THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR

Spécialité : Acoustique

par

Yann REVALOR

MÉTHODES DE RAYONS EN AÉROACOUSTIQUE

Soutenue publiquement le 18 janvier 2007 devant la comission d'examen composée de

M.	R. ABGRALL	MAB, Université Bordeaux I	Rapporteur
M.	S. LÉWY	ONERA	Rapporteur
M.	D. JUVÉ	LMFA, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
M.	C. BAILLY	LMFA, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
M.	S. CANDEL	EM2C, École Centrale Paris	Président du jury
M.	M. RAVACHOL	Dassault-Aviation	
M.	S. LEMAIRE	Dassault-Aviation	

Un grand merci!

De nombreuses personnes ont contribué à la réussite de cette thèse, qu'elles soient ici toutes remerciées. En premier lieu, je suis reconnaissant à Sébastien Candel, dont les travaux furent la source de mon inspiration et qui, de plus, me fait l'immense honneur de présider le jury. Mais cette thèse n'aurait pu se faire sans la confiance que m'ont, tout de suite, accordée Daniel Juvé et Christophe Bailly qui ont dirigé mes recherches théoriques. Elle n'aurait pas non plus pu se faire sans Michel Ravachol et Stéphane Lemaire qui ont encadré les développements industriels. Je les remercie tous les quatre de m'avoir accordé un peu de leur temps précieux pour suivre mes travaux. Merci également à Serge Lewy et Rémi Abgrall qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail malgré une forme de manuscrit incertaine.

Grâce au financement de la Délégation Générale pour l'Armement et à l'accueil de Dassault-Aviation, j'ai pu poursuivre mes travaux sans me préoccuper des aspects matériels. Au cours de ma thèse, j'ai été accueilli d'abord par la Direction de la Recherche. Je sais gré à son directeur, Bruno Stoufflet, d'avoir cru en la méthode et d'avoir permis mon installation au sein de Dassault-Aviation. J'ai ensuite pu bénéficier des conseils et des compétences des personnes travaillant sur la discrétion électromagnétique. Parmi elles, je remercie particulièrement Gérard Leflour pour ses instructifs cahiers verts et Hervé Stève pour sa disponibilité. De plus, la collaboration avec Damien Laval a été très riche et les longues discussions que nous avons eues ont permis, non seulement, de construire un code de calcul abouti, mais également, d'inspirer en partie mes travaux. Durant la dernière partie de mon travail, les trois Nicolas, Réau, Forrestier et Héron, se sont un peu serrés pour m'accueillir au sein du pôle acoustique. J'ai alors pu finaliser l'outil développé dans un environnement plus proche des applications.

Je suis reconnaissant à Michel Mallet de m'avoir fait intégrer la sphère Dassault-Aviation et à Gilbert Rogé d'avoir pendant quatre ans supporté mes idées parfois originales. Les longues journées de travail n'auraient pas été aussi agréables sans les moments d'échanges avec Vincent, Sylvain, Gabriel et les autres. Je tiens à saluer particulièrement Laurent Daumas dont la bonne humeur est précieuse dans les moments difficiles.

Grâce à leur sollicitude, de nombreuses personnes ont soutenu indirectement mon travail. Ma famille m'a apporté, entre autre, la culture technique et le goût des études ; Sabine et Fred, Caro et Ben, Cécile et Romain, Muriel et Luc, Marion et Michel, Cam et Seb, Fabienne et Vincent et les autres le rafraîchissement des week-end entre amis ; Guillaume les exemples à suivre et à ne pas suivre et Mathieu l'ouverture d'esprit.

Je tiens, enfin, à témoigner toute mon affection à Muriel qui a supporté les longues périodes de travail et de doutes et qui a su m'entourer de l'amour et de la sérénité ô combien appréciables au delà de l'accomplissement du présent travail.

Nomenclature

Quantités physiques

t	temps
\boldsymbol{x}	position
L	longueur
ho	masse volumique
\boldsymbol{v}	champ de vitesse
$\phi, oldsymbol{\psi}$	parties potentielle et rotationnelle de la vitesse
p	pression
s	entropie réduite
e	énergie par unité de masse et unité de volume
ε	énergie interne spécifique
T	température
c	vitesse du son
M	nombre de Mach
f_e	forces extérieures
w	flux massique
q_h	source de chaleur
c_v	chaleur spécifique à volume constant
c_p	chaleur spécifique à pression constante
κ	conductivité termique
γ	rapport $c_p \operatorname{sur} c_v$
$\overline{\overline{\sigma}}$	tenseur des contraintes de Reynolds
$\overline{\overline{ au}}$	partie visqueuse de $\overline{\overline{\sigma}}$
λ,μ	coefficients de Lamé
R	constante des gaz parfaits
H	enthalpie

h enthalpie statique

Nombres dimensionnant

- R_e | nombre de Reynolds
- S_t nombre de Strouhal
- P_r nombre de Prandtl
- E_u nombre d'Euler
- F_r nombre de Froude
- H_e nombre d'Helmholtz

Perturbations

- *r* perturbation sur la masse volumique
- $\boldsymbol{\xi}$ perturbation sur le champ de vitesse
- σ perturbation sur l'entropie
- π perturbation sur la pression
- ξ_r perturbation sur la quantité de mouvement

Ondes

i	racine carrée de -1
ω	pulsation
k	nombre d'onde
$m{k}$	vecteur d'onde
ν	vecteur d'onde unitaire
λ	longueur d'onde
u	solution quelconque de l'équation de Helmholtz
G	fonction de Green
ϕ	phase
Q, Φ	potentiels simple et double couche
n	indice du milieu, c/c_R
Ansatz	forme de fonction identifiant une phase et une amplitude $Ae^{i\phi}$

Autres quantités

W	vecteur comportant les variables d'un système d'équations
F	flux scalaire
H	Hamiltonien
X	vecteur lié au rayon ($\simeq c \nu$)
p	relèvement de $ abla \phi$ dans l'espace des phases
a	rayon du guide d'onde
S_{-}	sources
f, g, h	fonctions quelconques
τ,Ξ	variables remplaçant t et \boldsymbol{x}
ϵ	petite quantité
$arepsilon_i$	base de vecteurs
e_i	base de vecteurs
$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$	coordonnées locales liées aux rayons
$\boldsymbol{s} = (s, \theta, \psi)$	coordonnées transverses liées aux rayons
S	surface d'intégration (dS) et plus généralement une surface de \mathbb{R}^d
Ω	volume d'intégration ($d\Omega$) et plus généralement un ouvert de \mathbb{R}^d
Γ	frontière
\boldsymbol{n}	normale à une surface
au	vecteur tangent à l'arête
ψ	angle entre la surface et le rayon (diffraction)
dx_{\parallel}	petit déplacement cotangent
dx_{\perp}	petit déplacement perpendiculaire
i	$i^2 = -1$
\overline{I}	matrice identité
$\overline{\overline{J}}$	Jacobienne
J	jacobien
Ζ	impédance
ζ	impédance réduite
\tilde{D}	facteur décrivant l'étalement du faisceau élémentaire
	coefficient de diffraction au (D)

ii

Autres notations

B	un vecteur de fonctions (De manière générale, les caractères en gras désignent des vecteurs.)
$\overline{\overline{A}}$	une matrice de fonctions (De manière générale, ⁷ désigne une matrice.)
-	un élément du champ moyen
\wedge	produit vectoriel
$oldsymbol{a} \otimes oldsymbol{b}$	combinaison de a et b formant $[a_i b_j]$
~	quantité adimensionnée
\cdot_R	quantité de référence
\cdot_n	composantes d'un développement asymptotique
∇	opérateur utilisé comme suit :
$\nabla \phi$	gradient de ϕ et, si ϕ est un vecteur, $[\nabla \phi]_{i,j} = [\partial_i \phi_j]$
$\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}$	divergence de ϕ et si $\overline{\phi}$ est une matrice, $\{\nabla \cdot \overline{\phi}\}_j = \sum_i \partial_i \overline{\phi}_{i,j}$
$\nabla \wedge \phi$	rotationnel de ϕ
∂_i	dérivation par rapport aux coordonnées
∂^j	dérivation par rapport au vecteur d'onde dans l'espace des phases
∂_i^n	n dérivations par rapport à i
\longrightarrow	tend vers
A^t	transposée de A
tr	trace d'une matrice
$\delta_{i,j}$	symbol de Kronecker
χ	fonction caractéristique

iv

Table des matières

Introduction

1	Eler	nents th	iéoriques	9
	1.1	Les principaux composants de la méthode		
		1.1.1	Modélisation et propagation	10
		1.1.2	Approximation "hautes fréquences"	11
		1.1.3	Les champs de rayons	13
		1.1.4	Application numérique du "lancer de rayons"	14
	1.2	Vers u	ne méthode adaptée aux impératifs industriels	16
		1.2.1	Quelques problématiques	16
		1.2.2	Les pistes et les points d'amélioration étudiés	17
2	Asp	ects nur	nériques et algorithmiques	23
	2.1	Une ré	solution à l'aide de faisceaux	24
	2.2	Les dif	fférents aspects de la discrétisation	31
		2.2.1	Intégration le long des rayons	31
		2.2.2	Interpolation sur les faisceaux et les surfaces	33
	2.3	Post-tr	aitement	35
		2.3.1	Projection	35
		2.3.2	Potentiels asymptotiques et intégrales de Kirchhoff	37
3	Calo	culs de 1	référence	43
	3.1	Propag	gation rectiligne à partir d'une source ponctuelle et dans un pavé : dioptre plan et	
		dièdre	simple	44
		3.1.1	Description de la géométrie	44
		3.1.2	Au dessus d'une plaque parfaitement réfléchissante	45
		3.1.3	Au dessus d'une plaque présentant une impédance	46
		3.1.4	Dans un coin parfaitement réfléchissant	47
	3.2	Un diè	dre saillant simple parfaitement réfléchissant en atmosphère homogène et calme	50
		3.2.1	Description de la géométrie	50
		3.2.2	Onde incidente plane	51
		3.2.3	Onde incidente cylindrique	52
		3.2.4	Onde incidente sphérique	53
	3.3	Interac	tions en deux dimensions	56

1

		3.3.1	Une plaque plane parfaitement réfléchissante et sa couche limite	56
		3.3.2	En présence d'un tourbillon	60
4	Prop	pagatior	n guidée	75
	4.1	Champ	bs acoustiques dans les guides d'ondes	76
		4.1.1	Résolutions analytiques	76
		4.1.2	Conduits quelconques	77
	4.2	Calcul	d'une source ponctuelle dans un cylindre de révolution	80
		4.2.1	Paramètres de calcul	80
		4.2.2	Validation de la réflexion sur une surface gauche	82
		4.2.3	Limites de la multi-réflexion	84
	4.3	Des mo	odes aux rayons	88
		4.3.1	Premières tentatives	88
		4.3.2	A partir de l'expression explicite du champ dans un cylindre de section transverse	
			circulaire	89
		4.3.3	Vers une congruence de rayons autosimilaire en trois dimensions	91
	4.4	Propag	ation "effective" de modes dans un cylindre de révolution	95
		4.4.1	Étude des faisceaux propagés	95
		4.4.2	Étude du rayonnement vers l'extérieur	99
	4.5	Effets	diverses sur la propagation dans un cylindre à section transverse circulaire constante	102
		4.5.1	Impédance et écoulement uniforme	102
		4.5.2	Couche limite	104
5	Con	figurati	ons industrielles	111
	5.1	Empen	mage générique	112
		5.1.1	Paramètres de calcul	112
		5.1.2	Faisceaux et champs à la surface	113
		5.1.3	Estimation des erreurs	114
		5.1.4	Compléments d'analyse	116
	5.2	Falcon	complet	119
		5.2.1	Trois configurations typiques	119
		5.2.2	Etude du rayonnement	121
	5.3	S-duct	·	125
		5.3.1	Un guidage non rectiligne	125
		5.3.2	Des faisceaux originaux	127
		5.3.3	Rayonnements de deux sources classiques	128
		5.3.4	Propagation modale et effets divers	130

Conclusion

Annexes

A	Mod	lélisatio	ons en aéroacoustique	141
	A.1	De la r	nécanique des fluides	142
		A.1.1	Lois de conservation	142
		A.1.2	Au voisinage de l'équilibre thermodynamique	143
		A.1.3	Changements de variables	144
		A.1.4	Modèles de fluides	145
	A.2	Adapta	ations acoustiques	148
		A.2.1	Descriptions à l'aide d'une seule équation	148
		A.2.2	Linéarisation physique	149
		A.2.3	Vers l'équation des ondes	151
	A.3	Ondes	sonores	153
		A.3.1	Sources et propagation	153
		A.3.2	Notion d'ondes	154
		A.3.3	Relations de dispersion	155
		A.3.4	Résolution des équations	156
B	Арр	roxima	tions hautes fréquences	161
	B .1	Dimen	sionnement des équations	162
		B.1.1	Exemples d'adimensionnements classiques	162
		B.1.2	Paramètres dimensionnant une onde	163
		B.1.3	Linéarisation et hautes fréquences	165
		B.1.4	Adimensionnement et changement de variables	167
	B.2	Princip	pes de la méthode d'approximation	169
		B.2.1	Développements asymptotiques	169
		B.2.2	Les solutions de l'équation d'Helmholtz	170
		B.2.3	Une méthode d'inspiration WKB	172
	B.3	Applic	cation aux équations de l'aéroacoustique	176
		B.3.1	Avec les équations d'Euler linéarisées fréquentielles	176
		B.3.2	Sources et conditions aux limites	179
		B.3.3	Termes supplémentaires	180
		B.3.4	Si la phase est complexe	183
		B.3.5	Et les phénomènes non-linéaires?	184
С	Desc	ription	à l'aide de ravons	189
	C.1	Les ray	vons	190
		C.1.1	Équation iconale, rayons et hamiltonien	190
		C.1.2	Trajectoires et fonction constante	191
		C.1.3	Résolution de l'équation iconale	193
		C.1.4	Autres trajectoires	195
	C.2	Transp	ports le long des rayons	197
		C.2.1	L'approche locale classique	197
		~1	- TL	- / /

		C.2.2	Front d'onde et dérivées d'ordre 2	198
		C.2.3	Transport de la hessienne et des quantités transverses	199
		C.2.4	De l'existence de singularités	201
	C.3	Stratég	gies de résolution des équations de l'optique géométrique	204
		C.3.1	Boîte à outils	204
		C.3.2	Une première résolution par méthode des rayons	205
		C.3.3	Un formalisme plus adapté	207
D	Inte	raction	avec une surface	211
Ľ	D 1	De l'or	ntique géométrique à la "GTD"	212
	211	D.1.1	Des approches plus ou moins empiriques	212
		D.1.2	Méthodes asymptotiques	215
	D.2	Réflex	ion et réfraction sur les dioptres "solides"	218
	2.2	D.2.1	Conditions "physiques"	218
		D.2.2	Conditions sur l'amplitude de l'optique géométrique	219
		D 2 3	Conditions sur la phase et ses dérivées	220
		D 2 4	Fronts d'ondes réfléchis et transmis	220
	D 3	Diffrac	tion	221
	D.5	D 3 1	Deux diffractions d'ondes simples	225
		D 3 2	Diffraction d'une onde quelconque par un dièdre quelconque parfaitement réflé-	223
		D.3.2	chissant	227
		D33	Un peu de théorie sur les champs au voisinage des dièdres	229
		D .5.5		
E	Rela	tions di	iverses entre système de coordonnées et opérateurs de différentiation	233
	E.1	Systèn	ne de coordonnées proches d'une surface	233
	E.2	Base p	araxiale	234
	E.3	Relation	on entre éléments géodésiques et matrice hessienne de la phase	235
F	Prop	agatior	n and discretization	237
	F.1	Algori	thm	237
		F.1.1	A beam like algorithm	237
		F.1.2	Some details about beam propagation	239
	F.2	From c	liscrete representation to continuous beams and material surfaces	242
		F.2.1	Geometrical modeling and ray tracing	242
		F.2.2	Fields interpolation	244
		F.2.3	Surface interpolation	246
G	Cha	mns ma	avens nour les annlications numériques	249
Ŭ	G 1	Chamr	o théorique pour une couche limite	249
G.2 Modèles de jots		es de jets	250	
	G.2	Modèl	es de jour hillon	250
	0.5	G 3 1	Formules générales intégro-différentielles	252
		G 3 7	Fn deux dimensions	252
		G 3 3	En trois dimensions	252
		0.5.5		∠_34

H An overview of the ray-launching method					
	H.1	A "ray shooting" method	260		
	H.2	Free propagation in a mean flow	263		
	H.3	Taking material surface into account	265		
	H.4	In-duct propagation	268		
Ré	féren	ces	277		

X_____

Introduction

Motivations industrielles

Plusieurs facteurs expliquent l'intérêt croissant porté, depuis les années 1950, au bruit généré par les avions. D'une part, avec l'avènement des moteurs à réaction et en dehors des phénomènes liés à l'atteinte de vitesses supersoniques, les avions sont devenus beaucoup plus bruyants. D'autre part, l'essor de l'aviation civile a conduit à une augmentation de la population exposée au bruit.

Parallèlement aux changements objectifs concernant la population affectée, les mœurs ont évolué. En effet, plus d'attention a été portée à l'effet du comportement de l'homme sur l'environnement et au confort de chacun. Ainsi, parmi d'autres paramètres comme notamment la pollution atmosphérique, la nuisance sonore est devenue une quantité à prendre en compte au cours de la conception. Pour les constructeurs d'avions, cela s'est essentiellement traduit par une amélioration considérable du confort des passagers et la nécessité pour respecter les règlements établis de réduire drastiquement les niveaux de l'exposition au bruit.

Les travaux, en acoustique, sur les avions se sont orientés suivant deux axes : la réduction du bruit interne pour améliorer le confort en cabine des passagers et la réduction du bruit externe pour répondre aux exigences accrues des communautés aéroportuaires. Pour le premier, le domaine d'espace à prendre en compte est relativement petit, les structures jouent un rôle important et les critères sont liés aux desiderata des passagers, alors que pour le second, l'espace est vaste, les mouvements de l'air jouent un rôle non négligeable, et la réglementation impose des critères sur des points de mesure pré-définis. Les différences physiques et historiques qui existent entre ces deux aspects ont motivé, dans un premier temps, des réponses différentes.

L'évolution de la place de l'acoustique dans l'univers aéronautique a aussi influencé le domaine militaire. Comme pour le domaine civil, l'exposition au bruit de la population doit désormais être prise en compte. Mais, les techniques évoluant, l'acoustique est aussi amenée à jouer un rôle en matière de discrétion. Les avions militaires, à cause des vitesses importantes des jets sortant des réacteurs et des vitesses nécessaires à l'accomplissement de missions qui leur sont demandées, ont toujours généré des niveaux sonores plus élevés que les avions civils. Le travail effectué sur ces derniers et les progrès réalisés en matière de discrétion ont rendu réalistes des travaux à long terme sur la signature acoustique.

Aujourd'hui, la réduction de l'exposition au bruit est devenue une problématique importante pour les constructeurs aéronautiques. Plusieurs types de solutions sont envisagés. La nuisance externe peut être réduite immédiatement en utilisant des trajectoires optimisées pour les décollages et les atterrissages. Par ailleurs, des modifications localisées permettent de réduire le bruit à la source. Enfin, des solutions plus ambitieuses tentent de modifier l'architecture générale des avions. L'acoustique est donc devenue un élément de design.

Caractérisation des problèmes

L'environnement sonore autour d'un avion est perçu par plusieurs types de capteurs. Le premier et le plus important est, bien sûr, l'oreille humaine. Elle témoigne du confort acoustique. Deux caractéristiques propres à l'évaluation de ce confort doivent être prises en compte. D'une part, les impressions sont subjectives. Les critères l'évaluant ne peuvent donc pas être triviaux. D'autre part, l'évaluation est continue et les positions et les durées de mesure sont multiples. C'est donc une image sonore étendue dans l'espace et dans le temps qu'il faut maîtriser. L'autre type important de capteurs regroupe les microphones utilisés pour les mesures au voisinage des aéroports ou pour la certification. Contrairement aux capteurs du type précédent, ils sont placés en des endroits précis, enregistrent sur des durées définies et leur réaction est simple à analyser. Enfin, il est intéressant de considérer ici les structures comme un troisième type de capteurs. En effet, si le mouvement de la structure peut être générateur de bruit, son exposition à des vibrations sonores extérieures peut lui être nuisible et nécessite donc d'être étudiée.

Deux types de problèmes se distinguent. D'une part, pour l'acoustique interne, l'évaluation de l'environnement sonore se fait en chaque point d'un volume donné à partir de sources plutôt diffuses et réparties dans l'espace. De telles sources peuvent être, par exemple, les vibrations de la structure, le bruit de couche limite ou les fuites d'étanchéité. Dans le volume restreint de la cabine, certaines positions des oreilles des passagers doivent, en plus, être traitées avec une attention particulière. D'autre part, pour l'acoustique externe, l'évaluation de la contribution totale se fait en des points de mesure précis et à partir de sources relativement localisées au voisinage de l'avion en comparaison avec les situations précédentes. Mais celles-ci sont plus difficiles à identifier.

Les indicateurs utilisés pour définir l'environnement sonore doivent tenir compte des caractéristiques de l'oreille humaine. Celle-ci perçoit différemment les bruits en fonction de leurs fréquences, de leurs amplitudes, de leurs natures, de leurs durées, ainsi que de la superposition de plusieurs bruits. L'oreille humaine est sensible aux variations de pression pour des amplitudes comprises entre 20 μ Pa, seuil d'audibilité, et 120 Pa, seuil de douleur, et pour des fréquences comprises entre 20 Hz à 20 kHz. Cependant, la sensibilité n'est pas uniforme dans ce domaine et l'assemblage généralement complexe des composantes du bruit nécessite, pour rendre compte de la gêne produite, d'intégrer et de pondérer différents critères.

En aéronautique, la gêne occasionnée est souvent exprimée en dB(A). Cette unité pondère l'amplitude des signaux en fonction de la fréquence et de la sensibilité relative de l'oreille humaine. L'introduction de l'EPNdB (Effective Perceived Noise) permet de prendre également en compte le temps d'exposition et la nature des composantes d'un signal complexe. Un troisième indicateur, le SIL (Speech Interference Level), juge l'effet d'un bruit sur l'intelligibilité d'une conversation. Pour une utilisation civile, la connaissance de ces niveaux donne une image suffisamment précise pour définir l'environnement sonore. Pour une utilisation militaire, l'évaluation d'une véritable signature nécessite de prendre en compte plus de détails décrivant par exemple, la directivité ou le contenu fréquentiel.

L'acoustique dans le secteur aéronautique

Différentes caractéristiques de l'acoustique dans le secteur aéronautique sont communes avec d'autres domaines de l'acoustique. Pour l'acoustique interne, bien que les volumes soient réduits, la nature des sources et les configurations ressemblent à celles rencontrées pour l'acoustique des salles. Certaines méthodes sont donc partagées par ces deux domaines. Pour l'acoustique externe, une telle analogie ne se distingue pas aussi franchement. D'une part, l'importance de l'écoulement conduit à un rapprochement avec les bruits aéroliques. D'autre part, les distances intervenant sont de l'ordre de grandeur de celles rencontrées pour l'acoustique en milieu urbain. Ces caractéristiques, aussi bien pour l'acoustique externe que pour l'acoustique interne, se retrouvent dans les problématiques liées à d'autres moyens de transport, comme le train et la voiture.

De manière générale, un phénomène acoustique se traduit par une variation de pression. Sa répétition, sa durée, son amplitude et sa forme le caractérisent. La nature des phénomènes acoustiques en général conduit à une description identifiant un phénomène source et une propagation au travers d'un milieu. Du mouvement d'un haut-parleur aux fluctuations au sein d'un écoulement, les sources peuvent être de natures très différentes. De même, entre l'eau, l'air et les structures, les propriétés du milieu propagatif sont diverses.

Les avions génèrent essentiellement trois types de bruits : un bruit lié aux parties tournantes du moteur, un bruit "aérodynamique" et un bruit de structure vibrante. Le bruit de la structure est essentiellement perçu à l'intérieur de la cabine. Les deux autres types de bruit fournissent l'essentiel des niveaux sonores à l'extérieur. Les sources se répartissent sur l'ensemble de l'avion et elles rayonnent sur de longues distances. Ainsi, en fonction des phases du vol et des configurations, l'étude de l'estimation au sol doit prendre en compte le bruit du moteur, dû à la turbine, à la soufflante, à la combustion, au compresseur ou au jet, et le bruit aérodynamique, dû au train d'atterrissage ou à l'hypersustentation.

L'étude et le traitement du bruit peuvent être abordés de différentes façons. Les ressemblances qui existent entre les problématiques acoustique, électromagnétique ou structurelle suggèrent des rapprochements. Cependant, la description du milieu de propagation est en partie commune avec l'aérodynamique. En fonction des situations spécifiques et de leurs histoires propres, les constructeurs aéronautiques ont abordé la question avec des points de vue divers qui ont nourri notre réflexion.

Modélisation en aéroacoustique

Une distinction peut être faite au sein de la théorie acoustique entre différents sous-ensembles. En fonction de la nature des phénomènes excitateurs et de la nature du milieu propagatif, l'aéroacoustique ou la vibroacoustique, par exemple, peuvent être séparées. L'aéroacoustique s'intéresse à l'étude des phénomènes acoustiques intervenant dans les écoulements. Deux aspects lui sont attachés. Les sources aéroacoustiques apparaissent au sein de l'écoulement et engendrent des fluctuations de pression particulières se propageant sur de longues distances. La propagation aéroacoustique étudie cette propagation en tenant compte des effets de l'écoulement. La modélisation aéroacoustique doit donc particulièrement identifier les mécanismes sources d'une part et, d'autre part, étudier l'effet de l'aérodynamique sur la propagation.

Depuis les années 1950, l'aéroacoustique a bénéficié des progrès réalisés en modélisation et en traitement numérique. Pendant longtemps, les estimations se sont basées sur des calculs simples. A partir des équations de la mécanique des fluides, les études étaient essentiellement empiriques et analytiques. Compte tenu de la puissance des ordinateurs, la part numérique était nécessairement réduite. Dans les années 1990, l'aéroacoustique a connu un énorme développement avec l'apparition de nouvelles méthodes de calcul et une augmentation considérable de la puissance de calcul des ordinateurs. L'utilisation de méthodes de résolution volumiques et temporelles des équations de la mécanique des fluides a permis une description plus détaillée des phénomènes.

A la fin du vingtième siècle, des méthodes numériques diverses étaient communément utilisées pour résoudre les problèmes en mécanique des fluides. Cependant, l'ordre de grandeur des perturbations acoustiques est tellement faible devant celui des autres phénomènes aérodynamiques que les calculs classiques ne permettaient pas de les mettre en évidence. Une discipline s'est donc développée parallèlement à la mécanique des fluides numérique (CFD) pour réussir à calculer les phénomènes acoustiques. Par réciprocité, l'aéroacoustique numérique (CAA) a permis d'enrichir les méthodes utilisées en aérodynamique et les estimations acoustiques bénéficient désormais des deux types de calculs.

Alors que les analogies anciennes effectuaient des traitements analytiques pour décrire les problèmes grâce à des calculs de rayonnement connus, les méthodes modernes résolvent effectivement les équations de la mécanique des fluides mais en traitant spécifiquement les différentes échelles de variations. [³⁸] et [³⁴] donnent un éventail complet des techniques utilisées. Dans le détail, de nombreuses études ont permis de réaliser des calculs de plus en plus précis. Des premiers travaux passés en revue dans [¹⁷] aux plus récents dont des exemples peuvent être trouvés dans [¹⁰] ou dans [⁶⁸], des phénomènes de plus en plus complexes ont pu être étudiés.

Dans la majorité des cas, la résolution numérique des équations en acoustique se fait de façon classique. Ainsi, si les schémas de discrétisation sont adaptés aux particularités des problèmes, le socle des méthodes demeure commun avec toutes les autres disciplines numériques. Celles-ci considèrent essentiellement une décomposition des champs sur des polynômes. Que la variable spatiale évolue dans deux ou dans trois dimensions, la résolution nécessite généralement de se donner une répartition de points suffisamment dense dans l'espace pour définir correctement les variations des fonctions. Les variations brusques nécessitent donc un grand nombre de points de discrétisation.

Limites et méthode de résolution adaptée

Les dimensions des problèmes aéroacoustiques en aéronautique sont très disparates. En effet, les sources présentes au voisinage d'un avion induisent des perturbations comportant des fréquences dans tout le spectre audible et, notamment, dans les hautes fréquences. Les soufflantes et les turbines produisent des signaux comportant des raies réparties entre 1 kHz et 20 kHz. Un décollement de couche limite, quant à lui, peut battre à des fréquences de plusieurs kilohertz. Compte tenu de la vitesse du son, les longueurs d'ondes mises en jeu varient alors entre le centimètre et le mètre. Or, la surface d'un avion peut mesurer quelques mètres carrés comme plusieurs centaines. De plus, les distances de propagation nécessaires aux évaluations peuvent atteindre plusieurs kilomètres.

Pour un signal quelconque, une représentation correcte doit rendre compte de toutes les variations. Ainsi, avec une décomposition linéaire, il faut au moins cinq points par longueur d'onde pour discrétiser un signal sinusoïdal. Une fréquence de 3 kHz communément rencontrée en aéroacoustique nécessite donc 125 000 points pour discrétiser un mètre cube. Les difficultés supplémentaires propres aux problèmes aéroacoustiques conduisent souvent à doubler voire tripler ce nombre pour obtenir une résolution correcte. Avec la puissance actuelle des ordinateurs, la résolution globale d'un problème au voisinage d'un avion par une méthode volumique n'est donc pas envisageable. Des décompositions polynomiales d'ordres plus élevés ne permettent pas d'espérer diminuer de façon importante le nombre de points. Même dans le cas de problèmes avec des écoulements uniformes qui n'utilisent qu'une discrétisation de la surface, à 10 kHz, le calcul pour un avion de type Falcon ou Rafale est relativement lourd.

Des méthodes de résolution rapides basées sur des principes physiques ont toujours existé. Certaines s'intéressent à la propagation de l'énergie acoustique indépendamment de la fréquence. Elles s'inspirent des analyses à base de rayons de propagation de la lumière. En première approximation, le chemin emprunté par l'onde acoustique semble dépendre essentiellement de la géométrie du problème et peu de la fréquence du phénomène excitateur. Développées d'abord pour l'équation de Helmholtz, *i.e.* la version fréquentielle de l'équation des ondes, elles ont été adaptées, notamment grâce aux études menées par Blo-

khintzev [⁹] et Candel [¹⁸], à des problèmes présentant des écoulements non uniformes. Alors que les premiers travaux ont permis de définir le principe de conservation de l'énergie acoustique, les seconds se sont plus particulièrement intéressés à la méthode de résolution. Ainsi, ils ont abouti au premier calcul en trois dimensions de la propagation d'une onde acoustique dans un jet.

Des travaux successifs ont établi un lien entre les méthodes de résolution à base de rayons et les approximations "hautes fréquences". Ces dernières, dont le formalisme a été entièrement défini pour les systèmes linéaires par Hörmander [³⁹], étudient le comportement des équations lorsque la dynamique temporelle induit des taux de variations spatiales grands devant les dimensions géométriques des problèmes. Les champs solutions peuvent alors être décomposés en deux parties découplées. La première équilibre l'évolution temporelle et la seconde ajuste la propagation de l'énergie en fonction de la configuration du problème. L'utilisation d'une forme *a priori* de solution, appelée "Ansatz" scinde effectivement le problème et les inconnues en deux. L'adaptation de l'Ansatz pour absorber les fluctuations brusques permet de réduire les taux de variations des nouvelles inconnues. L'équation iconale traduisant la propagation des oscillations ne pouvant se résoudre à l'aide des méthodes classiques, c'est sa résolution par une approche lagrangienne qui permet de faire le lien avec les méthodes de rayons.

Des développements récents effectués d'une part en électromagnétisme et d'autre part en sismographie ont considérablement enrichi les méthodes de rayons. L'introduction de la diffraction permet de prendre en compte des phénomènes plus complexes que la simple propagation notamment lors de l'interaction avec les surfaces. Les études sur les différentes formes de diffraction ont conduit à créer des champs de rayons de divers types aussi bien spatiaux que rampant sur les surfaces. La Théorie Géométrique de la Diffraction (GTD) formalise l'ensemble de cette approche. Par ailleurs, la compréhension des mécanismes de propagation et surtout l'utilisation de faisceaux donnant une consistance aux rayons ont permis d'améliorer la résolution en espace libre. Ces deux évolutions demeurent peu développées dans le cadre aéroacoustique.

Cadre de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode de calcul adaptée pour les hautes fréquences permettant de prédire le bruit rayonné par différentes sources modélisées au voisinage d'un avion en prenant en compte la géométrie complète de celui-ci, l'hétérogénéité de l'écoulement et les propriétés absorbantes de certains matériaux. Jusqu'à présent les efforts pour réduire le bruit rayonné par un avion ont surtout porté sur la diminution des niveaux en sortie de moteur. L'utilisation industrielle de la méthode développée dans cette thèse permet d'envisager l'élaboration de formes "acoustiquement discrètes" grâce, notamment, à l'optimisation de l'installation motrice et à l'utilisation des effets de masquage. Pour être efficaces, les calculs doivent être suffisamment rapides et précis pour discriminer les différentes options d'architecture qui peuvent être élaborées au cours d'avant-projets.

Concrètement, la méthode permet de calculer une approximation du bruit rayonné par différents types de sources et, en particulier, des sources ponctuelles ou des sources modales modélisant les contributions dues à la soufflante ou à la turbine. Elle prend en compte les effets, sur la propagation, de la présence des jets à l'arrière des moteurs et des tourbillons de bout d'aile. Elle s'adapte à toutes les géométries sans développement particulier et traite l'interaction avec les surfaces en fonction de l'impédance du matériau qui les recouvre. Les post-traitements disponibles donnent soit la répartition des champs sur des surfaces prédéfinies, soit le rayonnement en champ proche ou champ lointain pour toutes les positions et directions.

Le traitement rapide des hautes fréquences est réalisé grâce à l'utilisation d'équations adaptées et à un formalisme de résolution basé sur des rayons. Par rapport au simple rayonnement, à partir des surfaces diffractantes, des pressions dues au champ incident, cette approche doit permettre, d'une part, avec la multiréflexion, d'obtenir une répartition de la pression plus précise et, d'autre part, de prendre en compte l'écoulement. Les méthodes volumiques basées sur la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes n'étant pas encore envisageables pour les hautes fréquences sur des configurations industrielles, cette méthode est la seule à pouvoir prédire l'effet de la non uniformité de l'écoulement. Même dans le cas d'écoulements uniformes, elle peut se substituer efficacement aux méthodes utilisant les éléments finis de frontière dès l'instant que les temps de calculs sont courts et qu'une certaine précision est assurée.

Détail des travaux réalisés

Ce mémoire présente les travaux réalisés au sein de Dassault Aviation dans le cadre de cette thèse. La proximité, aussi bien des sujets que du lieu et de la période, avec la thèse réalisée par Damien Laval [⁴⁷] a permis, non seulement des échanges théoriques fructueux, mais aussi un développement en partie commun à l'électromagnétisme et à l'acoustique concernant l'implantation pratique dans un code de calcul industriel. Ce mémoire expose aussi bien la problématique théorique et numérique spécifique à l'acoustique que des cas d'application liés à la prédiction du bruit des avions Falcon de Dassault Aviation.

Le premier chapitre résume les différentes études théoriques menées. A partir de la démarche désormais classique décrite entièrement pour la première fois par Sébastien Candel dans [¹⁶], quelques limites sont identifiées et les principales pistes de réflexion sont évoquées. Pour ne pas alourdir la présentation, les développements sont placés en annexe et seuls les principaux résultats sont rappelés. La mise en pratique est, dans la suite, l'occasion de les détailler un peu plus.

Les aspects numériques et algorithmiques sont évoqués dans le deuxième chapitre. La propagation des faisceaux à partir d'un maillage est décrite en même temps que sont abordés les différents problèmes intervenants et les réponses apportées. Une fois l'algorithme détaillé, on s'intéresse au passage d'une représentation discrète à une reconstruction continue. Un code opérationnel est ainsi élaboré à partir de l'ensemble des descriptions précédentes. Le chapitre se termine par l'évocation des trois post-traitements qui peuvent être faits à partir d'une solution de l'optique géométrique.

Les trois derniers chapitres regroupent l'ensemble des applications étudiées. Elles sont réparties en fonction de l'objectif poursuivi. Les premières sont académiques ou correspondent à des configurations classiques pour lesquelles une solution numérique ou analytique donnée par une autre méthode est connue. Elles réalisent la validation de la méthode et du code développés. Les secondes se focalisent sur la propagation guidée. Elles mettent en avant les défauts d'une approche simple et montrent comment des solutions acceptables peuvent être obtenues. La dernière catégorie décrit l'utilisation industrielle sur des configurations "réalistes".

En annexe, le lecteur pourra retrouver tous les développements théoriques effectués. Comme, dans l'ensemble, ils reprennent, à partir de nouveaux points de vue, des résultats ayant fait l'objet de travaux antérieurs, ils n'ont pas été insérés dans le corps de la thèse. Le but principal de la thèse était de construire un outil "industriel" de calcul, et à ce titre, ils ne forment pas le cœur du travail mais ils sont primordiaux et indispensables pour comprendre la stratégie adoptée.

Dans la première annexe, le rappel des principes de la mécanique des fluides et des ondes permet d'aboutir à une description détaillée de la modélisation. Ainsi, les équations de Navier-Stokes et d'Euler qui décrivent la physique sous-jacente sont explicitées. Puis, des traitements spécifiques à l'acoustique sont évoqués et fournissent le système d'équations linéaires à la base de la propagation. Enfin, une analyse ondulatoire permet de construire des outils facilitant les développements suivants.

Dans l'annexe suivante, l'approche permettant de traiter les hautes fréquences est décrite. A partir de concepts classiquement utilisés en mécanique des fluides, les différentes échelles intervenant sont identifiées et les équations sont adimensionnées pour mettre en valeur la problématique spécifique à cette étude. La méthode d'approximation est construite en s'appuyant sur des considérations générales liées aux développements asymptotiques. L'application dans le cadre de l'aéroacoustique est réalisée pour les équations obtenues dans le premier chapitre et les différents choix sont discutés. De nouvelles équations sont alors obtenues.

Dans l'annexe (C), la méthode de résolution est élaborée, certes à partir des notions classiques liées aux rayons, mais ajustées pour obtenir une précision accrue. Comme pour l'algorithme effectif, deux étapes sont distinguées. La construction des trajectoires est effectuée en premier puis, plusieurs manières de transporter l'énergie le long de celles-ci sont évoquées. Dans un troisième temps, différentes techniques d'utilisation de la méthode sont exposées. A la fin de cette annexe, le lecteur a une vision globale de la stratégie mise en place pour les problèmes de propagation libre, en commençant par les équations issues de la modélisation physique et allant jusqu'à la résolution des équations adaptées aux hautes fréquences.

Enfin, l'annexe (D) explique comment les interactions avec les surfaces diffractantes peuvent être traitées. La théorie géométrique de la diffraction servant de base au raisonnement, ses concepts sont largement discutés. En particulier, il est montré comment l'étude de la solution de l'optique géométrique conduit à considérer des champs nouveaux. Avant d'adapter la GTD aux problèmes aéroacoustiques, des relations entre les champs réfléchis et transmis sont déduites grâce à l'application de l'approximation "hautes fréquences" sur des conditions aux limites classiques. A la fin de cette annexe, la prise en compte de l'écoulement dans le calcul des champs diffractés est étudiée. Cette annexe conclue les développements théoriques repris pour élaborer le code de calcul. Les annexes suivantes apportent des précisions pour les applications numériques effectuées.

Principaux résultats obtenus

Les méthodes à base de rayons ont été beaucoup étudiées et elles sont communément utilisées en aéroacoustique. Cependant, peu de travaux donnent une vision complète des concepts mis en jeu. La compilation de travaux sur le sujet et les différents rapprochements effectués font déjà de cette thèse un travail original. De plus, cette démarche permet l'identification de l'erreur introduite à chaque étape du raisonnement, l'analyse de l'erreur totale et son calcul pour chaque application. Or, ceci a rarement été réalisé au cours des travaux antérieurs.

Par ailleurs, les méthodes "modernes" à base de rayons, comme les faisceaux gaussiens, ont déjà été utilisées pour effectuer certains calculs aéroacoustiques mais l'absence de stratégie globale en réduit l'application. La description précise de la propagation des différentes quantités le long des rayons et l'application des dernières méthodes de décomposition et de discrétisation des champs pour des problèmes aéroacoustiques, assurent aussi à cette thèse un caractère original. En outre, l'étude de la contribution de ces deux aspects à l'erreur commise sur la détection et le traitement des singularités des champs de rayons est totalement nouvelle pour l'aéroacoustique.

Enfin, l'adaptation de l'interaction des champs de rayons avec des surfaces diffractantes en présence d'écoulement, n'est pas traitée de façon systématique par les études antérieures. Le développement dans cette thèse d'une méthodologie qui peut être utilisée pour l'ensemble des champs de la GTD est une démarche originale. L'ajout de champs supplémentaires s'accompagne d'une étude de l'apport effectif pour les applications. En particulier, la comparaison entre les rayonnements des champs obtenus à partir

de différentes surfaces permet des analyses inédites.

Jusqu'à présent, l'application des méthodes de rayons se faisait au cas par cas et les quelques codes capables de traiter des configurations quelconques ne permettaient pas une combinaison de sources, de matériaux et d'écoulements aussi divers. Le code développé pendant cette thèse bénéficie des développements théoriques pour traiter, de manière générale, les différentes difficultés rencontrées (traversées des caustiques, multiréflexion, intersection des trajectoires courbes et des surfaces, ...). Il permet donc d'envisager une utilisation systématique dans un contexte industriel.

Chapitre 1 Elements théoriques

Les méthodes de "lancer de rayons" sont déjà communément utilisées dans des domaines proches de la prédiction du bruit rayonné par un avion. En particulier, de telles stratégies de calcul se sont avérées pertinentes en électromagnétisme pour évaluer la discrétion des avions de combats ou en acoustique sousmarine. Le traitement des hautes fréquences qu'elles permettent dans ces domaines motive une application en aéroacoustique. Cependant, de nombreuses singularités propres aux situations rencontrées empêchent une transposition immédiate. Ainsi, en reprenant les deux exemples précédents, on constate que les rôles joués par les hétérogénéités du milieu et les géométries présentes, induisent des difficultés de résolution particulières. Il faut donc s'inspirer des méthodes développées pour d'autres domaines tout en introduisant un comportement spécifique lié aux paramètres physiques.

Plusieurs points de départ sont possibles pour commencer l'élaboration d'une méthode de "lancer de rayons". Parmi les approches modélisant la propagation des ondes sonores, les développements menés par Sébastien Candel, et exposés entre autres dans [¹⁶] et [¹⁸], correspondent en grande partie à la problématique abordée dans cette étude. En effet, ils permettent non seulement de modéliser les effets d'un écoulement *a priori* quelconque, mais aussi de prendre en compte des géométries diverses et complexes. Mais, pour adapter la méthode au contexte industriel, il a semblé intéressant de l'agrémenter de développements inspirés par des sujets connexes. Ainsi, en reprenant les différents thèmes liés à la méthode, plusieurs axes d'approfondissement ont été étudiés.

Dans ce chapitre, l'exposé des grands principes de la méthode fournit une ossature pour présenter l'état de l'art, les difficultés principales limitant son utilisation et les pistes de recherche envisagées pour étendre son domaine de validité. Parmi les résultats obtenus, certains ont été utilisés pour l'élaboration de l'outils de calcul et d'autres représentent des directions pour les développements futurs.

1.1 Les principaux composants de la méthode

Le principe du "lancer de rayons" peut être abordé de deux façons. Empiriquement, il est intéressant de comprendre comment l'énergie liée aux ondes acoustiques se propage. Des études rapides permettant d'analyser l'essentiel des phénomènes sont alors possibles. Mais cette approche ne permet pas de construire une méthode numérique fiable et rend difficile des développements plus généraux ultérieurs. Or, les observations précédentes peuvent aussi être expliquées à partir des équations décrivant le comportement du milieu propagateur. Les paragraphes suivants décrivent cette deuxième stratégie qui mélange approximations physiques, développements mathématiques et méthodes de résolution.

La construction d'une méthode de résolution numérique utilisant le "lancer de rayons" se décompose en quatre étapes. Le choix de la modélisation permet d'abord de décrire les phénomènes physiques à l'aide d'équations. Dans le cas présent, il s'agit de traduire le comportement d'un fluide traversé par une perturbation acoustique en identifiant différentes quantités caractéristiques et en reliant leurs évolutions. Ensuite, pour traiter particulièrement les "hautes fréquences", une forme générique de solution est utilisée pour éliminer le comportement trivial densifiant la discrétisation et identifier le comportement intéressant. A ce stade, les équations obtenues sont adaptées aux problèmes physiques à estimer. Pour les résoudre, plusieurs méthodes sont utilisables. Plutôt que de considérer le domaine de calcul dans son ensemble, une méthode de "lancer de rayons" construit progressivement des trajectoires le long desquelles certaines propriétés sont conservées. La troisième étape consiste donc à exprimer le problème sous la forme d'un système d'équations à intégrer en fonction d'un paramètre scalaire. Enfin, la discrétisation permet de passer d'une résolution théorique ou analytique à une résolution numérique, c'est-à-dire réalisable de manière approchée par un calculateur. Pour les rayons, cela consiste à identifier des congruences discrètes de rayons caractéristiques des faisceaux et à discrétiser les trajectoires.

Le développement exposé dans les paragraphes suivants est essentiellement inspiré de [¹⁶] et [¹⁸]. Dans ces références, la méthode exposée est un peu plus générale et les notations sont parfois différentes. Seul l'essentiel ayant servi à la réalisation du code de calcul est repris et la formulation est adaptée en conséquence. L'exposé s'appuie successivement sur trois des thèmes principaux, chacun étant développé plus en détails dans les différentes annexes. La modélisation aéroacoustique communément utilisée est d'abord rappelée et ses limites sont identifiées. Ensuite, l'approximation valable pour les hautes fréquences est présentée. Enfin, l'utilisation des rayons pour la résolution est discutée. Un quatrième et dernier ensemble de paragraphes évoque les premières applications de la méthode décrites dans [¹⁶] et [¹⁸] qui peuvent être comparées à l'objectif poursuivi avec ce travail.

1.1.1 Modélisation et propagation

L'étude de la création et de la propagation des ondes acoustiques s'appuie sur différentes modélisations en fonction du cadre physique. Dans un fluide, des mouvements comme ceux à l'origine des nuisances sonores peuvent être décrits à l'aide du système des équations de Navier-Stokes instationnaires. Sa généralité permet d'aborder de nombreux phénomènes, mais une résolution suffisamment précise est, dans de nombreux cas, très lourde. Or, pour l'acoustique, la propagation est essentiellement décrite par le sous système des équations d'Euler alors que les termes liés à la viscosité permettent d'appréhender la création des perturbations. De plus, les amplitudes mises en jeux sont souvent suffisamment faibles pour que les phénomènes non-linéaires puissent être négligés. Le système des équations d'Euler linéarisées est donc à la fois suffisamment général et simple pour que sa résolution précise soit efficace pour la plupart des problèmes étudiés.

Soit $\overline{\rho}$ la masse volumique, \overline{v} la vitesse et \overline{s} l'entropie caractérisant un écoulement stationnaire et, respectivement, r, ξ et σ les variations autour des quantités précédentes, les équations d'Euler linéarisées s'écrivent :

$$\partial_t r + \nabla (r \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla \pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho}^2} r = 0$$
(1.2)

$$\partial_t \sigma + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{1.3}$$

où \overline{p} et $\pi = c^2 r + (\partial_s \overline{p})\sigma$ correspondent respectivement à la partie stationnaire et à la perturbation en pression; c est la vitesse du son classiquement définie.

Le modèle physique simplifié décrivant le comportement du fluide permet de concentrer l'étude sur la propagation des ondes acoustiques, mais le comportement des ondes constituées de composantes "hautes fréquences" demeure difficile à estimer. Les équations précédentes doivent être adimensionnées pour identifier les termes essentiels. Dans un premier temps, les champs physiques sont traités de manière classique : la masse volumique est rapportée à une valeur de référence ρ_{∞} , la vitesse à la célérité du son de référence c_{∞} et la pression à $\overline{\rho}_{\infty}c_{\infty}^2$. Dans un second temps, les variations temporelles sont étudiées par rapport à une fréquence de référence liée aux phénomènes excitateurs, et les variations spatiales par rapport à une longueur de référence caractérisant la géométrie du problème. Lorsqu'il n'y a pas de frontières solides dans le domaine étudié, la comparaison de deux situations différentes est réalisée grâce à une longueur de référence liée au champ stationnaire. Cette longueur ,L, est choisie de sorte que les variations de ces champs soient de l'ordre de l'unité, tous les termes étant ainsi comparables. Lorsqu'une ou plusieurs frontières solides sont présentes dans le domaine, le résultat des interactions entre elles et des ondes incidentes dépend principalement des rayons de courbures de ces surfaces et des fronts d'onde. L doit alors être choisie de sorte que les variations temporelles et spatiales à tous les ordres soient *a priori* comparables.

Si la perturbation est créée par une source monochromatique de fréquence f, les équations d'Euler linéarisées (1.1), (1.2) et (1.3) peuvent être re-écritent

$$-i\frac{r}{\epsilon} + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla r + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{\rho} + r \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$$
(1.4)

$$-i\frac{\boldsymbol{\xi}}{\epsilon} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla\pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla\overline{p}}{\overline{\rho}^2}r = 0$$
(1.5)

$$-i\frac{\sigma}{\epsilon} + \overline{v} \cdot \nabla\sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\overline{s} = 0 \tag{1.6}$$

avec $\epsilon = c_{\infty}/(2\pi f L)$.

1.1.2 Approximation "hautes fréquences"

De manière évidente, la résolution du système (1.4), (1.5) et (1.6) devient difficile lorsque ϵ devient petit. En effet, les variations du champ source induisent alors des variations spatiales nécessitant une étude beaucoup plus fine que ce que la taille du problème et les conditions stationnaires imposent. Or, pour une onde provenant d'une source ponctuelle se propageant dans un domaine sans frontière, homogène et sans écoulement, la solution est calculable analytiquement. L'une des pricipales idées de la méthode consiste donc à introduire la forme *a priori* de solution de l'optique géométrique :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{x}) \exp\left(\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{\epsilon}\right) \tag{1.7}$$

avec

$$\boldsymbol{W}_{0}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{W}_{0}^{0}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{W}_{0}^{r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\epsilon})$$
(1.8)

La phase ϕ doit traiter les variations "rapides" liées à la nature harmonique de la source et W_0 les variations, plus "lentes" liées à la configuration géométrique et aux conditions stationnaires. En pratique, seule W_0^0 , l'approximation au premier ordre en ϵ , est calculée et le reste W_0^r doit rester petit.

Lorsque la forme *a priori* de l'optique géométrique est introduite dans les équations (1.4), (1.5) et (1.6) et qu'une analyse asymptotique est menée, deux nouveaux systèmes d'équations doivent être résolus :

$$\begin{bmatrix} 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi \cdot & 0 \\ \frac{c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi & 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & \frac{\alpha c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi \\ 0 & 0 & 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi \end{bmatrix} \begin{cases} \rho_0^0 \\ \boldsymbol{\xi}_0^0 \\ \sigma_0^0 \end{cases} = 0$$
(1.9)

et

$$\left\{\begin{array}{l}
\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla r_{0}^{0} + \boldsymbol{\xi_{0}^{0}} \cdot \nabla \overline{\rho} + r_{0}^{0} \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi_{0}^{0}} \\
\left(\boldsymbol{\xi_{0}^{0}} \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi_{0}^{0}} + \frac{\nabla \pi_{0}^{0}}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho}^{2}} r_{0}^{0} \\
\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_{0}^{0} + \boldsymbol{\xi_{0}^{0}} \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{s}}
\end{array}\right\} = 0$$
(1.10)

Parmi les trois ondes propagées par le système (1.9), une seule correspond aux variations de pression. Pour cette onde, la condition de propagation que doit vérifier la phase, l'équation iconale, s'écrit :

$$(-1 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2 = c^2 \nabla \phi^2 \tag{1.11}$$

et les champs doivent aussi vérifier :

$$\sigma_0^0 = 0 \text{ et } \boldsymbol{\xi_0^0} = \frac{\pi_0^0}{\overline{\rho}c(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\phi)} \nabla\phi$$
(1.12)

Pour être une solution du second système, π_0^0 doit, de plus, vérifier l'équation de conservation :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\pi_0^{0^2}}{\overline{\rho}c^2(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)}(\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu})\right) = 0 \tag{1.13}$$

Cette équation peut être analysée en identifiant la vitesse de groupe

$$v_g = \overline{\boldsymbol{v}} + c\boldsymbol{\nu} \tag{1.14}$$

suivant laquelle l'action d'onde

$$A_0 = \frac{\pi_0^{0^2}}{\overline{\rho}c^2(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)} \tag{1.15}$$

est propagée.

Cette étude succinte amène quelques remarques. D'abord, la phase et le vecteur amplitude ne dépendent pas de ϵ . Ce n'est que la recomposition de l'onde qui introduit une dépendance suivant la fréquence du champ excitateur. Ensuite, compte tenu de la méthode conduisant au calcul de la phase et de l'amplitude, les solutions devraient être meilleures à mesure que le paramètre ϵ devient petit. Or, dans certaines configurations, la solution approchée est, en fait, exacte quelque soit la valeur du paramètre alors que, dans d'autres, elle reste très mauvaise même pour des valeurs élevées du paramètre.

1.1.3 Les champs de rayons

La forme particulière de l'équation iconale (1.11) rend sa résolution difficile. En particulier, les solutions peuvent être multi-valuées. Les solveurs classiques ne sont donc pas adaptés. Le formalisme lagrangien et l'utilisation de rayons permettent de construire des méthodes résolvant ce type d'équation. Sans développer les éléments mathématiques, le principe physique consiste à suivre la trajectoire suivant laquelle l'énergie est principalement propagée. A partir de chaque point source, un rayon se construit en suivant la direction donnée par l'équation de conservation (1.13). Il suffit d'intégrer

$$\partial_s \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{v}} + c\boldsymbol{\nu} \tag{1.16}$$

et l'équation iconale (1.11) reste vérifiée grâce à

$$\partial_s \nabla \phi + \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \frac{\nabla c}{c} = 0$$
(1.17)

L'équation de conservation (1.13) indique que l'"action d'onde" contenue dans un tube de rayons est conservée au cours de la propagation. En effet, dans un tube délimité par des rayons se propageant suivant la vitesse de groupe v_g , l'équation de conservation indique que le flux de A_0 entrant est égal au flux sortant. Ainsi, pour un tube de rayons élémentaire, l'amplitude, supposée constante dans une section, est inversement proportionnelle à la racine carrée du rapport des surfaces élémentaires en entrée et en sortie. Si θ et ψ sont deux paramètres transverses au rayon qui permettent de décrire le front de l'onde au voisinage de la source, ils définissent avec s une position dans un voisinage le long du rayon moyen du tube. La surface élémentaire du tube de rayons se calcule alors grâce à la surface élémentaire sur le front d'onde, c'est-à-dire grâce aux variations suivant ces deux paramètres. Finalement,

$$\pi_0^0 = \pi_0^0(0) \sqrt{\frac{\bar{\rho}c^3 |\nabla\phi| \mathcal{D}(0)}{\bar{\rho}(0) (c(0))^3 |\nabla\phi(0)| \mathcal{D}}}$$
(1.18)

avec $\mathcal{D} = \partial_s \boldsymbol{x} \cdot (\partial_\theta \boldsymbol{x} \wedge \partial_\psi \boldsymbol{x})$. La connaissance des deux nouveaux vecteurs, $\partial_\theta \boldsymbol{x}$ et $\partial_\psi \boldsymbol{x}$, le long du rayon, nécessite de connaître leurs valeurs initiales ainsi que celles de $\partial_\theta \nabla \phi$ et de $\partial_\psi \nabla \phi$, et d'intégrer deux nouveaux systèmes d'équations linéaires liant les dérivées du vecteur position et du gradient de phase. Les 12 nouvelles équations sont déduites des équations de propagation le long du rayon grâce aux différenciations par rapport à θ et ψ et dépendent du champ stationnaire et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2.

La construction des rayons telle qu'elle est décrite permet de traiter la propagation libre à partir d'une source et dans un milieu dépourvu de discontinuité. Lorsqu'une onde acoustique rencontre une modification brutale du milieu de propagation, les phénomènes ne peuvent plus être modélisés de la même façon. En optique, la traversée d'un dioptre séparant deux milieux d'indices différents ou la rencontre d'un dioptre réfléchissant, conduit à considérer des rayons réfléchis et des rayons transmis. En aéroacoustique, des condidérations similaires permettent d'écrire des conditions pour construire de tels champs. Ils dépendent alors du champ incident, de la nature géométrique et des propriétés mécaniques de la surface. Après la réflexion ou la transmission, la propagation des rayons est décrite par les équations classiques. Seules les conditions initiales sont particulières et, contrairement au cas d'une source prédéfinie, doivent être établies en fonction de la configuration après la propagation du champ incident. Les expressions sont rappelées dans l'annexe (D.2).

1.1.4 Application numérique du "lancer de rayons"

Par opposition à une méthode théorique ou analytique, une méthode numérique doit pouvoir traiter des configurations quelconques, ce qui nécessite de mettre en place un algorithme générique. Compte tenu de la particularité des développements précédents, la résolution d'un problème à l'aide d'une méthode "lancer de rayons" n'obéit pas aux règles "classiques". Elle se décompose en trois étapes : construction des départs de rayons en fonction des conditions initiales, propagation des rayons dans le volume et arrêt de la propagation en tenant compte des surfaces prédéfinies et des champs calculés.

L'initialisation d'un rayon est réalisée soit à partir des données liées à une source, soit à partir d'une forme géométrique éclairée par un champ incident. Dans les deux cas, la position initiale est donnée, la phase et l'amplitude sont souvent facilement accessibles et le gradient de phase et les quantités géodésiques doivent être calculés. La propagation nécessite d'intégrer 18 équations scalaires (3×2 pour le système caractéristique et $3 \times 2 \times 2$ pour les quantités géodésiques). Il faut donc se donner un pas d'intégration qui dépend des variations spatiales du champ stationnaire, de la configuration géométrique et des champs calculés. L'arrêt peut intervenir après un certain nombre de pas d'intégration ou, de façon plus efficace, en fonction de la distance parcourue, de l'amplitude, etc. Mais il doit surtout tenir compte de l'intersection d'un rayon avec une surface "solide" ou "virtuelle" nécessitant la création de nouveaux rayons.

Les premières applications d'une méthode "lancer de rayons" numérique présentées dans [¹⁶] et [¹⁸] se sont intéressées à la propagation au voisinage des jets et dans des tuyères. A partir de données analytiques des champs physiques et des formes géométriques, les quantités nécessaires à la résolution telles que les dérivées successives étaient calculées numériquement. Les premiers rayons lancés numériquement ont permis de confirmer les comportements particuliers aussi bien observés que prédits par la théorie. Ainsi, une source placée sur l'axe d'un jet ne rayonne que peu en aval dans la direction du jet et une partie du rayonnement en amont est piégé dans le jet ce qui crée un étirement des fronts d'onde vers l'aval et une compression vers l'amont. Si la source est décalée par rapport à l'axe, le rayonnement faible dans l'axe du jet est traduit par la présence d'une zone que les rayons ne peuvent pas atteindre. Cette zone est délimitée par une enveloppe, appelée caustique, sur laquelle les rayons arrivent tangents et sont réfractés vers l'extérieur. L'amplitude fournie par les rayons est alors infinie.

* * *

Au début de son utilisation, la méthode de calcul était particulièrement efficace. Elle est la première à avoir permis d'obtenir des résultats pour des configurations de tailles significatives en trois dimensions en tenant compte des hétérogénéités du milieu. En effet, la puissance des calculateurs et les développements des autres méthodes ne permettaient alors pas de telles estimations.

Aujourd'hui encore, une telle méthode reste efficace. Son approche physique permet une compréhension des phénomènes que les méthodes modernes de résolution globales ont tendance à occulter. De plus, sa mise en œuvre sur des problèmes simples est rapide et le calcul de configurations relativement grandes est réalisable en quelques minutes sur des calculateurs grand public.

Cependant, pour créer un outil industriel moderne, quelques améliorations sont nécessaires. Malgré la justification des développements menée dans [¹⁶] et dans [¹⁸], certains aspects sont mal compris et certaines difficultés identifiées restent non traitées. Or, la précision des solutions calculées doit pouvoir être estimée

a priori et confirmée *a posteriori*. Des études théoriques supplémentaires doivent donc être menées. Par ailleurs, des traitements algorithmiques nouveaux peuvent être utilisés pour rendre la méthode encore plus efficace.

1.2 Vers une méthode adaptée aux impératifs industriels

Depuis les travaux exposés dans [¹⁶] et dans [¹⁸], peu d'études se sont intéressées à l'amélioration de la méthode de "lancer de rayons" pour prédire le bruit rayonné par les avions. L'efficacité des outils pouvant être développés à partir des premiers travaux et la nécessité de développer des méthodes "volumiques" précises ont réduit l'attention portée sur ce type de méthode. Pourtant, maintenant que différents outils cohabitent dans les stratégies de calcul industrielles, la compatibilité, en terme de paramètres et de rendu, des méthodes de "lancer de rayons" avec les autres devient nécessaire. Or, dans ce but, de nombreux travaux ne traitant pas directement de ces méthodes mais de sujets connexes peuvent être utilisés.

Parmi les travaux intéressants, certains sont plus théoriques et d'autres purement algorithmiques. Il était donc nécessaire d'inventorier les contributeurs potentiels à l'amélioration de la méthode et d'estimer leur pertinence en fonction du but recherché. La construction d'un outil "industriel" ne demande pas forcément des études très poussées dans une direction, mais plutôt une vision globale permettant de placer les moyens où ils sont le plus efficaces.

La démarche s'est organisée autour de deux axes. D'abord, les problématiques liées à l'utilisation d'une méthode de "lancer de rayons" pour l'estimation du bruit rayonné par un avion complet ont été identifiées. Ensuite, plusieurs pistes ont été explorées et éventuellement abandonnées compte tenu du gain relatif de chacune par rapport à l'ensemble étudié. Les paragraphes suivants rendent compte de ces travaux et des principales améliorations évoquées.

1.2.1 Quelques problématiques

Les problématiques qui se sont dégagées lorsque l'utilisation d'une méthode de "lancer de rayons" a été envisagée sont de natures diverses. En premier lieu, une connaissance précise des limites connues est nécessaire pour envisager leur dépassement. Ensuite, les questions liées à la généralisation des problèmes doivent être traiter. Enfin, les paramètres et les critères de résolution numériques actuels nécessitent d'adapter la méthode.

Lorsque le problème à résoudre ne fait plus intervenir une tuyère ou un jet mais un avion complet, certains phénomènes physiques changent. La première question qui se pose concerne la distance de propagation. Certes la méthode est développée pour traiter des distances de propagation grandes devant la longueur caractérisant les variations de l'onde. Cependant, indépendamment de la perturbation propagée, il est naturel de se demander si une propagation sur plusieurs kilomètres ne nécessite pas de prendre en compte des aspects liés à l'absorption, la dispersion ou la diffusion qui seraient négligeables aux échelles plus petites.

De plus, dans [¹⁶], par exemple, l'auteur indique que l'approximation géométrique n'est plus valable au delà d'une certaine distance de la source car les phénomènes diffractifs deviennent trop importants. Or, pour les calculs industriels, non seulement il faudrait caractériser précisemment cette limite qui dépend "du degré d'inhomogénéité" mais, en plus, il semble nécessaire de la repousser pour pouvoir traiter l'ensemble des environnements évoqués.

Deux limitations déjà présentes pour la résolution des problèmes dans [¹⁶] et [¹⁸] prennent encore plus d'ampleur. Les caustiques, c'est-à-dire les enveloppes des faisceaux le long desquelles les rayons sont tangents, doivent être traitées. En effet, les solutions de l'optique géométrique classique ne sont plus valables dans leur voisinage. Or, la prise en compte de surfaces et de champs moyens quelconques induit une répartition complexe de ces zones. Une solution pourrait être de les identifier *a posteriori* et d'évaluer la validité de la solution calculée en conséquence. Mais, cela risque de conduire à ne juger acceptables que les estimations d'un petit nombre de configurations. Un traitement numérique des amplitudes infinies et une modélisation des phénomènes diffractifs induits sont donc nécessaires.

Les phénomènes diffractifs doivent aussi être pris en compte lorsque l'onde incidente rencontre une géométrie singulière, c'est-à-dire "non lisse". Sur un avion les ruptures de continuité sont nombreuses : les bords de fuites sur les ailes et l'empennage, la jonction entre les ailes et le fuselage mais aussi les sorties de nacelles ou de "manche" centrale qui, bien qu'ayant une géométrie lissée, présentent des courbures suffisamment importantes pour que la diffraction induite ne soit pas négligeable.

En ce qui concerne la propagation guidée déjà évoquée dans [¹⁶] et [¹⁸] à propos des tuyères, la nécessité de pouvoir traiter une forme quelconque de "manche" alimentant en air le moteur central, conduit à utiliser un nouveau formalisme. En effet, si le conduit présente un coude ou si sa section reste simplement constante, le nombre d'interactions entre les rayons et la géométrie risque de devenir trop important. Il faut donc imaginer une façon de propager l'énergie plus proche du phénomène physique et estimer la validité des solutions obtenues.

Comme le but des développements menés est de construire une méthode utilisée "industriellement", le traitement d'un grand nombre de configurations nécessite de généraliser l'algorithme et les aspects numériques. Au delà de la simple propagation des rayons, il faut se poser la question de la cohérence du faisceau de rayons et de son interaction dans son ensemble avec les surfaces. Si les rayons permettent de passer d'une résolution globale à des considérations locales, la reconstruction des solutions au cours du post-traitement nécessite de disposer globalement de suffisamment de rayons pour décrire les détails pertinents.

En plus de la discrétisation des trajectoires, se pose donc le problème de la discrétisation des continuums, que ce soit les surfaces présentes dans le domaine de calcul, les champs moyens ou les faisceaux propagés. Une certaine cohérence doit être donnée à l'ensemble et l'étude de l'incidence relative des différents paramètres sur la précision finale permet d'améliorer l'efficacité de la méthode.

Enfin, l'utilisateur doit être capable d'estimer la marge d'erreur associée au problème considéré. Cette erreur est liée à la modélisation, au traitement asymptotique, à la méthode de résolution ou à la discrétisation. Une première estimation de l'erreur et des critères de limite de validité sont évoqués dans [¹⁶] et [¹⁸]. Même si l'obtention d'une formule sommant toutes les sources d'erreurs, comme cela est possible avec les éléments finis, est illusoire, une évaluation plus globale est sans doute possible.

1.2.2 Les pistes et les points d'amélioration étudiés

Pour rendre plus efficace la méthode, plusieurs pistes ont été envisagées. Pour chacune des étapes dans le cheminement conduisant du problème physique à la solution numérique, une amélioration a été recherchée. Même si tous ne se sont pas révélés pertinents, de nombreux travaux récents connexes ont servi de source d'inspiration. Ainsi, ont été évoqué : la prise en compte de phénomènes non modélisables avec les équations d'Euler linéarisées, l'amélioration du développement asymptotique, une meilleure utilisation des rayons et enfin, des post-traitements adaptés.

Modélisation physique

Pour améliorer le modèle de propagation, une bonne connaissance des hypothèses classiquement faites est nécessaire. Le lecteur pourra trouver dans les annexes (A.1) et (A.2) le rappel des principaux concepts conduisant à l'utilisation du système des équations d'Euler linéarisées.

La première piste d'amélioration envisagée est la prise en compte des effets visqueux. Or, un traitement du système des équations de Navier-Stokes à l'aide du formalisme de l'optique géométrique est très lourd. En utilisant la description des ondes et en particulier les équations de dispersion évoquées dans l'annexe (A.3), une étude sur les dimensions caractéristiques telle qu'esquissée dans l'annexe (B.1) conduit à imaginer une diminution exponentielle de l'amplitude le long du rayon. Avec les valeurs de référence, le facteur d'amortissement vaut environ $1 - 3,58 \cdot 10^{-4}Lf^2$ avec L exprimée en km et f en kHz soit 0,9968 pour une onde de 3 kHz propagée sur 1 km. Cette valeur bien qu'intéressante pour l'estimation globale de l'erreur, n'est pas suffisamment grande pour justifier le traitement des équations de Navier-Stokes esquissé plus haut.

La deuxième amélioration abordée consiste à prendre en compte les phénomènes non-linéaires. Plusieurs travaux théoriques évoqués dans l'annexe (B.2.3) pourraient conduire à l'étude d'une approximation "hautes fréquences" du système des équations d'Euler non-linéaires. Cependant, l'étude de l'adimensionnement des équations comme réalisée dans l'annexe (B.1.3) et des termes supplémentaires apparaissant dans les équations du (B.3.5) conduit à ne considérer toujours que les équations linéarisées. Des études supplémentaires pourraient permettre de passer d'une analyse empirique à la résolution des nouvelles équations et ainsi de calculer les instabilités et les interactions entre les ondes acoustiques et les autres types d'onde.

Les développements asymptotiques

L'analyse détaillée de l'utilisation du formalisme de l'optique géométrique avec les équations d'Euler linéarisées permet, non seulement de comprendre le lien entre le phénomène excitateur et les ondes propagées, mais aussi de décrire les termes suivants dans les développements asymptotiques. Dans [¹⁶], l'auteur indique déjà comment calculer les termes d'ordres supérieurs. Dans l'annexe (B.3), les calculs sont repris et développés. Grâce à l'estimation des contributions supplémentaires, il est possible d'imaginer pourquoi, lorsque la courbure du front d'onde devient trop importante, c'est-à-dire lorsque la hessienne du gradient de phase devient singulière, les termes aux ordres suivants ne sont plus négligeables.

Les difficultés rencontrées pour obtenir une estimation générale de l'erreur et les singularités apparaissant au voisinage des caustiques, conduisent à se demander si la forme *a priori* de l'optique géométrique est correctement choisie. En offrant des degrés de liberté supplémentaires, une forme plus générale permettrait sans doute de traiter ces problèmes. A cette fin, une idée intéressante consiste à utiliser une phase complexe et à conduire les développements de la manière la plus générale. Concrètement, les résultats obtenus peuvent sembler identiques aux résultats classiques mais, aussi bien pour la résolution théorique que pour les calculs numériques, les nouvelles expressions rappelées dans l'annexe (B.3.4) se sont avérées plus efficaces.

Les rayons

Une fois les développements asymptotiques assurés, l'étape théorique de résolution à l'aide des rayons pose de nombreux problèmes. En effet, tel qu'il est défini habituellement, le passage entre le formalisme eulerien et le formalisme lagrangien demeure sujet à caution et la présence des caustiques pose la question de sa mise en pratique. Dans l'annexe (C.1), différents développements sont menés pour comprendre pourquoi le choix des rayons "classiques" est bien le plus opportun. De plus, les différentes manipulations des expressions s'avérent intéressantes lorsqu'il s'agit de traduire numériquement la résolution.

L'introduction des variations transverses permet de définir un voisinage de rayon et de transporter l'amplitude. Les calculs sont détaillés dans l'annexe (C.2). Cependant, lorsque les rayons se "replient" sur eux-mêmes le long des caustiques, la définition classique n'est plus applicable. Les développements de l'annexe (C.2.4) rappellent l'ensemble des analyses pertinentes pour aborder ce problème. Pour éliminer les difficultés liées à la résolution au voisinage des caustiques, l'utilisation d'une phase complexe est judicieuse. En effet, grâce à l'introduction d'une partie imaginaire, la divergence du faisceau élémentaire ne peut plus être nulle, aussi bien théoriquement que numériquement. Ceci permet non seulement de simplifier l'algorithme de détection des caustiques et la poursuite du calcul après leur traversée, mais en plus de comprendre en partie comment un faisceau gaussien est transporté dans un milieu hétérogène.

Les faisceaux

Bien que l'étude des faisceaux gaussiens n'ait pas, pour le moment, été poursuivie au delà de ce qui est présenté en annexe (C.2.4), il est intéressant de préciser les modes d'utilisation possibles. Un faisceau est gaussien lorsque l'amplitude décroît de façon gaussienne dans le voisinage d'un rayon moyen. L'introduction d'une partie imaginaire pour la phase permet de décrire un tel faisceau à l'aide d'un seul rayon. Or le problème essentiel de l'utilisation des rayons classiques réside dans leur caractère trop local. Avec une phase complexe, un rayon se transforme en un faisceau élémentaire dont l'étendue reste bornée dès que la partie imaginaire décroît rapidement en fonction des coordonnées transverses. Numériquement, la discrétisation d'un faisceau quelconque ne se résume donc plus à une discrétisation de la phase d'une part et à une discrétisation de l'amplitude d'autre part, mais nécessite une décomposition sur une base de faisceaux élémentaires ayant une étendue transverse presque compacte.

En combinant les remarques concernant les développements asymptotiques et les rayons, les caustiques doivent être traitées de deux façons. D'abord, l'utilisation des faisceaux élémentaires élimine les problèmes de rencontre des rayons avec les caustiques. Il faut y ajouter le fait que la décomposition du faisceau incident en faiceaux élémentaires améliore l'erreur commise. En effet, en fonction du nombre de faisceaux élémentaires, l'erreur de départ entre le faisceau global et la décomposition est ajustable et, comme chacun des faisceaux élémentaires est concentré autour de son rayon moyen, l'erreur devient rapidement nulle en s'éloignant de chaque rayon. Ensuite, la diffraction spécifique apparaissant au voisinage des caustiques et se traduisant par des termes supplémentaires non négligeables dans le développement asymptotique, nécessite d'introduire de nouvelles formes de propagation de l'énergie. La nouvelle contribution ainsi créée, en général de second ordre dans les zones éclairées, sera significative au voisinage des caustiques et dans les zones d'ombre.

La diffraction

La prise en compte de la diffraction apparaît comme un problème essentiel pour les géométries d'avions complets. L'utilisation des rayons "classiques" pour calculer la propagation de l'énergie induit une absence totale de propagation transverse, c'est-à-dire en dehors de la direction principale donnée par l'équation de conservation. Les solutions ainsi calculées présentent donc des frontières franches entre les zones atteintes par les rayons et les zones non atteintes. Pour remédier à cet artefact non physique, la théorie géométrique de la diffraction introduit de nouveaux champs de rayons. Initialement développée pour un milieu

homogène et sans écoulement, elle peut être adaptée à la propagation dans des milieux plus généraux. Son principe est rappelé dans l'annexe (D.1). De nouveaux champs de rayons sont alors construits à partir de sources induites par la nature d'un champ incident.

Les rayons diffractés sont généralement utilisés pour représenter les phénomènes apparaissant lors de l'interaction des rayons incidents avec les surfaces. L'annexe (D.3) donne un exemple de développement permettant d'obtenir les paramètres d'un champ diffracté. D'autres rayons pourraient modéliser la diffraction liée aux caustiques mais les développements dans ce sens n'ont pas été poursuivis. En plus des rayons se propageant dans l'espace, des rayons rampants peuvent être construits pour obtenir l'éclairage résiduel dans les zones d'ombre. Là encore, de la même façon que pour l'équation d'Helmholtz, des développements asymptotiques adaptés permettent d'obtenir des équations nouvelles. L'une d'entre elles ressemble à l'équation icônale et l'autre à une équation de conservation, elles peuvent donc se traiter de la même façon grâce aux rayons rampants. Cependant, la mise en place des rayons diffractés reste lourde car elle suppose d'identifier les entités géométriques donnant naissance aux rayons et de construire autant de faisceaux de rayons que de phénomènes diffractifs.

Comme pour la diffraction liée à la forme de l'onde et aux hétérogénéités du milieu, deux approches sont envisageables. D'abord, la forme *a priori* de solution utilisée au (1.1) ne permet pas de décrire les phénomènes diffractifs liés aux interactions avec les surfaces. Il semble donc intéressant de chercher une forme qui permette plus de "liberté". Ensuite, la propagation à l'aide de faisceaux élémentaires introduit une forme de diffraction grâce à la suppression des limites franches. Mais, les phénomènes diffractifs restent en grande partie non représentables. L'autre piste d'étude est de trouver une décomposition en faisceaux élémentaires pour un faisceau quelconque présentant des singularités comme c'est le cas pour les faisceaux réémis à partir d'une surface éclairée.

* * *

Les paragraphes précédents donnent un panorama des questions soulevées par l'utilisation industrielle d'une méthode de rayons et quelques réponses améliorant la qualité des calculs. Parmi les difficultés, certaines sont intrinsèques de la méthode mais traduisent, pourtant, des phénomènes physiques caractéristiques comme, par exemple, la diffraction. L'approximation "hautes fréquences" d'une part et l'approche lagrangienne d'autre part induisent des comportements difficilement justifiables mathématiquement aujourd'hui. Pour améliorer quand même les solutions calculées, des contournements tels que l'utilisation de faisceaux élémentaires sont envisageables, bien que les formalismes ne soit pas totalement développés.

En ce qui concerne le présent travail, les pistes théoriques n'aboutissant pas suffisamment rapidement ont été abandonnées au profit des aspects numériques et algorithmiques qui sont développés dans la suite. Un des enjeux des développements à venir réside dans la mise en pratique de la décomposition en faisceaux élémentaires, de la même façon que pour les ondes sismiques. Une étude pourrait être menée sur l'utilisation simultanée de ceux-ci avec des développements asymptotiques des équations de la mécanique des fluides. Un autre enjeu est la représentation à l'aide de trajectoires lagrangiennes du rayonnement à partir d'une surface quelconque. L'ensemble des aspects théoriques généraux abordés au cours de l'étude ont été évoqués dans les paragraphes précédents. Des éléments supplémentaires plus spécifiques seront ajoutés dans la suite en fonction des configurations évaluées. Dans un premier temps, l'exposé des composants fondamentaux de la méthode de "lancer de rayons" a permis de mettre en avant plusieurs points mal pris en compte par les implémentations classiques. Plusieurs pistes de développement, couvrant l'ensemble des aspects, ont été envisagées. La nécessité d'obtenir des solutions directement utilisables a conduit à en abandonner certaines. Les autres ont contribué à créer un code de calcul plus efficace répondant à la problèmatique aéroacoustique préétablie et aux exigences du milieu industriel. La mise en pratique et les résultats numériques obtenus sont évoqués en détail au cours des chapitres suivants.

