui relie la zone de paroi et la zone logarithmique. Cependant cette nouvelle zone se manifeste seulement en présence d'un fort gradient de pression, ce qui ne devrait pas être le cas dans ce travail.

L'influence du taux de turbulence dans l'écoulement amont sur le comportement de la couche limite turbulente a également été étudié [46, 32]. Par rapport à une couche limite se développant sans gradient de pression, le cas avec gradient de pression défavorable montre un mélange accru entre le fluide dans l'écoulement exterieur et le fluide dans la couche limite proche de la paroi, ainsi qu'une augmentation du facteur de forme de la couche limite H= δ_1/δ_2 au-delà de la valeur de H=2.59 typique d'une couche limite de Blasius.

Enfin plus récemment des études ont examiné l'effet du gradient de pression sur le développement des petits structures proche de la paroi. On sait ainsi que les *streaks* de basse vitesse, caractéristiques des couches limites turbulentes, s'élargissent lorsque le gradient de pression devient défavorable [63].

Depuis une quinzaine d'années, les simulations numériques de couches limites turbulentes se développent, dans l'espoir de pouvoir étudier les structures instationnaires d'une manière plus fine que par l'expérience. Ces travaux sont trop nombreux pour tous être cités, mais ceux de l'équipe de Moin à Stanford [60, 78, 79] et de Spalart [100] sont particulièrement à noter.

Transition autour d'un profil

Il existe quelques études experimentales de la transition de la couche limite autour de profils NACA, mais elles sont généralement moins exhaustives, et en bien moins grand nombre que pour la plaque plane. Le point de transition est défini comme l'endroit à partir duquel on observe une croissance anormale de la vitesse moyenne près de la paroi, par rapport à la couche limite laminaire. La zone de transition s'étend entre ce point et celui auquel la vitesse proche de la paroi atteint son maximum.

Pour un profil de type NACA 0012, la couche limite commence à transitionner pour des nombres de Reynolds au delà d'environ 100,000. Des visualisations [37] faites par Gartenberg et Roberts grâce à de l'imagerie infra-rouge sur un profil à $\text{Re}_c = 3.7 \times 10^5$ sans incidence montrent une transition qui débute autour de x/c = 0.8. En augmentant le nombre de Reynolds, la zone de transition se rapproche progressivement du bord d'attaque. Une étude de Lee et Kang [59] sur un profil à un nombre de Reynolds de $\text{Re}_c = 6 \times 10^5$ place la zone de transition entre x/c = 0.62 et x/c = 0.78. Pour $\text{Re}_c = 7.5 \times 10^5$, des mesures par fil chaud de Kerho et Bragg [53] montrent une zone de transition comprise entre x/c = 0.65 et x/c = 0.77. À $\text{Re}_c = 1.25 \times 10^6$, les mêmes mesures donnent 0.57 < x/c < 0.67 comme bornes de cette zone. Finalement, à $\text{Re}_c = 2.25 \times 10^6$, les bornes deviennent 0.43 < x/c < 0.5. Les mesures effectuées par la NACA en 1938 [97] complètent la courbe pour des nombres de Reynolds plus élevés. La figure 3.25 représente l'évolution de la position de la zone de transition en fonction du nombre de Reynolds.

La transition se déroule de manière semblable à celle d'une couche limite sur une plaque



FIG. 3.25 – Position de la zone de transition en fonction du nombre de Reynolds. ▲ : mesure de Gartenberg et Roberts,1991 ▲ et ■ : mesures de Kerho et Bragg, 1997 ▲ et ■ : mesures de Silverstein et Becker, 1938.

plane. Les premières structures fluctuantes à se développer sont les instabilités primaires appelées ondes de Tollmien-Schlichting. Ce sont des structures bidimensionnelles, sous la forme d'ondulations parallèles à la direction de l'envergure. Leur longueur d'onde peut être trouvée en effectuant une analyse de stabilité à partir du profil de vitesse moyenne dans la direction normale à la paroi. Pour une plaque plane sans incidence, cette étude a été faite par Tollmien [114] en prenant un profil de Blasius pour décrire la couche limite. Avec cette hypothèse, Tollmien calcula que le nombre de Reynolds critique à partir duquel il existe des perturbations instables est :

$$\operatorname{Re}_{crit} = \left(\frac{U_{\infty}\delta_1}{\nu}\right)_{crit} = 420$$

À ce nombre de Reynolds critique, la longueur d'onde instable est donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi}{0.36} \,\delta_1 \approx \frac{2\pi}{0.36} \frac{420\nu}{U_\infty}$$

Il est à noter que la valeur exacte du nombre de Reynolds critique est de 520, valeur obtenue par résolution de l'équation de Orr-Somerfeld. Cependant la valeur observée expérimentalement est de l'ordre de 400, proche de celle donnée à l'origine par Tollmien. La croissance des ondes de Tollmien-Schlichting est rapide, et d'ailleurs plus rapide autour d'un profil que sur une plaque plane du fait du gradient de pression défavorable. La figure 3.26 montre un exemple du développement des ondes de Tollmien-Schlichting dans la couche limite d'un profil d'aile. Cette image est issue d'un calcul 2D à un nombre de Reynolds relativement bas de 2×10^5 , pour permettre de mieux visualiser la croissance des structures ondulatoires. En effet le développement réel de ces structures dans le calcul 3D à un nombre de Reynolds de Re_c = 5×10^5 est nettement plus rapide, et on distingue visuellement avec plus de difficultés la phase de croissance bidimensionnelle.

La prochaine phase du développement de l'écoulement est l'apparition d'instabilités secondaires qui se superposent aux ondes de Tollmien-Schlichting. Ces instabilités sont transversales, et leur développement est nettement plus compliqué que celui des ondes de Tollmien-Schlichting. Il existe en effet plusieurs scénarii de développement possibles. Cette phase est atteinte *a priori* plus rapidement autour du profil que sur une plaque plane, car le gradient de pression défavorable tend à accélérer la croissance du taux d'amplification des ondes de Tollmien-Schlichting par rapport au cas d'une couche limite sans gradient de pression. La figure 3.27 montre une vue de dessus de la vorticité transversale ω_z sur un plan parallèle à la surface du profil, à une hauteur par rapport au profil de $y^+ = 30$. On voit, entre x/c = 0.6et x/c = 0.7, environ trois ondes de Tollmien-Schlichting d'amplitude croissante en bleu, et on peut constater un début d'apparition de structures transversales sur le troisième rouleau. Le dernier rouleau de Tollmien-Schlichting, aux alentours de x/c = 0.73, est quand à lui quasiment masqué par les structures transversales de forte amplitude.



FIG. 3.26 – Apparition et croissance des ondes de Tollmien-Schlichting dans la couche limite autour d'un profil NACA 0012 : vue en coupe de la vorticité ω_z issue d'un calcul 2D à un nombre de Reynolds de Re_c = 2 × 10⁵.

L'instabilité de Tollmien-Schlichting transitionne ensuite progressivement vers un état pleinement turbulent, après l'apparition d'instabilités secondaires, sous la forme d'ondulations suivant la direction de l'envergure.

Il est possible d'estimer le pas de maillage nécessaire en calculant l'échelle de paroi à partir



FIG. 3.27 – Apparition des instabilités secondaires transversales par dessus les ondes de Tollmien-Schlichting dans la couche limite autour d'un profil NACA 0012 à un nombre de Reynolds de 5×10^5 : vue de dessus de la vorticité ω_z sur un plan parallèle à la surface du profil. La vue represente la moitié de la largeur du domaine de calcul.

de profils de vitesse à différents endroits le long de la corde, sur des profils de la famille NACA [97]. Pour un nombre de Reynolds de Re_c = 1.25×10^6 , le gradient maximal à la paroi de la vitesse moyenne vaut environ $\partial \overline{u}/\partial y = 8.75 \times 10^4 s^{-1}$. Cela conduit à une vitesse de frottement $u_f = 1.15$ m.s⁻¹. Ainsi pour simuler une telle configuration par DNS il faudrait une première maille de hauteur $\delta y = y^+ v/u_f = 1.3 \times 10^{-5}$ Cette valeur de δy est à comparer à la corde du profil qui vaut dans ces expériences c = 1.8288 m. On a donc un rapport $c/\delta y = 1.4 \times 10^5$.

Si on admet en première approximation que y^+ varie à peu près linéairement avec le nombre de Reynolds, on peut prendre $\delta y \approx 2.2 \times 10^{-5}$ et si on se contente de faire une simulation des grandes échelles, on peut augmenter encore δy et fixer la taille de la première maille en respectant $y^+ = 5$ par exemple. Dans ce cas de figure, on ramène le rapport *corde / hauteur de maille* à une valeur plus raisonnable de $c/\delta y = 1 \times 10^4$. Dans les simulations presentées par la suite, la première maille sera dans la mesure du possible d'une hauteur d'environ $y^+ = 2$.

3.3.2 Simulation d'un profil 2D à un nombre de Reynolds de 500000

Des simulations de configurations plus proches des dimensions et des conditions d'utilisation rencontrées dans l'industrie sont effectuées. Un profil NACA0012 d'une corde de 10 cm est choisi, ainsi qu'un écoulement moyen de nombre de Mach 0.22, ce qui fournit un nombre de Reynolds de 500,000 basé sur la corde. D'après les résultats expérimentaux disponibles, cette configuration devrait posséder une couche limite initialement laminaire qui transitionne progressivement vers un état turbulent avant d'atteindre le bord de fuite. La reproduction correcte de l'emplacement et la taille de la zone de transition constituent des tests sévères pour le solveur numérique.

Des simulations en deux dimensions ont été effectuées, dans l'espoir d'obtenir des champs moyens pouvant servir à initialiser des calculs en trois dimensions. On peut s'attendre à ce que le comportement temporel de l'écoulement dans la région turbulente soit peu physique du fait du caractère 2D de la simulation, mais le champ moyen fourni pourrait éventuellement permettre de démarrer un calcul 3D à partir d'un état moyen proche de l'état réel.

Comme attendu, les résultats fluctuants obtenus sont peu satisfaisants. La couche limite a bien un état initialement laminaire, mais elle commence à transitionner nettement trop en amont du bord de fuite, et une fois transitionnée, ne se comporte pas de manière correcte. La figure 3.28 montre les fluctuations de vitesse dans la couche limite. Ces fluctuations sont mesurées à une distance de $h_y = 0.0035 \times c$ au dessus de la paroi, et sont rendues adimensionnelles par la vitesse à l'amont U_{∞} . On constate que les fluctuations commencent à naître aux alentours de x/c = 0.35, soit quasiment à mi-distance de ce qui est observé dans les expériences. Les taux de turbulence atteints sont également plus nettement plus élévés que dans les résultats expérimentaux. On peut également remarquer, en examinant le champ de vorticité sur la figure 3.29, que la couche limite proche du bord de fuite n'a pas une allure turbulente : elle est fortement marquée par de gros tourbillons à intervalles réguliers, et ne semble pas contenir de composantes hautes fréquences.



FIG. 3.28 – Fluctuations de vitesse u'_{rms}/U_{∞} dans les couches limites supérieures et inférieures à une distance de $h_y = 0.0035 \times c$ au dessus de la paroi du profil, tracées en fonction de x/c.

Un rayonnement acoustique est bien émis par la zone du bord de fuite, comme le montre la figure 3.30. La représentativité des résultats acoustiques est cependant fortement douteuse, dans la mesure où elle résulte de fluctuations de vitesse non-physiques. On peut tout de même voir les effets de propagation et de diffraction autour de l'airfoil, qui se traduisent par les lobes sur la directivité [81] visibles sur la figure 3.31.



FIG. 3.29 – Champ de vorticité autour du bord de fuite d'un profil 2D NACA0012 à un nombre de Reynolds basé sur la corde de $\text{Re}_c = 500,000$. Échelle de couleur comprise entre $\pm 3 \times 10^5$



FIG. 3.30 – Champ de pression fluctuante autour d'un profil 2D NACA0012 simulé par LES, à un nombre de Reynolds basé sur la corde de $\text{Re}_c = 500,000$.



FIG. 3.31 – Directivité en dB autour d'un profil 2D NACA0012 simulé par LES, mesurée à r/c = 1.5.
3.3.3 Simulations en trois dimensions à $Re_c = 500,000$

On présente maintenant la première simulation réalisée en trois dimensions dans le cadre de la thèse. Il s'agit d'un profil NACA0012 d'une corde *c* de 10 centimètres placé dans un écoulement à un nombre de Mach de M= 0.22, ce qui fournit un nombre de Reynolds basé sur la corde de $\text{Re}_c = 5 \times 10^5$. Il s'agit de la même configuration que le cas 2D à haut nombre de Reynolds. Pour cette simulation, un maillage de type "C" d'environ 12 millions de points est mis en œuvre. Ce maillage se décompose en 1200 points dans la direction azimutale (dans la direction du "C"), 220 points dans la direction radiale et 45 points selon l'envergure. Le domaine de calcul s'étend sur environ une demi-corde en aval du profil et 2 cordes au dessus et en dessous du profil dans la direction radiale. Le calcul est parallélisé suivant les deux directions ayant le plus de points, c'est-à-dire les directions azimutale et radiale, comme l'illustre la figure 3.32. Chaque sous-domaine possède un nombre de points identique. La majorité des calculs a été faite sur 26 processeurs du cluster de machines ALPHA EV68 du CEA, mais également en partie sur le cluster de machines opteron du Centre Acoustique.



FIG. 3.32 – Décomposition du domaine de calcul autour du profil NACA0012 en sousdomaines structurés.

Proche de la paroi, les espacements Δx et Δy sont identiques à ceux de la simulation 2D : on a $\Delta y/c \approx 1.7 \times 10^{-4}$, et pour la direction azimutale on passe progressivement de $\Delta x/c \approx 3 \times 10^{-3}$ au bord d'attaque à $\Delta x/c \approx 6.6 \times 10^{-4}$ au bord de fuite. Le maillage est progressivement resseré en s'approchant du bord de fuite pour capter les structures instationnaires qui se développent dans la couche limite après le début de la zone de transition. Dans la direction de l'envergure, Δz vaut le double de Δx au bord de fuite, ce qui donne un domaine d'une largeur d'environ 5% de la corde. Cette valeur de 5% est à comparer par example à celle de 1.5% de la corde dans la LES de Mary et Sagaut [72]. Cependant leur calcul était effectué à un nombre de Reynolds plus élévé de 2×10^6 autour d'un profil légèrement incliné, et donc plus turbulent à cause de ces deux différences. La dimension caractéristique dans la troisième direction est réduite, et ainsi l'envergure de leur domaine de calcul, en terme de dimension caracteristique, est à peu près égale à celle du travail présenté ici. Ces dimensions du maillage correspondent à des tailles de maille au bord de fuite, données en échelles de paroi, de $x^+ = 20$, $y^+ = 2.5$ et $z^+ = 20$.

Grandeurs moyennes

Une première estimation de la qualité du calcul a été faite en examinant l'écoulement moyen autour du profil. Différentes grandeurs moyennes ont été comparées à des données expérimentales mesurées dans des configurations proches.

On s'intéresse tout d'abord au coefficient de pression moyen autour du profil. Le bon calcul de ce coefficient est primordial car il détermine l'amplitude du gradient de pression autour du profil, et est donc relié directement au comportement de la couche limite et en particulier à l'emplacement de la zone de transition. La figure 3.33 montre ce coefficient de pression et le compare à des valeurs mesurées par Lee et Kang autour d'un profil NACA0012 à des nombres de Reynolds de 4×10^5 et 6×10^5 . On constate un excellent accord entre les valeurs expérimentales et les résultats de la simulation. Il est à noter que Lee et Kang ne trouvent pas de différences significatives entre les mesures pour les deux nombres de Reynolds. Le coefficient moyen de traînée vaut $C_d = 0.018$ dans cette simulation, ce qui est légèrement plus élévé que la valeur de 0.011 trouvée par Hah et Lakshminarayana pour un profil d'aile à un nombre de Reynolds plus bas de 380,000 et une faible incidence de 3° par rapport à l'écoulement, et également que les valeurs comprises entre 0.015 et 0.017 fournies par Lockard *et al.* pour un profil 2D à Re_c = 5×10^5 simulé à l'aide du code de calcul CFL3D de type RANS.