La conclusion de l'étude théorique conduit, dans la suite, à s'intéresser particulièrement à trois aspects. D'abord, différents problèmes algorithmiques inhérents à la méthode doivent être précisés. La discrétisation des équations et des champs, d'une part, et la gestion pratique des singularités, d'autre part, forment un complément indispensable aux développements théoriques. Ensuite, l'estimation de l'erreur qui ne peut être faite analytiquement, nécessite une forme d'apprentissage. Pour chaque cas, l'identification *a priori* doit être suivie d'une analyse *a posteriori* pour compléter la connaissance théorique des sources d'erreur. Enfin, pour tester au maximum les éléments algorithmiques et garantir un apprentissage efficace, les exemples utilisés doivent rendre compte de l'ensemble des difficultés évoquées. Il faut prouver la capacité de l'outils à traiter des champs moyens quelconques et des surfaces comportant plusieurs composantes hétérogènes.

* * * *
Chapitre 2

Aspects numériques et algorithmiques

Classiquement, une méthode de résolution d'un problème se compose d'une analyse physique, d'une analyse mathématique et d'une discrétisation. Avec des éléments finis, cette dernière nécessite de choisir des espaces de discrétisation et de décrire les problèmes à l'aide de bases de fonctions. La résolution se résume alors à "inverser" les systèmes. L'utilisation des rayons paramétrés par (C.8) pour résoudre l'équation iconale et l'équation de conservation obtenues au (B.3.4) et issues des développements asymptotiques rend la discrétisation originale. Deux aspects doivent être pris en compte : la construction des rayons et l'interpolation des fonctions. Les algorithmes de résolution sont donc nécessairement plus complexes.

La partie principale d'un algorithme de "lancer de rayons" est, bien sûr, la construction de la congruence de rayons. La partie (C.3) donne quelques pistes pour la traiter. Les rayons ne doivent pas être considérés comme isolés. Il faut donc imaginer des structures et des méthodes permettant de suivre simultanément l'ensemble des rayons et d'en construire de nouveaux. La discrétisation intervient alors en deux points. Le nombre et la place des rayons sont définis par les impératifs d'une bonne représentation des champs sur les surfaces, c'est-à-dire par la forme des fonctions et par la nature de la propagation. L'intégration le long des rayons doit être calculée numériquement. Ainsi, une discrétisation le long des rayons et une discrétisation sur les surfaces sont construites.

L'objectif de la partie suivante est d'aborder tous les aspects permettant de construire un code de calcul complet. Dans la première partie, l'algorithme choisi est décrit. Il utilise au maximum la notion de congruence et permet de traiter des surfaces quelconques. La deuxième partie précise comment les différentes discrétisations sont effectuées pour donner dans certains cas des solutions numériques très proches des solutions analytiques. Elle évoque, entre autres, l'utilisation des maillages comme support des discrétisations surfaciques. Afin de disposer des solutions sous différentes formes, plusieurs post-traitements sont discutés dans la troisième partie.

2.1 Une résolution à l'aide de faisceaux

Pour réaliser un éclairage continu des surfaces, notre algorithme de "lancer de rayons" propage des faisceaux. Par rapport à un algorithme classique, le regroupement des rayons en faisceaux fournit des ensembles cohérents dont la répartition des éléments descriptifs peut évoluer, au cours du calcul, en fonction des situations rencontrées. Un faisceau est une surface sur laquelle une amplitude, une phase et des quantités annexes sont décrites de sorte qu'en chaque point de cette surface, il soit possible de reconstruire toutes les caractéristiques de l'onde propagée. Que ce faisceau soit décomposé en faisceaux élémentaires ou discrétisé à l'aide de rayons classiques, l'algorithme le propageant est le même.

Un faisceau est d'abord initialisé à partir d'une source. Dans le cas d'un dioptre source vibrant, la construction du faisceau de départ est simple. Elle consiste, en effet, à copier la géométrie du dioptre et à exprimer les champs dessus. Dans le cas de sources plus abstraites, une surface adaptée doit être imaginée pour rendre compte de toutes les caractéristiques. Une fois le faisceau initialisé, sa surface est transportée ; chaque position de celle-ci est un rayon potentiel. Le transport est matérialisé par l'intégration effective de quelques trajectoires. La propagation du faisceau s'arrête en fonction des surfaces rencontrées. Ainsi, un faisceau éclairant peut être séparé en plusieurs composantes connexes en fonction des surfaces éclairées.

Les paragraphes suivants précisent cet algorithme. La vision générale exposée en premier, identifie plusieurs composantes qui sont développées ensuite. Succinctement, l'algorithme doit créer les surfaces sources, propager les faisceaux et gérer leur interaction avec les surfaces "solides" prises en compte dans le calcul.

Aspects généraux

A partir des paramètres sources, un ensemble de faisceaux sources sont construits au cours de l'initialisation. Le nombre de faisceaux dépend du type de sources et de leur nombre. Ensuite, l'algorithme les traite un par un et les propage. Pour réaliser un éclairage correct de l'ensemble de la géométrie, la propagation est couplée avec une estimation des intersections et une optimisation itérative du faisceau. Pour la propagation en écoulement, l'intégration des trajectoires courbes prend en compte les propriétés locales. L'arrêt de la propagation intervient lorsque les rayons rencontrent une surface parmi celles décrites par la géométrie. Une accélération de l'algorithme est réalisée grâce à l'utilisation d'un arbre octal (octree) qui permet d'énumérer rapidement les éléments de la géométrie présents dans un voxel, c'est-à-dire au voisinage d'une position de l'espace.

Après une première propagation, l'optimisation consiste à améliorer la description du faisceau aux endroits nécessaires. Cette étape tient compte des hétérogénéités rencontrées au cours de la propagation et de la forme de la géométrie. Ce processus itératif est stoppé lorsqu'un certain nombre de rayons a atteint les surfaces. Ainsi, à partir d'un faisceau source, le faisceau incident obtenu est projeté sur les parties éclairées des surfaces. L'interaction calcule les quantités des faisceaux réfléchis et transmis en tenant compte du faisceau incident et de la surface. Les nouveaux faisceaux construits servent alors de faisceaux sources dans la suite du calcul. Un post-traitement de chaque faisceau après propagation et interaction est envisageable en fonction des paramètres donnés par l'utilisateur.

La figure (2.1) résume l'alogrithme et présente ces grandes composantes : les modules réalisant les opérations en bleu ciel, les paramètres de calcul spécifiés par l'utilisateur en rouge et les objets construits au cours du calcul en noir. Ces derniers sont principalement les faisceaux créés aux différentes étapes du calcul. Ils ne sont créés que pour la durée du calcul sauf si l'utilisateur décide de les stocker. Les modules



FIG. 2.1: *Grandes composantes de l'algorithme : paramètres du calcul (rouge), modules importants (bleu) et objets utilisés (noir)*

décrivent les grandes étapes d'un calcul et sont développés dans la suite.

L'initialisation

L'initialisation se décompose en trois étapes. D'abord, le maillage décrivant la géométrie du domaine de calcul est chargé. La base de celui-ci est classique, elle représente un ensemble de surfaces et contient les trois composantes définissant les positions des nœuds, une topologie reliant les nœuds à des éléments surfaciques et quelques informations annexes. Mais, pour faciliter le déroulement de l'algorithme de "lancer de rayons", cette base a été pré-traitée. Ainsi, des quantités définissant les normales et les quantités d'ordre deux aux éléments ont été ajoutées. Différents attributs reliés aux éléments, aux nœuds ou aux normales permettent de caractériser les propriétés géométriques et physiques de chaque partie de la géométrie. En particulier, des informations permettant d'interpoler les quantités et de reconstruire des

objets continus à partir de la discrétisation sont aussi stockées. Enfin, le maillage contient l'arbre octal qui le décrit grossièrement à l'aide de voxels cubiques de tailles adaptées. Des informations supplémentaires reliées aux voxels permettent de caractériser l'espace entre les différentes parties des surfaces.

Une fois les caractéristiques du maillage connues, l'algorithme estime tous les paramètres nécessaires à un calcul adapté. Il faut, par exemple, choisir un zéro numérique pour stopper les processus itératifs notamment lors de la recherche des intersections. Il faut aussi définir une distance maximale entre la géométrie continue et le maillage facetté ; celle-ci doit dépendre de la fréquence du signal source et de la géométrie. Enfin, l'infini est représenté par une sphère au delà de laquelle les rayons sont supposés ne plus pouvoir interagir avec la géométrie. D'autres paramètres sont : le nombre maximal de rayons devant interagir avec la géométrie, le nombre d'itérations d'optimisation du faisceau, le pas d'intégration par défaut et différents angles permettant, entre autre, de discriminer les types d'interactions entre les rayons et la géométrie.

La troisième étape de l'initialisation consiste à construire le tableau contenant les faisceaux à propager. Après chaque propagation, ce tableau, en pratique une liste chainée, permet de retrouver le faisceau devant être propagé ensuite et de ranger, à la suite des faisceaux déjà rangés et devant être traités avant, les faisceaux créés par l'interaction du faisceau incident précédent et de la géométrie. Avant la première propagation, le tableau ne contient que les faisceaux construits à partir des sources. Ceux-ci sont constitués d'un maillage représentant la surface supportant le faisceau, de deux champs complexes pour stocker la phase et l'amplitude, et de quantités annexes liées à la continuité du faisceau et facilitant son évolution tout au long du calcul. C'est au cours de cette dernière étape de l'initialisation que sont répartis les faisceaux entre les divers processeurs, dans le cadre d'un calcul parallèle. Lorsqu'il n'y a qu'un petit nombre de faisceaux dans le tableau, une autre stratégie de parallélisation consiste à répartir les rayons d'un même faisceau entre plusieurs processeurs.

Propagation d'un faisceau

La propagation est réalisée sur le premier faisceau de la pile du tableau contenant l'ensemble des faisceaux à propager. Dans un souci d'efficacité maximum, un adimensionnement est effectué en fonction de la fréquence du signal propagé et de la taille du problème. Cet adimensionnement est effectué de sorte que la phase, son gradient et sa hessienne, soient comparables dans les différentes propagations et que l'erreur commise soit toujours du même ordre. Il faut préciser que, sur un faisceau, pour ne pas conserver d'information superflue, ce n'est pas la hessienne qui est stockée sous sa forme matricielle, mais la partie liée aux variations du vecteur unitaire du gradient $\nabla \nu - \nu \otimes (\nu \cdot \nabla \nu)$. Ainsi, les rayons et les directions de courbures du front d'onde sont obtenus facilement et la forme symétrique permet de diminuer la place mémoire nécessaire. Cependant, il est alors impératif de pouvoir passer aisément de cette matrice à la hessienne et inversement. Dans la même optique, le gradient de phase est stocké normé. L'information permettant de passer des deux quantités précédentes à la hessienne d'une part et à la norme du gradient d'autre part est donnée par le champ moyen et l'équation icônale. Par ailleurs, avant la propagation, l'amplitude est remplacée par le flux, ce qui facilite les interpolations et adimensionne un peu plus le calcul, puisque le flux est conservé au cours de la propagation.

La propagation se décompose en plusieurs étapes. Dans un premier temps, le faisceau dans sa forme de départ est propagé, c'est-à-dire que les rayons (les positions, les valeurs de la phase, les gradients et les hessiennes) sont intégrés. Dans un deuxième temps, le faisceau est optimisé, ce qui implique l'élimination de certains rayons et la construction d'autres. Commence alors un processus qui alterne la propagation des nouvelles parties du faisceau et des optimisations successives. Lorsque le faisceau est correctement

décrit, ce processus est stoppé et un dernier filtrage est réalisé pour ne garder que les rayons devant, d'une part, interagir avec la géométrie et, d'autre part, être pris en compte pour l'estimation. L'amplitude est alors calculée grâce au rapport des valeurs du jacobien au départ et à l'arrivée. Ce calcul doit prendre en compte le nombre de caustiques rencontrées, et la racine carrée du rapport doit être multipliée par le coefficient idoine pour rétablir les retournements successifs des tubes de rayons. Les quantités sont ensuite re-dimensionnées.

Pour faciliter et améliorer la compréhension et le développement du code de calcul, des outils opérant directement sur un faisceau ont été mis en place. Ainsi, comme pour réaliser les interpolations, une instance du faisceau dans sa position de départ et une instance du faisceau après propagation doivent coexister, des opérations de copie générique partielle ou complète ont été mises en place. De même, des opérations de filtrage générique de faisceau en fonction d'attributs aux éléments ou aux nœuds ont été utilisées. Enfin, les traitements des topologies et des champs scalaires ont été au maximum séparés. En particulier, les interpolations sont réalisées de façon générique en fonction des coordonnées barycentriques des nouveaux nœuds dans les anciens éléments. Comme ces opérations peuvent être réalisées en dehors des routines de création des nouvelles topologies, ces dernières ne s'intéressent qu'à donner une cohérence à l'ensemble du maillage du faisceau indépendamment des positions, des normales ou des champs physiques.

Propagation et intersection pour un tube de rayons parmi d'autres

Tous les rayons et tous les tubes de rayons sont propagés en même temps, c'est-à-dire que, grâce aux propriétés du Fortran 90, les boucles sur les noeuds ou les éléments du maillage du faisceau sont inexistantes. Ainsi, même lorsque les quantités sont calculées pour chaque rayon, des opérations sur les tableaux permettent de traiter les rayons dans leur ensemble. Des fonctions conditionnelles sont employées pour traiter différemment les rayons car, non seulement, les distances de propagation ou les nombres de pas d'intégration diffèrent mais, en plus, les traitements doivent être adaptés en fonction de ce que les rayons rencontrent.

La propagation des rayons est réalisée de voxel en voxel. Les positions de départ sont d'abord situées dans la structure octale. Certains rayons se propagent à partir de l'extérieur du plus grand voxel et d'autres à partir de voxels de rang inférieurs et donc de tailles plus petites. Pour chaque rayon, après avoir identifié le voxel de départ, les premières limites de la propagation sont fixées par les limites de l'arbre octal. La propagation proprement dite peut alors se faire. Les rayons sont propagés tant que les critères idoines sont satisfaits. A l'issue de la propagation, pour tout rayon s'étant propagé jusqu'aux limites du voxel dans lequel il était, un nouveau positionnement permet de trouver le nouveau voxel dans lequel il va entrer. De nouvelles limites sont alors fixées et le rayon est propagé de nouveau. Les rayons sont ainsi propagés jusqu'à ce qu'ils aient tous vérifié un critère d'arrêt.

La propagation concrète d'un rayon commence par le calcul des quantités de départ, c'est-à-dire le calcul du gradient, des variations transverses, du jacobien et des quantités annexes nécessaires à l'estimation des différents critères. Le vecteur unitaire stocké sur le maillage du faisceau est multiplié par l'amplitude donnée par l'équation icônale de façon à obtenir le vecteur X du (C.1.3). Les variations transverses sont déduites en deux étapes : $\nabla \nu - \nu \otimes (\nu \cdot \nabla \nu) \rightarrow \nabla \nabla \phi$ puis, en prenant arbitrairement pour $\partial_{\theta} x$ et $\partial_{\psi} x$ les directions de courbure principale et transverse, les vecteurs $\partial_{\theta} \nabla \phi$ et $\partial_{\psi} \nabla \phi$ sont calculés par simple multiplication des précédents avec la hessienne. En fonction de la norme des deux derniers vecteurs, un ajustement est effectué pour que les normes de $\partial_{\theta} x$ et $\partial_{\theta} \nabla \phi$ d'une part, et $\partial_{\psi} x$ et $\partial_{\psi} \nabla \phi$ d'autre part, restent réparties autour de 1. Le jacobien est alors estimé grâce à $(\overline{u} + X) \cdot (\partial_{\theta} x \wedge \partial_{\psi} x)$. Les opérations inverses sont bien sûr réalisées après la propagation, pour retrouver les quantités stockées.

Une fois toutes les quantités mises en place, l'intégration des 12 équations des rayons peut être effectuée. Dans un premier temps, un pas d'intégration *a priori* est calculé en fonction du pas par défaut, initialisé après la lecture du maillage et des conditions locales liées au champ moyen et à la taille du voxel dans lequel le rayon se propage. Dans un deuxième temps, les opérations dictées par le schéma d'intégration sont réalisées dans un ordre cherchant à diminuer le coût. A l'issue de cette étape, les rayons ont virtuellement progressés indépendamment des obstacles se trouvant sur leurs trajectoires. Pour valider la progression, plusieurs critères sont testés et, en fonction de la situation, un nouveau pas d'intégration local est calculé.

La première vérification porte sur l'intersection avec des éléments, ou les limites du voxel. Ensuite, plusieurs estimations de l'erreur d'intégration sont calculées, notamment par l'utilisation de l'équation icônale ou des propriétés annexes. En particulier, lorsque le module du jacobien est quasiment nul, l'intégration est affinée car cela correspond à des amplitudes très élevées. Dans le cas de l'utilisation d'une hessienne de phase réelle, le changement de signe du jacobien permet de détecter précisément le point où le rayon est tangent avec une caustique. Le comptage précis de ces situations permet de calculer, à la fin, une amplitude correctement déphasée.

Au fur et à mesure des tests, un coefficient d'ajustement du pas d'intégration est calculé de sorte que, si le rayon s'est propagé correctement, le pas est allongé et, dans le cas contraire, la propagation est re-effectuée avec un pas adapté. En plus des considérations liées au rayons, la forme des tubes de rayons, notamment pour la validité des hypothèses de discrétisation, est surveillée, et les tubes devant être optimisés sont marqués. Lorsque l'intersection d'un rayon avec un obstacle est suffisamment précise ou que le rayon s'est propagé au delà de la sphère "infini", la propagation est stoppée. Pour rendre plus robuste l'algorithme, une propagation rectiligne est réalisée dès que le pas d'intégration devient trop petit.

Filtrage et optimisation

Après la propagation du faisceau, certains rayons doivent être éliminés car non pertinents, et d'autres doivent être créés dans les tubes pour lesquels les critères de précision ne sont pas satisfaits. La propagation a permis d'identifier différentes situations. Cependant, avant d'optimiser le faisceau, il faut vérifier que certains artefacts liés à la discrétisation ne détériorent pas la représentation du faisceau. En particulier, il arrive, compte tenu des discrétisations respectives de la géométrie et du faisceau, que certains rayons ne se propagent pas correctement, et que des intersections non pertinentes apparaissent. Plusieurs tests permettent de détecter les erreurs et des ajustements sont réalisés pour essayer de dépasser ces difficultés.

Une fois la cohérence du faisceau propagé vérifiée, le filtrage et l'ajout de nouveaux rayons peuvent être effectués. Le filtrage est relativement simple et consiste à éliminer les éléments et les nœuds du maillage marqués précédemment. L'ajout de nouveaux rayons suppose la modification des topologies existantes. Dans le détail, un paramètre de densification est d'abord attribué à chaque élément du faisceau. Aux critères estimés au cours de la propagation, viennent s'ajouter des critères liés à la cohérence de l'éclairage de la géométrie en fonction, en particulier, pour chaque élément du faisceau, des éléments éclairés de la géométrie. Pour ne pas dépasser le nombre maximal de rayons lancés et pour respecter une certaine progressivité, les valeurs du paramètre de densification sont ajustées en fonction du nombre d'optimisations réalisées et restant à réaliser. Ensuite, en faisant attention de garder une répartition pertinente, un nombre de morceaux est estimé pour chaque barre. La création des éléments nouveaux peut alors commencer. Plu-

sieurs stratégies ont été étudiées pour réaliser un maillage uniforme et simultanément sur l'ensemble des éléments à modifier. A la fin, les nouvelles parties du maillage sont ajoutées aux topologies existantes, et la position de chaque nouveau nœud est définie grâce à l'ancien élément auquel il appartient et à ses coordonnées barycentriques dans celui-ci.

Grâce aux informations fournies par la routine d'optimisation du faisceau, les champs sont interpolés aux nœuds. Le choix de la stratégie d'interpolation est alors décorrélé de la création topologique des nouveaux éléments. L'interpolation, comme les critères de densification, dépend de la forme de discrétisation du faisceau. Elle est abordée au (2.2.2) et au (F.2). Le processus d'optimisation permet d'obtenir un éclairage précis de la géométrie à double titre. Non seulement les champs sont correctement estimés sur l'ensemble du faisceau, ce qui assure la "continuité" de l'éclairage, mais en plus, la répartition des rayons est densifiée pour que les frontières entre l'ombre et la lumière soient clairement définies, que l'éclairage des singularités soit suffisant pour en déduire les champs diffractés, et qu'aucune composante de la géométrie ne soit "traversée" par le faisceau sans être éclairée.

Interaction et création de nouveaux faisceaux

A partir du faisceau incident éclairant la géométrie, deux suites sont envisageables : soit ce faisceau est stocké pour être utilisé en tant que tel, soit ce faisceau n'est qu'une étape d'un calcul faisant intervenir des interactions multiples. Dans les deux cas, il doit être ajusté pour répondre à de nouveaux critères de pertinence. Par exemple, certains tubes de rayons qui réalisent une discrétisation correcte du faisceau, laissent une trace trop étirée sur la géométrie pour que les hypothèses d'approximation ou de discrétisation soient encore vérifiées. De même, en certains endroits, localement, la nature de l'éclairage de la géométrie peut s'avérer insuffisamment cohérente pour permettre sa prise en compte. Pour la plupart des configurations, l'élimination des contributions sujettes à caution, n'impacte que peu la validité générale du calcul. Un nouveau filtrage est donc réalisé.

La construction des nouveaux faisceaux, à partir du faisceau incident, nécessite de pouvoir connaître les propriétés des surfaces éclairées en chaque position susceptible d'être atteinte par un rayon. Lorsque l'intersection d'un rayon avec la géométrie est constatée, l'élément du maillage concerné et les coordonnées barycentriques du point d'impact dans cet élément sont stockés. Les quantités caractérisant les propriétés de la surface peuvent alors être interpolées. De plus, la reconstruction de surface courbe, au dessus de l'élément plan, peut permettre de retrouver l'intersection exacte et de gagner un peu de précision. Cependant, cette opération doit être menée avec précaution car les intersections d'un rayon avec la facette plane ou avec la surface gauche peuvent être fortement différentes, et le déplacement du point d'impact peut s'avérer non pertinent.

Grâce au calcul matriciel, l'estimation des champs réfléchis, transmis ou diffractés se font facilement dès l'instant que toutes les quantités intervenant sont connues. Il suffit de coder les relations exposées au (D.2) et au (D.3). A la suite de l'interaction, un nouveau filtrage doit être réalisé car les précautions prises *a priori*, bien que nécessaires, ne suffisent pas toujours à éliminer toutes les erreurs. De plus, pour plus de clarté, les parties réfléchies et transmises doivent être filtrées. En effet, au moment de la création des nouveaux faisceaux, comme une partie transmise et une partie réfléchie peuvent coexister en chaque position, chaque rayon du faisceau incident donne *a priori* naissance à un rayon transmis et un rayon réfléchi. Or, après avoir calculé les champs, seule une partie des rayons contribue effectivement au faisceau transmis ou au faisceau réfléchi. A la fin, les deux nouveaux faisceaux peuvent être rangés dans le tableau contenant tous les faisceaux et un nouveau faisceau peut être propagé.

Dans les paragraphes précédents, les grandes lignes de l'algorithme ont été données et plusieurs points ont été volontairement traités succinctement. Afin de ne pas alourdir la présentation, la construction de l'arbre octal et son utilisation n'ont, par exemple, pas été détaillées. L'annexe (F.1) présente des détails supplémentaires concernant, d'une part, les quantités liées aux faisceaux et nécessaires au calcul et, d'autre part, les trois parties de l'algorithme que sont la localisation dans l'espace, l'estimation des intersections et l'optimisation des faisceaux.

Il semble intéressant de donner ici les principales modifications induites par l'utilisation d'une hessienne complexe. Indépendamment du choix de la discrétisation, l'ajout d'une partie imaginaire à la hessienne intervient au cours de l'initialisation. De nouveaux paramètres doivent alors définir la forme de la décroissance transverse. Les opérations liées à la propagation se déroulent de la même façon, seuls les critères changent. En effet, la vérification de la conservation de la partie imaginaire du hessien au cours de la propagation, témoigne en premier lieu de la validité de la discrétisation. Ensuite, la rencontre d'une caustique n'a plus besoin d'être détectée systématiquement. Pour que l'estimation de la racine carrée soit correcte au moment du calcul de l'amplitude, il suffit de stocker l'information définissant le signe de la partie réelle, en éliminant ainsi la singularité liée au calcul de la racine carrée complexe.

La discrétisation et le post-traitement à partir des faisceaux sont abordés dans la suite. Cependant, du point de vue de l'algorithme, la décomposition en faisceaux élémentaires induit quelques modifications. Dans l'ensemble, les changements sont assimilables à des pré- et des post- traitements. Dans le corps du programme, seule l'intégration doit être modifiée. Elle est réalisée, non plus sur les variations transverses $\partial_{\theta} x$ et $\partial_{\psi} x$ données par les directions de courbure, mais sur des vecteurs de base de l'opérateur de transport de la hessienne. Ainsi, les équations sont les mêmes mais l'initialisation est un peu différente et l'intégration doit être réalisée *a priori* sur six vecteurs. En fait, comme cela est expliqué au (C.3.3), en choisissant correctement les vecteurs de la base, l'intégration peut se réduire à celle des quatre vecteurs du sous-espace transverse. Les équations doivent alors être en partie modifiées. Les pré- et post- traitements permettant de décomposer *a posteriori* les champs sources sur la base des faisceaux élémentaires et la reconstruction du champ propagé, ne sont pas explicités car ils n'ont pas été implémentés concrètement.

* * *

2.2 Les différents aspects de la discrétisation

La construction de l'algorithme a cherché au maximum à séparer les opérations locales d'interpolation et d'intégration du faisceau des opérations macroscopiques liées au transport du faisceau comme par exemple l'utilisation d'un arbre octal ou l'optimisation de la répartition. Il est évident que les deux demeurent nécessairement liées. Mais la problématique de la discrétisation peut être abordée indépendamment de la forme adoptée pour représenter le faisceau et de l'enchaînement des étapes du calcul. Cette organisation permet éventuellement de changer de stratégie de discrétisation sans induire de modifications lourdes du code de calcul.

La discrétisation intervient à toutes les étapes de l'algorithme décrit sur la figure (2.1) :

- au cours de la propagation pour l'intégration et l'interpolation du champ moyen,
- pour le raffinement et l'interpolation des champs liés aux faisceaux,
- à l'intersection et à l'interaction en fonction de la description de la géométrie,
- et au post-traitement pour calculer l'intégrale de réaction.

En fait, trois grands aspects sont distingables : l'intégration des trajectoires, l'interpolation sur les faisceaux et l'interpolation sur les surfaces. Les paragraphes suivants précisent les techniques utilisées pour réaliser une discrétisation cohérente.

2.2.1 Intégration le long des rayons

La résolution de l'équation icônale par une méthode de lancer de rayons conduit à intégrer le long des rayons des équations de la forme y(s)' = f(s, y(s)) où y peut être un élément d'un espace à plusieurs dimensions et y' sa dérivée par rapport à s. A part dans certains cas triviaux, aucune solution analytique ne peut être déterminée et une intégration numérique est nécessaire. Ce type d'équation apparaît dans d'autres domaines tels que l'étude des réactions chimiques ou des systèmes planétaires. L'ouvrage de E. Hairer, Ch. Lubich et G. Wanner [³⁶] donne une vue d'ensemble des méthodes d'intégration numériques.

Méthodes de Runge-Kutta

Classiquement, pour intégrer une équation différentielle ordinaire, l'intervalle d'intégration pour la variable s est divisé en sous-intervalles et la fonction est calculée aux points communs à deux sous-intervalles adjacents. Le schéma numérique estime les variations dans chaque sous-intervalle et en déduit les valeurs aux extrémités. L'approximation la plus simple consiste à supposer la fonction linéaire dans les sous-intervalles. Ainsi, à partir de la valeur "à gauche", la valeur "à droite" est estimée grâce à $y_d = y_g + (s_d - s_g)f(s_g, y_g)$. Ce calcul équivaut à considérer f constante dans le sous-intervalle.

Pour obtenir des méthodes de calcul plus précises, l'équation est écrite sous la forme

$$y(s) = y(s_g) + \int_{s_g}^{s} f(t, y(t))dt$$
(2.1)

et deux nouveaux problèmes se posent : estimer numériquement l'intégrale et évaluer les valeurs de f nécessaires. L'utilisation de formules de quadrature et le calcul en cascade des valeurs inconnues a conduit à définir les méthodes de Runge-Kutta par

Une méthode de Runge - Kutta à s étages est donnée par

$$k_{1} = f(s_{g}, y_{g})$$

$$k_{2} = f(s_{g} + c_{2}h, y_{g} + ha_{21}k_{1})$$

$$k_{3} = f(s_{g} + c_{3}h, y_{g} + h(a_{31}k_{1} + a_{32}k_{2}))$$

$$\vdots$$

$$k_{s} = f(s_{g} + c_{s}h, y_{g} + h(a_{s1}k_{1} + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}))$$

$$y_{d} = y_{g} + h(b_{1}k_{1} + \dots + b_{s}k_{s})$$

$$(2.2)$$

où les c_i , a_{ij} , b_j sont des coefficients définis a priori.

Les coefficents peuvent être choisis soit de façon à créer des schémas d'ordres pré-définis grâce à l'étude de développements de Taylor, soit de façon à minimiser la dispersion et/ou la dissipation à l'aide de la fonction de gain du schéma établie pour une onde analytique.

Application pour les différentes intégrations le long des rayons

Dans un premier temps, le schéma utilisé pour l'intégration le long des rayons est le schéma classique de Runge-Kutta à 4 étages avec comme coefficients : c = (0; 1/2; 1/2; 1), b = (1/6; 2/6; 2/6; 1/6) et $a_{i+1,i} = (1/2, 1/2, 1)$. Ces coefficients assurent une convergence d'ordre 4 et une formule de récurrence simple. Pour calculer les quantités à un étape de l'intégration, seule l'estimation immédiatement précédente est nécessaire. Cependant, les équations et les quantités intervenant sont de natures diverses et une estimation *a priori* du pas d'intégration est difficile. Dans les zones d'espace où les variations des quantités moyennes sont nulles, les intégrations pourraient être analytiques et, pour certaines, l'approximation numérique est exacte. Dans ces cas, le pas d'intégration peut être très grand car seuls les critères géométriques d'intersection avec les surfaces diffractantes le limitent.

Pour chaque rayon, le **pas d'intégration local** est, d'abord, défini par rapport à la taille de la zone géographique dans laquelle il est. La présence d'au moins deux points dans chaque élément traversé du quadrillage volumique est assurée. Ensuite, il est ajusté pour que les variations de la direction de propagation restent raisonnables sur un pas d'intégration.

En raisonnant sur un schéma d'Euler explicite, l'intégration numérique s'écrit

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \Delta s(\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_n, \nabla \phi_n))$$
(2.3)

$$\nabla \phi_{n+1} = \nabla \phi_n - \Delta s (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_n) + \nabla \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_n, \nabla \phi_n)) \nabla \phi_n$$
(2.4)

Or, les équations sur la position et le vecteur d'onde sont non linéaires. Elles font intervenir les fonctions de vitesse et de célérité moyennes ainsi que leurs gradients. L'erreur doit donc s'écrire

$$\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}(s_{n+1}) = \frac{\Delta s^2}{2} (\partial_s \boldsymbol{x}_n \nabla (\partial_s \boldsymbol{x}_n) + \partial_s \nabla \phi_n \partial_{\nabla \phi} (\partial_s \boldsymbol{x}_n)) + o(\Delta s^2)$$
(2.5)

$$\nabla\phi_{n+1} - \nabla\phi(s_{n+1}) = \frac{\Delta s^2}{2} (\partial_s \boldsymbol{x}_n \nabla(\partial_s \nabla\phi_n) + \partial_s \nabla\phi_n \partial_{\nabla\phi}(\partial_s \nabla\phi_n)) + o(\Delta s^2)$$
(2.6)

soit, en remplaçant $\partial_s \boldsymbol{x}_n$ et $\partial_s \nabla \phi_n$ par leurs valeurs,

$$\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}(s_{n+1}) = \frac{\Delta s^2}{2} ((\overline{\boldsymbol{u}}_n + \boldsymbol{X}_n)^t (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) - ((\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) \nabla \phi_n)^t \partial_{\nabla \phi} \boldsymbol{X}_n) + o(\Delta s^2) \quad (2.7)$$

$$\nabla \phi_{n+1} - \nabla \phi(s_{n+1}) = -\frac{\Delta s^2}{2} ((\overline{\boldsymbol{u}}_n + \boldsymbol{X}_n) (\nabla \nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \nabla \boldsymbol{X}_n) \nabla \phi_n \dots - ((\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) \nabla \phi_n)^t \partial_{\nabla \phi} (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) \nabla \phi_n - (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_n + \nabla \boldsymbol{X}_n) \nabla \phi_n) + o(\Delta s^2)$$
(2.8)

Une borne sur le pas d'intégration peut donc être déduite en fonction des variations locales de la vitesse et de la célérité moyennes. Ce développement peut être étendu aux équations sur les variations transverses de manière plus simple puisque ces dernières sont linéaires.

Par ailleurs, si deux approximations d'ordres différents de la même quantité sont connues, la différence des deux permet d'écrire

$$y_1 - y_1' = (y_1 - y) + (y - y_1') = O(h^{p+1}) \text{ et ainsi, } \left| h_{opt} = h\alpha(\frac{Tol}{|y_1 - y_1'|})^{1/(p+1)} \right|$$
(2.9)

avec p l'ordre le moins élevé, α un réel inférieur à 1 choisi arbitrairement pour assurer une marge, Tol la tolérance choisie, h le pas d'intégration a priori et h_{opt} le pas optimal permettant de vérifier le critère sur la tolérance.

Pour assurer la conservation du Hamiltonien, si

$$\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x} + O(\Delta s^{p+1}) \text{ et } \nabla \phi_n = \nabla \phi + O(\Delta s^{p+1})$$
 (2.10)

les principales quantités s'écrivent

$$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}, \nabla \phi_n) = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \nabla \phi) + O(\Delta s^{p+1})$$
(2.11)

$$H_n = (\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x_n}) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_n}, \nabla \phi_n)) \cdot \nabla \phi_n = 1 + O(\Delta s^{p+1})$$
(2.12)

Le pas optimal est donc donné par (2.9) et l'estimation numérique de $H_n - 1$. Dans le cas de l'utilisation d'une phase complexe, les développements théoriques montrent que $\Im(\partial_i \partial_j \phi)$ avec *i* et *j* les coordonnées transverses doit être aussi constant. Cela fournit alors un deuxième critère devant être vérifié au cours de la propagation.

2.2.2 Interpolation sur les faisceaux et les surfaces

L'interpolation sur les faisceaux et les surfaces est nécessaire à différentes étapes de l'algorithme. Pour que les discrétisations soient cohérentes, une seule description s'inspirant des ondes élémentaires de l'équation d'Helmholtz est utilisée. Concrètement, aussi bien pour les faisceaux que pour les surfaces, l'interpolation est réalisée en prenant en compte trois points et donne des valeurs dans le triangle défini par ceux-ci. En détail, la méthode est décrite en annexe au (F.2). La forme de l'interpolation permet, non seulement de résoudre de manière exacte la propagation des sources ponctuelles et planes, mais en plus elle donne d'excellents résultats pour des ondes quelconques après une propagation rectiligne ou courbe.

Grâce à cette interpolation, d'une part, de nouveaux rayons peuvent être construits n'importe où dans les tubes de rayons, c'est-à-dire dans les éléments du maillage des faisceaux. L'accumulation d'erreur est ainsi maîtrisée puisque l'erreur maximale commise au départ du faisceau sur chaque élément est connue et que des découpes sont réalisables pour vérifier un critère d'erreur à l'arrivée. D'autre part, les caractéristiques des surfaces sont connues pour chaque intersection entre un rayon et un élément du maillage de la géométrie ce qui contribue à connaitre l'erreur commise le long d'une trajectoire après plusieurs interactions. Dans cette partie, l'ensemble des problèmes de discrétisation ont été abordés. Ainsi, sur les surfaces solides ou fictives représentées par des maillages, une méthode adaptée pour interpoler les différentes quantités entre les rayons a été développée. Cette méthode permet de donner un bon aspect au rendu grâce à une certaine forme de continuité des positions et des normales et à l'interpolation exacte des ondes sphériques. Par ailleurs, un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 a été utilisé pour l'intégration des trajectoires. Les temps d'intégration sont trop faibles pour motiver l'usage de schémas plus compliqués.

La problématique essentielle qui s'est dégagée est de pouvoir à la fois représenter des surfaces proches des surfaces réelles et interpoler simplement les champs dessus. L'usage de maillages pour décrire les différentes surfaces présente des avantages comme des inconvénients. D'une part, le nécessaire facettage des surfaces induit des discontinuités et des erreurs de phase et de trajectoires. D'autre part, il permet des méthodes d'interpolation simples. La démarche développée permet de gommer les discontinuités, mais les erreurs, en particulier pour les rayons rasants, sont difficilement estimables.

Pour les développements ultérieurs deux nouvelles interpolations devront être abordées. Si le champ moyen utilisé est issu d'une résolution numérique des équations d'Euler, une stratégie pour reconstruire correctement les valeurs en chaque position de l'espace devra être trouvée. Si elle nécessite trop de points de référence, elle risque d'alourdir considérablement le calcul. Pour diminuer le nombre nécessaire pour une bonne représentation, un post-traitement du champ numérique devra délimiter des zones de faibles variations et calculer les coefficients d'une approximation polynomiale d'ordre élevé.

Si des faisceaux élémentaires comme ceux évoqués au (C.3.3) sont utilisés à la place des rayons "simples", l'interpolation décrite dans les paragraphes précédents ne suffira plus. En fait, au départ de chaque rayon, l'amplitude et la phase ne seront pas connues. Ce n'est qu'après avoir décrit le faisceau avec suffisamment de faisceaux élémentaires qu'une décomposition "classique" permettra de déterminer ces valeurs. La somme des faisceaux élémentaires devra alors reproduire l'onde incidente en chaque point éclairé de l'espace et en particulier sur la surface de départ où celle-ci est connue. Par ailleurs, dans [⁸⁰], l'erreur commise au cours de la propagation, et donc la discrétisation nécessaire, sont estimées grâce à l'intégration de quantités supplémentaires le long des rayons.

2.3 Post-traitement

L'algorithme de propagation fournit entre autres une phase et une amplitude aux intersections des rayons avec les surfaces présentes dans la géométrie calculée. Or, ces champs sont généralement inutilisables directement. En effet, un calcul quelconque nécessite souvent la sommation de plusieurs contributions et elle ne peut se faire que sur des champs recomposés. De plus, les nœuds des différents maillages de faisceaux n'ont aucune chance de coïncider.

A partir des champs décrits le long des rayons, le nécessaire post-traitement doit tenir compte, non seulement, du type d'information utile à l'analyse mais aussi, afin de faciliter les comparaisons et les hybridations, du type d'information fourni ou réclamé par les autres méthodes de calculs. En présentant les solutions d'une manière générale, il perd les bénéfices propres à la méthode. Ainsi, les problématiques liées aux hautes fréquences et à la présence d'écoulement se présentent à nouveau.

Pour concilier les impératifs liés à la méthode, comme la récupération des champs uniquement sur les surfaces présentes dans la géométrie calculée, et les impératifs liés aux problèmes, tels que les fréquences ou l'écoulement, deux post-traitements sont possibles. Le premier présenté dans la suite fournit les solutions sur des surfaces entières arbitraires de la même manière que le post-traitement classique des méthodes volumiques. Le deuxième est plus proche du post-traitement des méthodes de calcul par éléments finis de frontière et fournit le rayonnement en champ proche ou en champ lointain pour des positions ou des directions particulières. Dans les deux cas, des surfaces fictives transparentes peuvent être introduites dans la scène calculée pour obtenir les informations désirées.

2.3.1 Projection

Recomposition et décomposition

A partir des champs des rayons, pour comprendre les phénomènes, le post-traitement intuitif consiste à reconstituer le champ acoustique en reformant l'Ansatz de l'optique géométrique $u_0(x) \exp(i\phi(x)/\epsilon)$. Cependant, ce qui fait l'intérêt des rayons rend ce post-traitement trivial inefficace. En effet, les développements asymptotiques ont permis d'obtenir des variations de fonctions très peu dépendantes de la fréquence. En particulier, alors que, pour représenter correctement un champ total, il faut au minimum 5 points par longueur d'onde, la discrétisation de l'amplitude et de la phase ne fait intervenir que la courbure du front d'onde et donc concrètement beaucoup moins de points. La représentation du champ total sur un maillage dont les nœuds seraient les rayons n'est donc pas pertinente.

Pour représenter les champs des rayons sur les surfaces de récupération, une projection est nécessaire. En utilisant un formalisme lié à la notion de décomposition, à partir de fonctions de base construites sur les rayons, il faut représenter le champ total sur des fonctions de base le discrétisant suffisamment. La décomposition du champ total sur une telle base nécessite de recomposer le champ sur les rayons puis de le projeter. Cette deuxième étape est propre à la base finale. Grâce au développement des méthodes de calcul, plusieurs bases possibles existent mais la plus répandue reste la base des éléments finis.

Les rayons peuvent servir de support à plusieurs types de décomposition et la recomposition doit en tenir compte. Essentiellement, soit la phase et l'amplitude sont interpolées entre les rayons et le champ total est reconstruit ensuite, soit le champ total est recomposé à partir de fonctions élémentaires définies autour des rayons comme des éléments finis. L'interpolation peut se faire, par exemple, linéairement, quadratiquement ou en utilisant l'interpolation décrite au (F.2.2). Quant à l'utilisation typique de la recomposition directe du champ total, elle s'appuie sur les faisceaux gaussiens et calcule entre chaque point la somme des contributions de tous les faisceaux.

L'interpolation classique

Les supports des deux discrétisations sont représentés par deux maillages différents. Dans le cas de l'utilisation classique des rayons avec la discrétisation décrite au (F.2.2), projeter la solution décrite grâce aux rayons sur une base d'éléments finis consiste concrètement à interpoler la phase et l'amplitude aux points du maillage destination. Pour le réaliser, trois étapes peuvent être suivies : identification des tubes du faisceau susceptibles d'éclairer le nœud destination, calcul des paramètres de l'éclairage potentiel, vérification de l'éclairage effectif et interpolation des quantités.

L'identification des tubes de rayons susceptibles d'éclairer le noeud où l'interpolation doit être faite, suppose que le maillage destination soit peu éloigné du maillage de faisceau. Compte tenu du nombre de tubes de rayons par faisceau, du nombre de faisceaux susceptibles d'être projetés sur le maillage destination et du nombre de nœuds de ce dernier, l'algorithme est inversé. Plutôt que de boucler sur les nœuds destinations et de chercher les tubes éclairants, ce sont les nœuds destinations qui sont identifiés en fonction du tube éclairant. Ainsi, après avoir construit une structure d'arbre octal composé d'éléments volumiques simples autours du maillage de destination, pour chaque tube de rayons, les nœuds destinations présents dans le voxel contenant les trois rayons du tube sont identifiés. Ensuite, pour chaque nœud, les paramètres d'éclairage sont calculés. Enfin, avant d'interpoler les champs et de recomposer le champ total, l'absence de masquage par d'autres éléments du maillage destination est vérifiée pour les nœuds dont les paramètres rendent possible l'éclairage.

La projection n'étant pertinente que si le maillage du faisceau et le maillage de destination sont proches, la propagation est supposée rectiligne entre les facettes des tubes de rayons et les nœuds destinations. Pour chaque nœud susceptible d'être éclairé par un tube de rayons, les paramètres de l'éclairage sont le vecteur d'onde, le point éclairant dans la facette plane et la distance suivant le vecteur d'onde entre ce point et le nœud. A partir de la discrétisation décrite au (F.2.2), le calcul des paramètres se fait en propageant la facette plane jusqu'à ce que le nœud destination soit dedans.

Soient x la position d'un nœud, $(x_i)_{i=1,2,3}$ les trois positions des rayons du tube et $(\nu_i)_{i=1,2,3}$ les trois vecteurs d'onde unitaires correspondants, les paramètres vérifient :

$$\sum_{i=1,2,3} \lambda_i (\boldsymbol{x}_i + \lambda_0 \boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{x} \text{ et } \sum_{i=1,2,3} \lambda_i = 1$$
(2.13)

avec λ_i les coordonnées barycentriques de x dans la facette plane propagée et λ_0 la longueur de propagation commune à tous les rayons. Le système s'inverse en

$$\lambda_{i} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \left((\boldsymbol{x}_{j} + \lambda_{0} \boldsymbol{\nu}_{j}) \wedge (\boldsymbol{x}_{k} + \lambda_{0} \boldsymbol{\nu}_{k}) \right)}{(\boldsymbol{x}_{i} + \lambda_{0} \boldsymbol{\nu}_{i}) \cdot \left((\boldsymbol{x}_{j} + \lambda_{0} \boldsymbol{\nu}_{j}) \wedge (\boldsymbol{x}_{k} + \lambda_{0} \boldsymbol{\nu}_{k}) \right)}$$
(2.14)

et la dernière équation conduit à une équation du troisième degré

$$(\boldsymbol{x_1} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_1}) \cdot ((\boldsymbol{x_2} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_2}) \wedge (\boldsymbol{x_3} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_3})) = \dots$$

$$\dots \boldsymbol{x} \cdot ((\boldsymbol{x_1} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_1}) \wedge (\boldsymbol{x_2} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_2}) + (\boldsymbol{x_2} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_2}) \wedge (\boldsymbol{x_3} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_3}) + (\boldsymbol{x_3} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_3}) \wedge (\boldsymbol{x_1} + \lambda_0 \boldsymbol{\nu_1}))$$

(2.15)

De nombreuses interprétations de ce résultat peuvent être énoncées, de même que d'autres moyens d'y arriver.

La résolution du polynôme (2.15) d'ordre 3 en λ_0 permet d'obtenir les λ_i . S'ils sont compris entre 0 et 1, la facette éclaire effectivement le nœud et, avec λ_0 , ils permettent de calculer l'interpolation de la phase et de l'amplitude. La propagation des rayons sur λ_0 modifie leurs phases, leurs rayons de courbures et leurs amplitudes. Le calcul des nouvelles quantités se fait grâce à la racine du rapport des étalements géométriques

$$\Delta = \sqrt{(\varrho_1 \varrho_2)/((\varrho_1 + \lambda_0)(\varrho_2 + \lambda_0))}$$
(2.16)

où les ρ sont les rayons de courbures du front d'onde et grâce aux interpolations conservant les solutions sphériques élémentaires du (F.2.2).

Conditions d'utilisation

Cette méthode de post-traitement n'est utilisable que dans peu de cas. D'abord, comme cela a été précisé, les deux maillages doivent être proches l'un de l'autre pour que la recherche de tubes de rayons éclairants et l'interpolation donnent des solutions acceptables. Mais, en plus, pour assurer l'existence d'une solution, la géométrie de la surface réceptrice et la géométrie du faisceau doivent être relativement simples. En fait, l'algorithme est très dépendant de la géométrie du problème et les erreurs commises ont souvent un comportement hiératique.

En dehors des défauts liés à l'algorithme, l'utilisation de la méthode est fortement limitée par le nombre de nœuds nécessaires à la projection. Le calcul n'étant valable que pour des fréquences relatives élevées, la surface de projection doit être comparativement petite pour que ce post-traitement reste faisable. En particulier, sauf dans des cas très précis, l'analyse du rayonnement dans toutes les directions de l'espace n'est pas envisageable car un maillage englobant l'ensemble de la scène diffractante et représentant convenablement les champs totaux est généralement trop volumineux.

2.3.2 Potentiels asymptotiques et intégrales de Kirchhoff

Représentation intégrale

Le théorème de représentation intégrale (Kirchhoff-Helmholtz) permet de transformer la description volumique d'un problème en une description surfacique. Dans un premier temps, le théorème de Green permet d'écrire pour toute fonction p vérifiant l'équation de Helmholtz sans second membre dans tout l'espace et pour toute fonction G:

$$-\iiint_{\mathbb{R}^3} p(\Delta + k^2) G d\Omega = -\iint_{\Gamma} (\Psi - \Upsilon) d\Gamma$$
(2.17)

avec Γ l'ensemble des surfaces où les champs sont discontinus et Ψ et Υ deux fonctions dépendant des sauts des champs sur les surfaces.

Dans un deuxième temps, si G est une fonction de Green solution du problème de propagation libre avec source ponctuelle en x_s autrement appelée solution élémentaire, l'équation (2.17) se réduit à

$$p(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{s}}) = \iint_{\Gamma} G(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{y}) Q(\boldsymbol{y}) d\Gamma(\boldsymbol{y}) d\Gamma(\boldsymbol{y}) - \iint_{\Gamma} \partial_{\boldsymbol{n}} G(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{y}) \Phi(\boldsymbol{y}) d\Gamma(\boldsymbol{y})$$
(2.18)

avec ∂_n la dérivation suivant la normale à la surface et Φ et Q respectivement les sauts de la pression et de sa dérivée suivant la normale à la surface. Si x_s est sur la surface, il faut interpréter $p(x_s)$ par $(1/2)(p^+ + p^-)$ la demi-somme des valeurs de part et d'autre de la surface de discontinuité. Par ailleurs, la fonction de Green et sa dérivée, dans ce cas, s'écrivent :

$$G(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y}) = \frac{\exp\left(ik|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}|\right)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}|} \text{ et } \partial_{\boldsymbol{n}} G(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}) \frac{\exp\left(ik|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}|\right)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}|^3}$$
(2.19)

avec $g(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}) = ((\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}) \cdot \boldsymbol{n})(ik|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_s}| - 1).$

Concrètement, si p est la solution d'un problème ondulatoire dans un domaine Ω , le développement précédent permet de la représenter grâce aux valeurs qu'elle prend sur la frontière Γ du domaine. En prolongeant, de façon adaptée, le problème initialement dans Ω à l'ensemble de \mathbb{R}^3 , le résoudre dans le volume est équivalent à résoudre un problème sur la frontière.

Dans le cas d'une portion de surface vibrante sur un mur, comme, par exemple, pour les enceintes acoustiques, les équations précédentes permettent de retrouver l'intégrale de Rayleigh. De même, le rayonnement d'une onde traversant un trou dans un mur peut être approché par une telle méthode. Pour des développements autour de cette représentation, le lecteur pourra se référer à [⁵⁸] ou [¹]. L'approche générale utilisée ici permet d'imaginer une multitude d'applications de la formule de Green et, notamment, des simplifications atteignables grâce au choix de la fonction G.

Approximation de Kirchhoff et post-traitement de solutions obtenues par une méthode de rayons

L'approximation de Kirchhoff consiste à calculer le rayonnement réémis par une surface, en intégrant les contributions des champs présents sur les parties éclairées de la surface. En considérant l'équation (2.18), cette approximation modélise le rayonnement de deux types de sources à la surface : des sources monopolaires liées à la dérivée de la pression et des sources dipolaires liées à la pression.

Grâce aux caractéristiques particulières du champ de rayons, la **méthode de Ludwig** permet de simplifier encore l'intégration des contributions. A partir de l'équation (2.18), sur chaque élément, en développant les champs au voisinage d'une position moyenne et en utilisant la formule de Stokes, l'intégrale sur la surface se concentre en un calcul de circulation sur la périphérie de l'élément. La discrétisation par une méthode d'intégration numérique de Gauss permet le calcul effectif. La méthode qui est développée en détail dans [⁴⁷] pour des champs liés à l'électromagnétisme peut être utilisée telle quelle. Le principe est, en effet, le même puisque cela ne concerne que les contributions scalaires de l'interaction des courants ou des potentiels liés aux champs incidents et observateurs.



FIG. 2.2: Configuration pour un rayonnement de Γ en x_s avec deux surfaces de Kirchhoff possibles (en bleu et en rouge)

Le calcul du rayonnement peut se faire à partir de différentes surfaces. Dans la formule (2.18), si p est un champ exact, c'est-à-dire s'il vérifie à la fois l'équation de Helmholtz dans le volume et les conditions à la surface, le choix de la surface n'a pas d'influence sur l'évaluation de la pression. Cependant, comme numériquement le champ disponible est un champ calculé après un lancer de rayon, il vérifie les conditions aux limites localement, c'est-à-dire sur les zones directement éclairées, sans prendre en compte les interactions entre surfaces éclairées. Ainsi, en fonction du choix de la surface, les résultats sont différents. Les deux options principales qui existent sont représentées par la figure (2.2). La première consiste à faire rayonner les potentiels présents à la surface de l'objet. Les "potentiels asymptotiques" utilisés peuvent être améliorés pour prendre en compte les effets diffractifs et aboutir à la théorie physique de la diffraction. La deuxième option est de placer une surface fictive séparant la zone de l'espace contenant les surfaces diffractantes de la zone de l'espace où la pression rayonnée doit être calculée. Cette méthode peut servir au rayonnement en sortie de géométrie comme pour la diffraction par une ouverture ou au rayonnement au travers d'une surface de Kirchhoff séparant une zone "complexe" nécessitant le calcul par méthode de rayons d'une zone "simple". Par ailleurs, l'idée du dioptre intermédiaire peut être utilisée pour hybrider des méthodes de calcul différentes.

PO, PTD et GTD

En atmosphère homogène et calme, l'**optique physique** (PO) qui calcule le rayonnement des potentiels dus à l'optique géométrique, c'est-à-dire des potentiels dus aux champs réfléchis et transmis, permet d'obtenir une bonne approximation dans de nombreux cas. Cependant, son utilisation systématique peut induire des erreurs importantes ce qui nécessite d'en étudier les limites de validité. La combinaison de l'étude du rayonnement en champ lointain et de l'ajout de contributions pour les potentiels permet d'obtenir différentes améliorations.



FIG. 2.3: Exemple de configuration où les surfaces éclairées en bleu créent des contributions parasites en *P* illustrées par les rayons fictifs en vert

Le développement asymptotique des intégrales de rayonnement de l'optique physique montre que les discontinuités du champ de l'optique géométrique produisent un terme de diffraction. En fonction des phénomènes générateurs, frontières des parties éclairées ou singularités de champ présentes sur les surfaces, les champs "diffractés" peuvent être comparés aux champs correspondants de la **théorie géométrique de la diffraction** (GTD).

Pour combler la différence de rayonnement entre l'optique physique et la théorie géométrique de la diffraction, la **théorie physique de la diffraction** (PTD) ajoute artificiellement des potentiels de frange sur les lignes de discontinuité liées aux potentiels de l'optique physique. De plus, la méthode des potentiels équivalents utilise les potentiels liés aux rayons

rampants pour obtenir un champ uniforme sur les surfaces régulières.

Les développements précédents comblent certaines lacunes de l'optique physique dues aux discontinuités des champs mais d'autres sont inhérentes au calcul par rayonnement de potentiels et limitent le domaine d'application aussi bien de la PO, que de la PTD, que de la méthode de "potentiels asymptotiques". La principale source d'erreur est la non convexité des objets diffractants. En effet, les méthodes précédentes ne prennent pas en compte les champs supplémentaires créés sur les objets par le rayonnement lui-même. Malgré les modifications de l'optique physique, les champs induits par les potentiels ne sont toujours pas auto similaires. Ainsi, le rayonnement d'une partie éclairée concave peut induire des contributions qui devrait être masquées par l'objet. Or, elles ne le sont pas puisque les interactions multiples ne sont pas prises en compte. Il faut donc utiliser les méthodes de "potentiels asymptotiques" en portant une attention particulière sur l'interaction entre la géométrie de la surface rayonnante et les rayons fictifs issus de l'observateur. Plusieurs études ont été menées sur les méthodes de rayonnement de potentiels et [¹³], [⁵²] et [¹²] en résument les différents aspects.



FIG. 2.4: Trois géométries présentant les même potentiels d'optique physique et donc le même rayonnement

Surface de Kirchhoff ou potentiels asymptotiques

Dans la pratique, si un champ moyen est pris en compte, le rayonnement ne peut se faire qu'au travers de zones calmes. Les rayons fictifs allant de la surface rayonnante à l'observateur ne doivent pas traverser de zone où la validité de l'approximation de la propagation grâce à l'équation de Helmholtz n'est plus assurée. Le choix pour la surface rayonnante est alors généralement suffisamment large pour maîtriser les contributions parasites.

S'appuyer sur une surface régulière suffisamment loin de la géométrie diffractante de façon à ne calculer le rayonnement que "d'un seul côté" de celle-ci permet de n'avoir à tenir compte que de seulement deux facteurs de dégradation de la solution. D'une part, de la même façon que la PO estime mal la diffraction aux frontières ombre-lumière, le rayonnement des potentiels à partir d'une surface de Kirchhoff fictive produit des phénomènes de diffraction parasites aux frontières du faisceau éclairant. D'autre part, alors que le calcul de l'intégrale de rayonnement pour la PO évite les singularités de champ entre la surface diffractante et le récepteur, la propagation par méthode de rayons entre la surface diffractante et la surface fictive ne prend pas en compte les phénomènes diffractifs qui sont liés à leurs présences dans cette zone.

En conclusion, les deux post-traitements sont intéressants. Lorsque les conditions (champ moyen et angles de visées) le permettent, il vaut mieux utiliser une méthode de "potentiels asymptotiques". Un changement de variables dans l'intégrale permet de les appliquer même en présence d'un écoulement moyen uniforme. Par contre dans les autres cas, qui, en pratique en acoustique, sont plus nombreux, seul le rayonnement à partir d'une surface de Kirchhoff est possible.

* * *

L'ensemble des formes de post-traitement évoquées ici permet de traiter les différentes configurations rencontrées tout en donnant les informations désirées. Chacun a un domaine d'utilisation bien défini en dehors duquel il devient relativement lourd à mettre en œuvre. Les surfaces prises en compte par la projection doivent vérifier des critères de taille et de régularité strictes. Le calcul du rayonnement à partir des surfaces solides ne donne des résultats corrects que pour les écoulements uniformes et les configurations ne créant pas de contributions parasites. Si le rayonnement à partir de surfaces virtuelles entourant la scène calculée semble le moins contraignant, c'est celui qui présente le moins de précision.

Le fait de ne pas prendre "intrinsèquement" en compte les phénomènes diffractifs rend la propagation par méthode de rayons moins précise que le calcul de rayonnement. L'ajout de contributions supplémentaires peut se faire à la main grâce à la GTD, mais l'algorithme se complique alors fortement. L'utilisation de faisceaux permet aussi d'ajouter des effets diffractifs liés à la propagation. La combinaison des deux permet de réduire le handicap du rayonnement à partir d'une surface virtuelle par rapport à l'optique physique.



La description des méthodes utilisées par l'algorithme de calcul a abordé l'ensemble des aspects numériques. La théorie générale ayant été construite dans les chapitres précédents, la présentation des méthodes de discrétisation et de post-traitement permet d'obtenir une vision globale de la réalisation des calculs. Le code de calcul ainsi élaboré a permis d'estimer un éventail complet des configurations envisagées au début de ce travail.

Aux erreurs "théoriques" des chapitres précédents s'ajoutent les erreurs numériques dues à l'utilisation de géométries discrètes et à l'intégration progressive des trajectoires. L'estimation de l'erreur globale n'est pas évidente. Contrairement aux méthodes utilisant des éléments finis, le "lancer de rayons" ne permet pas de la calculer *a priori*. Pourtant, pour chaque nouvelle configuration, une étude peut indiquer les sources d'erreur principales. En fait, l'erreur dépend fortement de la distance de propagation.

Pour un calcul, l'erreur commise s'estime en parcourant l'algorithme. Elle est donc due à :

- la modélisation de la source par un champ de rayons sur une surface particulière,

- la linéarisation et l'absence de prise en compte des effets visqueux,
- l'approximation "hautes fréquences",
- le pas et le schéma d'intégration numérique
- l'intersection des rayons avec un maillage,
- et l'interpolation des surfaces et des champs.

Ensuite, l'interaction des champs incidents avec les surfaces donne naissance à des champs réfléchis et transmis qui agissent comme de nouvelles sources. L'estimation de l'erreur peut alors se poursuivre de la même façon. La prise en compte de la diffraction doit ainsi être comptabilisée comme une meilleure approximation des champs réfléchis et transmis.

Globalement, l'erreur commise au départ de la propagation est la plus difficile à estimer. Pour les sources ponctuelles ou planes, elle est nulle, mais dès que les formes des ondes deviennent complexes, aucune description donnant systématiquement l'erreur n'est valable. Parmi les autres erreurs, celles liées aux effets visqueux, à la linéarisation et à l'approximation "hautes fréquences" peuvent être estimées grâce aux développements du (B). Les erreurs numériques, quant à elles, ont été analysées dans ce chapitre. Une étude de l'erreur *a priori* est donc possible. Comme pour chaque méthode numérique, l'utilisation sur des configurations diverses permet de construire un domaine de confiance.

Chapitre 3 Calculs de référence

La justification de résultats originaux obtenus à l'aide d'une nouvelle méthode de calcul est difficile. Elle repose sur des analyses empiriques et sur une forme de confiance. Les premières s'appuient sur des comparaisons avec des problèmes similaires. La seconde est construite grâce aux résultats obtenus et justifiés antérieurement.

En fait, les objectifs de la validation sont multiples : construire une confiance nécessaire aux calculs futurs mais aussi cerner les limites de validité des résultats et développer un certain savoir-faire. La démarche appliquée doit être progressive. A partir de configurations simples jusqu'à des problèmes plus complexes, les difficultés doivent être cernées et traitées une par une. Chaque étape s'appuie sur des comparaisons avec des résultats obtenus par ailleurs, notamment grâce à des méthodes de calcul déjà validées. Ces résultats sont ici calculés à partir d'estimations analytiques.

Une validation efficace identifie des configurations caractéristiques validant chacune des propriétés différentes. Ainsi, dans ce chapitre, les configurations traitées concernent essentiellement des géométries adimensionnées. Dans un premier temps, des cas simples de propagation rectiligne dans un pavé avec une ou plusieurs surfaces réfléchissantes permettent de vérifier l'algorithme du code développé. Dans un deuxième temps, la prise en compte d'une forme de diffraction sur l'arête d'un dièdre rend perceptibles les différences entre les post-traitements. Enfin, des cas référencés d'interaction d'ondes sonores avec des champs moyens non uniformes terminent l'estimation du domaine de validité de la méthode.

3.1 Propagation rectiligne à partir d'une source ponctuelle et dans un pavé : dioptre plan et dièdre simple

La configuration testée ici est choisie pour être la plus épurée possible. C'est un pavé dont une ou deux des parois sont réfléchissantes. Dans les cas suivants, la propagation est rectiligne, ce qui permet de valider simplement et uniquement les bases géométriques et algorithmiques de la méthode.

Le cas de la plaque valide non seulement le principe de la propagation de voxel en voxel mais aussi l'interaction simple avec une surface constituée de formes géométriques particulières et de deux matériaux aux propriétés différentes. Le cas du coin, quant à lui, vérifie que les faisceaux peuvent être composés de plusieurs parties et que plusieurs réflexions peuvent être effectuées.

La simplicité de ces deux cas permet de se familiariser avec la méthode de résolution et ses impératifs. Ainsi, de nombreuses remarques faites ici sont triviales et ne sont pas reprises dans les analyses suivantes.

3.1.1 Description de la géométrie

Pour simplifier le cas, la géométrie est "adimensionnée", c'est-à-dire que sa taille est de l'ordre de l'unité et que les fréquences sont dimensionnées en conséquence, sans souci de représentativité physique. Cependant, la vitesse du son est maintenue à 340. Cette valeur est sans unité puisque les dimensions spatiale et temporelle n'en ont pas. L'espace de propagation est enfermé dans un pavé de $[-1:2] \times [-1:1] \times [-1:1]$ et la source est placée dedans en (0;0;0). La distance de propagation n'est donc pas isotrope. Pour un calcul par méthode de rayons, le maillage de ce pavé pourrait se résumer à 6 éléments correspondant aux 6 faces ; cependant, pour éviter des problèmes particuliers, les faces sont discrétisées arbitrairement et les longueurs de barres caractéristiques sont : Max = 0, 5, Min = 0, 02 et Mean = 0, 2.

Les éléments de la face z = -1 et les éléments de la face x = -1 présentent des codes différents du code des éléments des quatre autres faces. Cela permet de donner à ces faces des propriétés de réflexion et de transmission différentes. Les quatre autres sont typiquement parfaitement transparentes. Le pavé joue donc le double rôle de géométrie diffractante et de géométrie de récupération des champs. Pour modéliser une plaque réfléchissante, il suffit de lier le code des éléments de la face z = -1 avec un matériau adéquat et, pour un dièdre, le code des éléments de la face x = -1 aussi.

Pour pouvoir comparer, sur des maillages représentatifs, les solutions données par la méthode avec des solutions analytiques ou des solutions calculées par d'autres méthodes, les fréquences de calcul sont nécessairement majorées. En effet, dans le cas présent, un maillage volumique régulier de taille raisonnable, c'est-à-dire comportant au maximum 1,5 million de nœuds, conduit à un pas de discrétisation supérieur à 0,02. Or, sans méthode particulière, pour pouvoir calculer et représenter correctement une onde, il faut au moins 5 points par longueur d'onde. Les fréquences choisies pour les calculs sont 850, 1700 et 3400 car elles sont alors résolues à 5, 10 et 20 points par longueur d'onde.

Les figures (3.1) illustrent la différence des maillages nécessaires pour effectuer les calculs en méthode de rayons et en méthode d'éléments de frontière. Dans le cas de la plaque, cette différence est très marquée car la courbure est nulle. Dans un cas standard, les maillages pour les calculs par "lancer de rayons" sont essentiellement dépendants de la régularité de la géométrie. En fait, la dépendance par rapport à la fréquence de calcul se résume à la différence de phase entre l'intersection des rayons avec la géométrie. Dans la configuration présente, une telle erreur n'existe pas.



FIG. 3.1: Détail des maillages du pavé nécessaires aux calculs par "lancer de rayon" à gauche et à la méthode utilisant des éléments finis à droite

L'erreur commise dans les calculs utilisant cette géométrie vient soit de l'onde incidente mal décrite par l'Ansatz de l'optique géométrique, soit de la présence d'un écoulement moyen, soit du traitement de la surface. Dans les premiers calculs, les sources étant simples, elles sont entièrement discrétisées par l'Ansatz. Comme le champ moyen est uniforme et la propagation rectiligne, la solution calculée correspond, dans certains cas, à la solution analytique. La seule erreur présente est alors l'erreur numérique.

3.1.2 Au dessus d'une plaque parfaitement réfléchissante

Dans le cas trivial d'une source ponctuelle au dessus d'une plaque parfaitement réfléchissante, le champ analytique se calcule grâce à l'analogie avec le problème symétrique à deux sources ce qui conduit à

$$u(k, \boldsymbol{x}) = S\left(\frac{\exp\left(ik|\boldsymbol{x}|\right)}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{\exp\left(ik|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|\right)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}\right)$$
(3.1)

avec x' la position de la source équivalente soit (0, 0, -2). De plus, la solution de l'optique géométrique est théoriquement exacte. En effet, les propagations des ondes incidentes et réfléchies sont exactes puisqu'elles correspondent à deux ondes sphériques. Or cette dernière vérifie l'équation de Helmholtz et a la forme de l'Ansatz. L'amplitude de la source, ici comme dans la suite, est de 1.

La figure (3.2) permet d'appréhender la notion de maillage de tube de rayons. Les rayons ont été lancés d'une petite sphère autour du point (0; 0; 0) et se sont propagés jusqu'à la surface. La partie ayant atteint la face parfaitement réfléchissante a été renvoyée. C'est l'intersection des rayons ré-émis avec la partie transparente de la géométrie qui est visualisée. Bien sûr, des enrichissements de rayons ont été réalisés lors des propagations incidente et réfléchie. La figure voisine (3.3) montre l'erreur relative par rapport à la solution analytique pour le même champ, c'est-à-dire l'erreur relative entre l'amplitude du champ réfléchi et l'amplitude du champ correspondant à la source équivalente. L'erreur étant en 10^{-7} , elle peut être considérée nulle. L'interpolation et la propagation de voxel en voxel sont donc correctement réalisées.

La figure (3.4) représente la solution obtenue lorsque les deux maillages de rayons sont projetés sur un maillage adapté pour les éléments finis après assemblage de l'amplitude et de la phase. La figure (3.5) met en valeur l'erreur commise par rapport à la solution analytique. Les échelles respectives étant de l'ordre de 0, 2 et 0, 00005, cela constitue une première validation du code de lancer de rayons. Les régions où l'amplitude de l'erreur est plus importante correspondent à des problèmes de projection. Leur présence n'est pas



FIG. 3.2: Amplitude sur le maillage de tube de rayons réfléchis par la plaque en atmosphère homogène



FIG. 3.4: Solution géométrique projetée pour la plaque en atmosphère homogène à 3400



FIG. 3.3: Erreur par rapport à la solution analytique pour le champ réfléchi de la figure (3.2)



FIG. 3.5: Erreur par rapport à la solution analytique pour la plaque en atmosphère homogène à 3400

préjudiciable puisqu'un post-traitement classique évitera de projeter sur des surfaces relativement aussi grandes et non régulières. De plus, non seulement d'autres méthodes de post-traitement sont à disposition, mais les erreurs de projection sont tellement flagrantes, qu'elles peuvent être aisément distinguées de l'erreur commise sur la propagation.

3.1.3 Au dessus d'une plaque présentant une impédance

Par rapport au cas (3.1.2), la surface réfléchissante est revêtue d'un traitement acoustique. L'impédance réduite modélisée est arbitrairement choisie $\zeta^{++} = 1, 5$. Dans ce cas, la présence de l'impédance rend plus difficile l'obtention d'une solution analytique. Cependant, tant que la modélisation des propriétés de la surface par une impédance uniforme indépendante de la fréquence est valable, le calcul théorique doit être exact.

Comme le montre la figure (3.6), la présence de l'impédance change la répartition de l'amplitude. En incidence rasante, la plaque se comporte comme une plaque molle et, en incidence normale, le facteur multiplicatif par rapport au cas (3.1.2) est positif et inférieur à 1.



FIG. 3.6: Amplitude du champ réfléchi lorsque la plaque du (3.2) est remplacée par une plaque traitée



FIG. 3.7: Module de la pression reconstruite avec la plaque parfaitement réfléchissante à gauche et la plaque traitée à droite pour une atmosphère homogène

La comparaison des modules des pressions reconstruites sur les deux figures (3.7) montre des répartitions complètement différentes. Dans le cas de la plaque parfaitement réfléchissante, l'interférence de l'onde réfléchie avec l'onde incidente produit des battements importants. Dans le cas de la plaque traitée, l'onde réfléchie étant plus diffuse, l'onde incidente est prépondérante et les battements sont moins marqués. Cependant, même si les amplitudes sont différentes, la géométrie n'ayant pas changée, les ondes ont la même forme dans les deux cas et les battements se répartissent de la même façon.

3.1.4 Dans un coin parfaitement réfléchissant

Les problèmes de diffraction faisant intervenir des coins présentent, en général, des solutions beaucoup plus compliquées que dans le cas de la plaque. Cependant, si l'angle du coin est une fraction de π et si la source est à l'intérieur, l'analogie avec les sources équivalentes est encore valable et le champ a pour expression

$$u(k, \mathbf{x}) = S \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} + S_1 + S_2 + S_3 \text{ avec } S_i = S \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$
(3.2)

et x_1 , x_2 et x_3 les positions des sources équivalentes soit (0, 0, -2), (-2, 0, 0) et (-2, 0, -2). Comme dans le cas (3.1.2), la solution de l'optique géométrique est théoriquement exacte.



FIG. 3.8: Amplitude sur le maillage du champ réfléchi pour le dièdre plongé dans une atmosphère homogène

FIG. 3.9: Champ réfléchi d'ordre deux projeté pour le dièdre pour la fréquence 1700 dans une atmosphère homogène

La présence de deux surfaces réfléchissantes induit d'abord un champ réfléchi à l'ordre 1 composé de deux contributions. Ce phénomène se traduit sur le maillage de tube de rayons de la figure (3.8) par une superposition de deux surfaces éclairantes maillées chacune séparément. Ensuite, le champ réfléchi est lui-même réfléchi par la surface diffractante. La figure (3.9) montre comment ce champ réfléchi d'ordre 2 correspond au champ d'une source virtuelle placée en (-2, 0, -2).



FIG. 3.10: Champ total pour le dièdre en atmosphère homogène pour la fréquence 1700

FIG. 3.11: *Erreur entre le champ numérique du (3.10) et le champ analytique exact*

La figure (3.10) est obtenue en ajoutant toutes les contributions et correspond à l'interaction de quatre ondes. Comme pour le cas de la plaque (3.5), le caractère négligeable de l'erreur commise apparaît en comparant l'échelle de la figure représentant le champ total (3.10) avec l'échelle de la figure représentant la différence avec le champ analytique (3.11). Comme l'algorithme traite de façon identique les différents degrés d'interaction, le code de calcul peut donc être considéré comme validé pour les multi-réflexions.

* * *

Grâce à la première série de comparaison, le code de calcul est validé pour traiter des problèmes de propagation rectiligne autour de configurations simples. Par ailleurs, elle permet d'estimer la fragilité et les limites de l'utilisation du post-traitement par projection. Concrètement, les problèmes dont les résultats sont sûrs sont maintenant l'ensemble des problèmes ne faisant intervenir que des surfaces planes traitées ou non et des atmosphères considérées homogènes et sans mouvement.

3.2 Un dièdre saillant simple parfaitement réfléchissant en atmosphère homogène et calme

Pour valider le principe de la diffraction et comprendre les limites de l'optique physique, la géométrie utilisée dans les cas suivants est un dièdre saillant. Contrairement au cas du (3.1), l'apparition de phénomènes diffractifs éloigne la solution de l'optique géométrique de la solution exacte.

Plusieurs types de sources sont testés ce qui permet d'obtenir des figures de diffractions différentes. Comme les sources et la surface sont simples, la propagation restant rectiligne, l'erreur est essentiellement due à la diffraction.

La configuration envisagée et la nécessité de valider l'ensemble des post-traitements rendent nul l'intérêt de la projection. Les post-traitements calculent donc les rayonnements soit à partir d'une surface transparente intermédiaire, soit directement à partir de la surface réfléchissante.

3.2.1 Description de la géométrie

Comme pour le cas (3.1.1), la géométrie est "adimensionnée". La diffraction est réalisée par deux dioptres de dimensions 10 et 20 formant un angle droit saillant et la surface de récupération est une sphère de rayon 10 ayant comme centre le milieu de l'arête. Les fréquences calculées sont les mêmes. Les dioptres en x = 0 et z = 0 sont parfaitement réfléchissants et tous les autres sont parfaitement transparents. La géométrie est présentée par les figures (3.12).



FIG. 3.12: Géométrie maillée utilisée pour le calcul : à droite, en jaune et rouge, la sphère récupératrice et, en bleu, le dièdre ; à gauche, quelques rayons diffractés par le dièdre en partie caché par la sphère à gauche

Compte tenu de la taille du problème par rapport à la fréquence, l'extension du dièdre peut être considérée infinie. Dans un calcul volumique ou surfacique, cela permet de s'affranchir des diffractions parasites dues aux bords du dièdre. Cependant, pour les fréquences citées, cela augmente aussi considérablement la taille du maillage nécessaire à ces calculs comme à la projection. Pour les exemples présentés, le calcul du rayonnement en champ lointain a été préféré. Sur les figures, c'est en fait le logarithme multiplié par 10 du carré du module qui est présenté. Le balayage est effectué en site. L'axe horizontal allant des x positifs vers les x négatifs correspond à l'angle nul et les angles augmentent dans le sens trigonométrique.

A chaque calcul, pour obtenir le champ total, il faut prendre en compte trois champs : le champ incident, le champ réfléchi et le champ diffracté par l'arête. En plus, du rayonnement à travers la sphère, la présentation du rayonnement de l'optique physique à partir de la surface diffractante illustre les différences entre les deux approches. En dehors de la validité des différents post-traitements, le paramètre définissant la précision du calcul de résolution correspond à l'équation de Helmholtz, soit λ/L . Cependant, l'utilisation de sources simples et la présence de l'arête sur la surface diffractante plane partout ailleurs induit une erreur uniquement due au champ diffracté. Celle-ci dépend donc de l'angle de l'observation.

Globalement, les faisceaux font environ 30000 rayons et le calcul met 20 secondes par faisceau soit environ une minute. Le post-traitement, quant à lui, coûte une demie heure par faisceau pour 360 visées et 4 fréquences. Dans ce décompte, le temps de création des faisceaux sources n'est pas pris en compte. Mais, comme la géométrie de la diffraction ne dépend pas de la source, le maillage peut être réutilisé pour plusieurs calculs. Seuls les champs doivent alors être ajustés. De plus, le temps de la création complète d'un faisceau est du même ordre que le temps de la propagation. Le calcul complet ne prend donc pas plus de deux minutes et le post-traitement une heure et demie.

3.2.2 Onde incidente plane

Le vecteur de l'onde plane incidente est dans le plan (x, z), orienté à 45 degrés vers les x et z positifs. Le problème est essentiellement 2D et l'utilisation d'une sphère de récupération permet d'obtenir les champs à différentes distances de l'arête.



FIG. 3.13: Amplitude sur le faisceau diffracté par l'arête pour une onde incidente plane

La figure (3.13) montre une répartition de l'amplitude caractéristique d'un champ diffracté. Pour les angles par rapport à la surface z = 0 de 15° et de 135°, l'amplitude est infinie puisque, pour ces angles, les champs incidents et réfléchis sont discontinus. C'est le principal défaut de l'utilisation d'un tel champ diffracté.