Les profils moyens de vitesse à différents points le long de la corde sont tracés sur la figure 3.34, sous la forme adimensionnée $u^+ = f(y^+)$. Avant le début de la transition, on remarque que les profils suivent de très près la loi $u^+ = y^+$, indiquant que la vitesse augmente linéairement avec la distance par rapport à la paroi. C'est une caractéristique typique d'une sous-couche visqueuse, où le comportement du fluide est dominé par les effets de la visco-sité. Dans la zone de transition, le profil de vitesse moyenne croît dans un premier temps comme y^+ , avant de décrocher et de croître selon une loi quasi logarithmique à partir d'environ $y^+ = 10$. Cependant la pente de la croissance dans la zone de transition est supérieure à la pente de la loi logarithmique typique du comportement d'une couche limite turbulente $u^+ = 2.44 \log(y^+) + 5.2$ formulée par Prandtl et Von Kármán. Enfin, proche du bord de fuite on constate que le profil de vitesse suit cette loi avec la bonne pente. Cela permet ainsi de situer avec une précision raisonnable les bornes de la zone de transition. Il est à noter que la loi de comportement logarithmique a été formulée à l'origine pour une couche limite sur plaque plane.

Le comportement du sillage a quant à lui été comparé à des résultats obtenus par Hah et Lakshminarayana [43] pour un profil de même forme, légèrement incliné (3 ° d'incidence) et à un nombre de Reynolds un peu inférieur, soit $\text{Re}_c = 3.8 \times 10^5$. Sur la figure 3.35, on trace la courbe du déficit de vitesse moyenne sur l'axe du sillage issue de la simulation, des résultats expérimentaux de Hah et Lakshminarayana et également, pour comparaison, des expériences faites par Chevray et Kovasznay [22] sur une plaque plane. Les résultats sont présentés sous une forme adimensionnée $(U_{\infty} - U)/(U_{\infty} - U_c)$ où U_c est la vitesse correspondant au déficit maximal au centre du sillage. On observe que la diminution du déficit de vitesse dans le sillage se fait de manière similaire dans les trois cas.



FIG. 3.33 – Coefficient de pression moyen $C_p = (p - p_{\infty})/(0.5\rho u_{\infty}^2)$ autour d'un profil NACA0012.

 \circ profil à Re_c = 600,000 (expériences de Lee et Kang [59]), — simulation à Re_c = 500,000.



FIG. 3.34 – Profils de vitesse en échelles de paroi $u^+ = f(y^+)$ dans la couche limite supérieure autour d'un profil NACA0012 à Re_c = 500,000. – – $u^+ = y^+$, – . – . – $u^+ = 2.44 \log(y^+) + 5.2$, $\Box x/c = 0.55$, $\circ x/c = 0.9$, $\bigtriangleup x/c = 0.98$.

Grandeurs turbulentes

On peut également examiner des grandeurs liées à la turbulence qui se développe dans la couche limite après le début de la transition. La figure 3.36 représente les fluctuations RMS de vitesse dans la couche limite supérieure du profil. Elles sont mesurées à une hauteur de $y^+ = 20$ au dessus de la paroi. On observe que les fluctuations sont quasi-nulles en amont du point x/c = 0.6, et croissent à partir de ce point. Il s'agit donc du début de la zone de transition. Les fluctuations croissent jusqu'à une valeur maximale d'environ 13% de la vitesse à l'infini, avant de baisser légèrement proche du bord de fuite. On retrouve cette légère baisse, ainsi que des taux de turbulence similaires, dans les mesures de Kerho et Bragg [53]



FIG. 3.35 – Décroissance du déficit de vitesse suivant l'axe du sillage. \circ Profil d'aile NACA0012 à 3° d'incidence et Re_c = 3.8×10^5 (Hah et Lakshminarayana [43]) + plaque plane (Chevray et Kovasznay [22]) — simulation.

effectuées autour d'un profil NACA0012 à un nombre de Reynolds de 7.5×10^5 . Il semblerait que la fin de la baisse indique la fin de la zone de transition, c'est-à-dire qu'elle corresponde au début de la zone où l'écoulement est pleinement turbulent.

Des profils de fluctuations tracés selon la direction normale à la paroi peuvent également nous renseigner sur l'état de la couche limite. On dispose de mesures effectuées par Lee et Kang [59] autour d'un profil à un nombre de Reynolds très proche de $\text{Re}_c = 600,000$, tracées sur la figure 3.37. Ces courbes sont à comparer à celles de la figure 3.38, qui sont obtenues à partir du calcul à un nombre de Reynolds de 500,000, en moyennant les champs de vitesse sur environ un tiers du temps de passage par dessus le profil d'aile. Une ressemblance raisonnable entre les deux jeux de courbes est observée, aussi bien sur l'amplitude que sur les formes. Cependant, si l'on prend un profil particulier de la figure expérimentale, le profil numérique le plus semblable provient d'un point plus en aval sur le profil, ce qui indique à nouveau que la transition a lieu plus tardivement dans le calcul que dans les expériences faites par Lee et Kang. Parmi les différences que l'on peut remarquer, le pic expérimental situé environ à $y^+ = 50$ sur les profils en x/c = 0.65 et x/c = 0.68 est plus marqué que dans les résultats numériques, mais son emplacement est correctement trouvé. Expérimentalement, les profils de fluctuations tendent à s'approcher d'un plateau à partir d'environ x/c = 0.75: le niveau de turbulence est alors à peu près constant à travers la couche limite une fois l'état pleinement turbulent atteint. Dans les résultats numériques, ce plateau est moins plat, d'amplitude plus élevée, et atteint nettement plus en aval, indiquant à nouveau une transition plus lente dans le calcul que dans l'expérience.



FIG. 3.36 – Fluctuations de vitesse u'_{rms}/U_{∞} dans la couche limite supérieure autour d'un profil NACA0012 à Re_c = 500,000, calculées à y^+ = 20, tracées en fonction de x/c.



FIG. 3.37 – Profils de fluctuations de vitesse dans la couche limite autour d'un profil NACA0012 à Re_c = 600,000. Mesures de Lee et Kang. $\circ x/c = 0.45$, $\Box x/c = 0.58$, • x/c = 0.62, $\diamond x/c = 0.65$, $\times x/c = 0.68$, +x/c = 0.72, $\bigtriangleup x/c = 0.75$, $\star x/c = 0.78$.



FIG. 3.38 – Profils de fluctuations de vitesse dans la couche limite autour d'un profil NACA0012 : simulation à Re_c = 500,000. $\circ x/c = 0.55$, +x/c = 0.66, $\times x/c = 0.8$, $\triangle x/c = 0.9$, $\Box x/c = 0.95$.

Visualisations instantanées

Des images instantanées de l'écoulement peuvent fournir de l'information supplémentaire sur le comportement des couches limites, ainsi que celui du champ acoustique. Quelques exemples de telles visualisations sont données dans ce paragraphe.

La figure 3.39 montre une coupe dans le plan (x, y) du champ de vorticité instantanée $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ autour de la moitié arrière du profil. On peut constater que la couche limite est laminaire jusqu'à environ 60 % de la corde, et qu'à partir de x/c = 0.65, la vorticité commence à onduler et forme progressivement des rouleaux de longueur d'onde $\lambda \approx 0.0024$ m. Ces structures correspondent aux instabilités de Tollmien-Schlichting décrites au paragraphe 3.3. Elles sont typiques du début de la transition vers un état turbulent dans la couche limite. La valeur de la longueur d'onde trouvée est proche de la valeur de 0.0021 m prédite par une analyse de stabilité linéaire pour une plaque plane. À partir d'environ x/c = 0.8 les instabilités apparaissent saturées, et on voit apparaître des longueurs d'onde plus faibles au sein des instabilités. L'écoulement atteint un état qui apparaît visuellement turbulent peu après x/c = 0.9, ce qui concorde avec les observations faites sur les taux de fluctuations dans la couche limite. La figure 3.40 montre des isosurfaces positives et négatives de la vorticité longitudinale dans la couche limite supérieure proche du bord de fuite. Sur la vue du haut, qui correspond à une vue de dessus du profil, on voit apparaître en aval du point précédent x/c = 0.95 des structures longitudinales de signe alterné selon l'envergure. Leur espacement selon z est d'environ 110 unités de paroi $\delta_z^+ = 110$, ce qui est très proche des valeurs expérimentales de séparation des streaks que l'on rencontre souvent dans la turbulence de paroi [56]. La fin de la zone de transition intervient un peu plus en aval dans le calcul que dans les résultats expérimentaux à notre disposition, sans qu'il soit clair d'où vient la différence. En effet, il est bien connu que la transition d'une couche limite d'un état laminaire vers un état turbulent est très dépendante du taux résiduel en amont dans l'écoulement. Or les données expérimentales utiles ici ont des taux de turbulence différents, ou parfois même celui-ci n'est pas mentionné. Dans ce travail numérique, il a été décidé de ne pas introduire de perturbations dans l'écoulement amont, pour éviter d'éventuelles discussions sur la nature des perturbations ajoutées, sur leur amplitude et sur leur effet. De ce fait, on s'attend à trouver une zone de transition déplacée vers l'aval par rapport aux résultats expérimentaux, sans pour autant pouvoir prédire de combien la zone est déplacée par l'absence de turbulence.

La figure 3.42 donne une illustration plus visuelle de ce que sont les *streaks* de vitesse. Elle représente la composante logitudinale de la vitesse parallèle à la paroi, très proche de celleci à environ $y^+ = 10$, sur la moitie supérieure du profil d'aile. Cette image, ainsi que la vue tridimensionnelle de vorticité montrée à la figure 3.41, provient d'une simulation effectuée au même nombre de Reynolds de 5×10^5 mais à un nombre de mach de 0.44 au lieu de 0.22. Ce calcul, bien que pas encore abouti, montre un comportement temporel en bon accord avec celui de la simulation précédente. Idéalement, plusieurs calculs au même nombre de Reynolds mais à des nombres de Mach différents permettraient de vérifier la loi de variation de la puissance acoustique avec le nombre de Mach. Cette vérification n'a pas pu être faite pendant la thèse.

Sur la figure 3.42 on voit d'abord le renforcement progressif des ondes de Tollmien-Schlichting à partir de x/c = 0.7; ces ondes restent proprement bidimensionnelles jusqu'à environ x/c = 0.8, point à partir duquel on voit apparaître les premières structures longitudinales. À partir de x/c = 0.85 et jusqu'à x/c = 1, la vitesse est organisée très nettement selon des filaments longitudinaux de vitesse au dessus (en orange-rouge) et en dessous (bleu) de la valeur moyenne. Ces formations résultent des tourbillons longitudinaux qui ont tendance à brasser la couche limite dans le sens de la hauteur [83] : ils amènent d'un côté du fluide de basse vitesse depuis la paroi vers l'extérieur de la couche limite, et réciproquement de l'autre côté, du fluide à haute vitesse depuis l'extérieur de la couche limite vers la paroi. Après le passage du bord de fuite en x/c = 1, on voit disparaître cette prédominance des structures longitudinales.

Enfin la figure 3.43 montre une vue instantanée d'une coupe en z = 0 du champ de pression rayonné par le bord de fuite. On observe dans le rayonnement une large prédominance de la fréquence correspondant aux ondes de Tollmien-Schlichting dans la couche limite.



FIG. 3.39 – Champ de vorticité instantanée $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ autour d'un profil 3D NACA0012 à un nombre de Reynolds basé sur la corde de Re_c = 500,000. L'échelle de couleurs est comprise entre $\pm 3 \times 10^5 \text{s}^{-1}$.



FIG. 3.40 – Vorticité longitudinale dans la couche limite supérieure proche du bord de fuite. Vues de dessus et du coté des isosurfaces de $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$. Les isosurfaces rouges et bleues correspondent respectivement à 1.5×10^5 et $-1.5 \times 10^5/s^{-1}$. Les distances sont rendues adimensionnelles par la corde *c*.



FIG. 3.41 – Vorticité longitudinale dans la couche limite supérieure proche du bord de fuite d'un profil dans un écoulement à Mach 0.44. Vues des isosurfaces de $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$. Les isosurfaces rouges et bleues correspondent respectivement à 1.5×10^5 et -1.5×10^5 s⁻¹. Les distances sont rendues adimensionnelles par la corde *c*.



FIG. 3.42 – Vorticité longitudinale dans la couche limite supérieure proche du bord de fuite d'un profil dans un écoulement à Mach 0.44. Vues des isosurfaces de $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$. Les isosurfaces rouges et bleues correspondent respectivement à 1.5×10^5 et -1.5×10^5 s⁻¹. Les distances sont rendues adimensionnelles par la corde *c*.



FIG. 3.43 – Fluctuations de pression autour d'un profil NACA0012 3D à un nombre de Reynolds basé sur la corde de $\text{Re}_c = 500,000$ et un nombre de Mach de 0.22. L'échelle de couleur est comprise entre ±20 Pa.

4 Conclusion

Ce travail présente l'application du calcul direct du rayonnement acoustique de formes profilées placées dans un écoulement, à l'aide de méthodes curvilignes d'ordre élévé.

Dans une première partie, le développement d'un code de résolution des équations de Navier-Stokes capable de traiter des géometries courbes est décrit. Une approche basée sur l'utilisation de maillages structurés curvilignes est présentée, et validée sur plusieurs cas tests acoustiques de propagation et de diffraction. La robustesse du solveur vis-à-vis de maillages fortement déformés est évaluée à l'aide de cas tests de propagation. On montre que le solveur est à la fois capable de fournir de bons résultats sur des maillages fortement déformés, et qu'il reste précis en présence d'une paroi rigide courbe.

La deuxième partie est consacrée à des notions utiles au développement futur de simulations de très grandes dimensions autour d'objets de forme complexe. On aborde d'abord une technique permettant de faire communiquer plusieurs domaines distincts pour ne former qu'un seul grand domaine de calcul. Ceci permet de mailler des formes complexes grâce à plusieurs maillages structurés. La communication est mise en œuvre grâce à un procédé d'interpolation multidimensionnelle reposant sur des interpolations successives en une dimension. La précision de ce procédé de communication est évaluée d'abord sur un cas test générique d'interpolation. Elle est ensuite validée sur un cas test de diffraction d'une source acoustique par deux cylindres.

La suite du chapitre présente quelques aspects généraux liés à la parallélisation d'un code de calcul explicite. La parallélisation est en effet incontournable pour envisager la simulation de géometries complexes de grande taille. Les différentes possibilités techniques de parallelisation sont décrites, et le choix effectué dans ce travail est expliqué, ainsi que sa performance mesurée.

Enfin le troisième chapitre présente l'étude de deux types d'écoulement aéroacoustique avec le solveur numérique développé précédemment. Le comportement d'un écoulement à bas nombre de Reynolds se développant autour d'un cylindre est d'abord simulé en deux dimensions. Le nombre de Reynolds de 150 est choisi de telle sorte que l'écoulement physique

soit bidimensionnel. Les résultats aérodynamiques de la simulation se comparent très favorablement avec les résultats expérimentaux disponibles. On trouve ainsi la bonne fréquence du phénomène de lâcher de tourbillons dans le sillage du cylindre, des valeurs correctes du coefficient de traînée et du coefficient de portance efficace, ainsi que des profils de vitesse en aval du cylindre qui sont en bon accord avec une description analytique d'un sillage plan. Les résultats acoustiques paraissent corrects, bien qu'il n'existe pas de résultats expérimentaux auxquels les comparer à ce bombre de Reynolds.

Des simulations effectuées autour de profils d'aile de type NACA 0012 sont ensuite présentées. Une simulation préliminaire en deux dimensions est effectuée à un faible nombre de Reynolds de 33,000 à nouveau pour se placer dans un régime physique bidimensionnel. On constate un sillage similaire à celui se développant en aval du cylindre à bas nombre de Reynolds, et un rayonnement acoustique dipôlaire lui aussi semblable à celui du cylindre. Des simulations à un nombre de Reynolds plus élevé sont faites pour se rapprocher de valeurs d'intérêt pour l'industrie. Une deuxième simulation bidimensionnelle est faite à un nombre de Reynolds de 500,000. Dans ces conditions, les couches limites doivent transitionner vers un état turbulent avant d'atteindre le bord de fuite. De ce fait, les résultats aérodynamiques fournis par la simulation bidimensionnelle sont peu conformes aux résultats expérimentaux. La simulation en trois dimensions au même nombre de Reynolds montre un comportement plus physique. Les grandeurs aérodynamiques moyennes ainsi que des grandeurs turbulentes sont en bon accord avec les expériences. On montre qu'il est possible de simuler dans un même calcul à la fois les petites structures se développant dans la couche limite proche de la paroi du profil, et le rayonnement acoustique émis par le passage des structures turbulentes au dessus du bord de fuite.

Bibliographie

- [1] Second Computational AeroAcoustics (CAA) workshop on benchmark problems, 1996.
- [2] Fourth Computational AeroAcoustics (CAA) workshop on benchmark problems, 2003.
- [3] R.K. Amiet, Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream, J. Sound Vib. (1975), 407–420.
- [4] _____, Noise due to turbulent flow past a trailing edge, J. Sound Vib. (1976), 387–393.
- [5] D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Hemisphere, New York, 1984.
- [6] J.L. Anderson, S. Preiser, and E.L. Rubin, Conservation form of the equations of hydrodynamics in curvilinear coordinate systems, J. Comput. Phys. 2 (1968), no. 3, 279–287.
- [7] R.K. Argawal and K.S. Huh, *Acoustic radiation due to gust-airfoil interaction in a compressible flow*, AIAA Paper 96-1755 (1996).
- [8] H.M. Atassi, M Dusey, and C.M. Davis, *Acoustic radiation from a thin airfoil in nonuniform subsonic flows*, AIAA Journal **31** (1993), no. 1, 12–19.
- [9] A. Bayliss and E. Turkel, *Far-field boundary conditions for compressible flows*, J. Comput. Phys. **48** (1982), 182–199.
- [10] J. Berland, C. Bogey, and C. Bailly, *Optimized explicit schemes : Matching and boundary schemes, and 4th-order runge-kutta algorithm,* AIAA Paper 2004-2814 (2004).
- [11] C. Bogey, Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2000, No 2000-11.
- [12] C. Bogey and C. Bailly, Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases, Acta Acustica 88 (2002), no. 4, 463–471.
- [13] _____, A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computations,
 J. Comput. Phys. **194** (2004), no. 1, 194–214.
- [14] _____, Investigation of subsonic jet noise using les : Mach and reynolds number effects, AIAA Paper 2004-3023, Manchester, UK (2004).
- [15] _____, *Computation of a high reynolds number jet and its radiated noise using les based on explicit filtering*, Computers and Fluids (2005), available online.

- [16] _____, Effects of inflow conditions and forcing on a mach 0.9 jet and its radiated noise, AIAA Journal 43 (2005), no. 5, 1000–1007.
- [17] _____, Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic smagorinsky mode, Turbulence and Shear flow 4 (Williamsburg, VA, USA), 2005.
- [18] T.F. Brooks and T.H. Hodgson, *Trailing edge noise prediction from measured surface pressures*, J. Sound Vib. (1981), 69–117.
- [19] K.L. Chandiramani, *Diffraction of evanescent waves, with applications to aerodynamically scattered sound and radiation from unbaffled plates, J. Acoust. Soc. Am.* **55** (1974), 19–29.
- [20] D.M. Chase, Sound radiated by turbulent flow off a rigid half-place as obtained from a wavevector spectrum of hydrodynamic pressure, J. Acoust. Soc. Am. **52** (1972), 1011–1023.
- [21] _____, Noise radiated from an edge in turbulent flow, AIAA Journal 13 (1975), 1041–1047.
- [22] R. Chevray and S. Kovasznay, *Turbulence measurements in the wake of a thin flat plate*, AIAA Journal **7** (1969), no. 8, 1641–1643.
- [23] P. Clark and H. Ribner, Direct correlation of fluctuating lift with radiated sound for an airfoil in turbulent flow, J. Acoust. Soc. Am. 46 (1969), no. 3, 802–805.
- [24] F.H. Clauser, *Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients*, Journal of the Aeronautical Sciences **21** (1954), no. 2, 91–108.
- [25] M. Clauser and F. Clauser, *The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer*, Tech. report, NACA Tech. Note, 1937.
- [26] D.G. Crighton, Radiation from vortex filament motion near a half-plane, J. Fluid Mech. 51 (1972), 357–362.
- [27] J. W. Delfs, An overlapped grid technique for high resolution caa schemes for complex geometries, AIAA Paper 2001-2199 (2001).
- [28] J.W. Delfs, J Yin, and X. Li, *Leading edge noise studies using CAA*, AIAA Paper 99-1897 (1999).
- [29] J.A. Domaradzki and N.S. Adams, *Direct modeling of subgrid scales of turbulence in large eddy simulations*, J. Turbulence **3** (2002), no. 024, 1–19.
- [30] T.Z. Dong, On boundary conditions for acoustic computations in non-uniform mean flows, J. Comput. Acous. 5 (1997), no. 3, 297–315.
- [31] P.A. Durbin and S.E. Belcher, *Scaling of adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers*, J. Fluid Mech. **238** (1992), 699–722.
- [32] R.L. Evans, Freestream turbulence effects on turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, AIAA Journal **23** (1985), no. 11, 1814–1816.
- [33] V.M. Falkner and W. Skan, *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, A.R.C Reports and Memoranda (1930), no. 1314.
- [34] U. Fey, Eine neue gesetzmaessigkeit fuer die wirbelfolgefrequenz des kreiszylinders und steuerung der instabilitaeten im bereich 160 < re < 300., Rep. No. 3-1998, MPI fuer Stroemungsforschung, Goettingen.

- [35] J.E. Ffowcs Williams and L.H. Hall, *Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half-plane*, J. Fluid Mech. **40** (1970), 657–670.
- [36] M. Fink, *Experimental evaluation of theories for trailing edge and incidence fluctuation noise*, AIAA Journal **13** (1975), no. 11, 1472–1477.
- [37] E. Gartenberg and A.S. Roberts Jr., *Airfoil transition and separation studies using and infrared imaging system*, J. Aircraft **28** (1991), no. 4, 225–230.
- [38] C. Gleyzes, Opération Décrochage-Résultats des essais à la soufflerie F2, ONERA Tech. Report (1988), no. RT-OA 1-/5025.
- [39] X. Gloerfelt, Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2001, No 2001-26.
- [40] J.W. Goodrich and T. Hagstrom, *High order implementations of accurate boundary conditions*, AIAA Paper 99-1942 (1999).
- [41] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, New York, NY, USA, 1980.
- [42] H. Grogger, M. Lummer, and T. Lauke, *Simulating the interaction of a three-dimensional vortex with airfoils using CAA*, AIAA Paper 2001-2137 (2001).
- [43] C. Hah and B. Lakshminarayana, *Measurement and prediction of mean velocity and turbulence structure in the near wake of an airfoil*, J. Fluid Mech. **115** (1982), 251–282.
- [44] R.D. Henderson, Non-linear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition, J. Fluid Mech. 352 (1997), 65–112.
- [45] R. Hixon, S.-H. Shih, and R.R. Mankbadi, *Evaluation of boundary conditions for computational aeroacoustics*, AIAA Journal **33** (1995), no. 11, 2006–2012.
- [46] J.A. Hoffman, S.M. Kassir, and S.M. Larwood, The influence pf free-stream turbulence on turbulent boundary layers with mild adverse pressure gradients, NASA Contractor Report (1989), 177520.
- [47] M.S. Howe, Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess noise and the theory of the flute, J. Fluid Mech. **71** (1975), 625–673.
- [48] _____, *The influence of vortex shedding on the generation of sound by convected turbulence*, J. Fluid Mech. **76** (1976), no. 4, 711–740.
- [49] _____, *The effect of forward flight on the diffraction radiation of a high speed jet*, J. Sound Vib. **50** (1977), 183–193.
- [50] _____, A review of the theory of trailing edge noise, J. Sound Vib. 61 (1978), no. 3, 437–465.
- [51] _____, Edge-source acoustic green's function for an airfoil of arbitrary chord, with application to trailing-edge noise, Q. Jl. Mech. Appl. Math. 54 (2001), no. 1, 139–155.
- [52] Eastman Jacobs, *Tests of six symmetrical airfoils in the variable density wind tunnel*, Tech. report, NACA, 1931.

- [53] M.F. Kerho and M.B. Bragg, *Airfoil boundary-layer development and transition with large leading-edge roughness*, AIAA Journal **35** (1997), no. 1.
- [54] M. Khorrami, B. Singer, and D. Lockard, *Time-accurate simulations and acoustic analysis* of slat free-shear-layer : part ii, AIAA Paper 2001-2155 (2001).
- [55] _____, *Time-accurate simulations and acoustic analysis of slat free-shear-layer : part ii,* AIAA Paper 2002-2579 (2002).
- [56] H.T. Kim and W.C. Reynolds, *The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer*, J. Fluid Mech. **50** (1971), 133–160.
- [57] A.G. Kravchenko, P. Moin, and K. Shariff, *B-spline method and zonal grids for simulations of complex turbulent flows*, J. Comput. Phys. **151** (1999), 757–789.
- [58] K.A. Kurbatskii and C.K.W. Tam, *Cartesian boundary treatment of curved walls for highorder computational aeroacoustics schemes*, AIAA Journal **35** (1997), no. 1, 133–140.
- [59] H.K. Lee and S.H Kang, *Flow characteristics of transitional boundary layer on the NACA0012 airfoil in wakes*, Proceedings of FEDSM'98, Washington, DC (1998).
- [60] S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin, Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor hypothesis in compressible flow, Phys. Fluids A 4 (1992), no. 7, 1521–1530.
- [61] S. Lee and B. Soni, Governing equations of fluid mechanics in physical curvilinear coordinate system, Electronic Journal of Differential Equations Conference 01 (1997), 149–157, http://ejde.math.txstate.edu/.
- [62] T. Leweke and M. Provensal, *The flow behind rings : bluff body wakes without end effects.*, J. Fluid Mech. 288 (1995), 265–310.
- [63] Q.X. Lian, A visual study of the coherent structure of the turbulent boundary layer in flow with adverse pressure gradient, J. Fluid Mech. **215** (1990), 101–124.
- [64] D.P. Lockard and P.J. Morris, *Radiated noise from airfoils in realistic mean flows*, AIAA Journal **36** (1998), no. 6.
- [65] H. Ludwieg and W. Tillmznn, *Investigations of the wall shearing stress in turbulent boundary layers*, NACA T.M. (1950), no. 1285.
- [66] M. Lummer, J. W. Delfs, and T. Lauke, *Simulation of sound generation by vortices passing the trailing edge of airfoils*, AIAA Paper 2002-2578 (2002).
- [67] H. Luo and T. Bewley, On the contravariant form of the Navier-Stokes equations in timedependent curvilinear coordinate systems, J. Comput. Phys. **199** (2004), 355–375.
- [68] E. Manoha, C. Herrero, P. Sagaut, and S. Redonnet, *Numerical prediction of airfoil aerodynamic noise*, AIAA Paper 2002-2573 (2002).
- [69] E. Manoha, B. Troff, and P. Sagaut, *Trailing edge noise prediction using large-eddy simulation and acoustic analogy*, AIAA Journal **38** (2000), no. 4, 575–583.
- [70] A. Marsden, M. Wang, and B. Mohammadi, *Shape optimisation for aerodynamic noise control*, Stanford University CTR research brief (2001).

- [71] I. Mary and P. Sagaut, *Large eddy simulation of flow around an airfoil*, AIAA Paper 2001-2559, Reno (2001).
- [72] _____, Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall, AIAA Journal 40 (2002), no. 6, 1139–1145.
- [73] J. Mathew, R. Lechner, H. Foysi, J. Sesterhenn, and R. Friedrich, *An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows*, Phys. Fluids **15** (2003), no. 8, 2279.
- [74] P. McKeough and J. Graham, *The effect of mean loading on the fluctuating loads induced on aerofoils by a turbulent stream*, The Aeronautical Quarterly **31** (1980), 55–69.
- [75] C. Meneveau and J. Katz, *Scale invariance and turbulence models for large-eddy simulation*, Ann. Rev. Fluid Mech. (2000).
- [76] P.J. Morris, The scattering of sound from a spatially distributed axisymmetric cylindrical source by a circular cylinder, The Journal of the Acoustical Society of America 97 (1995), no. 5, 2651–2656.
- [77] B. Mugridge, *Sound radiation from airfoils in turbulent flow*, J. Sound Vib. **13** (1970), no. 3, 362–363.
- [78] Y. Na and P. Moin, *Direct numerical simulation of turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation*, Stanford University TF-68 (1996).
- [79] _____, *Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer*, J. Fluid Mech. **374** (1998), 379–405.
- [80] C. Norberg, An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio, J. Fluid Mech. **258** (1994), 287–316.
- [81] A. Oberai, F. Roknaldin, and Th. Hughes, *Computation of trailing-edge noise due to turbulent flow over an airfoil*, AIAA Journal **40** (2002), no. 11, 2206–2216.
- [82] S. Ogara and T. Ishiguro, A method for computing flow fields around moving bodies, J. Comput. Phys. 69 (1987), 49–68.
- [83] R.L. Panton, Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence, Progess in Aerospace sciences 37 (2001), 341–383.
- [84] R. Paterson and R. Amiet, Acoustic radiation and surface pressure characteristics of an airfoil due to incident turbulence, AIAA Paper 76-571 (1976).
- [85] F. Pérot, *Calcul du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents basé sur des analogies acoustiques couplées aux simulations aérodynamiques instationnaires*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004-32.
- [86] A. Persillon and M. Braza, *Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation*, J. Fluid Mech. 365 (1998), 23–88.
- [87] T.J. Poinsot and S.K. Lele, *Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows*, J. Comput. Phys. **101** (1992), 104–129.