Sur la figure (3.14), les champs incident, en bleu, et réfléchi, en rouge, rayonnent exactement dans les directions 45° et 135° ce qui est cohérent avec une analyse rapide. Ils sont suffisamment faibles en dehors des deux pics pour qu'ils n'interfèrent pas. Le champ de l'optique physique, en cyan, marque lui aussi les deux pics. L'onde incidente étant plane, il

suffit de la connaître sur une surface plane pour la reconstruire entièrement ; ainsi le rayonnement à partir de la surface diffractante réalise une bonne description.



FIG. 3.14: *Rayonnement en champ lointain pour une onde incidente plane et pour la fréquence* 1700

Le champ rayonné par l'optique physique présente un étalement des pics plus important que la somme des champs incident et réfléchi, en magenta. Cette différence est d'autant plus marquée que la direction s'éloigne des directions des champs incident et réfléchi. La limite du champ à l'arête de la surface diffractante diffracte un peu mais, par rapport au champ diffracté, en vert, les niveaux sont bas. Pour 270°, le champ de l'optique physique devient nul. En fait pour des angles compris entre 270° et 360°, l'observateur est derrière le dièdre, donc aucun des champs n'est valable. Cependant, il est intéressant de constater que lorsque la direction d'observation est parallèle à la surface, le champ de l'optique phy-

sique est forcément nul; c'est ce qui arrive à 270° et à 90° . Le champ total, en noir, semble modéliser correctement la diffraction puisqu'il maintient un niveau non nul de 0° jusqu'à 270° .

3.2.3 Onde incidente cylindrique

La source est une source linéique le long de l'axe (-0,5; y; -0,5), le problème pourrait donc être traité en deux dimensions comme au (3.2.2).



FIG. 3.15: Amplitude sur le faisceau diffracté par l'arête pour une onde incidente cylindrique

L'amplitude sur la figure (3.15) présente les mêmes caractéristiques que sur la figure (3.13). Elle devient infinie pour les angles 45° et 135° correspondant aux limites des champs incident et réfléchi. Son comportement global est identique à celui de l'amplitude de l'onde diffractée par l'onde plane puisque, mis à part le niveau de l'amplitude qui est légèrement plus faible pour l'onde cylindrique, la restriction de l'onde incidente à l'arête présente la même forme dans les deux cas. Il n'y a donc qu'un facteur multiplicatif entre les deux solutions.

L'étude du rayonnement en champ lointain sur la figure (3.16) montre un champ incident, en bleu, et un champ réfléchi, en rouge, qui rayonnent uni-

formément respectivement pour des angles compris entre 50° et 265° et des angles compris entre 140° et 165°. Mis à part les petits phénomènes de diffraction dus aux discontinuités qui apparaissent aux limites des domaines, ce comportement correspond à celui attendu. En fait, le placement décalé de la source par rapport au centre du maillage doit induire une différence d'amplitude en fonction de la direction de rayonnement, mais le calcul en champ lointain la gomme.



FIG. 3.16: *Rayonnement en champ lointain pour une onde incidente cylindrique et la fréquence* 1700

Le rayonnement de l'optique physique, en cyan, est naturellement symétrique par rapport au plan rayonnant. En effet, seule la trace des champs de l'optique géométrique sur la surface diffractante est prise en compte pour son calcul. Comme sa directivité est la même que celle du rayonnement du champ réfléchi à partir de la sphère, les deux calculs se valident l'un l'autre. Les différences entre les deux directivités pour les angles proches de 90° et 180° sont dues à deux formes de diffraction distinctes. Le rayonnement à partir de la sphère est équivalent au rayonnement d'une ouverture dans une sphère alors que le rayonnement à partir de la surface diffractante correspond au rayonnement d'une plaque seule éclai-

rée. Dans les deux cas, la diffraction est mal restituée. Pour des dièdres fortement aigus, l'optique physique fournit une bonne approximation malgré la prédiction d'un champ symétrique et nul pour les angles 90° et 180° qui est non pertinente compte tenu de la géométrie de la surface diffractante.

L'interférence entre le champ incident et le champ réfléchi qui est marquée par la somme, en magenta, des deux rayonnements confirme, un peu plus, la validité des calculs. La large tâche est bien centrée autour d'un angle un peu supérieur à 180°, c'est à dire presque perpendiculairement à la plaque réfléchissante dans la direction où les deux champs s'ajoutent quelle que soit la fréquence.

Le champ diffracté, en vert, en présentant les mêmes caractéristiques que sur la figure (3.14), prend en compte le fait que l'angle de diffraction ne fait que 270°. Le champ total, en noir, semble, en reprenant les trois contributions, reconstruire correctement le champ attendu avec deux points brillants au voisinage des directions de discontinuités.

3.2.4 Onde incidente sphérique



FIG. 3.17: Amplitude sur le faisceau diffracté par l'arête pour une onde incidente sphérique

La source est ponctuelle et est placée en (-0, 5, 0, -0, 5), le problème est donc un problème faisant intervenir un comportement suivant les trois dimensions.

Même si la répartition globale de l'amplitude en fonction de l'angle présente aussi deux discontinuités ce qui est classique pour un champ diffracté, il existe des différences importantes entre la figure (3.17), d'une part, et les figures (3.13) et (3.15), d'autre part. Alors que, pour l'onde plane et l'onde cylindrique, la propagation du son se fait dans des plans orthogonaux à l'axe de l'arête, pour l'onde sphérique, il y a aussi une propagation suivant celuici. Non seulement cette propagation différente induit un champ variant en fonction de la coordonnée

suivant l'axe de l'arête mais en plus, à cause de la dispersion transverse, la décroissance dépendant de

 B_{i}^{2}

FIG. 3.18: Rayonnement en champ proche à l = 20 des différentes contributions pour une onde incidente sphérique à 1700

L'estimation du rayonnement sur la figure (3.18) est réalisé en champ proche, c'est-à-dire par le calcul du champ reçu en un point se déplaçant à une distance de 20 autour du centre de la géométrie. Comme pour l'onde cylindrique sur la figure (3.16), les champs, incident, en bleu, et réfléchi, en rouge, semblent rayonner uniformément pour des angles compris respectivement entre 50° et 265° et 140° et 265°. Cependant, de petites variations apparaissent en fonction de la distance entre le point d'observation et le point source.

Les différences entre le champ de l'optique physique, en cyan, et celui du champ réfléchi sont presque les mêmes que sur (3.16). Les remarques faites pré-

cédemment s'appliquent car, le calcul des rayonnements se faisant suivant l'axe passant par la source, l'aspect "trois dimensions" ne change que la décroissance en fonction de la distance et affecte tous les niveaux à peu près de la même façon. L'interférence est retrouvée avec la somme, en magenta, des champs incident et réfléchi et la différence majeure entre les deux calculs apparaît sur le champ total, en noir, et réside dans la moindre importance des effets diffractifs.



FIG. 3.19: Comparaison entre le rayonnement total pour une onde incidente sphérique à 1700 et 3400 en champ proche (bleu et rouge) et en champ lointain (magenta et vert)

La figure (3.19) montre les différences entre les champs totaux que l'observation soit en champ proche ou en champ lointain pour 1700 ou pour 3400. En champ lointain à 1700, en bleu, le phénomène diffractif est important et crée deux points brillants. Pour le même type d'observation à 3400, en rouge, il est beaucoup moins important. Par ailleurs, l'interférence entre les deux ondes bat normalement à une fréquence deux fois plus importante à 3400. Cette différence ne se retrouve pas en comparant les champs proches à 1700, en magenta, et à 3400, en vert, même si l'étalement aux frontières ombre-lumière est plus important

l'éloignement par rapport à l'arête est plus importante.

pour la basse fréquence.

* * *

Cette nouvelle série de calcul n'est pas tout à fait une série de validation. En effet, pour la compléter, il faudrait effectuer des calculs en utilisant d'autres méthodes. Cependant, elle est riche en enseignements et les analyses simples développées permettent d'assurer le post-traitement par rayonnement intégral et l'utilisation de différents types de sources.

3.3 Interactions en deux dimensions

Pour valider la propagation des rayons en atmosphère hétérogène et en mouvement, plusieurs cas en deux dimensions sont étudiés. Pour être cohérent avec les calculs industriels envisagés, les champs moyens utilisés modélisent une couche limite et un tourbillon. Il ne s'agit ici que de retrouver des résultats déjà obtenus soit par des calculs similaires, soit par des méthodes différentes utilisant l'équation parabolique ou les équations d'Euler linéarisées. Cependant, les particularités de la méthode et des conditions de calcul conduisent à développer quelques outils.

L'interaction entre une onde sonore et un champ aérodynamique donne naissance à plusieurs phénomènes qui peuvent être interprétés en terme de rayons. Il y a, en premier lieu, la **convection**. Lorsque le champ aérodynamique présente une vitesse non nulle, les directions de propagation des rayons s'orientent dans le sens de l'écoulement. Il y a, ensuite, la **réfraction**. L'action des gradients du champ moyen change l'orientation des vecteurs d'ondes. Enfin, il y a la **diffusion** ou diffraction. La répartition de l'amplitude après l'interaction incite alors à séparer les champs sonores en distinguant une partie incidente et une partie diffusée. Ces trois phénomènes sont bien sûr liés, mais ils constituent trois éléments d'analyse distincts. Pour compléter les descriptions, ils sont souvent accompagnés d'un quatrième, identifiant la compression ou la dilatation d'une onde en étudiant les surfaces isophases.

Dans chacune des configurations calculées, pour estimer la pertinence des résultats obtenus, les comportements le long de quelques rayons caractéristiques seront étudiés en même temps que les solutions globales obtenues. Ainsi, sont donnés : dans un premier temps, pour dix rayons, la trajectoire et les évolutions au cours de la propagation du jacobien du (C.2.1), du hamiltonien et de l'angle que fait le vecteur d'onde avec les abscisses et, dans un deuxième temps, les valeurs que prennent les champs sur les faisceaux en fin de propagation. Afin de permettre diverses comparaisons, les post-traitements utilisés ne sont pas ceux industriellement employés. Ils sont, en effet, adaptés aux propriétés à mettre en évidence pour chacune des configurations.

3.3.1 Une plaque plane parfaitement réfléchissante et sa couche limite

La présence d'une couche limite au voisinage d'une surface plongée dans un écoulement est un phénomène non négligeable pour la conception aéronautique. Comme les équations d'Euler modélisent le comportement d'un fluide parfait, elles ne rendent pas compte de l'absence de glissement à la paroi qui est liée au caractère visqueux du fluide. Il faut donc se demander dans quelle mesure la couche limite change la réflexion d'une onde sonore sur le fuselage ou sur l'aile. En s'inspirant de [³], l'analyse, réalisée ici, de la propagation du son dans une couche limite au voisinage d'une plaque plane permet non seulement de valider un aspect de la méthode mais aussi d'ébaucher une analyse plus complète pour des géométries plus réalistes.

La vitesse en sortie de couche limite est $\overline{v} = 0, 5c_R e_x$ et le profil dans la couche limite est donné dans l'annexe (G.1). Les variations de la célérité du son du champ moyen sont négligées ce qui équivaut à considérer que la vitesse de l'écoulement est petite devant la vitesse du son. La plaque réfléchissante étant en z = -1, le profil de vitesse varie donc selon z. L'épaisseur choisie est $\delta = 0, 125$. L'erreur commise est due à trois facteurs : l'approximation "hautes fréquences", l'intégration numérique et la réflexion courbe. Les dimensions de l'espace considéré sont de l'ordre de l'unité mais les taux de variations du champ moyen sont de l'ordre de l'inverse de l'épaisseur de la couche limite et les surfaces sont planes. Ainsi, le paramètre de développement pour la propagation est, pour des fréquences comprises entre 1700 et 3400, de l'ordre de l'unité ce qui rend *a priori* le calcul non pertinent.



FIG. 3.20: *Trajectoires des rayons dans le plan* (x; z) *pour le profil de vitesse de couche limite du* (3.3.1)



FIG. 3.21: *Trajectoires des rayons dans le plan* (x; y) *pour le profil de vitesse de couche limite du* (3.3.1)



FIG. 3.22: Évolution du jacobien suivant l'abscisse pour le profil de vitesse de couche limite du (3.3.1)

FIG. 3.23: Évolution du hamiltonien suivant l'abscisse pour le profil de vitesse de couche limite du (3.3.1)

Les figures (3.20) et (3.21) donnent les trajectoires des rayons avant et après réflexion. En fait, par souci de lisibilité, les rayons réfléchis en aval ont été supprimés. Ceci explique pourquoi les rayons cyan, rouge et vert s'interrompent après avoir atteint la surface. Dans le plan (x; z) sur la figure (3.20), les trajectoires ont une allure classique : en aval de la source dans l'écoulement, les rayons atteignent la surface et se réfléchissent alors qu'en amont, une zone d'ombre apparaît et les rayons sont réfractés avant d'atteindre la surface. Le rebroussement se fait d'autant plus haut que les rayons sont inclinés horizontalement. L'épaisseur de la couche limite étant $\delta = 0, 125$, la variation du champ de vitesse se situe dans la première moitié d'un premier interval entre les graduations -1 et -0,8. Les rayons sur la figure (3.21) ont des trajectoires à peu près rectilignes en dehors des décrochages dus à l'entrée dans la couche limite et à la variation de la direction de propagation. La comparaison des deux figures indique que, dans le plan (x; z), sur la figure (3.20), le gradient de vitesse induit une réfraction, c'est-à-dire une variation de la direction du gradient de phase alors que, dans le plan (x; y), sur la figure (3.21), le gradient de phase ne change pas de direction mais la convection, c'est-à-dire l'effet dû à la présence ou non de l'écoulement, demeure. C'est le comportement théoriquement attendu.

Sur la figure (3.22), au début de la propagation, les jacobiens de tous les rayons croissent de façon classique. Lorsque les rayons rentrent dans la couche limite, pour les rayons remontant le flux moyen, les surfaces élémentaires se concentrent et les jacobiens commencent à diminuer. Les jacobiens des rayons qui sont réfractés avant d'atteindre la surface réfléchissante deviennent nuls au point de contact avec la caus-

tique. Ces jacobiens continuent à décroître et lorsque les rayons correspondants ressortent de la couche limite, ils reprennent une évolution classique en module mais en prenant des valeurs négatives. Les jacobiens des rayons réfléchis semblent nuls sur la figure car la normalisation au début de la deuxième propagation, après l'interaction avec la surface, les rend trop petits par rapport aux valeurs atteintes pour les rayons réfractés.

L'évolution des valeurs du hamiltonien pour les différents rayons sur la figure (3.23) montre que, en dehors de la couche limite, la propagation étant rectiligne, le hamiltonien reste nul. La propagation est alors quasi analytique. Dans la couche limite, l'intégration courbe induit une dérive du hamiltonien qui est maîtrisée en dessous de 0,0005 par l'ajustement du pas d'intégration. De nouveau à l'extérieur de la couche limite, le hamiltonien n'évolue plus le long du rayon et redevient nul. C'est ce qui explique que la figure soit si peu lisible et que les maxima soient atteint, sur les différentes courbes, qu'en des endroits très localisés. De plus, l'algorithme corrige l'amplitude du gradient de phase pour que le hamiltonien soit nul au début de chaque nouvelle étape d'intégration.



FIG. 3.24: Amplitude sur le maillage du faisceau incident rencontrant la partie réfléchissante du dioptre dans la configuration du (3.3.1)

FIG. 3.25: *Phase sur le maillage du faisceau incident atteignant la partie transparente du dioptre dans la configuration du (3.3.1) pour la fréquence* 1700

L'intersection de la caustique avec le dioptre réfléchissant apparaît clairement sur la figure (3.24) et une zone d'ombre se dessine entre l'arête de la plaque située en x = -1 et la limite courbe du faisceau incident. Comme cette limite correspond à l'intersection de la caustique avec la surface réfléchissante, l'amplitude y est maximale. Cependant, l'effet de la convection liée à la vitesse à l'infini peut quand même être mesuré puisque qu'un maximum local apparaît sur l'axe y = 0 aux alentours de x = 0, 25 et que, sans écoulement, ce maximum se situerait en (0; 0).

L'étude de la phase sur le faisceau traversant le dioptre transparent sur la figure (3.25) fait apparaître un net repliement. La phase est beaucoup plus grande sur la partie réfractée puisque les rayons ont fait plus de chemin. Il faut imaginer que la caustique est une surface dans le volume dont la seule manifestation est la frontière ombre-lumière sur le dioptre réfléchissant.

Sur la figure (3.26), la présence de la zone d'ombre induit une frontière ombre-lumière sur la partie arrière du pavé transparent. En fait, l'étude des rayons réfractés et des rayons réfléchis permet d'imaginer que le repliement sur la partie avant de la figure (3.25) comble l'absence de rayons sur la partie arrière de la figure (3.26). Cette constatation est en partie confirmée par l'analyse de la pression totale sur la figure (3.27). L'interférence entre le faisceau incident et le faisceau réfléchi sur la partie avant fait place à


FIG. 3.26: *Amplitude sur le faisceau réfléchi éclairant la partie transparente du dioptre dans la configuration du (3.3.1)*



FIG. 3.27: Pression reconstruite sur un maillage d'éléments finis obtenue avec les faisceaux incident et réfléchi dans la configuration du (3.3.1) pour la fréquence 1700

l'interférence entre la partie progressive et la partie réfractée du champ incident sur la partie arrière. Les deux formes d'interférences ne sont pas les mêmes et il existe, en dehors des imperfections numériques, une petite discontinuité.



FIG. 3.28: Différence entre les pressions totales du (3.27) et celle obtenue avec une vitesse uniforme pour la fréquence 1700

FIG. 3.29: Norme de la différence du (3.28)

Les figures (3.28) et (3.29) analysent la différence entre un champ sans couche limite et un champ avec couche limite. En associant le champ réfracté et le champ réfléchi, l'effet de la couche limite peut être étudié sur deux parties distinctes du champ total. Pour la partie progressant de la source vers la surface réfléchissante, il n'y a presque pas de différence. Les rayons ont la même propagation jusqu'à l'entrée dans la couche limite. En revanche, en dehors du fait que le champ réfléchi est en partie remplacé par le nouveau champ refracté, la part du champ total semblant se propager de la surface réfléchissante vers l'infini est qualitativement modifiée par la couche limite.

La différence de pression totale pour la fréquence 1700 sur la figure (3.28), ou sa valeur maximale sur une période sur la figure (3.29), montrent une différence particulièrement importante en deux zones. Au

voisinage de la surface réfléchissante, dans sa partie éclairée, la différence est liée à la présence ou non, jusque dans la couche limite, de convection par l'écoulement. Une différence importante existe aussi dans la zone se situant en amont de la source. En dehors du déphasage lié à la "traversée" de la caustique par les rayons réfractés, celle-ci est due à l'effet du champ moyen sur la propagation à contre-courant.

Globalement, le champ après interaction, réfléchi ou réfracté, présente un déphasage plus ou moins important par rapport au champ réfléchi sans couche limite. Ce déphasage change de signe entre l'amont et l'aval et il existe une ligne partant de la surface réfléchissante et allant jusqu'à la surface supérieure du pavé sur laquelle la différence est presque nulle. Cela se retrouve empiriquement puisque, avec la couche limite, la vitesse de propagation des rayons suivant l'axe x est diminuée par rapport à la vitesse à l'infini. Ainsi, les rayons dans le flot sont ralentis dans la couche limite et les rayons à contre-courant y sont accélérés.

En champ lointain et en aval par rapport à la source, la présence de la couche limite se perçoit essentiellement au voisinage du plan de la surface réfléchissante. En amont, la dispersion transverse non prise en compte par les rayons simples utilisés pour ce calcul devrait diminuer l'imprécision due à la caustique. Cependant, le déphasage des rayons réfractés demeurerait et il faudrait poursuivre un peu plus la propagation pour pouvoir faire une analyse plus complète. De plus, l'analyse numérique réalisée ici doit, bien sûr, être nuancée par les différentes approximations réalisées, "hautes fréquences" et équations d'Euler linéarisées en autres.

3.3.2 En présence d'un tourbillon

L'effet des tourbillons de bout d'aile sur le bruit rayonné lié aux moteurs est un phénomène à prendre en compte lors de l'estimation pour certaines architectures d'avion. Il est donc important que la méthode de calcul puisse donner une première approximation de l'interaction entre un tourbillon et une onde sonore. Or, en deux dimensions, certaines quantités peuvent être estimées analytiquement. Comme, de plus, les configurations nécessaires aux calculs sont aussi simples que les champs moyens complexes, une telle étude constitue un cadre idéal pour une validation.

Éléments bibliographiques

Parmi les nombreuses références récentes traitant de l'interaction entre une onde sonore et un tourbillon, quelques unes ont permis d'appuyer, pour différentes raisons, les analyses faites dans la suite. Alors que [⁵⁰] traite essentiellement de la mise en place d'une méthode d'imagerie acoustique ultra-rapide pour l'étude des écoulements, une partie du mémoire s'intéresse à la déviation de rayons acoustiques au travers d'un tourbillon. La comparaison faite entre mesures expérimentales et calculs numériques permet d'ébaucher une description de l'effet d'un tourbillon sur une onde acoustique et d'estimer la capacité des approximations à décrire correctement les phénomènes. De plus, l'auteur effectue quelques développements analytiques à partir du tourbillon de Rankine et donne ainsi un outil simple pour caractériser les champs.

Les travaux réalisés dans [⁸] sont uniquement numériques. A l'aide de trois méthodes de résolution différentes, l'auteur étudie différents types de tourbillons, que la circulation totale soit nulle ou non. Il utilise, entre autre, des rayons acoustiques dans le cadre de l'approximation de Landau et dans le cadre général développé par Candel. Il s'appuie sur un développement en fonction du nombre de Mach pour relier les deux approches et réalise une étude analytique pour caractériser le comportement des rayons acoustiques à l'aide, en particulier, de la vorticité de l'écoulement moyen. Les développements sont en

grande partie basés sur le modèle de tourbillon de Oseen.

Les articles [²⁶] et [¹⁵] détaillent plusieurs cas de calculs. Le premier compare deux résolutions basées sur l'équation parabolique d'une part et sur les équations d'Euler linéarisées d'autre part. Dans celui-ci, pour une des configurations, la vitesse de l'écoulement moyen utilisé est assez importante ; il permet ainsi d'estimer les limites de la méthode développée ici. Le second détaille une étude paramétrique réalisée en partie grâce à des mesures et en partie grâce à des calculs à base de rayons acoustiques. Les résultats issus de ces deux articles servent de références pour les calculs validant notre méthode. Il faut citer aussi les travaux évoqués dans [⁷⁶] qui, non seulement permettent de mieux comprendre les calculs analytiques concernant les tourbillons, mais dont une partie donne aussi des éléments de base pour les calculs industriels de la suite.

Outils d'analyse

Parmi les quantités utilisées pour les analyses suivantes décrivant la déviation d'une onde sonore par un tourbillon, certaines sont particulièrement adaptées à la résolution par "méthode de rayons" et d'autres sont d'application plus générales. Ainsi, une première validation concernant le calcul correct de la réfraction peut être établie grâce au lien qui existe entre l'angle de déviation des rayons acoustiques et les quantités caractéristiques du tourbillon. Ensuite, la comparaison des phase et amplitude de l'onde après interaction avec celles de l'onde sans interaction permet de vérifier que les champs sont correctement intégrés le long des rayons acoustiques. Enfin, l'identification d'un champ diffusé permet de comparer les solutions avec des solutions issues d'autres méthodes.

Une théorie simple due à Landau permet de donner une approximation de l'évolution des directions des rayons acoustiques. En effet, à partir de [⁸], l'effet de l'écoulement moyen sur les rayons acoustiques correspond au premier ordre suivant le nombre de Mach à

$$\partial_l \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(l)}{c} \wedge \boldsymbol{\tau} \tag{3.3}$$

avec *l* la coordonnée curviligne le long du rayon et τ le vecteur de propagation du rayon. Cette expression peut être retrouvée grâce à (A.21) et $\tau \simeq (\overline{v} + c\nu)/|\overline{v} + c\nu| \simeq c_R \nu$.

Dans le cas d'un tourbillon avec cœur en rotation solide et en supposant que la vitesse du son ne varie pas, cette équation peut s'intégrer analytiquement en

$$\boldsymbol{\tau}(l) = \exp\left(\frac{(l_2 - l_1)\Omega_0}{c}\overline{\overline{J}}\right)\boldsymbol{\tau}(0)$$
(3.4)

avec l_1 et l_2 les coordonnées de rentrée et de sortie du cœur et \overline{J} la racine carrée de la matrice identité soit $\overline{J}^2 = \overline{\overline{I}}$ dans \mathbb{R}^2 . Ainsi, si θ est l'angle entre la direction de départ et la direction après interaction, $\theta = (l_2 - l_1)\Omega_0/c$. Un rayon passant par le centre du tourbillon vérifie la déviation maximale qui peut alors être estimée par $\theta_{max} = \Gamma/(\pi r_0 c) = 2M$. Les calculs présentés dans [⁸] montrent que, en prenant en compte plus de phénomènes, la méthode générale de tracé de rayons induit des angles plus faibles, voire même négatifs pour certaines positions de départ.

Dans [¹⁵], l'analyse se fait à partir du rapport des amplitudes et de la différence des phases des ondes après interaction et sans interaction. Une première analyse permet de donner le saut de la différence de phase derrière le tourbillon en fonction des paramètres de celui-ci :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi f\Gamma}{c^2} = 4\pi^2 M \frac{r_0}{\lambda} \tag{3.5}$$

Le rapport des amplitudes est plus difficile à prédire. En effet, la forme de la diffusion dépend beaucoup de la méthode de calcul employée. La présence possible d'une caustique complique l'analyse. Cependant, dans [⁵⁰], l'auteur donne une solution théorique du champ diffusé qui lui permet de caractériser les variations du rapport d'amplitude.

La façon la plus générale d'aborder l'interaction d'une onde sonore par un tourbillon consiste à écrire la pression obtenue comme la somme d'une pression incidente et d'une pression diffusée. Dans notre cas, le problème étant essentiellement en deux dimensions, il est naturel d'exprimer la pression diffusée par

$$p_{diff} = p_{tot} - p_{inc} \text{ et } p_{diff}(r,\theta) = |p_{inc}(r,\theta)|g(r,\theta)\frac{e^{\mathbf{i}kr}}{\sqrt{r}}$$
(3.6)

avec g l'amplitude de diffusion en comparaison avec une onde cylindrique. Dans cette expression, p_{inc} peut être l'onde plane telle qu'elle est loin de la perturbation ou, comme dans [⁸] et dans [⁵⁰], pour ne garder que la partie effectivement diffusée, une onde plane dont la phase est disloquée et prenant ainsi déjà en compte la réfraction liée à la présence du tourbillon. Pour consulter des calculs analytiques plus développés et comprendre les différents termes négligés, le lecteur est invité à consulter plus précisément l'annexe B de [⁵⁰]. Dans [²⁶], les analyses se font en calculant l'amplitude de diffusion par rapport à l'onde plane incidente c'est-à-dire $p_{diff} = p_{inc}(g'(r, \theta) + 1)$. C'est cette forme qui sera utilisée dans les analyses suivantes.

Paramètres de calcul

Le champ moyen utilisé suit le modèle de tourbillon d'Oseen

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{r_0^2}\right)\right) \tag{3.7}$$

ou le modèle de Rankine

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \begin{cases} \frac{\Gamma r}{2\pi r_0^2} \text{ si } r < r_0 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ sinon} \end{cases}$$
(3.8)

Le nombre de Mach est alors défini par

$$M = \frac{\Gamma}{\pi c r_0} \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} \text{ ou } M = \frac{\Gamma}{2\pi c r_0}$$
(3.9)

Comme dans tous les calculs, les paramètres dimensionnants relient la longueur d'onde avec, d'une part, les variations du champ moyen et, d'autre part, la distance de propagation. Il faut donc choisir r_0/λ et L/λ , où L est la longueur caractéristique du domaine considéré.



FIG. 3.30: Évolution des fonctions caractérisant les variations des champs du tourbillon 2D d'Oseen en fonction de l'éloignement par rapport au noyau

La figure (3.30) montre, pour le modèle de Oseen, l'évolution, en fonction de la distance au centre du tourbillon, du rapport entre la longueur d'onde et la norme de la vitesse, en bleu, la norme des variations relatives de la vitesse, en vert, et la norme des variations d'ordre 2 de la vitesse, en rouge. Elle sont tracées pour $r_0/\lambda = 1$ et, pour des r_0/λ différents, les valeurs de la courbe verte varient en λ/r_0 et les valeurs de la courbe rouge en $(\lambda/R_0)^2$. Par ailleurs, le critère d'observation en champ lointain est $L/r_0 > 2\pi r_0/\lambda$. Il définit la limite au delà de laquelle la diffusion du son devient particulièrement importante.

Le calcul est entièrement adimensionné et est effectué à l'intérieur d'une sphère de diamètre 2000 dont l'axe du tourbillon est un diamètre. L'onde plane incidente est modélisée par une demie sphère dont le diamètre est à peine supérieur à celui de la sphère précédente. La figure (3.31) replace les différentes quantités géométriques. Grâce à l'utilisation d'une sphère, la projection pourra permettre de connaître la pression reconstruite pour toutes les distances entre 0 et L et tous les angles. Cependant, la discrétisation, nécessaire pour la représentation des oscillations de la pression, limite l'utilisation de ce type de post-traitement. En effet, pour un maillage raisonnable ne dépassant pas 500 000 nœuds, $L/\lambda \simeq 200/n$ avec n le nombre de points par longueur d'onde.



FIG. 3.31: Description de la géométrie pour l'interaction d'une onde plane avec un tourbillon en deux dimensions : en bleu, le cœur du tourbillon, en rouge, l'onde incidente et, en noir, la géométrie réceptrice

Pour les cas dont les paramètres rendent impossible la projection, le post-traitement peut être fait grâce à un calcul de rayonnement. La taille du noyau du tourbillon doit alors être tel que le champ moyen puisse être considéré uniforme au delà de L, c'est-à-dire que l'amplitude de la courbe verte en L soit inférieure à $0, 1\lambda/r_0$, soit $L/r_0 > 10$ et $r_0 > 100$. Avec la taille du cœur, la circulation est le second paramètre définissant les tourbillons. Les configurations évoquées dans [²⁶] et [¹⁵] font intervenir des nombres de Mach maximaux compris entre 0, 015 et 0, 5 ce qui induit une circulation comprise entre $60r_0$ et $1500r_0$. La valeur de cette circulation induit des réfractions plus ou moins importantes et le post-traitement utilisé peut en tenir compte.

Le comportement de l'onde sonore à travers le tourbillon est caractérisé par r_0/λ . Pour comparer les

résultats avec ceux référencés, il faut choisir des fréquences en accord avec la taille du noyau utilisé : dans [²⁶], $r_0/\lambda = 1/4$ et, dans [¹⁵], r_0/λ varie entre 1 et 10. Il faut noter que, pour le premier cas, l'approximation "hautes fréquences" n'est *a priori* pas valable puisque le paramètre de développement est supérieur à 1, alors que, pour le deuxième cas, elle est, en partie, justifiée par un paramètre variant entre 0, 1 et 0, 01. L'erreur accumulée au cours du calcul est due à l'intégration numérique et à l'approximation "hautes fréquences" puisqu'il n'y a pas d'interaction avec une surface.

Le choix de la technique d'obtention de la pression est donc subordonné, d'une part, à la configuration physique définie par r_0/λ et, d'autre part, à la distance à partir du cœur du noyau à laquelle se fait l'observation caractérisée par L/r_0 . Si le produit des deux est inférieur à 200/n, la projection peut être utilisée. Sinon, si r_0 est supérieur à 100, un calcul de rayonnement est possible. Les distances d'observation utilisées pour les résultats référencés empêchent le post-traitement par rayonnement. L/λ est de l'ordre de 1 pour [²⁶] et varie entre 10 et 100 pour [¹⁵]. Dans les deux cas, la projection est possible.

Cas de référence

Le premier cas calculé utilise le modèle de tourbillon pour lequel un maximum de données analytiques peuvent être estimées, c'est-à-dire le modèle de Rankine en supposant que le nombre de Mach est petit et que la vitesse du son est constante. Pour comparer les résultats avec ceux de [¹⁵], les valeurs des paramètres sont : $\Gamma = 1400$ pour la circulation, $r_0 = 30$ pour le rayon du cœur du tourbillon, soit M = 0,0218, et f = 40 pour la fréquence. Dans un premier temps, les figures suivantes décrivent le comportement de 10 rayons. A chaque rayon acoustique correspond une couleur ce qui permet de relier les différentes quantités. Ensuite, les deux dernières fournissent une description de la différence des phases et du rapport des amplitudes entre l'onde perturbée et une onde non perturbée suivant un axe d'observation transverse aux axes du tourbillon et de l'onde incidente pour différentes abscisses.





FIG. 3.32: *Trajectoires de dix rayons acoustiques dans le cas de référence pour l'interaction entre une onde plane et un tourbillon*

FIG. 3.33: Évolution de l'angle de déviation du vecteur d'onde avec l'axe horizontal en fonction de l'abscisse pour les rayons acoustiques du (3.32)

Les trajectoires de la figure (3.32) semblent en accord avec celles présentées dans [⁸]. Le chevauchement d'une partie des rayons acoustiques semble indiquer la présence d'une caustique. Deux types de rayons peuvent être distingués en fonction de l'angle de déviation. Comme le montre la figure (3.33), certains rayons passant par dessus le tourbillon sont déviés vers le bas alors que le comportement intuitif et général se traduit plutôt par une déviation vers le haut. Les variations de l'angle de déviation sont très localisées et, en dehors d'une zone au voisinage du cœur du tourbillon, les rayons se propagent de façon rectiligne puisque le champ de vitesse moyen est uniformément nul.



FIG. 3.34: Agrandissement de la figure (3.33) détaillant le comportement au voisinage du cœur en rotation



FIG. 3.35: Évolution de l'angle de déviation du vecteur d'onde avec l'axe horizontal en fonction de la distance à l'axe du tourbillon pour les rayons acoustiques du (3.32)

Les figures (3.34) et (3.35) cherchent à obtenir une validation plus quantitative. Ainsi, d'une part, il apparaît que les rayons acoustiques déviés vers le bas sont les rayons qui ne sont pas entrés dans le cœur du tourbillon et qui sont seulement déviés par la partie hyperbolique du champ moyen. D'autre part, la déviation est linéaire dans le cœur du tourbillon et, pour le rayon le plus dévié, entre l'entrée et la sortie, la tangente de l'angle a augmenté de 0,043. Cette valeur est en accord avec la valeur théorique de déviation maximale 2M = 0,0436. La réfraction due au tourbillon est donc correctement prise en compte par la méthode de résolution. Il faut maintenant vérifier le calcul de la phase et de l'amplitude, soit l'effet de la convection et de la diffusion.



FIG. 3.36: Évolution du hamiltonien en fonction de l'abscisse pour les rayons acoustiques du (3.32)



FIG. 3.37: Évolution du jacobien en fonction de l'abscisse pour les rayons acoustiques du (3.32)

L'intégration le long des rayons acoustiques fournit deux autres quantités intéressantes. D'abord, la figure (3.36) indique que l'erreur commise pour l'équation iconale reste, au cours de la propagation, bornée en dessous de 0,0001 grâce à l'adaptation du pas d'intégration. Ensuite, la figure (3.37) permet de distinguer les rayons qui vont rencontrer la caustique de ceux qui ne la rencontreront pas. En effet, avant l'interaction avec le tourbillon, l'onde étant plane, le jacobien de la transformation ne varie pas et, lorsque le champ moyen est nul, le problème étant essentiellement en deux dimensions, il doit varier linéairement en fonction de la variable d'intégration. Ainsi, les rayons pour lesquels le jacobien est décroissant après l'interaction, c'est-à-dire ceux dont la partie incidente se situe au dessus du centre du tourbillon, vont rencontrer la caustique puisque le jacobien va nécessairement devenir nul.



FIG. 3.38: Valeur de la différence des phases dans le cas de référence pour l'interaction entre une onde plane et un tourbillon suivant les axes d'abscisse 110 (bleu), 220 (vert), 330 (rouge), 440 (magenta) et 550 (cyan)



FIG. 3.39: Valeur du rapport des amplitudes suivant les mêmes axes que sur la figure (3.38)

En accord avec (3.5), le saut derrière le tourbillon de la différence de phase entre l'onde perturbée et une onde non perturbée, présenté par la figure (3.38), ne dépend pas de la distance au cœur du tourbillon et vaut approximativement 3. Cependant, l'allure des courbes change en fonction de l'abscisse et traduit la présence d'un repliement du faisceau puisque pour une même abscisse deux valeurs sont obtenues. Deux remarques peuvent être faites à partir de la figure (3.39). La non régularité du champ moyen de vitesse induit une cassure dans l'allure des courbes derrière le tourbillon en -30 et la présence de la caustique se traduit par des amplitudes élevées au voisinage de 50. Pour l'abscisse 110, l'absence de données dans -75 et 75 fausse l'analyse de la différence de phase et de l'amplitude. Pour l'abscisse 330, les niveaux correspondent aux niveaux donnés dans [¹⁵] même si la source n'est pas la même. En effet, dans [¹⁵], la source est modélisée par une série de sources ponctuelles sur une longueur finie ce qui introduit une forme de diffraction. De plus, le calcul de l'amplitude se fait grâce à la densité de rayons acoustiques. Ces deux différences introduisent nécessairement un effet sur l'aspect de la répartition de l'amplitude.





FIG. 3.40: Partie réelle de l'amplitude sur un détail du faisceau pour une abscisse comprise entre 100 et 1000 et une ordonnée entre -250 et 250 pour le cas de référence

FIG. 3.41: *Champ obtenu par la projection du faisceau du (3.40) pour la fréquence unité*

La figure (3.40) montre l'ensemble de la partie perturbée du faisceau. Le repliement apparaît de manière évidente sur toute la longueur. A partir de 1, au dessus, l'amplitude augmente jusqu'à environ 1, 5 et, en dessous, elle diminue jusqu'à environ 0, 5. La partie du faisceau présentée démarrant à environ 100 du centre du tourbillon, l'abscisse 330 où les champs des figures (3.38) et (3.39) ont été extraits se situe donc aux alentours de la fin du premier quart. La figure (3.41) présente le résultat de la projection du faisceau de la figure précédente. Ces deux dernières figures ne sont pas directement analysables car l'imprécision du rendu est trop grande. Cependant, elles donnent un aperçu global de la solution obtenue. Il est évident que celle-ci ne peut être validée sur l'ensemble du faisceau. Son caractère non physique est lié, d'une part, au champ moyen utilisé qui présente des discontinuités et, d'autre part, à l'utilisation de rayons acoustiques simples qui empêche toute diffusion transverse gommant les singularités.

Compléments d'analyse

Pour estimer la précision de la méthode, plusieurs cas de calculs sont dérivés du cas de référence en changeant :

- la taille du cœur du tourbillon,
- le champ moyen,
- la fréquence,
- et la circulation.

Les analyses sont d'abord effectuées à partir des rayons acoustiques, puis avec les valeurs de la différence des phases et le rapport des amplitudes entre l'onde perturbée et une onde non perturbée suivant l'axe transverse à ceux de l'onde incidente et du tourbillon et, enfin, avec l'amplitude de diffusion par rapport au champ incident obtenue après avoir projeté les faisceaux sur un maillage adapté à la représentation du champ total et avoir calculé $p_{diff} = p_{tot}/p_{inc} - 1$.

Sur les figures (3.42), le changement de taille du cœur du tourbillon modifie les trajectoires de deux façons. Certains rayons acoustiques parce qu'ils passent ou ne passent pas à l'intérieur du cœur changent complètement de comportement et, pour les rayons passant à l'intérieur du cœur, la modification du nombre de Mach qui varie entre 0,013 pour $r_0 = 50$ et 0,033 pour $r_0 = 20$ va de pair avec une modification de l'angle de déviation qui varie du double.

La modification de la taille du cœur modifie aussi, bien sûr, l'intégration du jacobien et le coefficient d'évolution linéaire en sortie du cœur. Ainsi, si le signe de ce coefficient est dicté par la position du rayon acoustique incident par rapport au centre du tourbillon, sa valeur absolue dépend de la taille et le coefficient maximal, c'est-à-dire au point où l'étirement du faisceau est maximal, est d'autant plus grand que la taille du cœur est petite.

Les rayons acoustiques de la figure (3.43) sont plus affectés par le tourbillon d'Oseen que les rayons de la figure (3.32) par le tourbillon de Rankine. En particulier, comme la régularité du champ moyen le laisse supposer, il n'y a pas de différence marquée entre le comportement des rayons passant par le cœur et ceux n'y passant pas. Par contre, le maximum de déviation est identique, même si le rayon le plus dévié n'est pas le même.

Sur les figures (3.37) avec le tourbillon de Rankine et (3.44) avec le tourbillon d'Oseen, la répartition entre les rayons rencontrant la caustique et ceux ne la rencontrant pas est la même. Ceux dont la partie incidente est au dessus du centre du tourbillon la rencontreront, alors que les autres non. Cependant, la progression du jacobien en sortie de tourbillon n'est pas la même. En particulier, le maximum d'étalement est atteint pour le rayon vert foncé dans le cas du tourbillon d'Oseen sur la figure (3.44) et il est plus important que celui du rayon bleu dans le cas du tourbillon de Rankine sur la figure (3.37).

La régularité des variations pour le tourbillon d'Oseen apparaît de façon évidente sur les figures (3.45)



FIG. 3.42: Tracé des rayons acoustiques, en haut, évolution de l'angle de déviation en fonction de la distance au centre du tourbillon, au centre, et évolution du jacobien en fonction de l'abscisse, en bas, pour les dix mêmes conditions initiales qu'au (3.32) pour $r_0 = 20$ à gauche et $r_0 = 50$ à droite





FIG. 3.43: Tracé des rayons acoustiques ayant les 10 même conditions initiales qu'au (3.32) mais pour un tourbillon d'Oseen avec $r_0 = 30$

FIG. 3.44: Évolution du jacobien le long des rayons acoustiques du (3.43)



FIG. 3.45: Évolution de l'angle de déviation en fonction de l'abscisse pour les rayons acoustiques du (3.43) dans la zone proche du cœur



FIG. 3.46: Évolution de l'angle de déviation en fonction de la distance au centre du tourbillon pour les rayons acoustiques du (3.43)

et (3.46). Par rapport aux calculs effectués avec le tourbillon de Rankine présentés sur les figures (3.34) et (3.35), les variations de l'angle de déviation ne montrent pas de cassure à l'entrée dans le tourbillon. Si le comportement de certains rayons acoustiques est différent, l'angle de déviation maximal reste le même. Comme la circulation est conservée d'un modèle à l'autre et, bien que, dans le cas du tourbillon d'Oseen, le nombre de Mach maximal vaille 0,0156 au lieu de 0,0213, les déviations sont égales.

Dans le cas du tourbillon de Rankine, un autre calcul a été effectué en ne prenant pas en compte, les variations de la vitesse du son. Les résultats sont inchangés et sont presque superposables avec ceux des figures (3.32), (3.33) et (3.37).

Grâce à la régularité du champ de vitesse, la mise en relation des figures liées au tourbillon d'Oseen permet de donner, en s'appuyant sur la figure (3.47), l'allure du champ de pression en fonction de la position du rayon en amont de la perturbation. Les rayons passant très en dessus et très en dessous du tourbillon peuvent être considérés comme non perturbés. Pour ceux-ci, ni le champ, ni l'angle ne varient au cours de la propagation.



FIG. 3.47: Tracé qualitatif de l'évolution de l'angle de déviation, en haut, et du jacobien, en bas, en fonction du rayon incident

En partant des rayons dont la partie incidente est en dessous du tourbillon, au fur et à mesure que les rayons sont plus proches du cœur du tourbillon, c'est-à-dire en considérant d'abord le rayon bleu foncé puis le rayon vert foncé, l'angle de déviation vers le haut augmente. Cette augmentation induit une dispersion de plus en plus importante des rayons et, ainsi, une augmentation du jacobien, soit une diminution de l'amplitude de la pression au cours de la propagation de plus en plus importante.

En continuant à progresser vers le haut, en considérant le rayon rouge puis le rayon cyan, l'augmentation de l'angle se fait moins importante et le jacobien croît moins vite au cours de la propagation. La position du maximum de dispersion peut être esti-

mée au voisinage du rayon vert foncé. C'est pour ce rayon que les amplitudes de pression les plus faibles

sont atteintes. Le rayon de déviation maximale se situe, lui, entre le rayon cyan et le rayon magenta. Pour ce rayon, le jacobien ne varie pas au cours de la propagation.

Pour les rayons dont la partie incidente se situe au dessus de ce rayon, c'est-à-dire au dessus de l'axe du tourbillon, le jacobien décroît au cours de la propagation. Le long des rayons l'amplitude de la pression va donc augmenter puis, lorsque le rayon va être tangent à la caustique, la pression va devenir imaginaire et son module va décroître. D'une certaine façon, les rayons magenta et jaune sont les symétriques des rayons cyan et rouge respectivement. Les angles de déviation sont les mêmes mais l'évolution du jacobien est opposée.

Les rayons suivants ont des angles de déviation de moins en moins importants. De plus, entre les rayons vert et noir, la dispersion négative atteint sont maximum, c'est-à-dire que, entre ces rayons, le jacobien a une décroissance maximale au cours de la propagation. Le module maximal pour les amplitudes imaginaires de la pression y est atteint. Ensuite, la diminution de l'angle de déviation est moins importante et le jacobien diminue moins fortement le long des rayons dont la partie incidente se situe au dessus.

Il est intéressant de remarquer que le rayon saumon est dévié à l'opposé des autres. Il y a donc deux nouveaux rayons remarquables. D'une part, il existe un rayon ayant une partie incidente plus basse que celle du rayon saumon et un angle de déviation nul. Pour ce rayon, le jacobien doit être décroissant et la pression croissante. D'autre part, il existe un rayon dont la déviation "négative" est maximale. Pour ce rayon, le jacobien et l'amplitude de la pression ne varient pas. Le fait que le jacobien soit décroissant pour le rayon saumon indique que le rayon d'amplitude constante a une partie incidente située au dessus de ce dernier. Après ce rayon, l'angle de déviation négative décroît et le jacobien croît de plus en plus faiblement au cours de la propagation.

La forme de la caustique se déduit des considérations précédentes car tous les rayons dont le jacobien décroît vont être tangents à la caustique en un point le long de la propagation. Les asymptotes de la caustique sont donc les deux rayons dont le jacobien n'évolue pas, c'est-à-dire les rayons ayant des angles de déviation positif et négatif maximaux. Le point le plus en amont de la caustique se situe sur le rayon dont le jacobien a la décroissance maximale.





FIG. 3.48: Valeurs de la différence des phases suivant l'axe d'abscisse 330, pour le modèle de tourbillon de Rankine et pour les fréquences 1 (bleu), 10 (vert), 20 (rouge) et 40 (cyan)

FIG. 3.49: Valeurs de la différence normalisée des phases pour la fréquence 40 et pour les tourbillons d'Oseen et de Rankine suivant les axes d'abscisse 110 (vert et bleu), 220 (magenta et cyan) et 550 (rouge et jaune)

Afin de vérifier l'accroissement linéaire du saut de la différence de phase derrière le tourbillon en

fonction de la fréquence, la figure (3.48) présente la différence pour plusieurs valeurs de la fréquence. Une fois normalisées par $2\pi f\Gamma/c^2$, toutes les courbes se superposent. Cette normalisation est appliquée sur les résultats de la figure (3.49) qui comparent les valeurs pour les modèles de tourbillons de Rankine et d'Oseen pour différentes abscisses. Les différences qui apparaissent sont localisées au voisinage des sauts entre -50 et 50. Le modèle d'Oseen induit des courbes plus régulières et des effets dus à la caustique moins marqués.



FIG. 3.50: Valeurs de la différence normalisée des phases à la fréquence 40 pour le tourbillon d'Oseen suivant les axes d'abscisses 220 et 550 pour les rayons de cœur 20 (magenta et bleu), 30 (jaune et rouge) et 50 (cyan et vert)



FIG. 3.51: Valeurs du rapport des amplitudes suivant l'axe d'abscisse 330 pour le tourbillon d'Oseen et pour les rayons de cœur 20 (rouge), 30 (bleu) et 50 (vert)

Les valeurs de la différence de phase normalisée sur la figure (3.50) sont modifiées par deux facteurs. D'une part, la position en abscisse dicte le comportement en dehors de la zone dans l'ombre du tourbillon. D'autre part, le saut derrière le tourbillon est d'autant plus marqué que la taille du cœur du tourbillon est petite et que l'abscisse est grande. Ces constatations correspondent aux analyses précédentes.



FIG. 3.52: Partie réelle de l'amplitude de diffusion par rapport au champ incident pour la fréquence 6,8 pour un tourbillon d'Oseen avec $r_0 = 200$ et M = 0,0156 à gauche et M = 0,0625 à droite

Les figures (3.52) présentent l'amplitude de diffusion par rapport à l'onde incidente pour deux valeurs de nombre de Mach maximal, soit deux valeurs de circulation. Le modèle d'Oseen a été utilisé pour garantir une certaine régularité du champ moyen et la taille du cœur a été prise suffisamment grande pour permettre une analyse malgré les aléas de la projection et l'absence de rayons acoustiques pour les abscisses au

voisinage du centre du tourbillon. Deux phénomènes peuvent être décelés : une convection derrière le tourbillon et une diffusion liée au cœur du tourbillon. Ils sont tous les deux plus importants pour le nombre de Mach le plus élevé. Même si, au voisinage de l'abscisse 1000, la projection devient incertaine dans le cas M = 0,0156, la différence importante entre les deux figures est l'apparition de la caustique pour M = 0,0625 à la frontière entre le bleu et le rouge aux alentours de z = 300 et x = 1000.



FIG. 3.53: Module de l'amplitude de diffusion présentée au (3.52) à la distance 500 du centre du tourbillon pour différentes fréquences et en fonction de l'angle avec le demi axe z = 0 et x > 0

Les figures (3.53) s'intéressent à la valeur de l'amplitude de diffusion présentée sur les figures (3.52) pour différentes fréquences et à la distance 500 du centre du tourbillon. En dehors des voisinages des angles $\pm \pi/2$ où aucun rayon acoustique n'a été pris en compte et des imperfections liées à la projection, la forme des répartitions correspond aux figures présentées dans [²⁶] avec une diffusion qui augmente en fonction de la fréquence et de la circulation. Pour une fréquence suffisamment élevée, à peu près f = 20 pour M = 0,0156 et entre f = 3, 4 et f = 6, 8 pour M = 0,0625, la diffusion est telle que la différence de phase dépasse 2π et l'amplitude de diffusion oscille en fonction de l'angle. Pour M = 0,0625, la caustique apparaît nettement pour l'angle $+\pi/6$.

* * *

Cette dernière série de calculs concluant l'ensemble des cas de référence valide la propagation non rectiligne. De nombreuses quantités décrivant la propagation ne seront plus analysées dans la suite. Elles ont permis, ici, de s'assurer que l'ensemble des situations potentiellement rencontrées au cours d'une propagation quelconque sont traitées correctement. Le seul manque réside dans l'absence de validation pour une célérité du son non homogène. Pour ce faire, un calcul à l'aide d'une méthode volumique aurait été nécessaire. Cependant, les interventions, dans les équations, du gradient et de la hessienne de la vitesse du son étant similaires à celles pour la vitesse de l'écoulement, la prise en compte des variations de la célérité moyenne peut être considérée comme validée.

En ce qui concerne l'utilisation future de la méthode de calcul, la propagation des rayons acoustiques dans la couche limite, comme au travers du tourbillon, ont permis de mieux appréhender le "chemin parcouru" par le son. Dans le cas de la couche limite, il est ainsi intéressant de constater que les rayons qui semblent être réfléchis en aval de la source sont en fait réfractés. Tout traitement de la surface dans la zone d'ombre n'aura donc que peu d'effet sur le champ total. Cette constatation doit bien sûr être confirmée par d'autres calculs ou des expériences mais la méthode permet de poser la question de l'existence du phénomène. Dans le cas du tourbillon, les trajectoires montrent d'où provient l'amplitude de la perturbation observée après l'interaction avec le tourbillon. Cela permet de traiter astucieusement l'onde incidente pour diminuer le rayonnement.

L'apparition des caustiques dans les différents cas calculés permet non seulement de vérifier que leur présence est correctement prise en compte mais aussi de constater les limites de la méthode et d'apprendre à s'en accommoder. Ainsi, les champs de l'optique géométrique ne sont plus valables au voisinage des caustiques mais ils demeurent une bonne approximation dès que le point d'observation s'en éloigne. De plus, l'utilisation de sources différentes et de faisceaux complexes permet d'améliorer la méthode et de diminuer l'imprécision due à ces singularités en introduisant de la dispersion transverse.

* * * * *

Les différentes configurations testées ont évalué aussi bien les résultats que la pertinence de l'utilisation du code de calcul. La mise en relation du temps de calcul et des erreurs commises justifie la place de la méthode parmi les approches résolvant des problèmes aéroacoustiques. L'approximation fournit des solutions acceptables dans la majorité des cas et l'algorithme semble robuste et efficace. En outre, les configurations "réalistes" concentrent moins les erreurs que les calculs "académiques". C'est pourquoi les résultats industriels devraient être encore plus pertinents.

A ce stade, l'interaction avec des surfaces quelconques n'a pas enocre été validée. De même, aucun calcul utilisant un champ moyen variant dans les trois dimensions n'a été effectué. Cependant, le code de calcul peut, dès à présent, traiter la partie principale des problèmes évoqués au début de cette étude. Progressivement, l'utilisation de la méthode permettra de compléter la connaissance de ses limites et leur prise en compte. L'analyse des résultats sera ainsi affinée et la confiance en cet outil renforcée.

Chapitre 4

Propagation guidée

Pour être complète la méthode de calcul doit traiter deux types de problèmes. D'une part, les problèmes de propagation presque libre utilisant des sources simples modélisent la propagation à partir de l'avion et vers l'infini. D'autre part, les problèmes de propagation en partie bornée tentent de prendre plus spécifiquement en compte la géométrie entourant les sources, comme pour le cas d'une entrée d'air longue.

L'absence de surface limitant la propagation dans au moins une direction suivant tous les axes permet à l'énergie issue de la source de partir vers l'infini. Dans ce cas, la méthode classique converge facilement car les niveaux induits par les interactions multiples décroissent relativement rapidement. Si, suivant un axe, l'énergie se trouve "emprisonnée", les niveaux persistants resteront non négligeables, même avec un nombre d'interactions infini. En fait, des analyses théoriques montrent que la dynamique est alors fortement influencée par la géométrie et ne peut plus être uniquement modélisée par la propagation.

L'objectif de cette partie est de calculer, avec la méthode développée, des problèmes pour lesquels la propagation est essentiellement guidée. Dans un premier temps, une analyse théorique est menée afin de tester efficacement la méthode et d'imaginer des solutions aux problèmes rencontrés. Dans un deuxième temps, l'étude de la propagation dans un cylindre pour des sources classiques permet de valider les réflexions sur des surfaces non planes. Mais, constatant que la méthode échoue à décrire correctement les phénomènes, d'autres formes de sources sont envisagées. Leur construction s'appuie alors sur les solutions évoquées dans la première partie. La nouvelle approche, après avoir été validée pour la propagation rectiligne dans un cylindre, est utilisée pour mesurer l'effet d'un écoulement ou d'une impédance sur la paroi.

4.1 Champs acoustiques dans les guides d'ondes

Les champs acoustiques dans les guides d'ondes présentent deux caractères distincts. Parce que la géométrie force une forme de propagation particulière, ils peuvent être considérés comme difficiles à calculer. Mais cette particularité est aussi un gage de simplicité, puisque les solutions peuvent être étudiées en partie analytiquement et qu'elles ne dépendent que très peu de la forme des sources excitatrices.

Le caractère particulier de la propagation guidée permet de construire dans certains cas "idéaux" des solutions analytiques exactes. Pour des configurations dégradées, les résolutions numériques s'inspirent donc de celles-ci et des analyses permettant de les obtenir. Après avoir rappelé dans un premier temps les bases théoriques de la propagation guidée, il est intéressant, dans un deuxième temps, de citer les différentes approches existantes pour passer de la théorie au calcul pratique.

4.1.1 **Résolutions analytiques**

Une façon d'aborder l'étude de la propagation guidée est, comme dans [⁵⁸], de considérer le problème le plus simple possible. Il s'agit donc d'analyser la propagation dans un cylindre infini ayant une section transverse constante et baigné dans un milieu uniforme et sans écoulement. Comme la géométrie du problème est alors invariante par translation suivant l'axe du cylindre, une solution constituée du produit de deux fonctions décrivant, pour l'une, le comportement suivant l'axe et, pour l'autre, le comportement transverse est envisageable. Si l'axe du cylindre est suivant e_x , pour une onde monochromatique, une solution de la forme $\hat{p}(x) = X_n(x)\Psi_n(y, z)$ conduit à deux nouvelles équations

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2)\Psi_n + \kappa_n^2 \Psi_n = 0 \text{ et } d_x^2 X_n + (k^2 - \kappa_n^2) X_n = 0$$
(4.1)

où κ_n^2 est une constante de séparation choisie arbitrairement. Si les parois du guide sont supposées rigides, la solution doit en plus vérifier, en chaque point de la paroi, $\nabla \Psi_n \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}} = 0$ avec $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{w}}$ la normale à la paroi.

Le problème peut donc se décomposer en un problème de vibration en deux dimensions dans la section transverse et un problème de propagation suivant l'axe du cylindre. Pour résoudre la première, Ψ_n et κ_n^2 peuvent être interprétées comme les fonctions et les valeurs propres de l'opérateur de Laplace. Une comparaison avec un problème clos en trois dimensions mais aussi avec un problème de propagation de la chaleur conduit à adapter une théorie plus générale décrivant l'opérateur. Ainsi, l'ensemble des Ψ_n forment une base complète de l'espace de fonctions communément utilisé pour ce type de problème et, en considérant le produit scalaire usuel, cette base peut être orthonormée. De plus, pour une géométrie bornée, comme la paroi empêche la propagation transverse jusqu'à l'infini, les κ_n^2 doivent être réels et positifs ou nuls. La géométrie de la section transverse détermine la forme des Ψ_n et l'ensemble discret contenant les valeurs possibles pour les κ_n^2 .

Dès que κ_n^2 et Ψ_n sont identifiés, la seconde équation de (4.1) donne X_n . Les solutions classiques de propagation suivant un axe sont $\exp(\pm iK_nx)$ où $K_n^2 = k^2 - \kappa_n^2$ avec k le nombre d'onde. Ainsi, K_n peut être réel et l'onde se propage alors suivant l'axe, ou imaginaire pur, et l'onde décroît alors exponentiellement suivant l'axe dans un sens ou dans l'autre. Pour une fréquence donnée, il n'y a qu'un nombre limité de modes propagatifs, c'est-à-dire, pour lesquels $\kappa_n^2 < k^2$. Il y a, par contre, un nombre infini de modes évanescents.

La forme générale des solutions est la combinaison d'une onde plane suivant l'axe du cylindre et d'un mode de vibration transverse

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = p_0 \exp(iKx)\psi(y, z) \tag{4.2}$$

Pour une source ponctuelle placée dans un cylindre, si la solution est décomposée sur la base formée par les Ψ_n , l'équation de propagation devient

$$d_x^2 X_n + (k^2 - \kappa_n^2) X_n = -4\pi S \psi_n(y_0, z_0) \delta(x)$$
(4.3)

et la solution s'écrit

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = i2\pi S \sum_{n} \frac{\psi_n(y_0, z_0)}{K_n} \psi_n(y, z) \exp(iK_n|x|)$$
(4.4)

De plus, loin de la source, les modes propagatifs peuvent seuls être pris en compte.

Si la section transverse du cylindre est rectangulaire, les fonctions et les valeurs propres sont

$$\psi_n(y,z) = A(n_y, n_z) \cos(\frac{n_y \pi y}{L_y}) \cos(\frac{n_z \pi z}{L_z}) \text{ et } \kappa_n^2 = \pi^2 \left[(\frac{n_y}{L_y})^2 + (\frac{n_z}{L_z})^2 \right]$$
(4.5)

où L_y et L_z sont les dimensions de la section transverse du cylindre et $A(n_y, n_z)$ est une constante déterminée par la normalisation de la base.

Si la section transverse est circulaire, en utilisant les coordonnées polaires (r, ϕ) , les fonctions doivent être périodiques suivant ϕ et une nouvelle séparation conduit à résoudre

$$\left[d_r^2 + \frac{1}{r}d_r + (\kappa_n^2 - \frac{m^2}{r^2})\right]R(r) = 0$$
(4.6)

alors $\psi_n(r,\phi) = A_{qm}J_m(\frac{\eta_qm}{a})(\cos(m\phi))$ ou $\sin(m\phi))$ et $\kappa_n = \frac{\eta_{qm}}{a}$ où a est le rayon du disque, m un entier, J_m la fonction de Bessel d'ordre m et η_{qm} la qième racine de $J'_m(\eta_{qm}) = 0$.

4.1.2 Conduits quelconques

Dans certains cas, les configurations peuvent être considérées comme suffisamment proches du cas idéal du (4.1.1) pour permettre l'application simple de la théorie. Cependant, dans de nombreux autres cas, des ajustements doivent être faits. En effet, les guides d'ondes étudiés sont généralement finis, sans section transverse constante le long de l'axe et ont des parois non parfaitement réfléchissantes. De plus, l'écoulement doit souvent être pris en compte. Alors que dans le cas d'un cylindre infini, une transformation de Fourier justifie la séparation de la solution, dans un conduit quelconque, rien ne motive une telle technique. L'analyse modale donne pourtant des solutions intéressantes.

Dans [⁶⁴] comme dans plusieurs autres articles, l'auteur utilise une description modale pour étudier la propagation du son dans un conduit lentement variable avec une paroi absorbante et une section transverse quelconque. A partir des équations d'Euler avec une perturbation harmonique et un écoulement moyen stationnaire, il obtient les équations linéarisées classiques. En faisant l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est irrotationnel et isentropique, les équations sont encore simplifiées et aboutissent d'une part, à l'équation de Bernoulli et, d'autre part, à l'équation des ondes convectées sous sa forme réduite. La géométrie est alors définie par une section transverse $\mathcal{A}(\epsilon x)$ où ϵ définit l'amplitude des variations suivant x et la condition acoustique à la paroi suit l'équation de Myers.

Dans un premier temps, une solution approchée du champ moyen est construite à partir d'une méthode utilisant les variations lentes. Puis, l'utilisation d'une forme de fonction particulière, dite Ansatz WKB, conduit à une solution multi-échelles. Au premier ordre, cette analyse conduit à la vérification d'une équation d'Helmholtz. Dans l'équation transverse, les fonctions propres et les coefficients de l'amplitude dépendent alors de x. Ils sont déterminés en utilisant des conditions de solvabilité. Pour des configurations particulières, les solutions classiques sont retrouvées.

Un aspect important de l'étude des quasi-cylindres ayant une section transverse non constante réside dans l'annulation possible au cours de la propagation du nombre d'onde transverse. Un mode se propageant peut alors, en certains points, se transformer en un mode évanescent. Ainsi, en ces points de rebroussement, le mode incident donne naissance à un mode transmis et un mode réfléchi de coefficients respectifs R = 1et T = i. [⁷⁹] et [⁶⁵] complètent l'étude en prenant en compte, d'une part, un écoulement présentant une couche limite et, d'autre part, la diffraction à une transition d'impédance.

La propagation guidée peut aussi être abordée en utilisant la méthode développée dans [⁵⁵]. A partir des équations d'Euler linéarisées et en utilisant les coordonnées polaires, les auteurs décomposent la pression et la vitesse sur la base des fonctions propres. Les coefficients de la décomposition sont calculés à l'aide de deux séries de nouvelles équations linéaires d'évolution le long de l'axe du cylindre. Cependant, le calcul effectif est plutôt réalisé à l'aide d'une équation de Ricatti faisant intervenir une matrice d'impédance. Cette approche n'est possible que parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de modes propagatifs et qu'ainsi, seul un petit nombre de coefficients est considéré. La validation de cette approche multimodale est réalisée, pour de hautes fréquences, dans [⁵⁶]. Les auteurs utilisent alors une matrice de diffraction et une correspondance entre rayons et ondes.

Pour calculer le champ rayonné vers l'extérieur à partir de l'extrémité d'un conduit fini, les premières approximations ont considéré la section au droit de l'embouchure comme étant une membrane flexible vibrante. Le champ lointain peut alors être estimé en utilisant l'intégrale classique de radiation de Rayleigh. Pour les modes de propagation analytiques d'un cylindre de révolution, cette approximation fournit des expressions simples utilisant les fonctions de Bessel correspondant à chaque mode. Cependant, à une véritable embouchure de conduit, les mécanismes sont plus compliqués et la diffraction du champ incident sur l'arête donne naissance à deux nouveaux champs. L'un rayonne à l'extérieur et l'autre se propage dans le sens inverse vers l'intérieur du conduit. Levine et Schwinger ont trouvé une façon analytique et mathé-matique de prendre en compte ces effets pour une onde plane sortant d'un conduit non "bafflé". D'autres travaux ont abouti à une formulation générale. En pratique et notamment pour les hautes fréquences, il peut être plus intéressant d'utiliser une analogie à base de rayons pour déduire les champs réfléchis et diffractés comme cela est fait dans [⁵⁷].

* * *

La rapide présentation précédente ne se veut pas exhaustive. D'autres études et d'autres problèmes auraient pu être cités. Seule la propagation dans les conduits solides a été envisagée alors que des variations d'indice comme dans les fibres optiques ou au voisinage de la surface de la mer peuvent créer des conduits virtuels conduisant à des approches différentes. Il s'agissait, en fait, de se donner suffisamment de matière pour, d'une part, aborder le traitement des problèmes de propagation en conduit le moins naïvement possible et, d'autre part, envisager dans quelle mesure la méthode de "lancer de rayons" est utile industriellement pour résoudre ce type de problèmes.

Dans un premier temps, les développements analytiques permettent d'envisager des configurations de calcul suffisamment particulières pour faciliter les analyses des résultats obtenus lors de la propagation de sources classiques. En décrivant les mécanismes de la propagation, ils permettent d'envisager, dans un second temps, des traitements spécifiques pour les "méthodes de rayons". Or, il semble que, malgré

le développement de méthodes de plus en plus performantes pour calculer les champs acoustiques dans les conduits, certains problèmes restent difficilement abordables. L'utilisation d'une méthode de "lancer de rayons" efficace permettrait, en tenant compte des approximations, d'obtenir une connaissance des champs au premier ordre pour des conduits fortement courbés et en présence d'écoulement.

4.2 Calcul d'une source ponctuelle dans un cylindre de révolution

Pour propager une perturbation acoustique monochromatique dans un conduit à l'aide d'une méthode de "lancer de rayons", l'idée la plus simple consiste à utiliser une source classique. En s'inspirant des configurations rencontrées en aéronautique, le calcul du champ de pression rayonné vers l'extérieur par une source ponctuelle placée dans un long cylindre de révolution semble être particulièrement intéressante.

L'analyse des résultats donnés par la méthode de "lancer de rayons" utilisée dans le cas de la propagation dans un cylindre de révolution permet à la fois :

- de valider, grâce à la simplicité de la géométrie, les réflexions sur des surfaces courbes et, en particulier, concaves,
- de tester les limites de la méthode de calcul puisque le problème engendre une quasi infinité de réflexions,
- et de comparer les solutions avec des champs analytiques.

La géométrie et les fréquences utilisées se veulent représentatives de configurations rencontrées pour facilité l'application aux configurations industrielles.

Classiquement, l'étude commence par la description des paramètres de calcul et une estimation *a priori* de l'erreur commise. Pour exploiter au mieux les résultats obtenus, il faut choisir des post-traitements adéquats. Ainsi, sont utilisés non seulement le rayonnement vers l'extérieur mais aussi la projection sur la paroi du cylindre et la section transverse. Le calcul de la première configuration est abordé naïvement dans le deuxième paragraphe, c'est-à-dire en ne tenant compte que des impératifs classiques liés à la méthode de calcul. Mais, après la validation de la première réflexion, les mauvais résultats obtenus en poursuivant le calcul dans le troisième paragraphe conduisent à étudier plus en détail les limites de la méthode.

4.2.1 Paramètres de calcul



FIG. 4.1: *Géométrie pour les cas de propagation dans un cylindre de révolution*

La première géométrie testée pour les problèmes intérieurs est un cylindre à base circulaire de rayon R = 250 mm et de longueur L = 8000 mm centré autour de l'axe x entre -4000 et 4000. Une des extrémités est bouchée par un disque dans le plan transverse. Pour une utilisation typique, ce disque permet de récupérer les champs rayonnant vers l'extérieur. Les parois sont d'abord parfaitement réfléchissantes mais elles peuvent ensuite être traitées avec une impédance.

Le maillage du cylindre présenté sur la figure (4.1) est un quadrillage régulier comportant 21 nœuds dans la longueur et 62 sur une circonférence, soit 1302 nœuds au total. La section transverse à l'extrémité est maillée grossièrement car elle est plane et n'induit pas d'erreur supplémentaire. La longueur

des barres est 500 mm suivant l'axe et 25 mm dans la direction de la courbure maximale ce qui crée une erreur maximale de 0, 32 mm entre la surface courbe et les facettes planes. Il est classique de considé-

rer que la fréquence maximale calculable avec un tel maillage correspond à une longueur d'onde 50 fois supérieure à cette erreur, soit 21, 25 kHz.

Le choix des fréquences de calculs est fait pour pouvoir analyser facilement le champ rayonné. A partir des solutions analytiques présentées au (4.1.1), elles sont espacées de sorte que les modes se propageant puissent être identifiés. Ainsi, elles sont choisies en fonction de $\eta_{qm}c/(2\pi a)$ et valent 0,1; 0,5; 0,7; 0,85; 1; 2; 2,5; 3; 4; 10; 20 et 50 kHz. L'utilisation du paramètre ka à la place de la fréquence facilite l'analyse. Les fréquences calculées correspondent aux valeurs du paramètre : 0,462; 2,31; 3,23; 3,927; 4,62; 9,24; 11,55; 13,86; 18,48; 46,2; 92, 4 et 231.

A la fréquence la plus basse, seul le mode plan peut se propager. Tous les zéros non nuls de la dérivée de la fonction de Bessel conduisent à des nombres d'ondes transverses trop grands pour permettre la propagation suivant l'axe du cylindre. La deuxième fréquence se place entre les valeurs de ka 0, 50 et 0, 66 à partir desquels se propagent les modes des premiers zéros respectivement d'ordre azimutal 1 et 2. La troisième fréquence empêche le premier mode d'ordre azimutal nul de se propager. La géométrie étant "idéalement" un cylindre de révolution autour de l'axe e_x et la source étant placée sur l'axe, le premier mode excité et se propageant devrait être le mode d'ordre azimutal nul lié au deuxième zéro de la fonction de Bessel. Celui-ci ne se propage qu'à partir de 0, 83 kHz, la quatrième fréquence est donc la première à permettre sa propagation. Les fréquences suivantes sont choisies arbitrairement pour couvrir la totalité des valeurs envisageables.

Comme la géométrie est relativement simple, l'erreur se compose essentiellement de l'erreur théorique et de l'erreur de discrétisation. En effet, l'erreur d'interpolation est faible car les fronts d'onde sont simples et, à l'intérieur du cylindre, il n'y a pas de diffraction liées aux aspérités de la géométrie.

La propagation se faisant en atmosphère homogène et sans écoulement, l'erreur théorique est celle liée à l'équation de Helmholtz. Pour le champ incident, elle est nulle mais, pour les champs successivement réfléchis, elle est liée à la courbure des fronts d'onde. Comme ceux-ci dépendent de la courbure de la surface diffractante, une argumentation classique conduirait à prendre comme longueur caractéristique a = 250 mm et à estimer $\epsilon = \lambda/a$ soit 13,6 pour la première fréquence, 1,36 pour 1 kHz et 0,136 pour 10 kHz. Mais, la distance de propagation et la présence de caustiques dues à la concavité de la géométrie compliquent l'analyse. De façon évidente, pour les basses fréquences, la validité de l'approximation de l'optique géométrique n'est pas assurée.

En plus de l'erreur théorique, une erreur numérique due à la discrétisation de la surface doit être prise en compte. Pour une propagation classique ne faisant pas intervenir plus de trois ou quatre interactions, les fréquences calculables grâce au maillage sont déterminées par la différence de phase induite par l'intersection avec la surface "facettée" et non pas la véritable surface. Cette analyse ne tient pas compte de l'erreur commise sur l'amplitude car, pour les hautes fréquences, les variations liées à la phase sont bien plus importantes que les variations de l'amplitude. Pour la propagation en conduit, le nombre de réflexions devenant important, cette erreur peut devenir significative.

Pour l'analyse, deux types de post-traitements sont utilisés : la projection et le rayonnement à partir de la section transverse en bout de conduit. Aux fréquences considérées, la discrétisation en $\lambda/5$ conduisant à des maillages volumineux, les projections ne sont faites que sur deux parties de la géométrie. Ainsi, pour analyser les variations suivant l'axe x, seule une tranche de la géométrie est utilisée ; et, pour analyser les variations sur la circonférence du cylindre, la projection est faite sur un tronc compris entre x = -2000 et



FIG. 4.2: Schéma présentant les directions utilisées pour le rayonnement en sortie de conduit

En rendant transparente la section transverse maillée à l'extrémité du cylindre, un rayonnement vers l'extérieur peut être calculé. Le faisceau récupéré sur la surface se comporte alors comme une source étendue en absence de géométrie diffractive. Avec cette méthode de calcul, les effets diffractifs sont mal pris en compte. La seule façon de les calculer correctement est d'introduire un champ de rayons diffractés. Pour les premières analyses, les effets diffractifs n'étant pas significatifs, aucun champ supplémentaire n'est pris en compte.

Concrètement, le rayonnement est calculé en champ proche sur une trajectoire contenue dans le plan y = 0 et décrivant un demi-cercle de rayon 10000 mm et de centre (-4000; 0; 0). L'angle -90° correspond à z = -10000 et l'angle 0° à z = 0comme cela est indiqué sur la figure (4.2). Les figures représentent le rayonnement en dB, c'est-à-

dire $20 \log(|p/p_R|)$ avec p_R choisie de sorte que, pour une onde sphérique, $20 \log(|p/p_R|) = -60$ dB à 1000 mm soit 1 m de la source.

4.2.2 Validation de la réflexion sur une surface gauche

Le premier calcul consiste à placer un monopole sur l'axe du cylindre en x = -3000 et observer les différentes traces des maillages de tubes de rayons sur la surface au fur et à mesure des réflexions. En choisissant de fixer à 10000 le nombre de rayons devant percuter la surface, l'accomplissement de 5 réflexions conduit à utiliser 150 Mo de mémoire et coûte environ 80 s de temps CPU sur un processeur Power4 1,5 GHz.

Les figures (4.3) et (4.4) aident à comprendre en quoi le raffinement est nécessaire et pertinent. Comme il s'agit de la première propagation, l'interpolation choisie permet d'obtenir une erreur négligeable. Dans la plupart des cas, au fur et à mesure des propagations et des interactions, l'interpolation devient *a priori* de moins en moins justifiable car le front d'onde se déforme fortement. Cependant, la configuration du présent problème induit, au fur et à mesure des interactions, la conservation des directions principales de courbures et, dans l'une, un "aplatissement" des fronts d'ondes alors que, dans l'autre, le rayon de courbure est conservé.

Dans un plan longitudinal, au départ, la source ponctuelle crée une onde telle que

$$\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} = \nu_r \boldsymbol{e}_r + \nu_x \boldsymbol{e}_x \text{ et } \frac{\nabla \nabla \phi^i}{|\nabla \phi^i|} = \frac{1}{R} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{i}})$$
(4.7)

avec $\tau^i = \nu_x e_r - \nu_r e_x$. La réflexion transforme les quantités en

$$\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} = -\nu_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \nu_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \text{ et } \frac{\nabla\nabla\phi^{\boldsymbol{r}}}{|\nabla\phi^{\boldsymbol{r}}|} = \frac{1}{R}(-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{r}}\otimes\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{r}})$$
(4.8)



FIG. 4.3: *Erreur relative sur l'amplitude après la première propagation sans raffinement*



FIG. 4.4: Erreur relative à la même étape mais avec raffinement

avec $\tau^r = \nu_x e_r + \nu_r e_x$. Au cours de la propagation, e_r et e_θ changent de signe et les quantités valent, en atteignant de nouveau la surface après une longueur de propagation de 2R:

$$\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} = \nu_r \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \nu_x \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \text{ et } \frac{\nabla \nabla \phi^r}{|\nabla \phi^r|} = \frac{1}{R} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{i}})$$
(4.9)

Les quantités pourraient être calculées pour les interactions suivantes de la même façon.



FIG. 4.5: Opposée de la partie imaginaire du rapport des amplitudes théorique et calculée à la deuxième interaction

Le calcul rapide des éléments géométriques du front d'onde réfléchi permet non seulement de justifier l'interpolation même après de nombreuses réflexions, mais en plus de calculer l'amplitude à chaque interaction. Entre la première et la deuxième, le rapport des amplitudes vaut $1/\sqrt{3}$ donc, pour un point situé en x à la fin de la deuxième propagation, comme son antécédent est situé en x/3, l'amplitude vaut $A\sqrt{3/((3a)^2 + x^2)}$ avec A une constante dépendant de la puissance de la source. En particulier, au niveau de la source, l'amplitude a été divisée par $\sqrt{3}$ et, en x = -4000, elle est presque multipliée par $\sqrt{3}$.

La figure (4.5) donne l'opposée de la partie imaginaire du rapport entre la valeur calculée et la va-

leur théorique de l'amplitude du champ de l'optique géométrique à la deuxième interaction. L'amplitude le long du cylindre, après la deuxième propagation, est conforme à sa valeur théorique non seulement en module mais aussi en phase puisque la traversée de la caustique la rend imaginaire pure négative. La réflexion sur une surface concave et le traitement du passage de la caustique s'en trouvent validés.

4.2.3 Limites de la multi-réflexion

En prolongeant les réflexions, deux remarques peuvent être énoncées à partir des figures (4.6) et (4.7). D'une part, comme l'analyse précédente le laisse supposer, l'amplitude s'étale au fur et à mesure des interactions. Ainsi, sur la longueur, le maximum diminue et le minimum augmente. Il est évident que ceci pose des problèmes de convergence. Après de nombreuses réflexions, la quantité d'énergie sortant du cylindre reste non négligeable. En fait, comme à chaque propagation, le champ est multiplié par (-i), les contributions se compensent en partie deux à deux. Des analyses plus précises sont donc nécessaires.