- [88] D. Porter, P. Woodward, and A. Pouquet, *Inertial range structures in compressible turbulent flows*, Phys. Fluids **10** (1998), 237–245.
- [89] O. Posdziech and R. Grundmann, Numerical simulation of the flow around an infinitely long circular cylinder in the transition regime, Theoret. Comput. Fluid Dynamics 15 (2001), no. 2, 121–141.
- [90] D.P. Rizzetta, M.R. Visbal, and G.A Blaisdell, A time-implicit high-order compact differencing and filtering scheme for large-eddy simulation, International Journal Numerical Meth. Fluids 42 (2003), 665–693.
- [91] P. Schlatter, S. Stolz, and L. Kleiser, *Les of transitional flows using the approximate deconvolution model*, Int. J. Heat Fluid Flow **25** (2004), no. 3.
- [92] R. Schlinker, *Airfoil trailing edge noise measurements with a directional microphone*, AIAA Paper 77-1269, Atlanta, Georgia (1977).
- [93] H. Schmidbauer, *Behavior of turbulent boundary layers on curved convex walls*, Tech. report, NACA Tech. Memorandum, 1936.
- [94] S.E. Sherer, *Scattering of sound from axisymetric sources by multiple circular cylinders*, J. Acoust. Soc. Am. **115** (2004), no. 2, 488–496.
- [95] S.E. Sherer and J. Scott, *Comparison of highly accurate interpolation methods*, AIAA Paper 2001-0282 (2001).
- [96] S.E. Sherer and M. Visbal, *Computational study of acoustic scattering from multiple bodies using a high-order overset grid approach*, AIAA Paper 2003-3203 (2003).
- [97] A. Silverstein and J.V. Becker, *Determination of the boundary-layer transition on three symmetrical airfoils in the n.a.c.a. full-scale wind tunnel*, Tech. Report 637, NACA, 1938.
- [98] B.A. Singer, K.S. Brentner, D.P. Lockard, and G.M. Lilley, *Simulation of acoustic scattering from a trailing edge*, J. Sound Vib. **230** (2000), no. 3, 541–560.
- [99] B.A. Singer, D.P. Lockard, and K.S. Brentner, *Computational aeroacoustic analysis of slat trailing-edge flow*, AIAA Journal **38** (2000), no. 9, 1558–1564.
- [100] P. Spalart, *Direct simulation of a turbulent boundary layer up to r sub theta = 1410*, J. Fluid Mech. 187 (1988), 61–98.
- [101] S. Stolz, N.A. Adams, and L. Kleiser, An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows, Phys. Fluids 13 (2001), no. 4, 997–1015.
- [102] C.K.W. Tam, Computational aeroacoustics : issues and methods, AIAA Journal 33 (1995), no. 10, 1788–1796.
- [103] C.K.W. Tam and Z. Dong, Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, J. Comput. Acous. 4 (1996), no. 2, 175–201.
- [104] C.K.W. Tam and F. Hu, *An optimized multidimensional interpolation scheme for computational aeroacoustics applications using overset grids*, AIAA Paper (2004), no. 2004-2812.

- [105] C.K.W. Tam and K.A. Kurbatskii, A wavenumber based extrapolation and interpolation method for use in conjunction with high-order finite difference schemes, J. Comput. Phys. 157 (2000), 588–617.
- [106] C.K.W. Tam and H. Shen, Direct computation of nonlinear pulses using high order finite difference scheme, AIAA Paper 93-4325 (1993).
- [107] C.K.W. Tam and J.C. Webb, *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*, J. Comput. Phys. **107** (1993), 262–281.
- [108] M. Terracol, E. Labourasse, and E. Manoha, *Simulation of the 3d unsteady flow in a slat cove for noise prediction*, AIAA Paper 2003-3110 (2003).
- [109] P.D. Thomas and C.K. Lombard, The Geometric conservation law a link between finitedifference and finite- volume methods of flow computation on moving grids, AIAA Journal 17 (1978), no. 10, 1030–1037.
- [110] _____, *Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids*, AIAA Journal **17** (1979), no. 10, 1030–1037.
- [111] K.W. Thompson, *Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems*, J. Comput. Phys. **68** (1987), 1–24.
- [112] _____, *Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II*, J. Comput. Phys. **89** (1990), 439–461.
- [113] M. Thompson, K. Hourigan, and J. Sheridan, *Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder*, Experimental Thermal and Fluid Science **12** (1996), no. 2, 190–196.
- [114] W. Tollmien, *Über die entstehung der turbulenz. 1. mitteilung*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1929), english translation in NACA TM 609 (1931).
- [115] C. Truesdell, *The physical components of vectors and tensors*, Journal of Applied Math. Mech. **33** (1953), 345–356.
- [116] O. Vasilyev, T.S. Lund, and P. Moin, *A general class of commutative filters for les in complex geometries*, J. Comput. Phys. **146** (1998), 105–123.
- [117] M Visbal, *Benchmark problems category 2 : Multi-geometry scattering problem*, Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, 2003.
- [118] M. Visbal and D. Gaitonde, *High-order-accurate methods for complex unsteady subsonic flows*, AIAA Journal **37** (1999), no. 10, 1231–1239.
- [119] H. Viviand, *Formes conservatives des equations de la dynamique des gaz*, La Recherche Aerospatiale (1974), no. 1, 65–68.
- [120] P.R. Voke and M.W. Collins, Forms of the generalized Navier-Stokes equations, J. Eng. Math 18 (1984), 219–233.
- [121] A. von Doenhoff and N. Tetervin, *Determination of general relations for the behavior of turbulent boundary layers*, NACA T.R. (1943), no. 772.

- [122] A.W. Vreman, B.J. Geurts, and J.G.M. Kuerten, *Subgrid-modelling in les of compressible flow*, Appl. Sci. Res. (1995).
- [123] M. Wang, *Aerodynamic sound of flow past an airfoil*, Stanford Center for Turbulent Research - Annual Research Briefs (1995), 257–271.
- [124] M. Wang and P. Moin, *Computation of trailing-edge flow and noise using large-eddy simulation*, AIAA Journal **38** (2000), no. 12, 2201–2209.
- [125] G. N. Watson, A treatise on the theory of bessel functions, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1966.
- [126] C.H.K Williamson, Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers, J. Fluid Mech. **206** (1989), 579–627.
- [127] _____, Vortex dynamics in the cylinder wake, Ann. Rev. Fluid Mech. (1996).
- [128] M.M. Zdravkovich, *Flow around circular cylinders. Vol. 1 : Fundamentals*, Oxford University Press, 1997.
- [129] H. Zhang, U. Fey, B.R. Noack, M. König, and H. Eckelmann, *On the transition of the cylinder wake.*, Phys. Fluids 7 (1995), no. 4, 779–794.

A Les profils NACA

A.1 Génération des profils NACA

Le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), ancien acronyme de la NASA, a étudié différentes familles de profils répondant à diverses applications. Parmi celles ci, on peut distinguer la famille de profils à quatre chiffres, celle à cinq chiffres et les profils laminaires portant la désignation NLF. Dans ce travail, nous nous sommes principalement intéressés aux profils à quatre chiffres.

A.1.1 Famille de profils à quatre chiffres

Dans cette famille, un profil est représenté par quatre chiffres. Le premier indique la cambrure maximale relative en pourcentage de la corde ; le deuxième représente la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers spécifient l'épaisseur relative maximale en pourcentage de la corde. Par exemple, dans le cas du profil 4412 :

Le 4 indique la cambrure maximale (4%)

- Le deuxième 4 indique la position de la cambrure maximale (40%)
- Le 12 indique l'épaisseur relative maximale (12%)

Remarquons qu'un profil symétrique sera nécessairement du type 00xx.

Il faut également préciser les expressions permettant de calculer les coordonnées des points d'un profil. Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante :

$$\pm y_i = \frac{t}{0.2} \left(0.2969 \sqrt{\xi} - 0.1260\xi - 0.3537\xi^2 + 0.2483\xi^3 - 0.1015\xi^4 \right)$$

et le rayon de courbure au bord d'attaque est égal à r = 1,1019t où t désigne l'épaisseur relative maximale du profil.

Pour le cas des profils cambrés, la forme géométrique de la cambrure moyenne est représentée par deux paraboles :

$$\begin{cases} y_c = \frac{y_A}{x_A^2} x(2x_A - x) & 0 \le x \le x_A \\ y_c = \frac{y_A}{(c - x_A)^2} (c - x)(c + x - 2x_A) & x_A \le x \le c \end{cases}$$

où le point A (x_A , y_A), situé à la distance où la flèche est maximale, représente le point commun des deux paraboles. Il est à noter que y_A représente la cambrure maximale et que x_A en donne la position.

L'équation de la forme géométrique d'un profil cambré est donc :

– pour l'extrados :

$$\begin{cases} x_e = x - y_t \sin q \\ y_e = y_c + y_t \cos q \end{cases}$$

– pour l'intrados :

$$\begin{cases} x_i = x + y_t \sin q \\ y_i = y_c - y_t \cos q \end{cases}$$

avec y_t identique à celui des profils symétriques et $q = dy_c/dx$.

A.1.2 Famille de profils à 5 chiffres

Dans cette famille, cinq chiffres caractérisent les profils. L'idée générale est très semblable à celle de la famille précédente, et d'ailleurs la même distribution d'épaisseur le long de la corde c est utilisée. Par contre la cambrure est définie de manière plus complexe : une fonction cubique est utilisée pour la première partie de la cambrure, du bord d'attaque jusqu'à une abscisse p qui correspond au point de cambrure maximale, et de cette abscisse jusqu'au bord de fuite, la cambrure décroît linéairement. L'équation suivante traduit cette variation :

$$y_c = \frac{k_1}{6} [x^3 - 3mx^2 + m^2(3 - m)x]$$
 de x=0 à p
 $y_c = \frac{k_1 m^3}{6} (1 - x)$ de x= p au bord de fuite

L'abscisse p est choisie par le dessinateur, et les valeurs de m et de k_1 sont tabulées par rapport à p. Les cinq chiffres font référence aux choix du dessinateur : le premier donne les vingt tiers du coefficient de portance caractéristique c_l , les deux suivants donnent vingt fois le rapport p/c, et les deux derniers donnent l'épaisseur maximale divisée par la corde. L'obtention des coordonnées finales du profil se fait comme pour un profil NACA à quatre chiffres.

A.1.3 La famille 1X-XXX

La famille NACA 1X-XXX, généralement appelée 16-XXX comme il sera expliqué plus bas, est issu d'un changement de démarche dans la conception d'un profil : au lieu de partir de l'aspect géométrique et d'étudier ensuite le comportement aérodynamique, on postule une distribution de pression moyenne autour du profil, et on utilise une méthode inverse pour reconstituer une forme de profil susceptible d'atteindre cette distribution. En spécifiant la distribution de pression, on spécifie entre autre les caractéristiques de la portance. Des paramètres importants du comportement aérodynamique sont de cette manière imposés lors de l'élaboration du profil. Dans la nomenclature de cette famille, le premier 1 fait référence à une série commune, ici une série destinée à des profils d'aile avec une petite zone faiblement supersonique. Le chiffre suivant indique l'emplacement du minimum de pression en dixièmes de la corde. Un minimum de pression à 60% de la corde est rapidement devenu un choix standard, d'où le nom commun 16-XXX de cette famille. Le premier chiffre après le tiret donne dix fois le coefficient de portance théorique, un 2 correspondant ainsi à $c_l = 0.2$. Enfin les deux derniers chiffres donnent l'épaisseur maximale en pourcentage de la corde.

A.1.4 Famille de profils laminaires

Cette famille constitue en quelque sort une amélioration de la précédente. On cherche toujours à spécifier non pas la géométrie d'un profil mais ses caractéristiques aérodynamiques. Cependant la résolution du problème inverse est faite avec une méthode plus performante. De plus, une meilleure connaissance du comportement des couches limites a permis d'agrandir encore la zone de couche limite laminaire pour un coefficient de portance donné, ce qui minimise la traînée du profil dans ces conditions. Leur nomenclature est différente de celle de la série précédente. Par exemple pour le NACA 66₂ – 215 :

- Le premier 6 représente la désignation de la série (profil laminaire)
- Le deuxième 6 représente la position de la pression minimale (60%)
- L'indice 2 indique que la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable vaut 0.2
- Le 2 représente le coefficient de portance caractéristique 0.2
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15%)

Parmi les profils laminaires, on peut mentionner deux autres séries développées à chaque fois comme une amélioration de la série précédente : la série 7-XXX et la série 8-XXX.

B Les profils Joukowski

B.1 Transformation conforme

Une transformation du plan est dite conforme lorsqu'elle préserve localement les angles. Une condition équivalente sur la transformation est qu'elle soit dérivable en tout point, et que la dérivée ne s'annule pas.

La transformation de Joukowski est un exemple particulier de transformation conforme. La formulation initiale trouvée par Joukowski s'écrit :

$$z' = z + \frac{1}{z}$$

Celle-ci a été généralisée par la suite en remplaçant le terme 1/z par λ^2/z pour donner :

$$z' = z + \frac{\lambda^2}{z}$$

Cette transformation se montre particulièrement intéressante lorsque elle est appliquée à un cercle. La position du centre (x_c, y_c) du cercle influe très largement sur la forme résultante. Un profil symétrique est obtenu en plaçant le centre du cercle sur l'axe y = 0; l'épaisseur du profil varie alors avec x_c . Un profil plus ou moins cambré peut être obtenu en modifiant la valeur de y_c . La figure B.1 illustre la construction géométrique du point w image de z par la transformation de Joukowski. Un profil asymétrique complet, image du cercle de centre G par la même transformation, est représenté sur la figure B.2.

B.2 Profils de Joukowski

Les profils de Joukowski possèdent des propriétés très intéressantes. La plus notable est la possibilité de calculer facilement un écoulement potentiel autour du profil, ou même autour d'une forme donnée par une transformation conforme quelconque.

En effet, en introduisant le potentiel de vitesse Φ dans l'espace (x, y), vérifiant donc l'équa-



FIG. B.1 – Construction de la transformation z + 1/z.



FIG. B.2 – Profil de Joukowski créé à partir d'un cercle.

tion de Laplace :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

On peut alors montrer que pour tout changement de variable $z = x + iy \rightarrow \zeta = \xi + i\eta$ associé à une transformation conforme f, Φ vérifie également l'équation de Laplace dans le plan transformé :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

B.2. PROFILS DE JOUKOWSKI

Pour montrer ceci, on développe le laplacien de Φ par rapport à ξ et η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right] + \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Ensuite on montre la nullité de chaque terme en utilisant les propriétés particulières de f:

– les deux composantes $\xi = f_1(z)$ et $\eta = f_2(z)$ vérifient elles-mêmes l'équation de Laplace dans l'espace transformé, donc :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

- *f* possède une dérivée complexe donc :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
 et $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$

ce qui permet d'annuler le terme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

- La propriété précédente permet également d'écrire que :

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

On obtient bien au final :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

Le champ de vitesse dans le domaine transformé est alors lié au champ d'origine par la formule :

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{1}{f'(z)}\frac{d\Phi}{dz}$$

ce qui permet de calculer les composantes selon *x* et selon *y* de la vitesse.

Un autre aspect utile des profils de Joukowski est la facilité avec laquelle on construit un maillage de pas azimuthal prédéterminé. Pour cela il suffit de mailler le cercle de départ avec un pas azimuthal dont l'image par la transformation f est celle désirée. Ainsi on peut aisément construire des maillages dont le taux d'étirement est parfaitement maîtrisé.

C Solutions analytiques des cas tests de diffraction

Solutions analytiques des cas tests étudiés

Cas test n° 1 du 2nd CAA workshop on benchmark problems

Solution cylindrique pour des conditions initiales

Introduisons le potentiel acoustique ϕ tel que $\mathbf{u} = \nabla \phi$ et $p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t$. La fonction ϕ vérifie également l'équation des ondes, et on cherche alors une solution au problème suivant :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \qquad \phi(r, 0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = -g(r) \qquad (r, t) \in \mathbb{R}^+$$

La résolution de ce problème peut se faire en introduisant la transformée de Hankel du premier ordre :

$$\tilde{\phi}\left(\xi\right) = \int_{0}^{\infty} r\phi\left(r\right) J_{0}\left(\xi r\right) dr \qquad \text{et} \qquad \phi\left(r\right) = \int_{0}^{\infty} \xi \tilde{\phi}\left(\xi\right) J_{0}\left(\xi r\right) d\xi \qquad (C.1)$$

qui possède la propriété remarquable suivante :

$$\int_{0}^{\infty} r \left(\frac{\partial^{2} \phi}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \mathbf{J}_{0} \left(\xi r \right) dr = -\xi^{2} \tilde{\phi} \left(\xi \right)$$

En appliquant la transformée de Hankel à l'équation des ondes en coordonnées cylindriques, il vient : $\partial^2 \tilde{\phi} / \partial t^2 + c_0^2 \xi^2 \tilde{\phi} = 0$. On en déduit alors immédiatement l'expression de $\tilde{\phi}(\xi, t) = A(\xi) \cos(c_0 t\xi) + B(\xi) \sin(c_0 t\xi)$, soit encore en tenant compte des conditions au limites :

$$\tilde{\phi}(\xi,t) = -\tilde{g}(\xi)/\xi c_0 \sin(c_0 t\xi) \quad \text{et} \quad \phi(r,t) = -\int_0^\infty \xi \frac{\tilde{g}}{\xi c_0} \sin(c_0 t\xi) J_0(\xi r) d\xi$$

En considérant maintenant comme condition initiale p(r, t = 0) = g(r), la pression est

donnée par l'intégrale suivante :

$$p(r,t) = \int_0^\infty \xi \tilde{g}(\xi) \cos(c_0 t \xi) J_0(\xi r) d\xi$$
(C.2)

A titre d'exemple, on choisit d'initialiser la pression avec un pulse gaussien $g(r) = \exp(-\alpha r^2)$, dont la transformée de Hankel d'ordre 0 est [41] :

$$\tilde{g}\left(\xi\right) = \int_{0}^{\infty} r e^{-\alpha r^{2}} J_{0}\left(\xi r\right) dr = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{\xi^{2}}{4\alpha}}$$

La solution à l'équation des ondes est alors donnée par l'expression :

$$p(r,t) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \xi e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \cos\left(c_0 t\xi\right) \mathbf{J}_0\left(\xi r\right) d\xi \tag{C.3}$$

Diffraction d'un pulse acoustique par un cylindre

Ce cas est proposé dans le deuxième workshop de CAA[1] et la solution analytique correcte est publiée par Tam & Hu[104]. On cherche la solution sous la forme $p = p_i + p_r$ où p_i est le champ de pression incident, obtenu en champ libre sans la présence du cylindre, et p_r le champ acoustique diffracté par le cylindre. La solution du champ incident est donnée par l'expression (C.3) du paragraphe précédent. En introduisant de nouveau le potentiel acoustique de la vitesse ϕ_i , on a pour une perturbation initialement gaussienne g placée en $(x_s, 0)$:

$$\phi_i(r,\theta,t) = -\frac{1}{2\alpha c_0} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \sin(c_0 t\xi) J_0(\xi r_s) d\xi$$
$$= \int_0^\infty A_i(r,\theta,\xi) \sin(c_0\xi t) d\xi$$

avec $r_s^2 = (x - x_s)^2 + y^2 = r^2 + x_s^2 - 2rx_s \cos \theta$, $g(r) = e^{-\alpha r_s^2}$ et $\alpha = \ln 2/b^2$. On peut encore écrire cette solution en introduisant les notations complexes :

$$\phi_i(r,\theta,t) = \mathcal{I}_m \left\{ \int_0^\infty A_i(r,\theta,\xi) e^{-ic_0\xi t} d\xi \right\} \quad \text{et} \quad p_i = \mathcal{R}_e \left\{ -\rho_0 \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right\} \quad (C.4)$$

Compte-tenu de la forme du champ incident (C.4), on cherche pour le champ diffracté ϕ_r une solution de la même forme :

$$\phi_r(r,\theta,t) = \mathcal{I}_m\left\{\int_0^\infty A_r(r,\theta,\xi)e^{-ic_0\xi t}d\xi\right\}$$
(C.5)

où A_r est solution de l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \xi^2 A_r = 0$$

Les conditions aux limites pour ϕ_r sont données par :

$$\left. \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right|_{r=R} = - \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right|_{r=R} \tag{C.6}$$

où *R* est le rayon du cylindre placé à l'origine du repère. Par séparation des variables $A_r = f(\theta)g(r)$, on en déduit alors que :

$$\frac{r^2}{g}\left(g'' + \frac{g'}{r} + \xi^2 g\right) = -\frac{f''}{f} = C$$

Pour avoir une fonction harmonique et périodique pour f, il faut que la constante $C = k^2$ soit positive avec k entier. Autrement dit, on ne particularise pas la solution en $\theta = 0$ et on assure également la continuité. On utilise alors un développement en $\cos(k\theta)$ pour A_r :

$$A_r(r,\theta,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \operatorname{H}_k^{(1)}(\xi r) \cos(k\theta)$$
(C.7)

La suite du calcul consiste à déterminer les coefficients C_k . La condition aux limites (C.6) impose que :

$$\frac{\partial A_r}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{\partial A_i}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}}{2\alpha c_0}\frac{R-x_s\cos\theta}{R_s}\xi J_1(\xi R_s) \qquad R_s = r_s|_{r=R}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi \left[\frac{k}{\xi R} H_k^{(1)}(\xi R) - H_{k+1}^{(1)}(\xi R)\right]\cos(k\theta)$$

en utilisant les deux propriétés, cf. Watson[125], p. 74 :

$$J'_0(z) = -J_1(z)$$
 et $\frac{d}{dz}H_k^{(1)}(z) = \frac{k}{z}H_k^{(1)}(z) - H_{k+1}^{(1)}(z)$

Il reste à identifier les coefficients C_k de la série de Fourier. On utilise pour cela le résultat suivant :

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta)$$
 avec $A_k = \frac{\epsilon_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cos(k\eta) d\eta$

où $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_k = 2$ pour $k \neq 0$. Il vient dans notre cas :

$$C_k \xi \left[\frac{k}{\xi R} \operatorname{H}_k^{(1)}(\xi R) - \operatorname{H}_{k+1}^{(1)}(\xi R) \right] = -\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}}{2\alpha c_0} \xi \frac{\epsilon_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - x_s \cos \eta}{R_s} \operatorname{J}_1\left(\xi R_s\right) \cos(k\eta) d\eta$$

soit encore :

$$C_{k} = -\frac{e^{-\frac{\xi^{2}}{4\alpha}}}{2\alpha c_{0}} \frac{1}{\frac{k}{\xi R} H_{k}^{(1)}(\xi R) - H_{k+1}^{(1)}(\xi R)} \frac{\epsilon_{k}}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{R - x_{s} \cos \eta}{R_{s}} J_{1}(\xi R_{s}) \cos(k\eta) d\eta$$

Le potentiel ϕ_r du champ diffracté est finalement obtenu avec (C.5) et (C.7). Le champ total $\phi = \phi_i + \phi_r$ s'écrit :

$$\phi(r,\theta,t) = \mathcal{I}_m \left\{ \int_0^\infty A(r,\theta,\xi) e^{-ic_0\xi t} d\xi \right\}$$
(C.8)

où :

$$A(r,\theta,\xi) = -\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}}{2\alpha c_0} \left\{ J_0(\xi r_s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k^{(1)}(\xi r)\cos(k\theta)}{\frac{k}{\xi R}H_k^{(1)}(\xi R) - H_{k+1}^{(1)}(\xi R)} \right. \\ \left. \times \frac{\epsilon_k}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{R - x_s \cos\eta}{R_s} J_1(\xi R_s)\cos(k\eta)d\eta \right\}$$

En utilisant des variables sans dimensions, construites à partir du diamètre du cylindre D = 2R, de la vitesse du son c_0 et de la masse volumique ρ_0 , on obtient donc finalement pour expression du champ de pression d'une perturbation initialement gaussienne[104] :

$$\tilde{p}(\tilde{r},\theta,t) = \mathcal{R}_e \left\{ \int_0^\infty \tilde{\xi} \tilde{B}(r,\theta,\xi) \cos(\tilde{\xi}\tilde{t}) d\tilde{\xi} \right\}$$
(C.9)

où :

$$\tilde{B} = \frac{e^{-\frac{\tilde{\xi}^2}{4\tilde{\alpha}}}}{2\tilde{\alpha}} \left\{ J_0\left(\tilde{\xi}\tilde{r}_s\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k^{(1)}(\tilde{\xi}\tilde{r})\cos(k\theta)}{\frac{2k}{\tilde{\xi}}H_k^{(1)}(\frac{\tilde{\xi}}{2}) - H_{k+1}^{(1)}(\frac{\tilde{\xi}}{2})} \frac{\epsilon_k}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{0.5 - \tilde{x}_s\cos\eta}{\tilde{R}_s} J_1\left(\tilde{\xi}\tilde{R}_s\right)\cos(k\eta)d\eta \right\}$$

avec

$$ilde{r}_s = \sqrt{ ilde{r}^2 + ilde{x}_s^2 - 2 ilde{r} ilde{x}_s\cos\eta} \qquad ilde{R}_s = \sqrt{0.25 + ilde{x}_s^2 - ilde{x}_s\cos\eta}$$

Cas test n° 2 du 2nd CAA workshop on benchmark problems

Pour ce cas test on remplace le pulse initial de pression par une source monopôlaire d'enveloppe spatiale identique. Le calcul du champ de pression engendré par ce cas se fait en deux étapes : premièrement on calcule le champ résultant de la source monopôlaire gaussienne, et ensuite on calcule la diffraction de ce champ incident par le cylindre.

Champ de pression émis par une source monopôlaire gaussienne

On cherche à résoudre les équations d'Euler linéarisées avec un terme source harmonique placé à l'origine :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{C.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{C.11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = S(x, y, t)$$
(C.12)

avec

$$S(x, y, t) = \exp\left[\frac{-\ln 2(x^2 + y^2)}{w^2}\right]\sin(\omega t)$$

En éliminant les deux composantes de la vitesse des équations C.10, C.11 et C.12 on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = e^{\left[-b(x^2 + y^2)\right]} \mathcal{I}_m\left(i\omega e^{-i\omega t}\right)$$
(C.13)

où $b = \ln 2/w^2$.

Le problème étant périodique, cherchons la pression *p* sous la forme

$$p(x, y, t) = \mathcal{I}_m\left(\hat{p}(x, y)e^{-i\omega t}\right)$$
(C.14)

En substituant cette expression de *p* dans l'équation C.13 on obtient l'équation de Helmholtz inhomogène suivante :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \omega^2 \hat{p} = -i\omega e^{-b(x^2 + y^2)}$$
(C.15)

qui s'écrit également en coordonnées cylindriques (r_s, θ_s) centrées sur la source

$$\frac{d^2\hat{p}}{dr_s^2} + \frac{1}{r_s}\frac{d\hat{p}}{dr_s}\omega^2\hat{p} = -i\omega e^{-br_s^2} \tag{C.16}$$

en utilisant l'invariance du problème par rapport à θ_s . À l'équation C.16 il faut ajouter une condition de rayonnement à l'infini, et la condition $\hat{p}(0)$ borné.

En tenant compte de la condition à l'origine, la fonction de Green de l'équation C.16 s'écrit :

$$G(r_s,\xi) = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2}\xi J_0(\omega r_s) H_0^{(1)}(\omega\xi), & 0 \le r_s \le \xi \\ -\frac{\pi i}{2}\xi J_0(\omega\xi) H_0^{(1)}(\omega r_s), & \xi \le r_s \le \infty \end{cases}$$
(C.17)

La solution pour le champ spatial \hat{p} est alors

$$\hat{p}(r_s) = \int_0^\infty G(r_s,\xi) \left(-i\omega e^{-b\xi^2}\right) d\xi$$
(C.18)

On connaît donc le champ créé par la source monopôlaire gaussienne en tout point du plan.

Diffraction du champ incident par un cylindre

Examinons maintenant le cas d'un cylindre placé dans le plan en présence de la source. Le champ de pression peut cette fois s'écrire

$$p(x,y,t) = \mathcal{I}_m\left(\left[\hat{p}_i(x,y) + \hat{p}_d(x,y)\right]e^{-i\omega t}\right)$$
(C.19)

où \hat{p}_i est le champ incident provenant directement de la source, et \hat{p}_d est le champ diffracté par le cylindre. Le champ diffracté vérifie l'équation de Helmholtz homogène

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}_d}{\partial y^2} + \omega^2 \hat{p}_d = 0$$
 (C.20)

qui s'écrit, en utilisant les coordonnées (r, θ) centrées sur le cylindre,

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_d}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_d}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{p}_d}{\partial \theta^2} + \omega^2 \hat{p}_d = 0$$
(C.21)

De plus, à la surface du cylindre, la dérivée normale du champ *p* est nulle. On a donc :

$$\frac{\partial \hat{p}_d}{\partial r}\Big|_{r=r_{cyl}} = -\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r}\Big|_{r=r_{cyl}} = B(\theta)$$
(C.22)

Le terme $\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r}$ peut être calculé à partir de l'expression du champ rayonné par la source, une fois \hat{p}_i exprimé en fonction des coordonnées centrées sur le cylindre :

$$\hat{p}_i(r,\theta) = \int_0^\infty Q(r,\theta,\xi) \left(-i\omega e^{-b\xi^2}\right) d\xi$$
(C.23)

avec :

$$Q(r,\theta,\xi) = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2} \xi J_0(\omega \sqrt{r^2 + x_s^2 - 2rx_s \cos \theta}) H_0^{(1)}(\omega\xi), & 0 \le r_s \le \xi \\ -\frac{\pi i}{2} \xi J_0(\omega\xi) H_0^{(1)}(\omega \sqrt{r^2 + x_s^2 - 2rx_s \cos \theta}), & \xi \le r_s \le \infty \end{cases}$$
(C.24)

On obtient donc :

$$B(\theta) = -\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r}\Big|_{r=r_{cyl}} = -\int_0^\infty \frac{\partial Q}{\partial r}(r_{cyl},\theta,\xi) \left[-i\omega e^{-b\xi^2}\right] d\xi$$
(C.25)

où :

$$\frac{\partial Q}{\partial r}(r_{cyl},\theta,\xi) = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2}\xi\omega\frac{r_{cyl}-x_s\cos\theta}{\sqrt{r_{cyl}^2+x_s^2-2r_{cyl}x_s\cos\theta}} J_0\left(\omega\sqrt{r_{cyl}^2+x_s^2-2r_{cyl}x_s\cos\theta}\right) H_0^{(1)}(\omega\xi), & 0 \le r_s \\ -\frac{\pi i}{2}\xi\omega\frac{r_{cyl}-x_s\cos\theta}{\sqrt{r_{cyl}^2+x_s^2-2r_{cyl}x_s\cos\theta}} J_0(\omega\xi) H_0^{(1)}\left(\omega\sqrt{r_{cyl}^2+x_s^2-2r_{cyl}x_s\cos\theta}\right), & \xi \le r_s \end{cases}$$

$$(C.26)$$

Le champ \hat{p}_d peut être résolu en séparant les variables r et θ dans l'équation C.21, ce qui donne :

$$\hat{p}_d(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \operatorname{H}_k^{(1)}(r\omega) \cos(k\theta)$$
(C.27)

et ainsi :

$$\frac{\partial \hat{p}_d(r,\theta)}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[\frac{k}{r_{cyl}} \operatorname{H}_k^{(1)}(r_{cyl}\omega) - \omega \operatorname{H}_{k+1}^{(1)}(r_{cyl}\omega) \right] \cos(k\theta) = B(\theta)$$
(C.28)

en utilisant une expression de la dérivée de la fonction de Hankel tirée de Watson[125]. L'identification des coefficients C_k se fait en multipliant cette expression par $\cos(l\theta)$ et ensuite en intégrant le résultat entre 0 et π , en remarquant que

$$\int_0^{\pi} \cos^2(k\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, k \ge 1\\ \pi, k = 0 \end{cases}$$
(C.29)

on obtient enfin

$$C_{k} = \frac{\epsilon_{k}}{\pi\omega \left[\frac{2k}{\omega} \operatorname{H}_{k}^{(1)}(r_{cyl}\omega) - \operatorname{H}_{k+1}^{(1)}(r_{cyl}\omega)\right]} \int_{0}^{\pi} B(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$
(C.30)

avec $\epsilon_k = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 2, k \ge 1 \end{cases}$

Il suffit alors d'utiliser l'équation C.19 pour trouver le champ total de pression en tout point du plan.