FIG. 4.6: Opposée de la partie imaginaire de l'amplitude sur le faisceau de rayons après 10 réflexions (12184 rayons)

FIG. 4.7: *Projection sur un arc du cylindre du champ obtenu à la dixième réflexion pour la fréquence* 1 *kHz*

D'autre part, après 10 réflexions, l'amplitude sur la figure (4.6) semble passablement dégradée. L'interpolation et la discrétisation de la surface peuvent expliquer l'erreur qui apparaît. Cependant, compte tenu du faible nombre de rayons sortant à chaque propagation, une ou deux interpolations suffisent pour fournir suffisamment de rayons à la dixième interaction. De plus, la source étant ponctuelle, l'interpolation concerne surtout la partie de la géométrie située loin de celle-ci et les rayons interpolés sortent donc rapidement. Ainsi, c'est la discrétisation de la géométrie qui est à l'origine des rayures marquant l'amplitude.

L'erreur liée à la discrétisation de la géométrie présentent deux caractères distincts. Par rapport à un problème non borné, plus d'interactions doivent être prises en compte et, comme l'erreur se cumule au cours de la propagation, elle devient à partir d'un certain nombre d'interactions non négligeable. Pour la discrétisation d'une géométrie, le critère doit donc prendre en compte non seulement la différence de phase maximale entre une intersection avec le maillage et une intersection avec la géométrie mais aussi le nombre des interactions et l'influence sur le calcul de l'amplitude.

Par ailleurs, le maillage étant régulier, la distance entre l'axe du cylindre et un point quelconque appartenant à une facette dépend de l'angle polaire dans le plan transverse mais pas de l'abscisse le long de l'axe. Ainsi, comme la source est centrée sur l'axe, pour un rayon, l'erreur commise à chaque interaction est la même et c'est ce qui dessine les rayures. Le terme d'''erreur' est ambigu car le champ calculé correspond à la géométrie effectivement prise en compte, c'est-à-dire celle décrite par le maillage. Pour calculer le champ propagé dans un cylindre circulaire, il faudrait utiliser un maillage qui décrive effectivement cette géométrie, c'est-à-dire un maillage plus fin et non régulier.

La comparaison des sommations de 5 ou 10 contributions sur les figures (4.8) et (4.9) montre que,



FIG. 4.8: Champ obtenu à 1 kHz par la sommation de 5 faisceaux



FIG. 4.9: *Champ obtenu à 1 kHz par la sommation de 10 faisceaux*

comme la phase joue un rôle important, les amplitudes des contributions ne s'ajoutent absolument pas. Il ne semble pas, en rapprochant ces figures de la figure (4.7) que le champ ait convergé vers une solution. A partir de cette constatation, l'analyse est délicate. En effet, les modes de propagation excités ne sont *a priori* pas connus. Il est donc difficile d'estimer la pertinence de la solution obtenue à ce stade de sommation ainsi que des contributions suivantes. Le fait que la source soit centrée pourrait amener à penser qu'aucun mode azimutal n'est excité. Or, les contributions suivantes présentent des variations autres que longitudinales. D'une certaine façon, ces contributions sont justes car elles correspondent à la géométrie décrite par le maillage. Mais, cette approximation faite sur la forme théorique du problème ne permet pas de décrire la propagation due à une source centrée dans un cylindre à base circulaire. Si les intersections entre les rayons et la géométrie régulière étaient estimées grâce à l'utilisation de la courbure sur chaque facette plane, la configuration modéliserait correctement le problème de départ.



FIG. 4.10: Détail du maillage dense au voisinage de l'extrémité maillée

Compte tenu des remarques faites à propos du premier maillage, des calculs ont été effectués sur un maillage raffiné et non régulier. La longueur moyenne des barres est 115 mm et l'erreur existant entre la surface et son maillage ne dépasse pas 0,009 mm. La figure (4.10) présente un détail de ce maillage. Même si ce nouveau maillage est très dense et non régulier, il ne ressemble pas encore à un maillage nécessaire pour un calcul par éléments finis. En effet, non seulement les barres n'ont pas une longueur uniforme après le raffinement, mais en plus une longueur moyenne de 115 mm ne permet pas de calculs

au delà de 0,6 kHz ce qui est loin des fréquences qui doivent être atteintes.

Le raffinement du maillage a joué son rôle et, sur les figures (4.11) et (4.12), les rayures ont disparus. L'amplitude du champ de l'optique géométrique semble correct et la projection ne fait pas apparaître de variations parasites suivant l'angle polaire transversalement à l'axe du cylindre.



FIG. 4.11: *Opposée de la partie imaginaire de l'amplitude sur le faisceau de rayon après 10 réflexions*



FIG. 4.13: *Partie imaginaire de l'amplitude sur le faisceau de rayon après 20 réflexions*

100 - 1000

FIG. 4.12: Projection du champ du à la dixième réflexion pour 1 kHz



FIG. 4.14: *Projection du champ du à la vingtième réflexion pourkHz*

Après la vingtième interaction sur la figure (4.13), l'amplitude du champ de l'optique géométrique présente une certaine forme d'erreur mais celle-ci reste négligeable par rapport à celle observée sur la figure (4.6). De plus, elle est uniforme, ce qui diminue son effet sur la projection présentée sur la figure (4.14). La discrétisation du problème semble modéliser correctement la propagation d'une onde sphérique dans un cylindre de révolution. Le champ rayonné à l'extérieur devrait donc être plus proche de celui attendu.

* * *

Grâce au choix des fréquences de calcul, l'analyse du champ rayonné aurait dû être simple. Cependant, les remarques faites aux paragraphes précédents ont assombri cette perspective. Une fois calculés, les rayonnements à 10 m pour les différentes fréquences sont tellement disparates qu'il ne semble pas pertinent de les présenter ici. En étudiant la convergence jusqu'à la prise en compte de 10 réflexions, aucune conclusion ni intrinsèque, ni à partir d'une décomposition modale ne se distingue. Le raffinement de maillage modifie en partie les résultats mais ne permet pas plus de construire une analyse claire.

Pour obtenir un champ rayonné correct, il est nécessaire de prendre en compte plus de 10 réflexions. Or, avec le premier maillage, cela conduit nécessairement à une solution "fausse" et, avec le deuxième maillage, comme, après 20 réflexions, la variation relative d'amplitude du champ sur la longueur du cylindre est inférieure à 1/5, l'erreur va être de plus en plus marquée. En prenant en compte la phase, il est possible que le champ total converge mais la méthode est alors utilisée loin en dehors de son domaine de validité et les solutions sont discutables.

Ce constat d'échec conduit à deux conclusions. D'abord, plus le nombre de réflexions est important plus il faut faire en sorte que le maillage ne permette pas l'accumulation de l'erreur. Ensuite, pour traiter les configurations "closes", l'utilisation d'une source ponctuelle n'est pas pertinente. Il faut qu'à la fin du calcul, le système atteigne un certain équilibre, c'est-à-dire qu'il n'y ait plus d'énergie rayonnant vers l'extérieur.

4.3 Des modes aux rayons

La méthode de "lancer de rayons" est avant tout une méthode propagative. Les rayons permettent de suivre le transport de l'énergie de la source vers l'infini. Or, pour les problèmes de propagation dans les conduits, les champs présentent une certaine forme de stationnarité. Les essais précédents ont montré que l'utilisation classique à l'aide de sources ponctuelles ne fournit pas de résultats satisfaisants. Il faut donc adapter la méthode pour tenir compte des particularités de cette forme de propagation.

L'analyse générale conduisant à l'utilisation des rayons est faite pour les hautes fréquences. Or, les solutions analytiques des problèmes de propagation dans les cylindres font apparaître une forme de propagation réelle ne dépendant que de façon indirecte de la fréquence. En fait, pour les hautes fréquences, le nombre des ondes se propageant est important mais, parmi celles-ci, certaines ont un comportement "basse fréquence" suivant l'axe. Comme la propagation ne se fait que dans les directions non bornées, il faut, pour décrire correctement les champs, trouver une description "hautes fréquences" dans une section transverse qui permette la propagation effective des rayons.

Comme pour l'analyse générale, il existe deux façons d'aborder la description à l'aide de rayons. La première est empirique et consiste à identifier les directions dans lesquelles l'énergie se propage en tenant compte de la géométrie du problème et indépendamment de la forme des solutions théoriques. La deuxième est analytique et cherche à approcher les solutions théoriques pour aboutir à des champs compatibles avec les rayons. Historiquement, l'approche empirique a bien sûr été la première à être utilisée pour décrire des problèmes simples. La méthode analytique développée ensuite ne donne pas encore de résultats entièrement satisfaisants.

Dans la suite, l'étude s'intéresse d'abord à l'analyse des problèmes en deux dimensions et aux travaux qui ont complété cette approche. Ensuite, des travaux plus récents sur les développements analytiques sont exposés. Enfin, la combinaison des deux approches permet de construire des champs décrivant, à l'aide de rayons, la propagation en trois dimensions.

4.3.1 Premières tentatives

La façon la plus simple de construire un champ de rayons à l'intérieur d'un conduit est d'essayer de créer une congruence se répétant par elle-même. En effet, dans un conduit rectiligne infini, les solutions doivent "demeurer les mêmes" au cours de la propagation le long de l'axe du conduit. L'équation (4.1) traduit cet aspect en identifiant deux comportements principaux et en déduisant deux équations. Un champ de rayons est autosimilaire si le champ incident se transforme en lui-même après quelques interactions avec les parois du cylindre.



FIG. 4.15: Paramètres géométriques pour la propagation d'un rayon (rouge) dans un conduit (noir) en deux dimensions

Dans un guide d'onde symétrique en deux dimensions, deux champs de rayons peuvent être envisagés en chaque point : l'un se propageant de bas en haut et l'autre de haut en bas. La condition de champ autosimilaire implique que le champ incident se trouve translaté après deux interactions avec les parois du guide. En fait, compte tenu de la symétrie du problème, les deux champs précédents se

transforme l'un en l'autre à l'interaction avec la paroi. La propagation en deux dimensions est illustrée

avec la figure (4.15).

Pour construire une congruence de rayons autosimilaire, il faut vérifier qu'après deux réflexions sur les parois du guide, la différence de phase entre le champ obtenu et le champ incident est un multiple de 2π et que l'amplitude est la même. Dans un guide d'onde symétrique et régulier en deux dimensions, cette condition se traduit par

$$(L/2)\sin\beta = 2a \text{ et } kL = 2m\pi \text{ ainsi } \beta = \arcsin\frac{m\pi}{ka}$$

$$(4.10)$$

où L est la distance le long du rayon, k le nombre d'onde et a la taille du guide d'onde. De plus, comme l'onde est plane, l'amplitude ne change pas le long des rayons.

D'autres approches ont essayé d'aller plus loin. En particulier, dans [¹²], l'auteur développe une méthode analytique pour déterminer les champs à l'intérieur d'un conduit dont les parois ne seraient plus rectilignes. Grâce à des arguments géométriques, il déduit non seulement les variations des champs à l'intérieur en fonction de la forme locale du conduit mais aussi la diffraction à une embouchure en fonction de sa forme.

Dans [⁴⁰], les représentations par modes et par rayons sont mêlées pour obtenir une formulation adaptée à la fréquence de l'excitation. Ainsi, le champ est décomposé en une partie se propageant lentement, calculée grâce à une description modale, et une partie se propageant rapidement, calculée grâce à une description utilisant quatre types de rayons. Les quatre types dépendent du nombre de réflexions sur les parois du conduit. Cette méthode hybride nécessite de connaître les positions émettrices et réceptrices et la décomposition se fait en fonction du nombre de réflexions nécessaires aux rayons pour atteindre la position réceptrice à partir de la position émettrice. Pour compléter la méthode, des faisceaux gaussiens peuvent être utilisés pour modéliser la propagation de groupes de modes.

4.3.2 A partir de l'expression explicite du champ dans un cylindre de section transverse circulaire

Pour un conduit cylindrique de section transverse circulaire, dans [²¹], l'auteur, à partir d'une expression classique décrivant les modes théoriques, déduit la structure hélicoïdale d'un champ de rayons et étudie le champ rayonnant à l'extérieur lorsque les rayons frappent l'arête à l'embouchure du conduit. En utilisant (4.1.1), un mode acoustique se propageant peut être écrit grâce à

$$p = \exp\left(-i(\omega t - m\phi - k_x x)\right) J_m(k_r r) \text{ avec } k_r a = \eta_{qm} \text{ et } k_x^2 = k^2 - k_r^2$$
(4.11)

où (r, ϕ, x) est un système de coordonnées cylindriques aligné avec l'axe du cylindre, m le paramètre de variation azimutale, 2a le diamètre du disque de section transverse et $J'_m(\eta_{qm}) = 0$. Il est évident que, pour $\eta_{qm} > ka$, il n'y a pas de k_x réel vérifiant les deux dernières équations de (4.11). Ces modes sont donc dit évanescents à cause de leur décroissance rapide suivant l'axe du cylindre. Comme, par ailleurs, $m < \eta_{qm}$ est une propriété des fonctions de Bessel, $r_m = m/k$ le rayon sonique et $r_{qm} = am/\eta_{qm}$ le rayon de la caustique jouent un rôle important pour la description de la propagation en conduit.

Compte tenu de la forme des fonctions de Bessel, il y a deux approximations différentes en fonction de la position par rapport à la caustique. Dans l'anneau où $r_{qm} < r$, la décomposition de la fonction de Bessel en deux fonctions de Hankel conduit à considérer le champ comme la superposition de deux ondes propagatives. Dans le cylindre central où $r_{qm} > r$, la décroissance exponentielle conduit à ne considérer qu'une seule onde hétérogène. L'approximation de Debye permet ainsi d'écrire, dans l'anneau externe,

$$p = \frac{1}{2}(p^+ + p^-) \text{ et } p^{\pm} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi m} \frac{r_{qm}}{\sqrt{r^2 - r_{qm}^2}}} e^{i\Psi^{\pm}}$$
 (4.12)

avec

$$\Psi^{\pm} = -\omega t + m\phi + k_x x \pm \{m(\tan(\gamma) - \gamma) - \frac{\pi}{4}\}$$
(4.13)

où $\tan(\gamma) = \sqrt{(r/r_{qm})^2 - 1}$ et, dans le cylindre intérieur,

$$p = \sqrt{\frac{1}{2\pi m} \frac{r_{qm}}{\sqrt{r_{qm}^2 - r^2}}} e^{i\Psi + \Phi}$$
(4.14)

avec

$$\Psi = -\omega t + m\phi + k_x x \text{ et } \Phi = m \left(\frac{\sqrt{r_{qm}^2 - r^2}}{r_{qm}} - (\operatorname{acosh}(\frac{r}{r_{qm}}))^{-1} \right)$$
(4.15)

L'équation (4.12) indique que, en première approximation, la partie propagative des modes peut être décrite à l'aide de l'Ansatz de l'optique géométrique. Les gradients de phase sont alors donnés par

$$\begin{cases} \partial_{\phi}\Psi = m\\ \partial_{x}\Psi = \sqrt{k^{2} - \frac{m^{2}}{r_{qm}^{2}}}\\ \partial_{r}\Psi = \pm m\sqrt{(\frac{1}{r_{qm}})^{2} - (\frac{1}{r})^{2}} \end{cases} \text{ et } \nabla\Psi = \partial_{r}\Psi\boldsymbol{e_{r}} + \frac{\partial_{\phi}\Psi}{r}\boldsymbol{e_{\phi}} + \partial_{x}\Psi\boldsymbol{e_{x}} \tag{4.16}$$

L'équation iconale pour une onde localement plane est donc bien vérifiée puisque $|\nabla \Psi| = k$. De plus,

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Psi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi}^2 \Psi + \partial_x^2 \Psi \text{ avec } \begin{cases} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Psi) = \pm \frac{m/r_{qm}}{\sqrt{r^2 - r_{qm}^2}} \\ \partial_{\phi}^2 \Psi = 0 \\ \partial_x^2 \Psi = 0 \end{cases}$$
(4.17)

donc

$$\nabla \cdot (p^2 \nabla \Psi) = \frac{1}{r} \partial_r (r p^2 \partial_r \Psi) + \frac{1}{r} \partial_\phi (\frac{p^2}{r} \partial_\phi \Psi) + \partial_z (p^2 \partial_z \Psi) = \frac{\pm 1}{r} \partial_r \left(\frac{2r r_{qm}}{\pi m \sqrt{r^2 - r_{qm}^2}} m \sqrt{\frac{1}{r_{qm}^2} - \frac{1}{r^2}} \right) = \frac{\pm 1}{r} \partial_r (\frac{2r_{qm}}{\pi}) = 0$$

$$(4.18)$$

et l'équation de conservation est aussi satisfaite.

Comme la partie propagative du champ modal approché semble se comporter comme la partie principale de l'Ansatz de l'optique géométrique, il pourrait être intéressant de l'utiliser comme un champ excitateur pour une propagation en conduit à base de rayons. Si x_0 est un point dans l'anneau externe, à partir de (4.16), avec $r_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$, deux champs de rayons peuvent être construits en fonction du signe de $\partial_r \Psi_0$.

Dans une série d'articles du même auteur, et suivant [²¹], une description plus complète du champ est donnée. Ces articles s'intéressent notamment au comportement en sortie de cylindre et aux effets de l'écoulement sur la propagation. Pour le premier aspect, la diffraction est décrite à l'aide de rayons et les caustiques du champ diffracté vers l'intérieur du cylindre sont analysées dans [²²].

4.3.3 Vers une congruence de rayons autosimilaire en trois dimensions

Dans un cylindre de révolution en trois dimensions, une condition identique à (4.10) peut être écrite. Cependant, les rayons peuvent former des trajectoires hélicoïdales linéaires par morceaux. Deux angles doivent donc être définis pour caractériser une telle propagation. Dans la suite, la trajectoire est construite dans un premier temps et les conditions imposées sur le champ donnent, dans un deuxième temps, la phase et l'amplitude dans une section transverse.



FIG. 4.16: *Propagation entre deux interactions avec la paroi*

Soit (a, θ_0, x_0) un point de la paroi et ν_0 le vecteur unitaire donnant la direction de propagation, les deux angles α et β sont définis par

$$\nu_{0} = \sin\beta(-\sin\alpha e_{r}(0) + \cos\alpha e_{\theta}(0)) + \cos\beta e_{x}$$
(4.19)

Pour un point (r, θ, x) sur la trajectoire et jusqu'à l'intersection suivante avec la paroi, une analyse géométrique permet d'écrire

$$\begin{cases} r = \frac{a\cos\alpha}{\cos(\theta - \theta_0 - \alpha)} \\ x = x_0 + L\cos\beta \\ L\sin\beta - a\sin\alpha = r\sin(\theta - \theta_0 - \alpha) \end{cases}$$
(4.20)

où L est la distance parcourue le long de la trajectoire. (r, θ, x) sont donc entièrement définis par (θ_0, x_0) et L. La figure (4.16) donne la géométrie de la propagation.

Lorsque la trajectoire atteint la paroi, r = a et les autres quantités valent alors

$$\theta = \theta_0 + 2\alpha \text{ et } L = \frac{2a\sin\alpha}{\sin\beta}$$
(4.21)

De plus, pour un rayon, il y a réflexion et $\nu_1 = \nu_0 - 2(\nu_0 \cdot e_r(L))e_r(L)$. En écrivant $e_r(0)$ et $e_{\theta}(0)$ en fonction de $e_r(L)$ et $e_{\theta}(L)$, le vecteur unitaire de la trajectoire réfléchie s'écrit

$$\nu_{1} = \cos\beta \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + \sin\beta(-\sin\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(0) + \cos\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}(0) - 2(-\sin\alpha\cos(2\alpha) + \cos\alpha\sin(2\alpha))\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(L))$$

$$= \cos\beta \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} + \sin\beta(-\sin\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(L) + \cos\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}(L))$$
(4.22)

La géométrie de la propagation demeure donc la même après une réflexion.

En utilisant les calculs précédents, une trajectoire complète peut être décrite. Pour une position atteignable par une trajectoire, c'est-à-dire une position telle que : $a \cos \alpha < r < a$, deux trajectoires venant de deux points différents de la paroi sont en fait possibles puisque

$$r = \frac{a\cos\alpha}{\cos(\theta - \theta_N - \alpha)} \Rightarrow \theta_N = \theta - \alpha \pm a\cos(\frac{a\cos\alpha}{r})$$
(4.23)

Dans les deux cas, la distance parcourue s'écrit de la même façon

$$L_N = \frac{a\sin\alpha + r\sin(\theta - \theta_N - \alpha)}{\sin\beta}$$
(4.24)

En remontant la trajectoire, à partir de la paroi, un certain nombre de réflexions sont prises en compte, la distance est alors donnée par

$$L_{1\to N} = N \frac{2a \sin \alpha}{\sin \beta} \text{ et } \theta_{1\to N} = -2N\alpha$$
(4.25)

Pour atteindre le point de départ, la dernière distance et le dernier angle valent

$$L_1 = \frac{a\sin\alpha - r_0\sin(\theta_0 - \theta_1 - \alpha)}{\sin\beta} \text{ et } \theta_0 = \theta_1 - \alpha \pm a\cos(\frac{a\cos\alpha}{r_0})$$
(4.26)

Au total, les quantités liées à la trajectoire s'écrivent

$$L_T = \frac{1}{\sin\beta} ((N+1)2a\sin\alpha \pm \sqrt{r^2 - (a\cos\alpha)^2} \pm \sqrt{r_0^2 - (a\cos\alpha)^2}) \text{ avec } x = x_0 + L_T \cos\beta$$
(4.27)

et

$$\theta_0 = \theta - 2(N+1)\alpha \pm \operatorname{acos}(\frac{a\cos\alpha}{r}) \pm \operatorname{acos}(\frac{a\cos\alpha}{r_0})$$
(4.28)

Au départ et à l'arrivée, les deux possibilités correspondent aux positions de part et d'autre du rayon minimum atteint sur un segment de la trajectoire.

En revenant aux rayons, la direction de propagation est dans la direction du gradient de phase. Celui-ci vaut donc, à la paroi,

$$\nabla \phi = k \sin \beta (-\sin \alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(0) + \cos \alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}(0)) + k \cos \beta \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}$$
(4.29)

Dans l'anneau atteignable, sur le même segment, le gradient reste constant mais il peut être décomposé sur des vecteurs locaux

$$\nabla \phi = k(\sin\beta(-\sin(\theta - \theta_0 - \alpha)\boldsymbol{e_r} + \cos(\theta - \theta_0 - \alpha)\boldsymbol{e_\theta}) + \cos\beta\boldsymbol{e_z}$$
(4.30)

soit

$$\partial_x \phi = k \cos \beta, \ \partial_\theta \phi = ka \cos \alpha \sin \beta \text{ et } \partial_r \phi = \pm k \sin \beta \sqrt{1 - (\frac{a \cos \alpha}{r})^2}$$
 (4.31)

En s'inspirant des calculs du (4.3.2) et par analogie en prenant $m = ka \sin \beta \cos \alpha$ et $r_{qm} = a \cos \alpha$, la phase peut s'écrire

$$\phi^{\pm} = k(a\theta\cos\alpha\sin\beta + x\cos\beta \pm (ka\cos\alpha\sin\beta(\tan\gamma - \gamma) - d^{\pm})$$
(4.32)

avec $\tan \gamma = \sqrt{(r/(a \cos \alpha))^2 - 1}$. Le signe correspond à la partie du segment sur laquelle se situe le point. Avant le minimum, la phase est croissante et le rayon décroissant; après, la phase est toujours croissante mais le rayon aussi. En fait, comme une infinité de trajectoires ayant les mêmes angles, mais des positions de départ différentes, peuvent être construites, les deux phases coexistent en chaque point de l'anneau. Cette remarque peut aussi s'expliquer par la construction des deux trajectoires du (4.23) à partir d'un seul point.

Grâce aux calculs du (4.3.2) qui ne dépendent pas de la valeur de m ni de r_{qm} , l'amplitude peut être définie et le champ s'écrit alors comme au (4.12). Cependant, contrairement à cette dernière expression, il faut encore choisir α , β , d^+ et d^- pour que le champ soit autosimilaire. Pour cela, si r et θ sont fixés, en faisant varier x et en retranchant à la phase les variations suivant x, celle-ci doit rester constante.



FIG. 4.17: *Propagation faisant intervenir 3 interactions avec la paroi et schéma aplani*

A partir d'une section transverse en x_0 , des rayons sont tracés pour atteindre les positions successives le long de l'axe ainsi défini. Cette démarche est décrite par la figure (4.17) où les trajectoires hélicoïdales tournant autour du cylindre central ont été aplanies de telle sorte qu'aux points de réflexion les changements de direction de propagation ne sont pas représentés, et donc que la trajectoire est rectiligne.

Sur les portions de l'axe pour lesquels tous les rayons viennent de la même moitié du même segment de départ, la phase est bien constante. Il n'y a donc de problèmes possibles qu'aux interfaces. Au passage de la caustique, il faut

$$\phi^+(r_{qm}) = \phi^-(r_{qm}) - \pi/2 - 2q\pi \tag{4.33}$$

et, sur la paroi, il faut $\phi^+(a) = \phi^-(a)$. Ces deux relations conduisent à $d^- + d^+ = \pi/2 + 2q\pi$ et $ka \sin \beta (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = \pi/4 + q\pi$. Ainsi, il faut

$$\tan \alpha - \alpha = \frac{\pi}{m} (\frac{1}{4} + q) \text{ et } d^{\pm} = \pi (\frac{1}{4} + q)$$
(4.34)

Pour m = 0, l'expression dégénère avec $\alpha = \pi/2$, d^{\pm} inchangés et $ka \sin \beta = \pi/4 + q\pi$.



FIG. 4.18: Comparaison de la fonction de Bessel (trait plein) et de l'approximation (trait pointillé) pour a = 250 mm en fonction de r et pour m = 0 et q = 2 (bleu), 3 (rouge), 4(vert) et 5 (magenta) à gauche, pour m = 1 et q = 1 (bleu), 2 (rouge), 3 (vert) et m = 2 et q = 1 (magenta), 2 (cyan) et 3 (noir)

Finalement, le champ de pression à l'intérieur du cylindre est donné par (4.12) mais η_{qm} est remplacé par $ka \sin \beta \operatorname{soit} \pi(1/4 + q)/(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$. Ces valeurs réalisent en fait une bonne approximation des η_{qm} pour q > 1. Les figures (4.18) comparent les fonctions de Bessel et leurs approximations. Alors que les modes correspondant aux deuxièmes ou aux troisièmes zéros sont, en dehors du voisinage de la caustique, correctement approchés, les modes correspondant aux premiers zéros en bleu et magenta à droite sont mal approchés pour tous les angles. L'association de l'approche analytique et de l'approche empirique a permis de construire des champs de rayon décrivant chacun un mode se propageant dans un cylindre de révolution infini. Ces champs de rayons présentent les propriétés nécessaires à leur utilisation comme source pour une méthode de "lancer de rayons". En effet, contrairement aux champs décrits par Chapman, ils ont été construits de façon à se répéter de façon autosimilaire en se propageant.

Pour compléter la description, il faut prendre en compte les aspects diffractifs. A l'extrémité du cylindre, l'application de la Théorie Géométrique de la Diffraction fournit les champs nécessaires et les travaux de Chapman peuvent servir de référence. Ces travaux permettent par ailleurs de prendre en compte un écoulement. La diffraction au voisinage des caustiques peut être traitée, quant à elle, grâce aux faisceaux gaussiens utilisés par Felsen. La combinaison de ces deux séries de travaux permet d'achever la description de l'approximation à l'aide de rayons de la propagation dans un cylindre de révolution.

* * *
4.4 Propagation "effective" de modes dans un cylindre de révolution

Pour décrire correctement la propagation dans un conduit proche d'un cylindre de révolution, il peut être efficace de propager les modes propres de cette géométrie. Les propriétés des modes propres permettent alors d'espérer obtenir un champ relativement pertinent. Pour la méthode de "lancer de rayon", la possibilité de propager les modes un par un pallierait le relatif échec de l'utilisation des sources classiques.

Les analyses théoriques ont permis d'élaborer des champs de rayons représentant chacun un mode et vérifiant les propriétés nécessaires à la propagation "numérique". Leur utilisation effective consiste à construire des dioptres sources qui les décrivent complètement. Ces dioptres utilisés comme faisceaux incidents dans un calcul de "lancer de rayons" doivent fournir une description de la propagation pour chaque mode.

L'utilisation des champs de rayons construits au (4.3.3) sur des faisceaux incidents nécessite de vérifier que leur propagation dans un cylindre de révolution fournit effectivement les champs attendus. Dans la suite, l'étude des faisceaux et de leurs projections permet, d'abord, de valider la propagation des champs et la conservation de leurs propriétés. Ensuite, l'étude des rayonnements vers l'extérieur juge la représentativité des champs approchés et conclue la validation. Pour être le plus complet possible, plusieurs modes différents sont propagés pour différentes fréquences dans les géométries décrites au (4.2).

4.4.1 Étude des faisceaux propagés

L'étude de la propagation des faisceaux doit valider :

- le choix du dioptre initial qui, en fonction des angles de propagation, doit fournir un éclairage continu de la paroi du cylindre au fur et à mesure des interactions,
- le calcul de l'amplitude en vérifiant qu'elle est uniforme sur la paroi du cylindre et qu'elle est correctement propagée jusque sur la section transverse à l'extrémité du cylindre
- et le calcul de la phase qui doit fournir une phase continue et variant conformément au mode considéré aussi bien sur la paroi du cylindre que sur la section transverse.

Pour cette étude, pour être représentatif de l'ensemble des situations rencontrées, deux modes sont considérés. La propagation axisymétrique autour de l'axe du cylindre est vérifiée grâce au mode (0; 2) qui correspond au second zéro de la fonction de Bessel pour un paramètre azimutal nul. Dans ce cas, la caustique dégénère et se réduit à l'axe du cylindre. Le mode (1; 2) qui correspond au second zéro de la fonction de Bessel pour un paramètre azimutal nul. Dans ce cas, la caustique dégénère et se réduit à l'axe du cylindre. Le mode (1; 2) qui correspond au second zéro de la fonction de Bessel pour un paramètre azimutal unité vérifie la propagation hélicoïdale. La caustique est alors un cylindre de même axe que la géométrie, le rayon étant donné par les paramètres du calcul.

La propagation à la fréquence 4 kHz soit ka = 18,5 est essentiellement étudiée. Cependant, pour faciliter la projection des champs, la propagation à la fréquence 1 kHz soit ka = 4,6 est aussi utilisée. La propagation se fait dans le maillage grossier du (4.2) pour estimer les erreurs dues à la discrétisation.

Le rapport entre la partie radiale et la partie longitudinale des vecteurs d'onde initiaux pour les modes et les fréquences calculés induit une propagation très rapide. En quatre ou cinq interactions, le cylindre est entièrement éclairé et tous les rayons ont traversé la section transverse à l'extrémité opposée. En fixant à 20000 le nombre minimal de rayons devant intersecter la surface, le calcul coûte environ une minute de temps CPU sur un processeur Power4 1,5 GHz et 300 Mo de mémoire vive. Ce coût ne prend pas en compte le temps du post-traitement qui varie fortement en fonction du type et de la quantité de données extraites.



FIG. 4.19: Faisceau incident en forme d'anneau

Pour la propagation dans un cylindre de révolution, deux choix principaux sont possibles pour le dioptre source : un anneau ou un disque. Le rayon de l'anneau doit être compris entre le rayon du cylindre solide et le rayon du cylindre marquant la caustique. Sa longueur doit être ajustée en fonction de l'angle de propagation de sorte que les traces successives de la propagation de l'anneau-faisceau éclaire le cylindre de proche en proche sans discontinuité et sans chevauchement. Pour cela, il faut prendre comme longueur

$$L\cos\beta = 2a\sqrt{1 - (\frac{m}{\eta_{qm}})^2}\sqrt{(\frac{ka}{\eta_{qm}})^2 - 1}$$
(4.35)

Ce choix de dioptre présente l'avantage de ne pas avoir à se soucier de l'intersection de la caustique et du dioptre initial. Cependant, il nécessite pour les calculs sur des configurations industrielles d'avoir le volume suffisant pour contenir le dioptre initial sans qu'il y ait d'intersections parasites avec la géométrie diffractante. La figure (4.19) présente un tel dioptre pour la propagation du mode (0; 2) avec ka = 18, 5.



FIG. 4.20: Faisceau incident en forme de disque

Pour l'initialisation par un disque, le rayon de ce dernier doit être le plus proche possible du rayon du cylindre solide mais il doit tenir compte du maillage qui réduit par endroits la distance à l'axe. Pour prendre en compte les deux champs qui constituent un mode à l'intérieur du cylindre, le disque doit être dédoublé. Comme la caustique est centrée autour de l'axe, sur les deux disques, les nœuds présents à l'intérieur du cylindre-caustique doivent être éliminés.

Au cours de la propagation, comme les deux faisceaux se propagent indépendamment l'un de

l'autre, l'absence de lien entre les deux maillages et l'utilisation d'un rayon plus petit que le rayon "théorique" de la géométrie vont induire un éclairage "zébré" de la paroi du cylindre, les traces des faisceaux seront séparées par un interstice parasite non éclairé. Comme ce type de dioptre source n'occupe qu'une section transverse du conduit, il est plus facile à utiliser dans des configurations industrielles. Il faut donc mesurer l'erreur supplémentaire que son utilisation induit sur le champ rayonné. La figure (4.20) présente un tel dioptre pour la propagation du mode (1; 2) avec ka = 18, 5.

La figure (4.21) permet d'appréhender la forme du faisceau pour les modes de paramètre azimutal nul. La propagation a été initialisée par un dioptre disque et le faisceau s'est propagé sur toute la longueur du cylindre. A la dernière interaction, une partie du faisceau interagit avec la paroi du cylindre et une autre partie sort en passant au travers de la section transverse.



FIG. 4.21: Phase sur un détail du maillage du faisceau du mode (0, 2) lorsqu'il rencontre la section transverse à l'extrémité du cylindre

Les champs du mode présentant une symétrie cylindrique, la partie du faisceau atteignant la paroi du cylindre est maillée régulièrement et, sur celuici, la phase augmente linéairement suivant l'axe du cylindre. Entre les deux parties du faisceau les éléments à cheval entre la section transverse et la paroi ont été éliminés parce qu'ils appartiennent à deux dioptres différents. La partie du faisceau rencontrant la section transverse est séparée en deux et l'interstice est lié à la traversée du dioptre initial par la caustique. La densité du maillage du faisceau est fonction de la distance à la caustique, c'est-à-dire, pour ce mode, à l'axe du cylindre. Dans la section

transverse, la phase est uniforme car elle ne dépend que de l'abscisse le long de l'axe du cylindre.



FIG. 4.22: Amplitude sur les deux parties du faisceau de la figure (4.21) éclairant la paroi du cylindre (gauche) et la section transverse (droite)



FIG. 4.23: Phase sur plusieurs traces successives laissées par le faisceau du mode (1; 2) lors de son interaction avec la surface maillée



FIG. 4.24: *Amplitude sur un détail du maillage du faisceau de la figure (4.23)*

Sur les figures (4.22), en dehors de l'erreur due à la discrétisation grossière du cylindre, l'amplitude est constante sur la partie du faisceau interagissant avec la paroi du cylindre et son module augmente lorsque la distance à la caustique diminue sur la partie éclairant la section transverse. Cette remarque valide en partie le calcul de l'amplitude sur le faisceau. En effet, il semble qu'elle ait été correctement propagée sur toute la longueur du cylindre.

Sur la figure (4.23), la phase semble correctement calculée le long de la propagation. Elle augmente, indépendamment de la partie du faisceau considéré, linéairement en fonction de l'abscisse le long de l'axe du cylindre et de l'angle polaire autour de celui-ci. Sa continuité modulo 2π sur l'ensemble du faisceau implique une combinaison correcte de l'angle de propagation et de son calcul sur la surface de départ.

Sur la figure (4.24), l'erreur commise sur l'amplitude permet de comprendre comment les rayons s'enroulent autour de la caustique. En effet, l'amplitude devrait ne dépendre que de la distance à la caustique, mais, l'approximation géométrique liée au maillage induit des rayures identiques à celles de la figure (4.22). Lorsque le faisceau éclaire la section transverse à l'extrémité du cylindre, il apparaît que cette erreur est propagée le long des rayons qui s'enroulent autour de la caustique. Le module de l'amplitude augmente alors fortement jusqu'à atteindre son maximum lorsque le rayon tangente la caustique.





FIG. 4.25: Projection du champ du mode (0; 2) à la fréquence 4 kHz soit ka = 18,5 sur une partie du cylindre et sur la section transverse maillée à l'extrémité

FIG. 4.26: *Rapport entre le champ initial et le champ projeté après la propagation sur une section transverse*

Malgré les erreurs liées à la projection, les figures (4.25), (4.26), (4.27) et (4.28) permettent de finir la validation de la propagation des faisceaux représentant les modes. Le champ du mode (0, 2) sur la figure (4.25) ne dépend effectivement que de l'abscisse le long de l'axe du cylindre et de la distance à cet axe. La jonction entre deux traces du faisceau aux alentours de -3000 marquée par une légère absence d'information prouve d'une part, que la phase évolue continûment entre celles-ci et, d'autre part, que le cylindre est presque entièrement éclairé par les traces successives du faisceau et ce sans chevauchement.

L'amplitude est effectivement correctement propagée puisque, sur la figure (4.26), le rapport entre les amplitudes sur le dioptre initial et sur la section transverse à l'autre extrémité du cylindre est presque constant sur la totalité de la section et vaut $\pi/2$. L'utilisation d'un disque comme dioptre initial explique les variations de ce rapport au voisinage des discontinuités du faisceau rencontrant la section transverse.

Sur la figure (4.27), le calcul d'une fréquence plus basse augmente les interactions entre le faisceau et la paroi du cylindre. De nombreuses jonctions entre les traces successives du faisceau sont visibles. Comme la figure (4.23) pouvait le laisser supposer, les variations sur la paroi du cylindre s'enroulent correctement autour de l'axe. En sortie de cylindre, en dehors des erreurs due à la projection et des deux interstices annulaires où il manque des rayons, le champ présente les deux lobes correspondant au paramètre azimutal unité.



FIG. 4.27: Projection du champ du mode (1; 2) à la fréquence 1 kHz soit ka = 4,6 sur une partie du cylindre



FIG. 4.28: Projection du champ du mode (1; 2) à la fréquence 1 kHz soit ka = 4,6 sur la section transverse maillée à l'extrémité du cylindre

Les erreurs de projection qui sont particulièrement importantes sur la section transverse sur les figures (4.25), (4.26) et (4.27) sont liées à la forme particulière du front de l'onde propagée. En effet, elle ne peut en aucun cas être considérée comme étant à peu près plane ou sphérique dans la section transverse. Cette constatation explique aussi la médiocre performance de l'interpolation sur de tels faisceaux. Pour les calculs de propagation de modes, la totalité des rayons doit être lancée au départ. Ceci ne pose pas vraiment de problèmes puisqu'il n'y a pas de perte de rayons au cours de la propagation. A l'extrémité, si la propagation est poursuivie, le déploiement du front d'onde en espace libre permet alors de réutiliser l'interpolation.

4.4.2 Étude du rayonnement vers l'extérieur

A partir des champs récupérés sur la section transverse, le rayonnement vers l'extérieur est calculé à 10 m autour de l'embouchure par une intégrale de Helmholtz-Kirchhoff comme cela est expliqué au (4.2.1). Cette méthode de calcul correspond à l'approximation "conduit bafflé" évoquée dans les paragraphes précédents. La composante du vecteur d'onde suivant l'axe pour les modes (0; 2), (0; 3) et (2; 2) induit des angles de propagation, respectivement, de $12, 25^\circ$; $22, 47^\circ$ et $21, 46^\circ$ à ka = 18, 5 et $4, 87^\circ$; $8, 8^\circ$ et $8, 4^\circ$ à ka = 46, 2 ce qui correspond à 4 et 6 réflexions à ka = 18, 5 ou 2 et 3 à ka = 46, 2.

Sur les figures (4.33), les résultats obtenus en utilisant les deux maillages et les deux types de dioptre initial sont comparés à l'approximation analytique du conduit bafflé. Sur les quatre figures, la forme du lobe principal est presque identique pour les quatre estimations. Le calcul à l'aide du maillage grossier est un peu moins bon mais la différence reste inférieure à 2 dB.

Les estimations des lobes suivants sont différentes. Pour ka = 18,5 et pour le mode (0;2) sur la figure (**a**), l'estimation analytique des second et quatrième lobes est plus élevée que les valeurs données par la méthode de rayons alors que les niveaux pour le troisième et le dernier sont presque identiques. Une telle différence existe aussi pour l'estimation des zéros : le second et le quatrième ne sont pas positionnés aux mêmes angles par les quatre calculs alors que le troisième et le cinquième ont des positions à peu près précises. Sur la figure (**c**) à la même fréquence mais pour le mode (0;3), le comportement semble identique, si ce n'est qu'un lobe important s'est intercalé de la même façon pour les quatre calculs entre



FIG. 4.33: Rayonnement pour ka = 18, 5 à gauche et ka = 46, 2 à droite des modes (0; 2) en haut et (0; 3) en bas avec un disque comme dioptre initial pour le maillage grossier (bleu) ou le maillage dense (vert), avec un cylindre comme dioptre initial pour le maillage dense (rouge) et à partir de l'approximation analytique (noir)

l'angle nul et le lobe principal.

Pour ka = 46, 2 sur les figures (**b**) et (**d**), l'analyse est plus difficile. Globalement, un zéro sur deux est positionné différemment par l'approximation analytique et par les calculs par méthode de rayons, les autres étant positionnés à des angles communs aux deux approximations. Ce décalage de certains zéros semble induire en alternance une surestimation et une sous-estimation des lobes pour un type de calcul par rapport à l'autre.



FIG. 4.34: Rayonnements pour ka = 46, 2 du mode (2; 2) (même code de couleur que pour la figure (4.33))

La figure (4.34) complète l'analyse du rayonnement après une propagation rectiligne en s'intéressant au mode (2; 2). Les différences entre le calcul analytique et le calcul par "lancer de rayons" sont encore plus marquées. Il est intéressant de constater que, comme sur les figures (4.33), il y a une certaine cohérence entre les solutions données par la méthode numérique par rapport à la solution analytique. Les niveaux des différences conduisent à penser que l'approximation est certes meilleure avec un cylindre comme dioptre initial et en utilisant un maillage dense mais les résultats obtenus avec un disque et un maillage grossier sont satisfaisants compte tenu des éléments de comparaison disponibles.

Deux remarques peuvent être faites pour conclure la comparaison entre le calcul analytique et l'estimation numérique obtenue en propageant les dioptres sources. D'une part, les niveaux des lobes secondaires représentent entre 10 et 20 % du lobe principal en amplitude et plus en énergie. La pertinence de toutes les approximations peut donc être remise en cause pour l'estimation de ces lobes. Comme, avec la méthode de "lancer de rayons", seule la partie principale des champs est recherchée, les résultats sont satisfaisants.

D'autre part, le nombre d'interactions avec la surface réfléchissante dépend à la fois du mode et de la fréquence. En particulier, plus le mode est d'ordre élevé ou la fréquence basse, plus la composante du vecteur d'onde suivant l'axe est réduite. Mais, les nombres de réflexions nécessaires pour propager les champs dans les configurations calculées restent "raisonnables" par rapport à la propagation de la source ponctuelle. La fréquence intervient donc essentiellement au moment du calcul de rayonnement à partir de la section transverse et un effort supplémentaire sur ce calcul doit sans doute être fait.

* * *

Grâce à l'étude des faisceaux d'une part et des rayonnements d'autre part, la propagation des modes à l'aide de rayons a pu être validée. L'éclairage successivement de tout le conduit par des champs cohérents montre que la combinaison de dioptres et de champs sources adaptés permet de construire un champ baignant l'ensemble du volume et qui soit stationnaire dans la section transverse et propagatif suivant l'axe du cylindre. De plus, la propagation "numérique" se fait relativement rapidement sans altération notable même avec un maillage grossier. Par ailleurs, même si le rayonnement à l'extérieur est différent de l'approximation analytique communément utilisée, la partie principale de l'énergie est correctement répartie suivant l'angle d'observation.

Pour améliorer la précision, de nombreuses pistes ont été évoquées en prenant en compte une partie de la diffraction. L'utilisation d'une discrétisation par faisceaux élémentaires devrait fournir à la fois une meilleure approximation de chacun des modes et la possibilité de faire propager des trains de modes grâce à un choix judicieux de la partie imaginaire de la hessienne du front d'onde. Par ailleurs, la propagation dans une géométrie "épaisse" et la prise en compte de la forme de l'embouchure grâce à l'ajout de champs diffractés permettrait d'améliorer le modèle même si la répartition globale ne serait que très peu affectée.

Avec des dioptres rayonnants représentant totalement chaque mode, des études de propagation de mode dans des géométries quelconques peuvent être envisagées. Se pose alors le problème du couplage. En effet, dans un cylindre à section constante, le champ excitateur se propage dans un sens. Il n'y a donc pas d'influence de la géométrie aval sur le champ en amont. Dans une géométrie quelconque, une partie du champ peut être réfléchie vers l'amont et il faut alors s'interroger sur l'influence de celle-ci dans le rayonnement total. En fait, le problème n'est pas propre aux rayons même si la méthode le met particulièrement en valeur. Est-ce la présence d'un morceau de conduit rectiligne suffisamment grand dans la première partie de la propagation qui permet de justifier la décomposition du champ excitateur sur les modes ou est ce la nature de la source ? Dans le premier cas, le champ renvoyé de l'aval vers l'amont modifie la répartition de l'énergie sur les modes alors que, dans le second cas, il faut modéliser la réaction du fond amont lorsqu'il est éclairé par ce champ.

4.5 Effets diverses sur la propagation dans un cylindre à section transverse circulaire constante

La méthode décrite tout au long de ce mémoire permettant de prendre en compte à la fois un écoulement non uniforme et des matériaux à impédance, il semble intéressant d'esquisser une étude plus complète sur la même base géométrique. Celle-ci cherche non seulement à modéliser des situations plus proches des situations industrielles, mais aussi à tester les limites de l'approximation.

Les paragraphes suivants analysent les résultats obtenus avec plusieurs configurations utilisant un cylindre de section transverse circulaire. La première série compare les résultats obtenus en prenant en compte une impédance sur la paroi et un écoulement uniforme. La deuxième esquisse une analyse de ce que pourrait être l'effet de la présence d'une couche limite dans le cylindre.

4.5.1 Impédance et écoulement uniforme

Les deux séries de calculs qui ont permis d'obtenir les résultats suivants se voulaient représentatives de situations réalistes. Ainsi, l'impédance choisie vaut $\zeta = 2$ et la vitesse est dirigée suivant l'axe du cylindre mais dans le sens contraire par rapport à la propagation du mode. Le nombre de Mach vaut M = 0, 5. Pourtant, dans le cas de l'impédance, une partie imaginaire aurait pu être prise en compte ce qui ressemblerait plus au comportement d'un matériau réaliste. Dans le cas de l'écoulement, aucune hétérogénéité n'a été prise en compte et le rayonnement en sortie de conduit est fait à l'aide de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz sans effet d'écoulement.

Du point de vue des rayons, la prise en compte de l'impédance n'introduit pas de modifications particulières. Seule l'amplitude du champ réfléchi est modifiée. Par contre, l'introduction d'un écoulement nécessite, pour être cohérent de modifier les champs et le dioptre initial les supportant. Dans le cas des calculs dans un cylindre ayant une section transverse constante, il semble évident que les modes à l'initialisation doivent prendre en compte l'écoulement ; dans une géométrie plus complexe, un tel diktat peut être remis en cause.

Pour analyser les résultats obtenus en introduisant une impédance, il faut rappeler que l'amplitude sur le dioptre initial dépend du mode considéré. En effet, aucune normalisation n'a été faite et, sur la paroi en r = a, l'amplitude du mode vaut $\sqrt{2/(\pi \eta_{qm})}$ avec η_{qm} la valeur calculée au (4.3.3), remplaçant le zéro de la dérivée de la fonction de Bessel.

Par ailleurs, le coefficient de réflexion classique s'écrit $\mathcal{R} = (\zeta \cos \theta_i - 1)/(\zeta \cos \theta_i + 1)$ avec ζ l'impédance réduite et θ_i l'angle entre le vecteur d'onde incident et la normale. Ainsi, comme cela est évoqué dans [⁴⁹], l'atténuation d'un mode due à la présence d'une impédance dépend de l'angle avec lequel le champ incident rencontre la surface du cylindre et donc de sa position parmi les modes se propageant par rapport au premier mode non propagatif.

Concrètement, l'amplitude à la fin de la propagation dépend aussi du nombre de réflexions nécessaire pour parcourir toute la longueur du cylindre. Or, ce nombre dépend aussi de l'angle d'incidence. L'atténuation est donc fonction de la fréquence, de η_{qm} et de la longueur de propagation par l'intermédiaire du coefficient et du nombre de réflexions. Pour les résultats présentés ici, comme les angles valent, respectivement pour les modes (0; 3) et (2; 2), 67, 53° et 68, 54° pour ka = 18, 5 et 81, 2° et 81, 6° pour ka = 42, 6, les valeurs des coefficients de réflexion sont -0, 14 et -0, 155 pour ka = 18, 5 et -0, 53 et -0, 55 pour



FIG. 4.39: Rayonnements pour ka = 18, 5 à gauche et ka = 46, 2 à droite des modes (0; 3) en haut et (2; 2) en bas sans écoulement (bleu), avec une impédance $\zeta = 2$ (vert) et avec un écoulement uniforme M = 0, 5 (rouge)

Sur les figures (4.39-**a**) et (4.39-**c**), les amplitudes des résultats obtenus avec une impédance ont été multipliées respectivement par $2 \cdot 10^5$ et $2 \cdot 10^4$ pour que la comparaison soit plus aisée. Il est évident que la longueur de la surface traitée n'influence pas de la même façon les différents modes, mais les niveaux pour chacun semblent en accord avec l'analyse rapide faite au paragraphe précédent. Sur les figures (4.39-**b**) et (4.39-**d**), les niveaux sont bien globalement diminués de 20 dB ce qui correspond à une atténuation de 0, 1. Une analyse plus précise nécessiterait une comparaison avec une autre méthode de calcul mais les transferts entre les modes dus à l'impédance empêche l'utilisation de méthodes analytiques simples.

L'analyse du champ avec écoulement uniforme est plus simple que l'analyse du champ avec impédance. En effet, La construction du dioptre initial doit prendre en compte l'effet de la convection dans le calcul des vecteurs d'ondes et des quantités annexes. Mais, comme le rayonnement se fait à l'aide de la fonction de Green sans prendre en compte l'écoulement à l'extérieur du conduit, les niveaux sont simplement multipliés par un facteur commun à tous les modes et ne dépendant que du nombre de Mach.

Pour faire une analyse croisée avec les résultats de [⁴⁹], il faudrait prendre la fonction de Green convectée. Mais l'intérêt est ici de valider la propagation des rayons en dehors du rayonnement par intégrale de Kirchoff-Helmholtz et les résultats présentés confirment une prise en compte correcte de l'écoulement. Pour une configuration industrielle, le champ sortant d'un conduit interagira en partie avec le fuselage et l'écoulement autour de celui-ci avant de pouvoir être récupéré par un dioptre permettant le calcul d'un rayonnement en atmosphère homogène. Il faudra donc, à terme, valider un tel calcul.

4.5.2 Couche limite

Afin de se rapprocher d'une configuration industrielle, une couche limite analytique dont le champ de vitesse est donné par un profil de Polhausen est prise en compte au voisinage de la paroi du cylindre. Le nombre de Mach au centre du cylindre est 0, 3 et l'épaisseur de la couche limite est $\delta = 0, 125$ m soit un demi-rayon, le nombre de Reynolds est ainsi de l'ordre de $3 \cdot 10^{-7}$. Dans un premier temps, les trajectoires des rayons sont étudiées pour ka = 18, 5 et dans un deuxième temps, les niveaux de rayonnement pour ka = 18, 5 et ka = 46, 2 sont comparés à ceux obtenus avec un écoulement uniforme avec M = 0, 5.

Pour les trajectoires et l'évolution des jacobiens le long de celles-ci, comme les rayons se propagent en remontant le cylindre dans le sens négatif, la propagation se fait de droite à gauche sur les figures pour lesquelles l'axe x est l'abscisse. Pour les rayonnements, même si le nombre de Mach au centre n'est pas le même, la comparaison est pertinente puisque le rayonnement se fait en atmosphère homogène et sans écoulement et que les solutions pour un nombre de Mach uniforme égal à 0,3 sont presque identiques aux solutions à M = 0,5 corrigées d'un coefficient multiplicatif adéquat.



FIG. 4.40: Trajectoires de 10 rayons pour le mode (0;3) et ka = 18,5 dans le plan (x, z) lorsqu'ils interagissent avec une couche limite (attention à la distorsion importante d'échelle entre les axes x et z)

FIG. 4.41: Evolution de la partie réelle du jacobien pour les rayons du (4.40) en fonction de la progression de ceux-ci de long de l'axe du cylindre

Les trajectoires des rayons sur la figure (4.40) et l'évolution de la partie réelle du jacobien sur la figure (4.41) laissent penser que les rayons sont réfractés par la couche limite avant d'atteindre la surface réfléchissante. A la place d'une cassure nette du vecteur d'onde, les variations sont continues. Les différences de trajectoires entre les rayons sont dues aux angles polaires de départ. Elles passent toutes par l'axe du cylindre mais sont contenues dans des plans différents. Au départ, les dix rayons se situent sur le même anneau, l'évolution devrait donc être la même pour tous les jacobiens. Le facteur de départ n'étant pas important, il semble que cela soit à peu près le cas.



FIG. 4.46: Trajectoires de 10 rayons pour le mode (2; 2) et ka = 18, 5 dans le plan (y, z) en haut et dans le plan (x, z) en bas lorsqu'ils interagissent avec une couche limite à gauche et sans écoulement à droite (attention à la distorsion importante d'échelle entre les axes x et z)

Pour bien comprendre les trajectoires des rayons lorsque le mode (2; 2) interagit avec la couche limite sur les figures (4.46-**a**) et (4.46-**c**), les figures (4.46-**b**) et (4.46-**d**) présentent les trajectoires des rayons pour le même mode mais sans écoulement. Les rayons sur la figure (4.46-**b**), après être partis de positions situées entre la caustique cylindrique et la paroi solide, se réfléchissent plusieurs fois sur la dernière en s'enroulant autour de la première. Les rayons sur la figure (4.46-**a**) partent des mêmes positions mais sont réfractés avant d'atteindre la surface réfléchissante. Ce comportement est retrouvé en comparant les figures (4.46-**c**) et (4.46-**d**) mais, en plus, il apparaît que le nombre d'oscillations suivant l'axe x augmente puisque les rayons vont moins loin dans les plans transverses.

Comme la propagation dans une couche limite au dessus d'une plaque plane au (3.3.1) l'a montré, il existe un angle pour lequel les rayons viennent tangenter la surface réfléchissante. Pour les rayons dont l'angle entre le vecteur d'onde et la normale est plus petit, il y a réflexion et pour les autres, il y a réfraction. Il est donc naturel de se demander si, pour certains modes, les rayons sont réfléchis.



FIG. 4.47: Trajectoires de 10 rayons pour le mode (2; 5) dans le plan (y, z) à gauche et dans le plan (x, z) à droite lorsqu'ils interagissent avec une couche limite (attention à la distorsion importante d'échelle entre les axes x et z)

Après quelques essais, il est apparu que les rayons du mode (2; 5) pour ka = 18, 5 présentent un comportement particulier. En effet, en étudiant les figures (4.47), il semble que les rayons soient à certains endroits réfractés et à d'autres réfléchis. Il faudrait étudier l'évolution des trajectoires en fonction de la fréquence pour estimer si le maillage à une influence importante sur les trajectoires ou si, malgré une intersection incertaine avec la surface réfléchissante, il y a une certaine continuité dans le comportement. En fait, un autre problème plus important rend non pertinente cette remarque mais il faut garder à l'esprit qu'à chaque fois que des rayons sont tangents à une surface, il faut se demander comment la discrétisation influence la solution.



FIG. 4.48: Evolution de la partie réelle du jacobien pour les rayons du mode (2;2) à gauche et du mode (2;5) à droite en fonction de la progression de ceux-ci le long de l'axe du cylindre

En comparant les jacobiens sur les figures (4.48), une instabilité apparaît de manière évidente. Alors que l'évolution du jacobien est identique pour tous les rayons du mode (2; 2) sur la figure de droite, l'évolution à partir de -1000 sur la figure de gauche induit une décorrélation entre les rayons et une augmentation très importante des niveaux. Avant -2000, les jacobiens évoluent autour de 0 pour des valeurs dont le module est inférieur à 500. Comme les cassures correspondent à des réflexions, il semble qu'il y ait une succession d'interactions avec la surface réfléchissante mais que la valeur moyenne sur un cycle diminue jusqu'à être presque nulle et augmenter à partir de 0. A la cinquième réflexion suivante, les comportements se désunissent et les réflexions laissent la place à des réfractions. L'analyse devrait être poursuivie en vérifiant la cohérence des solutions avec d'autres travaux et notamment ceux de S. W. Rienstra. Il faudrait alors déterminer la part numérique et la part physique de l'instabilité, définir l'ensemble des modes affectés et trouver un moyen pour prévenir un tel comportement. Pour l'instant, cette instabilité empêche l'estimation du rayonnement à l'extérieur du cylindre dans la configuration critique.

Les figures (4.53) présentent les niveaux du rayonnement vers l'extérieur des champs obtenus sur la section transverse à la fin de la propagation avec couche limite, avec champ uniforme et en atmosphère homogène sans écoulement. Bien que le nombre de Mach sur l'axe ne soit pas le même, l'étude des différentes courbes montre un déplacement de la partie principale du rayonnement vers les petits angles. Un



FIG. 4.53: Rayonnements vers l'extérieur pour les modes (0; 3) en haut et (2; 2) en bas et pour ka = 18, 5 à gauche et ka = 46, 2 à droite. Les résultats obtenus avec la couche limite et M = 0, 3 (rouge) sont comparés à ceux obtenus en écoulement uniforme avec M = 0, 5 (bleu) et sans écoulement (noir)

écoulement uniforme avec M = 0,3 fournirait en moyenne des niveaux à mi-chemin entre les courbes bleue et noire. Pour le mode (0;3) sur les figures (**a**) et (**b**), une partie de l'énergie s'est transférée du lobe principal vers un lobe sur l'axe. Pour le mode (2;2) et ka = 18,5 sur la figure (**c**), le maximum du lobe principal en conservant son niveau s'est déplacé de quelques degrés. Pour le même mode et ka = 46, 2 sur la figure (**d**), le maximum du lobe principal atteint un niveau légèrement plus élevé. Sur toutes les figures, les lobes et les zéros secondaires ont presque tous disparus pour donner un rayonnement globalement décroissant en s'éloignant de l'axe.

A la fin de la propagation, le faisceau n'a jamais interagit avec la surface réfléchissante. Progressivement, la propagation a, comme le laissait supposer les figures (4.41) et (4.48), modifié les champs des modes et ceux-ci continueraient à évoluer si la propagation se poursuivait. Une autre description modale à l'aide de rayons pourrait sans doute fournir les champs des modes propagés dans une telle configuration. Il faut donc se demander qu'elle est la bonne modélisation physique. Un premier calcul volumique en sortie de moteur pourrait donner les champs excitateurs qui, une fois traduits sous forme de champs de rayons, pourraient être utilisés pour initialiser une propagation.

* * *

L'analyse précédente doit bien sûr être approfondie en utilisant d'autres résultats. Cependant, les premières conclusions fournissent une base d'étude non triviale. D'une part, les résultats du (4.5.1) sont pertinents. Les validations effectuées au (3) avec un écoulement et une impédance incitent à estimer une erreur comparable à celles constatées au cours de la validation de la propagation des modes au (4.4).

D'autre part, compte tenu de l'instabilité constatée au (4.5.2) pour un des modes, plusieurs questions se posent. Même si les résultats pour les autres modes étudiés semblent corrects, la validité est mise en doute. En particulier, il faudrait poursuivre la propagation pour comprendre la cause de l'instabilité et son influence éventuelle sur les modes *a priori* épargnés. De plus, l'effet d'une modification de l'écoulement sur la propagation devrait être étudié. Cette démarche doit s'inscrire dans une étude et un apprentissage plus vastes des limites de la méthode de "lancer de rayons".

Le problème sous-jacent, déjà évoqué dans la conclusion du (4.4) consiste à savoir comment la physique doit être modélisée pour donner une image fidèle des phénomènes. Les modes d'une part et la propagation "courbe" d'autre part ont été construits pour fournir des représentations adéquates de la propagation. Lorsque ces deux outils sont utilisés ensemble, une justification théorique est difficile à mettre en place. Certes rien ne semble *a priori* contre-indiquer une telle combinaison mais la pertinence de l'approximation doit être verifiée en confrontant les résultats à une autre connaissance des phénomènes. Cette comparaison peut d'ailleurs motiver l'amélioration du modèle. Dans le cas présent, la description modale faite par Rienstra et un calcul axisymétrique à l'aide d'un solveur des équations de la mécanique des fluides devrait permettre de décider si la traduction des modes en écoulement uniforme est suffisante pour les écoulements plus complexes.

> * * * * *

L'objectif de ce chapitre était de construire une description de la propagation dans un conduit à l'aide de rayons. Concrètement, l'approche classique a échoué mais la décomposition de la solution sur les modes

propres a permis d'envisager une technique efficace. Ainsi, il s'est agit essentiellement de traduire les champs modaux dans le formalisme de la méthode de "lancer de rayons". L'étude théorique puis la validation ont complètement réalisé cette traduction pour les modes d'un cylindre de section transverse circulaire constante.

Désormais, de nouvelles formes de sources rendent le "lancer de rayons" pertinent pour réaliser un calcul dans un conduit dont la section d'entrée ou le comportement de l'élément excitateur conduisent à décomposer les champs sur des modes propres de cylindre de section transverse circulaire. Au delà, le processus permettant la construction des dioptres sources peut être utilisé pour d'autres descriptions ou dans d'autres géométries.

Concernant le cylindre à section transverse circulaire, les résultats obtenus pour des configurations à la marge du domaine envisagé semblent montrer les limites de la décomposition modale de départ. D'autres approches peuvent être envisagées, par exemple en utilisant d'autres formes modales ou en enrichissant les éléments de base de la méthode. Dans tous les cas, le champ excitateur doit être décrit plus précisément.

Chapitre 5

Configurations industrielles

L'expression "calculs industriels" caractérise l'ensemble des calculs répondant exactement à une problèmatique soulevée par la construction aéronautique. Leur complexité et leur diversité ne permettent bien souvent pas une application directe des méthodes. La difficulté réside dans l'utilisation de géométries représentant le plus fidèlement possible la situation d'origine et la nécessité de donner une réponse directement exploitable.

Les exemples d'application industrielle doivent bien sûr montrer la pertinence de l'utilisation de la méthode de "lancer de rayons" pour l'ensemble des configurations envisageables. Mais ils doivent aussi rendre compte de la diversité des calculs rendus possibles par la méthode développée. Ils doivent, enfin, la resituer dans le panel des méthodes de calcul disponibles. Des configurations adaptées permettent la comparaison des resultats et des coûts de calcul avec ceux obtenus par exemple, à l'aide de méthodes résolvant complètement les équations dans le volume ou sur les frontières ou ne considérant que le rayonnement du champ incident à partir de la surface diffractante.

Le chapitre débute par l'étude d'une configuration pour laquelle la représentativité des résultats est estimée grâce à un calcul utilisant une méthode "BEM". Ensuite, en s'appuyant sur cette validation pour une géométrie quelconque, la méthode est utilisée sur une géométrie complète. Elle permet alors de faire un choix parmi trois placements différents des moteurs latéraux. Enfin, l'étude de la réponse d'un conduit coudé à différentes excitations illustre les possibilités de calcul de propagation guidée.

5.1 Empennage générique

Pour les configurations d'avions d'affaires actuellement répandues, les moteurs latéraux sont fixés sur le fuselage, à proximité de la queue de l'avion. Le bruit émis au voisinage des moteurs se réfléchit donc partiellement sur la surface horizontale de l'empennage. Or, cette contribution peut doubler l'amplitude perçue au sol. C'est pourquoi il est intéressant de concevoir des configurations la réduisant.

L'étude en secteur arrière du rayonnement diffracté par l'empennage seul est intéressante à double titre. D'une part, si l'atmosphère est supposée homogène et sans écoulement, la taille du problème permet d'effectuer un calcul grâce à une méthode utilisant des éléments finis de frontière (BEM). Les résultats obtenus par la méthode de "lancer de rayons" peuvent alors être validés par comparaison. La pertinence de l'utilisation de la méthode pour des calculs industriels peut ainsi être vérifiée. D'autre part, la relative simplicité de la géométrie permet une analyse complète pour des problèmes de référence.

L'étude débute par la présentation des paramètres de calcul et l'estimation des erreurs d'approximation. Ensuite, la comparaison des résultats de la méthode de "lancer de rayon" avec ceux d'un calcul utilisant une méthode "BEM" fournit une base d'analyse des phénomènes non pris en compte par l'optique géométrique. Enfin, des configurations dérivées sont calculées pour tester la capacité de la méthode à discriminer des choix industriels.

5.1.1 Paramètres de calcul



FIG. 5.1: Géométrie de l'empennage de référence avec les positions de référence (jaune) et dérivée (cyan) choisies pour la source ponctuelle

Les dimensions des géométries sont données en millimètres. La géométrie de référence occupe un espace compris dans $[18000; 24000] \times [0; 6000] \times$ [0; 2500] ce qui correspond à un problème à l'échelle unité. Les calculs sont effectués pour 3, 6, 8, 9 et 12 kHz afin de simuler quatre harmoniques de bruit de soufflante et une fréquence de bruit de turbine. Sur la figure (5.1), la géométrie est représentée avec les deux positions de la source utilisées pour modéliser un bruit émis en sortie de nacelle.

Dans un premier temps, le maillage pour le calcul par méthode de rayons est le même que celui utilisé pour le calcul à 3 kHz par la méthode "BEM". Mais, ensuite, pour récupérer les champs rayonnés

à l'infini, notamment dans le cas d'un calcul avec champ moyen non homogène ou avec écoulement, ce maillage pourra être placé dans une sphère. Le diamètre sera alors choisi tel que le champ moyen puisse être considéré homogène sur l'ensemble de sa surface et au delà vers l'infini.

Le maillage de la figure (5.2) est régulier. Avec une longueur de barre moyenne de 22 mm, il est adapté aux calculs par méthode "BEM" puisqu'il vérifie un critère en $\lambda/5$ pour 3 kHz mais, ne l'est pas pour les calculs par méthode de rayons puisqu'il n'est pas densifié en fonction de la courbure. Cependant, la densité globale est amplement suffisante pour les deux types de calculs.



FIG. 5.2: *Détail du maillage de la géométrie de la figure* (5.1) *montrant la valeur de la courbure principale*

Tant que l'atmosphère est supposée homogène et sans écoulement, le paramètre estimant l'erreur de l'approximation "hautes fréquences" correspond à l'équation d'Helmholtz. La taille du problème étant de l'ordre de 5000 mm et les fréquences supérieures à 3 kHz, il vaut à peu près 0.02. La surface n'est pas complètement régulière et des phénomènes de diffraction non négligeables doivent apparaître. Dans certains secteurs angulaires, l'approximation de l'optique géométrique peut, donc, ne pas être suffisante. Mais la forme de la géométrie, parce qu'elle réflé-

chit globalement dans toutes les directions, permet d'envisager une solution relativement précise.



5.1.2 Faisceaux et champs à la surface

FIG. 5.3: Amplitude sur le faisceau de rayons pour le calcul de référence sur l'empennage après 2 réflexions (58951 rayons)

FIG. 5.4: Détail du maillage de rayons du (5.3) au voisinage de la caustique sur la partie horizontale de l'empennage

Comme le montrent les figures (5.3) et (5.4), après plusieurs interactions avec une surface complexe, la densité de rayons sur l'ensemble de la géométrie reste correcte grâce au raffinement et à l'élimination des tubes de rayons non pertinents. Le détail de la figure (5.4) montre qu'il y a repliement du maillage, non seulement sur l'empennage, mais aussi sur la partie basse de la dérive et sur une partie du fuselage. De nombreux tubes reliant des points sur l'empennage et le fuselage ont du être supprimés mais la répartition reste cohérente.

Jusqu'à la sixième interaction, le rapport entre le nombre de rayons percutant la surface et le nombre de rayons lancés est un peu supérieur à 10%. Pour la septième interaction, ce rapport est quasi nul. Toute l'énergie semble donc avoir été rayonnée vers l'infini ce qui assure une bonne convergence de la méthode.

Les figures (5.5) et (5.6) montrent que, mises à part quelques différences, l'allure global des champs de pression est bien restituée par la méthode de rayons et, dans certaines zones, la différence entre les deux figures est essentiellement due aux lacunes de la méthode de projection. Avec un coût de calcul, pour 5 interactions et un nombre minimal de 20000 rayons, de 25 minutes sur un processeur Power4 1,5 GHz et



FIG. 5.5: *Pression reconstruite et projeté sur la surface diffractante en sommant les trois premières contributions à la fréquence 3 kHz*



FIG. 5.6: *Pression calculée avec une méthode "BEM"* à la fréquence 3 kHz

900 Mo de mémoire vive, l'efficacité de la méthode de "lancer de rayons" apparaît nettement supérieure par rapport à une méthode "BEM" qui nécessite 1 heure et demie sur 8 processeurs Power4 1,5 GHz, 815 Mo de mémoire vive et 17 Go d'espace disque pour l'inversion de la matrice en utilisant un solveur direct "out of core".

5.1.3 Estimation des erreurs



FIG. 5.7: Schéma représentant les directions utilisées pour le calcul du rayonnement à 10 m autour des sources

Les champs rayonnés des figures (5.8) et (5.9) sont obtenus en réception proche, c'est à dire en utilisant, pour calculer l'intégrale de rayonnement, un microphone décrivant une trajectoire. Ici, c'est un cercle dans le plan y constant de rayon 10000 mm dont le centre est situé à la position de la source. Les angles sont décrits en partant de z = 0 à l'arrière de l'empennage et le premier quadrangle correspond aux x décroissants et aux z croissants. La figure (5.7) présente la trajectoire et les angles pour une position de source arbitraire.

Sur la figure (5.8), les courbes sont difficilement distinguables ce qui traduit une rapide convergence de la méthode. La courbe bleu qui correspond à l'approximation de Kirchhoff simple se détache très nettement des autres. La courbe rouge, en prenant en compte une réflexion de plus, présente les principales raies d'interférences entre les champs réflé-

chis par la partie horizontale de l'empennage, pour l'un, directement et, pour l'autre, après une réflexion sur le fuselage. Ensuite, les courbes suivantes ne font apparaître que quelques détails supplémentaires.

La réflexion sur la géométrie étant très dispersive puisqu'elle rayonne plus des trois quarts des rayons



FIG. 5.8: Rayonnements des champs diffractés par les premières contributions pour la fréquence 3 kHz et la configuration de référence : champ réfléchi seul (bleu), 2 contributions (rouge), 3 (vert), 4 (magenta), 5 (cyan) et 6 (noir)

vers l'infini, le niveau de rayonnement par contribution chute rapidement au fur et à mesure des interactions. De plus, comme la quasi totalité des surfaces est éclairée dès la première interaction, les premières contributions sont prépondérantes pour tous les angles de réception et il n'y a pas de changement important de la directivité due aux interactions d'ordres élevés. Bien que la géométrie du problème rende l'approximation de Kirchhoff particulièrement pertinente, le couplage de la multi-réflexion et du rayonnement à partir de la surface diffractante par la méthode de l'optique physique permet d'obtenir un résultat plus précis.



FIG. 5.9: Rayonnements des champs diffractés (gauche) et totaux (droite) obtenus par un calcul "BEM" (bleu), par un rayonnement de Kirchhoff simple (rouge) et par "lancer de rayons" avec multi-réflexion (noir) pour la configuration de référence à la fréquence 3 kHz

Les figures (5.9) analysent les faiblesses de la méthode développée. Il est évident que les itérations n'ont pas fait converger la solution vers la solution "BEM". Certains phénomènes ne seront donc jamais pris en compte. Du point de vue du centre de la trajectoire d'observation, la partie horizontale de l'empennage occupe la portion d'angle de visée comprise entre 23° et 45°.

Un premier masquage apparaît de manière évidente pour les angles compris entre 25° et 50°. Ensuite, en parcourant les angles dans le sens croissant, le calcul "lancer de rayons" prédit un champ correct jusqu'à 65° alors que le rayonnement de Kirchhoff sous-estime le premier masquage et en introduit un deuxième

entre les angles 55° et 70°. Entre 65° et 100°, le champ total du "lancer de rayons" est légèrement plus faible que le champ de la méthode "BEM". En fait, pour ces directions, le module du champ diffracté est sur-estimé. Jusqu'à 180°, le champ diffracté étant plus faible que le champ incident, les trois champs totaux sont équivalents. La réception se fait alors du nez de l'avion vers la queue et l'empennage ne joue pas de rôle important.

Le rayonnement pour les angles compris entre 180° et 360°, c'est-à-dire sous l'avion, est le plus difficile à estimer. Les multi-interactions et la présence de caustiques diminuent l'efficacité de l'approximation. Cependant, comme la source n'est pas masquée par la géométrie, le champ total présente des niveaux corrects. Seules les interférences sont mal estimées. En particulier, l'approximation de l'optique géométrique a du mal à prédire le champ diffracté entre 180° et 270°. Pour ces angles, aucun champ réfléchi ne rayonne directement. L'erreur commise est alors expliquée par la prépondérance des phénomènes diffractifs. Sur la dernière partie de la trajectoire, les niveaux obtenus par la méthode de "lancer de rayons" sont corrects même si, pour certains angles, certaines interférences mineures sont mal estimées.

En conclusion, l'erreur n'est importante que dans les zones où le champ diffracté contribue peu par rapport au champ incident. L'approximation réalisée est amplement suffisante pour estimer le champ total. Pour compléter cette analyse, il serait intéressant d'étudier à une fréquence plus élevée la réduction des phénomènes diffractifs, mais le calcul d'une solution de référence devient difficile.

5.1.4 Compléments d'analyse



FIG. 5.10: *Trajectoire de l'avion (rouge) et position du microphone (rond noir) en vue de dessus et en vue de coté*



FIG. 5.11: Rayonnements totaux obtenus par un calcul "BEM" (bleu), par la méthode de Kirchhoff (rouge) et par "lancer de rayons" (noir) sur la trajectoire du (5.10)

La première trajectoire d'observation utilisée permet une analyse simple des phénomènes mais elle ne rend pas compte du bruit perçu au sol. Dans la suite, le post-traitement simule le rayonnement enregistré par un microphone placé au niveau du seuil de piste mais décalé latéralement. La trajectoire reproduit alors le déplacement du microphone fixe par rapport à un avion au décollage. La figure (5.10) montre la trajectoire de l'avion par rapport au repère fixe. La trajectoire du microphone par rapport à l'avion est donc une ligne brisée comportant une première partie horizontale [(-3950 : -250); 450; 0]puis une partie montante [(-250 : 2550); 450; (0 : -840)].

Sur la figure (5.11), la première partie jusqu'à -500 m est commune aux trois méthodes "BEM", Kirchhoff et "rayons". C'est, en effet, essentiellement le champ incident qui rayonne. Entre -100 m et 500 m, le rayonnement simple de Kirchhoff et la multi-réflexion prédisent des champs presque identiques. Les maxima sont à peu près respectés. La zone entre -100 m et 0 m est chahutée, elle correspond à des angles pour lesquels il n'y a pas encore de réflexion franche mais les phénomènes diffractifs sont importants.

A partir de 500 m, le champ diffracté et le champ incident créent des interférences. Le rayonnement de Kirchhoff simple, parce qu'il ne prend pas en compte la partie du champ d'abord réfléchi par le fuselage, les ignore en grande partie. La méthode de "lancer de rayons", même si elle sous-estime la diffraction et marque donc plus nettement les zones de rayonnement moindre, calcule correctement les maxima. Pour les calculs suivants, seule la partie de la trajectoire à partir de -1000 m est montrée puisque c'est la seule qui soit significative.



FIG. 5.12: Rayonnements totaux obtenus sur la trajectoire du (5.10) aux fréquences 3 (noir), 6 (bleu), 8 (rouge), 9 (vert) et 12 (magenta) kHz

L'approximation "hautes fréquences" étant par nature indépendante de la fréquence, le rayonnement à différentes fréquences sur la figure (5.12) ne fait pas apparaître de phénomènes nouveaux. Cependant, il permet de constater la stabilité de la méthode et sa capacité à calculer des fréquences aujourd'hui difficilement atteignables par une méthode BEM. Si les niveaux des cinq courbes sont globalement les mêmes, une zone de moindre rayonnement se déplace en fonction de la fréquence. Ainsi, elle est située entre 1200 et 1400 m pour 6 kHz, entre 1600 et 1800 m pour 8 kHz, entre 1750 et 2200 m pour 9 kHz et entre 1400 et 1600 m pour 12 kHz.

La figure (5.13) analyse, dans le cas simplifié de la diffraction par l'empennage seul, l'influence de la configuration sur le rayonnement. Les trois configurations dérivées sont :

- le traitement de la surface diffractante avec un matériau présentant une impédance réduite $\zeta = 10$,
- le déplacement de la source d'un mètre suivant l'axe de l'avion et de 50 cm latéralement,
- et l'utilisation d'une géométrie sur laquelle la partie horizontale de l'empennage est placée plus haut sur la dérive.



FIG. 5.13: Rayonnements totaux obtenus sur la trajectoire du (5.10) pour la fréquence 3 kHz et la configuration de référence (noir), la partie horizontale en position haute (bleu), la source décalée (vert) et la surface diffractante traitée (rouge)

Le traitement de la surface diminue les interférences entre les champs incident et diffracté ce qui a pour effet, par rapport à la courbe de référence, de lisser les niveaux en secteur arrière à partir de 500 m. Le lissage est encore plus important si la partie horizontale de l'empennage est placée plus haut sur la dérive. Il n'y a alors presque plus d'interférences entre les deux champs. Le déplacement de la source induit des niveaux fortement augmentés à partir de 1000 m. Il semble que la différence de phase entre les deux champs soit telle que les amplitudes s'additionnent en module puisque l'augmentation vaut à peu près 6 dB ce qui correspond à une multiplication par deux de l'amplitude. Grâce à ce premier exemple de calcul sur une configuration industrielle simple, l'efficacité de la méthode développée a pu être mesurée par rapport aux méthodes "BEM" d'une part et au rayonnement de Kirchhoff-Helmholtz d'autre part. La comparaison ayant été faite à partir d'un maillage et d'un posttraitement uniques, l'analyse des coûts de calcul et des résultats consacre la méthode développée comme étant l'outil le mieux adapté pour tester des configurations lors de l'élaboration de formes nouvelles. Le seul inconvénient par rapport à la "BEM" est l'absence d'estimation analytique de l'erreur. Mais la pratique permet de juger *a priori* la validité des résultats.

Les résultats présentés donnent un aperçu des configurations dérivées pouvant être envisagées. La pertinence industrielle de quelques hypothèses peut certes être remise en cause. De plus, l'utilisation d'une géométrie complète dans la suite donnera des résultats plus élaborés. Cependant, l'utilisation de la méthode afin de discriminer différentes options a été ainsi validée.

5.2 Falcon complet

Une des utilisations de la méthode développée consiste à estimer le rayonnement global en prenant en compte une géométrie d'avion complète. A moyennes et hautes fréquences, son coût de calcul permet d'essayer plusieurs configurations assez rapidement. Avant d'introduire des phénomènes plus complexes, l'étude de trois configurations classiques pour une atmosphère homogène et sans écoulement fournit un premier exemple simple. Ces trois configurations sont à la fois pertinentes aérodynamiquement et ne modifient pas fondamentalement la forme générale de l'avion. Ces deux caractéristiques font d'elles les principales configurations étudiées actuellement.

Les calculs et les analyses sont, pour la première fois, effectués sans comparaison avec ceux fournis par une autre méthode. L'estimation *a priori* de l'erreur reste donc la principale façon d'assurer les résultats. La validation effectuée sur l'empennage permet d'appréhender le niveau des erreurs commises et la confrontation avec des concepts basiques juge la pertinence *a posteriori*.

La suite présente un exemple de ce que pourrait être une étude industrielle. Après avoir décrit les caractéristiques des trois configurations, les résultats obtenus pour les différents cas sont comparés grâce à l'analyse des rayonnements, d'abord autour des positions des sources et, ensuite, sur une trajectoire de référence.



5.2.1 Trois configurations typiques

FIG. 5.14: Exemple de géométrie utilisée pour un calcul complet avec les trois positionnements envisagés des moteurs (vert, jaune et cyan), l'échelle des couleurs correspond aux courbures : principale à gauche et transverse à droite

Pour que le calcul soit pertinent, une source ponctuelle modélisant le bruit émis par un des moteurs latéraux est placée successivement en trois positions. La première configuration représente le positionnement actuel de ces moteurs puis les deux suivantes des dérivées couramment envisagées pour réduire les niveaux de bruit. La figure de gauche de (5.14) montre la position de référence en jaune et la position sur l'aile en cyan et la figure de droite la position sur la partie horizontale de l'empennage en vert.

Pour la configuration avec le moteur positionné au dessus de la partie horizontale de l'empennage, une plaque verticale grossière a été introduite. En créant un effet de masquage latéral supplémentaire, ce possible changement de géométrie rend plus efficace cette solution. Même si, pour une estimation plus réaliste, une géométrie plus "optimisée" devrait être prise en compte, une plaque plane suffit pour l'analyse rapide qui est faite par la suite. Pour faciliter le calcul et l'analyse et mettre en valeur les différences majeures entre les trois configurations, les géométries utilisées ont été lissées. Ainsi, la nacelle latérale a été ôtée ce qui permet de déplacer aisément la source ponctuelle et laisse libre la propagation dans toutes les directions. Si cette forme avait été prise en compte, la source aurait dû être modélisée par deux demi-sphères positionnées de part et d'autre.

Compte tenu de l'absence d'hétérogénéité de l'atmosphère, il est intéressant de calculer le rayonnement à partir de la surface diffractante. Une telle estimation suppose qu'il n'y ait pas de volume clos au travers duquel un rayonnement parasite serait susceptible de passer. Ainsi, seule une demi-géométrie a été maillée et il faut éviter de calculer un rayonnement "traversant" une partie du fuselage. De plus, le calcul du masquage par l'aile ou par la partie horizontale de l'empennage suppose donc qu'elles sont sans épaisseur. Seule la forme des parties éclairées est prise en compte.

Le maillage utilisé est un maillage classique pour effectuer des calculs aérodynamiques. Il est certes discrétisé en fonction de la courbure mais, d'une part, celle-ci n'est pas reportée dessus et, d'autre part, le critère dictant la longueur de barre locale n'en dépend pas de façon précise. Ainsi, avant de faire le premier calcul à base de rayons, il a fallu estimer les directions principales de courbure et les deux valeurs associées en fonction des positions et des normales. Cette reconstruction a indiqué que, dans les zones de forte courbure comme sur le nez ou au bord d'attaque, en fonction des critères classiques, le maillage n'est pas suffisamment discrétisé pour permettre de bonnes approximations aux fréquences envisagées. Cependant, ces parties sont très localisées et, pour les configurations évoquées, sont soit dans l'ombre, soit marquées par une limite ombre-lumière ce qui rend l'estimation de l'erreur associée plus facile.

L'efficacité de la méthode peut être mesurée *a priori* par le rapport entre la vitesse de calcul et l'amplitude de l'estimation de l'erreur. Par rapport à l'empennage seul, la surface totale a été multipliée par quatre environ. Pour la même fréquence, un calcul effectué grâce à une méthode utilisant des éléments finis de frontière nécessiterait donc 4 fois plus de nœuds. Or, la résolution nécessite l'inversion d'une matrice carrée symétrique dont la taille augmente avec le carré du nombre de nœuds. Un temps environ 48 fois plus long et un espace disque 16 fois plus grand seraient donc nécessaires. Pour le calcul par "lancer de rayons", la place mémoire dépend pour partie de la taille du maillage mais surtout du nombre de rayons. Le temps de calcul est lié, quant à lui, à la distance que doivent parcourir les rayons avant de sortir du domaine de calcul. Celui-ci est limité par une sphère virtuelle symbolisant l'infini et centrée autour du maillage. En fait, le passage de l'arrière seul à la géométrie complète ne modifie presque pas le coût de calcul.

L'erreur *a priori* s'estime de la même façon que pour l'empennage seul. Elle est, d'abord, due à la diffusion liée à l'équation d'Helmholtz. Celle-ci étale les faisceaux et ne peut pas être prise en compte par les rayons simples. Elle est aussi due à l'erreur de discrétisation commise en éclairant un maillage facetté et non pas la géométrie. Elle est enfin due aux phénomènes de diffraction mal modélisés par le calcul du rayonnement de l'optique physique.

La première partie de l'erreur est fonction de la forme du front d'onde et de la géométrie diffractante. Le critère classique comparant la longueur caractéristique de la géométrie, ici le rayon de courbure moyen de 1 m, et la longueur d'onde vaut 0,34 à 1 kHz. La deuxième partie est fonction de la discrétisation. En dehors des zones de fortes courbures déjà évoquées, le nombre de réflexions *a priori* nécessaires pour envoyer l'essentiel de l'énergie à l'infini induit un critère $n \times h/\lambda$ inférieur au critère précédent. Dans l'expression précédente, les paramètres sont : *h* la distance comprise entre la facette plane et la "vraie" géométrie, n le nombre de réflexions et λ la longueur d'onde. La dernière partie dépend de la forme de la surface au voisinage des frontières ombre-lumière. L'optique physique suppose que les faisceaux sont sans épaisseur et se terminent par une arête vive. Ainsi, pour les frontières ombre-lumière situées sur les zones de fortes courbures de la géométrie diffractante, l'approximation est bonne dès l'instant que la courbure transverse est correctement prise en compte.

5.2.2 Etude du rayonnement

De la même façon que pour l'empennage, le rayonnement est calculé en champ proche comme si un microphone omnidirectionnel mesurait le champ de pression, d'abord sur un cercle à 100 m autour de la source comme au (5.1.3) et ensuite le long de la trajectoire décrite par le microphone fixe dans le repère lié à l'avion au décollage et évoquée au (5.1.4). Deux fréquences sont envisagées : à 1 kHz, la méthode est sans doute à la limite de son domaine de validité mais fournit des résultats pertinents et, à 8 kHz, c'est la partie haute du spectre envisageable qui est étudiée.

Sur la figure (5.15), s'il n'y avait pas de géométrie, le niveau du rayonnement vaudrait -100 dB pour tous les angles et les trois positions de la source, les changements dus à la présence de la géométrie s'interprètent donc en plus et en moins par rapport à cette valeur. Les courbes sont analysées, comme l'indique le schéma (5.7), suivant les angles croissants en partant de l'axe de l'avion à l'arrière, en montant au-dessus puis, après être passé devant pour l'angle 180°, en rejoignant la position de départ par dessous. Le nombre de réflexions nécessaires pour évacuer toute l'énergie vers l'infini est le même que pour l'empennage seul.



FIG. 5.15: *Rayonnements pour 1 kHz à 100 m autour des positions de la source pour la configuration de référence (rouge) et pour les configurations sur l'aile (bleu) et sur l'empennage (vert)*

Dans un premier temps, sur la figure (5.15), les trois configurations sont étudiées séparément. Pour la position de référence de la source (rouge), un premier masquage marque l'influence de l'empennage. Le rayonnement chute alors de 20 dB autour de 25°. Entre 100° et 150°, le champ réfléchi par l'aile crée une interférence avec le champ incident. Au maximum, lorsque les phases permettent aux champs de s'ajouter en amplitude et à cause de contributions annexes sans doute liées aux réflexions sur le fuselage, le niveau est plus que doublé par rapport au niveau de référence puisque la différence est supérieure à 6 dB. A 200°,

le masquage de l'aile induit une diminution du niveau de rayonnement de 25 dB. Enfin, entre 300° et 350° , une nouvelle interférence liée à la réflexion sur l'empennage porte le niveau maximum au delà de +6 dB.

Pour la configuration avec le moteur sur l'aile (bleu), l'analyse est à la fois plus simple et plus singulière. La source a été placée suffisamment proche de l'aile pour que les interférences fassent apparaître de longues oscillations dont le maximum est situé en 60°. Il est intéressant de constater qu'à la verticale au dessus de la source, le niveau est divisé par deux et atteint un seuil alors qu'au maximum, il est doublé. C'est sans doute le positionnement particulier de la source qui induit une opposition de phase entre les champs direct et réfléchi. Ce phénomène apparaissant à 1 kHz n'est sans doute pas présent pour les autres fréquences. Entre 200° et 350°, le masquage dû à l'aile diminue le niveau de 15 dB.

Lorsque la source est placée au dessus de l'empennage (vert), l'interférence entre les champs direct et réfléchi induit des variations de niveau plus "classiques" même si le maximum est situé à 115° et si, à 90°, l'amplitude n'est pas doublée. Les différences entre les formes d'interférence sont liées à la distance de la source par rapport à la surface réfléchissante et à la courbure de cette dernière, mais aussi à des contributions annexes diffèrentes. A cause des tailles respectives des surfaces masquantes, le masquage entre 200° et 300° est moins marqué que pour la source positionnée au-dessus de l'aile.

En comparant, dans un second temps, les trois courbes, elles partagent le même maximum situé autour de 140°. Il est sans doute dû à la réflexion sur l'aile qui est contributive pour cet angle dans les trois configurations. La partie du rayonnement qui est préjudiciable se répartit sur les angles compris entre 180° et 360° car ils correspondent aux directions orientées vers le sol. Le masquage du moteur situé sur l'aile semble ainsi être le plus efficace. Cependant, pour un microphone placé en bout de piste, le niveau maximal est atteint lorsque les roues quittent le sol car l'avion est alors le plus proche. Ainsi, l'efficacité du masquage autour de 200° pour la source positionnée au-dessus de l'empennage laisse supposer que cette configuration est meilleure. Il est intéressant de constater que, dans cette configuration, c'est l'aile qui masque la source et non pas l'empennage pour les angles proches de l'horizontale.



FIG. 5.16: *Rayonnements à 1 kHz sur la trajectoire au décollage pour la configuration de référence (rouge) et pour les sources au-dessus de l'aile (bleu) et au-dessus de l'empennage (vert)*

La figure (5.16) présente le rayonnement à 1 kHz perçu le long de la trajectoire, déjà évoquée au (5.1.4), du microphone fixe dans le repère de l'avion au décollage. En comparant les trois courbes, la position la

plus mauvaise, c'est-à-dire celle qui produit le maximum le plus important, est, de façon évidente, la position de référence.

Une étude plus précise en suivant le décollage de l'avion montre que, en secteur avant, c'est-à-dire pendant le roulage, les champs direct et réfléchi par le fuselage créent des interférences à peu près similaires pour les trois configurations. Au moment où les roues quittent le sol, si la source est située au-dessus de l'aile, le microphone la "voit" directement alors que, pour les autres positions de la source, un léger masquage lié à l'aile diminue les niveaux. Lorsque l'avion passe au-dessus du microphone, la source placée le long du fuselage n'est absolument pas masquée. Par rapport aux autres configurations, le niveau maximum est augmenté d'au moins 3 dB. En plaçant la source au-dessus de l'empennage, le gain est même de 5 dB. Pour cette configuration, dès que le microphone est en secteur arrière, le niveau chute de 10 dB. Une fois que l'avion s'est éloigné, la position du moteur au-dessus de l'aile devient la plus efficace. Finalement, aussi bien en niveau maximum qu'en contribution intégrée, il semble que placer le moteur au-dessus de l'empennage soit plus intéressant.

A des fréquences élevées, comme à 8 kHz sur la figure (5.17) à gauche, les oscillations de longueurs d'onde trop petites rendent l'analyse des résultats bruts difficile. Un post-traitement à l'aide d'une moyenne glissante sur 5 points a donc été réalisé pour les éliminer. Ce post-traitement grossier pourrait être amélioré en prenant un noyau de convolution plus élaboré. la diffusion au cours de la propagation due aux propriétés physiques du milieu pourrait justifier une telle correction. Les premiers résultats obtenus ici facilitent l'analyse suivante sans la modifier.



FIG. 5.17: Rayonnements sur la trajectoire à 8 kHz pour les trois configurations de la figure (5.16) : à gauche, les niveaux tels qu'ils sont calculés et, à droite, tels qu'ils sont obtenus après avoir lissé les hautes fréquences

Les conclusions sont en grande partie les mêmes qu'à 1 kHz. En fait, l'augmentation de la fréquence induit une amplification des effets. En secteur avant, le supplément d'amplitude pour la configuration avec le moteur au-dessus de l'aile est plus important. Au maximum, la hiérarchie entre les options a un peu changé puisque le positionnement au-dessus de l'empennage devient moins efficace que celui au-dessus de l'aile. En secteur arrière, le placement de la source au-dessus de l'aile induit, à cette fréquence, une décroissance presque aussi rapide que celle créée par le placement au-dessus de l'empennage est toujours la meilleure.

La mise en perspective des deux séries de calculs à 1 kHz et à 8 kHz incite à ajouter quelques remarques. D'abord, à propos de la méthode, les effets diffractifs étant plus marqués à 1 kHz qu'à 8, ils conduisent à des erreurs plus importantes. Les champs obtenus grâce à des rayons "simples" ne dépendant pas de la fréquence, les différences ne sont donc prises en compte que par le calcul du rayonnement. Des méthodes utilisant des faisceaux plus évolués permettraient sans doute des compléments d'analyse.

Concernant, ensuite, la pertinence de la comparaison, les deux fréquences envisagées se situent de part et d'autre de l'ensemble des fréquences intéressantes. En deçà, la méthode atteint ses limites et, au-delà, la contribution à la nuisance globale est moindre. Il est évident qu'en vue d'une estimation *a priori* du niveau de bruit global de l'avion, il faut intégrer les contributions en temps ce qui se traduit par une intégration le long de la trajectoire et suivant la fréquence. De plus, pour une étude des différents phénomènes contributeurs, il faut pondérer en fonction de la fréquence. D'une part, l'atmosphère ne se comporte pas de la même façon vis-à-vis d'un signal à 8 kHz et d'un signal à 1 kHz. D'autre part, l'oreille humaine rend la perception fortement dépendante de la fréquence du son. Les opérations que ces remarques suggèrent sont communément réalisées pour les estimations de la nuisance globale, notamment lors de la certification des avions.

Enfin, pour améliorer la modélisation, le rayonnement de l'optique physique ainsi que le placement et la nature de la source pourraient être modifiés. Le rayonnement sur trajectoire étant censé représenter le bruit reçu par un microphone fixe, un effet Doppler pourrait être intégré dans le rayonnement intégral. De plus, un écoulement uniforme autour de l'avion pourrait être pris en compte. Par ailleurs, pour les calculs effectués, la source utilisée est ponctuelle et elle peut simuler aussi bien une source de soufflante, qu'une source de turbine ou de compresseur, voire même de jet. Pour différencier les différentes contributions, différents types de sources rayonnant à différentes fréquences et placés en des positions plus précises pourraient être envisagées.

* * *

L'analyse des trois configurations grâce à la méthode de "lancer de rayons" a montré que le positionnement de la source sur l'empennage est plus efficace. Mais, les hypothèses de modélisation peuvent être améliorées et l'étude d'autres configurations doit compléter cette première analyse. En fait, ce premier exemple fournit la base de ce que pourrait être l'utilisation de la méthode dans une étude complète.

Pour poursuivre la comparaison entre les trois configurations, trois voies peuvent être empruntées : sommation des contributions provenant de diverses sources, prise en compte d'un écoulement et modélisation du champ diffracté. Ces trois compléments nécessitent d'introduire dans la géométrie une surface transparente englobant le domaine de calcul. L'utilisation d'une géométrie "entière", c'est-à-dire à laquelle son symétrique a été ajouté, semble alors plus judicieuse. Dans ce cas, le rayonnement doit se faire à partir de la surface transparente.

5.3 S-duct

Pour réduire le rayonnement des bruits de turbine, de soufflante et de combustion, des solutions plaçant les moteurs au sein du fuselage ont été envisagées. Dans cette configuration, la pleine efficacité du moteur n'est assurée que si le flux d'air en entrée est "régulier" quel que soit le point du domaine de vol. Afin de remplir cette condition pour un moteur central, l'embouchure du S-duct se situe au dessus du fuselage alors que le moteur pousse dans l'axe de l'avion. Un double coude inversé formant un "S" est donc nécessaire pour préserver la régularité du flux jusqu'à l'entrée du moteur.

Par rapport à la propagation guidée dans un cylindre, la courbure de la ligne moyenne complique encore un peu plus l'estimation. Les fréquences contenues dans le spectre du bruit provenant du moteur limitent l'utilisation des méthodes basées sur les éléments finis. Des méthodes issues de l'adaptation de la description modale semblent désormais fournir de bons résultats mais leur mise en œuvre demeure complexe. Dans le même esprit, l'utilisation de dioptres approchant les champs modaux permet de traiter ce type de géométrie à l'aide d'un calcul par "lancer de rayons".

Dans la suite, l'exemple d'une étude industrielle pouvant être réalisée grâce à la méthode développée se scinde en quatre parties. Dans un premier temps, l'analyse de la géométrie et le choix des fréquences de calcul conduisent à une estimation *a priori* de l'erreur. Dans un deuxième temps, les faisceaux renseignent sur l'initialisation correcte du calcul, mais ils pourraient être utilisés plus largement pour réduire astucieusement l'amplitude au cours de la propagation. Dans les deux derniers paragraphes, le rayonnement vers l'extérieur pour différentes configurations permet d'estimer l'importance de la contribution pour le rayonnement global.

5.3.1 Un guidage non rectiligne

Comme le montre la figure (5.18), la géométrie de S-duct utilisée a une section circulaire constante tandis que sa ligne moyenne forme un "S". Bien que le dessin de l'embouchure soit particulièrement soigné, sa prise en compte dans les calculs de rayonnements n'est pas aisée. En effet, pour traiter ce genre de géométrie par une méthode utilisant des éléments finis de frontière, deux solutions existent :

- soit une épaisseur enfermant un matériau solide est prise en compte et le rayonnement peut être obtenu à partir des potentiels sur l'ensemble de la surface de la géométrie,
- soit, avec une géométrie infiniment fine, une première propagation est effectuée de la section d'entrée du moteur à une section proche de l'embouchure, puis, avec les champs récupérés sur la section transverse, une hybridation à l'aide d'une matrice de transfert permet de calculer le champ à l'extérieur.

Dans le premier cas, la géométrie présentée sur la figure (5.18) n'est pas adaptée ; dans le deuxième, la prise en compte du champ diffracté vers l'intérieur du conduit nécessite de coupler correctement le rayonnement et la propagation interne ce qui ne peut être fait qu'en plusieurs itérations. De plus, cette solution empêche le calcul du rayonnement en une position située à l'arrière de la section transverse de couplage.

Le post-traitement à partir des champs de rayons se rapproche de la deuxième technique. En effet, comme le rayonnement au travers d'une surface non infiniment fine crée des contributions parasites, le calcul doit être fait à partir des champs récupérés sur une section transverse proche de l'embouchure. Si des champs diffractés sont pris en compte, le rayonnement est calculé à partir de la totalité des champs obtenus sur la section transverse au cours des propagations successives.



FIG. 5.18: Géométrie et maillage du S-duct

Le maillage du S-duct sur la figure (5.18) est adapté à un calcul par BEM. Les barres joignant les nœuds ont une longueur à peu près constante qui permet d'envisager des fréquences allant jusqu'à 2 kHz. A cette fréquence, le nombre de nœuds conduit à estimer un coût de calcul de l'odre de 8 h sur un processeur Power4 1,5 GHz, de 10 Go d'espace disque et de 700 Mo de mémoire vive. Pour un calcul à l'aide de rayons, la difficulté est essentiellement la même que pour le cylindre droit et dépend

du nombre de réflexions à prendre en compte pour qu'il n'y ait plus d'énergie sortant par l'embouchure. Mais, en plus, comme dans le cas présent la géométrie est courbée en "S", les parties concaves et convexes de la ligne moyenne nécessitent un algorithme plaçant les intersections plus robuste. Le calcul ne coûte alors seulement que 5 min de temps CPU et 200 Mo de mémoire vive pour 7 interactions et 20000 rayons.

Plusieurs types de sources ont été testés avec cette géométrie. En dehors de la source ponctuelle classique placée sur la ligne moyenne, des sources modales incluant la source plane ont été adaptées au diamètre de la section transverse circulaire. Alors que, pour les sources ponctuelle et plane, le calcul est indépendant de la fréquence, les paramètres de construction des sources modales sont différents pour chaque fréquence. Les résultats rendent compte de la propagation des champs pour une source ponctuelle et une source plane à 1, 3, 6 et 9 kHz puis des modes (0; 3) et (2; 3) à 3 kHz dans une configuration de référence, mais aussi en prenant en compte une impédance ou un écoulement. Comme la section transverse circulaire est constante, la description à l'aide du paramètre ka est pertinente et les fréquences correspondent respectivement aux valeurs 7, 7; 23; 46 et 69.

L'estimation *a priori* de l'erreur se décompose classiquement en trois parties. La première estimant la dispersion non prise en compte par les rayons "simples" vaut, en prenant comme longueur caractéristique le rayon de la section transverse, $2\pi/(ka)$ soit 0,25 à 3 kHz. La deuxième dépend de l'approximation de la source. Dans le cas des sources ponctuelle ou plane, elle est inexistante mais, dans le cas d'une source plus complexe, elle dépend de la capacité des rayons à traduire les champs modaux. Comme cela a été vu au (4.4), l'approximation est correcte pour les modes (0; 3) et (2; 3). La troisième source d'erreur est numérique et dépend du maillage et du nombre réflexions. La régularité et l'imprécision du maillage laissent penser que les directions principales de rayonnement seront correctement obtenues mais qu'une étude des champs plus précise sera difficile.

L'analyse de la propagation se fait grâce au rayonnement vers l'extérieur calculé classiquement à partir d'une section transverse proche de l'embouchure. Ce post-traitement ne prend pas en compte la forme de cette dernière et la diffraction est mal approchée. Cependant, il n'est pas sûr, compte tenu de la discrétisation de la géométrie, qu'une meilleure modélisation de la diffraction permette une meilleure approximation. En dehors de l'argument classique concernant la prise en compte des hétérogénéités du champ moyen, la puissance de la méthode réside essentiellement, pour ce type de cas, dans le coût de calcul dérisoire en propagation rectiligne.

5.3.2 Des faisceaux originaux

Avant d'étudier le rayonnement vers l'extérieur, l'illustration de la particularité de la méthode passe par l'analyse des traces laissées par quelques faisceaux sur la géométrie au cours de leur propagation. Même si cette démarche est plus théorique qu'industrielle, elle a le mérite de vérifier, grâce à des concepts simples, la validité des conditions initiales et évite d'entamer une analyse sur des résultats qui peuvent être grossièrement faux. Les premières figures illustrent l'effet de l'écoulement sur la propagation et la dernière montre la complexité des faisceaux après 3 interactions.

Le niveau le plus simple pour prendre en compte un écoulement consiste à introduire une vitesse uniforme orientée dans une direction réaliste compte tenu de la forme de la géométrie. Dans le cas présent, elle est dirigée dans le sens des x positifs et orientée vers le bas de la même façon que la partie médiane de la géométrie. Le nombre de Mach vaut 0, 5.



FIG. 5.19: Valeurs de l'amplitude de l'optique géométrique sur la première trace laissée par le faisceau du mode (0; 3) sans écoulement, à gauche, et avec un écoulement uniforme, à droite

Les champs du mode (0; 3) étant à symétrie cylindrique, le faisceau doit se propager symétriquement par rapport au plan de symétrie de la surface diffractante. Sur les figures (5.19), les deux faisceaux vérifient à peu près cette propriété. Sur la figure de gauche, la répartition de l'amplitude a une allure classique. Sur la partie cylindrique horizontale de la géométrie, celle-ci est constante et, pour les impacts situés à l'intérieur du cylindre de départ, elle est plus élevée alors que, pour les impacts situés à l'extérieur, elle est plus faible. Les directions de propagation de départ induisent un éclairage rentrant plus profondément dans la géométrie pour les parties éloignées du plan de symétrie.

Sur la figure de droite, l'écoulement concentre certes légèrement le faisceau, mais il crée surtout une forte disymétrie entre la partie haute et la partie basse du faisceau. Comme les champs modaux ne prennent pas en compte la composante verticale de la vitesse, l'amplitude est stratifiée. Les rayons orientés vers le bas étant accélérés alors que les rayons orientés vers le haut sont ralentis, l'éclairage prend un aspect oblique.

La phase pour les faisceaux du mode (2; 3) sur les figures (5.20) présentent des caractéristiques similaires aux amplitudes des figures (5.19). La discontinuité est un saut de 2π qui est transparent une fois le champ recomposé. A gauche, la phase s'enroule correctement autour de la partie cylindrique horizontale et, pour les rayons s'éloignant vers l'intérieur de la géométrie, elle augmente linéairement en fonction de la distance parcourue. A droite, l'écoulement uniforme semble concentrer encore plus le faisceau qui reste confiné presque exclusivement dans la partie horizontale. L'enroulement de la phase est encore plus marquée car elle est accentuée orthogonalement à l'oblicité de l'éclairage.



FIG. 5.20: Valeurs de la phase de l'optique géométrique sur la première trace laissée par le faisceau du mode (2;3) sans écoulement à gauche et avec un écoulement uniforme à droite

Les constatations basiques concernant la forme de l'éclairage à la première interaction indiquent que l'initialisation des modes est correctement faite et que le champ uniforme est bien pris en compte. Cependant, la modélisation atteint ses limites puisqu'un écoulement physique serait horizontal dans la partie horizontale de la géométrie et qu'ainsi l'éclairage au voisinage du plan d'entrée, aussi bien dans sa forme que pour les répartitions d'amplitude et de phase, serait peu différent de l'éclairage sans écoulement.



FIG. 5.21: Amplitude sur le faisceau du mode (2;3) pour la propagation sans écoulement lors de la troisième interaction

Sur la figure (5.21), par rapport aux figures (5.20) et (5.19), l'orientation de l'axe horizontal a changé de sens et le faisceau se situe dans la partie "montante" de la géométrie. Quelques rayons ont déjà été évacués par l'embouchure et la répartition de l'éclairage reste cohérente. L'amplitude a un niveau comparable à celui de l'amplitude à la première interaction sauf en deux endroits. La propagation étant guidée par une section transverse de rayon constant, l'amplitude est nettement modifiée uniquement au voisinage des caustiques.

A cette étape de la propagation, deux manifestations de la présence de caustiques sont détectables. Sur la partie basse du faisceau, une ligne située sur le plan de symétrie de la géométrie sépare nettement le faisceau en deux parties non identiques mais fortement similaires. Bien que le rayon de courbure du front d'onde semble nul, il n'y a pas de repliement du faisceau. A l'opposé, en haut, le faisceau semble s'être retourné en créant un "nœud" et une discontinuité. Une analyse plus profonde serait à la fois très difficile et inutile puisque l'important réside dans la somme finale des contributions pour le calcul du rayonnement vers l'extérieur. Cependant, cette étude montre à la fois la complexité de la propagation et la puissance des rayons qui permettent de comprendre les "chemins" empruntés par le son et fournissent des solutions cohérentes à partir de trajectoires *a priori* isolées.

5.3.3 Rayonnements de deux sources classiques

Les premiers calculs effectués sur la géométrie du S-duct ont été initialisés par des sources classiques : ponctuelle et plane. A cause de la particularité de la géométrie, les résultats se sont avérés plus convaincants que les résultats obtenus avec les mêmes sources et le cylindre à section transverse circulaire constante. Dans la suite, pour se forger une idée de la pertinence des solutions, les convergences en fonction du nombre de contributions prises en compte sont étudiées avant d'estimer l'influence de la fréquence.



FIG. 5.22: Rayonnements avec ka = 7,7 obtenus en fonction du nombre de contributions prises en compte pour le calcul à partir de la source ponctuelle à gauche et à partir de la source plane à droite

Comme dans les deux cas un nombre élevé d'interactions est nécessaire pour obtenir la convergence et bien que les comportements soient totalement différents, il semblait judicieux de comparer les deux figures du (5.22). Pour la source ponctuelle, à gauche, aucune convergence n'est décelable avant la prise en compte de 23 contributions mais elle est effective avec 27. A l'inverse, pour la source plane, avec cinq contributions, les directions principales de rayonnement apparaissent mais il faut au total en prendre 20 pour converger totalement.

La forme de la géométrie en entrée est peu différente de celle d'un cylindre de section transverse circulaire constante. Dans le cas de la source ponctuelle, les mêmes difficultés de convergence devraient donc apparaître. En effet, dès la première interaction des rayons sortent par l'embouchure et à chaque interaction de nouveaux rayons viennent enrichir les niveaux du rayonnement vers l'extérieur. Cependant, le "S" que décrit la ligne moyenne induit une forme de confinement supplémentaire et, bien qu'une partie du faisceau soit emprisonnée, aucun rayon ne sort par l'embouchure après la vingt-septième interaction. Ce tarissement est relativement progressif puisque les quatre dernières interactions ne modifient pas considérablement le rayonnement. Le phénomène peut donc être considéré comme étant stable.

Dans le cas de la source plane, les choses sont totalement différentes, aucun rayon ne sort pour les premières interactions et, à partir du premier rayon sorti, cinq interactions suffisent pour donner l'aspect général du rayonnement. Par contre, il faut ensuite 15 interactions pour envoyer vers l'infini l'ensemble complet des rayons. Si cette convergence est plus stable que la précédente, sans étude particulière, rien ne permet de distinguer la différence de comportement et les temps de calculs sont les mêmes.

Les figures (5.23) présentent de grandes disparités entre les directions principales de rayonnement pour les différentes fréquences. Globalement les niveaux sont fortement relevés entre ka = 7, 7 et ka = 69. Si le rayonnement pour la fréquence la plus basse est mis de côté, les niveaux moyens entre ka = 23, 46 et 69 sont plus cohérents mais les modifications des directions principales de rayonnement demeurent.

Pour la source ponctuelle sur la figure de gauche, à ka = 7, 7, le rayonnement se fait essentiellement vers le haut et un zéro apparaît pour 20° vers le bas. A ka = 23, le nombre de lobes de rayonnement a augmenté normalement et la nouvelle répartition réduit l'écart entre les rayonnements vers le haut et vers le



FIG. 5.23: Rayonnements obtenus à différentes fréquences pour la source ponctuelle à gauche et la source plane à droite

bas. En particulier, deux lobes à 75° et 50° vers le bas ne sont plus que de 5 dB inférieurs au lobe principal orienté vers le haut à 50°. Avec ka = 46, un seul lobe domine et rayonne la quasi totalité de l'énergie à 70° vers le bas. Avec ka = 69, ce lobe demeure important mais deux autres directions vers le haut à 15° et 50° doivent aussi être prises en compte. Il est possible d'envisager qu'à ka = 7,7, pour tous les angles, la phase empêche les amplitudes de s'additionner alors que le déphasage entre les faisceaux est tel qu'à ka = 46 et au delà, dans certaines directions, l'amplitude maximale est réalisée.

Pour la source plane, le rayonnement est à toutes les fréquences plus uniforme. Pourtant, si la basse fréquence ne dégage pas de direction de rayonnement particulière, les fréquences plus élevées font apparaître des lobes marqués. Ainsi, pour ka = 23, l'énergie est surtout rayonnée à 20° de part et d'autre de l'axe de l'embouchure. A ka = 46, le rayonnement se fait essentiellement vers le bas entre 20° et 60°. Enfin, avec ka = 69, un pic ressort à 40° vers le bas. Compte tenu de la relative uniformisation du rayonnement pour toutes les fréquences, l'importantce de la valeur maximale doit être pondérée par la largeur du lobe la supportant.

Les analyses précédentes doivent être modérées par l'incertitude sur les résultats. En effet, comme il n'y a pas de comparaison avec des résultats obtenus par d'autres méthodes, la validité doit être estimée intrinsèquement. Or, l'expérience acquise lors de la propagation dans un cylindre au (4.4) conduit à penser que, malgré l'obtention d'une forme de convergence, le nombre d'interactions reste élévé. Jusqu'à présent, les validations ont été effectuées pour une dizaine d'interactions maximum et une erreur acceptable a été obtenue après 20 interactions en utilisant un maillage très fin.

Pourtant, dans le cas présent, d'une part, contrairement au cylindre maillé régulièrement, la forme complexe de la géométrie ne devrait pas induire d'exacerbation de l'erreur. D'autre part, pour la source plane, l'étude de la convergence indique qu'une répartition grossière du rayonnement est obtenue après une dizaine d'interactions seulement. Pour une première analyse, l'incertitude reste donc raisonnable.

5.3.4 Propagation modale et effets divers

Pour enrichir la connaissance du rayonnement en sortie de S-duct, des propagations à partir des champs des modes (0;3) et (2;3) ont été testés. Dans un premier temps, les réponses obtenues en atmosphère homogène sans écoulement sont comparées aux réponses obtenues avec les sources ponctuelles et planes.
Dans un deuxième temps, l'influence d'une part d'une paroi présentant une impédance et d'autre part d'un écoulement uniforme sont étudiés.



FIG. 5.24: Rayonnements obtenus en atmosphère homogène et sans écoulement à ka = 23 pour la source ponctuelle (bleu), pour la source plane (rouge), pour le mode (0; 3) (vert) et le mode (2; 3) (noir)

Par rapport aux sources ponctuelle et plane, le nombre de faisceaux sortant devant être pris en compte pour estimer le rayonnement total reste raisonnable. En effet, il faut respectivement 6 et 7 faisceaux pour les modes (0; 3) et (2; 3) pour évacuer l'ensemble des rayons au travers de l'embouchure. Le nombre d'interactions s'en trouve aussi réduit puisque chaque interaction transmet une partie de l'énergie vers l'extérieur. L'erreur due à la propagation numérique doit donc être du même ordre que pour la propagation pour ka = 18,5 des modes (0; 3) et (2; 2) dans le cylindre au (4.4).

Immédiatement, en observant les courbes de rayon-

nement pour l'ensemble des sources sur la figure (5.24), les mêmes "formes" de lobes se détachent. Certes, ni la répartition de l'énergie sur les lobes, ni le positionnement des zéros ne sont identiques. Mais, globalement, une certaine forme de cohérence se dégage. Les champs excitateurs n'ayant pas été normalisés de façon à apporter tous la même quantité d'énergie, les niveaux sont difficilement comparables d'une courbe à l'autre. L'analyse se fait donc en étudiant les différences entre les allures des courbes, c'est-à-dire en étudiant les différences de répartitions de l'énergie en fonction de l'angle.

De façon plus marquée pour le mode (0; 3) mais observable aussi pour le mode (2; 3), la répartition de l'énergie privilégie les directions proches du plan de la section transverse de sortie, orthogonalement à l'axe. Cette constatation conduit à s'interroger sur l'influence de l'embouchure. En effet, le calcul du rayonnement à partir d'une section transverse proche de l'embouchure considère les faisceaux comme des sources "plates" et, en dehors de la forme du faisceau, aucun effet de géométrie n'est pris en compte. Si, comme semblent l'indiquer les courbes verte et noire de la figure (5.24), la propagation des modes d'ordre élevé au voisinage de l'embouchure se fait essentiellement le long des parois, la forme de la lèvre de l'embouchure devrait jouer un rôle non négligeable. Ce comportement n'étant pas partagé par les propagations à partir des sources ponctuelle et plane, une connaissance précise du champ excitateur est nécessaire pour estimer l'importance du dessin de la lèvre.

Les comportements sur les figures (5.25) sont très différents suivant le mode considéré. Le rayonnement du mode (0; 3) à gauche semble plus affecté par l'introduction d'une impédance ou d'un écoulement que le mode (2; 3) à droite. Pour ce dernier, la prise en compte d'une impédance $\zeta = 10$ diminue de façon presque uniforme les niveaux de 15 dB et seul un zéro est légèrement déplacé. En réduisant la rigidité du traitement, avec $\zeta = 2$, le rayonnement est encore réduit en moyenne de 10 dB. Bien que l'effet soit plus marqué pour les angles orientés vers le bas, l'énergie se répartit encore de façon presque équilibrée entre les directions de part et d'autre de l'axe de la section transverse.

Pour le mode (0; 3), l'effet de l'impédance est nettement plus important pour les angles orientés vers le bas que pour les angles orientés vers le haut. Avec $\zeta = 10$, sur la partie en dessous de l'axe, la diminution des niveaux est de l'ordre de 15 dB en moyenne mais atteint 25 dB pour les directions proches de -90° . Sur la partie au dessus, la différence n'est plus que de 10 dB au maximum. Le rayonnement se fait donc essentiellement vers le haut à partir de 30° . L'utilisation de l'impédance $\zeta = 2$ accentue ce phénomène. Les



FIG. 5.25: Rayonnements des modes (0;3) à gauche et (2;3) à droite avec ka = 23 pour la configuration de référence (bleu) et en prenant en compte une impédance avec $\zeta = 10$ (magenta) et $\zeta = 2$ (vert) et un écoulement uniforme M = 0, 5 (rouge)

niveaux sont presque inchangés au dessus de -10° alors qu'ils sont encore réduits de 20 dB pour certains angles en dessous. Compte tenu de l'approximation liée à la méthode, le rayonnement vers le bas peut alors être considéré nul par rapport au rayonnement total.

L'introduction d'un écoulement uniforme augmente globalement les niveaux et change sensiblement la directivité. Pour les deux modes, une partie importante de l'énergie est rayonnée vers le haut entre 45° et 90°. Cependant, alors que, pour le mode (2; 3), le niveau chute brutalement de 10 dB en dessous de 45° , une légère décroissance apparaît pour le mode (0; 3). Dans le premier cas, des lobes sont fortement marqués et ils sont totalement lissés dans le second. Ainsi, le rayonnement pour les angles négatifs est presque uniforme à 5 dB en dessous du maximum pour le mode (0; 3).

Le comportement longitudinal du mode (2; 3) est théoriquement proche de celui du mode (0; 3) même si la ressemblance est moins marquée que pour le mode (2; 2). Les nombres d'interactions nécessaires dans les deux cas pour propager totalement le faisceau en témoignent. Les effets différents produits par l'introduction d'une impédance ou d'un écoulement semblent donc liés au comportement transversal. Il est effectivement naturel d'imaginer que le "S" n'influence pas de la même façon une propagation symétrique par rapport au plan de symétrie de la géométrie et une propagation tournant autour de sa ligne moyenne dans un sens ou dans l'autre.

Par rapport aux résultats obtenus avec la propagation dans un cylindre au (4.5.1), les modes considérés et la valeur de ka conduisent à étudier les différences avec la propagation des modes (0;3) et (2;2) pour ka = 18, 5. De plus, les nombres d'interactions sont identiques. Pourtant, la taille des lobes et l'influence de l'impédance ressemblent davantage au comportement observés à ka = 46, 2. Un étude plus complète incluant les résultats obtenus par une méthode modale semble donc nécessaire pour comprendre éventuellement la structure modale du champ à l'embouchure du S-duct.

* * *

Malgré la complexité de la géométrie, la méthode de "lancer de rayons" se comporte correctement dans toutes les configurations. Elle fournit des solutions pertinentes pour toutes les sources et tous les effets

envisageables. Pour conclure définitivement sur la validité des résultats, un maillage plus dense devrait être testé. Le faible coût de calcul d'une nouvelle série de configurations incite à réduire au maximum l'incertitude liée aux aspects numériques. Les approximations théoriques étant plus facilement analysables, un calcul utilisant une autre méthode permettrait de valider l'ensemble des estimations. Pour cela, avec un écoulement uniforme, comme cela a été fait avec l'empennage, une méthode "BEM" est envisageable et, avec un écoulement plus réaliste, [¹⁴] fournit une méthode modale.

L'analyse effectuée permet de mesurer la part de l'énergie susceptible de se propager vers le bas. Une fois la géométrie positionnée à sa place au sein d'un avion complet, ce rayonnement peut non seulement être un champ direct préjudiciable, mais en plus interagir avec le fuselage et créer des contributions difficiles à évaluer avec les méthodes classiques. Une analyse plus complète pourrait étudier en détail les zones éclairées de la surface diffractante et en déduire des modifications ciblées. Pour estimer un rayonnement global, l'utilisation d'une géométrie "entière" et d'une surface de Kirchhoff transparente est nécessaire. De plus, compte tenu de la nature de l'éclairage, l'introduction de rayons rampants apporterait des contributions non négligeables. A ce stade de complexité, il faudrait comparer les contributions provenant des différentes sources car seules les zones d'ombre effectives nécessitent d'utiliser de nouveaux champs pour augmenter la précision.

* * * * *

L'étude des différents résultats fournis par la méthode de "lancer de rayons" sur des configurations industrielles a montré que :

- des modifications de quelques dizaines de centimètres à partir d'une configuration de référence sont détectables,
- le classement de différentes architectures en fonction de la nuisance perçue au sol est possible,
- et que des géométries guidant en partie la propagation peuvent être prises en compte.

La validation effectuée pour l'empennage peut être réalisée pour chaque nouvelle situation. La méthode peut être utilisée à trois moments de la conception. Au moment d'estimer le rayonnement avec une forme générique, la connaissance des erreurs commises par la méthode sur des configurations de référence permet une première analyse. Au moment de choisir une géométrie précise, en complément d'un calcul plus "coûteux", la méthode permet de discriminer des dérivées autour d'une configuration de base. Enfin, pour l'estimation du rayonnement global, la rapidité de sa mise en œuvre et la prise en compte de l'écoulement permettent de compléter les méthodes empiriques.

L'amélioration de l'estimation donnée par la méthode peut se faire suivant trois directions. La plus évidente concerne l'aspect numérique. L'utilisation de maillages adaptés sur lesquels les quantités définissant la courbure seraient reportées et une meilleure définition des intersections des rayons avec les surfaces diffractantes réduiraient facilement et considérablement l'erreur. Du point de vue théorique, l'utilisation d'une phase complexe et la décomposition des faisceaux en des faisceaux élémentaires devraient apporter suffisamment de diffusion transverse pour obtenir de bien meilleurs résultats au voisinage des caustiques. Enfin, il reste beaucoup à faire concernant une prise en compte efficace de la diffraction avec un écoulement non uniforme. En effet, dans le cas d'un écoulement uniforme, la technique de l'optique physique estime la diffraction dans le calcul du rayonnement. Mais elle présente certains inconvénients évoqués dans les paragraphes précédents. Dans le cas d'un écoulement hétérogène ou pour mieux tenir compte de l'épaisseur de la géométrie, des champs diffractés doivent être introduits. Si ces champs sont connus analytiquement, la mise en place pratique est complexe et risque d'être coûteuse. D'autres possibilités comme l'introduction d'une diffusion artificielle sur les faisceaux réfléchis proches des discontinuités sont peut-être envisageables.

Pour être complet, ce chapitre aurait dû comporter des calculs faisant intervenir des écoulements hétérogènes tels que des jets ou des tourbillons. Cependant, de tels résultats n'ont pas pu être validés pendant la durée de la thèse. Bien qu'aucun exemple ne soit montré, l'auteur espère avoir convaincu le lecteur de la possibilité de combiner sans surcoût de développement les effets géométriques présentés dans ce chapitre et les effets d'écoulements présentés au (3.3). Des solutions pertinentes peuvent ainsi être obtenues pour des configurations industrielles en utilisant les champs décrits en annexe au (G). Une modélisation plus précise de l'écoulement moyen consisterait à interpoler des champs issus d'une estimation numérique. Cependant, cette technique ne changerait sans doute pas beaucoup l'aspect global des solutions. La lourdeur de sa mise en œuvre ne serait donc pas justifiée. La problématique consiste à garantir une efficacité globale. Compte tenu des approximations faites par ailleurs, une bibliothèque d'éléments macroscopiques d'écoulements à partir de laquelle un écoulement représentatif pourrait être recomposé semble plus adaptée à la méthode.

Conclusion

L'objectif de cette thèse a été atteint avec le développement d'un nouvel outil pour calculer le bruit rayonné par les avions. La méthode utilisée traite différentes formes de sources localisées et réparties indifféremment au voisinage de l'avion. Elle s'affranchit aussi des problèmes liés aux hautes fréquences.

Des études antérieures suggéraient de s'inspirer de méthodes de résolution à base de rayons. Il fallait donc formaliser cette approche et aboutir à un code de calcul "industriel". Pour ce faire, les travaux ont été scindés en une partie théorique et une partie numérique et applicative. En dehors du rappel des bases de l'aéroacoustique, la première s'est traduite par l'identification de trois problématiques : l'approximation "hautes fréquences", les résolutions à base de rayons et le traitement des singularités. En utilisant des considérations algorithmiques et numériques diverses, un code de calcul complet a ensuite été élaboré. Les premières utilisations ont contribué à le valider, à tester la méthode et à vérifier son efficacité pour des cas industriels. Les développements théoriques évoqués peuvent être retrouvés en annexe.

Le rappel des principes de base de l'aéroacoustique dans la première partie a permis d'identifier les équations d'Euler linéarisées comme la modélisation physique adéquate. Elles permettent de prendre suffisamment en compte l'écoulement sans compliquer à outrance les équations. Le comportement ondulatoire des perturbations acoustiques motive l'utilisation d'une grille descriptive proche de celle de l'équation des ondes. En fonction de la source de bruit envisagée, il est parfois plus efficace de réaliser soit un calcul temporel si de nombreuses fréquences sont présentes dans le spectre, soit un calcul fréquentiel si le spectre est essentiellement composé de raies. Ici, la dépendance temporelle a été simplifiée afin de ne considérer que les ondes monochromatiques.

A partir de la dénomination générique "méthode de rayons", la deuxième partie a commencé par étudier l'aspect "approximation hautes fréquences". Pour s'affranchir de la dépendance trop importante des fonctions vis-à-vis de la phase, l'Ansatz et le développement asymptotique correspondant à l'optique géométrique ont été introduits dans les équations d'Euler linéarisées. L'équation iconale et l'équation de conservation de l'invariant de Blokhintzev ont été retrouvées. Le rapport entre la longueur d'onde et la dimension caractéristique des solides est le paramètre communément utilisé pour définir la validité de la méthode. En réalité, une étude plus précise montre que ne pas prendre en compte une partie de la diffusion crée une erreur dépendant de la courbure du front d'onde, c'est-à-dire de la source et de la forme de la géométrie, ainsi que des variations du champ moyen. Les conséquences sur les solutions et sur les équations des effets non considérés par l'approximation ont pu être estimées. Pour les calculer numériquement, des équations *ad hoc* ont été obtenues en vue d'une maîtrise de l'erreur globale.

La résolution proprement dite par "méthode de rayons" a consisté d'abord à calculer des trajectoires pour résoudre l'équation iconale, puis à intégrer l'équation de conservation. L'utilisation d'une approche complètement locale a permis de mieux comprendre les phénomènes apparaissant le long de la propagation. Ainsi, les problèmes liés à l'absence d'épaisseur autour des rayons ont été résolus grâce à la notion de faisceaux et à l'utilisation d'une phase complexe. En poursuivant le raisonnement, une nouvelle méthode de calcul construisant une base support et décomposant *a posteriori* les champs sources a été développée. Elle permet de prendre en compte une certaine forme de diffraction/diffusion et donc de diminuer l'erreur commise par l'approximation hautes fréquences.

Afin de traiter la présence de surfaces solides faisant obstacle à la propagation, l'Ansatz de l'optique géométrique et les développements asymptotiques ont été appliqués dans des modélisations classiques faisant intervenir des impédances. Les nouvelles équations obtenues fournissent un moyen de prendre systématiquement en compte l'effet d'un écoulement non uniforme sur les fronts d'onde réfléchi et transmis. Les formes classiques de diffraction ayant été modifiées de la même façon, les applications numériques peuvent bénéficier de l'ajout de contributions supplémentaires donnant aux champs obtenus dans les zones d'ombre un aspect plus "physique".

La partie théorique a servi de base pour la construction du code de calcul. La construction et l'utilisation de ce dernier forment le sujet principal du manuscrit. L'algorithme décrit s'appuie sur une discrétisation sous forme de maillages, aussi bien pour les surfaces que pour les faisceaux. Les sources d'erreur numérique sont l'intégration des trajectoires et la décomposition du champ incident. La première est traitée grâce à une intersection précise avec les surfaces et à un pas de temps qui s'adapte en fonction, entre autres, de la valeur numérique du hamiltonien. La deuxième bénéficie d'une interpolation qui résout de manière exacte les champs sphériques et d'une décomposition en faisceaux optimisée. Le principal facteur d'erreur demeure la différence entre les facettes du maillage et la surface "réelle".

Le code développé donne des résultats satisfaisants sur les premières applications calculées. Grâce à l'utilisation de champs moyens analytiques, il permet de calculer la propagation des ondes sonores au sein d'écoulements de référence comme lors de l'interaction avec un tourbillon, un jet ou une couche limite. Par ailleurs, la prise en compte de réflexions successives sur des surfaces absorbantes et la construction de dioptres sources adaptés offrent la possibilité d'estimer les phénomènes propres aux ondes guidées.

Les configurations "industrielles" testées montrent que la méthode fournit effectivement une meilleure estimation du bruit rayonné que celles obtenues avec les outils habituellement utilisés. La multi-réflexion permet de prendre en compte l'interaction entre le fuselage et la voilure ou la partie horizontale de l'empennage. Pour des données réalistes, les champs moyens analytiques varient suffisamment lentement pour que l'approximation demeure valable. Elle crée néanmoins des modifications de l'environnement sonore qui peuvent être détectées par la projection des champs obtenus ou par les calculs de rayonnement.

De nombreuses perspectives peuvent être envisagées dans la continuité de ce travail. A chaque étape du développement, des pistes de recherches ont été esquissées. Il faut, cependant, souligner les plus pertinentes. De façon immédiate et industrielle, l'algorithme de calcul peut être amélioré pour être encore plus efficace. La possibilité de travailler directement sur la géométrie réelle sans passer par une discrétisation facettée apporterait un gain significatif sans nécessiter de développements lourds. La précision des interactions permise par une géométrie "continue" diminuerait les problèmes de rayons perdus et d'intersections intempestives. Un traitement automatique de la diffraction sans étape d'identification manuelle des phénomènes serait aussi un facteur de gain important.

Pour obtenir de meilleures approximations, différents aspects peuvent être abordés. D'un point de vue industriel, le calcul de la propagation à partir de champs moyens numériques serait intéressant. Cependant, un tel calcul nécessite une interpolation rapide et robuste du champ moyen. La création d'une base de phénomènes macroscopiques permettant de décrire un champ grossier au voisinage d'un avion à partir de

quelques paramètres pourrait la réaliser. Par ailleurs, l'ajout des contributions liées aux rayons rampants pourrait induire des modifications importantes des résultats, notamment dans les zones d'ombre. D'un point de vue théorique, une stratégie générale de discrétisation d'un champ quelconque sur une surface présentant des singularités assurerait la description intrinsèque de phénomènes diffractifs supplémentaires et, ainsi, réduirait l'erreur. Une estimation globale et systématique de la précision pourrait alors être envisagée.

A plus long terme et en s'éloignant de la méthode particulière développée dans le cadre de cette étude, l'utilisation d'autres axes pour traiter les hautes fréquences sont possibles. D'abord, la mise au point de solveurs volumiques pour résoudre l'équation iconale et l'équation de conservation permettrait de bénéficier de formalismes mathématiques plus rigoureux. Cette approche ne deviendra intéressante que si les calculs se font suffisamment rapidement, tout en assurant un niveau de précision fixé. Ensuite, à partir des méthodes développées pour l'équation de Helmholtz, en s'appuyant soit sur une résolution des équations à l'aide d'une base de fonction adaptée, soit sur l'utilisation de fonctions transformées, un traitement des hautes fréquences sans approximation est envisageable. Annexes

Annexe A Modélisations en aéroacoustique

La particularité essentielle de l'aéroacoustique réside dans la description de la création et de la propagation des ondes sonores à partir du comportement macroscopique des fluides. Elle doit donc étudier, d'une part, les mécanismes détaillés par la mécanique des fluides conduisant à la formation d'ondes sonores et, d'autre part, l'interaction entre l'écoulement et des ondes sonores excitées par des phénomènes extérieurs.

Historiquement, l'aéroacoustique a longtemps cherché à étudier les comportements des ondes sonores dans l'air grâce à l'utilisation astucieuse des méthodes développées pour la propagation d'ondes quelconques. Les développements récents ont été nombreux et ont rapproché les problématiques de celles de la mécanique des fluides, notamment d'un point de vue numérique. Les généralités concernant les phénomènes sont en grande partie connues depuis un demi-siècle et la description faite dans la suite s'appuie essentiellement sur [¹¹] pour la partie mécanique des fluides, sur [⁵⁸] pour les phénomènes acoustiques et sur [⁶²] pour tout ce qui est propre à l'aéroacoustique.

Avant d'aborder la description de la méthode développée dans cette étude, il est important de construire des bases solides concernant le type de problèmes qui doivent être résolus. Ainsi, dans une première partie, la modélisation communément utilisée pour traduire les comportements des fluides est introduite. Puis, de façon plus particulière, la propagation aéroacoustique est mise en évidence. Enfin, les propriétés ondula-toires sont décrites.

A.1 De la mécanique des fluides

L'acoustique est essentiellement l'étude de la création, de la propagation et de l'interaction avec l'environnement de phénomènes instationnaires. Or, il ne peut y avoir présence d'ondes mécaniques que s'il existe un médium baignant l'espace où les phénomènes ont lieu. La description et la compréhension des comportements de ce médium sont donc fondamentales.

Dans certains cas pour lesquels le milieu est "quasi inerte", une modélisation très simple peut être utilisée. La description des phénomènes instationnaires peut alors se faire à l'aide d'une seule quantité physique, comme, par exemple, la pression. Pour d'autres cas et, en particulier, pour les cas intéressant cette étude, le médium doit être décrit plus précisément. Dans le cas de la propagation acoustique dans un fluide, c'est naturellement les équations de la mécanique des fluides qui décrivent les phénomènes. Ainsi, dans la partie suivante, les principes de base décrivant le comportement de l'air sont repris.

Dans un premier temps, le système des équations d'évolution est décrit sous une forme générale. Ensuite, des considérations thermodynamiques permettent de limiter le nombre de variables et de donner différentes formes pour les équations. Enfin, plusieurs comportements particuliers intéressants pour cette étude sont plus particulièrement spécifiés.

A.1.1 Lois de conservation

Pour établir les équations régissant le comportement macroscopique des fluides, il faut considérer un élément de fluide en équilibre. Les équations classiques de la mécanique permettent alors de déduire une formulation intégrale qui, grâce à un calcul infinitésimal, aboutit à une forme différentielle.

Le principe de conservation appliqué sur le domaine Ω de frontière S donne :

- pour la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{S} \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} w d\Omega, \text{ soit, dans sa forme différentielle, } \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \right|$$
(A.1)

 ρ désignant la masse volumique, v le vecteur vitesse, w le flux massique venant de l'extérieur et dS l'élément de surface orienté vers l'extérieur.

- pour la quantité de mouvement :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{v}) d\Omega + \oint_{S} (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{f_e} d\Omega + \oint_{S} \overline{\overline{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{S}$$
(A.2)

avec f_e la somme des forces extérieures et $\overline{\overline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Reynolds. La forme différentielle correspondante est :

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \overline{\overline{\sigma}}) = \rho \boldsymbol{f_e}$$
(A.3)

qui peut se réécrire en utilisant (A.1) :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) - \nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}} = \rho\boldsymbol{f_e}$$
(A.4)

- et pour l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \varepsilon d\Omega + \oint_{S} \rho \boldsymbol{v} \varepsilon \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} (\rho \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{v} + q_{H}) d\Omega + \oint_{S} (\overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{Q}) \cdot d\boldsymbol{S}$$
(A.5)

On note ici q_H la source de chaleur, Q le flux de chaleur sortant de Ω et $\varepsilon = e + (1/2)v^2$ avec e l'énergie interne. La forme différentielle associée est :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\varepsilon + \boldsymbol{Q} - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}) = \rho \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{v} + q_H$$
(A.6)

Toutes les équations étant des équations de conservation, le système ainsi obtenu peut se mettre sous la forme :

$$\partial_t \boldsymbol{W} + \nabla \cdot \overline{\overline{F}}(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{S} \tag{A.7}$$

avec W le vecteur constitué des variables et $\overline{\overline{F}}$ un tenseur ayant 3 colonnes.

Pour décrire complètement le fluide, il faut ajouter à ces équations mécaniques des équations décrivant l'aspect thermodynamique.

A.1.2 Au voisinage de l'équilibre thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique indique que, pour un fluide en équilibre thermodynamique local, seules deux variables intrinsèques suffisent à décrire l'état du fluide. En choisissant les variables (ρ, s) , l'équation fondamentale donne $de = Tds - pd\rho^{-1}$ (ou $dh = Tds + dp/\rho$ avec $h = e + p/\rho$) et les définitions thermodynamiques $T = (\partial_s e)_{\rho}$ et $p = \rho^2 (\partial_{\rho} e)_s$ sont obtenues. Par ailleurs, il est d'usage d'introduire la célérité du son $c^2 = (\partial_{\rho}p)_s$, à laquelle $\alpha = (\partial_s p)_{\rho}$ peut être associée. A 0°C, la vitesse du son dans l'air sec est environ égale à 331 $m.s^{-1}$. Par analogie à la vitesse de la lumière dans le vide, la vitesse du son de référence pour la propagation dans l'air est souvent définie comme étant égale à 340 $m.s^{-1}$ ce qui correspond avec la loi empirique $c = 331 + 0, 6T_c$ à une température de 15°C.

La loi d'état relie, par exemple, la pression, la masse volumique et la température $F(T, p, \rho) = 0$ ce qui donne $\partial_T F dT + \partial_p F dp + \partial_\rho F d\rho = 0$. Avec $\theta \frac{dT}{T} + \zeta \frac{dp}{p} + \eta \frac{d\rho}{\rho} = 0$, α est donnée par

$$(\partial_p h)_T = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{c_p T}{c^2} \left(\frac{\eta}{\theta} + \frac{\zeta}{\theta} \frac{\rho c^2}{p}\right)\right) \text{ et } \alpha = \frac{\theta}{\eta} \frac{\rho c^2}{c_p}$$
(A.8)

avec $-\theta/\eta = (T/\rho)(\partial_T \rho)_p, -\beta/\theta = (p/T)(\partial_p T)_\rho$ et $c_p = (\partial_T h)_p$.

En suivant ce raisonnement, plusieurs relations sur les variations peuvent être obtenues

$$dp = (1 - \frac{\theta p}{\eta c_p T \rho})c^2 d\rho + \frac{\theta \rho c^2}{\eta c_p T} de \text{ et } d\rho \varepsilon = (e - \frac{(\rho v)^2}{2\rho^2})d\rho + \rho de + \frac{\rho v}{\rho} d\rho v$$
(A.9)

donc

$$dp = c^2 \left(d\rho + \frac{\theta}{\eta c_p T \rho} \left(\rho d\rho \varepsilon - \rho \boldsymbol{v} d\rho \boldsymbol{v} - (\rho \varepsilon + p - \frac{(\rho \boldsymbol{v})^2}{\rho}) d\rho \right) \right)$$
(A.10)

Au voisinage de l'état d'équilibre (basses fréquences et faibles variations spatiales), classiquement, le flux de chaleur peut être modélisé par la loi de Fourier : $Q = -\kappa \nabla T$. Comme la plupart des fluides ont un comportement Newtonien, c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la vitesse de

cisaillement ou que la viscosité dynamique ne dépend que des variables "thermodynamiques", le tenseur des contraintes peut s'écrire :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma_n \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}} + \lambda \operatorname{tr}(\overline{\overline{D}}) \overline{\overline{I}}$$
(A.11)

avec $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^t)$ et tr $(\overline{\overline{D}}) = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ et λ et μ les coefficients de Lamé. L'hypothèse de quasi-équilibre permet d'identifier la partie hydrostatique du tenseur $\sigma_n = -p$ et l'hypothèse de Stokes force $\lambda = -2\mu/3$ puisqu'elle postule que la viscosité est nulle pour les changements de volume.

Ainsi, l'équation (A.3) peut s'écrire

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p - \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} = \rho \boldsymbol{f_e}$$
(A.12)

avec $\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\sigma}} + p\overline{\overline{I}}$. De plus, la divergence du tenseur peut s'écrire $\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} = \mu(4/3\Delta \boldsymbol{v} + 1/3\nabla \wedge (\nabla \boldsymbol{v})).$

En considérant que les relations à l'équilibre sont toujours vraies, l'équation (A.6) peut être remplacée par

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s\right) - \frac{1}{2\mu} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\tau}} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = q_H$$
(A.13)

où l'entropie *s* joue le rôle d'inconnue à la place de l'énergie. Les deux équations précédentes avec l'équation de conservation de la masse (A.1) forment le **système d'équations de Navier-Stokes**.

Le modèle initial de Stokes considère que l'absence d'équilibre thermodynamique ajoute un terme à la partie hydrostatique $\sigma_n = -p + \mu_B \nabla \cdot v$. Les effets d'absorption que modélise ce terme induisent aussi une modification de l'équation reliant l'entropie et l'énergie interne. La pleine prise en compte de cette relaxation complique énormément les équations car plusieurs températures doivent alors être définies. Il sera donc plus pratique, si cela est nécessaire, de la prendre en compte par un autre mécanisme numérique comme, par exemple, l'ajout de dispersions ou de dissipations supplémentaires.

A.1.3 Changements de variables

La formulation (A.7) utilisant les variables conservatives $(\rho, \rho v, \rho \varepsilon)$ permet d'appréhender beaucoup de phénomènes et de simplifier certaines applications numériques. Le calcul des variables supplémentaires présentes dans les équations telles que p et Q peut être fait en parallèle mais les analyses doivent tenir compte du fait que leur présence masque les interactions effectives entre les variables de référence. De plus, les variables conservatives ne sont pas nécessairement les plus représentatives des phénomènes. Ainsi, grâce à la description thermodynamique du fluide faite au (A.1.2), il est opportun de réécrire les équations en fonction d'autres variables. Dans la suite, les passages d'un jeu de variables à un autre ne sont pas toujours réalisés de façon évidente et des variables de plusieurs jeux peuvent coexister dans les équations. Il ne s'agit donc pas ici de figer des expressions mais de se familiariser avec les différentes relations.

Avec la donnée de l'équation d'état, le système des équations est fermé. Le nombre d'équations liant les variables permet de résoudre le système et les équations du (A.1.1) peuvent être écrites indifféremment en fonction du triplet de variables (p, v, s), du triplet de variables $(\rho, \rho v, s)$, du triplet de variables (ρ, v, p) ou de tout autre triplet de variables.

Ainsi, p peut être éliminée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{\theta c^2}{\eta c_p}\nabla s\right) + c^2\nabla\rho - \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}} = \rho\boldsymbol{f_e}$$
(A.14)

et $\kappa \nabla T$ et $\overline{\overline{\tau}}$ peuvent s'écrire en fonction de $(\rho, \rho v, s)$. Le système ainsi obtenu a certes perdu son caractère conservatif, mais son interprétation dynamique est plus aisée.

A l'inverse, le flux de chaleur peut s'écrire $Q = -(\kappa T(\frac{\nabla s}{c_p} - (\frac{\zeta}{\theta} + \frac{\eta}{\theta}\frac{p}{\rho c^2})\frac{\nabla p}{p}))$ et l'équation de conservation de la masse devient, en utilisant (p, v, s),

$$\partial_t p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \frac{\theta}{\eta c_p} \left(\frac{1}{2\mu T} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\tau}} \dots \right)$$

$$\dots + \nabla \kappa \cdot \left(\frac{\nabla s}{c_p} - \left(\frac{\zeta}{\theta} + \frac{\eta}{\theta} \frac{p}{\rho c^2} \right) \frac{\nabla p}{p} \right) + \kappa \left(\frac{\Delta s}{c_p} - \left(\frac{\zeta}{\theta} + \frac{\eta}{\theta} \frac{p}{\rho c^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \right) \dots$$

$$\dots + \frac{\kappa}{T} \left(-\partial_p \left(\frac{T}{p} \left(\frac{\zeta}{\theta} + \frac{\eta}{\theta} \frac{p}{\rho c^2} \right) \right) (\nabla p)^2 + 2\partial_p \left(\frac{T}{c_p} \right) \nabla p \cdot \nabla s + \partial_s \left(\frac{T}{c_p} \right) (\nabla s)^2 \right) \right) = \frac{\theta}{\eta c_p T} q_H$$
(A.15)

dans laquelle ρ et T apparaissent explicitement et doivent être calculées grâce à l'équation d'état. Cette équation montre qu'une description complète et explicite du comportement d'un fluide à l'aide d'un jeu de variables restreint conduit à des équations dont l'analyse est difficile.

En fait, chaque problème a son triplet de variables privilégié. En effet, si la résolution des équations se fait à l'aide d'une méthode volumique conservative, les variables conservatives (ρ , ρv , $\rho \epsilon$) seront les plus intéressantes et p pourra être calculée grâce à l'équation d'état. Par contre, l'analyse du problème peut nécessiter de diagonaliser le système et les variables (ρ , v, s) sont alors plus efficaces car elles permettent d'écrire le système sous la forme

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = S_{\rho}, D_t \boldsymbol{v} + \frac{c^2 \nabla \rho + \alpha \nabla s}{\rho} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}} \text{ et } D_t s = S_s$$
(A.16)

où D_t est l'opérateur de dérivation suivant l'écoulement. Par ailleurs, d'autres jeux de variables peuvent être utilisés pour "symétriser" le système ou pour mettre en avant d'autres propriétés.

In fine, le triplet de variables privilégié pour étudier les phénomènes aéroacoustique est (p, v, s). Cependant, son utilisation ne devient évidente qu'après avoir fait certaines hypothèses. Ainsi, dans la suite, la masse volumique et la pression sont présentes simultanément dans les équations jusqu'à ce que le développement permette son remplacement sans compliquer inutilement les expressions.

A.1.4 Modèles de fluides

Les équations précédentes sont valables pour un grand éventail de fluides et, dans le cadre de la présente étude, plusieurs hypothèses simplificatrices concernant le comportement du fluide peuvent être faites. Cependant, les approximations réalisées dans la suite doivent tenir compte de la description approchée du fluide utilisée. Ainsi, au delà de la simplification communément admise, ce paragraphe décrit plusieurs comportements annexes.

Gaz parfaits

Il s'agit maintenant d'adopter une modélisation pour le comportement du fluide. Parmi les fluides, plusieurs catégories peuvent être discernées en fonction de la loi d'état choisie. Parmi les gaz, les gaz parfaits vérifient la loi pV = NRT ou $pm = \rho RT$ où m est la masse molaire car $\rho V = mN$ où N est le nombre de moles. D'autres modèles peuvent être cités comme les gaz de Van der Vaals $(p + \rho^2 a/m^2)(m/\rho - b) = \rho RT$ où les molécules ne sont plus modélisées par des points mais par de petites sphères, ou comme les gaz vérifiant l'équation du viriel $\rho m = RT(1 + b_1(T)/V + b_2(T)/V^2 + ...)$.

Dans le cas du gaz parfait, $\theta = 1$, $\zeta = -1$, $\eta = -1$ et, avec l'hypothèse adiabatique de Laplace, $\rho c^2 = \gamma p$ où γ est le rapport des chaleurs spécifiques (c_p/c_v), les équations (A.1.3) deviennent donc

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} + c^2 \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\nabla s}{c_p}\right) - \frac{\nabla \cdot \overline{\tau}}{\rho} = \boldsymbol{f_e}$$
(A.17)

et

146

$$\partial_t p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{2\mu T} \overline{\tau} : \overline{\tau} \dots \right)$$

$$\dots + \nabla \kappa \cdot \left((1 + \frac{p}{\rho c^2}) \frac{\nabla p}{p} + \frac{\nabla s}{c_p} \right) + \kappa \left(\frac{\Delta s}{c_p} + (1 + \frac{p}{\rho c^2}) \frac{\Delta p}{p} \right) \dots$$

$$(A.18)$$

$$\dots + \frac{\kappa}{T} \left(\partial_p (\frac{T}{p} (1 + \frac{p}{\rho c^2})) (\nabla p)^2 + 2 \partial_p (\frac{T}{c_p}) \nabla p \cdot \nabla s + \partial_s (\frac{T}{c_p}) (\nabla s)^2 \right) = -\frac{q_H}{c_p T}$$

Il faut noter que, parmi les quantités introduites, certaines sont dépendantes des conditions thermodynamiques comme c^2 alors que d'autres caractérisent la nature du gaz comme c_p .

Par ailleurs, dans la pratique, la viscosité et la conductivité thermique sont reliées par le nombre de Prandtl $P_r = \mu c_p / \kappa$. Pour les gaz, ce nombre est considéré constant $Pr = 4\gamma/(9\gamma - 5)$. Pour d'autres fluides, il peut dépendre de ρ , s, T, etc.

La séparation faite ici, pour l'organisation des développements, entre la thermodynamique et la mécanique de l'écoulement est virtuelle et les relations utilisées liant les différentes quantités ne peuvent être considérées valables que pour une certaine approximation. Dans certains cas particuliers, notamment dans le cas de propagation hautes fréquences et/ou sur de longues distances, les simplifications énoncées sont sujettes à caution.

Fluides parfaits

Si les termes liés à la viscosité et à la conductivité thermique ne sont pas pris en compte, le fluide est dit parfait et cette modélisation conduit au **système d'équations d'Euler**. Elles dérivent des équations de Navier-Stokes lorsque le nombre de Reynolds $(v\rho d/\mu)$ tend vers l'infini. En fait, l'augmentation du nombre de Reynolds s'accompagne d'une diminution de l'épaisseur de la couche limite où ces termes ont une influence non-négligeable.

Les équations (A.4) et (A.13) deviennent :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right) + \nabla p = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}} \text{ et } \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s\right) = S_s$$
(A.19)

ce qui, sans apport d'énergie de l'extérieur, traduit le caractère isentropique de la transformation. De plus, dans ce cas, les relations thermodynamiques indiquent

$$\partial_t p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p = c^2 (\partial_t \rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho) \tag{A.20}$$

Évolution du rotationnel

Par ailleurs, il peut être intéressant d'écrire le champ de vitesse comme la somme de deux termes : $v = \nabla \phi + \nabla \wedge \psi$ avec ϕ un potentiel et ψ un vecteur. Dans ce cas, le potentiel est défini à une constante près. Comme le potentiel traduit la dilatation du fluide par $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \Delta \phi$ et le rotationnel la vorticité par $\nabla \wedge \boldsymbol{v} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\psi}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \Delta \boldsymbol{\psi}$, les différentes hypothèses faites sur ces deux quantités, comme, par exemple, pour les fluides barotopes, traduisent des comportements diverses du fluide.

L'évolution de la partie rotationnelle peut être isolée et est donnée par

$$\rho\left(\partial_t \mathbf{\Omega} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} - [\nabla \boldsymbol{v}] \mathbf{\Omega}\right) - \frac{\nabla \rho \wedge \nabla p}{\rho^2} - \mu \frac{\Delta(\rho \mathbf{\Omega})}{\rho} = \nabla \wedge \boldsymbol{f_e}$$
(A.21)

avec $\omega = \nabla \wedge \boldsymbol{v} / \rho$.

Enfin, pour les configurations étudiées, les forces volumiques extérieures sont souvent négligeables. L'apport de l'extérieur sur le système est transmis par les conditions aux limites et des forces ou des flux de chaleur ponctuels.

Les hypothèses supplémentaires qui sont faites ici et dans les autres paragraphes ne conduisent pas toutes à des problèmes mathématiquement correctement posés. En particulier, des conditions aux limites telles que la condition de Kutta doivent parfois être imposées pour obtenir des solutions acceptables.

* * *

Nous avons pu, grâce aux équations de Navier-Stokes, décrire le comportement d'un fluide quelconque. Cependant, cette description est trop générale et la résolution directe de ces équations peut s'avérer très lourde pour certains problèmes. Des adaptations et des simplifications doivent donc être appliquées.

Dans la pratique, si le milieu est supposé passif, c'est-à-dire s'il ne fait que véhiculer les perturbations, les équations d'Euler permettent de décrire avec suffisamment de précision les comportements des fluides pour mettre en évidence les phénomènes de propagation aéroacoustique. C'est donc principalement ce modèle qui sera employé dans le reste de cette étude. Cependant, des équations plus complètes doivent être utilisées pour comprendre les interactions entre les comportements acoustiques et les comportements aérodynamiques. Ainsi, les effets non modélisés par le système des équations d'Euler seront évoqués pour vérifier la validité de l'approximation.

A.2 Adaptations acoustiques

Les perturbations acoustiques de pression étant de faibles niveaux et peu amorties par les effets visqueux, le calcul simultané, avec suffisamment de précision, des effets aérodynamiques et aéroacoustiques est souvent très difficile. Pour faire ressortir les phénomènes acoustiques, plusieurs techniques sont utilisées. Concrètement, elles consistent toutes à pré-traiter les équations "analytiquement" et à "faire passer du côté droit" certains termes pour les transformer en termes sources. Les contributions liées aux termes de Navier-Stokes non présents dans Euler peuvent notamment être traitées ainsi.

L'observation du comportement des perturbations acoustiques conduit à le rapprocher de celui des solutions de l'équation des ondes. Les différentes approximations menant d'un fluide complexe au fluide "inerte" permettent de comprendre comment une description nécessitant plusieurs équations se simplifie pour donner l'équation des ondes. Deux méthodes réalisant ce passage se sont développées. La première consiste à obtenir une formulation utilisant au maximum le traitement analytique pour diminuer l'aspect numérique. La deuxième cherche à trouver de nouvelles équations adaptées aux petites perturbations.

La suite commence par décrire rapidement le principe de la première méthode qui utilise des "analogies". Puis, elle présente une linéarisation physique des équations et, enfin, identifie les simplifications conduisant à l'équation des ondes. De plus amples développements concernant la modélisation acoustique à partir des équations de la mécanique des fluides peuvent être trouvées dans [⁶²].

A.2.1 Descriptions à l'aide d'une seule équation

L'inconvénient majeur des descriptions classiques du comportement des fluides réside dans l'existence de plusieurs variables. Certaines approches ont cherché à décrire le problème grâce à une équation scalaire. Ainsi, en combinant les équations (A.1) et (A.3), on obtient :

$$\partial_{tt}\rho - \nabla \cdot \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{\tau}}\right) = \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{f_e}\right) \tag{A.22}$$

A partir de cette équation, l'**analogie de Lighthill** consiste, en ajoutant $c_0^{-2}\partial_t^2 p$ de chaque côté, à obtenir une équation sur les variations de p pour une propagation libre :

$$\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}p - \Delta p = \nabla \cdot \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \overline{\overline{\tau}}\right) - \nabla \cdot \left(\partial_{tt} \left(\frac{p}{c_0^2} - \rho\right)\right)$$
(A.23)

Le membre de droite peut alors être considéré comme un terme source constitué de deux contributions liées à l'entropie et à la partie visqueuse du tenseur des contraintes. L'avantage de cette formulation réside dans l'utilisation possible d'une formulation intégrale qui a une solution analytique. Sans surface solide, les forces extérieures ne sont pas prises en compte mais d'autres analogies dues à Curle ou Ffowcs Williams et Hawkings prennent en compte des termes sources liés à la présence de surfaces solides.