Cas test n° 1 de la catégorie 2 du 4th CAA workshop on benchmark problems

Diffraction d'une source monopôlaire non-compacte par deux cylindres de rayons différents

La solution analytique au problème plus général de la diffraction d'une source acoustique par un nombre quelconque de cylindres de rayons différents, situés à égale distance de la source, a été proposée par Sherer[94]. Nous résumons ici la solution générale car le développement pour deux cylindres est simplement un cas particulier de celle-ci.

On cherche à calculer le champ de pression autour d'un ensemble de *M* cylindres de rayons différents, situés à égale distance d'une source monopôlaire non-compacte dont l'amplitude *S* est donnée plus loin. Les équations d'Euler linéarisées avec une terme de forçage *S* constituent le point de départ du développement analytique sur l'équation d'énergie, ce qui donne le système suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{C.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{C.32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{C.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = S \tag{C.34}$$

avec

$$S = \exp\left[\frac{-\ln 2(x^2 + y^2)}{b^2}\right]\sin(\omega t)$$

La pression peut être découplée de la vitesse dans les équations (C.32) à (C.34), et moyennant l'hypothèse d'un champ de pression périodique, on peut obtenir l'équation de Helmholtz suivante :

$$\nabla^2 \tilde{p} + \omega^2 \tilde{p} = +i\omega \left[\frac{-\ln 2 \left(x^2 + y^2 \right)}{b^2} \right]$$
(C.35)

On suppose alors que le champ de pression est la superposition du champ incident p_s issu de la source *S* et des *M* champs diffractés par les cylindres p_{cyl}^i :

$$\tilde{p} = p_s + \sum_{i=1}^{M} p_{cyl}^i \tag{C.36}$$

Chaque champ diffracté vérifie l'équation de Helmholtz homogène :

$$\nabla^2 p^i_{cyl} + \omega^2 p^i_{cyl} = 0, \quad i = 1, M$$
 (C.37)
et le champ incident vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 p_s + \omega^2 p_s = -i\omega \exp\left(-\ln 2r^2/b^2\right) \tag{C.38}$$

ou $r^2 = x^2 + y^2$ est la distance depuis la source jusqu'au point considéré. La condition de paroi $\vec{v}.\vec{n} = 0$ peut être exprimée en fonction de la pression, et en suivant la décomposition donnée dans l'équation (C.36), on obtient :

$$\frac{\partial p_s}{\partial r_j}\bigg|_{r_j=a_j} = -\sum_{i=1}^M \frac{\partial p_{cyl}^i}{\partial r_j}\bigg|_{r_j=a_j} \quad j = 1, 2, \dots M$$
(C.39)

où a_1 et a_2 sont les rayons des deux cylindres.

Le champ incident dans le repère de la source a été formulé par Morris[76] en résolvant l'équation (C.38) grâce à une transformée de Hankel :

$$p_s(r) = \frac{i\omega b^2}{2\ln 2} \int_0^\infty \frac{s J_0(s r)}{(s^2 - \omega^2)} \exp\left(-\frac{b^2 s^2}{4\ln 2}\right) ds$$
(C.40)

Les champs diffractés sont calculés à partir de l'équation (C.37) en effectuant une séparation de variables pour chaque cylindre. En coordonnées polaires (r_i , θ_i) locales au cylindre (i), le champ diffracté par celui-ci est :

$$p_{cyl}^{i}(r_{i},\theta_{i}) = A_{0i} H_{0}(\omega r_{i}) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{n}(\omega r_{i}) \left[A_{ni} \cos(n\theta_{i}) + B_{ni} \sin(n\theta_{i})\right] \quad i = 1, 2, \dots M$$
(C.41)

où H_n est la fonction de Hankel d'ordre n, et les A_{ni} et les B_{ni} sont des coefficients qui restent à déterminer.

Les coefficients de l'équation (C.41) peuvent être trouvés en appliquant les conditions de paroi de l'équation (C.39). Pour cela, le champ incident et les champs diffractés sont écrits dans les repères locaux à chaque cylindre, en utilisant les relations de la forme :

$$J_0(\omega r) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m J_m(\omega L_j) J_m(\omega r_j) \times \left[\cos(m\alpha_j) \cos(m\theta_j) + \sin(m\alpha_j) \sin(m\theta_j) \right]$$

$$H_n(\omega r_i)\cos(n\theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} \left\{ \left[(-1)^m \mathcal{K}_{ijmn}^{c+} + \mathcal{K}_{ijmn}^{c-} \right] \cos(m\theta_j) + \left[(-1)^m \mathcal{K}_{ijmn}^{s+} - \mathcal{K}_{ijmn}^{s-} \right] \sin(m\theta_j) \right\}$$

et enfin :

$$H_n(\omega r_i)\sin(n\theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2} \left\{ \left[(-1)^m \mathcal{K}^{s+}_{ijmn} + \mathcal{K}^{s-}_{ijmn} \right] \cos(m\theta_j) + \left[(-1)^m \mathcal{K}^{c+}_{ijmn} - \mathcal{K}^{c-}_{ijmn} \right] \sin(m\theta_j) \right\}$$

où (L_j, α_j) sont les coordonnées polaires du centre du cylindre (j) dans le repère de la source,

 ϵ_m vaut 1 pour m = 0 et 2 pour m > 0, et :

$$\mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)\pm} = \mathbf{H}_{n\pm m}(\omega D_{ij})\mathbf{J}_{\mathbf{m}}(\omega r_j) \cdot \begin{cases} \cos[(n\pm m)\psi_{ij}] \\ \sin[(n\pm m)\psi_{ij}] \end{cases}$$

où (D_{ij}, ψ_{ij}) sont les coordonnées polaires du centre du cylindre (j) par rapport au repère du cylindre (i).

On peut alors appliquer les conditions de paroi sur chaque cylindre, ce qui fournit des égalités dont les deux côtés contiennent des sommations infinies de termes en $cos(m\theta_j)$ ou $sin(m\theta_j)$. Les facteurs devant ces termes peuvent être identifiés membre à membre, à condition de tronquer les sommations à une valeur *N* finie arbitraire. On obtient alors un système linéaire de $M \times (2N + 1)$ équations portant sur le même nombre de coefficients A_{mi} et B_{mi} . Appelons \vec{x} le vecteur des inconnues, écrit sous la forme

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{X_1} \\ \vec{X_2} \\ \vdots \\ \vec{X_M} \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{X_i} = \begin{bmatrix} A_{0i} \\ A_{1i} \\ \vdots \\ A_{Mi} \\ B_{1i} \\ B_{2i} \\ \vdots \\ B_{Mi} \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire ce système d'équations sous la forme :

$$\mathcal{Z}\vec{x} = \vec{b}$$

où la matrice \mathcal{Z} est composée de 4 matrices de dimension $(2N+1) \times (2N+1)$, soit :

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} & \dots & \mathcal{Z}_{1M} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} & \dots & \mathcal{Z}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Z}_{M1} & \mathcal{Z}_{M2} & \dots & \mathcal{Z}_{MM} \end{bmatrix}$$

Les matrices \mathcal{Z}_{ij} peuvent encore être divisées en :

$$\mathcal{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{ij}^+ & \mathcal{S}_{ij}^+ \\ \mathcal{S}_{ij}^- & -\mathcal{C}_{ij}^- \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

et :

$$\mathcal{Z}_{ii} = \begin{bmatrix} H'_{0j} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & H'_{Nj} & & & \\ & & & H'_{1j} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & & H'_{Nj} \end{bmatrix}$$

où :

$$H'_{nj} = \frac{\partial H_n(\omega r_j)}{\partial r_j} \bigg|_{r_j = a_j} = \frac{\omega}{2} [H_{n-1}(\omega a_j) - H_{n+1}(\omega a_j)]$$

Dans l'expression de Z_{ij} ,

$$\left[(C,S)_{ij}^{\pm} \right]_{mn} = \frac{\epsilon_m}{2} \left\{ (-1)^m \, \mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)+'} \pm \mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)-'} \right\}$$

La dérivée de $\mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)\pm}$ est effectuée par rapport à r_j en $r_j = a_j$:

$$\mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)\pm'} = \left. \frac{\partial \mathcal{K}_{ijmn}^{(c,s)\pm}}{\partial r_j} \right|_{r_j=a_j} = \frac{k}{2} \operatorname{H}_{m\pm n}(\omega D_{ij}) [J_{m-1}(\omega a_j) - J_{m+1}(\omega a_j)] \cdot \begin{cases} \cos[(n\pm m)\psi_{ij}] \\ \sin[(n\pm m)\psi_{ij}] \end{cases}$$

Le vecteur \vec{b} du membre de droite se décompose en :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{B_1} \\ \vec{B_2} \\ \vdots \\ \vec{B_M} \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{B_i} = \begin{bmatrix} I_{0i}^c \\ I_{1i}^c \\ \vdots \\ I_{Mi}^c \\ I_{1i}^s \\ I_{2i}^s \\ \vdots \\ I_{Mi}^s \end{bmatrix}$$

··c -

et au final :

$$I'_{mj}^{(c,s)} = -\frac{i\omega b^2}{2\ln 2} \frac{\epsilon}{2} (-1)^m \int_{0}^{+\infty} \frac{s^2 J_m(sL_j) [J_{m-1}(sa_j) - J_{m+1}(sa_j)]}{s^2 - \omega^2} \exp\left[\frac{-b^2 s^2}{4\ln 2}\right] ds \cdot \begin{cases} \cos(m\alpha_j) \\ \sin(m\alpha_j) \end{cases}$$

On ne sait pas résoudre analytiquement l'intégrale précédente. Une technique permettant d'en approcher numériquement la valeur est de remplacer la variable d'intégration *s* par la variable complexe τ vérifiant $s = \tau - i\gamma \exp[-\beta(\tau - \omega)^2]$ avec $\gamma = \omega/10$ et $\beta = -\ln(1 \times \omega)^2$

 $10^{-10}/\gamma)/\omega^2$. Ainsi lorsque l'intégration est faite avec cette variable complexe, le pôle $s = \omega$ est contourné par le bas, et l'intégration numérique ne pose alors pas de problèmes particuliers. Il est à noter que ce changement de variable n'est pas le seul possible, et d'autres contours d'intégration complexe peuvent également donner de bons résultats.

D Bruit de profil : notes de lectures

De manière générale l'interaction d'un écoulement avec un obstacle plongé dans celui-ci produit un rayonnement acoustique. Ceci est particulièrement vrai en ce qui concerne les profils d'aile. On estime en effet qu'une grande partie du bruit des avions pendant la phase d'atterrissage provient des ailes et de leurs mécanismes hypersustentateurs.

D.1 Bruit de bord d'attaque

Une autre source de bruit potentielle existe lorsque l'écoulement amont n'est plus uniforme mais turbulent. Dans ce cas les structures turbulentes sont déformées lors de leur passage autour du bord d'attaque et engendrent un rayonnement de pression. Les volets hypersustantateurs constituent un bon exemple de problème industriel où un écoulement turbulent, issu du sillage du profil d'aile principal, vient impacter le profil que constitue le volet hypersustantateur.

D.1.1 Théorie

Amiet

Amiet a beacoup travaillé sur l'interaction d'un écoulement turbulent avec une plaque plane sans angle d'incidence par rapport à l'écoulement. Il a développé différentes formulations incompressibles et compressibles de la réponse de la plaque en fonction des nombres d'onde dans le sens de l'envergure et dans celui de la corde.

Il calcule le rayonnement acoustique d'une plaque dans un écoulement turbulent[3] à partir de la corrélation en deux points de la pression à la surface de la plaque, grâce à la théorie de Curle. Pour obtenir l'expression de la corrélation, Amiet suppose que le champ incident de turbulence est gelé, et simplement convecté au-dessus d'une plaque d'envergure 2*d* et de corde 2*b*. Il décompose le champ de vitesse sous la forme :

$$\tilde{w}(x,y,t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(k_x,k_y) \exp^{i[k_x(x-Ut)+k_yy]} dk_x dk_y$$

où \hat{w}_R est la transformée de fourier spatiale de w qui est donnée par l'expression :

$$\hat{w}_{R}(k_{x},k_{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{2}} \iint_{-R}^{R} w(x,y) \exp^{i[k_{x}(x-Ut)+k_{y}y]} dxdy$$

L'intégration se fait entre -R et R plutôt que $-\infty$ et ∞ pour des raisons de convergence, si w(x, y) ne s'annule pas à l'infini. Pour une composante sinusoïdale de la forme $w_g = w_0 \exp^{i[k_x(x-Ut)+k_yy]}$ on peut écrire le saut de pression ΔP entre l'extrados et l'intrados de l'airfoil sous la forme :

$$\Delta P_{w_0}(x, y, t) = 2\pi \rho_0 U b w_0 g(x, k_x, k_y) \exp^{i(k_y y - k_x U t)}$$

où $g(x, k_x, k_y)$ est la fonction de transfert entre la vitesse turbulente et le saut de pression. On peut alors sommer toutes les contributions des différents nombres d'onde pour obtenir :

$$\Delta P(x,y,t) = 2\pi\rho_0 Ub \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(k_x,k_y)g(x,k_x,k_y) \exp^{i(k_yy-k_xUt)} dk_x dk_y$$

Le saut de pression peut être écrit en fonction de la fréquence temporelle en prenant la transformée de fourier par rapport à *t* (entre $\pm R/U$ car on a supposé que la turbulence est comprise entre -x et *x*):

$$\Delta \hat{P}_T(x,y,w) = 2\pi\rho_0 b \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_R(K_x,k_y)g(x,K_x,k_y) \exp^{ik_y y} dk_y$$

où $K_x = -w/U$. Ainsi, une composante donnée du saut de pression est produite par la composante turbulente ayant comme nombre d'onde dans le sens de la corde -w/U. Ensuite, Amiet calcule la corrélation du saut de pression entre deux points :

$$S_{QQ}(x_1, x_2, y_1, y_2, \omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{\pi}{T} E[\Delta \hat{P}_T^*(x_1, y_1) \, \Delta \hat{P}_T(x_2, y_2)]$$

où *E* dénote l'espérance (moyenne d'ensemble). Après calculs (on sort *g* de la moyenne car c'est une fonction déterministe, et $E[\hat{w}_R(K_x, k_y)\hat{w}_R^*(K_x, k_{y'})] = \frac{R}{\pi}\delta(k_y - k_{y'})\Phi_{ww}(K_x, k_{y'})$ où $\Phi_{ww}(k_x, k_y)$ est le spectre énergétique de la turbulence intégré sur k_z entre $\pm\infty$), on obtient :

$$S_{QQ}(x_1, x_2, \eta, \omega) = (2\pi\rho_0 b)^2 U \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x_1, K_x, k_y) g(x_2, K_x, k_y) \Phi_{ww}(K_x, k_y) e^{ik_y \eta} dk_y$$

avec $\eta = y_2 - y_1$ la séparation dans le sens de l'envergure entre les deux points (on néglige les effets de bord).