Dans ces analogies, l'opérateur de propagation est l'équation des ondes. Or, dans de nombreux cas, les phénomènes ne peuvent être décrits correctement que grâce à la prise en compte des variations de vitesse du son et du champ de vitesse. Les formulations de Phillips dans le cas général et de Lilley pour un écoulement stratifié corrigent l'opérateur de Lighthill. Cependant, si les nouvelles équations décrivent plus amplement l'opérateur de propagation et se rapprochent, ainsi, d'une équation des ondes "généralisée", elles ne peuvent être résolues analytiquement et leur utilisation reste limitée. Pour une application des

méthodes d'analogies, le lecteur peut consulter [³⁸] où elles sont utilisées pour calculer le rayonnement du bruit de jet.

La présentation rapide faite ici n'est bien sûr pas complète mais elle permet d'appréhender la diversité de la description acoustique. Les différentes analogies permettent de mieux comprendre les comportements qui apparaissent au fil du développement de cette étude. En particulier, la définition des rayons acoustiques est étroitement liée au système propagateur choisi et aux termes sources modélisés. Ainsi, une propagation rectiligne peut être pertinente, même dans un écoulement non uniforme, dès l'instant que l'amplitude de l'onde est modifiée par les effets de réfraction.

A.2.2 Linéarisation physique

Dans le cadre de l'acoustique, des niveaux de bruits à la limite de la douleur n'entraînent pas de variations des quantités à des ordres supérieurs à 10^{-3} . Il est donc naturel de considérer les perturbations liées aux phénomènes acoustiques comme petites devant les champs moyens. Dans ces cas, la linéarisation peut devenir pertinente.

Pour mesurer chaque hypothèse faite, les équations générales de la mécanique des fluides sont réécrites en séparant les variables en un champ moyen vérifiant les équations d'Euler et une perturbation. Dans les équations (A.4) et (A.13), les termes liés à la partie visqueuse du tenseur des contraintes et aux variations de température dues aux champs moyens jouent un rôle particulier. De façon rigoureuse, dans les nouvelles équations, ils devraient apparaître à la fois comme termes sources dépendant uniquement des champs moyens et comme éléments résiduels dépendant de la perturbation. Cependant, comme les dimensions physiques font de leur contribution une perturbation, ils sont représentés ici uniquement comme des termes indépendants du champ perturbé. Ainsi, les équations s'écrivent soit dans leur version conservative en introduisant une perturbation (r, ξ_r, σ) sur $(\rho, \rho v, s)$, soit dans leur version non conservative en introduisant une perturbation (π, ξ, σ) sur (p, v, s)

- pour l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t r + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r} = 0 \tag{A.24}$$

ou

$$\partial_{t}\pi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\pi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\overline{p} + \delta(\rho c^{2}) \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho}c^{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{\theta}{\eta c_{p}T} \delta(\frac{1}{2\mu}\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{\tau}}) + \nabla \cdot \delta(\kappa \nabla T)) = \frac{\theta}{\eta c_{p}T} (\delta q_{H} \dots \delta(\frac{\eta c_{p}T}{\theta}) (\partial_{t}\pi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\pi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\overline{p} + \delta(\rho c^{2}) \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho}c^{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\pi + \delta(\rho c^{2}) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})) \dots \\ \dots - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\pi + \delta(\rho c^{2}) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})$$
(A.25)

- pour l'équation sur la vitesse

$$\partial_{t}\boldsymbol{\xi_{r}} + \nabla \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\boldsymbol{\xi_{r}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{\xi_{r}} - \frac{r}{\bar{\rho}} (\overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}}) \right) \dots \\ \dots + c^{2} \nabla r + \frac{\theta \bar{\rho} c^{2}}{\eta c_{p}} \nabla \sigma + \delta(c^{2}) \nabla \overline{\rho} + \delta(\frac{\theta \bar{\rho} c^{2}}{\eta c_{p}}) \nabla \overline{s} - \nabla \cdot \delta \overline{\overline{\tau}} = \delta(\rho \boldsymbol{f_{e}}) \dots \\ \dots - \nabla \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\boldsymbol{\xi_{r}} \otimes \boldsymbol{\xi_{r}} - \frac{r}{\bar{\rho}} (\boldsymbol{\xi_{r}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{\xi_{r}} + \boldsymbol{\xi_{r}} \otimes \boldsymbol{\xi_{r}}) + \frac{r^{2}}{\rho^{2}} \sum_{0}^{\infty} (-\frac{r}{\bar{\rho}})^{n} (\overline{\rho \boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\xi_{r}}) \otimes (\overline{\rho \boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\xi_{r}}) \right)$$
(A.26)

ou

$$\overline{\rho}\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}}\right) + r(f_{e} - \frac{\nabla\overline{\rho}}{\overline{\rho}}) + \nabla\pi - \nabla\cdot\delta\overline{\overline{\tau}}\dots$$

$$\dots = \delta(\rho f_{e}) - \overline{\rho}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} - r\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}\right)$$
(A.27)

- pour l'équation sur l'entropie

$$\overline{\rho}\overline{T}\left(\partial_{t}\sigma + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \delta\left(\frac{1}{2\mu}\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{\tau}}\right) - \nabla\cdot\delta(\kappa\nabla T) = \dots$$

$$\dots \delta q_{H} - \left(r\overline{T} + \overline{\rho}\delta T + r\delta T\right)\left(\partial_{t}\sigma + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \overline{\rho}\overline{T}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\sigma$$
(A.28)

Les équations précédentes sont exactes et aucune approximation des équations de départ n'a été réalisée. Comme elles comportent de nombreuses quantités inconnues, pour compléter le modèle, la thermodynamique au voisinage de l'équilibre indique

$$\pi = c^2 r + \frac{\theta \overline{\rho} c^2}{\eta c_p} \sigma + (\partial_{\rho}^2 p) \frac{r^2}{2} + (\partial_s^2 p) \frac{\sigma^2}{2} + (\partial_{s,\rho}^2 p) \sigma r + o(r^2, \sigma^2)$$
(A.29)

et

$$-\frac{\delta T}{\overline{T}} = \frac{\overline{\rho}c^2}{p} \left(\left(\frac{\zeta}{\theta} + \frac{\eta}{\theta} \frac{p}{\overline{\rho}c^2} \right) \frac{r}{\overline{\rho}} + \frac{\theta}{\eta} \frac{\sigma}{c_p} \right) + \dots$$
(A.30)

et, par ailleurs, $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{r}} = \overline{\rho}\boldsymbol{\xi} + \overline{\boldsymbol{v}}r + \boldsymbol{\xi}r.$

Г

En comparant les équations obtenues à partir des versions conservative et non conservative, il semble que mettre en évidence une perturbation des équations à partir des variations d'une perturbation des champs ne soit pas toujours aisé et ce d'autant plus qu'il faut prendre en compte des considérations thermodynamiques pour décrire explicitement π ou r. En effet, dès l'instant que seuls les termes linéaires sont conservés dans les différentes équations, la différence essentielle réside dans la présence de termes δc^2 et $\delta(\theta c^2/\eta c_p)$ ou de termes ∇c^2 et $\nabla(\theta c^2/\eta c_p)$. Une étude plus complète des équations en perturbation en fonction des variables et de la forme utilisée des équations est réalisée dans [⁶¹].

A partir des équations précédentes, en ne prenant pas en compte les termes spécifiques à Navier-Stokes, en négligeant l'effet des forces extérieures et en ne gardant que les termes linéaires, plusieurs jeux d'équations d'Euler linéarisées peuvent être obtenus parmi lesquels certains sont plus communément utilisés pour propager les perturbations acoustiques. Les développements suivant se basent sur un système qui mélange les deux approches précédentes. En effet, il utilise le triplet de variables (π, v, s) mais remplace l'équation donnant π par une équation donnant r. π et r coexistent dans les équations du système car la définition explicite de l'une des deux quantités en fonction de l'autre induit une complexité rendue par les approximations faites par la suite. Les équations s'écrivent ainsi

$$\partial_t r + \nabla \cdot (\overline{\rho} \boldsymbol{\xi} + r \overline{\boldsymbol{v}}) = S_r$$

$$\overline{\rho} \left(\partial_t \boldsymbol{\xi} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} \right) - r \frac{\nabla \overline{\rho}}{\overline{\rho}} + \nabla \pi = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\partial_t \sigma + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{s} = S_{\sigma}$$

(A.31)

Pour un gaz parfait, l'équation d'état se linéarise en $rc^2 + 2\overline{\rho}c\delta c = \gamma\pi$. Or, comme, par définition, $\pi = c^2r + \alpha\sigma$, les variations de vitesse du son peuvent être reliées aux variations de l'entropie et de la pression $\delta c = ((\gamma - 1)\pi + \alpha\sigma)/(2\overline{\rho}c)$. Par ailleurs, comme cela est évoqué dans la suite, les ondes acoustiques sont isentropiques donc $\sigma = 0$ et

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\pi}{\overline{p}} \tag{A.32}$$

A priori, cette variation de la vitesse du son n'intervient pas explicitement dans les équations décrivant la propagation d'une onde sonore mais il ne faut pas pour autant la négliger, notamment lorsque l'évaluation de r ou de π utilise la version linéarisée de l'équation d'état.

A.2.3 Vers l'équation des ondes

A partir des équations linéarisées, il peut être intéressant de retrouver précisemment les hypothèses qui permettent d'aboutir à une modélisation s'appuyant sur l'équation des ondes. Si le champ moyen est stationnaire, les parties linéaires des deux équations conservatives (A.24) et (A.26) peuvent se combiner et donner

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\xi_r} + \nabla \cdot \frac{1}{\overline{\rho}} \left(\partial_t \boldsymbol{\xi_r} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \partial_t \boldsymbol{\xi_r} + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r}}{\overline{\rho}} (\overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}}) \right) \dots$$
$$\dots - c^2 (\Delta \boldsymbol{\xi_r} - \nabla \otimes \nabla \otimes \boldsymbol{\xi_r}) + \frac{\theta \overline{\rho} c^2}{\eta c_p} \nabla \partial_t \sigma + \partial_t \delta(c^2) \nabla \overline{\rho} + \partial_t \delta(\frac{\theta \overline{\rho} c^2}{\eta c_p}) \nabla \overline{s} - \nabla \cdot \partial_t \delta \overline{\overline{\tau}} = \partial_t \delta(\rho \boldsymbol{f_e})$$
(A.33)

Or, elle est équivalente à

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\xi_r} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\overline{\rho}} (\partial_t \boldsymbol{\xi_r} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \partial_t \boldsymbol{\xi_r}) + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r}}{\overline{\rho}^2} (\overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}}) \right) + \nabla \partial_t \pi - \nabla \cdot \partial_t \overline{\overline{\tau}} = \partial_t \delta(\rho \boldsymbol{f_e}) \quad (A.34)$$

avec $\nabla \partial_t \pi = -(2c\nabla c\partial_t r + c^2\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r}) + \nabla((\theta \overline{\rho}c^2)/(\eta c_p))\partial_t \sigma + (\theta \overline{\rho}c^2)/(\eta c_p)\nabla \partial_t \sigma.$

En identifiant les termes différents, ces deux équations donnent une idée de la commutation entre les différents opérateurs.

Si, de plus, comme c'est le cas pour les ondes "sonores", la perturbation sur l'entropie est nulle, $\nabla \partial_t \pi = -\nabla (c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})$ et il apparaît une équation des ondes modifiée

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\xi_r} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\overline{\rho}} (\partial_t \boldsymbol{\xi_r} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \partial_t \boldsymbol{\xi_r}) + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r}}{\overline{\rho}^2} (\overline{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \overline{\rho \boldsymbol{v}}) \right) - \nabla (c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi_r}) - \nabla \cdot \partial_t \delta \overline{\overline{\tau}} = \partial_t \delta(\rho \boldsymbol{f_e})$$
(A.35)

mais aussi

$$\overline{\rho}\overline{T}\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\overline{s} - \delta(\frac{1}{2\mu}\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{\tau}}) - \nabla\cdot\delta(\kappa\nabla T) = \delta q_H \tag{A.36}$$

A l'extrême, si le champ moyen a une vitesse uniforme, par changement de variable, cette dernière peut être considérée nulle et la pression moyenne est uniforme. Si alors, le fluide peut être considéré parfait et si les efforts extérieurs sont négligés, l'équation obtenue est l'**équation des ondes** :

$$\partial_t^2 \pi - c^2 \Delta \pi = S \tag{A.37}$$

avec $c^2 \partial_t r = \partial_t \pi$, la vitesse dérivant alors d'un potentiel.

* * *

A partir des équations générales de la mécanique des fluides, des modèles de propagation spécifiques à l'aéroacoustique ont été établis. Le lien étroit qui apparaît entre la propagation des perturbations sonores et l'équation des ondes incite non seulement à utiliser une description faisant intervenir les notions classiques décrivant une onde, mais aussi à calquer certaines pratiques efficaces pour l'équation des ondes à des problèmes plus généraux. Dans le cas d'un champ moyen présentant de petites variations spatiales ou temporelles, une description pourrait prendre en compte les hétérogénéités en transformant des solutions

obtenues en résolvant l'équation des ondes pour qu'elles soient compatibles avec les mouvements lents du milieu.

L'évocation des analogies d'une part et des équations linéarisées d'autre part a permis d'estimer comment l'équation des ondes explique une partie du comportement propagatif des perturbations sonores. Les analogies modélisent les effets non pris en compte par l'équation des ondes en identifiant des termes sources alors que les équations linéarisées sont une étape dans le cheminement simplificateur menant des équations de la mécanique des fluides à l'équation des ondes. Parce qu'elles réalisent un compromis entre la propagation ondulatoire et la prise en compte de l'écoulement, ce sont principalement ces dernières qui sont utilisées dans la suite. Cependant, il semble évident qu'une autre approche pourrait s'inspirer des analogies pour justifier l'emploi de rayons pour les calculs aéroacoustiques.

A.3 Ondes sonores

La description du comportement instationnaire du médium puis son ajustement pour mettre en évidence des quantités acoustiques ont permis de dégager plusieurs équations. Cependant, avant de chercher à les résoudre, il faut comprendre les notions et les particularités liées au calcul acoustique, notamment par rapport au calcul aérodynamique.

Le premier aspect est la distinction communément faite entre la description des sources et celle de la propagation. Le deuxième s'illustre par l'utilisation d'un vocabulaire propre aux phénomènes instationnaires, notamment lié à l'équation des ondes. Le troisième est dû à la propagation des ondes acoustiques, ce qui en fait un phénomène à part parmi les phénomènes instationnaires liés aux équations de la mécanique des fluides. Enfin, le quatrième réside dans les méthodes de résolution utilisées.

A.3.1 Sources et propagation

Les phénomènes acoustiques sont avant tout instationnaires. Classiquement, les phénomènes instationnaires peuvent être séparés en deux grands types : les phénomènes transitoires d'établissement d'un régime, que ce régime soit instationnaire ou non, et les situations établies ou en "équilibre". L'acoustique traite ces deux types de phénomènes.

Il est bien connu qu'un système donné - une portion de fluide, par exemple - sans apport d'énergie, tend vers un état de repos. L'étude acoustique se développe donc, naturellement, suivant deux axes de description : celui du comportement d'un milieu excité et celui de la création des excitations. Ainsi, les notions de sources et de propagation jouent un rôle important.

Les dualités sources/propagation d'un côté et phénomènes transitoires/équilibre de l'autre sont illustrées par le comportement zonal des équations de la mécanique des fluides. En effet, dans des zones localisées où les champs sont fortement perturbés et où la viscosité joue un rôle important, les équations ont tendance à décrire une création de phénomènes acoustiques. Dans des zones étendues où les perturbations sont lissées, les équations présentent plutôt un aspect propagatif. Ainsi, des phénomènes transitoires dans certaines régions de l'espace donnent naissance à des perturbations propagées au travers d'autres régions.

La séparation des phénomènes créatifs et propagatifs conduit à s'interroger sur la nature des sources acoustiques. L'étude d'écoulements instationnaires montre que certains phénomènes aérodynamiques jouent le rôle de sources acoustiques. Mais les sources acoustiques peuvent être de natures différentes. Jusqu'à présent, les équations ont été données sans restriction sur le domaine pris en compte. Or, les conditions aux limites (temporelles et spatiales) jouent un rôle très important puisqu'elles sont, elles-mêmes, dans de nombreux cas, le phénomène excitateur.

Compte tenu des remarques précédentes et des difficultés évoquées au paragraphe (A.2), les sources et la propagation font souvent l'objet de calculs différents. Une étude acoustique se traduit alors par une identification et une description de termes sources puis par la propagation des perturbations engendrées. Bien que de nouvelles études traitent simultanément les deux aspects, cette séparation demeure la seule façon de calculer effectivement des propagations sur de "grandes distances".

De nombreux travaux ont permis de comprendre les caractéristiques des sources en fonction des champs de vitesse, pression, etc. Cet aspect n'est pas traité en détail dans la suite de cette étude. Seule

la propagation est étudiée et les caractéristiques des sources utilisées sont classiques et établies dans les références bibliographiques.

A.3.2 Notion d'ondes

L'omniprésence de l'équation des ondes dans les différentes équations traduit un comportement que l'acoustique partage avec d'autres domaines physiques et, notamment, avec l'électromagnétisme et l'optique. Ainsi, la description des phénomènes acoustiques se fait en grande partie en utilisant des notions propres à l'équation des ondes ce qui favorise les parallèles avec les autres domaines. Ce paragraphe introduit les principaux aspects de l'équation des ondes qui seront utiles par la suite.

La réduction de la dépendance spatiale à une dimension, notamment lors de l'étude de problème de traitement du signal, simplifie la description des solutions de l'équation des ondes. Pour une équation de la forme $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$, ce sont les conditions aux limites, c'est-à-dire à t = 0, en x = 0 ou en x = L qui dictent le comportement des solutions. Le formalisme utilise des solutions à valeurs complexes dont les parties réelles et imaginaires vérifient l'équation réelle. Il introduit des ondes particulières dont la dépendance en temps est monochromatique, c'est-à-dire de la forme $u(t, x) = u_0(x) \exp(i\omega t)$ avec ω la **pulsation**. En une dimension, le calcul de la dépendance spatiale de ces ondes est alors direct et aboutit à $u(t, x) = u_0 \exp(i(\omega t + kx))$ avec k le **nombre d'onde** vérifiant $c^2k^2 = \omega^2$. Il est commode d'introduire des quantités plus significatives telles que la **fréquence** $f = \omega/2\pi$, la **période** T = 1/f et la **longueur d'onde** $\lambda = c/f = 2\pi/k$ qui donne l'extension spatiale de la périodicité du signal. A partir de ces quelques notions simples, une grille descriptive plus générale peut être mise en place.

Compte tenu du comportement élémentaire des solutions, une description duale a été développée. Elle utilise la **transformation de Fourier** qui permet une approche des problèmes basée sur la fréquence. Cette transformation consiste à projeter les fonctions sur une base continue d'ondes monochromatiques

$$\hat{u}(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} u(t) \exp{(i\omega t)} dt$$
(A.38)

Elle présente l'avantage de remplacer les dérivations temporelles en produits par la variable fréquentielle. L'équation des ondes devient ainsi

$$-(\Delta \hat{f} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{f}) = \hat{S}(\omega, \boldsymbol{x})$$
(A.39)

En traitement du signal, les équations différentielles peuvent ainsi être traitées par une simple analyse utilisant des fonctions de transfert. Cependant, comme les produits dans l'espace des temps se transforment en convolution dans l'espace des phases, et réciproquement, l'application pratique de cette transformation aux équations non-linéaires ne permet pas de simplifications évidentes. Les équations d'Euler deviennent en effet :

$$i\omega \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\rho} \\ \widetilde{\rho v} \\ \widetilde{\rho e} \end{array} \right\} + \nabla \cdot \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\rho v} \\ \widetilde{\rho v} \circledast \widetilde{v} + \widetilde{\rho} \ast \frac{\widetilde{p\overline{l}} - \overline{\tau}}{\widetilde{p}} \\ \widetilde{\rho e} \ast \widetilde{v} - \widetilde{k} \overline{\nabla T} + \frac{\widetilde{p\overline{l}} - \overline{\tau}}{\widetilde{\rho}} \ast \widetilde{\rho v} \end{array} \right\} = \dots$$
(A.40)

L'introduction des produits de convolution traduit le fait qu'il faut connaître le signal sur toute son extension temporelle pour passer de la description en temps à la description en fréquence. L'évolution de la théorie issue de l'analyse en fréquence fournit des outils encore plus performants, comme l'analyse temps-fréquence ou les ondelettes, pour analyser les signaux mais ils restent dans de nombreux cas inadaptés pour la résolution des équations. Dans la suite, la transformation de Fourier n'est pas formellement employée, mais l'introduction d'ondes monochromatiques dans les équations permet pour de nombreux cas d'aborder les problèmes plus simplement qu'en utilisant directement une description temporelle.

Le comportement élémentaire des solutions incite aussi à introduire la notion d'amplitude et de phase. Une fonction quelconque peut être écrite sous la forme $u(t, x) = u_0(t, x) \exp(i\phi(t, x))$ où u_0 est l'**amplitude** et ϕ la **phase**. Si, classiquement, ces fonctions sont à valeurs réelles et représentent le module et l'argument de la fonction complexe, elles peuvent être choisies arbitrairement et prendre des valeurs complexes. Dans ce cas, sans hypothèse supplémentaire, il n'y a bien sûr pas unicité de la décomposition.

Cette description en phase et amplitude complexes correspond typiquement au cadre des approximations liées aux hautes fréquences. En effet, la phase permet de représenter les oscillations rapides et l'amplitude l'enveloppe à variations plus lentes. Dans ce contexte, une description utilisant les **fronts d'onde**, c'est-à-dire les surfaces isophases, se révèle intéressante. Par rapport à la propagation d'une onde monochromatique en une dimension, le **vecteur d'onde** local, noté k, est le gradient de phase et il est perpendiculaire au front d'onde. La pulsation locale, noté ω , est la dérivée en temps de la phase.

Cette convention permet de construire, non seulement à partir de l'équation des ondes mais aussi à partir d'équations plus générales, des relations de compatibilité de la forme $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$ appelées relations de dispersion. Elles permettent d'obtenir une description grossière du comportement des opérateurs de propagation. Pour décrire plus précisément la géométrie de la propagation, plusieurs quantités issues de la géométrie analytique comme la courbure peuvent être utilisées. La méthode développée dans la suite à partir des rayons est basée sur la propagation de surfaces qui, bien qu'elles ne coïncident pas tout à fait avec les fronts d'onde, s'en inspirent.

A.3.3 Relations de dispersion

Les systèmes d'équations évoqués au (A.1) et (A.2) ne modélisent pas seulement des phénomènes instationnaires liés aux ondes sonores propagatives. D'autres types d'ondes' coexistent et interagissent. Pour les déceler, il faut étudier les systèmes sans pour autant les résoudre complètement. Pour cela, l'étude des réponses dues à des excitations particulières se révèle efficace.

Les relations de dispersion sont un outil puissant pour étudier la réponse d'un système propagatif à une excitation ondulatoire. La méthode classique consiste à introduire une onde plane monochromatique et à dégager une équation liant le nombre d'onde et la pulsation. La relation de dispersion simple est celle issue de l'équation des ondes avec célérité uniforme et constante : $c_R^2 k^2 = \omega^2$. Comme l'onde plane est une solution élémentaire de cette équation, la relation est pleinement justifiée.

Par extension, cette méthode d'analyse est appliquée aux systèmes d'équations tels que le système des équations de Navier-Stokes mais elle ne devient alors qu'un outil d'analyse qualitatif car les ondes planes parfaites ne sont, en général, pas des solutions. Comme dans [⁵⁸] ou dans [²⁷], les différentes relations mises en évidence permettent d'énoncer des propriétés immédiates sur la propagation ou non des ondes et

sur les liens entre paramètres spatiaux et temporels en fonction des quantités et des fréquences excitées.

L'analyse des ondes propagées par le système d'équations de Navier-Stokes est compliquée par deux particularités. D'une part, comme ce système d'équations fait intervenir plusieurs quantités inconnues, les relations de dispersion liées à des équations de polarisation font apparaître plusieurs **modes de propa-gation**. D'autre part, les équations étant non linéaires, il existe un couplage entre les différents modes de propagées par les équations ce qui, pour des études simples, nécessite de se limiter aux ondes de faibles amplitudes propagées par les équations linéarisées.

L'introduction de $A \exp -i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ dans les équations de Navier-Stokes linéarisées accompagnée de différents calculs simplifiant l'analyse conduit à considérer trois modes :

- un mode de vorticité défini par la relation dispersion $k^2 = i\omega(\overline{\rho}/\mu)$ et les relations de polarisation $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \ \pi = \sigma = \delta T = r = 0,$
- un mode entropique défini par la relation de dispersion $k^2 = i\omega(\overline{\rho}/\mu)P_r$ et les relations de polarisation $\pi = 0, \boldsymbol{\xi} = (\theta/\eta)(\kappa/(\overline{\rho}c_p^2))\sigma \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\xi} = 0, T = (\overline{T}/c_p)\sigma$ et $r = -(\theta/\eta)(\overline{\rho}/c_p)\sigma$,
- un mode acoustique défini par la relation de dispersion

$$k^{2} = \omega^{2}/c^{2} + i\omega^{3}/c^{3}(\mu/(\bar{\rho}c))(4/3 + (\gamma - 1)/P_{r})$$
(A.41)

et les relations de polarisation $\boldsymbol{\xi} = \pi/(\overline{\rho}c)\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|, \sigma = 0, T = (\theta/\eta)(1/(\overline{\rho}c_p))\pi$ et $r = \pi/c^2$. Les relations énoncées permettent de distinguer les comportements des modes. Les modes liés à la vorticité et à l'entropie sont absorbés assez rapidement puisque l'amplitude de leur partie imaginaire est liée à $\omega(\overline{\rho}/\mu)$. A partir de ces relations, en utilisant les rapports entre les différentes grandeurs caractéristiques, d'autres phénomènes tels que l'absorption atmosphérique ou les effets non linéaires peuvent être pris en compte.

Dans la présente étude, la relation de dispersion pour le mode acoustique permet de cadrer les développements ultérieurs. En effet, dans la suite, le comportement de la phase est dicté par une équation similaire et les limites de l'approximation hautes fréquences, comme la prise en compte d'effets supplémentaires, sont estimées grâce à des considérations liées à la relation de dispersion.

A.3.4 Résolution des équations

L'équation des ondes et plus généralement toutes les équations obtenues en (A.1) et en (A.2) sont à valeurs dans un volume décrit par une variable spatiale et une variable soit temporelle, soit fréquentielle. Elles peuvent donc, après un traitement mathématique, être résolues en utilisant des méthodes de discrétisation classiques. L'équation des ondes, à cause de sa forme particulière, peut, dans certains cas, et après un traitement particulier, conduire à une équation ne faisant intervenir que deux dimensions. La discrétisation est alors, en partie, simplifiée. Dans ce paragraphe, les méthodes classiques de résolution sont énoncées puis critiquées pour faire apparaître la nécessité de développer d'autres méthodes, notamment dans le cadre des hautes fréquences.

Depuis les années 1960, les équations différentielles peuvent être numériquement résolues en utilisant la combinaison de formulations variationnelles et d'outils mathématiques discrets. Les concepts de produit scalaire, d'espace de projection, de fonctions de base et de fonctions test ont conduit à développer des méthodes à base d'éléments finis. D'autres méthodes utilisant les volumes finis ou les différences finies sont des alternatives utilisant des concepts plus ou moins éloignés.

Pour ce qui concerne cette étude, ce type de résolution nécessite une discrétisation spatiale et temporelle suffisamment fine pour décrire correctement le comportement des fonctions. En effet, le théorème de Shannon en traitement du signal indique qu'il faut plus de deux points pour discrétiser un signal périodique. Mais, en pratique, pour une onde plane monochromatique $u(t, x) = u_0 \exp(i(\omega t + k \cdot x))$, la discrétisation ne devient correcte qu'avec des pas spatial en $\lambda/5$ et temporel en T/5. Les deux quantités étant liées, le nombre de degrés de libertée nécessaire augmente avec l'extension spatiale comme $(5f)^3$ et comme 5f avec l'extension temporelle. La stratégie de maillage est complètement différente de celles utilisées pour les problèmes stationnaires ou pour les phénomènes instationnaires non propagatifs et elle favorise les maillages uniformes.

En pratique, cette approximation grossière du nombre de points nécessaires doit être nuancée en fonction, d'une part, de l'approche temporelle ou fréquentielle et, d'autre part, des schémas numériques choisis. Cependant, il est évident que les phénomènes hautes fréquences ne peuvent pas être résolus par ce type de méthodes.

Dans le cas de l'équation des ondes avec célérité du son uniforme, d'autres méthodes existent. Si le problème est considéré en espace infini, la transformation de Fourier est utilisable sur la variable spatiale. Inversement à son utilisation sur la variable temporelle, elle permet de donner une solution pour tous les temps à partir d'une donnée initiale dans tout l'espace. En effet, grâce à l'utilisation des solutions élémentaires correspondant aux données initiales de premier et de deuxième ordre spatiaux, une solution de $\partial_{tt}u - \Delta u = f$ avec $u_I(\mathbf{x})$ et $u_{II}(\mathbf{x})$ comme données initiales s'écrit

$$\hat{u}(t,\boldsymbol{\xi}) = \cos(t|\boldsymbol{\xi}|)\hat{u}_{I}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\sin(t|\boldsymbol{\xi}|)}{|\boldsymbol{\xi}|}\hat{u}_{II}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{0}^{t} \frac{\sin((t-s)|\boldsymbol{\xi}|)}{|\boldsymbol{\xi}|}\hat{f}(s,\boldsymbol{\xi})ds$$
(A.42)

où $\hat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale. Bien sûr, cette formule s'accompagne d'hypothèses de régularité sur les différentes fonctions.

En considérant la transformation de Fourier sur la variable temporelle et la résolution en variables sphériques de l'équation de Helmholtz ainsi obtenue, les solutions élémentaires sont des ondes sphériques et s'écrivent

$$\hat{E^{\pm}}(\omega, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{x}|} \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} |\boldsymbol{x}|\right) \text{ soit } E^{\pm}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\delta(t \pm |\boldsymbol{x}|/c)}{4\pi |\boldsymbol{x}|}$$
(A.43)

Pour résoudre le problème correctement, il faut ajouter la condition de Sommerfeld qui indique que la solution est nulle avant le déclenchement de la perturbation. Pour être complet, il faut ajouter que l'onde plane $u(\omega, x) = A \exp(i\mathbf{k} \cdot x)$ avec $|\mathbf{k}| = \omega/c$ est solution de l'équation de Helmholtz sans second membre. Ces deux approches sont classiques et ne sont citées ici que pour familiariser le lecteur avec les différents concepts qui seront utilisés par la suite de façon beaucoup moins formelle.

Pour considérer des problèmes plus compliqués, il est nécessaire d'introduire un outil mathématique plus puissant. Comme toute solution est décrite par la convolution d'une solution élémentaire et des conditions initiales, l'opérateur agissant sur les données est appelé : opérateur à noyau. La fonction noyau est ici appelée la **fonction de Green**.

La théorie des opérateurs à noyau dépasse largement ce cadre mais, pour cette étude, elle permet d'obtenir le **théorème de représentation intégrale**. Celui-ci décrit la solution d'un problème dans l'espace à l'aide des potentiels sur les frontières. Ainsi, si Γ est la réunion des frontières entre les différents domaines de l'espace,

$$\forall x \in \mathcal{R}^3 - \Gamma, \, u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) Q(\boldsymbol{y}) d\Gamma_{\boldsymbol{y}} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Phi(\boldsymbol{y}) d\Gamma_{\boldsymbol{y}}$$
(A.44)

avec $Q(\mathbf{y}) = [\partial_n u]$ et $\Phi(\mathbf{y}) = [u]$ les potentiels (sauts des fonctions) de simple couche et de double couche à travers Γ .

Une manière de résoudre les problèmes de propagation d'onde avec conditions aux limites consiste donc à résoudre des égalités entre traces de fonctions sur Γ et intégrales de réaction. Par rapport aux méthodes volumiques, il y a une dimension d'espace en moins mais les techniques de discrétisation sont à peu près les mêmes. La puissance nécessaire pour résoudre les problèmes à des fréquences au delà de 10 kHz sur des objets de plusieurs dizaines de mètres demeure difficilement atteignable. De plus, ce type de méthode ne traite pas aisément les variations d'indices (variations de célérité du son).

Les propriétés de l'équation des ondes et de l'équation de Helmholtz, sa version fréquentielle, permettent de développer, pour des cas particuliers, des méthodes s'affranchissant de la discrétisation en fonction de la fréquence. Parmi celles-ci, la décomposition modale est construite à partir de considérations simples sur la stationnarité des solutions de l'équation de Helmholtz en espace borné. Elle est formalisée grâce à l'utilisation du théorème de diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts. Les solutions sont alors interprétées comme des fonctions propres de l'opérateur de Laplace, le nombre d'onde étant la valeur propre correspondante.

La méthode de décomposition modale donne, dans certains cas, des solutions analytiques à des problèmes non triviaux et, plus généralement, fournit de nouvelles bases de fonctions pour décomposer les solutions. Cependant, ni elle, ni aucune des méthodes indépendantes de la fréquence ne permettent d'utiliser un seul et même formalisme, comme le font les méthodes à base d'éléments finis, pour traiter l'ensemble des problèmes. Les méthodes hautes fréquences développées dans la suite permettent d'envisager un tel traitement.

* * *

La grille d'analyse de la propagation ondulatoire a permis, non seulement de caractériser le comportement propagatif des ondes sonores grâce à la fréquence et aux autres quantités définies, mais aussi d'indiquer des stratégies de discrétisation et, en particulier, un nombre de points minimal à utiliser pour décrire correctement les fonctions. Il faut noter le rôle important joué par les ondes monochromatiques et, plus généralement, les solutions élémentaires de l'équation des ondes.

Les limites qui apparaissent, en fonction de la fréquence, pour les discrétisations classiques, et notamment le trop grand nombre de degrés de libertée nécessaires, incitent à utiliser de façon plus importante, dans les équations d'Euler linéarisées, les simplifications liées à l'équation de Helmholtz. Cependant, comme l'application rigoureuse de la transformation de Fourier n'est pas efficace, des méthodes approchées basées sur les solutions élémentaires doivent lui être préférées.

> * * * * *

Les évocations successives des modélisations aérodynamique, aéroacoustique et ondulatoire ont permis de dresser un portrait exhaustif des outils disponibles pour traiter les problèmes de propagation sonore au voisinage des avions. La maîtrise des différentes approximations physiques faites permet de définir les propriétés que doit présenter la méthode développée dans cette étude pour trouver sa place dans l'éventail des calculs possibles.

Pour être intéressante, la méthode doit, d'une part, traduire plus de phénomènes que les analogies acoustiques et, d'autre part, permettre des fréquences plus élevées que les discrétisations classiques. Dans un premier temps, la partie précédente montre comment les équations d'Euler linéarisées fournissent à la fois une bonne approximation du comportement d'un fluide et un propagateur simple. Dans un deuxième temps, elle indique que la propagation d'une onde peut-être séparée en deux parties : la première dépend essentiellement de la fréquence induite par les phénomènes excitateurs et la deuxième de la géométrie du problème.

A partir des équations d'Euler linéarisées, pour traiter les hautes fréquences, il semble donc qu'il faille étudier séparément la propagation de l'énergie qui est essentiellement indépendante de la fréquence et les variations induites par le forçage temporel. Pour les types de problèmes rencontrés, une forme générale du comportement ondulatoire lié au deuxième aspect se distingue et permet une analyse moins coûteuse lorsque la longueur d'onde diminue. La difficulté consiste alors à comprendre comment l'interaction entre les deux parties propagative et oscillante peut être prise en compte.

Annexe B

Approximations hautes fréquences

En général, après l'établissement des équations dans le volume, la résolution effective des équations nécessite d'utiliser un traitement numérique. Or, lorsque les fréquences intervenant dans les signaux deviennent grandes, les traitements numériques classiques échouent. Il faut donc modifier analytiquement les équations pour espérer calculer effectivement des solutions.

Une étude simple des équations montre que c'est la partie sous-jacente de propagation des ondes qui pose problème. Il est donc naturel de s'inspirer des solutions élémentaires de l'équation des ondes pour construire le pré-traitement. La méthode utilisée effectue un développement asymptotique dont seuls les premiers termes sont calculés dans les applications. Le choix du paramètre de développement est donc primordial et la connaissance de sa valeur est nécessaire pour estimer la pertinence de la solution.

L'approche décrite dans la suite est communément utilisée depuis un demi-siècle en aéroacoustique. Cependant, pour la compléter, il est impératif de suivre le raisonnement de bout en bout. Ainsi, la première partie s'intéresse à l'obtention du paramètre de développement et à son rôle par rapport aux approximations déjà effectuées. Dans la deuxième partie, la description des méthodes d'approximations "hautes fréquences" en général et de la méthode choisie en particulier bénéficie des travaux récents menés sur le sujet. Enfin, l'application concrète aux problèmes de l'aéroacoustique est faite dans la troisième partie. L'erreur commise est alors étudiée en détail.

B.1 Dimensionnement des équations

Dans le cadre de l'approximation hautes fréquences, les équations sont développées par rapport à un petit paramètre. Le but de la partie suivante est d'identifier ce paramètre. Il est intuitivement lié aux variations temporelles des solutions des équations. Cependant, l'analyse n'est pas aussi simple et d'autres considérations doivent être prises en compte.

En mécanique des fluides, l'adimensionnement et l'utilisation de paramètres de similitude sont classiques. L'idée est donc de s'inspirer de ce qui est fait dans ce domaine pour non seulement trouver le paramètre de développement adéquat, mais aussi mesurer les limites de l'approximation.

La première partie rappelle les différents paramètres utilisés en mécanique des fluides. Ces paramètres mais aussi la méthodologie qui les a exhibés et d'autres considérations permettent, dans la deuxième partie, de définir les paramètres dimensionnant une onde et d'identifier les termes des équations concernés au premier ordre par la dynamique d'une onde acoustique. Une troisième partie traite particulièrement la problématique liée à l'utilisation simultanée de l'approximation hautes fréquences et de la linéarisation. Enfin, comme les développements ultérieurs mélangent changement de variables et adimensionnement, la dernière partie tente de comprendre les apports respectifs des deux méthodes.

B.1.1 Exemples d'adimensionnements classiques

Du fait de la diversité des mécanismes mis en jeux, de nombreux problèmes peuvent être résolus en mécanique des fluides avec une précision satisfaisante grâce à l'approximation des équations fondamentales par la suppression de termes négligeables. L'analyse dimensionnelle est utilisée pour exhiber des nombres sans dimension traduisant l'importance des phénomènes les uns par rapport aux autres.

Avec les adimensionnements classiques, le système d'équations de Navier-Stokes peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{S_t}\partial_t \widetilde{\rho} + \nabla \cdot \widetilde{\rho \boldsymbol{v}} = 0 \tag{B.1}$$

$$\frac{1}{S_t}\partial_t \widetilde{\rho \boldsymbol{v}} + \nabla \cdot \left(\frac{\widetilde{\rho \boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\rho \boldsymbol{v}}}{\widetilde{\rho}}\right) + \frac{\nabla \widetilde{p}}{\gamma M_R^2} - \frac{\nabla \cdot \overline{\widetilde{\overline{\tau}}}}{R_e} = \frac{L_R}{V_R^2} \widetilde{\rho} \boldsymbol{f_e}$$
(B.2)

$$\widetilde{\rho}\widetilde{T}(\frac{1}{S_t}\partial_t\widetilde{s} + \widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\widetilde{s}) - \frac{M_R^2\beta}{R_e}\widetilde{\Phi_D} - \frac{1}{R_eP_r}\nabla\cdot(\widetilde{\kappa}\nabla\widetilde{T}) = M_R^2\beta\frac{q_HL_R}{V_R^3}$$
(B.3)

Dans ce système, en dehors de Φ_D le flux de chaleur lié à la viscosité, deux nouveaux types de paramètre sont identifiables :

- les grandeurs donnant les dimensions de référence qui sont la longueur L_R , la vitesse V_R et le temps t_R ,
- et les nombres caractéristiques sans dimension qui sont $M_R = V_R/c_R$ le nombre de Mach, $R_e = \rho_R V_R L_R/\mu$ le nombre de Reynolds, $P_r = \mu c_p/\kappa$ le nombre de Prandtl, $S_t = L_R/(V_R t_R)$ le nombre de Strouhal et $\beta = c_R^2/(T_R s_R)$ qui est de l'ordre de l'unité pour les gaz parfaits,

Dans les équations précédentes, pour les phénomènes stationnaires, le nombre de Strouhal n'a pas de sens et le nombre de Mach prend une place particulièrement importante. En effet, plus le **nombre de Mach** est petit, c'est-à-dire plus la vitesse de référence est petite, plus le système se simplifie. S'il est nul, le problème n'est plus un problème aéro"dynamique". Les modélisations aérodynamiques sont

ainsi faites que, souvent, elles rendent les problèmes instationnaires à faible nombre de Mach difficiles à résoudre. En fait, c'est le nombre de Mach qui traduit le caractère dynamique du problème. Dans le cadre de la modélisation à l'aide des équations d'Euler, pour les problèmes stationnaires, les seuls nombres dimensionnants sont la longueur caractéristique et le nombre de Mach. Pour certains problèmes faisant intervenir des vitesses faibles, un développement en fonction du nombre de Mach permet de simplifier l'analyse.

Si le fluide n'est plus parfait, le **nombre de Reynolds**, en mettant en avant le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, devient qualitatif. En effet, deux écoulements sont de même type si, une fois les vitesses et les longueurs adimensionnées respectivement par les vitesses à l'infini et par la longueur caractéristique de l'objet, les problèmes se ressemblent. Mais, pour que les solutions se comportent de la même façon, il faut que les nombres de Reynolds soient égaux. En particulier, le nombre de Reynolds détermine la distance à la paroi jusqu'à laquelle les effets visqueux sont non négligeables. Plus il est grand, plus cette distance diminue et, alors que les solutions des équations de Navier-Stokes ont une vitesse nulle à la paroi, lorsqu'il est infini, les solutions des équations d'Euler glissent sur les surfaces. Le **nombre de Prandtl** qui mesure le rapport entre viscosité et conduction thermique, quant à lui, ne joue presque pas de rôle pour l'étude des fluides gazeux car il reste à peu près constant à 0, 737 aux températures classiques de calcul mais il est qualitatif pour l'eau, par exemple, puisqu'il varie alors à peu près comme la viscosité.

Dans le cas des phénomènes instationnaires, le **nombre de Strouhal**, en comparant l'échelle temporelle à l'échelle spatiale prend un rôle prépondérant. Pour les cas sans écoulement stationnaire, c'est lui qui traduit le caractère dynamique des phénomènes. La vitesse de référence est alors la vitesse du son et le nombre de Mach est unitaire.

Cette rapide présentation de quelques nombres caractéristiques dimensionnant les équations de Navier-Stokes permet de faire deux remarques. D'abord, la mise en valeur de paramètres de similitude rend possible, lorsqu'ils deviennent particulièrement grands ou petits, une simplification des équations tout en conservant des solutions relativement précises. Ensuite, en fonction des dimensions prises en compte, les nombres peuvent prendre des valeurs différentes. Ainsi, derrière le nombre de Reynolds, il existe toute une série de nombres caractéristiques suivant, par exemple, que la vitesse considérée est la vitesse du son, la vitesse à l'infini ou une autre vitesse caractéristique. Dans la suite, le choix de la longueur et du temps caractéristiques ont une influence importante sur l'estimation de la précision des approximations.

B.1.2 Paramètres dimensionnant une onde

Au (A.3), la propagation des ondes sonores a été mise en évidence. Si les paramètres caractérisant une onde ont été définis, il faut encore identifier les paramètres la définissant quantitativement. Ceux-ci sont de deux types : ceux liés aux excitateurs et ceux liés au milieu propagatif.

Ondes forcées et ondes libres

Les phénomènes ondulatoires peuvent être différenciés en fonction de la nature de l'excitation qui les engendre. Les paramètres caractéristiques des ondes "naturelles" telles que le balancement de l'oscillateur harmonique libre, dépendent des données géométriques et physiques intrinsèques de l'environnement ainsi que des données initiales. Comme dans le cas de l'étude de la turbulence, les échelles intervenant peuvent

être très disparates. Dans le cas des oscillations forcées, les paramètres dépendent, certes, aussi des données intrinsèques du problème, mais surtout de l'excitateur. Les échelles des variations des quantités peuvent alors être considérées comparativement aux variations du forçage.

Pour certains cas, comme pour ceux liés à l'acoustique, il est efficace, et parfois nécessaire, de séparer l'étude de la création de celle de la propagation des ondes. Cette séparation n'est pas toujours physiquement évidente mais la modélisation permet de transformer des oscillations naturelles apparaissant localement comme celles de la turbulence en excitations pour des problèmes de propagation. Dans ces développements, pour que le modèle soit à la fois numériquement soluble et physiquement pertinent, l'étude des échelles et des amplitudes des différents phénomènes est primordiale.

Par ailleurs, la propagation d'onde est une problématique commune à de nombreux domaines physiques dont les échelles ne sont absolument pas comparables. Ainsi, *a priori*, il n'y a pas de comparaison possible entre une onde acoustique et une onde électromagnétique. En effet, les vitesses de propagation de celles-ci sont $c_{son} \simeq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c_{lum} \simeq 300000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Pourtant, une étude rapide permet de comprendre que, grâce à un adimensionnement adapté, le comportement d'une onde peut être étudié indépendamment des dimensions caractéristiques de la physique sous-jacente. La carctérisation d'une onde peut donc se faire à un facteur d'échelle près de la même façon pour des phénomènes de natures physiques très différentes. De cette façon, les propagations d'une onde acoustique ou d'une onde électromagnétique dans le voisinage d'une géométrie donnée peuvent être similaires dès que les longueurs d'ondes sont les mêmes. Les variations temporelles beaucoup plus rapides dans le deuxième cas n'ont que peu d'influence. De la même façon, l'analyse de la propagation d'ondes acoustiques au voisinage d'un navire peut ressembler en grande partie à celle traitant du voisinage d'un avion pour un rapport adéquat des longueurs d'onde. Dans chacun des cas, les ressemblances sont bien sûr modérées par des phénomènes spécifiques dépendant de la grandeur de référence.

La méthode utilisée dans la suite ne s'intéresse qu'à la partie des systèmes d'équations prépondérantes lorsque les variations temporelles deviennent brusques. Il faut donc, au moment de choisir le paramètre décrivant ce comportement, prendre en compte les diverses dimensions caractéristiques du problème et définir ce que sont des variations brusques pour ce problème. Ainsi, ce paramètre se présente de façon générique sous la forme

$$\epsilon = \frac{c_R t_R}{L_R} \tag{B.4}$$

mais c_R dépend de la physique du problème et entre L_R et t_R l'un dépend des dimensions du problème et l'autre de l'excitateur. Dans la suite et notamment pour l'estimation *a priori* de l'erreur, comme les problèmes sont principalement monochromatiques, le choix de L_R sera particulièrement important.

Effets dynamiques et effets visqueux

L'analyse dimensionnelle liée à une onde fait intervenir la célérité de référence de l'onde comme vitesse de référence et la période comme temps de référence. Les autres quantités de référence étant conservées, les nombres dimensionnants de la mécanique des fluides deviennent :

- $H_e = L_R/(c_R t_R) = L_R/\lambda_R$, le rapport entre la longueur d'onde et la dimension spatiale caractéristique du problème,
- et $R_e = c_R L_R \rho_R / \mu$ et $H_e / R_e = \omega \mu / (\rho_R c_R^2)$ ce dernier paramètre compare les effets liés aux phénomènes ondulatoires et les effets visqueux.

Le nombre d'Helmholtz H_e est l'équivalent du nombre de Strouhal pour lequel la vitesse du fluide a été remplacée par la vitesse de propagation de l'onde.

En général, les problèmes de propagation acoustique dans les gaz font intervenir des célérités et des longueurs de référence ne conduisant pas à des temps caractéristiques de l'ordre de la viscosité. En fait, la vitesse de l'écoulement étant souvent au plus de l'ordre de la célérité du son, les nombres de Reynolds liés au comportement global du fluide sont souvent plus faibles que les nombres de Reynolds liés à la propagation de l'onde. Ainsi, les effets visqueux influencent moins la propagation des perturbations acoustiques que les autres phénomènes aérodynamiques.

Cependant, dans certains cas, les processus de dissipation peuvent induire des absorptions non négligeables. En effet, la prise en compte du terme de viscosité introduit dans les coefficients de réflexion et dans les nombres d'onde de nouveaux termes réels et imaginaires. Ainsi, pour la réflexion sur une surface parfaitement réfléchissante après passage au travers d'une couche limite et pour des angles rasants, le coefficient de réflexion est de l'ordre de 0, 8. De même, lors de la propagation dans des conduits fins, le confinement de la propagation induit un nombre d'onde faisant intervenir un deuxième terme d'ordre $\sqrt{R_e}/a$, avec a le rayon du tube. Le nombre de Reynolds étant alors de $R_e = c_R \lambda \rho_R/\mu$, ce deuxième terme doit être pris en compte lorsque $\lambda \simeq c_R a^2 \rho_R/\mu$. D'autres développements et exemples sur ce sujet peuvent être trouvés dans [⁵⁸].

Les méthodes évoquées dans la suite de cette étude traitent des problèmes dont une dimension est grande devant la longueur d'onde. Le nombre de Strouhal devient alors très grand et les variations temporelles doivent être compensées par des variations spatiales se décorrélant des caractéristiques géométriques du problème. De plus, les dimensions des problèmes permettent de négliger les effets visqueux et d'utiliser les équations d'Euler. Cependant, lorsque la distance de propagation devient vraiment très grande, il faut prendre en compte la décroissance de l'amplitude de la perturbation liée à la viscosité. En effet, celle-ci induit une décroissance exponentielle dont le facteur est :

$$\exp\left(-\frac{\mu L}{2\rho_R c_R \lambda^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma - 1}{P_r}\right)\right) \tag{B.5}$$

En première approximation, cette correction peut être réalisée par simple multiplication de la solution classique par le facteur correspondant à la distance parcourue. En pratique, les dimensions des problèmes traités ne nécessitent pas de prendre en compte cette décroissance. Cependant, sa connaissance permet d'estimer une partie de l'erreur commise par le modèle.

B.1.3 Linéarisation et hautes fréquences

Au (A.2), des adaptations des équations de la mécanique des fluides ont été évoquées pour mettre en évidence les variations acoustiques. Parmi elles, la linéarisation utilise l'opérateur de propagation linéaire tangent et est justifiée grâce à la petitesse relative des variations acoustiques. Cependant, lorsque les variations deviennent brusques, cette justification ne suffit plus et il faut considérer des critères plus élaborés.

En utilisant, comme vitesse de référence, ξ_R pour la perturbation et v_R pour le champ moyen, l'adimensionnement des équations linéarisées conduit à écrire

$$\partial_t r + \nabla \cdot \left(\frac{v_R t_R}{L_R} r \overline{\boldsymbol{v}} + \frac{\xi_R t_R}{L_R} \overline{\rho} \boldsymbol{\xi} + \frac{\xi_R t_R}{L_R} r \boldsymbol{\xi}\right) = 0$$
(B.6)

$$\overline{\rho}\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}}\right) + r\left(\frac{t_{R}}{\xi_{R}}f_{e} - \frac{c_{R}^{2}t_{R}}{L_{R}\xi_{R}}\overline{\nabla\overline{\rho}}\right) + \frac{c_{R}^{2}t_{R}}{L_{R}\xi_{R}}\nabla\pi - \frac{v_{R}^{2}t_{R}}{L_{R}R_{e}\xi_{R}}\nabla\cdot\overline{\tau} \dots$$

$$\dots = \frac{t_{R}}{\rho_{R}\xi_{R}}\delta(\rho f_{e}) - \frac{t_{R}\xi_{R}}{L_{R}}\overline{\rho}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} - r\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + \frac{t_{R}\xi_{R}}{L_{R}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}\right)$$

$$(B.7)$$

$$\overline{\rho}\overline{T}\left(\partial_{t}\sigma + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \frac{t_{R}\xi_{R}}{L_{R}}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \frac{v_{R}^{3}\beta t_{R}}{c_{R}^{2}L_{R}R_{e}}(\frac{1}{2\mu}\overline{\tau}:\overline{\tau}) - \frac{v_{R}t_{R}}{R_{e}P_{r}L_{R}}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) = \dots$$

$$\dots \frac{t_{R}\beta}{\rho_{R}c_{R}^{2}}\delta q_{H} - (r\overline{T} + \overline{\rho}\delta T + r\delta T)\left(\partial_{t}\sigma + \frac{t_{R}v_{R}}{L_{R}}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \frac{t_{R}\xi_{R}}{L_{R}}\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\overline{s}+\nabla\sigma)\right) - \frac{t_{R}\xi_{R}}{L_{R}}\overline{\rho}\overline{T}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\sigma$$

$$(B.8)$$

les équations (A.29) et (A.30) donnant π et δT en fonction de r et σ . Dans les équations précédentes, comme au (A.2.2), les champs moyens vérifient les équations d'Euler avec second membre mais les termes Navier-Stokes sont calculés à partir du champ total. Les tildes des champs adimensionnés ont été omis pour plus de clarté. L'adimensionnement sur le champ moyen est fait de manière classique et, pour les champs perturbés, la masse volumique est adimensionnée avec la masse volumique de référence et l'entropie avec l'entropie de référence.

Si les dimensions spatiales et temporelles de référence correspondent aux amplitudes des variations relatives, alors ξ_R , dimensionnellement, doit être du même ordre que L_R/t_R et ainsi

$$\partial_t r + \nabla \cdot \left(\frac{v_R}{\xi_R} r \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi} + r \boldsymbol{\xi}\right) = 0 \tag{B.9}$$

$$\overline{\rho}\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}}\right) + r\left(\frac{t_{R}^{2}}{L_{R}}f_{e} - \frac{c_{R}^{2}}{\xi_{R}^{2}}\overline{\rho}\right) + \frac{c_{R}^{2}}{\xi_{R}^{2}}\nabla\pi - \frac{v_{R}^{2}}{R_{e}\xi_{R}^{2}}\nabla\cdot\overline{\tau}\dots$$

$$\dots = \frac{t_{R}^{2}}{\rho_{R}L_{R}}\delta(\rho f_{e}) - \overline{\rho}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} - r\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}\right)$$
(B.10)

$$\overline{\rho}\overline{T}\left(\partial_{t}\sigma + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \frac{v_{R}^{3}\beta}{c_{R}^{2}\xi_{R}R_{e}}\left(\frac{1}{2\mu}\overline{\tau}:\overline{\tau}\right) - \frac{v_{R}}{R_{e}P_{r}\xi_{R}}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) = \dots$$

$$\dots \frac{t_{R}\beta}{\rho_{R}c_{R}^{2}}\delta q_{H} - (r\overline{T} + \overline{\rho}\delta T + r\delta T)\left(\partial_{t}\sigma + \frac{v_{R}}{\xi_{R}}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \overline{\rho}\overline{T}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\sigma$$
(B.11)

Pour une onde acoustique, le rapport des variations est de l'ordre de la vitesse du son de référence $L_R/t_R = c_R$ donc

$$\partial_t r + \nabla \cdot (r\overline{M} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi} + r\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{B.12}$$

$$\overline{\rho}\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + (\overline{\boldsymbol{M}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{M}}\right) + r\left(\frac{t_{R}}{c_{R}}f_{e} - \frac{\nabla\overline{\rho}}{\overline{\rho}}\right) + \nabla\pi - \frac{M_{R}^{2}}{R_{e}}\nabla\cdot\overline{\tau}\dots$$

$$\dots = \frac{t_{R}}{\rho_{R}c_{R}}\delta(\rho f_{e}) - \overline{\rho}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} - r\left(\partial_{t}\boldsymbol{\xi} + (\overline{\boldsymbol{M}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{M}} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}\right)$$
(B.13)

$$\overline{\rho}\overline{T}\left(\partial_{t}\sigma + \overline{M}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \frac{M_{R}^{3}\beta}{R_{e}}\left(\frac{1}{2\mu}\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{\tau}}\right) - \frac{M_{R}}{R_{e}P_{r}}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) = \dots$$

$$\dots \frac{t_{R}\beta}{\rho_{R}c_{R}^{2}}\delta q_{H} - (r\overline{T} + \overline{\rho}\delta T + r\delta T)\left(\partial_{t}\sigma + \overline{M}\cdot\nabla\sigma + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{s}\right) - \overline{\rho}\overline{T}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\sigma$$
(B.14)

avec M_R le nombre de Mach de référence et M le Mach de l'écoulement par rapport à la célérité de référence.

L'adimensionnement des équations d'Euler linéarisées conduit donc à étudier la vitesse de la perturbation par rapport à la vitesse du son de référence. Ainsi, pour que la linéarisation se justifie, il faut bien sûr que $r \ll \overline{\rho}$ et que les termes d'ordre 2 dans l'équation d'état soient négligeables mais il faut surtout que $\boldsymbol{\xi} \ll 1$, c'est-à-dire que la vitesse de la perturbation soit petite devant le rapport entre les échelles de variations spatiale et temporelle soit la vitesse du son de référence et non pas la vitesse de l'écoulement. Cependant, si les variations spatiales ne sont plus essentiellement gouvernées par la dynamique, c'est-àdire si la géométrie du problème induit une échelle de variations spatiales plus grande que $t_R c_R$, les critères de linéarisation doivent être revus. Une étude dimensionnelle du même type conduisant à l'équation des ondes est abordée dans [⁵⁰].
B.1.4 Adimensionnement et changement de variables

Pour l'équation des ondes en espace infini, la relation de dispersion classique $(ck)^2 = \omega^2$ indique quel facteur permet de comparer les variations temporelle et spatiale et comment les unes contrebalancent les autres dans les équations. Si la célérité est uniforme, tous les problèmes sont comparables puisqu'un changement de variable en espace et en temps conduit à une équation indépendante de la valeur de la célérité et de la fréquence de l'oscillation. Augmenter la fréquence caractéristique, par exemple la fréquence de forçage, est équivalent à diminuer les dimensions temporelle et spatiale.

Dès que la célérité n'est plus uniforme, ses variations induisent des changements de comportements en fonction de la fréquence. Le changement de variables classique transformant, en prenant g comme inconnue, l'équation des ondes en

$$\partial_{\tau}^2 g - (1 + n(\tau, \Xi))\partial_{\Xi}^2 g = 0 \text{ avec } \tau = \omega t \text{ et } \Xi = (\omega/c_R) \boldsymbol{x}$$
(B.15)

rend difficilement compte de cette influence. En effet, pour un domaine spatial et temporel donné, les domaines de τ et Ξ se réduisent ou se dilatent en fonction de ω et, pour un domaine donné sur τ et Ξ , il est difficile d'interpréter l'influence de l'indice n, un développement au voisinage de 0 n'étant pas pertinent.

Si $f(t, \mathbf{x}) = g(\tau, \Xi)$ avec $\tau = \omega t$ et $\Xi = k\mathbf{x} = \pm (\omega/c(t, \mathbf{x}))\mathbf{x}$, le changement de variables n'est pas uniforme puisque

$$\partial_t f = \omega \partial_\tau g + \partial_t k(\boldsymbol{x} \cdot \partial_{\boldsymbol{\Xi}} g) \text{ et } \nabla f = (k + \boldsymbol{x} \cdot \nabla k) \partial_{\boldsymbol{\Xi}} g \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} d\tau \\ d\boldsymbol{\Xi} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \omega & 0 \\ -\frac{\omega \partial_t c}{c^2} \boldsymbol{x} & \frac{\omega}{c} (\overline{\overline{I}} - \frac{\boldsymbol{x} \otimes \nabla c}{c}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} dt \\ d\boldsymbol{x} \end{array} \right\}$$
(B.16)

Ainsi, lorsque le changement de variables est acceptable, c'est-à-dire, lorsque la matrice de changement est inversible, l'équation des ondes peut être écrite sous la forme

$$\partial_{\tau}^{2}g + \left(2\frac{\nabla c}{\omega} + \frac{\Xi^{t}}{\omega^{2}}(c\nabla\nabla c - 2\nabla c \otimes \nabla c) - \left(\frac{\partial_{t}^{2}c}{c} - 2\left(\frac{\partial_{t}c}{c}\right)^{2}\right)\frac{\Xi}{\omega^{2}}\right) \cdot \partial_{\Xi}g - \left(1 - \frac{\Xi\cdot\nabla c}{\omega}\right)^{2} \text{tr}(\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g) \dots + \left(\frac{\partial_{t}c}{\omega c}\right)^{2}\Xi^{t}\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g\Xi - 2\frac{\partial_{t}c}{\omega c}\Xi \cdot \partial_{\Xi,\tau}g = 0$$
(B.17)

Il est alors intéressant de constater que l'influence des variations du champ moyen est en relation avec la pulsation. En effet, en introduisant des longueurs de référence pour les variations de la célérité, des paramètres dimensionnants apparaissent et l'équation peut être écrite

$$\partial_{\tau}^{2}g - \operatorname{tr}(\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g) + \epsilon \left(\frac{h_{1}}{\epsilon_{1}} \cdot (\partial_{\Xi}g + 2\operatorname{tr}(\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g)\Xi) + \frac{h_{4}}{\epsilon_{4}}\Xi \cdot \partial_{\Xi,\tau}g\right) \dots + \epsilon^{2} \left(\Xi^{t} \overline{\frac{h_{2}}{\epsilon_{2}^{2}}} \partial_{\Xi}g - \frac{\Xi \cdot h_{1}}{\epsilon_{1}} \frac{h_{1}}{\epsilon_{1}} \cdot (\partial_{\Xi}g + \operatorname{tr}(\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g)\Xi) - \frac{h_{3}}{\epsilon_{3}^{2}}(\Xi \cdot \partial_{\Xi}g) + \frac{h_{4}^{2}}{\epsilon_{4}^{2}}((\Xi \cdot \partial_{\Xi}g) + \Xi^{t}\partial_{\Xi}\partial_{\Xi}g\Xi)\right) = 0$$
(B.18)

Dans cette équation, les h_i sont des fonctions de τ et Ξ dont l'amplitude est de l'ordre de 1, les ϵ_i permettent de comprendre comment les différents termes agissent les uns par rapport aux autres et ϵ est le paramètre liant les différentes variations de la célérité à la pulsation. Pour toute variation *a priori* de *c*, quand ϵ devient suffisamment petit, c'est-à-dire lorsque l'espace et le temps sont suffisamment dilatés, le problème de référence se rapproche de l'équation des ondes classique, ce qui peut s'interpréter par : lorsque la fréquence du forçage est suffisamment élevée et que la dimension spatiale du problème est suffisamment petite, le comportement est celui de l'équation des ondes.

Par rapport au changement de variables uniforme (B.15), le changement de variables non uniforme (B.16) apporte un plus pour l'étude sur un domaine de τ et Ξ donné. Il est donc naturel de se demander si

l'expression des variations de la célérité comme étant des variations suivant τ et Ξ apporte quelque chose. Une fois cette dernière opération effectuée, les équations ne seront plus dépendantes des variables t et x. Les nouvelles expressions des variations s'écrivent, au premier ordre,

$$\nabla c = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c}\right)^{-1} \partial_{\Xi} c \text{ et } \partial_t c = \omega \left(1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c}\right)^{-1} \partial_\tau c \tag{B.19}$$

ce qui permet d'écrire

$$\nabla \Xi = \frac{\omega}{c} (\overline{\overline{I}} - \Xi \otimes (1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})^{-1} \frac{\partial_{\Xi} c}{c})) \text{ et } \partial_t \Xi = -\frac{\omega}{c} \frac{\partial_\tau c \Xi}{1 + \frac{\partial_{\Xi} c}{c} \cdot \Xi}$$
(B.20)

et, au second ordre,

$$\partial_t^2 c = \frac{\omega^2}{1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c}} \left(\partial_\tau^2 c - \frac{\partial_\tau c}{c(1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})} \left(2\Xi \cdot \partial_{\Xi,\tau} c - \frac{\partial_\tau c}{c(1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})} (\Xi \partial_{\Xi}^2 c \Xi + 2\Xi \partial_{\Xi} c) \right) \right) \quad (B.21)$$

$$\nabla \nabla c = (1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})^{-1} (\frac{\omega}{c})^2 \dots \\ \left(\partial_{\Xi}^2 c - (1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})^{-1} (\frac{\partial_{\Xi} c}{c} \otimes (\partial_{\Xi}^2 c \Xi) + (\partial_{\Xi}^2 c \Xi) \otimes \frac{\partial_{\Xi} c}{c}) + (\Xi \partial_{\Xi}^2 c \Xi - c)(1 + \frac{\partial_{\Xi} c \cdot \Xi}{c})^{-2} (\frac{\partial_{\Xi} c}{c} \otimes \frac{\partial_{\Xi} c}{c}) \right)$$
(B.22)

Une analyse rapide montre que l'introduction de ces expressions dans l'équation (B.17) élimine les paramètres dimensionnants. Ce résultat était prévisible puisque, dans ce cas, il ne subsiste plus de "témoins" de l'échelle initiale. Le changement de variables permet donc de comparer des problèmes pour des fréquences différentes mais, pour comprendre les changements de comportement en fonction de la fréquence, la confrontation des deux échelles subsistant dans (B.17) est indispensable. Ainsi, les variations de la célérité doivent rester indépendantes de la fréquence et uniquement liée à la géométrie du problème. Même si l'équation (B.18) mélange les variables spatiale et temporelle avec les nouvelles variables, elle montre comment le changement de variable et l'adimensionnement ne servent pas à identifier les mêmes comportements et peuvent être utilisés simultanément pour compléter l'analyse.

* * *

L'utilisation de l'analyse dimensionnelle issue de la mécanique des fluides a permis d'identifier un paramètre caractérisant l'évolution d'une onde. Il réalise nécessairement un rapport entre les variations temporelles et les variations spatiales. A l'aide des autres facteurs dimensionnants identifiés dans les équations, les différentes approximations ont été confrontées à une montée en fréquence. Aucune amélioration du modèle n'est nécessaire tant que la distance de propagation ne devient pas très grande, car alors l'intégration des effets visqueux devient non négligeable, ou que la géométrie n'induit pas de variations spatiales trop brusques.

Pour chaque configuration, grâce à des dimensions de référence adaptées, le comportement de l'onde peut être rapproché d'un comportement générique indépendant de la physique sous-jacente. La validité de cette approximation et l'importance des termes négligés traduisant la spécifité de chaque configuration dépend alors fortement du rapport entre la longueur d'onde et la dimension du problème.

B.2 Principes de la méthode d'approximation

Les systèmes d'équations modélisant le comportement des fluides n'ont, en général, pas de solution analytique. Pour calculer des solutions, des approximations doivent donc être faites. D'une part, des simplifications physiques peuvent conduire à des équations intégrables analytiquement. D'autre part, les différentes discrétisations utilisent des approximations numériques.

Pour les méthodes classiques, l'erreur commise dépend surtout du pas de discrétisation. Dans le cadre des hautes fréquences, le pas de discrétisation nécessaire pour obtenir une erreur convenable induit des nombres de degrés de liberté trop grands. Une approximation des équations en fonction du paramètre fréquentiel est donc préférable. Les méthodes asymptotiques de résolution d'équations sont nombreuses. Le développement des équations de la mécanique des fluides asymptotiquement suivant un petit paramètre ou les traitements de l'équation des ondes pour les hautes fréquences sont relativement répandus. La méthode développée dans cette étude réalise, d'une certaine façon, un compromis entre ces deux types de formalismes.

La première partie donne quelques exemples d'approches permettant de replacer la méthode utilisée dans un contexte global. Ensuite, dans la seconde partie, l'étude du comportement des solutions de l'équation d'Helmholtz à hautes fréquences sert de source d'inspiration pour l'élaboration d'une méthode adaptée. Enfin, le principe de la méthode est l'objet de la troisième partie.

B.2.1 Développements asymptotiques

L'idée consistant à identifier un paramètre dimensionnant dans des équations et à effectuer un développement lorsque celui-ci est proche de 0 est largement utilisée en mécanique des fluides. En effet, compte tenu du rôle que joue le nombre de Reynolds dans les équations de Navier-Stokes, différentes approches de ce type conduisent à des équations simplifiées. Parmi les diverses applications de la méthode, son utilisation pour l'estimation de champs au voisinage des surfaces lorsque les effets visqueux deviennent importants est particulièrement intéressante pour la présente étude. En effet, l'introduction d'une **couche limite** et de développements raccordés est déclinée dans le cadre des méthodes hautes fréquences pour le traitement des champs tangents. L'approximation et l'analyse de la stabilité des opérateurs peuvent aussi être utiles à l'analyse hautes fréquences. Ainsi, les travaux étudiant la limite des équations dans le cas des petits nombres de Mach comme dans [⁵⁴] ou la stabilité du système d'équations pour certains types d'onde comme dans [³²] utilisent des approches différentes mais néanmoins riches d'enseignements.

L'utilisation des méthodes asymptotiques dans le cadre de l'approximation pour les hautes fréquences de l'équation d'Helmholtz comporte deux aspects distincts. Le premier consiste à développer les équations autour d'un petit paramètre. Pour la propagation libre, cette méthode est couplée avec l'introduction d'un Ansatz, c'est-à-dire d'une forme particulière de fonction, et, pour la propagation au voisinage de surface, les développements se font dans une couche limite. C'est essentiellement ces techniques qui seront utilisées dans la suite. L'autre aspect de l'utilisation des méthodes asymptotiques concerne le **développement d'intégrales**. En effet, grâce aux propriétés de l'équation d'Helmholtz, les solutions peuvent être décrites à l'aide d'intégrales sur les surfaces diffractantes. La transformation de Fourier, le théorème de représentation intégrale, le spectre d'ondes planes sont quelques-uns des outils pouvant être utilisés. Une fois l'expression obtenue, les méthodes de la phase stationnaire, de la descente rapide et l'intégration par parties permettent d'obtenir les contributions prépondérantes. Ainsi, comme dans [¹³] et dans [⁵²], l'application du développement d'intégrale permet de résoudre de nombreux problèmes.

Par ailleurs, parallèlement aux développements asymptotiques, une théorie basée sur la **transformation de Wigner** cherche à justifier rigoureusement une limite hautes fréquences de l'équation des ondes. Dans [⁷], les auteurs étudient étape par étape le cheminement jusqu'à l'obtention d'une équation de Liouville avec terme source. Cette équation peut aussi être obtenue avec des considérations basées sur des trajectoires de phonons et s'écrit pour l'équation des ondes classique

$$\partial_t f + c^2 \boldsymbol{p} \cdot \nabla f - \frac{\nabla c}{c} \cdot \partial_{\boldsymbol{p}} f = 0$$
 (B.23)

avec $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ la densité de particules dans l'espace des phases. La résolution peut utiliser soit une méthode de moments, soit une méthode inspirée par l'évolution de fronts d'onde. Dans [⁷⁵], les auteurs comparent les deux approches et passent de l'une à l'autre grâce à la transformation de Wigner $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = u_0^2 \delta(\boldsymbol{p} - \nabla \psi)$ de la forme classique des fonctions de l'optique géométrique $u_0 \exp(i\psi/\epsilon)$ avec $\epsilon \longrightarrow 0$. Dans le cas d'environnements confinés ou présentant de fortes variations, alors que la méthode utilisant les développements asymptotiques et présupposant une propagation en environnement quasi infini atteint ses limites, la convergence de la transformation de Wigner peut être démontrée et l'étude dans [⁵] illustre la puissance de cette approche. Dans la suite, cette approche n'est pas du tout abordée. Cependant, elle représente une alternative qu'il faut prendre en considération pour déterminer la pertinence industrielle de la méthode développée.

Les approximations hautes fréquences trouvent des applications pour différentes physiques sous-jacentes. Ainsi, en dehors du traitement "simple" de l'équation d'Helmholtz, elles sont appliquées non seulement aux systèmes de Maxwell et de Navier-Stokes, mais aussi à l'équation de Schrödinger et à la propagation en milieux élastiques. Pour se faire une idée des différences et des ressemblances, le lecteur pourra se référer à [⁷⁴] pour une application à l'électromagnétisme et à [¹⁹] pour une application en sismographie.

B.2.2 Les solutions de l'équation d'Helmholtz

Avant d'étudier l'analyse hautes fréquences pour des problèmes plus compliqués, il est instructif d'étudier le comportement des solutions de l'équation d'Helmholtz. En effet, la simplicité de sa forme $-(k^2 + \Delta)u(\mathbf{x}, k) = S(\mathbf{x}, k)$ permet à la fois d'appréhender intuitivement des phénomènes faisant intervenir un paramètre devenant petit et de comprendre la complexité de telles analyses. Sans second membre, $-(k^2 + \Delta)u(\mathbf{x}, k) = 0$ dépend uniquement de deux paramètres : la position et le nombre d'onde. Immédiatement, deux cas extrêmes peuvent être envisagés $k \longrightarrow 0$ et $k \longrightarrow \infty$. Formellement, dans le premier cas, le paramètre prépondérant devrait être $\Delta u(\mathbf{x}, k)$ et, dans le deuxième, $u(\mathbf{x}, k)$ seulement cette analyse simpliste atteint vite ses limites.

De façon intuitive, l'analyse des solutions de l'équation de Helmholtz lorsque $kL \longrightarrow \infty$ conduit à considérer les solutions comme constituées de deux parties. La première est liée à la répartition de l'énergie qui est fonction des données du problème et la seconde à l'aspect ondulatoire induit par la forme de l'équation. De plus, pour des données relativement régulières avec des amplitudes de variations faibles, les variations de la seconde partie deviennent beaucoup plus brusques que celle de la première partie.

En dimension 1, les solutions analytiques "classiques" sont de la forme

 $u(x,k) = u_0(k) \exp(-ikx) + u_1(k) \exp(ikx)$ et ce sont les conditions aux limites du domaine qui permettent de définir u_0 et u_1 . En domaine infini, si la solution est connue en un point et si elle vérifie la condition de radiation (condition de Sommerfeld : $|x|(\partial_x u - iku) = O(1)$ pour laquelle seules les ondes progressives sont possibles) alors elle s'écrit $u(x,k) = u_1(k) \exp(ik|x - x_0|)$ avec $u_1(k)$ la valeur en x_0 . Ainsi, en faisant varier k, aucune conclusion ne peut être tirée puisque c'est essentiellement kx qui indique la forme de la solution. En changeant de variable x' = x/L où L est la distance sur laquelle la solution est observée, $x' \in [-1; 1]$ et la solution s'écrit $u(x', k) = u_1(k) \exp(ikL|x' - x'_0|)$. Maintenant, c'est kLqui décrit le comportement de la solution. Si $kL \longrightarrow 0$, la solution est à peu près constante sur le domaine mais dépend de $k : u(x', k) = u_1(k)(1 + ikL|x' - x'_0| + o(kL))$. Si $kL \longrightarrow \infty$, la solution oscille de plus en plus. En domaine borné, la dépendance de u_0 et u_1 en fonction de k et de L n'est pas aussi simple, surtout si les conditions aux limites dépendent de k.

Le domaine d'observation étant en pratique toujours borné, il suffit de considérer le problème dans un domaine limité avec imposition ou non de conditions aux limites. Avec le changement de variable précédent, l'équation $-((kL)^2 + \Delta)u(x', k) = 0$ est résolue dans [-1; 1]. Soit u une solution "classique" de ce problème, u est bornée car le domaine est borné alors, le problème étant linéaire, u peut être normalisée. Le paramètre important est donc kL. Si $kL \longrightarrow 0$, le terme linéaire apparaît comme une perturbation ajoutée à $\Delta u(x', k) = 0$ ce qui est confirmé par les solutions qui ne sont alors plus oscillantes. Si $kL \longrightarrow \infty$, l'équation s'écrit $-(1 + \Delta/(kL)^2)u(x', k) = 0$ et le terme $\Delta/(kL)^2$ apparaît comme une perturbation. A l'inverse, si le changement de variable est x' = kx, l'équation devient $-(1+\Delta)u(x', k) = 0$ et le problème résolu est toujours le même à une homothétie près. Il est remarquable qu'en domaine infini, la présence d'un terme de diffusion, introduit par exemple par la résolution numérique, induit un amortissement de la solution devenant prépondérant pour le comportement lorsque $kL \longrightarrow \infty$.

Dans l'espace, les solutions ne s'écrivent plus en règle générale de façon analytique mais la représentation intégrale, les solutions élémentaires et la transformation de Fourier permettent de se faire une bonne idée des solutions et les remarques faites précédemment restent valables. En utilisant une solution élémentaire, dans un premier temps, le traitement en domaine infini de l'équation avec second membre donne

$$u(\boldsymbol{x},k) = \int_{\Omega} \frac{\exp\left(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\right)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} S(\boldsymbol{y},k) d\boldsymbol{y}$$
(B.24)

où S est le terme source. En adimensionnant la variable spatiale, la solution devient

$$u(\boldsymbol{x}', k, L) = \int_{\Omega'} \frac{\exp\left(\mathrm{i}kL|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|\right)}{4\pi|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|} S(L\boldsymbol{y}', k)d\boldsymbol{y}'$$
(B.25)

et l'analyse de l'intégrale dépend maintenant de la forme du terme source et du paramètre kL, le volume Ω' étant contenu dans, par exemple, une sphère de rayon 1.

Pour traiter les conditions éventuelles aux limites du domaine, la deuxième étape de la méthode calcule, grâce au théorème de représentation intégrale,

$$v(\boldsymbol{x}', k, L) = \int_{\Gamma'} G'(k, L, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') q(k, L, \boldsymbol{y}') - \partial_{\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} G'(k, L, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \psi(k, L, \boldsymbol{y}') d\boldsymbol{y}'$$
(B.26)

avec q et ψ les potentiels de simple et double couche.

Comme $G(k, L, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = \exp(ikL|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y'}|)/(4\pi|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y'}|)$, les quantités dimensionnantes et la forme des solutions sont retrouvées.