Cette PSD est ensuite utilisée comme distribution de force qu'on intègre sur la surface de

la plaque, avec l'hypothèse de Curle : le rayonnement acoustique est le même que celui obtenu en distribuant sur la surface des dipôles d'amplitude égale à la force exercée sur la plaque : une source $F(x_0, y_0, \omega)e^{iwt}$ dans un écoulement de nombre de Mach *M* rayonne selon l'expression suivante :

$$P(x, y, z, \omega; x_0, y_0) = \frac{i\omega z F(x_0, y_0, \omega)}{4\pi c_0 \sigma^2} e^{i\omega \left[t + \frac{M(x - x_0) - \sigma}{c_0 \beta^2} + \frac{x x_0 + y y_0 \beta^2}{c_0 \beta^2 \sigma}\right]}$$

en prenant $\sigma = \sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}$ et $\beta = \sqrt{1 - M^2}$. Ainsi on trouve alors l'expression de la PSD du champ lointain :

$$S_{pp}(x, y, z, \omega) = \left(\frac{\omega z}{4\pi c_0 \sigma^2}\right)^2 \iiint S_{QQ}(x_1, x_2, \eta, \omega) e^{\frac{i\omega}{c_0} [\beta^{-2}(x_1 - x_2)(M - x/\sigma) + y\eta/\sigma]} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$
$$= \left(\frac{\omega z \rho_0 b}{c_0 \sigma^2}\right)^2 U d\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(d(k_y + \omega y/c_0 \sigma))}{(k_y + \omega y/c_0 \sigma)^2 \pi d}\right] |\mathcal{L}(x, K_x, k_y)|^2 \Phi_{ww}(K_x, k_y) dk_y$$

où la fonction \mathcal{L} donnée par $\mathcal{L} = \int_{-b}^{b} g(x_0, K_x, k_y) e^{-i\omega x_0(M-x/\sigma)/c_0\beta^2} dx_0$ traduit une idée de compacité de la plaque : pour une fréquence basse, le terme imaginaire est faible et \mathcal{L} donne alors simplement la portance par unité d'envergure.

Une discussion sur les possibles simplifications asymptotiques de l'expression précédente est faite par Amiet.

Autres

Mugridge[77] propose une formulation qui donne la réponse d'un profil d'envergure finie à une perturbation tridimensionelle sinusoïdale. Par rapport à une solution bidimensionelle, l'expression de Mugridge donne une réponse plus faible pour les petits nombres d'onde. Sa fonction de réponse de la portance moyenne au carré à une perturbation de la forme

$$w(x, y, t, \omega) = We^{-[i(\omega t - \frac{W}{U_m}x + my]}$$

est donnée par

$$\overline{L^2(k_x, k_y)} = \rho^2 U_m^4 b^2 \pi^2 \left(\frac{W}{U_m}\right)^2 \left(\frac{1}{1+2\pi k_x}\right) \left(\frac{k_x^2 + 2/\pi^2}{k_x^2 + 2/\pi^2 + k_y^2}\right) \left(\frac{\sin k_y}{k_y}\right)^2$$

où *b* est l'envergure, *W* l'intensité de la perturbation, $k_x = \omega c/2U_m$ le nombre d'onde normalisé, dans la direction de la corde, et $k_y = mb/2$ le nombre d'onde normalisé dans la direction de l'envergure. Cette équation requiert de l'information précise sur la turbulence amont (spectres de k_x et de k_y) pour être correctement appliquée.

McKeough et Graham[74] utilisent la théorie de la distortion rapide pour calculer une fonc-

tion de réponse d'une surface portante (*i.e.* avec un angle d'attaque α non-nul); en turbulence homogène ils trouvent une dépendance en α^2 .

Delfs et Yin[28] étudient le phénomène en resolvant numériquement les équations d'Euler linéarisées. L'airfoil est modélisé par un demi-plan infini vers l'aval, l'écoulement général est uniforme, et le tourbillon initial est engendré avec une fonction de courant gaussienne, centrée légèrement au dessus et en amont du demi-plan.

D.2 Bruit de bord de fuite

D.2.1 Approches inspirées de l'analogie de Lighthill

La zone du bord de fuite est à l'origine d'une partie du bruit émis. De nombreuses théories ont été développées pour prédire et tenter d'expliquer ce phénomène. Elles approximent généralement le problème par celui d'une plaque plane semi-infinie plongée dans un écoulement. Cette simplification revient alors à supposer que les principales longueurs d'ondes émises sont petites devant la corde du profil, ce qui est le cas sauf aux très faibles nombres de Reynolds.

Cas limite pour un nombre de Reynolds infini

Ffowcs Williams et Hall[35] considèrent l'équation de Lighthill dans le cas limite d'une turbulence isentropique sans vitesse moyenne :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho v_i v_j)$$

Ils ont ensuite résolu cette équation pour une distribution connue du tenseur de Reynolds $(\rho v_i v_j)$ en utilisant une fonction de Green respectant la condition de paroi sur la plaque semiinfinie $(\partial G/\partial x_2 = 0)$. Ils ont ainsi obtenu la formule suivante pour la pression moyenne au carré en champ lointain engendrée par un volume Δ proche du bord de fuite et se déplacant à la vitesse *V* :

$$< p^2 > \approx \frac{\rho_o^2 v^2 V^2 M_v}{\pi^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left(\frac{\Delta}{\delta^3}\right)^2 \sin \alpha \, \sin^2\left(\overline{\theta}/2\right) \, \cos^2 \beta$$

où v^2 est la moyenne carrée de la vitesse turbulente, δ l'échelle de correlation typique, R la distance entre l'observateur et le volume source, θ l'angle entre l'observateur et la plaque, α l'angle entre le bord de fuite et la droite reliant le volume source à l'observateur. On constate une dépendance du rayonnement en U^5 où U est une vitesse caractéristique, et une directivité en $\overline{\theta}/2$ traduisant un rayonnement maximal vers l'amont de la plaque. On peut éga-

lement sommer l'influence de tous les tourbillons suffisamment proches du bord de fuite, pour obtenir :

$$< p^2 > \approx
ho_0^2 v^2 V^2 M_v \left(\frac{L\delta}{R^2}\right) \sin \alpha \sin^2 \left(\overline{\theta}/2\right) \cos^3 \beta$$

Analyse de Crighton

Crighton[26] évalua le bruit rayonné par un tourbillon filaire d'intensité Γ parallèle au bord de fuite dans un fluide au repos. Dans cette configuration, le tourbillon se déplace sous l'effet du tourbillon image engendré par la présence de la paroi. Il calcula le champ potentiel de vitesse induite par le tourbillon et de là le champ acoustique rayonné, pour obtenir :

$$< p^2 > \approx
ho_o^2 v^4 \left(rac{a}{R}
ight) \sin^2\left(\overline{ heta}/2
ight)$$

où *a* est la distance minimale séparant le tourbillon du bord de fuite, et $v = \Gamma/a$ est la vitesse caractéristique associée au toubillon.

On peut comparer les deux formules précédentes en supposant, pour la première, que l'observateur se trouve dans le même plan vertical que le volume de turbulence considéré, et que la vitesse *V* est dirigée selon x_1 . Les deux expressions diffèrent alors d'un facteur *ML/R* qui traduit l'attenuation sphérique s'appliquant dans le premier cas.

Analyse de Howe

En partant de la configuration examinée par Crighton, Howe[47] montra à l'aide de l'analogie acoustique que le rayonnement acoustique en champ lointain à bas nombre de Mach se comporte comme :

$$p = \frac{\rho_o \Gamma \sin(\overline{\theta}/2)}{\pi \sqrt{R}} \left[\frac{D \Psi}{D t} \right]$$

où $\Psi = -\sqrt{R_o} \cos(\overline{theta}/2)$ et D/Dt représente la dérivée particulaire au temps retardé t - R/c par rapport à l'observateur. La fonction Ψ est constante sur les lignes de courant de l'écoulement potentiel 2D sans sources autour du demi-plan. Ces lignes de courant correspondent à des paraboles alignées avec le demi-plan. On peut, de la même manière, calculer la pression rayonnée par l'éventuel lâcher de tourbillon induit, et en déduire que le lâcher induit à plutôt tendance à réduire le niveau acoustique rayonné par le bord de fuite. En effet, le tourbillon lâché au bord de fuite aura une circulation γ de signe opposé celle (Γ) du tourbillon incident, et traversera les paraboles ψ avec une trajectoire similaire à celle du tourbillon incident, donc le terme de la forme :

$$\Gamma \left[\frac{D\Psi}{Dt} \right]_{\Gamma} + \gamma \left[\frac{D\Psi}{Dt} \right]_{\gamma}$$

provenant de la sommation de l'effet des deux tourbillons sera inférieur à celui lié au tourbillon incident seul. Howe généralise ces résultats à des configurations où le fluide ambiant n'est pas au repos, à nouveau à partir de l'analogie acoustique[48, 49]. Il en conclue que l'application de la condition de Kutta au bord de fuite annule le rayonnement acoustique à condition que le tourbillon soit convecté à la vitesse locale de l'écoulement moyen qui l'entoure : le rayonnement du tourbillon induit est égal et opposé à celui du tourbillon qui l'a engendré.

D.2.2 Fonctions de Green

Différents auteurs ont utilisé le principe des fonctions de Green pour aborder le problème du bruit de bord de fuite. Les premiers à suivre cette démarche ont été Chase [20, 21] et Chandiramani [19] dans les années 70. Plus récemment Howe [51] a proposé une fonction de Green généralisée qui tient compte en partie de la géométrie du profil. Une telle fonction de Green est intéressante pour les calculs d'acoustique en champ lointain si l'on utilise une analogie acoustique de type Lighthill et des termes sources issus d'une simulation des équations incompressibles. Lorsque les termes sources dont on dispose sont issus d'une simulation des équations compressibles, on peut utiliser la fonction de Green en champ libre et ainsi la fonction de Green spécifique dont la dérivée normale s'annule à la surface de l'airfoil est moins pertinente.

D.2.3 Expériences

Schlinker mesure le bruit de bord de fuite de profils NACA0012 et NACA0018 grâce à un microphone directionnel [92]. Il fait varier la vitesse de 30.5m/s à 122m/s, ce qui correspond à des nombres de Reynolds compris entre 500,000 et 1.5×10^6 (la corde des profils valant environ 25 cm). Les expériences sont faites dans une soufflerie dont le taux de turbulence est inférieur à 0.2 %. Schlinker constate que le bord de fuite est la principale source de bruit aérodynamique lorsque l'écoulement amont est peu turbulent. Il observe également l'importance de l'état de la couche limite pour l'émission du bruit. Une discussion est faite des effets de refraction dûs aux gradients de vitesse des couches limites, d'après des mesures effectuées en envoyant du bruit blanc ou un fréquence pure à un hautparleur situé très proche du bord de fuite. Une compensation à la fois de la directivité et du gain est effectuée suivant ces mesures.

Brooks et Hodgson mesurent la pression pariétale sur un profil NACA0012 dans un écoulement uniforme, à haut nombre de Reynolds [18]. La corde mesure c = 61cm, la vitesse de l'écoulement varie de $U_o = 23.2 \text{ m/s}$ à $U_o = 73.4 \text{m/s}$, ce qui donne un nombre de Reynolds compris entre $Re_c = 0.95 \times 10^6$ et $Re_c = 3 \times 10^6$, et enfin l'angle d'attaque vaut soit 0° soit 5°. Des mesures sont faites avec et sans transition forcée de la couche limite. Ils fournissent la *PSD* en différents abscisses du profil, et sa variation dans la direction de l'envergure, et beaucoup d'autres données statistiques. Enfin des spectres de bruit de bord de fuite à différents angles sont donnés.

D.2.4 Expériences - résultats acoustiques

Clark et Ribner[23] placent un profil de forme elliptique dans un écoulement turbulent, et mesurent l'autocorrélation de la portance, la corrélation entre portance et pression émise à 90° mesurée à 1.83m, et calculent le rapport corrélation croisée sur la dérivée de l'autocorrélation. Ils trouvent que la pression rayonnée est bien celle prévue par Curle, aux incertitudes expérimentales près.

Fink[36] mesure le rayonnement acoustique émis par une profil plongé dans un écoulement turbulent, de taux de turbulence 4 et 6%. Le profil est constitué d'une plaque plane dont les bords d'attaque et de fuite sont arrondis. Des mesures de pression pariétale sont également faites pour pouvoir relier les spectres à la paroi à ceux en champ lointain. Une bonne correspondance avec les développements analytiques de Filotas a été relevée.

Paterson et Amiet[84] placent un profil NACA0012 dans un écoulement turbulent (turbulence de grille) et mesurent la pression sur le profil entre 15 et 70% de la corde. Ils mesurent aussi le champ lointain, la correlation selon l'envergure. Quatre vitesses entre 40 et 120m/ssont étudiées. Une augmentation du bruit en champ lointain est détectée pour $\alpha = 8$

McKeough et Graham[74] mesurent l'effet de l'angle d'attaque sur la portance instationnaire d'un NACA0015 dans une turbulence de grille.

Mish *et al.* mesurent la correlation spatio-temporelle de la pression sur un NACA0015 à $Re_c = 1.1710^6$, et montrent que l'angle d'attaque influe sur les correlations.

E Contrôle actif de l'écoulement au dessus d'une cavité



Available online at www.sciencedirect.com





C. R. Mecanique 331 (2003) 423-429

Direct noise computation of adaptive control applied to a cavity flow

Olivier Marsden*, Xavier Gloerfelt, Christophe Bailly

LMFA, UMR CNRS 5509, École centrale de Lyon, 69134 Ecully, France Received 17 April 2003; accepted 29 April 2003 Presented by Geneviève Comte-Bellot

Abstract

The Large Eddy Simulation of closed-loop active flow control applied to a 3D cavity excited by a compressible airflow with a Mach number of 0.6 is presented. The control actuator is an idealized synthetic jet located at the upstream cavity edge, and the control function is supplied by a feedback *LMS*-type algorithm whose input is a pressure signal measured inside the cavity. The radiated sound, provided directly by the LES simulation, was shown to decrease substantially when active control was applied. A simultaneous reduction of the vertical velocity fluctuations in the shear layer was observed. The intensity of vortical structures inside the cavity was also reduced, although the general aspect of the recirculation zone was not modified. The direct noise computation technique, which supplies the pressure field by solving the fluid mechanics equations, is shown to constitute a powerful tool for studying active aeroacoustic noise control. *To cite this article: O. Marsden et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Simulation directe de l'atténuation par contrôle adaptatif du rayonnement d'une cavité affleurée par un écoulement. Le contrôle actif adaptatif appliqué à une cavité 3D soumise à un écoulement avec un nombre de Mach de 0,6, est mis en œuvre numériquement en réalisant une Simulation des Grandes Echelles compressible. L'actionneur de contrôle est un jet synthétique très simplifié placé au coin amont de la cavité, et le contrôle se fait par un algorithme en boucle fermée de type *LMS*, avec pour entrée un signal de pression mesuré dans la cavité. Le bruit rayonné, calculé directement par la simulation, diminue de façon notable lorsque le contrôle actif est appliqué. L'intensité des structures tourbillonnaires dans la cavité est également réduite, bien que l'allure de la recirculation soit préservée. L'intégration d'un système de contrôle au solveur du calcul direct du bruit est donc possible, et constitue un moyen efficace pour étudier le contrôle actif du bruit d'origine aéroacoustique. *Pour citer cet article : O. Marsden et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Acoustics; Waves; Vibrations; Adaptive control; Computational aeroacoustics; Cavity noise

Mots-clés : Acoustique ; Ondes ; Vibrations ; Contrôle actif adaptatif ; Aeroacoustique numérique ; Bruit de cavité

* Corresponding author.

1631-0721/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved. doi:10.1016/S1631-0721(03)00096-2

E-mail address: olivier.marsden@ec-lyon.fr (O. Marsden).