Compte tenu du développement précédent et de la forme des solutions élémentaires, une fonction de la forme $u(k, x) = u_0(x) \exp(ikL\phi(x))$ avec des taux de variations pour u_0 et ϕ de l'ordre de l'unité semble pouvoir réaliser une bonne approximation des solutions. Cette forme de fonction est appelée "Ansatz de l'optique géométrique". Son introduction dans les équations donne

$$(1 - (\nabla \phi)^2)u_0 + \frac{i}{kL}(u_0 \Delta \phi + 2\nabla \phi \cdot \nabla u_0) + \frac{1}{(kL)^2} \Delta u_0 = 0$$
(B.27)

Avec l'hypothèse faite sur le taux de variation de ϕ et u_0 , les termes semblent pouvoir être séparés en fonction de leur dépendance asymptotique en kL. Ainsi, trois nouvelles équations sont obtenues

$$(\nabla \phi)^2 = 1$$
, $u_0 \Delta \phi + 2\nabla \phi \cdot \nabla u_0 = 0$ et $\Delta u_0 = 0$ (B.28)

La première équation pose une condition sur la fonction de phase, la deuxième qui peut s'écrire aussi $\nabla \cdot (u_0^2 \nabla \phi) = 0$ une condition sur l'amplitude en fonction de la phase. En pratique, la troisième équation n'est pas utilisée puisqu'un développement asymptotique de u_0 est effectué. Cependant, il est notable que le système des trois équations, et en particulier "Helmholtz stationnaire", est vérifié par les ondes sphériques et les ondes planes.

B.2.3 Une méthode d'inspiration WKB

La mise en évidence d'un paramètre devenant relativement petit lorsque la fréquence augmente incite à développer les équations suivant ce paramètre. La présence au premier ordre d'un terme linéaire motive l'utilisation d'une forme de fonction comportant une exponentielle. Le formalisme de la méthode WKB permet de réaliser une telle approximation. Sans entrer dans les détails de la rigueur mathématique, ce paragraphe décrit les deux principes de cette méthode et esquisse un processus général pour l'appliquer à de nouveaux problèmes.

Ansatz

Le lecteur est désormais familier du fait que les champs liés à l'acoustique peuvent s'interpréter en termes d'ondes. L'idée ici est de pousser plus loin le raisonnement. Le problème d'un calcul par transformation de Fourier réside dans les termes non-linéaires des équations rendant l'expression fréquentielle très complexe, au propre comme au figuré. Cependant, la séparation de la phase et de l'amplitude ainsi que l'introduction d'une variable "fréquentielle" semblent être des voies d'approfondissement.

L'apport de cette séparation réside dans le ralentissement des oscillations des fonctions. En effet, la discrétisation d'un problème dépend du niveau de détail que l'on veut pouvoir calculer. En acoustique, le niveau de détail temporel est très important. Ceci se traduit, entre autre, par la volonté de pouvoir calculer des variations de fonctions sur des temps et des distances très courts par rapport à la durée et à la distance devant être pris en compte. Or, en adoptant le point de vue fréquentiel, cela correspond à des fonctions comportant dans leurs spectres des fréquences très élevées dont le transport des variations dans l'ensemble du domaine de calcul nécessite une discrétisation spatiale très raffinée.

Dans le cadre linéarisé fréquentiel, l'idée principale consiste à introduire une forme de fonction *a priori* appelée Ansatz :

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\epsilon) = \boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x},\epsilon)e^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{x},\epsilon)/\epsilon}$$
(B.29)

avec ϵ le paramètre dimensionnant le comportement fréquentiel par rapport à la dimension géométrique, W le vecteur composé des variables du système d'équations, W_0 l'amplitude et ϕ la phase.

Plus généralement, la traduction de cette idée pour les équations non linéaires et temporelles conduit à chercher des solutions de la forme :

$$\boldsymbol{W}(t,\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{W}}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})/\epsilon)$$
(B.30)

avec $\overline{W}(t, x)$ un champ moyen connu et $W_0(t, x, \theta)$ une fonction de trois variables dépendant du temps et de la position comme l'amplitude précédente mais aussi périodique ou presque périodique en θ comme l'exponentielle pour la phase. ϵ est alors un paramètre essentiellement lié aux fréquences présentes dans le spectre des sources ou des conditions aux limites (en temps et en espace). L'ensemble des fonctions ainsi atteignables semble être suffisamment large pour prendre en compte tous les phénomènes intéressants. Cette écriture traduit, en effet, les deux notions de perturbation d'un régime établi et de la mise en évidence de phases pour cette perturbation. Les fonctions W_0 et ϕ sont complexes et doivent être suffisamment régulières pour justifier les développements suivants. En pratique, elles sont considérées comme infiniment dérivables.

Une bonne expression réalise un équilibre entre les complexités de la forme de la fonction inconnue choisie *a priori* et des équations qui vont en découler, et la quantité d'information que l'on veut prendre en compte. En effet, tout ce qui n'est pas présent dans la forme de fonction choisie ne peut pas être calculé ! Dans l'exemple précédent, plusieurs phases différentes peuvent être prises en compte ce qui traite directement le problème du système. De plus, $\overline{W}(t, x)$ peut être choisi arbitrairement en veillant à ce qu'il vérifie le système d'équations sans second membre. Ainsi, en conservant les idées de la forme de départ et une expression simple, cette nouvelle forme augmente considérablement l'espace des phénomènes descriptibles.

Bien sûr, à ce stade de la réflexion, le problème semble s'être compliqué bien plus que simplifié. Cependant, il a été adapté à la problématique spécifique à traiter. Les simplifications vont apparaître avec les développements de solutions qui ne sont plus faits sur des ensembles de fonctions non spécifiques mais sur des formes pour lesquelles l'apport d'information est maîtrisé.

Développements asymptotiques

Pour simplifier les problèmes, l'idée de la méthode est de développer *a priori* la solution suivant une séquence asymptotique, d'injecter ce développement dans les équations et, grâce à l'ordonnancement des termes dans les équations, d'en déduire des nouvelles équations. Un développement asymptotique peut s'écrire sous la forme :

$$f(\epsilon) = \sum \beta_n(\epsilon) \alpha_n \tag{B.31}$$

avec les α_n indépendants des β_n et $\forall n$, $\beta_n(\epsilon) = o(\beta_{n-1}(\epsilon))$. Le choix de la séquence asymptotique peut être explicité en fonction, à la fois du paramètre suivant lequel elle est développée, et des phénomènes qu'elle doit prendre en compte. Comme, en pratique, seuls les premiers termes du développement sont calculés, typiquement le premier, la nouvelle approximation est très dépendante de la valeur du paramètre. Ainsi, le choix du paramètre suivant lequel le développement est effectué conditionne fortement le domaine de validité de nos calculs. Le développement est donc fonction :

- du paramètre de développement. Dans le cas présent, le paramètre intéressant à mettre en avant est un paramètre fréquentiel. Ainsi, pour une description fréquentielle, il est judicieux de développer suivant la fréquence du calcul. Par contre, pour un calcul temporel, la fréquence de référence n'est pas imposée et doit être choisie en fonction des caractéristiques du problème (sources, conditions limites, ...).
- de la nature des sources. Il faut, en effet, pour pouvoir les prendre correctement en compte, que le développement des sources sur la séquence asymptotique soit à peu près exact. Il faut considérer, ici, les sources de toutes natures et considérer aussi les conditions aux limites (spatiales et temporelles).
- des phénomènes à prendre en compte. Comme pour les sources, il faut que la séquence puisse décrire les phénomènes voulus. La connaissance *a priori* des développements des phénomènes est donnée par des problèmes canoniques. Ainsi, c'est l'étude du champ analytique diffracté par un dièdre, par un cylindre, par une sphère, etc., qui indique que le champ peut être décomposé en plusieurs termes, chacun se développant sur une séquence asymptotique compatible différente.

Compte tenu de tout ceci, un développement général peut prendre la forme :

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=n_0}^{n_1} (\epsilon)^{n/k} \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$$
(B.32)

avec θ la variable de phase, k l'entier définissant l'échelle de développement et n_0 et n_1 les premier et dernier ordres du développement. L'importance de n_0 n'apparaît que dans le cas non linéaire puisque, dans le cas linéaire, l'amplitude ne joue aucun rôle. À ce stade, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la forme de la phase et sur l'échelle du développement.

Construction de la méthode et formalisme

Compte tenu de la diversité des équations exhibées dans les paragraphes précédents, il n'y a pas une unique solution (une unique forme de fonction et une unique échelle de développement) permettant de les approcher. La présence ou non du paramètre ϵ dans les différentes quantités modifie la démarche. Pourtant, ce paragraphe cherche à donner une vision générale permettant d'aborder les différents cas.

Il y a trois principales façons de construire un Ansatz qui peuvent être utilisées tour à tour pour obtenir une description optimale. La plus intuitive consiste à imaginer directement une forme de fonction. Cette méthode est *a priori* la première utilisée face à un nouveau problème et elle permet de construire une ébauche basique. Il s'agit de s'appuyer sur des équations dégénérées du problème initial ayant des solutions facilement définissables. Pour les ondes acoustiques, c'est bien sûr l'équation d'Helmholtz et la forme évoquée au (B.2.2) qui servent de modèles.

A partir du résultat de la première étape, deux options existent. Soit, un Ansatz complet faisant intervenir ou non une échelle asymptotique est directement construit. Il faut alors trouver des conditions pour qu'il soit équivalent asymptotiquement à une solution du problème. Soit, par une méthode de perturbation, l'introduction d'une première fonction induit d'autres fonctions qui successivement forment un développement asymptotique.

Dans tous les cas, la validation de la solution construite consiste à caractériser son éloignement par rapport à une solution du problème. Il faut vérifier que celui-ci tend vers 0 à la limite et définir explicitement les différentes quantités introduites.

Exposée comme cela, la méthode relève plus de l'approche empirique que du développement d'un outil mathématique. Cependant, au fil des études, un formalisme s'est développé et des justifications mathématiques existent pour étayer les développements. Pour se familiariser avec les formalismes et pour aller plus loin, le lecteur peut se référer à [⁶⁰] puis à [⁶⁹] et enfin à [²³].

* * *

Cette partie distingue, dans la méthode WKB, l'aspect lié au découplage entre les variations spatiales et les variations temporelles et l'aspect lié à l'approximation des équations obtenues pour les rendre solubles facilement. La présentation générale de la méthode permet de l'appliquer à l'équation d'Helmholtz, comme aux équations d'Euler linéarisées ou aux équations de Navier-Stokes.

Si la forme générique de l'Ansatz permet de traiter facilement tous les problèmes, l'obtention d'équations "solubles" nécessite une certaine pratique pour identifier les échelles à prendre en compte. Celles-ci peuvent être de natures différentes. En ce qui concerne la présente étude, les difficultés peuvent provenir des termes non-linéaires et de la géométrie des surfaces.

B.3 Application aux équations de l'aéroacoustique

Pour les problèmes que la méthode doit résoudre, il semble que le bon niveau de modélisation se traduise par les équations d'Euler linéarisées. De plus, les excitations considérées sont essentiellement monochromatiques et les champs moyens sont stationnaires ce qui permet d'utiliser la version fréquentielle des équations.

La méthode décrite au (B.2.3) s'applique simplement au système d'équations d'Euler linéarisées. En effectuant les ajustements liés à la prise en compte de plusieurs équations couplées, une description peut être obtenue. Le caractère linéaire simplifie beaucoup le problème. En effet, l'amplitude des solutions n'a pas d'importance et les phénomènes de résonance dus aux interactions entre les contributions n'existent pas.

Dans une première partie, les équations d'Euler linéarisées sont développées intuitivement suivant le paramètre fréquentiel adéquat. Aucune précision n'est donnée pour le choix du paramètre ϵ mais, en fonction des problèmes, l'étude du (B.1.2) permet d'en construire un. Dans un premier temps, la justification des développements reste succincte mais est développée dans les parties suivantes. Ainsi, dans la deuxième partie, les liens avec les phénomènes excitateurs sont clairement identifiés et la stratégie de calcul est énoncée. Ensuite, la troisième partie étudie les termes suivants non pris en compte au premier ordre et leur influence sur l'approximation. L'utilisation d'une phase complexe, dans la quatrième partie, modifie substantiellement le problème et fournit un degré de liberté supplémentaire pour la définition des solutions qui est particulièrement utile lors de la résolution. Enfin, la cinquième partie s'intéresse aux modifications à prendre en compte pour les problèmes non linéaires.

B.3.1 Avec les équations d'Euler linéarisées fréquentielles

A partir des équations (A.31), les équations d'Euler linéarisées fréquentielles avec champ moyen indépendant du temps en variables (ρ , v, s) sans terme source s'écrivent

$$-\mathbf{i}\omega r + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla r + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\overline{\rho} + r\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} = 0$$
(B.33)

$$-i\omega\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla\pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla\overline{\rho}}{\overline{\rho}^2}r = 0$$
(B.34)

$$-i\omega\sigma + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\overline{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{B.35}$$

avec l'équation d'état linéarisée $\pi = c^2 r + \alpha \sigma$).

En reprenant plus succinctement ce qui a été développé au (B.1), l'analyse hautes fréquences s'attache à étudier le comportement des solutions lorsque les perturbations présentent des taux de variations très élevés par rapport aux variations liées à la "géométrie" du problème. Dans les équations précédentes, les variations spatiales vont devoir, d'une part, absorber le terme en ω et, d'autre part, "s'adapter" aux équations stationnaires. Pour une meilleure compréhension, il est donc préférable d'adimensionner la variable spatiale pour obtenir des taux de variation du champ moyen de l'ordre de l'unité. D'autres adimensionnements sont possibles dès l'instant qu'ils permettent de relier les deux échelles de variations. *A priori*, il n'y a que deux échelles de taux de variations en imaginant qu'une fois les variations dues au forçage temporel "éliminées", les variations de la perturbation sont de l'ordre des variations du champ moyen. Ainsi, en s'inspirant des équations (B.12), (B.13) et (B.14) mais en éliminant les termes non linéaires et visqueux, les équations d'Euler linéarisées fréquentielles se réécrivent

$$-i\frac{r'}{\epsilon} + \overline{\boldsymbol{v'}} \cdot \nabla r' + \boldsymbol{\xi'} \cdot \nabla \overline{\rho'} + r' \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v'}} + \overline{\rho'} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi'} = 0$$
(B.36)

$$-i\frac{\boldsymbol{\xi'}}{\epsilon} + (\boldsymbol{\xi'} \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{v'}} + (\overline{\boldsymbol{v'}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi'} + \frac{\nabla \pi'}{\overline{\rho'}} - \frac{\nabla \overline{p'}}{\overline{\rho'}^2}r' = 0$$
(B.37)

$$-i\frac{\sigma'}{\epsilon} + \overline{v'} \cdot \nabla \sigma' + \boldsymbol{\xi'} \cdot \nabla \overline{s'} = 0$$
(B.38)

dans lesquelles, pour simplifier les développements suivants, le temps de référence n'est pas l'inverse de la fréquence mais $1/\omega$.

En introduisant l'Ansatz de l'optique géométrique du B.29 avec une seule phase commune à toutes les quantités et indépendante de ϵ , $W = W_0(\epsilon, x) \exp(i\phi(x)/\epsilon)$, les équations deviennent, en supprimant les primes :

$$-i\frac{r_0}{\epsilon} + \overline{v} \cdot \nabla r_0 + i\frac{r_0}{\epsilon} \overline{v} \cdot \nabla \phi + \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \nabla \overline{\rho} + r_0 \nabla \cdot \overline{v} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_0 + i\overline{\rho} \nabla \phi \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}_0}{\epsilon} = 0$$
(B.39)

$$\mathbf{i}\frac{\boldsymbol{\xi}_{0}}{\epsilon} + (\boldsymbol{\xi}_{0}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_{0} + \mathbf{i}(\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)\frac{\boldsymbol{\xi}_{0}}{\epsilon} + \frac{\nabla\pi_{0} + i(\pi_{0}/\epsilon)\nabla\phi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla\overline{p}}{\overline{\rho}^{2}}r_{0} = 0$$
(B.40)

$$-i\frac{\sigma_0}{\epsilon} + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0 + i\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi \frac{\sigma_0}{\epsilon} + \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{s}} = 0$$
(B.41)

qui peut se ré-écrire

$$\frac{i}{\epsilon} \begin{bmatrix}
-1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi \cdot & 0 \\
\frac{c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \frac{\alpha c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi \\
0 & 0 & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi
\end{bmatrix} \begin{cases}
r_0 \\
\xi_0 \\
s_0
\end{bmatrix} \dots \\
+ \begin{cases}
\overline{v} \cdot \nabla r_0 + \xi_0 \cdot \nabla \overline{\rho} + r_0 \nabla \cdot \overline{v} + \overline{\rho} \nabla \cdot \xi_0 \\
(\xi_0 \cdot \nabla) \overline{v} + (\overline{v} \cdot \nabla) \xi_0 + \frac{\nabla \pi_0}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho^2}} r_0 \\
\overline{v} \cdot \nabla \sigma_0 + \xi_0 \cdot \nabla \overline{s}
\end{bmatrix} = 0$$
(B.42)

Si la phase et l'amplitude sont réelles, le système (B.42) peut être résolu en séparant la partie imaginaire et la partie réelle. L'amplitude doit alors vérifier le système d'Euler linéarisé stationnaire. Cependant, non seulement le couplage entre les champs lors de l'interaction avec une surface sera rendu difficile notamment si celle-ci présente une impédance complexe, mais, en plus, le découplage entre le comportement instationnaire et l'amplitude réduit fortement l'ensemble des phénomènes modélisables en empéchant, notamment, la prise en compte de la dispersion qui affecte l'amplitude et qui dépend de la fréquence. Au minimum, il faut donc prendre une amplitude complexe et effectuer un développement asymptotique pour la calculer.

En réécrivant $W_0(\epsilon, x) = W_0^0(x) + \epsilon W_0^r(x, \epsilon)$ avec W_0^0 la partie du vecteur indépendante de ϵ et W_0^r le reste, le système devient sans approximation

$$i\overline{\overline{A}}\boldsymbol{W}_{0}^{0} + \epsilon(i\overline{\overline{A}}\boldsymbol{W}_{0}^{r} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{0}^{0})) + \epsilon^{2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{0}^{r}) = 0$$
(B.43)

avec

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi \cdot & 0\\ \frac{c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \frac{\alpha c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi\\ 0 & 0 & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi \end{bmatrix}$$
(B.44)

et

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\overline{v}} \cdot \nabla r + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{\rho} + r \nabla \cdot \boldsymbol{\overline{v}} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \\ (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \boldsymbol{\overline{v}} + (\boldsymbol{\overline{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla \pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho}^2} r \\ \boldsymbol{\overline{v}} \cdot \nabla \sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{s} \end{array} \right\}$$
(B.45)

En supposant que les quantités restent bornées quand $\epsilon \longrightarrow 0$ et que les taux de variations des différentes fonctions sont de l'ordre de l'unité, le premier terme du système doit être nul. Pour qu'il existe une solution non trivialement nulle en tout point, il faut que le déterminant de la matrice $\overline{\overline{A}}$ soit nul $(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi - 1)^3 ((\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi - 1)^2 - c^2 |\nabla \phi|^2) = 0$ et que $(r_0^0, \boldsymbol{\xi_0}^0, \sigma_0^0)$ appartienne au noyau de la matrice. Ainsi, - soit $\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi = 1, \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\xi_0}^0 = 0$ et $r_0^0 = -\alpha \sigma_0^0$ c'est-à-dire $\pi_0^0 = 0$,

- soit

$$(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi - 1)^2 = c^2 |\nabla \phi|^2, \, \sigma_0^0 = 0 \text{ et } \boldsymbol{\xi_0}^0 = \frac{c^2 r_0^0 \nabla \phi}{\overline{\rho}(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)}.$$
(B.46)

٦

Il est remarquable que les relations trouvées correspondent aux relations de dispersion et de polarisation évoquées au (A.3.3). En supposant que ϕ est une fonction régulière, les deux conditions précédentes sont incompatibles. Les ondes acoustiques correspondent aux variations de pression, c'est donc l'onde vérifiant $(\overline{v} \cdot \nabla \phi - 1)^2 = c^2 |\nabla \phi|^2$ dans tout l'espace qui est ici intéressante.

Pour que le terme $B(W_0^0)$ puisse être contrebalancé par le terme $i\overline{\overline{A}}W_0^r$ au deuxième ordre, il faut qu'il soit dans l'image de $\overline{\overline{A}}$. Il faut, donc, vérifier

$$(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \nabla \cdot (r_0^0 \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi_0}^0) + \overline{\rho} \nabla \phi \cdot \left((\boldsymbol{\xi_0}^0 \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi_0}^0 + \frac{\nabla \pi_0^0}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{\rho}}{\overline{\rho}^2} r_0^0 \right) \dots$$

$$+ \alpha (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0^0 + \boldsymbol{\xi_0}^0 \cdot \nabla \overline{s}) = 0$$
(B.47)

Avec $1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi = \pm c |\nabla \phi|, \boldsymbol{\xi_0}^0 = \pm (cr_0^0/\overline{\rho})\boldsymbol{\nu}$ et $\sigma_0^0 = 0$, (B.47) devient

$$\pm c\nabla \cdot (r_0^0(\overline{\boldsymbol{v}} \pm c\boldsymbol{\nu})) + \dots \overline{\rho}\boldsymbol{\nu} \cdot \left((\pm \frac{cr_0^0\boldsymbol{\nu}}{\overline{\rho}} \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{v}} \pm (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \left(\frac{cr_0^0\boldsymbol{\nu}}{\overline{\rho}} \right) + \nabla \left(\frac{c^2r_0^0}{\overline{\rho}} \right) - \frac{c^2\alpha r_0^0}{\overline{\rho}^2}\nabla\overline{s} \right) + \frac{\alpha c^2r_0^0}{\overline{\rho}}\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla\overline{s} = 0$$
(B.48)

soit

$$\pm c\nabla \cdot (r_0^0(\overline{\boldsymbol{v}} \pm c\boldsymbol{\nu})) + \dots$$

$$\overline{\rho}\boldsymbol{\nu} \cdot \left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}(\pm((\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}) + \nabla c) \pm \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}\right)\boldsymbol{\nu} + c\nabla\left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}\right)\right) = 0$$
(B.49)

soit

$$\frac{c}{\overline{\rho}}\nabla\cdot(r_0^0(\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu})) + (\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu})\cdot\nabla\left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}\right) + \frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}(\pm\boldsymbol{\nu}((\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}})+\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla c) = 0$$
(B.50)

soit

$$\nabla \cdot \left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}(\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu})\right) + \frac{c}{\overline{\rho}}\left(\nabla r_0^0 \cdot (\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu}) + r_0^0(\pm\boldsymbol{\nu}((\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}})+\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla c)\right) = 0$$
(B.51)

or

$$-\nabla \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi - \nabla \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \pm (\nabla c |\nabla \phi| + c \nabla |\nabla \phi|)$$
(B.52)

donc

$$\pm \boldsymbol{\nu} (\nabla \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nu}) = -\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla c - (c\boldsymbol{\nu} \pm \overline{\boldsymbol{v}}) \frac{\nabla |\nabla \phi|}{|\nabla \phi|}$$
(B.53)

et donc

$$\nabla \cdot \left(\frac{cr_0^0}{\overline{\rho}}(\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu})\right) + \frac{c}{\overline{\rho}}\left(\nabla r_0^0 \cdot (\pm\overline{\boldsymbol{v}}+c\boldsymbol{\nu}) - r_0^0(c\boldsymbol{\nu}\pm\overline{\boldsymbol{v}})\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}\right) = 0$$
(B.54)

ce qui, après quelques calculs, donne

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_0^0)^2 c}{\overline{\rho} |\nabla \phi|} (c \boldsymbol{\nu} \pm \overline{\boldsymbol{v}})\right) = 0$$
(B.55)

Cette **équation de conservation** forme avec l'équation vérifiée par le gradient de phase, appelée **équation iconale**, le système fondamental de l'approximation hautes fréquences. La forme particulière de l'équation iconale motive, dans la suite, une résolution particulière qui influence la résolution de l'équation de conservation.

Plusieurs remarques peuvent être faites concernant ce développement. D'abord, l'utilisation des équations sans second membre et sans condition aux limites n'indique rien sur le mécanisme de création des perturbations, le choix arbitraire de l'Ansatz vise surtout à mettre en évidence la propagation. Ensuite, en pratique, ϵ n'est jamais nul, les termes négligés jouent alors un rôle plus ou moins important. De plus, parmi les erreurs commises, le couplage de la linéarisation et du développement asymptotique a pu cacher des effets non-linéaires devenant significatifs dans certaines situations. Enfin, pour certains problèmes, il est plus judicieux de prendre en compte un champ moyen instationnaire. Dans la suite, l'influence des différentes hypothèses faites ici va être étudiée, tout en gardant à l'esprit qu'un développement exhaustif est inatteignable à ce niveau. Des pistes seront données pour poursuivre la réflexion.

B.3.2 Sources et conditions aux limites

Plusieurs théorèmes dus à Lax et repris dans [⁶⁰] permettent de prouver que $W_0^0 \exp(i\phi(x)/\epsilon)$ approche asymptotiquement la solution de problèmes oscillants, que les oscillations soient dues à un second membre ou à des conditions initiales.

Soient $S_r(\boldsymbol{x}, \epsilon)$, $S_{\sigma}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$ et $S_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}, \epsilon)$, les termes sources des équations (B.36), (B.37) et (B.38), s'ils se mettent sous la forme $S(\boldsymbol{x}, \epsilon) = S_0(\boldsymbol{x}, \epsilon) \exp(i\phi(\boldsymbol{x})/\epsilon)$, il est naturel de chercher une solution de la forme de l'Ansatz géométrique. Le système (B.42) s'écrit avec second membre

$$\frac{i}{\epsilon} \begin{bmatrix}
-1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi \cdot & 0 \\
\frac{c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi & \frac{\alpha c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi \\
0 & 0 & -1 + \overline{v} \cdot \nabla \phi
\end{bmatrix} \begin{cases}
r_0 \\
\xi_0 \\
s_0
\end{bmatrix} \dots \\
+ \begin{cases}
\nabla \cdot (r_0 \overline{v} + \overline{\rho} \xi_0) \\
(\xi_0 \cdot \nabla) \overline{v} + (\overline{v} \cdot \nabla) \xi_0 + \frac{\nabla \pi_0 \overline{\rho} - \nabla \overline{p} r_0}{\overline{\rho}^2} \\
\overline{v} \cdot \nabla \sigma_0 + \xi_0 \cdot \nabla \overline{s}
\end{bmatrix} = \begin{cases}
S_{\xi} \\
S_{\sigma}
\end{bmatrix}$$
(B.56)

Deux cas sont alors possibles :

- soit $\nabla \phi$ ne vérifie pas une des trois conditions rendant le déterminant de $\overline{\overline{A}}$ nul et la source engendre une perturbation de la forme $W_0(x, \epsilon) = \epsilon(-i\overline{\overline{A}}^{-1}S_0(x, \epsilon) + \epsilon W_0^r(x, \epsilon))$ avec

$$\overline{\overline{A}} W_0^r - i\epsilon B(W_0^r) = B(\overline{\overline{A}}^{-1} S_0)$$
(B.57)

La solution peut, donc, être construite par récurrence. Il suffit de vérifier que les variations restent bornées quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

- soit $\nabla \phi$ vérifie une des trois conditions rendant le déterminant de $\overline{\overline{A}}$ nul et la source engendre une perturbation de la forme $W_0(x, \epsilon) = r_0^0 \widetilde{W} + \epsilon W_0^r(x, \epsilon)$) avec

$$\widetilde{\boldsymbol{W}} = \left\{ \begin{array}{c} 1\\ \pm \frac{c\boldsymbol{\nu}}{\bar{\rho}}\\ 0 \end{array} \right\} \text{ et } \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{B}(r_0^0 \widetilde{\boldsymbol{W}}) = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S_0} \text{ avec } \boldsymbol{P} = \left\{ \begin{array}{c} 1\\ \pm \frac{\bar{\rho}\boldsymbol{\nu}}{c}\\ \alpha \end{array} \right\}$$
(B.58)

soit

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_0^0)^2 c}{\overline{\rho} |\nabla \phi|} (\overline{\boldsymbol{v}} \pm c \boldsymbol{\nu})\right) = \frac{r_0^0 c}{\overline{\rho} |\nabla \phi|} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S_0}$$
(B.59)

Pour le premier cas, aux points où le terme source est nul, la solution est nulle. Dans la majorité des cas, les sources sont très localisées, cette situation n'est donc que peu intéressante et c'est la deuxième situation qui est utilisée.

En pratique, les zones où sont concentrées les sources ne peuvent pas être traitées par cette méthode asymptotique. Les variations des différentes fonctions y sont trop importantes. Ces zones sont donc isolées du reste de l'espace par des surfaces fictives.

En supposant que le rayonnement ne se fait qu'à partir des sources et vers l'extérieur des surfaces fictives, deux étapes sont distinguées. Un premier calcul donne l'expression, sur les surfaces, des phases et des amplitudes représentant l'action des sources. Ensuite, le calcul par méthode hautes fréquences proprement dit est effectué en prenant comme conditions aux limites les traces des champs précédemment calculés.

Pour les problèmes avec conditions aux limites sans second membre, il faut que les champs sur les limites vérifient les conditions de propagation énoncées dans le deuxième cas. Plusieurs jeux de champs peuvent être utilisés pour traduire l'excitation liées aux surfaces mais, dans le cas non linéaire, il faut prendre en compte les interactions entre les différents jeux.

B.3.3 Termes supplémentaires

A partir du système (B.43), les termes suivants du développement de W_0 peuvent être estimés. Si $W_0^r(x, \epsilon) = W_0^1(x) + \epsilon W_0^{r'}(x, \epsilon)$, alors le résidu du système précédent s'écrit

$$i\overline{\overline{A}}\boldsymbol{W}_{0}^{1} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{0}^{0}) + \epsilon(i\overline{\overline{A}}\boldsymbol{W}_{0}^{r'} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{0}^{1})) + \epsilon^{2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{0}^{r'}) = 0$$
(B.60)

et W_0^1 est la somme de l'antécédent de i $B(W_0^0)$ par $\overline{\overline{A}}$, qui existe puisque W_0^0 a été construit à cet effet, et d'un élément du noyau de $\overline{\overline{A}}$. Comme pour W_0^0 , il faut que $B(W_0^1)$ appartienne à l'image de $\overline{\overline{A}}$. Ainsi, W_0^1 peut être choisi sous la forme

$$\boldsymbol{\xi_0}^1 = -\mathrm{i}\frac{\alpha\boldsymbol{\xi_0}^0 \cdot \nabla \overline{s}}{\overline{\rho}|\nabla \phi|} \boldsymbol{\nu} \pm \left(\frac{cr_0^1}{\overline{\rho}}\boldsymbol{\nu} - \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_0^0)_2}{c|\nabla \phi|}\right) \text{ et } \sigma_0^1 = \mp\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\xi_0}^0 \cdot \nabla \overline{s}}{c|\nabla \phi|} \tag{B.61}$$

et vérifiant

$$(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \nabla \cdot (r_0^1 \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi_0}^1) + \overline{\rho} \nabla \phi \cdot \left((\boldsymbol{\xi_0}^1 \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi_0}^1 + \frac{\nabla \pi_0^1}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{\rho}}{\overline{\rho}^2} r_0^1 \right) \dots + \alpha (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0^1 + \boldsymbol{\xi_0}^1 \cdot \nabla \overline{s}) = 0$$
(B.62)

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_{0}^{1})^{2}c}{\overline{\rho}|\nabla\phi|}(c\boldsymbol{\nu}\pm\overline{\boldsymbol{v}})\right) = \dots \\ -\frac{r_{0}^{0}}{|\nabla\phi|} \left(\pm\frac{c}{\overline{\rho}}(\nabla \cdot (\overline{\rho}\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'}) + \alpha(\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\sigma_{0}^{1} + \boldsymbol{\xi_{0}}^{1'}\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{s}})) + \boldsymbol{\nu} \cdot ((\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'} + \frac{\nabla(c^{2}\alpha\sigma_{0}^{1})}{\overline{\rho}})\right)$$
(B.63)

avec $\boldsymbol{\xi_0}^{1'}$ la partie de $\boldsymbol{\xi_0}^{1}$ dépendant uniquement de \boldsymbol{W}_0^0 .

Plusieurs remarques peuvent être faites concernant le développement précédent. Compte tenu de la forme des éléments du noyau de $\overline{\overline{A}}$, la perturbation sur la masse volumique de l'antécédent de i $B(W_0^0)$ a été prise arbitrairement nulle. L'antécédent est donc uniquement déterminé par la deuxième équation qui est vectorielle et la dernière équation du système. En fait, la première équation donne la répartition entre la perturbation en masse volumique et la composante suivant le vecteur d'onde de la perturbation en vitesse ; la somme des deux devant égaler la composante suivant le vecteur d'onde de i $B(W_0^0)_2$. La deuxième équation dit que la composante perpendiculaire au vecteur d'onde de la perturbation sur la vitesse doit combler entièrement la composante perpendiculaire au vecteur d'onde de i $B(W_0^0)_2$.

La vérification de l'équation iconale et de l'équation de polarisation élimine le premier ordre du développement mais la vérification de l'équation de conservation n'élimine pas l'ordre suivant. Pour obtenir la nullité du deuxième terme, il faut ajouter l'antécédent de $i B(W_0^0)$ par \overline{A} . Mais, cet ajout ne donne pas un champ précis à l'ordre 2 puisque, pour compléter cet ordre, il manque le champ dépendant de r_0^1 . Ainsi, pour vérifier que W_0^1 contribue bien au deuxième ordre, il faut vérifier que, d'une part, $B(W_0^0)_2$ et, d'autre part, la solution de l'équation de conservation avec terme source restent bornées par rapport à W_0^0 . Pour la première condition, compte tenu de la forme de $B(W_0^0)_2$ l'analyse est rapide et ni les variations spatiales du champ moyen ni celles de la perturbation ne doivent être de l'ordre de ϵ^{-1} par rapport à l'amplitude de la perturbation. En effet, le rapport des vitesses donne approximativement

$$\frac{\boldsymbol{\xi_0}^1}{|\boldsymbol{\xi_0}|} \simeq -\mathbf{i} \frac{\alpha(\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \overline{s})}{\overline{\rho} |\nabla \phi|} \boldsymbol{\nu} \pm \left(\frac{r_0^1}{r_0^0} \boldsymbol{\nu} - \frac{\mathbf{i}}{c |\nabla \phi|} \left((\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{u}} + \frac{\overline{\rho}}{r_0^0 c} (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) \left(\frac{r_0^0 c}{\overline{\rho}} \right) + c \left(\frac{\nabla (c^2 r_0^0)}{c^2 r_0^0} - \frac{\nabla \overline{\rho}}{\overline{\rho} c^2} \right) \right) \right)$$
(B.64)

Pour la deuxième condition et en vue de la résolution, la masse volumique peut s'écrire $r_0^1 = fr_0^0$ et l'équation de conservation devient

$$(c\boldsymbol{\nu} \pm \overline{\boldsymbol{v}}) \cdot \nabla f^{2} = \dots$$

$$\frac{-1}{r_{0}^{0}} \left(\pm (\nabla \cdot (\overline{\rho}\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'}) + \alpha(\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\sigma_{0}^{1} + \boldsymbol{\xi_{0}}^{1'} \cdot \nabla \overline{s})) + \frac{\overline{\rho}}{c}\boldsymbol{\nu} \cdot ((\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'} \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi_{0}}^{1'} + \frac{\nabla(c^{2}\alpha\sigma_{0}^{1})}{\overline{\rho}}) \right)$$
(B.65)

Lorsque les termes suivants du développement ne sont plus négligeables, il est nécessaire d'adopter un autre Ansatz ou de modifier les équations pour prendre en compte des contributions supplémentaires au premier ordre. Le développement des équations dans les voisinages des frontières ombre-lumière est une autre illustration de ces ajustements indispensables.

Plus généralement, en étudiant le système (B.42), tout vecteur W_0 peut être décomposé sur une base

soit

de cinq vecteurs particuliers liés à $\overline{\overline{A}}$. En commençant par rendre le système unitaire

$$\frac{\mp ic|\nabla\phi|}{\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & \mp\boldsymbol{\nu} \cdot & 0\\ \mp\boldsymbol{\nu} & 1 & \mp\alpha\boldsymbol{\nu}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} r_0'\\ \boldsymbol{\xi}_0'\\ s_0' \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot(r_0'\bar{\rho}\overline{\boldsymbol{v}} + \bar{\rho}c\boldsymbol{\xi}_0')\\ (\boldsymbol{\xi}_0' \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{c}(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla)(c\boldsymbol{\xi}_0') + \frac{\nabla\pi_0 - \nabla\bar{p}r_0'}{\bar{\rho}c}\\ \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\sigma_0 + c\boldsymbol{\xi}_0' \cdot \nabla\overline{\boldsymbol{s}} \end{cases} \\ \end{cases} = \begin{cases} \frac{S_r}{\bar{\rho}}\\ \frac{S_{\boldsymbol{\xi}}}{c}\\ S_{\boldsymbol{\sigma}} \end{cases}$$
(B.66)

les vecteurs peuvent être

- le vecteur du noyau \widetilde{W} défini en (B.3.2) qui donne avec le changement précédent $\widetilde{W}'_1 = 1/\sqrt{2}$, $\widetilde{W}'_2 = \pm (1/\sqrt{2})\nu$ et $\widetilde{W}'_3 = 0$,
- un vecteur perpendiculaire aux vecteurs du noyau $W_1^1 = 1/\sqrt{2}$, $W_2^1 = \mp (1/\sqrt{2})\nu$ et $W_3^1 = 0$ représentant les ondes sonores se propageant dans le sens inverse,
- un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs précédents $W_1^2 = 0 = \mathbf{W}^2_2$ et $W_3^2 = 1$ représentant les ondes entropiques,
- un quatrième vecteur $W_1^3 = 0$, $W_2^3 = \zeta$ et $W_3^3 = 0$ avec $\zeta \cdot \nu = 0$ représentant un axe pour les ondes de vorticité,
- et un cinquième vecteur perpendiculaire à tous les autres $W_1^4 = 0$, $W_2^4 = \nu \wedge \zeta$ et $W_3^4 = 0$ représentant un deuxième axe perpendiculaire pour les ondes de vorticité.

Comme

$$\overline{\overline{A}}' W_0' = \left(2r_1' W^1 + r_2' W^2 + r_3' W^3 + r_4' W^4\right)$$
(B.67)

le système (B.42) devient

$$ic|\nabla\phi|(2r'_{1}\boldsymbol{W}^{1}+r'_{2}\boldsymbol{W}^{2}+r'_{3}\boldsymbol{W}^{3}+r'_{4}\boldsymbol{W}^{4})\mp\epsilon(\boldsymbol{B}'(r'_{0}\widetilde{\boldsymbol{W}'})+\boldsymbol{B}'(r'_{1}\boldsymbol{W}^{1}+r'_{2}\boldsymbol{W}^{2}+r'_{3}\boldsymbol{W}^{3}+r'_{4}\boldsymbol{W}^{4}))=0$$
(B.68)

Ainsi,

$$r'_{1} = \frac{\mp i\epsilon}{2c|\nabla\phi|} \boldsymbol{W}^{1} \cdot \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{W}_{0}) \text{ et } \forall k \neq 1, r_{k} = \frac{\mp i\epsilon}{c|\nabla\phi|} \boldsymbol{W}^{k} \cdot \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{W}_{0})$$
(B.69)

$$\boldsymbol{W_0'} = r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'} \mp \frac{\mathrm{i}\epsilon}{c|\nabla\phi|} \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{W^1} \cdot \boldsymbol{B'}(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'})) \boldsymbol{W^1} + (\boldsymbol{W^i} \cdot \boldsymbol{B'}(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'})) \boldsymbol{W^i} \right) + o(\epsilon)$$
(B.70)

soit

$$\boldsymbol{W_{0}^{\prime}} = r_{0}^{\prime} \widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}} \mp \frac{\mathrm{i}\epsilon}{c |\nabla\phi|} \left(\boldsymbol{B}^{\prime}(r_{0}^{\prime} \widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{W^{1}} \cdot \boldsymbol{B}^{\prime}(r_{0}^{\prime} \widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}})) \boldsymbol{W^{1}} - (\widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}} \cdot \boldsymbol{B}^{\prime}(r_{0}^{\prime} \widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}})) \widetilde{\boldsymbol{W}^{\prime}} \right) + o(\epsilon)$$
(B.71)

donc

$$\mathbf{P'} \cdot \mathbf{B'}(r_0'\mathbf{W'}) \mp \dots$$

$$i\epsilon \mathbf{P'} \cdot \mathbf{B'}\left(\frac{1}{c|\nabla\phi|} \left(\mathbf{B'}(r_0'\widetilde{\mathbf{W'}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{W^1} \cdot \mathbf{B'}(r_0'\widetilde{\mathbf{W'}}))\mathbf{W^1} - (\widetilde{\mathbf{W'}} \cdot \mathbf{B'}(r_0'\widetilde{\mathbf{W'}}))\widetilde{\mathbf{W'}}\right)\right) + o(\epsilon) = 0$$

(B.72)

où ${m P}'=(1;\pm {m
u}; \alpha),$ et, avec les résultats précédents,

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_0')^2 \bar{\rho}c}{|\nabla \phi|} (\bar{\boldsymbol{v}} \pm c\boldsymbol{\nu})\right) \mp \dots$$

$$i\epsilon \frac{r_0' \bar{\rho}c}{|\nabla \phi|} \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{B}' \left(\frac{1}{c|\nabla \phi|} \left(\boldsymbol{B}'(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{W}^1 \cdot \boldsymbol{B}'(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'})) \boldsymbol{W}^1 - (\widetilde{\boldsymbol{W}'} \cdot \boldsymbol{B}'(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'})) \widetilde{\boldsymbol{W}'}\right)\right) + o(\epsilon) = 0$$
(B.73)

ou

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_0')^2 \bar{\rho}c}{|\nabla \phi|} (\overline{\boldsymbol{v}} \pm c\boldsymbol{\nu})\right) \pm \dots$$

$$i\epsilon \frac{r_0' \bar{\rho}c}{|\nabla \phi|} \boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{B}' \left(\frac{1}{2c|\nabla \phi|} \left((\boldsymbol{B}'_1(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'}) \pm \boldsymbol{B}'_2(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'}) \cdot \boldsymbol{\nu}) \widetilde{\boldsymbol{W}'} - 2\boldsymbol{B}'_3(r_0' \widetilde{\boldsymbol{W}'}) \boldsymbol{W^3} \right) \right) + o(\epsilon) = 0$$
(B.74)

Ce développement indique deux choses importantes. D'abord, avec l'hypothèse faite ici que les termes supplémentaires ont la même phase que le terme de premier ordre, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échelle de taux de variations supplémentaire, il donne la forme de la "diffusion" transverse au premier ordre. Ensuite, il indique comment les termes de "diffusion" influencent la propagation principale et ainsi permet d'estimer l'erreur commise lorsque l'optique géométrique est seule considérée. Cependant, l'inconvénient de cette formulation réside dans la transformation d'une loi de conservation simple, en une équation différentielle, plus difficile à résoudre. Il est sans doute plus judicieux de séparer les différentes échelles du champ et d'obtenir des équations de conservation avec termes sources comme (B.63). Cette formulation a l'avantage d'être valable pour tous les niveaux du développement et de fournir une stratégie de calcul simple et récurrente.

Pour le calcul du terme de premier ordre dans le développement et, ainsi, de l'erreur commise en ne considérant que le terme d'ordre 0, il est intéressant de comprendre que, d'une part, la seule équation supplémentaire à résoudre est une équation de conservation avec terme source dont l'équivalent sans terme source doit aussi être intégrée et que, d'autre part, une stratégie similaire peut donner l'erreur globale sur les équations pour une somme de champs. Par ailleurs, d'autres développements concernant cette problématique ont été fait pour le calcul des rayons soniques. En utilisant un Ansatz plus général, comme dans [²⁵], ils conduisent en fonction des hypothèses à l'équation KZ, à l'équation de Tricomi, etc.

B.3.4 Si la phase est complexe...

Au cours du (B.3.1), il est apparu nécessaire de prendre une amplitude complexe. Dans ce paragraphe, l'utilisation d'une phase complexe enrichie encore un peu plus l'Ansatz qui peut désormais présenter des variations de module exponentiellement croissantes ou décroissantes. Cela est particulièrement intéressant lorsqu'il faut modéliser des faisceaux dont l'éclairage est très localisé.

L'appartenance de la phase à l'espace complexe ne change pas le début du raisonnement et le système (B.43) est toujours valable. Cependant, comme les matrices sont maintenant à valeurs dans l'espace complexe, l'existence de solutions ne se traduit plus par le même déterminant. En fait, la matrice équivalente à $\overline{\overline{A}}$ doit être interprétée dans \mathcal{R}^{10*10} sous la forme

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}}_R & -\overline{\overline{A}}_I \\ \overline{\overline{A}}_I & \overline{\overline{A}}_R \end{bmatrix} \begin{cases} \Re(W_0^0) \\ \Im(W_0^0) \end{cases}$$
(B.75)

et le déterminant devient

$$\left(\left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R - 1 \right)^2 + \left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I \right)^2 \right)^3 \left(\left[\left(\left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R - 1 \right)^2 - c^2 \nabla \phi_R^2 \right) - \left(\left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I \right)^2 - c^2 \nabla \phi_I^2 \right) \right]^2 \dots + \left[2 \left(c^2 \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_I - \left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R - 1 \right) \left(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I \right) \right) \right]^2 \right)$$

$$(B.76)$$

L'existence de solutions se traduit donc par :

- soit $\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R = 1$ et $\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I = 0$,
- soit $(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R 1)^2 c^2 \nabla \phi_R^2 = (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I)^2 c^2 \nabla \phi_I^2$ et $c^2 \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_I = (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R 1)(\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_I)$ soit $\nabla \phi_I$ orthogonal à $\overline{\boldsymbol{v}} + c^2 \nabla \phi_R / (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi_R - 1)$ qui est le vecteur de propagation du rayon dans le cas de la phase réelle.

Contrairement au cas réel, les deux conditions peuvent être satisfaites en même temps : $|\nabla \phi_I| = |\nabla \phi_R| = 1/(\overline{v} \cdot \nu_R)$ et $\nu_I = \overline{v} \wedge \nu_R/|\overline{v} \wedge \nu_R|$. Par ailleurs, dans le premier cas, comme la condition d'appartenance

au noyau ne change pas, il faut $|\pi_0^0| = 0$ et $\xi_0^0 \cdot \nabla \phi = 0$ et, dans le deuxième, en dehors des zones de recouvrement avec le premier, $\xi_0^0 = c^2 \nabla \phi r_0^0 / (\overline{\rho}(1 - \overline{v} \cdot \nabla \phi))$.

Pour la suite, il est commode d'introduire $\mathbf{X} = c^2 \nabla \phi / (1 - \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \phi)$). Bien qu'il soit en apparence peu différent du classique $\overline{\mathbf{v}} + c\mathbf{v}$, il permet d'être le plus général possible et numériquement évite de distinguer plusieurs cas. Le vecteur vitesse a alors pour expression $\boldsymbol{\xi}_0^0 = (r_0^0/\overline{\rho})\mathbf{X}$ et l'équation iconale $(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{X}) \cdot \nabla \phi = 1$, sans avoir fait d'hypothèse sur la progressivité de l'onde. Comme l'équation de conservation est obtenue de la même façon que pour le cas réel, elle devient

$$c^{2}\nabla \cdot (r_{0}^{0}(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{X})) + \overline{\rho}\boldsymbol{X} \cdot \left(\frac{r_{0}^{0}}{\overline{\rho}}(\boldsymbol{X}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)(\frac{r_{0}^{0}}{\overline{\rho}}\boldsymbol{X}) + \frac{\nabla(c^{2}r_{0}^{0})}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla\overline{p}}{\overline{\rho}^{2}}r_{0}^{0}\right) + \alpha c^{2}\boldsymbol{\xi}_{0}^{0}\cdot\nabla\overline{s} = 0 \quad (B.77)$$

soit, après quelques calculs,

$$\nabla \cdot \left(\frac{(r_0^0)^2 c^2}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi}\right) = 0 \quad \text{ou } \nabla \cdot \left(\frac{(r_0^0)^2 c^2}{\overline{\rho}} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi} + \frac{\nabla \phi}{(\nabla \phi)^2}\right)\right) = 0 \tag{B.78}$$

Il est intéressant de constater que, pour les positions de l'espace auxquelles la partie imaginaire de la phase est strictement positive, le facteur en exponentielle décroissante rend la partie des équations, non prise en compte par l'équation de conservation, encore plus petite que dans le cas avec phase réelle. En effet, il devient rapidement proche de 0 quand ϵ tend vers 0.

Les deux expressions de (B.78) sont équivalentes mais ne mettent pas en valeur les mêmes propriétés de l'équation. Par ailleurs, comme la quantité intégrée est $(r_0^0)^2$ et non pas $|r_0^0|^2$, le signe de la partie réelle de r_0^0 peut être indéfinie. Pour être plus descriptif, il faut écrire :

$$\nabla \cdot \left(\frac{|r_0^0|^2 c^2}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi}\right) + i2 \frac{|r_0^0|^2 c^2}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi} \cdot \nabla \psi = 0$$
(B.79)

avec ψ la phase de r_0^0 .

La difficulté, dans la suite, consiste à ne pas faire d'hypothèses supplémentaires "cachées". La formulation obtenue dans le développement précédent et celle obtenue avec une phase réelle sont à peu près équivalentes. Mais la première distingue des cas différents qui semblent pouvoir être traités de manière unique par la seconde. Il faut donc vérifier que tous les cas sont bien pris en compte.

Dans la suite, en utilisant un formalisme lagrangien à base de rayons, la partie imaginaire de la phase permet de créer des faisceaux ayant des caractéristiques similaires à celles des fonctions d'une base d'éléments finis. De plus, en étudiant les relations de dispersion, il est évident qu'une phase complexe pourrait prendre en compte des formes d'absorption et de dispersion au cours de la propagation.

B.3.5 Et les phénomènes non-linéaires ?

A partir des équations d'Euler non linéaires temporelles avec terme source

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = S_{\rho}, \rho(\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}) + c^2(\nabla \rho + \alpha \nabla s) = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}} \text{ et } \partial_t s + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s = S_s \quad (B.80)$$

l'introduction de l'Ansatz $W = \overline{W}(t, x) + \epsilon W_0(\epsilon, t, x, \phi(t, x)/\epsilon)$ donne pour les termes

- d'ordre 0 (ϵ^0)

$$\partial_t \overline{\rho} + \overline{v} \cdot \nabla \overline{\rho} + \overline{\rho} \nabla \cdot \overline{v} + (\partial_t \phi + \overline{v} \cdot \nabla \phi) \partial_\phi r_0 + \overline{\rho} \nabla \phi \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0 \tag{B.81}$$

$$\partial_t \overline{s} + \overline{v} \cdot \nabla \overline{s} + (\partial_t \phi + \overline{v} \cdot \nabla \phi) \partial_\phi \sigma_0 \tag{B.82}$$

$$\overline{\rho}(\partial_t \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)\partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0) + c^2(\overline{\rho}, \overline{s})(\nabla\overline{\rho} + \nabla\phi\partial_\phi r_0 + \alpha(\overline{\rho}, \overline{s})(\nabla\overline{s} + \nabla\phi\partial_\phi \sigma_0))$$
(B.83)

– d'ordre 1 (ϵ)

$$\partial_t r_0 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla r_0 + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}_0 \cdot (\nabla \overline{\rho} + \nabla \phi \partial_\phi r_0) + r_0 (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla \phi \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0)$$
(B.84)

$$\partial_t \sigma_0 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0 + \boldsymbol{\xi}_0 \cdot (\nabla \overline{\boldsymbol{s}} + \nabla \phi \partial_\phi \sigma_0) \tag{B.85}$$

$$r_{0}(\partial_{t}\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\partial_{t}\phi + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)\partial_{\phi}\boldsymbol{\xi}_{0}) + \overline{\rho}(\partial_{t}\boldsymbol{\xi}_{0} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_{0} + (\boldsymbol{\xi}_{0}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{\xi}_{0}\cdot\nabla\phi)\partial_{\phi}\boldsymbol{\xi}_{0}) + \dots \\ \dots c^{2}(\overline{\rho},\overline{s})(\nabla r_{0} + \alpha(\overline{\rho},\overline{s})\nabla\sigma_{0}) + c^{2}(\overline{\rho},\overline{s})(r_{0}\partial_{\rho}\alpha + \sigma_{0}\partial_{s}\alpha)(\nabla\overline{s} + \nabla\phi\partial_{\phi}\sigma_{0}) + \dots \\ \dots 2c(\overline{\rho},\overline{s})(r_{0}\partial_{\rho}c + \sigma_{0}\partial_{s}c)(\nabla\overline{\rho} + \nabla\phi\partial_{\phi}r_{0} + \alpha(\overline{\rho},\overline{s})(\nabla\overline{s} + \nabla\phi\partial_{\phi}\sigma_{0}))$$
(B.86)

A ce stade, les hypothèses classiquement faites sont

- le champ moyen vérifie les équations d'Euler

- les variations des différentes quantités sont bornées quand $\epsilon\longrightarrow\infty$
- et la perturbation peut se réécrire sous la forme $W_0(\epsilon, t, x, \phi(t, x)/\epsilon) = W_0^0(t, x, \phi(t, x)/\epsilon) + \epsilon W_0^r(t, x, \phi(t, x)/\epsilon)$

Les différents étages du développement pouvant alors être résolus séparément, les systèmes deviennent

- à l'ordre 0 (ϵ^0)

$$L_1(\boldsymbol{W_0^0}) = (\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \partial_\phi r_0^0 + \overline{\rho} \nabla \phi \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0^0 = S_r^0$$
(B.87)

$$L_3(\boldsymbol{W_0^0}) = (\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \partial_\phi \sigma_0^0 = S_\sigma^0$$
(B.88)

$$L_2(\boldsymbol{W_0^0}) = \overline{\rho}(\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0^0 + c^2(\overline{\rho}, \overline{s}) (\nabla \phi \partial_\phi r_0^0 + \alpha(\overline{\rho}, \overline{s}) \nabla \phi \partial_\phi \sigma_0^0) = S_{\boldsymbol{\xi}}^0$$
(B.89)

- à l'ordre 1 (ϵ)

$$L_1(\boldsymbol{W_0^r}) + \partial_t r_0^0 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla r_0^0 + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_0^0 + \boldsymbol{\xi}_0^0 \cdot (\nabla \overline{\rho} + \nabla \phi \partial_\phi r_0^0) + r_0^0 (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla \phi \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0^0) = S_r^r \quad (B.90)$$

$$L_3(\boldsymbol{W_0^r}) + \partial_t \sigma_0^0 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0^0 + \boldsymbol{\xi}_0^0 \cdot (\nabla \overline{\boldsymbol{s}} + \nabla \phi \partial_\phi \sigma_0^0) = S_\sigma^r$$
(B.91)

$$L_{2}(\boldsymbol{W_{0}^{r}}) + r_{0}^{0}(-\frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho}} + (\partial_{t}\phi + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\phi)\partial_{\phi}\boldsymbol{\xi}_{0}^{0}) + \bar{\rho}(\partial_{t}\boldsymbol{\xi}_{0}^{0} + (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_{0}^{0} + (\boldsymbol{\xi}_{0}^{0} \cdot \nabla)\bar{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{\xi}_{0}^{0} \cdot \nabla\phi)\partial_{\phi}\boldsymbol{\xi}_{0}^{0}) + \dots \\ \dots c^{2}(\bar{\rho},\bar{s})(\nabla r_{0}^{0} + \alpha(\bar{\rho},\bar{s})\nabla\sigma_{0}^{0}) + c^{2}(\bar{\rho},\bar{s})(r_{0}^{0}\partial_{\rho}\alpha + \sigma_{0}^{0}\partial_{s}\alpha)(\nabla \bar{s} + \nabla\phi\partial_{\phi}\sigma_{0}^{0}) + \dots \\ \dots 2c(\bar{\rho},\bar{s})(r_{0}^{0}\partial_{\rho}c + \sigma_{0}^{0}\partial_{s}c)(\nabla\bar{\rho} + \nabla\phi\partial_{\phi}r_{0}^{0} + \alpha(\bar{\rho},\bar{s})(\nabla \bar{s} + \nabla\phi\partial_{\phi}\sigma_{0})) = S_{\boldsymbol{\xi}}^{r}$$

$$(B.92)$$

L'ordre 0 donne alors un système utilisant une matrice équivalente au (B.44)

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W_0^0}) = \begin{bmatrix} \partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi & 0 \\ c^2 \nabla \phi & \partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & c^2 \alpha \nabla \phi \\ 0 & 0 & \partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi \end{bmatrix} \begin{cases} \partial_\phi r_0 \\ \partial_\phi \boldsymbol{\xi}_0 \\ \partial_\phi \sigma_0 \end{cases} = \boldsymbol{S^0}$$
(B.93)

et l'équation iconale pour les perturbations acoustiques devient

$$(\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2 = c^2 \nabla \phi^2 \tag{B.94}$$

Ainsi, les conditions qui, dans le cas linéaire, contraigne la solution, agissent ici sur sa dérivée par rapport la phase.

A priori, si la dépendance vis-à-vis de la phase du terme source ou des conditions aux limites est la même que dans le cas linéaire, la solution devrait avoir la même forme. Cependant, en utilisant cette forme, à l'ordre 1, le système devient

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W_0^r}) + \partial_t \boldsymbol{W_0^0} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{W_0^0}) + 2(r_0^0)^2 c |\nabla\phi| \exp\left(\mathrm{i}\frac{\phi}{\epsilon}\right) \left\{ \begin{array}{c} (\frac{\pm 1}{\overline{\rho}} \\ (\partial_{\rho}c)\boldsymbol{\nu} \\ 0 \end{array} \right\} = \boldsymbol{S_0^r}$$
(B.95)

Ainsi, dans l'équation équivalente à (B.47), le terme non linéaire semble induire une échelle de variation supplémentaire. Deux stratégies sont donc possibles, soit, en introduisant l'Ansatz linéaire, le reste des équations est analysé et des conditions de validité sont déduites, soit un nouvel Ansatz comportant une échelle de variation supplémentaire est introduit et de nouvelles équations sont déduites. Une telle approche, esquissée dans [⁶⁰] fait l'objet actuellement de travaux. La suite de cette étude se contente d'utiliser les équations linéarisées et de vérifier les conditions citées au (B.1.3) mais, pour prendre en compte les effets non linéaires augmentant avec le champ aux points d'accumulation tels que les caustiques, cette piste pourrait fournir des résultats intéressants.

* * *

Au cours des développements précédents, non seulement les résultats communément utilisés ont été retrouvés et justifiés, mais, en plus, des pistes permettant d'améliorer la méthode ont été étudiées. Ainsi, l'équation iconale et l'équation de conservation ont été étendues à une phase complexe et les termes suivants dans le développement ont été évalués de manière simple. En ce qui concerne l'enrichissement de l'Ansatz, un aperçu des possibilités est donné mais la résolution complète nécessite plus de travail.

L'obtention pour le cas non linéaire d'une analyse proche de celle du cas linéaire permet d'espérer obtenir une estimation de l'erreur et une méthode de calcul du même type. Cependant, celles-ci doivent soit s'appuyer sur l'introduction de phases supplémentaires et donc sur des analyses plus compliquées, soit utiliser une forme de moyenne pour prendre en compte simplement les variations plus rapides. Une telle étude permettrait la prise en compte de tous les phénomènes sources d'erreur pour la méthode des développements asymptotiques.

Concrètement, pour les applications numériques, le code de calcul développé se base sur l'approche fréquentielle des équations d'Euler linéarisées. De plus, la phase intégrée est complexe ce qui permet de prendre en compte une forme de dispersion au cours de la propagation comme cela est indiqué dans la suite du mémoire. Ce sont donc les formes complexes de l'équation iconale et de l'équation de conservation données au (B.3.4) notamment par l'équation de gauche de (B.78) qui sont résolues. Par ailleurs, l'intégration de l'équation (B.65) permettant d'estimer l'erreur est envisageable sans développements importants.

* * * * *

L'objectif de cette partie était de trouver des équations permettant de s'affranchir des problèmes liés à l'augmentation de la fréquence. La méthode utilisée n'est certes pas exacte mais elle permet d'obtenir une solution approchée indépendante de la fréquence au premier ordre. Grâce à la présentation générale, des analyses nouvelles sur l'application des développements asymptotiques à l'aéroacoustique ont pu être menées. En particulier, le calcul de l'erreur est simplifié.

Aussi bien l'étude du paramètre décrivant la dynamique que les calculs effectués sur les équations ont fourni des critères supplémentaires pour comprendre et maîtriser l'erreur. La mise en relation des deux aspects donne pour toutes les configurations, d'une part, l'erreur commise par l'approximation "hautes

fréquences" et, d'autre part, des moyens de la diminuer. En effet, le choix de la longueur de référence permet avec la fréquence de calcul de donner une valeur au paramètre ϵ qui légitime *a priori* l'utilisation du développement. Sa validité dépend alors en partie des effets visqueux, en partie des effets non linéaires et en partie des termes négligés dans le développement asymptotique. Dans la suite, une erreur numérique et une erreur due à la diffraction par la surface s'ajoutent à cette erreur analytique pour permettre une estimation globale.

Annexe C Description à l'aide de rayons

L'approche choisie pour traiter les hautes fréquences a conduit à séparer les problèmes en deux équations. Le calcul des champs doit donc, d'une part, estimer la phase et, d'autre part, estimer l'amplitude. L'approximation faite en négligeant certains termes des équations demande de résoudre une équation algébrique dont l'inconnue est le gradient de la phase et une équation de conservation pour l'amplitude. La dépendance de la deuxième vis-à-vis du gradient de la phase implique de les traiter successivement.

L'équation iconale ne donne pas beaucoup d'informations sur son inconnue, le gradient de la phase. Pour construire, à partir de conditions initiales, une fonction vérifiant cette équation, deux analyses sont possibles. La première est empirique et se base sur des concepts physiques de propagation. La deuxième est plus mathématique et aborde le problème de manière générique. Mais les deux utilisent des trajectoires comme supports des calculs. Il est important de comprendre les différents points de vue pour, ensuite, résoudre l'équation de conservation de façon efficace.

Les méthodes de résolution grâce à la construction de trajectoires ont toujours posé des problèmes de formalisme. Certes, elles permettent d'évaluer des quantités en certaines positions de l'espace, mais les estimations non directement données par l'intégration des trajectoires ne sont pas évidentes. Pour améliorer les solutions, il est nécessaire, dans un premier temps, de rappeler comment les trajectoires sont construites. Ensuite, un traitement adapté de l'équation de conservation aborde le transport de l'amplitude d'une manière nouvelle. Enfin, l'évocation des nouvelles méthodes d'utilisation de cette approche en font un outil de discrétisation au même titre que les éléments finis.

C.1 Les rayons

La description de l'éclairement à l'aide de rayons lumineux est depuis bien longtemps communément utilisée. L'analogie qui peut être faite entre les phénomènes acoustiques et lumineux a conduit à considérer des rayons sonores. Physiquement, sont appelées rayons les trajectoires suivant lesquelles l'énergie est principalement propagée.

Depuis les travaux de Keller [⁴⁴] puis les travaux de Ugincius [⁷⁷], un lien explicite existe entre les rayons et l'équation iconale. Ainsi, les premiers peuvent être utilisés pour résoudre la deuxième. L'intérêt d'une telle méthode réside non seulement dans la prise en compte des solutions multivaluées de l'équation, mais aussi dans la description du chemin qu'empruntent les ondes sonores.

La partie suivante décrit la construction de trajectoires particulières permettant la résolution de l'équation iconale. Parmi celles-ci, elle met en avant celles qui, parce qu'elles correspondent aux rayons physiques, sont utiles à la résolution de l'équation de conservation. Dans un premier temps, le lien entre l'équation iconale et les rayons est décrit et une description hamiltonienne plus générale est introduite. Ensuite, le principe de construction des trajectoires à partir du hamiltonien est explicité. Enfin, la méthode développée est utilisée pour résoudre l'équation iconale.

C.1.1 Équation iconale, rayons et hamiltonien

La propagation acoustique dans un milieu non homogène et convecté a sans doute été traitée pour la première fois de façon générale par D. I. Blokhintzev dans [⁹]. Des travaux antérieurs avaient déjà décrit la propagation du son à l'aide de rayons mais ses travaux ont permis de formaliser une approche générale. Son développement a mis en avant un transport de l'énergie suivant des trajectoires particulières. Si les rayons sonores sont définis par analogie avec les rayons lumineux, l'**invariant de Blokhintzev** correspond au flux d'énergie à travers une section de tube de rayons et il est conservé au cours de la propagation. Le vecteur tangent aux trajectoires est en chaque point de l'espace $\overline{v} + c\nu$ avec ν le vecteur d'onde unitaire.

Dans [⁵⁸], les équations définissant les trajectoires sont entièrement déduites de considérations liées aux **fronts d'ondes**. Un front d'onde est constitué de l'ensemble des points ayant parcouru une même distance depuis la source. Chacun de ces points doit, pour rester sur le même front d'onde, se déplacer suivant $\overline{v} + c\nu$. Cette première condition donne l'équation de la trajectoire mais ν reste à calculer. Les relations entre le vecteur d'onde unitaire et le vecteur vitesse de propagation de l'onde permettent de déduire une deuxième équation décrivant l'évolution du vecteur vitesse de propagation de l'onde le long des trajectoires. Le système de ces deux équations permet de décrire complètement les trajectoires avec la donnée du champ moyen uniquement.

L'équation iconale peut être déduite des rayons. En considérant un déplacement infinitésimal de l'onde, une relation entre le vecteur vitesse de propagation de l'onde, la vitesse du champ moyen, la célérité du son et le vecteur normal au front d'onde peut être établie. Cette relation qui peut être interprétée grâce à la définition du front d'onde donnée au (A.3.2) correspond à l'équation sur la phase obtenue à l'aide des approximations hautes fréquences.

L'utilisation de rayons, de transport d'énergie et d'évolution de front d'onde conduit à faire des parallèles avec d'autres problèmes physiques. Globalement, ces notions sont souvent accompagnées de la définition d'un hamiltonien et/ou d'un lagrangien. Dans le premier cas, le **hamiltonien** est une fonction conservée le long des trajectoires. Dans le second cas, les trajectoires minimisent l'intégration du lagrangien. Pour l'acoustique, le hamiltonien est obtenu à partir de l'équation iconale.

Les hamiltoniens sont des fonctions dépendant de la position (spatiale et temporelle) et de la dérivée (spatiale et temporelle) d'une fonction de phase. A partir de la constance du hamiltonien dans tout l'espace, les **problèmes aux limites de Hamilton-Jacobi** construisent la phase et son gradient. Mathématiquement, ceux-ci sont mal posés. En effet, à partir de conditions aux limites entièrement définies, les solutions présentent souvent des singularités et des zones dans lesquelles elles ne sont pas définies de manière unique. Pour définir correctement les solutions, il faut introduire le concept de solution de viscosité.

La forme singulière des solutions de Hamilton-Jacobi rend la résolution numérique difficile. Les solveurs classiques traitant les problèmes dans le volume avec une approche eulérienne ont du mal à distinguer les **solutions de viscosité**. Même si de nouvelles approches telles que celles évoquées dans [⁶] existent, la principale alternative demeure l'utilisation d'une approche lagrangienne du même type que celle développée dans la suite.

C.1.2 Trajectoires et fonction constante

Les méthodes de résolution d'équations utilisant une **approche lagrangienne** sont relativement répandues. En mécanique des fluides, comme pour d'autres types de problèmes physiques, l'utilisation de lignes et de tubes de courant permet parfois de simplifier les problèmes et souvent d'inspirer des analyses originales. Pour les équations de transport, la description des solutions à l'aide de trajectoires caractéristiques permet de donner une première idée de la dynamique.

La traduction de l'approche lagrangienne pour les problèmes de Hamilton-Jacobi engendre un formalisme particulièrement lourd car il nécessite l'introduction de variables non conventionnelles. Dans cette partie, l'idée est de présenter de façon très simple l'aspect essentiel dans le but de l'appliquer à l'équation iconale.

Méthode

A partir d'une équation de la forme $H(x, \nabla \phi, \phi) = 0$, l'idée à la base de la méthode est de construire des courbes paramétrées par un réel. En partant de valeurs initiales $(x_0, (\nabla \phi)_0, \phi_0)$ vérifiant l'équation, les équations d'évolution suivant ce réel doivent maintenir l'égalité. Ainsi, si *s* est le paramètre réel paramètrant les trajectoires, pour vérifier

$$d_s H = d_s \boldsymbol{x} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} H + d_s \nabla \phi \cdot \partial_{\nabla \phi} H + d_s \phi \partial_{\phi} H = 0 \tag{C.1}$$

les équations suivantes peuvent être utilisées :

$$\begin{cases} d_s \boldsymbol{x} = \partial_{\nabla \phi} H \\ d_s \nabla \phi = -(\partial_{\boldsymbol{x}} H + (\partial_{\phi} H) \nabla \phi) \\ d_s \phi = \nabla \phi \cdot \partial_{\nabla \phi} H \end{cases}$$
(C.2)

Cette approche se décline de façon très simple pour des équations de différentes formes et, en particulier, pour des équations de la forme $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0$ et de la forme $H((\boldsymbol{x}, t), (\nabla \phi, \partial_t \phi), \phi) = 0$. Dans ces cas, les équations de trajectoires sont respectivement :

$$\begin{cases} d_{s}\boldsymbol{x} = \partial_{\boldsymbol{p}}H \\ d_{s}\boldsymbol{p} = -\partial_{\boldsymbol{x}}H \end{cases} \text{ et } \begin{cases} d_{s}\overline{\boldsymbol{x}} = \partial_{\overline{\nabla}\phi}H \\ d_{s}\overline{\nabla}\phi = -(\partial_{\overline{\boldsymbol{x}}}H + (\partial_{\phi}H)\overline{\nabla}\phi) \\ d_{s}\phi = \overline{\nabla}\phi \cdot \partial_{\overline{\nabla}\phi}H \end{cases}$$
(C.3)

avec \overline{x} le couple de variables spatio-temporel et $\overline{\nabla}$ la dérivée par rapport à celui-ci.

Pour le deuxième système, si la forme de H est ajustée, la dérivée totale du temps par rapport au paramètre peut être rendue unitaire et, ainsi, t peut alors être substitué à s dans les autres dérivations totales. Cette méthode construit des trajectoires et donc potentiellement des rayons. Cependant, en fonction de la forme de H, les différentes trajectoires obtenues ne sont pas toutes des rayons physiques.

Trajectoires de moindre coût

Par analogie avec la mécanique classique, les trajectoires définies précédemment peuvent être interprétées comme celles minimisant $\int_A^B Lds$ avec $L = d_s \boldsymbol{x} \cdot \nabla \phi - H$. En acoustique, ce principe variationnel a été énoncé, dès Keller [⁴⁴] et Ugincius [⁷⁷], comme le principe de Fermat généralisé aux milieux avec vitesse et célérité non uniformes. En effet, le **principe de Fermat**, illustré sur la figure (C.1) indique que les rayons lumineux sont les trajectoires le long desquelles le temps de trajet est le plus petit. Dans le cas instationnaire, comme les rayons sont paramétrés par le temps, la trajectoire vérifie $d_t \partial_{d_t \boldsymbol{x}} L = \partial_{\boldsymbol{x}} L$ où $\partial_{d_t \boldsymbol{x}} L$ désigne la dérivation partielle de L par rapport à $d_t \boldsymbol{x}$. Dans le cas stationnaire, comme il n'y a pas de paramètre particulier, il faut choisir une quantité de référence. Pour obtenir une analogie avec le cas instationnaire minimisant la différence entre les valeurs prises par cette quantité aux extrémités de la trajectoire, il faut alors généralement effectuer un changement de variables sur le paramètre de propagation. Dans la suite, l'étude de l'équation de conservation permet de comprendre le lien entre le principe de Fermat et le calcul de la contribution majeure de l'énergie transportée entre deux points.

Dans [58], Pierce donne comme expression explicite du lagrangien pour la propagation acoustique

$$L(\boldsymbol{x}, \partial_q \boldsymbol{x}) = \frac{(\partial_q \boldsymbol{x})^2}{\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_q \boldsymbol{x} + [(c(\boldsymbol{x})^2 - \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})^2)\partial_q \boldsymbol{x}^2 + (\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_q \boldsymbol{x})^2]^{1/2}}$$
(C.4)

avec q le projeté sur le segment séparant les deux extrémités de la progression le long de la trajectoire. Cependant, cette expression ne semble pas prendre en compte l'ensemble des trajectoires. Par ailleurs, dans [³³], un développement plus complet est effectué ainsi qu'une discussion sur le rôle joué par le temps. De plus, dans [²⁷], les liens entre hamiltonien, lagrangien et trajectoires caractéristiques sont précisément explicités.



FIG. C.1: Illustration du principe de Fermat et du calcul du Lagrangien : en bleu, le rayon réalisant la trajectoire minimale ; en rouge, des rayons ayant d'autres conditions aux limites pour les gradients et en noir, le segment sur lequel est pris q

C.1.3 Résolution de l'équation iconale

Dans la suite, en appliquant la méthodologie développée au (C.1.2) à l'équation iconale, des équations permettant d'intégrer des trajectoires peuvent être obtenues. Ces trajectoires sont à rapprocher des rayons physiques évoqués au (C.1.1). L'intégration effective permet de calculer la phase en chaque point "éclairé" de l'espace. D'autres équations intéressantes sont aussi évoquées car elles permettent éventuellement de simplifier la résolution. Les formes de Hamiltonien choisies sont dérivées de l'équation iconale pour retrouver les rayons classiques. Elles sont des intermédiaires permettant de passer de la description eulèrienne à la description lagrangienne. D'autres formes permettant d'obtenir les mêmes rayons ou d'autres pourraient être utilisées.

De l'équation aux rayons

En prenant, comme cela a été fait au (B.3.4) pour aboutir à l'équation (B.78), l'équation iconale sous la forme $(\overline{v} + X) \cdot \nabla \phi = 1$, la fonction H peut être définie par

$$H(\boldsymbol{x}, \nabla \phi) = \frac{1}{2} (\overline{\boldsymbol{v}} + \frac{c^2 \nabla \phi}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi}) \cdot \nabla \phi - 1$$
(C.5)

et les dérivées d'ordre un par rapport à \boldsymbol{x} et $\nabla \phi$ sont

$$\partial_i H(\boldsymbol{x}, \nabla \phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c^2 \nabla \phi^2}{(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2} \right) \partial_i \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi + \frac{c \partial_i c \nabla \phi^2}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi}$$
(C.6)

$$\partial^{j}H(\boldsymbol{x},\nabla\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^{2}\nabla\phi^{2}}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^{2}}\right)\overline{\boldsymbol{v}}_{j} + \frac{c^{2}\partial_{j}\phi}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi}$$
(C.7)

Ainsi, les développements effectués au (C.1.2) donnent comme équations de trajectoires

$$\partial_s \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \nabla \phi), \\ \partial_s \nabla \phi = -\nabla \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \nabla \phi - (1 - \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi) \frac{\nabla c(\boldsymbol{x})}{c(\boldsymbol{x})} \text{ et } \partial_s \phi = 1$$
(C.8)

H correspond alors aux variations de la phase le long des trajectoires. Celle-ci augmente donc linéairement de façon unitaire le long des trajectoires transportant l'énergie.

Dans le cas instationnaire, pour pouvoir paramétrer en fonction du temps, il faut prendre

$$H = \frac{1}{2} (\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi - \frac{c(t, \boldsymbol{x})^2 |\nabla \phi|^2}{\partial_t \phi + \overline{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi})$$
(C.9)

Ce hamiltonien correspond à l'opposé de celui du cas harmonique avec comme vecteur vitesse dans l'espace-temps $(1, \overline{v})$. Les adimensionnements induisent en effet une dérivée temporelle de -1 dans le cas harmonique. Les équations paramétrées par le temps sont :

$$\begin{cases} d_{t}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x}) - \frac{c(t,\boldsymbol{x})^{2}}{\partial_{t}\phi + \overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla\phi}\nabla\phi \\ d_{t}\nabla\phi = -\nabla\overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x})\nabla\phi + \frac{c(t,\boldsymbol{x})|\nabla\phi|^{2}}{\partial_{t}\phi + \overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla\phi}\nabla c(t,\boldsymbol{x}) \\ d_{t}\partial_{t}\phi = -\partial_{t}\overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x})\nabla\phi + \frac{c(t,\boldsymbol{x})|\nabla\phi|^{2}}{\partial_{t}\phi + \overline{\boldsymbol{v}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla\phi}\partial_{t}c(t,\boldsymbol{x}) \\ d_{t}\phi = \partial_{t}\phi \end{cases}$$
(C.10)

La dernière équation a une forme spéciale. Elle veut simplement dire que le long du rayon paramétré par le temps, pour intégrer la phase, seule la dérivée temporelle est nécessaire. La variation de position n'induit pas de contribution supplémentaire.

Les trajectoires définies par (C.8) et (C.10) correspondent effectivement à des rayons physiques puisque la propagation se fait suivant $\overline{v} + X$. Ces trajectoires de moindre coût minimisent donc non seulement la phase, mais aussi la perte d'énergie d'un point à un autre. La présence de \overline{v} indique qu'il y a une convection de l'énergie acoustique. X signifie d'une part que la propagation se fait naturellement suivant le vecteur d'onde et d'autre part que la composante suivant ce dernier s'adapte au milieu ambiant. Des travaux prolongeant ce raisonnement comme dans [²⁹] font un parallèle avec la courbure de l'espace-temps de la mécanique relativiste. Concrètement, le code développé résoud les équations fréquentielles donc il ne s'intéresse qu'aux équations (C.8).

Équations supplémentaires

D'autres équations découlant de celles du paragraphe précédent s'avèrent parfois aussi intéressantes. Les simplifications qu'elles engendrent permettent de diminuer les degrés de liberté des méthodes et ainsi d'empêcher les dérives au cours de l'intégration numérique.

A partir des équations de rayons (C.8), en réutilisant l'équation iconale, il peut être intéressant de dégager une équation uniquement sur le vecteur unitaire de propagation :

$$\partial_s \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nu}) \tag{C.11}$$

avec $A(\nu) = \nu \cdot \nabla \overline{v} + \nabla c = \{\nu \partial_i \overline{v} + \partial_i c\} = \nu \wedge \nabla \wedge \overline{v} + (\nu \cdot \nabla) \overline{v} + \nabla c$. Cette équation permet d'estimer l'éffet du champ moyen sur l'évolution du vecteur d'onde.