Version française abrégée

Le bruit d'un écoulement affleurant une cavité est engendré par l'impact plus ou moins régulier de tourbillons sur le coin aval de celle-ci. Ce phénomène est rencontré très souvent dans l'industrie des transports terrestres et aériens, et à ce titre a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. L'application aux cavités du contrôle actif, que cela soit avec un algorithme en boucle ouverte ou en boucle fermée [7,6] constitue un axe d'étude intéressant pour la réduction du bruit de cavité.

Ce travail présente une simulation numérique du contrôle basée sur un calcul direct du bruit par résolution des équations compressibles de Navier–Stokes. Le code de simulation utilisé est une version de ALESIA [9] consacrée aux écoulements de cavités tridimensionnelles [10]. L'objectif est de réduire le niveau de pression dans la cavité, et implicitement le niveau de bruit rayonné en champ lointain, en agissant sur le développement de la couche cisaillée.

Les notations utilisées sont présentées sur la Fig. 1. La cavité est décrite par un maillage 3-D, avec pour paramètres géométriques L/D = 1 et L/W = 1,28, où L = 2 mm. Le nombre de Mach de la couche limite laminaire amont est de 0,6, et le rapport $L/\delta_{\theta} = 57$. Le nombre de Reynolds est de Re_D = 28720. Le point de mesure P est situé à une distance de 3D depuis le coin aval, dans la direction principale de rayonnement. Le développement des structures tourbillonnaires dans la couche cisaillée est contrôlé par un système composé d'un jet synthétique agissant sur une zone située immédiatement derrière le coin amont, et d'un algorithme qui fournit le signal de contrôle à partir de la pression mesurée sur la paroi aval de la cavité.

La complexité de la rétroaction aéroacoustique dans la cavité rend difficile la modélisation du chemin secondaire *actionneur-capteur d'erreur* par un filtre linéaire. Nous avons choisi une approche de contrôle en boucle fermée, basée sur l'algorithme récursif *RLMS* avec un filtre à réponse impulsionnelle infinie *IIR*. L'actualisation des coefficients du filtre se fait avec un fort taux de *fuite*, ceci pour limiter automatiquement le taux d'atténuation des perturbations à l'amont de la cavité et ainsi assurer la stabilité du contrôle.

Les champs de pression de la Fig. 2 montrent la diminution du champ acoustique rayonné par la cavité. La réduction dans le champ sonore rayonné, mesurée point P, est de 12 dB. La Fig. 3 montre l'effet du contrôle sur le signal de pression au même point. On montre que cette atténuation du niveau de la pression est associée à la diminution des fluctuations de vitesse verticale des tourbillons dans la couche cisaillée tracées sur la Fig. 4. Leur impact contre la paroi est aussi moins régulier. On observe que la fréquence principale du rayonnement acoustique n'est pas modifiée, traduisant le fait que le couplage aéroacoustique n'est pas détruit. Cette fréquence correspondant à un nombre de Strouhal St = 0,74 est associée à la présence en moyenne de deux tourbillons dans la couche cisaillée. Ce point est confirmé par les spectres du signal de pression au point P, reportés sur la Fig. 5. Les spectres indiquent aussi une forte réduction des principaux pics et une atténuation globale sur une large bande de fréquences.

L'utilisation d'un contrôle actif adaptatif de la couche cisaillée a permis de réduire le niveau de pression à la fois dans la cavité et dans le champ acoustique rayonné. Le système de contrôle a pu être intégré dans un code de résolution des équations de la mécanique de fluides. Cette simulation met aussi en évidence l'intérêt du calcul direct du bruit pour l'étude des systèmes de contrôle de phénomènes aéroacoustiques.

1. Introduction

Cavity noise, which occurs when a cavity is placed in a grazing flow, is of increasing concern to both the transport and the military industry, and as such has been extensively studied over the past few decades, both experimentally and numerically.

Active control techniques have been investigated as a possible means of reducing noise generation. Numerous studies have examined the effects of open-loop control via fixed-frequency forcing techniques. Among the extensive experimental literature regarding closed-loop cavity control, one can mention the use of loud-speakers [1], piezo and mechanical devices [2,3], and pulsed jets [4–6].

424

Past simulations of subsonic-flow cavity noise include hybrid simulations, where unsteady CFD results are used as source terms for a wave equation, and direct computations, in which the compressible Navier–Stokes equations are solved with highly precise numerical schemes in order to capture the acoustic pressure field. Actively controlled aeroacoustic resonances have also been simulated with low-order numerical schemes [7,8]. Direct aeroacoustic 3D simulations of cavity flows are very recent.

The simulation code used in the present study is an extension to the 3D compressible Navier–Stokes equations solver ALESIA [9], developped by Gloerfelt et al. for cavity flows. A description of the numerical algorithm, boundary conditions as well as a physical analysis of cavity flow dynamics, is to be found in Gloerfelt et al. [10,11].

This work is intended to show the pertinence of direct noise simulations in studying active flow control and its effects on radiated noise. It should be noted that this simulation delivers information not only on the control effects inside the cavity, which is of interest in military applications, but also information about far-field noise reduction which is more generally of concern to civil transport applications.

2. Active control system

The reduction of cavity noise with open-loop active control systems has been extensively investigated, and the limitations of such non-adaptive systems are well-known. Fixed-frequency forcing techniques tend to increase sound levels at the forcing frequency and are as such unsuitable in cases where flow conditions are likely to change. Adaptive or closed-loop control systems do not suffer from this drawback and are therefore inherently more versatile over a wide range of operating conditions as well as potentially more effective at any given frequency. A simple form of pulsed injection is used as the control actuator. It relies on adding a control term to momentum equation on ρv where v is the vertical velocity, inside the time integration. This term is added on a zone whose envelope is Gaussian in the x and y directions and of half-width L/50 in both directions. The injection zone, spanning the entire width of the cavity, is placed immediately after the upstream corner, as shown in Fig. 1. The



Fig. 1. Simulated cavity layout. The injection zone is Gaussian in the (x, y) plane, with a half-width of 2Δ ($\Delta = L/100$), and is centered around $x = 2\Delta$, y = 0. The injection envelope in the *z* direction is given by a symmetrical Gaussian window.

Fig. 1. Cavité simulée. La zone d'injection est de forme gaussienne dans le plan (x, y), de demi-largeur 2Δ ($\Delta = L/100$), et centrée sur $x = 2\Delta$, y = 0. Dans la direction z, la forme de l'envelope est donnée par une fenêtre gaussienne symétrique.

425

error signal supplied to the control algorithm is the pressure perturbation $p - p_0$ measured slightly underneath the impact zone on the downstream cavity wall and averaged over five sensors in the spanwise direction.

The noise generation process in cavity flow problems is complex and nonlinear. Instabilities are shed by the upstream cavity corner and are simultaneously convected and amplified by the shear layer until they impact the downstream cavity wall, thus generating noise. Pressure waves induced by the impact can create a feedback loop by synchronising the upstream shear layer oscillations, resulting in very high pressure fluctuation levels. The application of feedback algorithms designed for linear control situations is therefore not straightforward.

Moreover, the time step of the numerical simulation is more than two orders of magnitude smaller than the time scale governing the shear layer instabilities that are to be controlled. Numerical stability issues can therefore arise if careful filtering of the control signal is not undertaken.

Regarding acoustic active feedback control, most recent algorithm developments, such as the *Filtered-X LMS* or *FXLMS* family of algorithms, have been aimed at avoiding positive feedback instabilities that can occur in the *secondary path* between the control signal and the error signal. Additional digital filters are used to take into account the control actuator's contribution to the measured error signal. In the case of the cavity, the secondary path as well as being complex, involves different physical quantities (i.e., velocity and pressure), and seems therefore to be less prone to the aforementioned instabilities. A basic *Least Mean Squares* or *LMS* algorithm was consequently chosen as the basis of the control. After testing both finite and infinite impulse-response (*FIR* and *IIR*) digital filters, an *IIR* filters are intrinsically better suited to capturing nonlinear behaviour, which means that much shorter filters can be used. A 16 point filter was adopted, with 10 points in the numerator and 6 in the denominator part of the filter; a modified version of the *Recursive Least Mean Squares* (*RLMS*) algorithm [12] was used.

An additional advantage of the *LMS* algorithm as compared to the *FXLMS* one is the elimination of the secondary path identification phase. This phase, during which a digital filter representation of the secondary path behaviour is calculated, is difficult to perform when the secondary path is strongly non-linear. What is more it has to be undertaken *offline* prior to the control phase since *online* identification relies heavily on secondary path linearity. The elimination of this phase saves both effort and computation time.

3. Control results

The simulated cavity is shown on Fig. 1. The cavity is 2 mm long, with L/D = 1 and L/W = 1.28. The upstream flow has a Mach number of M = 0.6 and a Reynolds number based on the cavity depth of $\text{Re}_D = 28720$. The upstream boundary layer is laminar, with $L/\delta_{\theta} = 57$. The measurement point P is located at a distance of 3D from the downstream corner, in the direction of the main acoustic radiation. The simulation domain extends from -2L to 3L in the streamwise direction, from -L to 2L in the vertical direction and from -W to W in the spanwise direction. The domain is bounded laterally by non-reflecting boundary conditions, and downstream by an outflow condition.

The pressure fields on Fig. 2 clearly show the effect of the control system on the radiated cavity noise. The directivity is unchanged but the radiated levels are substantially reduced. Fig. 3 illustrates the reduction in the pressure signal at the point P, when the control system is started.

The first vortex in the shear layer, corresponding to the first (blue) negative pressure zone, is clearly smaller and less intense. This reduction can more generally be seen both in the amplitude of the vertical velocity oscillations in the shear layer, whose time signal is shown on Fig. 4, and in the average intensity of the instabilities convected by the shear layer. The pressure spectra on Fig. 5 show tonal reduction as well as reduced broadband levels. This stems from the smaller size of the convected structures impacting the downstream cavity wall which are responsible for the broadband as well as the tonal emissions. The prevailing cavity mode, corresponding to the average number of vortices in the shear layer at any one time, is not modified by the control: the mode 2 oscillations corresponding to



Fig. 2. Phase-synchronized instantaneous fluctuating pressure snapshots in the (x, y) plane, taken before and during control phase. Colour scale is between -200 and 200 Pa.

Fig. 2. Champs de pression dans le plan (x, y) avant et pendant le contrôle. Images prises à un temps équivalent dans le cycle. Échelle de couleurs entre -200 et 200 Pa.



Fig. 3. Radiated pressure signal at point P as a function of non-dimensional time. Control phase starts at t = 0.

Fig. 3. Evolution en temps adimensionalisé de la pression rayonnée au point P. Le contrôle démarre à t = 0.



Fig. 4. Downstream vertical velocity signal measured in the (x, z) plane as a function of non-dimensional time. Measurement at a distance of L/15 from the downstream corner. Control phase starts at t = 0.

Fig. 4. Évolution en temps adimensionalisé de la vitesse verticale à l'aval, dans le plan (x, z). Le point de mesure se trouve à une distance de L/15 du coin aval. Le contrôle démarre à t = 0.

a Strouhal number of St = 0.74 remain dominant both in the far field and inside the cavity. The first main peak in the pressure spectra at a Strouhal of St = 0.34 corresponds to the low frequency modulation that is clearly visible at the beginning of the temporal pressure signal. This modulation becomes less regular when control is applied, due to the greater instability of the smaller upstream shear layer perturbations.

The stability of the controlled cavity is one of the more delicate aspects of the simulation. It was found that the total elimination of upstream instabilities, although possible for a short time, must be avoided in order to obtain a stable state. Indeed if the upstream instabilities become too small, they can very easily be perturbed and end up in phase with the injected control signal, leading to positive feedback and rapid divergence. The control algorithm

427



Fig. 5. Radiated pressure fluctuations spectra: —: without active control, ---: with active control. Spectra calculated with autoregressive method.

Fig. 5. Spectres des fluctuations de pression : — : sans contrôle, ---: avec contrôle. Spectres calculés par la méthode autorégressive.



Fig. 6. Injection velocity signal as a function of non-dimensional time. Control phase starts at t = 0.

Fig. 6. Évolution en temps adimensionalisé de la vitesse injectée. Le contrôle démarre à t = 0.

should therefore not converge to an error value of zero, since this state is unstable. Rather than impose a non-zero sinusoidal error toward which to converge, a *Leaky LMS* approach with a strong leakage factor was used, to avoid the error signal becoming too small. This method both avoids having to establish a priori a target error signal to obtain, and also increases the algorithm's response speed to phase and frequency changes in the error signal. The injected velocity signal on Fig. 6 shows that the response time of the control system is of the order of 4 instability periods.

Control stability is also greatly affected by the filtering of the error signal. A low-pass four point *IIR* filter was implemented, with a cut-off frequency slightly higher than that of the dominant mode 2 oscillations, and thus well under the critical Shannon frequency. Without this filter, the gain of the control system had to be diminished for a stable state to be obtained.

The overall noise reduction obtained in the simulations reached 12 dB, with a 20 dB reduction at the main oscillation frequency. These results are encouraging, but have as yet to be achieved on cavity flows where the upstream boundary layer is substantially more turbulent.

4. Conclusions

428

A direct noise calculation is performed on a cavity excited by a M = 0.6 grazing flow, in which the shear layer dynamics are controlled by an active flow control system. Direct numerical simulation is shown to be well suited to examining the behaviour of active flow control systems. Radiated pressure levels, as well as the size of the instabilities that develop in the shear layer, are lowered by the control algorithm. It is shown that a modified *LMS* style algorithm is capable of handling the complex cavity behaviour.

Acknowledgements

The authors wish to thank Marie-Annick Galand for helpful comments, especially regarding the subject of active control.

429

References

- M. Sunyach, J.E. Ffowcs Williams, Contrôle actif des oscillations dans les cavités excitées par un écoulement, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II 303 (12) (1986) 1085–1088.
- [2] L.N. Cattafesta, S. Garg, F. Li Choudhari, Active control of flow-induced cavity resonance, AIAA Paper 97-1804, Fluid Mechanics Conference, Snowmass Village, CO, 1997.
- [3] L. Mongeau, M.A. Franchek, H. Kook, Control of interior pressure fluctuations due to flow over vehicle openings, Society of Automotive Engineers, 99NV-211, 1999.
- [4] D.R. Williams, J. Morrow, Adaptive control of multiple acoustic modes in cavities, AIAA Paper 2001-2769, 31st AIAA Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, 2001.
- [5] D. Williams, C. Rowley, T. Colonius, R. Murray, D. MacMartin, D. Fabris, J. Albertson, Model-based control of cavity oscillations, in: 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 2002.
- [6] R.H. Cabell, M.A. Kegerise, D.E. Cox, G.P. Gibbs, Experimental feedback control of flow induced cavity tones, AIAA Paper 2002-2497, 8th AIAA/CAES Aeroacoustics Conference, Breckenridge, Colorado, 2002.
- [7] T. Kestens, F. Nicoud, Active control of an unsteady flow over a rectangular cavity, AIAA Paper 98-2348, 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, 1998.
- [8] M. Mettenleiter, Contrôle adaptatif des instabilités aéroacoustiques application aux systèmes de propulsion, Ph.D. thesis, École Centrale Paris, 2000.
- [9] C. Bogey, C. Bailly, D. Juvé, Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible LES, Theoret. Comput. Fluid Dynamics 16 (4) (2003) 273–297.
- [10] X. Gloerfelt, C. Bailly, D. Juvé, Calcul direct du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Ilb 328 (2000) 625–631.
- [11] X. Gloerfelt, C. Bogey, C. Bailly, D. Juvé, Aerodynamic noise induced by laminar and turbulent boundary layers over rectangular cavities, AIAA Paper 2002-2349, 8th AIAA/CAES Conference, Breckenridge, Colorado, 2002.
- [12] P.L. Feintuch, An adaptive recursive LMS filter, Proc. IEEE 64 (1976) 1622–1624.