L'avantage lié à la propagation de ν réside dans son caractère unitaire. Dans le cas de la propagation de $\nabla \phi$, la coexistence de l'estimation numérique classique du module $\sqrt{\nabla \phi \cdot \nabla \phi^*}$ et de l'estimation analytique donnée par l'équation iconale se révèle être une source d'erreurs. Au cours de la propagation, l'intégration numérique induit nécessairement une différence entre ces deux estimations. Dans ce cas, une étude minutieuse doit accompagner le choix de l'une ou l'autre ou l'utilisation de la comparaison des deux pour améliorer l'intégration numérique .

En manipulant les équations à partir de (C.8), l'équation d'intégration de la trajectoire devient :

$$d_s^2 \boldsymbol{x} = c^2 d_s \nabla \phi + 2c (d_s \boldsymbol{x} \cdot \nabla c) \nabla \phi + (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) d_s \boldsymbol{x} \nabla \overline{\boldsymbol{v}} - (d_s \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla \phi \cdot (d_s \boldsymbol{x} \nabla \overline{\boldsymbol{v}})) \overline{\boldsymbol{v}} \quad (C.12)$$

avec

$$\nabla \phi = \frac{1}{c^2} \left(d_s \boldsymbol{x} - \frac{c^2 - d_s \boldsymbol{x} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}}{c^2 - \overline{\boldsymbol{v}}^2} \overline{\boldsymbol{v}} \right)$$
(C.13)

Dans cette équation, le gradient de phase peut donc être éliminé et le problème se traduit, en fonction de la coordonnée curviligne, par une équation du second degré pour le vecteur position.

L'élimination d'une des variables et la modification du problème à intégrer peut, en fonction des cas, servir l'algorithme de résolution. Même si l'utilisation des équations ainsi obtenues est limitée car elles sont souvent plus difficiles à résoudre, elles permettent d'avoir une vision plus précise de la dynamique propre à la variable restante.

Dans cette partie, trois trajectoires alternatives aux trajectoires évoquées au (C.1.3) sont construites. Les caractères les différenciant permettent de comprendre les propriétés essentielles des rayons.

Dans le cas subsonique, en utilisant l'équation iconale sous la forme

$$\frac{1}{2}(c(\boldsymbol{x})^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi - (1 - \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}))^2) = 0$$
(C.14)

des trajectoires peuvent être construites suivant :

$$\begin{cases} d_s \boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x})^2 \nabla \phi + (1 - \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})) \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \\ d_s \nabla \phi = -((1 - \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})) \nabla \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi + c(\boldsymbol{x}) (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) \nabla c(\boldsymbol{x})) \\ d_s \phi = 1 - \nabla \phi \cdot \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$
(C.15)

L'équation d'intégration de la trajectoire peut se ré-écrire

$$d_s \boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x}) |\nabla \phi| (c(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nu} + \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}))$$
(C.16)

Par ailleurs, la résolution de l'équation (C.14) donne deux solutions $\overline{v} \cdot \nabla \phi \pm c |\nabla \phi| = 1$. Mais, dans le cas subsonique, seule $(\overline{v} \cdot \nu + c) |\nabla \phi| = 1$ est possible. En utilisant donc

$$H(\boldsymbol{x}, \nabla \phi) = \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi + c(\boldsymbol{x}) |\nabla \phi| = 1$$
(C.17)

les équations des trajectoires deviennent :

$$\begin{cases} d_S \boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nu} + \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \\ d_S \nabla \phi = -(\nabla \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})\nabla \phi + |\nabla \phi|\nabla c) \\ d_S \phi = 1 \end{cases}$$
(C.18)

où le paramétrage a été fait suivant S et non s pour faire apparaître clairement les différences dans le paragraphe suivant.

Dans les deux cas, les trajectoires sont bien des rayons physiques puisque la propagation se fait suivant le vecteur de transport de l'énergie. La différence entre les deux expressions réside dans la vitesse de parcours des trajectoires. En effet, cela équivaut, dans le cas subsonique, à changer de variable d'intégration $\partial_s S = c |\nabla \phi|$ sans changer la nature de la variable, la vitesse de propagation n'étant simplement pas la même. Avec (C.18), la phase croît linéairement le long des rayons ce qui n'est pas le cas avec (C.15). Cela rend *a priori* ces derniers moins intéressants. Dans les deux cas, la vitesse de parcours du rayon peut être calculée par $|d_s x|$.

L'équation (C.17) peut être aussi simplifiée sous la forme :

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Phi} \cdot \overline{\boldsymbol{M}} + |\boldsymbol{\Phi}| - 1 \tag{C.19}$$

avec $\overline{M} = \overline{v}/c$ et $\Phi = c\nabla\phi$. Dans ce cas, la méthode de résolution donne :

$$\begin{cases} \partial_l \Phi = -\nabla \overline{M}(x) \Phi\\ \partial_l x = \overline{M}(x) + \Phi/|\Phi| \end{cases}$$
(C.20)

La comparaison avec les rayons précédents montre que la première trajectoire est intégrée en fonction d'une variable temporelle et la deuxième en fonction d'une variable de longueur. Les deux variables sont reliées par $\partial_s l = c(x)$ mais la plus grande différence réside dans l'allure de la trajectoire. En effet, après changement de variable et développement, l'équation d'évolution du gradient de la phase dans le deuxième système s'écrit

$$\partial_s \nabla \phi = -\nabla \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \nabla \phi + (\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \phi) \nabla c(\boldsymbol{x}) - [(\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nu}) \cdot \nabla c(\boldsymbol{x})] \nabla \phi$$
(C.21)

La dépendance par rapport au gradient de la célérité n'est donc pas la même. Les trajectoires de deuxième type sont bien sûr beaucoup moins intéressantes puisqu'elles ne correspondent pas aux rayons physiques et ne permettent pas les simplifications de calcul liées à la résolution de l'équation de transport.

* * *

Grâce aux rayons, l'équation iconale est résolue dans le volume. La partie précédente a certes abouti à l'obtention de trajectoires déjà connues, mais l'analyse rapprochant les considérations physiques des considérations mathématiques a permis de comprendre comment parmi l'ensemble des trajectoires, les rayons sont particulièrement intéressants. De plus, le formalisme utilisé sert de base aux développements suivants et clarifie les notions intuitives.

Les trajectoires ayant été obtenues indépendamment de la façon dont l'équation iconale a été établie, la méthode suggère des approches différentes pour d'autres domaines de l'acoustique. Ainsi, d'une part, ce traitement de l'équation iconale peut être appliqué en dehors de toute considération liée aux développements asymptotiques. Mais, d'autre part, à partir de descriptions utilisant des rayons, une équation iconale peut être reconstruite pour bénéficier des aspects théoriques. En dehors des problèmes particuliers, la propagation du bang sonique est une des applications possibles.

C.2 Transports le long des rayons

La forme de l'équation de conservation suggère deux méthodes de résolution. La première adopte un point de vue entièrement local et transporte l'énergie le long des rayons. La deuxième s'appuie plutôt sur le caractère conservatif et s'intéresse aux flux traversant les parois d'un tube de rayons. La description du front d'onde permet de faire le lien entre les deux approches.

Keller [⁴⁴], puis Ugincius [⁷⁷], ont utilisé tout de suite une théorie simple basée sur une approche locale pour calculer l'amplitude. D'autres auteurs ont plutôt utilisé numériquement des méthodes considérant des surfaces élémentaires de tubes de rayons. Les deux approches conduisent à intégrer des équations supplémentaires le long des rayons. Mais cette intégration doit être faite avec précaution. En effet, toutes les méthodes font apparaître sous diverses formes des singularités. Ce sont, en fait, les solutions de l'équation de conservation qui peuvent être singulières. Afin de pallier ce défaut, les méthodes modernes cherchent des solutions dans un espace de fonctions plus grand.

Dans la suite, la première partie énonce les bases de la résolution locale. Le lien entre celle-ci et les différentes approches conservatives est établi dans la seconde partie. La troisième partie donne les équations utilisables pour intégrer les quantités nécessaires le long des rayons. Enfin, des singularités sont identifiées et traitées dans la quatrième partie.

C.2.1 L'approche locale classique

En utilisant la dérivation le long d'un rayon, l'équation de conservation sans terme source (B.55) peut se mettre sous la forme générique

$$d_s F + (\nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}))F = 0 \tag{C.22}$$

où X est un vecteur connu grâce à l'intégration du rayon et s le paramètre d'intégration le long de ce rayon. Elle peut alors s'intégrer en

$$F(s) = F(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}) dt\right)$$
(C.23)

Ainsi, le problème est résolu dès l'instant que $\nabla \cdot X$ est accessible.

Dans le cas stationnaire, les pressions à l'ordre 0 et au premier ordre s'obtiennent donc avec

$$\pi_{0}^{0}(s) = \pi_{0}^{0}(s_{0})\sqrt{\frac{\overline{\rho}(s)c^{3}(s)|\nabla\phi(s)|}{\overline{\rho}(s_{0})c^{3}(s_{0})|\nabla\phi(s_{0})|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{s_{0}}^{s}\nabla\cdot(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{X})dt\right) \left[\operatorname{et}\left[r_{0}^{1}(s)=r_{0}^{0}(s)\sqrt{\int_{s_{0}}^{s}S(t)dt}\right]\right]$$
(C.24)

avec S le terme source dépendant de l'ordre 0 et donné au (B.65). Pour ces solutions, les racines positives ont été choisies par cohérence physique. Le calcul du deuxième champ s'effectue en utilisant la méthode classique de variation de la constante.

A priori, le calcul de la divergence nécessite de connaître les variations de X dans le plan transverse au gradient de phase. Intuitivement, puisque s définit une coordonnée du rayon, deux autres paramètres peuvent être choisis indépendamment de s pour compléter le paramétrage dans l'espace. Selon Ugincius [⁷⁷], pour connaître $\nabla \cdot d_s x$, il suffit de connaître le déterminant du changement de variables $(x, y, z) \longrightarrow$ (s, θ, ψ) où θ et ψ sont les deux paramètres supplémentaires. Il suffit alors de calculer l'évolution, le long du rayon, des dérivés du vecteur position par rapport à ces paramètres pour pouvoir, en chaque point du rayon, estimer la divergence. En effet, celle-ci est donnée, en introduisant les nouvelles coordonnées, par

$$\nabla \cdot d_s \boldsymbol{x} = d_s^2 \boldsymbol{x} \cdot d_{\boldsymbol{x}} s + d_{s,\theta} \boldsymbol{x} \cdot d_{\boldsymbol{x}} \theta + d_{s,\psi} \boldsymbol{x} \cdot d_{\boldsymbol{x}} \psi$$
(C.25)

Comme la matrice de changement de variables s'écrit

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} \nabla s^t \\ \nabla \theta^t \\ \nabla \psi^t \end{bmatrix} \text{ et, dans l'autre sens, } \overline{\overline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial_s \boldsymbol{x} & \partial_{\theta} \boldsymbol{x} & \partial_{\psi} \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$
(C.26)

avec

$$\nabla s = \frac{1}{D} \partial_{\theta} \boldsymbol{x} \wedge \partial_{\psi} \boldsymbol{x}, \nabla \theta = \frac{1}{D} \partial_{\psi} \boldsymbol{x} \wedge \partial_{s} \boldsymbol{x} \text{ et } \nabla \psi = \frac{1}{D} \partial_{s} \boldsymbol{x} \wedge \partial_{\theta} \boldsymbol{x} \text{ où } D = \partial_{s} \boldsymbol{x} \cdot (\partial_{\theta} \boldsymbol{x} \wedge \partial_{\psi} \boldsymbol{x}), \quad (C.27)$$

la divergence du vecteur déplacement peut s'écrire $\nabla \cdot d_s x = d_s D/D$ et, après intégration, l'amplitude peut être calculée par

$$\pi_0^0(s) = \pi_0^0(s_0) \sqrt{\frac{\overline{\rho}(s)c(s)^3 |\nabla\phi(s)| D(s_0)}{\overline{\rho}(s_0)c(s_0)^3 |\nabla\phi(s_0)| D(s)}}$$
(C.28)

Cependant, il faut utiliser cette expression avec précautions car, en passant de π_0^2 à π_0 , le signe de π_0 a été implicitement choisi ce qui, dans le cas complexe, n'est pas sans conséquence. Les expressions (C.24) et (C.28) permettent, si le jacobien a été transporté le long du rayon, de calculer l'amplitude à la fin de la propagation.

C.2.2 Front d'onde et dérivées d'ordre 2

Parallèlement à l'approche du (C.2.1) entièrement locale, plusieurs autres méthodes plus "géométriques" ont été développées. Elles utilisent toutes, plus ou moins, le front d'onde comme support transportant les quantités. La méthode développée par Candel [¹⁸] synthétise cette approche.

L'idée essentielle est de considérer l'équation de transport comme l'expression de l'**invariance de** l'action F contenue dans un volume élémentaire transporté par l'onde (FdV = constante). Ainsi, la variation de l'amplitude le long du tube de rayon est inversement proportionnelle à la variation de section δa d'un tube élémentaire entourant le rayon ($Fc_g\delta a = constante$ avec c_g la vitesse de groupe de l'onde). Dans l'approche développée par Candel [¹⁸], cette surface élémentaire est obtenue par l'intermédiaire de la surface élémentaire du front d'onde $\delta a = \delta \Sigma \cos(\nu, r)$ où r est le vecteur unitaire dans la direction du rayon.

Pour calculer $\delta\Sigma$, le front d'onde est considéré comme une surface définie par $\phi(\mathbf{x}, t) = constante$ et le transport le long du rayon comme une transformation agissant sur cette surface. Ainsi, soit \mathbf{x}_0 un point sur la surface de départ, si cette surface est paramétrée par α et β , la surface élémentaire peut être calculée par $|\delta\Sigma| = |\partial_{\alpha}\mathbf{x}_0 \wedge \partial_{\beta}\mathbf{x}_0|$ et le volume élémentaire par $\delta\Sigma \cdot \mathbf{c}_g$. Le calcul de l'amplitude peut être soit relié à la propagation des quantités géodésiques locales, soit à l'estimation du **jacobien de la transformation** liant alors le paramétrage sur la surface de départ au paramétrage sur la surface d'arrivée.

Dans l'approche précédente comme dans celle de (C.2.1), les calculs ont fait apparaître l'utilisation de paramètres supplémentaires alors que l'équation de conservation est intrinsèque, c'est-à-dire utilisant

l'opérateur ∇ indépendamment des paramètres utilisés. Pour obtenir un calcul lui-aussi intrinsèque de l'amplitude dans lequel interviendrait uniquement ϕ , $\nabla \phi$ et $\nabla \nabla \phi$, il faut établir un lien entre les dérivées d'ordre 2 de la phase et la divergence du vecteur de propagation prolongeant le calcul du (C.2.1). A partir de

$$\nabla \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|\nabla \phi|} (\nabla \nabla \phi - \nabla |\nabla \phi| \otimes \boldsymbol{\nu}) \text{ et } \nabla |\nabla \phi| = \nabla \nabla \phi \boldsymbol{\nu}$$
(C.29)

il vient $\nabla \cdot \boldsymbol{\nu} = \operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{\nu}) = (\Delta \phi - \boldsymbol{\nu}^t \nabla \nabla \phi \boldsymbol{\nu})/|\nabla \phi|$. Ainsi, l'utilisation d'une équation sur $\nabla \nabla \phi$ est une alternative au transport des quantités transverses. En fait, les dérivées d'ordre 2 sont reliées aux quantités transverses par

$$\nabla \nabla \phi = \begin{bmatrix} \partial_s \nabla \phi & \partial_\theta \nabla \phi & \partial_\psi \nabla \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_s \boldsymbol{x} & \partial_\theta \boldsymbol{x} & \partial_\psi \boldsymbol{x} \end{bmatrix}^{-1} = \nabla \nabla \phi^t$$
(C.30)

et l'équivalent intrinsèque de l'équation (C.28) peut être obtenu grâce à (C.23) et

$$\exp\left(-\int_{s_0}^s (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla c \cdot \boldsymbol{\nu} + c \operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{\nu}))dt\right) = e^{\left(-\int_{s_0}^s (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla c \cdot \boldsymbol{\nu})dt\right)} \exp\left(-\operatorname{tr}(\int_{s_0}^s c \nabla \boldsymbol{\nu})dt\right) \quad (C.31)$$

$$=e^{\left(-\int_{s_0}^s (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla c \cdot \boldsymbol{\nu})dt\right)} \det^{-1}\left(\exp\left(\int_{s_0}^s \frac{c}{|\nabla \phi|} (\nabla \nabla \phi - \nabla |\nabla \phi| \otimes \boldsymbol{\nu})\right)\right)$$
(C.32)

Les variations transverses permettent de calculer la divergence du vecteur d'onde. Or, cette divergence étant intrinsèque, elle ne dépend pas du repère dans lequel elle est calculée. Les variations transverses pourraient donc être remplacées par d'autres variations transverses liées au front d'onde et non pas au rayon. Concrètement, l'utilisation d'une base complète de paramétrage local nécessite de prendre en compte les variations des vecteurs unitaires transverses dans les calculs des variations transverses. Malgré ce, elle permet de simplifier les calculs dans certaines situations.

C.2.3 Transport de la hessienne et des quantités transverses

Pour calculer l'amplitude avec la méthode du (C.2.1), il faut intégrer les quantités transverses le long des trajectoires. A partir des trajectoires données par (C.5), les dérivées d'ordre 2 de H par rapport à x et $\nabla \phi$ sont

$$\partial_{i}^{j}H(\boldsymbol{x},\nabla\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^{2}\nabla\phi^{2}}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^{2}}\right)\partial_{i}\overline{v}_{j} + \left(\frac{c^{2}\partial_{j}\phi}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^{2}} + \frac{c^{2}\nabla\phi^{2}\overline{v}_{j}}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^{3}}\right)\partial_{i}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi\dots + \frac{2c\partial_{i}c\partial_{j}\phi}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi} + \frac{c\partial_{i}c\nabla\phi^{2}\overline{v}_{j}}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^{2}}$$
(C.33)

$$\partial_{ik}H(\boldsymbol{x},\nabla\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2\nabla\phi^2}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^2}\right)\partial_{ik}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi + \left(\frac{c\partial_k c\nabla\phi^2}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^2} + \frac{c^2\nabla\phi^2\partial_k\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^3}\right)\partial_i\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi\dots$$

$$\dots + \frac{(\partial_i c\partial_k c + c\partial_{ik}c)\nabla\phi^2}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi} + \frac{c\partial_i c\nabla\phi^2\partial_k\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi}{(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)^2}$$
(C.34)

$$\partial^{jl} H(\boldsymbol{x}, \nabla \phi) = \left(\frac{c^2 \partial_l \phi}{(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2} + \frac{c^2 \nabla \phi^2 \overline{\boldsymbol{v}}_l}{(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^3}\right) \overline{\boldsymbol{v}}_j + \frac{c^2 \delta_{jl}}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi} + \frac{c^2 \partial_j \phi \overline{\boldsymbol{v}}_l}{(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2} \tag{C.35}$$

Ainsi, la dérivation des équations de trajectoires (C.8) par rapport à un paramètre transverse θ indépendant de la coordonnée le long du rayon donne

$$\partial_{s}\partial_{\theta}\boldsymbol{x} = \left((\nabla \otimes \overline{\boldsymbol{v}})^{t} + (\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{X}) \otimes \frac{\nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi} + (\overline{\boldsymbol{v}} + 2\boldsymbol{X}) \otimes \frac{\nabla c}{c} \right) \partial_{\theta} \boldsymbol{x}$$
$$\dots + \left((1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) (\overline{\overline{I}} + \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c} \otimes \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{c}) + \nabla \phi \otimes \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\boldsymbol{v}} \otimes \nabla \phi \right) \partial_{\theta} \nabla \phi$$
(C.36)

$$\partial_{s}\partial_{\theta}\nabla\phi = -\left(\nabla\otimes\overline{\boldsymbol{v}} + \frac{\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi}\otimes(\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{X}) + \frac{\nabla c}{c}\otimes(\overline{\boldsymbol{v}}+2\boldsymbol{X})\right)\partial_{\theta}\nabla\phi\dots$$
$$-\left(\nabla\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi + \frac{\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi\otimes\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi} + \frac{\nabla c}{c}\otimes\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi + \nabla\overline{\boldsymbol{v}}\nabla\phi\otimes\frac{\nabla c}{c} + (1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)(\frac{\nabla\nabla c}{c} - \frac{\nabla c\otimes\nabla c}{c^{2}})\right)\partial_{\theta}\boldsymbol{x}$$
(C.37)

où ∂_{θ} désigne la dérivation partielle par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées transverses évoquée au (C.2.1). Ici, le calcul est effectué avec θ mais il doit être fait de façon similaire avec ψ . L'équation (C.37) est une équation vectorielle : à gauche de l'égalité, les trois composantes correspondent aux variations le long du rayon des variations transverses des trois composantes de $\nabla \phi$ et à droite, les vecteurs $\partial_{\theta} \nabla \phi$ et $\partial_{\theta} x$ sont multipliés à des matrices carrées indépendantes de ceux-ci.

L'équation d'évolution sur les quantités d'ordre 2 est

$$0 = \partial_s \nabla \nabla \phi + \nabla \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \nabla \phi + \nabla \nabla \phi \nabla \overline{\boldsymbol{v}}^t + (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) (\frac{\nabla \nabla c}{c} - \frac{\nabla c \otimes \nabla c}{c^2}) \dots \\ - (\nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + \nabla \nabla \phi \overline{\boldsymbol{v}}) \otimes \frac{\nabla c}{c} + ((1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) (2 \frac{\nabla c}{c} \otimes \nabla \phi + \nabla \nabla \phi) + (\nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + \nabla \nabla \phi \overline{\boldsymbol{v}}) \otimes \nabla \phi) \frac{\nabla \nabla \phi}{\nabla \phi^2}$$
(C.38)

comme la première dérivation donne déjà

$$\frac{\nabla c}{c} + \frac{\nabla \nabla \phi \nabla \phi}{\nabla \phi^2} + \frac{\nabla \overline{v} \nabla \phi + \nabla \nabla \phi \overline{v}}{1 - \overline{v} \cdot \nabla \phi} = 0$$
(C.39)

elle se réécrit

$$\frac{\partial_s \nabla \nabla \phi + \nabla \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \nabla \phi + \nabla \nabla \phi \nabla \overline{\boldsymbol{v}}^t + \dots }{(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \left(\frac{\nabla \nabla c}{c} - \frac{\nabla c \otimes \nabla c}{c^2} + \frac{\nabla \nabla \phi^2}{\nabla \phi^2} - \left(\frac{\nabla \nabla \phi \nabla \phi}{\nabla \phi^2} - \frac{\nabla c}{c}\right) \otimes \left(\frac{\nabla \nabla \phi \nabla \phi}{\nabla \phi^2} - \frac{\nabla c}{c}\right) \right) = 0$$
(C.40)

Cette équation est une équation matricielle permettant de calculer l'évolution de la hessienne de la phase le long du rayon. Tous les termes sont des matrices carrées résultant de la combinaison d'entités d'ordre 1, 2 ou 3.

Les équations (C.36) et (C.37) permettent de calculer les quantités transverses. Concrètement, elles se traduisent par l'intégration numérique de 12 équations scalaires. Les conditions initiales sont données, pour les variations transverses de x, par deux vecteurs tangents au front d'onde c'est-à-dire perpendiculaires au vecteur d'onde et, pour les variations transverses du gradient de phase, par les deux images de ces vecteurs par la hessienne de phase. Les amplitudes des vecteurs tangents n'ont pas d'importance puisque les équations sont linéaires et que, pour le calcul de l'amplitude, c'est le rapport entre la valeur initiale et la valeur finale du jacobien de la transformation qui intervient.

L'équation (C.40) en pratique ne peut pas être utilisée numériquement car c'est une équation de Ricatti qui se révèle raide à intégrer. La hessienne de phase est calculée à la fin de la propagation grâce à la relation (C.30). Pourtant, elle permet d'estimer la dynamique des quantités transverses plus simplement que le système décrivant leur évolution. En fait, l'équation (C.40) traduit une dynamique en 1/s comme les analyses précédentes sur les surfaces élémentaires de tube de rayons et les solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz pouvaient le laisser deviner. Formellement, elle peut être écrite sous la forme

$$\partial_{s}(\nabla\nabla\phi)^{-1} = (\nabla\nabla\phi)^{-1}(\nabla\nabla\overline{v}\nabla\phi)(\nabla\nabla\phi)^{-1} + (\nabla\nabla\phi)^{-1}\nabla\overline{v} + \nabla\overline{v}^{t}(\nabla\nabla\phi)^{-1} + (1 - \overline{v}\cdot\nabla\phi)\dots$$
$$\dots \left(\frac{\overline{I}}{\nabla\phi^{2}} - \left(\frac{\nabla\phi}{\nabla\phi^{2}} - \frac{(\nabla\nabla\phi)^{-1}\nabla c}{c}\right) \otimes \left(\frac{\nabla\phi}{\nabla\phi^{2}} - \frac{(\nabla\nabla\phi)^{-1}\nabla c}{c}\right) + (\nabla\nabla\phi)^{-1}\left(\frac{\nabla\nabla c}{c} - \frac{\nabla c\otimes\nabla c}{c^{2}}\right)(\nabla\nabla\phi)^{-1}\right) \tag{C.41}$$

Cette équation en $(\nabla \nabla \phi)^{-1}$ n'est *a priori* pas plus évidente à utiliser. D'une part, l'inverse de la hessienne n'existe pas toujours. Par exemple, la hessienne d'une onde plane est singulière. D'autre part, l'équation (C.41) est toujours une équation de Ricatti. Cependant, dans les zones où le champ moyen est uniforme, cette équation indique effectivement que l'inverse formel progresse linéairement le long des rayons.

C.2.4 De l'existence de singularités

Apparition des singularités

Jusqu'à présent les développements ont été énoncés de façon formelle. Aucune notion d'existence n'a été prise en compte. Or, si l'équation iconale et les rayons qui en sont issus semblent ne pas faire apparaître de problèmes de régularité, les équations du (C.2.1) et du (C.2.3) nécessitent une plus grande attention. En effet, aussi bien l'équation (C.28) où le dénominateur peut *a priori* s'annuler que l'équation (C.40) dont certaines solutions présentent des singularités, ne peuvent pas être résolues numériquement "naïvement". De plus, l'apparition de telles singularités étant due à la fois aux conditions initiales et au parcours du rayon dans l'espace, il est, *a priori*, impossible de prédire leur existence.

La traduction immédiate de la présence d'une singularité est, suivant l'approche envisagée, soit l'annulation de la surface élémentaire, soit l'annulation du jacobien de la transformation, soit la non existence d'un changement de base locale, soit la convergence de rayons en un point, soit un rayon de courbure du front d'onde nul, etc. Toutes ces formulations ne sont que l'expression de $(\nabla \cdot \nu)^{-1} = 0$ qui dénonce une discontinuité sur la direction du gradient de phase. Cependant, en fonction des approches, les effets sur le calcul effectif de l'amplitude ne sont pas les mêmes.

Il serait facile de dire que la présence de singularités pour la divergence de faisceau ne pose de problèmes que dans le cas de la résolution effective de la hessienne de la phase. En effet, dans les autres cas, non seulement l'intégration peut être poursuivie au delà de la singularité, mais, en plus, l'intégration numérique peut masquer leur présence. Dans (C.40), la présence des carrés des quantités intégrées conduit à des problèmes de Ricatti numériquement difficiles à intégrer et permet l'apparition explicite des singularités. Par contre, dans (C.36) et (C.37), les équations étant linéaires, il ne peut pas y avoir d'apparition de singularités. En fait, c'est l'annulation du déterminant de ∂_{-x} qui crée la singularité. Comme le développement de l'intégrale de rayonnement de l'équation de Helmholtz montre que, après avoir rencontré une singularité, la phase doit être ajustée, il faut, dans le deuxième cas, les détecter.

De nombreux travaux comme dans [⁷⁴] ont étudié les **caustiques** et le comportement des solutions dans leurs voisinages.

Faisceaux

L'utilisation d'une phase complexe permet d'induire des variations rapides non périodiques sur l'amplitude et, ainsi, de construire des fonctions de base très localisées, dont les exemples les plus courants sont les faisceaux gaussiens. Sur des rayons réels, c'est-à-dire pour une position et un gradient de phase réels, la hessienne de la phase est considérée complexe. Ainsi, les trajectoires sont les trajectoires classiques mais les quantités d'ordre 2 bénéficient de degrés de liberté supplémentaires. Pour construire de tels faisceaux, il faut vérifier :

$$(\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}(0)) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(0), \nabla \phi(0))) \cdot \nabla \phi(0) = 1$$
(C.42)

 $\nabla \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}(0)) \nabla \phi(0) + (1 - \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}(0)) \cdot \nabla \phi(0)) \frac{\nabla c(\boldsymbol{x}(0))}{c(\boldsymbol{x}(0))} + (\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}(0)) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(0), \phi(0))) \nabla \nabla \phi(0) = 0 \quad (C.43)$

soit, par rapport au cas réel, vérifier en plus $(\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}(0)) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(0), \phi(0))) \Im(\nabla \nabla \phi(0)) = 0$. Comme la vitesse et la célérité sont réelles, ces propriétés demeurent vérifiées le long des trajectoires.

De plus, sur les rayons réels, l'introduction d'une partie imaginaire dans la hessienne permet d'éviter les singularités et, donc, les caustiques. En effet, le problème majeur des rayons classiques réside dans la possible annulation du déterminant de la hessienne. Or, pour une phase complexe, avec $\overline{\overline{J}} = [\partial_- x]$ et $\overline{\overline{P}} = [\partial_- \nabla \phi], \forall z \in \mathbb{C}^3$, les équations permettent d'écrire

$$d_{s}\Im(\boldsymbol{z}^{*}\overline{\overline{J}}^{*}\overline{\overline{P}}\boldsymbol{z}) = \Im(\boldsymbol{z}^{*}(\partial_{\boldsymbol{x},\nabla\phi}H\overline{\overline{J}} + \partial_{\nabla\phi,\nabla\phi}H\overline{\overline{P}})^{*}\overline{\overline{P}}\boldsymbol{z}) - \Im(\boldsymbol{z}^{*}\overline{\overline{J}}^{*}(\partial_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}}H\overline{\overline{J}} + \partial_{\nabla\phi,\boldsymbol{x}}H\overline{\overline{P}})\boldsymbol{z}) = 0 \quad (C.44)$$

car H est réelle et les hessiennes sont toutes symétriques.

Ainsi, la hessienne de la phase par rapport aux coordonnées transverses vérifie $\forall z \in \mathbb{C}^3$,

$$\Im(\boldsymbol{z}^* \overline{\overline{J}}^*(s) \overline{\overline{P}}(s) \boldsymbol{z}) = \Im(\boldsymbol{z}^* \overline{\overline{J}}^*(0) \overline{\overline{P}}(0) \boldsymbol{z}) = \Im(\boldsymbol{z}^* [\partial_- \boldsymbol{x}](0)^* \nabla \nabla \phi(0) [\partial_- \boldsymbol{x}](0) \boldsymbol{z})$$
(C.45)

Comme $d_s \nabla \phi = d_s \boldsymbol{x} \nabla \nabla \phi$ est réelle, il ne reste plus que

$$\Im(\boldsymbol{z}^*\overline{J}^*(s)\overline{P}(s)\boldsymbol{z}) = z_{\psi}^* z_{\psi} \Im(\partial_{\psi,\psi}\phi(0)) + z_{\psi}^* z_{\theta} \Im(\partial_{\psi,\theta}\phi(0)) + z_{\theta}^* z_{\psi} \Im(\partial_{\theta,\psi}\phi(0)) + z_{\theta}^* z_{\theta} \Im(\partial_{\theta,\theta}\phi(0))$$
(C.46)

De plus, dans le cas d'une fonction concentrée au voisinage du rayon réel, pour tout z non colinéaire à $d_s x$, cette quantité est strictement positive, ce qui implique $\overline{\overline{J}}(s)z \neq 0$.

Pour passer des coordonnées transverses aux coordonnées cartésiennes, comme $\forall z, \overline{J}(s)z \neq 0$, le changement de coordonnées peut être inversé et, donc, $\nabla \nabla \phi$ est toujours définie et inversible. De plus, pour tout déplacement y orthogonal au vecteur de propagation, $\Im(y^t \nabla \nabla \phi y) > 0$ ce qui assure la conservation de la concentration de la fonction au voisinage du rayon réel au cours de la propagation.

Pour retrouver l'amplitude de la pression à partir du jacobien complexe, il faut dans (C.28) calculer la racine carrée d'un nombre complexe. En supposant, comme c'est le cas le long d'une propagation rectiligne, que la partie réelle de l'amplitude de la pression ne change pas de signe tant que le jabobien est non nul, il suffit de prendre la valeur principale de la racine carrée complexe, c'est-à-dire la racine dont la partie réelle est positive, pour définir de manière unique et continuement l'amplitude dans la majorité des situations. Un problème subsiste lorsque la partie imaginaire du jacobien passe continuement d'une valeur positive à une valeur négative ou vice-versa alors que la partie réelle demeure négative. Pour éviter cette situation, il suffit, au cours de la propagation, de compter combien de fois la partie réelle du jacobien devient nulle et, au moment de calculer l'amplitude, de multiplier le jacobien par $(-1)^n$, avec n le nombre précédent, puis de prendre la valeur principale de la racine carrée et, enfin, de multiplier la racine par iⁿ. Comme la racine carrée du jacobien apparaît au dénominateur de la formule, cela revient à multiplier l'amplitude de la pression par $(-i)^n$, ce qui correspond à la correction classiquement utilisée exp $(-i\pi/4)$ pour la traversée d'une caustique dans le cas réel. L'amplitude de la pression est alors définie de façon unique et continue au cours de la propagation.

Le rapide développement effectué ici justifie l'emploi d'une phase complexe et de faisceaux et montre comment certaines imperfections de la méthode sont gommées. Par ailleurs, il donne, dans le cas de l'utilisation effective d'une phase complexe, un moyen de vérifier l'erreur due à l'intégration numérique en vérifiant la conservation de (C.46). Pour utiliser des faisceaux, il ne reste plus qu'à expliciter le développement du champ source sur une base de faisceaux et à étudier le comportement de l'erreur commise. Ces questions sont évoquées par la suite avec les aspects numériques.
L'étude du transport de l'amplitude le long des rayons grâce à une approche complètement locale a permis d'établir une résolution "exacte" et de réconcilier toutes les approches. Les variations transverses ne sont introduites dans ces méthodes que pour séparer la hessienne en deux ; d'autres décompositions peuvent être envisagées. C'est la forme du front d'onde qui joue le rôle le plus important. L'utilisation concrète de la méthode accentue cette impression.

Le traitement des caustiques grâce à l'introduction d'une partie imaginaire dans la hessienne prouve que l'annulation du jacobien de la transformation n'est qu'un artefact de la résolution. Cependant, il demeure qu'au voisinage des caustiques, le front d'onde devenant très courbé, l'approximation "hautes fréquences" ne donne plus de résultats satisfaisants. Il faut mettre en relation l'évolution de la norme du déterminant de la hessienne avec les termes négligés dans les développements asymptotiques.

* * *

C.3 Stratégies de résolution des équations de l'optique géométrique

La mise en pratique des concepts liés aux rayons peut se faire de façon simple. Cependant, les développements précédents permettent d'espérer améliorer les solutions numériques en étoffant un peu l'étude.

Afin de s'appuyer sur des bases solides pour aller plus loin, la première partie fait un tour d'horizon des méthodes existantes permettant de résoudre les deux équations issues de l'approximation "hautes fréquences". Ensuite, en partant d'une utilisation conventionnelle des rayons, une approche plus élaborée est testée. Enfin, le dernier paragraphe explicite une méthode aboutie bénéficiant de tous les développements théoriques.

C.3.1 Boîte à outils

Avant d'expliciter la résolution des équations obtenue au (B) à l'aide des développements du (C.1) et du (C.2), il est intéressant de faire un rapide tour d'horizon des méthodes et formalismes existants. Dans un premier temps, tous les types de méthodes sont considérés pour comprendre quelles sont les alternatives. Ensuite, des développements autour du formalisme propre à la méthode sont cités pour inspirer d'éventuelles améliorations.

Un large éventail de méthodes

L'éventail des méthodes de résolution des équations issues de l'approximation hautes fréquences liées à l'Ansatz de l'optique géométrique est très vaste. Que ce soit pour l'équation iconale, pour l'équation de Liouville ou plus simplement pour l'équation des ondes, les résolutions bénéficient de toutes les théories évoquées précédemment et les études conduisent à beaucoup de méthodes originales. Une classification grossière distingue les méthodes de rayons, les méthodes de front d'onde, les méthodes de résolution sur les surfaces et les méthodes de résolution dans le volume.

Les méthodes de résolution dans le volume ou sur les surfaces traitent les équations à l'aide de formulations variationnelles et utilisent des éléments, des volumes ou des différences finis pour la discrétisation. Ce sont soit des méthodes résolvant les équations classiques mais ajustées pour s'accommoder des hautes fréquences, soit des méthodes résolvant les équations obtenues après l'approximation haute fréquence. Le premier cas qui utilise, par exemple, la formulation ultra-faible est illustré par [²⁰] et le deuxième par [⁷⁴]. Dans ce dernier cas, le traitement des solutions multi-valuées s'aide de la notion de solution de viscosité mais reste, surtout au voisinage des caustiques, la problématique essentielle.

Les méthodes de rayons et de front d'onde sont plus directement liées aux notions évoquées ici. Les méthodes de front d'onde cherchent à propager des surfaces fictives dans l'espace. Certaines représentent la surface initiale à l'aide d'une fonction à valeur dans l'espace et calculent l'évolution "temporelle" de cette fonction en se basant sur une dynamique propre aux surfaces. Une revue des méthodes utilisant ce type d'approche peut être trouvée dans [⁷⁰]. D'autres transportent la surface initiale grâce au calcul des trajectoires de certains de ses points. Un exemple peut être trouvé dans [³⁵]. Par certains côtés, celles-ci sont très proches des méthodes de rayons.

Les méthodes de rayons abordent la propagation en utilisant soit les équations montrées au (C.1.1), soit la notion de parcours minimal précisé au (C.1.2). Dans le premier cas, à partir d'un point source et d'un gradient de phase, un rayon est tracé à l'avancement. Dans le second cas, les points source et récepteur sont fixés mais le gradient à l'origine n'est pas imposé. Un premier rayon rectiligne est tracé entre les deux

extrémités puis la trajectoire est ajustée de façon à diminuer l'intégration du lagrangien. Plusieurs rayons optimaux peuvent apparaître, ce sont alors les différents trajets qu'emprunte l'onde, en partant de la source, pour produire un effet à la position du récepteur. Cette méthode très utilisée en sismographie n'est efficace que lorsqu'il n'y a que quelques points sources et quelques points récepteurs. Étant l'objet de cette étude, les méthodes de tracé de rayons seront plus amplement détaillées dans la suite. Cependant, il faut noter que les trajets des rayons peuvent être parcourus soit dans un sens soit dans l'autre, c'est-à-dire que, pour approcher la fonction de Green, les rôles de la source et du récepteur peuvent être inversés. Cela conduit à deux types d'algorithmes : **le lancer de rayons et la recherche de rayons**.

L'univers symplectique

Le concept de rayons dépasse largement le cadre de la résolution de l'équation iconale. En effet, trois aspects incitent à élargir le point de vue.

D'abord, il est intéressant de rapprocher les trajectoires obtenues des trajectoires des flots caractéristiques des équations de transport conduisant à l'équation des ondes. En effet, si l'équation iconale a été obtenue après l'utilisation d'un Ansatz et d'un développement asymptotique, elle illustre un comportement plus général. Grâce aux flots caractéristiques, des rayons peuvent être construits sans considération annexe, comme par exemple pour l'étude du bang sonique.

Ensuite, à partir des idées développées au (C.1.2), les théories hamiltonienne, lagrangienne ou legendrienne peuvent être invoquées. Comme pour les flots caractéristiques, ces approches peuvent être employées en dehors du cadre développé ici pour les hautes fréquences, tout en traduisant les mêmes comportements. Davis, dans [²⁷], donne un aperçu de leur utilisation en rapport avec la propagation d'onde.

Enfin, de façon plus théorique, une nouvelle géométrie basée sur la notion de coordonnées généralisées peut être définie. Ainsi, au delà des rayons, les faisceaux peuvent être considérés comme des surfaces, non plus dans l'espace euclidien classique, mais dans des espaces quelconques. A cause de son application pour la résolution de divers problèmes, cette géométrie symplectique a engendré une quantité considérable d'études mathématiques.

Lorsque les concepts simples échouent à décrire les phénomènes rencontrés, les différentes approches symplectiques fournissent des pistes de réflexion. Ainsi, en lien avec la théorie des catastrophes, plusieurs travaux tentent d'expliquer les singularités apparaissant dans un champ de rayons et de compenser les caustiques, les frontières ombre-lumière et plus généralement l'ensemble des phénomènes diffractifs, grâce à ces concepts abstraits. Le lecteur pourra se référer à [⁵¹] pour une application dans le cadre du bang sonique, à [⁷⁴] pour une application dans le cadre du voisinage des caustiques et à [²⁹] dans un cadre plus général liant surfaces d'ondes et diffraction. Par ailleurs, en rapport avec les conditions initiales pour les rayons, des conditions de normalité ont été développées et [⁷¹] esquisse un lien avec la présente problématique.

C.3.2 Une première résolution par méthode des rayons

La méthode de résolution par "lancer de rayons" développée dans cette étude a évolué à plusieurs reprises. Pour réduire au maximum les coûts de calcul, la méthode fondamentale utilise les développements du (C.1.3) mais cherche à éviter le calcul des quantités transverses. La présentation qui en est faite ici montre comment les différents concepts évoqués s'imbriquent pour produire une méthode de calcul complète. Elle fait aussi apparaître les faiblesses des méthodes de rayons. En s'inspirant d'approches palliant les défauts, elle cherche à construire un nouveau formalisme.

Comment utiliser les équations ?

L'idée générale de la résolution qui se dégage à partir des développements théoriques précédents consiste à :

- représenter les sources par des positions et des vecteurs d'onde répartis dans l'espace,
- intégrer les trajectoires grâce au système des deux équations vectorielles (C.8) du (C.1.3),
- et déduire des zones éclairées.

La connaissance des champs (phase et amplitude) aux positions de départ permet alors de reconstruire les champs aux positions d'arrivée. En fait, ils sont théoriquement calculables partout le long des trajectoires mais dans la plupart des cas seules les valeurs finales sont intéressantes.

L'obtention de la phase sur les rayons est aisée car elle est directement liée à la variable d'intégration. Sans considérer l'intégration des quatre équations vectorielles supplémentaires donnant les quantités transverses, les surfaces inter rayons peuvent donner une première approximation de l'étalement des tubes de rayons. Cependant, cette approche pose le problème de la connaissance des champs en dehors des trajectoires.

Traitement du continuum

A priori pour connaître les champs en un point d'une surface, il suffit de trouver un ou plusieurs rayons arrivant sur ce point. Ce problème n'est pas trivial, surtout lorsque la propagation n'est pas rectiligne. Cependant, en s'aidant de la réciprocité, il peut, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, être résolu. La complexité d'une telle recherche de rayons la rend envisageable pour quelques points isolés mais la résolution de scènes complexes nécessite la connaissance des champs en une multitude de points, voire un continuum tel qu'une ligne ou une surface. Il faut donc pouvoir reconstruire l'ensemble de l'éclairement d'une surface avec seulement quelques rayons.

Différentes approches peuvent être utilisées pour passer d'une description basée sur des occurrences isolées à la description d'un continuum. Trois d'entre elles sont particulièrement intéressantes :

- Pour la première, autour de chaque occurrence, une zone d'influence est construite et l'ensemble de ces zones forme un faisceau épais.
- Pour la deuxième, chaque occurrence n'est plus considérée isolée mais comme faisant partie d'un faisceau dont elle représenterait un nœud de la discrétisation.
- Pour la troisième, l'ensemble des interactions entre la source et le récepteur peut être représenté par un nombre limité de rayons et c'est la répartition de ceux-ci qui donne les caractéristiques globales du rayonnement.

D'autres méthodes sont sans doute possibles, mais ces trois couvrent une grande partie des "méthodes de rayons". La troisième approche, qui s'éloigne de ce qui est développé ici consiste à décrire le rayonnement vers les positions voulues comme la somme des rayonnements issus des surfaces sources. Les rayons sont choisis de façon à représenter le plus fidèlement ce rayonnement. Pour approfondir cette approche et mieux comprendre les méthodes utilisant la fonction de radiance, le lecteur pourra consulter [⁴⁶].

Les deux autres méthodes discrétisent le faisceau par des considérations locales liées à celui-ci et non pas aux résultantes globales des rayonnements en des positions précises. La première méthode discrétise le faisceau en **faisceaux élémentaires**. La deuxième est plus proche de **la discrétisation de fronts d'ondes**. Moyennant des hypothèses de régularité au voisinage de chaque occurrence sur les champs à calculer, elles nécessitent la connaissance non seulement des champs, mais aussi de leurs dérivées successives en chaque occurrence. Ces quantités peuvent être transportées par l'intermédiaire des rayons comme cela a

été développé au (C.2.3). Cependant, pour la deuxième méthode, une méthode plus globale mettant en relation les différents nœuds de discrétisation peut être envisagée.

Une utilisation globale du front d'onde

Si chaque champ est représenté par une fonction discrétisée sur l'ensemble des rayons, **chaque tube de rayons peut définir un élément de maillage**. Si, dans un premier temps, le maillage est construit par l'intermédiaire du lancer de rayons, dans un deuxième temps, l'amplitude peut être calculée :

- soit par une approche "volumes finis" basée sur le calcul des flux traversant les différentes parois du tube de calcul
- soit par une approche "éléments finis" après avoir ré-écrit le problème sous forme variationnelle.

Cette nouvelle approche a l'avantage d'être globale car le calcul de l'amplitude se déduit de la répartition du flux sur l'ensemble de la surface. Ce sont les fonctions de base de l'espace dans lequel la solution est recherchée qui permettent de calculer cette répartition. Ainsi, le calcul ne consiste plus en l'évaluation du champ en certains points mais en l'évaluation de coefficients de projection permettant la reconstruction du champ sur l'ensemble de la surface.

Avec l'équation de conservation classique, la formulation variationnelle donne :

$$\iint_{\partial\Omega} \zeta \frac{\pi_0^2}{\overline{\rho}c^3 |\nabla\phi|} (\overline{\boldsymbol{v}} + c\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{dS} = \iiint_{\Omega} \nabla\zeta \cdot (\overline{\boldsymbol{v}} + c\boldsymbol{\nu}) \frac{\pi_0^2}{\overline{\rho}c^3 |\nabla\phi|} dx \tag{C.47}$$

Appliquée dans un tube de rayon, comme les faces transversales ont des normales locales orthogonales à la direction du rayon, cette méthode donne :

$$\iiint_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \left(\frac{\pi_0^2}{\overline{\rho} c^2 |\mathbf{\Phi}|} (\overline{\boldsymbol{\upsilon}} + c\boldsymbol{\nu}) \right) d\Omega = \iint_{S_0 \cup S_1} \left(\zeta \frac{\pi_0^2}{\overline{\rho} c^2 |\mathbf{\Phi}|} (\overline{\boldsymbol{\upsilon}} + c\boldsymbol{\nu}) \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$
(C.48)

où S_0 et S_1 sont les surfaces supportant le tube de rayons. En choisissant correctement les fonctions test et les fonctions de base, par exemple telles que $\nabla \zeta \cdot (\overline{v} + c\nu) = 0$ dans le volume, ce problème se discrétise et se résout facilement.

Avec l'équation évoquée au (C.47) et des éléments finis linéaires classiques, la méthode se résume à faire le rapport des surfaces entrantes et sortantes des tubes de rayons. L'étude des termes non pris en compte par l'équation de conservation au (B.3.3) introduit une dispersion transverse. Cette formulation permet de la traiter simplement et les singularités rencontrées au cours de la propagation peuvent être éliminées. Cependant, deux difficultés demeurent. D'une part, comme il n'y a pas d'intégration le long des rayons, pour l'équation de conservation classique, le passage des singularités n'est pas détecté. Les champs ne peuvent donc pas être, si besoin est, adaptés lorsque l'approximation de l'optique géométrique n'est plus pertinente. D'autre part, cette approche globale ne résout pas le problème des frontières du faisceau éclairant.

C.3.3 Un formalisme plus adapté

Le calcul de l'amplitude par une approche locale nécessite de connaître quatre nouveaux vecteurs le long des rayons. Dans notre méthode, les équations du (C.2.3) permettent d'intégrer les quantités transverses. Cependant, deux développements supplémentaires peuvent être faits en rapport avec ces nouvelles intégrations. D'une part, la base cartésienne classique n'est pas toujours la plus judicieuse pour effectuer les calculs et l'utilisation de la base paraxiale est relativement efficace. D'autre part, un calcul élaboré des

quantités transverses le long des rayons permet d'obtenir non seulement la description classique du continuum par interpolation d'ordre 2, mais aussi une description par décomposition en faisceaux élémentaires.

Approche locale en coordonnées locales

Les quantités transverses étant orthogonales au vecteur d'onde, une base faite de deux vecteurs n'ayant pas de composante suivant le vecteur d'onde est suffisante pour les décrire. Comme le vecteur d'onde varie au cours de la propagation, cette base doit aussi varier. L'idée est donc d'utiliser la base paraxiale.

Il ne faut pas confondre le **changement de base paraxiale** qui est utilisé ici avec le calcul des variations transverses. En effet, les variations transverses se font par rapport à des coordonnées paramétrant le front d'onde au départ et sont indépendantes de la coordonnée le long du rayon, ce qui permet de commuter les dérivations transverses et la dérivation le long du rayon. Le changement de base ici dépend de la coordonnée le long du rayon. Le calcul des variations transverses n'a, en fait, aucune valeur physique, c'est un système de coordonnées virtuelles, elles ne correspondent pas à une décomposition sur une base. Le changement de base, quant à lui, est matérialisé par trois vecteurs servant à la décomposition de n'importe quel vecteur de l'espace. Le fait que, généralement, les vecteurs unitaires correspondant à la dérivation par rapport aux coordonnées locales de la coordonnée cartésienne servent de base locale contribue à l'amalgame. Ici, les vecteurs unitaires ne correspondent *a priori* pas aux variations transverses de la position.

Les calculs pour passer d'une description globale des quantités transverses à une description locale sont effectués dans [¹⁹] et [⁴⁵]. L'idée principale consiste à décrire un vecteur quelconque non plus dans la base cartésienne mais dans la base locale. Ainsi, pour tout vecteur y,

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta} \text{ et } d_s \boldsymbol{y} = d_s \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} d_s \boldsymbol{\vartheta}$$
(C.49)

De plus, l'expression des variations de ϕ utilise les coordonnées locales grâce à $\partial_{q}\phi = [\varepsilon_{i}]\nabla\phi$.

Dans le cas de variations transverses, la base (ε_i) a été choisie de sorte que :

$$\partial_{s} \left\{ \begin{array}{c} \partial_{-} \boldsymbol{q} \\ \partial_{-} \partial_{\boldsymbol{q}} \phi \end{array} \right\} = \overline{\overline{H}} \left\{ \begin{array}{c} \partial_{-} \boldsymbol{q} \\ \partial_{-} \partial_{\boldsymbol{q}} \phi \end{array} \right\}$$
(C.50)

avec

$$\begin{pmatrix}
-\overline{\overline{H}}_{2,1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{t} \\ \varepsilon_{3}^{t} \end{bmatrix} (\partial_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}}H - \partial_{\boldsymbol{x}}H \otimes \partial_{\boldsymbol{x}}H) \begin{bmatrix} \varepsilon_{2} & \varepsilon_{3} \end{bmatrix} \\
\overline{\overline{H}}_{2,2} = -\overline{\overline{H}}_{1,1} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{t} \\ \varepsilon_{3}^{t} \end{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{x},\nabla\phi}H - \partial_{s} \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{t} \\ \varepsilon_{3}^{t} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{-1} & \varepsilon_{3}^{-1} \end{bmatrix} \\
\overline{\overline{H}}_{1,2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{-t} \\ \varepsilon_{3}^{-t} \end{bmatrix} \partial_{\nabla\phi,\nabla\phi}H \begin{bmatrix} \varepsilon_{2}^{-1} & \varepsilon_{3}^{-1} \end{bmatrix}$$
(C.51)

Les conditions initiales pour ce système sont (1,0) et (0,1) pour $\partial_- q$ et $(\varepsilon_2 \nabla \nabla \phi \varepsilon_2, \varepsilon_3 \nabla \nabla \phi \varepsilon_2)$ et $(\varepsilon_2 \nabla \nabla \phi \varepsilon_3, \varepsilon_3 \nabla \nabla \phi \varepsilon_3)$ pour $\partial_- \partial_q \phi$.

Dans cette base, le calcul des variations transverses se résume donc à l'intégration de huit équations auxquelles il faut ajouter l'intégration des trois équations nécessaires pour calculer les vecteurs de la base. Or, il faut intégrer douze équations si le repère de référence est le repère cartésien classique. En fait l'utilisation de cette base ne devient vraiment efficace, comme cela est décrit dans la suite, que lorsque l'opérateur de transport complet doit être calculé.

Décomposition en faisceaux élémentaires

La forme des équations obtenues traduisant l'évolution des quantités transverses incite à considérer la propagation d'un opérateur plus général. Son calcul complet permet d'obtenir certaines quantités dont les variations transverses à la fin du calcul grâce à la transformation des quantités initiales. La propagation de cette nouvelle quantité le long des rayons réalise une discrétisation du "noyau de Green" entre deux ensembles de points. Le calcul de la propagation d'une donnée initiale sur l'un des deux ensembles se calcule alors directement par application de l'opérateur.

Les équations de propagation (C.36) et (C.37) sont certes dépendantes de la position, mais elles sont seulement linéaires vis-à-vis des quantités intégrées. Si le système de propagation des quantités transverses est écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_{s} \boldsymbol{Q} \\ \partial_{s} \boldsymbol{P} \end{array} \right\} = \overline{\pi} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{P} \end{array} \right\} \text{ avec } \overline{\pi} = \left[\begin{array}{c} \partial_{\boldsymbol{x}, \nabla \phi} H & \partial_{\nabla \phi}^{2} H \\ -\partial_{\boldsymbol{x}}^{2} H & -\partial_{\nabla \phi, \boldsymbol{x}} H \end{array} \right]$$
(C.52)

s

les solutions peuvent être décrites formellement par

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{Q}(s) \\ \boldsymbol{P}(s) \end{array} \right\} = \overline{\overline{\Pi}}(s, s_0) \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{Q}(s_0) \\ \boldsymbol{P}(s_0) \end{array} \right\} \text{ avec } \overline{\overline{\Pi}} = \exp(\int_{s_0}^s \overline{\overline{\pi}} dt) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\int \overline{\overline{\pi}} dt)^n}{n!}$$
(C.53)

Dans l'équation (C.53), s_0 et *s* sont les paramètres le long du rayon au départ et à l'arrivée. Q et P représentent un couple de variations transverses sur la position et le gradient de phase. Enfin, $\overline{\Pi}$ est la matrice représentant, pour les coordonnées cartésiennes, la partie transverse de l'opérateur de transport le long des rayons.

L'opérateur de propagation $\overline{\Pi}$ est à coefficients dans \mathbb{R} tant que le gradient de phase le long des rayons est réel. C'est un opérateur de l'espace des phases dans l'espace des phases, il faut donc, en coordonnées cartésiennes, la propagation des 6 vecteurs réels de base pour le représenter entièrement. Dans la base locale, puisque les variations de la position et du gradient de phase le long des rayons sont calculés par ailleurs, la propagation des 4 vecteurs réels de base du sous-espace transverse suffit pour décrire l'opérateur entièrement. Ainsi, l'utilisation du changement de base précédent devient effectivement pertinente.

La méthode de calcul se décompose désormais en 4 étapes :

- définition de l'ensemble continu de positions pour représenter la source,
- intégration des trajectoires et des opérateurs associés nécessaires à la propagation de cet ensemble,
- décomposition des champs initiaux sur les positions initiales des rayons,
- application des opérateurs calculés à la deuxième étape et calcul des champs sur l'ensemble d'arrivée.

Il faut noter que même si, compte tenu du choix des trajectoires de rayons, l'opérateur de propagation est réel, les variations transverses peuvent être choisies dans l'espace complexe. La décomposition du champ sur une base de faisceaux élémentaires est donc traitée par le calcul précédent. Compte tenu de la décomposition des champs incidents après le calcul de la propagation, le nombre de faisceaux peut être ajusté en fonction des conditions rencontrées dans le volume et pas seulement en fonction des données initiales.

Comme l'étude locale du transport de l'amplitude le laissait entrevoir, les singularités de l'approche lagrangienne peuvent être gommées par différentes méthodes. A partir de l'utilisation classique des rayons, la résolution à base de faisceaux permet non seulement d'éviter les singularités, mais aussi de maîtriser de façon systématique l'erreur. Par rapport à la discrétisation du front d'onde, la discrétisation en faisceaux donne une base plus adaptée tenant compte de l'effet de la propagation sur le "poids" relatif des rayons les uns par rapport aux autres.

La résolution dans la base paraxiale et l'utilisation du propagateur sont deux nouveaux outils dans le cadre de l'aéroacoustique. Ils améliorent tous les deux l'efficacité de la méthode. Le changement de base permet de diminuer les calculs et de simplifier les estimations alors que la décomposition des champs *a posteriori* rend systématique le contrôle de l'erreur. Jusqu'à présent il était nécessaire de se donner une source pour étudier la forme de la propagation à travers un milieu. Désormais, l'étude de la propagation commence par l'élaboration d'une base de faisceaux la décrivant. Les sources peuvent ensuite être discrétisées en fonction de l'ensemble des paramètres du problème. C'est un pas de plus vers une estimation globale de l'erreur.

Pour aller plus loin, il serait intéressant de développer l'étude de la propagation dans un voisinage de rayon. En particulier, la prise en compte dans les développements du (B.3.1) d'une petite perturbation de la phase, d'un Ansatz différent ou de variations transverses au rayon plus marquées devrait permettre d'obtenir de nouvelles équations modélisant la propagation de faisceaux. Ces derniers pourraient alors être comparés aux faisceaux construits grâce à l'utilisation de la phase complexe. La description paraxiale complète apparaissant ainsi enrichirait l'approche comme cela est le cas pour l'équation d'Helmholtz avec son approximation paraxiale et ses solutions en forme de faisceaux gaussiens.

* * * * *

Les développements effectués concernant la résolution à base de rayons font apparaître une nouvelle situation. Si le formalisme mathématique n'est pas aussi développé que dans le cas d'autres méthodes de résolution, il donne une description suffisante des solutions pour les applications communément rencontrées. Il permet notamment une utilisation systématique sans craindre de dérive préjudiciable de l'erreur.

Parmi l'ensemble des problèmes posés par les méthodes utilisant des trajectoires, si certains demeurent, les plus importants ont été réduits. Ainsi, les caustiques rencontrées au cours de la propagation ne sont plus des artefacts liés à la résolution mais doivent être traitées par le développement asymptotique. L'interpolation et la reconstruction des champs bénéficient d'une base appropriée mais la discrétisation d'une onde quelconque sur une base de faisceaux n'est pas toujours aisée. Pour des situations "exotiques" impliquant des surfaces et des gradients de phase non compatibles, l'initialisation de la propagation peut ne pas se faire correctement. Il faut alors ajouter "à la main" des contributions supplémentaires pour obtenir des champs corrects.

Annexe D

Interaction avec une surface

Pour les problèmes que doit traiter la méthode de résolution, la propagation libre n'est pas suffisante pour décrire toutes les situations. D'une part, avec le champ incident seul, les conditions imposées sur les surfaces solides ne sont, en général, pas vérifiées. D'autre part, dans certaines zones, l'optique géométrique ne permet plus de modéliser correctement les phénomènes. Il faut notamment introduire de nouvelles contributions dépendant de la fréquence afin de prendre en compte la présence d'ondes physiques dans les zones d'ombre.

Les manques de l'optique géométrique et les façons de les combler sont, depuis Keller [⁴²], en partie traités pour l'équation de Helmholtz. Depuis peu, des travaux, comme dans [²⁸], traitent de l'optique diffractive pour les systèmes d'équations hyperboliques. Les travaux théoriques de Hormander [³⁹] avaient dejà permis d'esquisser des propriétés communes à tous les systèmes linéaires. Cependant, les méthodes concrètes de calcul prenant en compte un écoulement sont à peu près inexistantes.

En présence d'une surface ou d'une discontinuité, l'approche classique consiste à ajouter des champs de rayons supplémentaires. La distinction faite entre les différents apports est différente de celle communément faite pour les méthodes "exactes" entre le champ incident et le champ diffracté. D'abord, les rayons réfléchis et transmis permettent de prendre en compte des surfaces régulières. Ils sont relativement faciles à conjecturer. Ensuite, les rayons diffractés qui sont liés à différentes formes de discontinuités ont des principes de construction plus complexes. Leur obtention dépend plus fortement encore de la forme des surfaces et des champs déjà calculés.

L'objectif, ici, n'est pas de développer une nouvelle méthode pour calculer les différents champs supplémentaires, mais de s'inspirer des approches existantes pour prendre en compte de façon systématique la présence d'un écoulement. Pour ce faire, les bases de la diffraction sont évoquées dans la première partie. Ensuite, le traitement des conditions aux limites sur les surfaces solides permet non seulement de calculer les caractéristiques des champs réfléchis et transmis, mais aussi de mettre en place le cheminement général. Enfin, grâce à cette approche, quelques expressions de champs diffractés sont adaptées à la présence d'un écoulement.

D.1 De l'optique géométrique à la "GTD"

Pour affiner la description des solutions de l'équation de Helmholtz à partir de l'optique géométrique, la "Théorie Géométrique de la Diffraction" est communément utilisée. Elle s'avère être un outil puissant notamment pour combler les vides laissés par l'optique géométrique. Son utilisation lorsqu'un champ moyen est présent n'étant presque pas développée, il est nécessaire d'en comprendre les principes fondamentaux pour imaginer les modalités d'une telle application. Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'elle demeure, même sans champ moyen, le sujet de nombreux travaux.

Comme pour les rayons de l'optique géométrique, la création de nouveaux rayons peut être abordée soit de manière physique ou empirique, soit de manière analytique ou formelle. Dans la suite, les deux aspects sont décrits et mêlés pour convaincre le lecteur de la pertinence de l'analyse, même si ses bases ne sont pas formellement justifiées de manière classique.

A partir des différentes approches plutôt intuitives décrites dans la première partie, la deuxième partie reprend la description à base de développements asymptotiques et remet en cause l'Ansatz utilisé jusqu'à présent avant de donner des pistes pour en construire de nouveaux.

D.1.1 Des approches plus ou moins empiriques

En utilisant une description à base de rayons, les développements suivants montrent la diversité des approches conduisant à légitimer l'utilisation de champs diffractés. Elle esquisse une méthode empirique générale pour construire les nouveaux rayons dans n'importe quelle configuration.

Champ incident et champ diffracté

La distinction entre le rayonnement des planètes et celui des étoiles n'empêche pas une certaine forme d'analogie entre surfaces réfléchissantes éclairées et sources. Formellement, les méthodes de résolution de l'équation de Helmholtz séparent souvent le champ total reçu en un point entre une contribution incidente directement issue de la source et une contribution diffractée provenant des surfaces réfléchissantes. En fait, l'étude de l'intégrale de rayonnement d'une surface indique que chaque point de cette surface se comporte comme la combinaison d'un monopôle et d'un dipôle.

Si le calcul d'un champ vérifiant l'équation de Helmholtz est fait par méthode intégrale, le rayonnement des potentiels à la surface doit correspondre en chaque point de la surface à la contribution du champ incident. L'analyse de l'opérateur à inverser dans le cas parfaitement réfléchissant montre que le potentiel peut alors être décomposé en plusieurs contributions. La "diagonale" de l'opérateur crée une contribution directement liée à la ré-émission du champ incident. Les contributions suivantes sont dues aux interactions entre les points de la surface. Les contributions "extra diagonales" sont d'autant plus faibles que les points sont éloignés et la fréquence élevée. En éclairant les surfaces alternativement par la source et par l'observateur, les parties où les deux champs incidents se chevauchent, correspondent, à cause du principe de réciprocité, aux zones contribuant au premier ordre à l'éclairage non direct de l'observateur.

Pour les hautes fréquences, la séparation entre les différentes contributions de l'intégrale de rayonnement devient suffisamment marquée pour que la contribution de premier ordre puisse être seule considérée. Ainsi, les potentiels à la surface se concentrent dans les parties éclairées et leur rayonnement devient de plus en plus directionnel. Le couplage entre source et récepteur se fait donc, pour les hautes fréquences, essentiellement par l'intermédiaire des points en vision directe des deux. L'énergie semble se propager en ligne droite de la source au point éclairé de la surface, puis de ce point au récepteur. En conclusion, les phénomènes sont très localisés et les contributions de premier ordre suffisent pour prédire les phénomènes.

Principe de Fermat généralisé

Dans les volumes dépourvus de surfaces diffractantes, la contruction des rayons suivant le principe de Fermat assure le transport de l'énergie. Ils réalisent alors le plus "court" chemin entre la source et l'observateur. L'analyse du rayonnement d'une surface éclairée montre que le principe de Fermat peut être généralisé pour prendre en compte les surfaces diffractantes.

En imposant au chemin optique entre la source et le récepteur de passer par un point de la surface, de nouveaux rayons réalisant des trajectoires de moindre coût peuvent être construits. Le point de la surface utilisé doit se trouver dans la partie éclairée. Grâce à cette approche les rayons classiques sont retrouvés : non seulement, les rayons réfléchis et transmis, mais aussi les rayons diffractés. Ces derniers sont issus soit des coins éclairés, soit des frontières séparant les parties éclairées des parties dans l'ombre. Ainsi, pour une sphère, l'analyse précédente permet, si l'observateur et la source sont de part et d'autre, d'imaginer la trajectoire d'un rayon comme un fil tendu entre deux points et qui serait dévié par la géométrie. L'ensemble des points de contact possibles forme la frontière ombre-lumière. Pour deux positions séparées par un mur, le passage du rayon par dessus traduit la diffraction par une arête.

La formalisation du principe de Fermat généralisé et une analyse rapide liée à la stationnarité du chemin optique ont permis d'énoncer les propriétés élémentaires des champs diffractés. Une telle analyse est décrite en détails dans [¹³] et conduit au lancer de différents types de rayons. Certains aux points de contact du champ incident se propagent en suivant des géodésiques de la surface. D'autres, pour les arêtes éclairées, se répartissent sur le cône de Keller. D'autres encore rayonnent à partir des pointes de façon isotrope. Ces propriétés sont illustrées par les deux figures (D.1) et (D.2).





FIG. D.1: *Principe de Fermat généralisé : en vert, des rayons possibles ; en bleu et rouge, les rayons vérifiant le principe de Fermat*

FIG. D.2: Diffraction sur le cône de Keller : en vert, le cône de Keller ; en bleu, le rayon incident ; en rouge, les rayons diffractés

Théorie Géométrique de la Diffraction (GTD)

Pour pallier les manques de l'optique géométrique simple incluant les champs réfléchis et réfractés, Keller a mis au point une théorie basée sur des règles simples. Elle suppose qu'une bonne approximation du champ diffracté par un objet peut être obtenue en sommant des champs de rayons. Depuis les régions de l'espace où les lois de l'optique géométrique sont mises en défaut, comme par exemple au voisinage des discontinuités ou des caustiques, cette méthode lance de nouveaux champs de rayons. Ceux-ci sont créés à partir d'études locales plus précises dans les régions "sources" et se propagent ailleurs de la même façon que les champs de l'optique géométrique.

Les lois conduisant à la création des rayons diffractés peuvent s'énoncer ainsi :

- les rayons diffractés sont issus des rayons formant les frontières ombre-lumière,
- pour les rayons rencontrant des discontinuités, les rayons diffractés forment une congruence contenant une infinité de rayons se focalisant sur la discontinuité et, pour les rayons tangents à un objet, les rayons diffractés poursuivent les rayons incidents par des rayons se propageant à la surface de l'objet,
- les champs liés aux rayons diffractés sont proportionnels à l'amplitude des rayons incidents et, tout en vérifiant les lois de l'optique géométrique, font intervenir un coefficient de diffraction,
- les coefficients de diffraction dépendent de la configuration locale du problème et ainsi des formes de la surface et de l'onde incidente.

Les rayons ainsi construits semblent émis par une source dont la directivité et l'amplitude seraient définies par les coefficients de diffraction.

Une étude originale dans la zone d'ombre

L'analyse classique inspirée par l'observation des phénomènes physiques consiste à considérer que les surfaces solides stoppent localement la propagation des ondes. Ainsi, en un point de la surface, elle considère qu'un champ incident est prolongé du même côté par un champ réfléchi et de l'autre par un champ transmis. Or, lorsque, au premier ordre, les effets diffractifs sont négligés, cette approche prédit des zones d'ombre totale qui ne sont physiquement pas pertinentes. La GTD, en introduisant des champs diffractés par les frontières ombre-lumière, permet en partie de corriger cette faiblesse. La formalisation mathématique permet une autre analyse.

Si les problèmes sont supposés linéaires, considérer que la surface diffractante vient perturber une propagation libre est équivalent à considérer directement une propagation perturbée. Ainsi, la solution peut être construite soit en partant de la source et en poursuivant la propagation par une onde réfléchie à chaque fois que l'onde rencontre une surface, soit à partir d'une solution de propagation totalement calculée sans surface en "soustrayant" des contributions liées à la présence des surfaces diffractantes. Pour les méthodes de résolution "exactes", il n'y a effectivement pas de différence entre les solutions obtenues par construction et celles obtenues par addition. Cette nouvelle approche permet alors des simplications de calcul. Mais, les approximations supplémentaires, et en particulier celle développée pour les hautes fréquences dans cette étude, ne conservent pas toujours cette propriété.

Un champ de rayons calculé par perturbation consiste en la somme d'un champ incident baignant l'espace sans tenir compte des surfaces et de champs réémis à partir des surfaces se propageant de part et d'autre comme cela est montré par la figure (D.3). Cette approche présente deux avantages. D'une part, dans les zones d'ombre, la somme des champs incidents et réfléchis ne prédit plus de solution nulle. D'autre part, le nombre de frontières ombre-lumière est réduit puisque les champs ne sont pas artificiellement discontinus. Cependant, plusieurs bémols doivent être avancés. D'abord, l'éloignement du concept par rapport à la physique des phénomènes brouille l'interprétation des solutions. Ensuite, l'équivalence n'est possible qu'avec les problèmes linéaires. Enfin, pratiquement, les champs de rayons présentent davantage de caustiques puisqu'apparaissent toutes celles qui étaient cachées dans les objets solides. Algorithmiquement, les problèmes sont aussi plus difficiles à résoudre. Le principal avantage de cette approche est d'aborder les problèmes de diffraction de manière originale, suscitant ainsi des analyses plus complètes.



FIG. D.3: Onde plane en interaction avec une sphère : en bleu, les rayons incidents ; en rouge, les rayons réfléchis ; en vert, les rayons transmis ; en trait plein, les rayons "réels" ; en trait pointillé, les rayons "virtuels"

D.1.2 Méthodes asymptotiques

La GTD est construite sur deux postulats importants : un comportement particulier au "voisinage" des discontinuités et un comportement classique "loin" de celles-ci. La traduction de la GTD dans l'analyse asymptotique des solutions doit donc faire apparaître ces deux aspects. Le deuxième peut être relativement facilement décrit, dès l'instant que les phénomènes sont modélisés par des sources présentant les propriétés de l'optique géométrique. C'est donc la mise en évidence de sources localisées qui fait l'objet de la suite de l'étude.

Retour sur la notion d'Ansatz

Comme l'optique géométrique ne suffit pas à décrire les phénomènes locaux gommant les discontinuités, il faut revoir les hypothèses qui ont été faites. Parmi celles-ci, il est évident que l'Ansatz simple utilisé jusqu'ici ne peut prendre en compte les interactions. Il faut donc en essayer d'autres qui gardent les mêmes propriétés simples.

Plusieurs solutions existent pour imaginer un nouvel Ansatz. L'utilisation de la même phase pour toutes les quantités peut être remise en cause. Cependant, physiquement, ce découplage total ne semble pas pertinent. Par ailleurs, un tel Ansatz conduirait à un grand nombre d'inconnues pour lesquelles il faudrait trouver des relations les définissant.

Comme les surfaces et les arêtes éclairées se comportent comme des sources, l'addition de plusieurs termes ayant la même forme paraît être physiquement justifiée. Cependant, plusieurs remarques doivent être faites. D'abord, l'utilisation d'un Ansatz sous forme de somme ne peut être traitée globalement. Il faut construire la somme au fur et à mesure que les discontinuités sont rencontrées. Ainsi, ce n'est qu'à partir de la surface diffractante qu'un nouveau champ peut être construit. Ensuite, les interactions entre les champs n'existent pas pour les équations linéarisées. Dans le cas non linéaire, leur prise en compte exige une analyse beaucoup plus compliquée. Enfin, si les champs ajoutés reposent uniquement sur l'Ansatz élémentaire de l'optique géométrique, peu de nouveaux phénomènes pourront être décrits. Cette forme d'Ansatz ne suffit donc pas et il faut en imaginer de nouvelles.

Méthodes d'analyses

Plusieurs grilles d'analyse peuvent être utilisées pour trouver de nouveaux Ansatz et plusieurs méthodes peuvent être employées pour calculer leurs paramètres. [¹²], [¹³] et [⁵²] présentent à eux trois une liste à peu près exhaustive des méthodes existantes. Pour inspirer les développements suivants quelquesunes sont citées ici.

Compte tenu de l'approche utilisée jusqu'ici, la méthode de la **couche limite** est sans doute la méthode la plus satisfaisante. Elle consiste à considérer les problèmes au voisinage des discontinuités. Après avoir défini un repère local et analysé le comportement des équations lorsque le champ incident est introduit, elle définit le nouvel Ansatz grâce à la nécessaire élimination des termes du développement asymptotique. Cette méthode est classiquement appliquée au traitement des frontières ombre-lumière présentes sur les surfaces diffractantes. Elle confirme l'utilisation des rayons rampants pour décrire les phénomènes.

La forme particulière de l'équation de Helmholtz permet l'utilisation de techniques liées à des **développements d'intégrales**. Pour certains problèmes canoniques, des solutions analytiques sont connues. Ces solutions sont décrites généralement à l'aide d'intégrales dans le plan complexe. Pour les hautes fréquences, certains points particuliers du plan complexe pour lesquels la fonction intégrée présente des singularités deviennent les principaux contributeurs. Différentes méthodes de développement asymptotique d'intégrales telles que la phase stationnaire et la descente rapide permettent alors d'écrire les champs totaux comme des sommes de champs dus à des contributions différentes. Les termes ainsi exhibés pour des géométries simples peuvent être réutilisés en première approximation pour des problèmes avec des géométries plus générales. Les deux articles [⁴⁴] et [⁴³] comparent les résultats obtenus par les développements asymptotiques et la théorie géométrique de la diffraction. Par ailleurs, la **théorie spectrale de la diffraction** utilise les développements d'intégrales à partir de la représentation sur un spectre d'onde plane des champs.



FIG. D.4: Onde plane en interaction avec une surface quelconque : en bleu, les rayons incidents ; en rouge, les rayons réfléchis, diffractés et rampants après interaction ; en vert, les zones d'éclairage tangent, de pénombre et au voisinage de l'arête où l'optique géométrique n'est pas valable

Les Ansatz construits dans les différentes zones de l'espace, mises en évidence sur la figure (D.4) pour une forme quelconque, sont placés bout à bout pour former une solution cohérente. Les paramètres sont ajustés pour que les champs soient continus aux interfaces. Cependant, la juxtaposition de zones utilisant des Ansatz différents n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, non seulement, elle ne permet pas une description globale du problème, mais en plus, les différentes parties de l'Ansatz ne convergent pas de la même façon en fonction de la fréquence. Plusieurs travaux ont été menés pour pallier ces défauts et plusieurs méthodes comme la "**Théorie Uniforme Asymptotique**" ou la "**Théorie Uniforme de la Diffraction**" existent mais leur mise en œuvre demeure difficile.

Les différentes méthodes utilisées pour l'équation de Helmholtz peuvent être appliquées à des équations plus complètes telles que les équations d'Euler linéarisées. Pour la méthode de la couche limite, l'ajustement est relativement simple. Le changement d'équations décrivant la physique est transparent dans le processus d'obtention des nouvelles équations. Pour les méthodes utilisant les développements d'intégrales, l'absence de noyau de Green analytique rend *a priori* impossible leur utilisation. Cependant, en considérant que les problèmes sont peu éloignés des problèmes décrits par l'équation de Helmholtz, un traitement proche des traitements classiques peut être envisagé.

* * *

La présentation succincte faite dans la partie précédente essaie de donner un aperçu global de ce qui conduit à imaginer la GTD à partir de l'optique géométrique en espace infini. L'ensemble des approches référencées nécessiterait sans doute de plus amples précisions. Mais cela dépasserait le cadre de la présente étude et le lecteur est invité à consulter les ouvrages cités pour la compléter. La diversité des points de vue permet de se faire une idée des outils à disposition pour aborder la problématique spécifique à l'aéroacoustique.

En ce qui concerne la présente étude, seule est importante l'idée que les caractéristiques des champs diffractés sont uniquement dépendantes de la géométrie locale de l'interaction onde-surface. Cette modélisation n'est certes pas la plus complète possible mais elle a l'avantage de fournir des champs calculables de la même façon que les champs incidents. Dans la suite, les concepts généraux de la GTD sont supposés s'appliquer même en présence d'écoulement et seules les modifications propres à la non uniformité du champ moyen sont considérées.

D.2 Réflexion et réfraction sur les dioptres "solides"

La prise en compte de surfaces diffractantes pour le calcul des champs acoustiques nécessite la vérification de conditions aux limites sur celles-ci. La modélisation de la surface non poreuse couple la pression et la composante de la vitesse normale à la surface. Classiquement, le rapport entre ces deux variables, appelé impédance, dépend uniquement des propriétés de la surface. Pour plus de détails sur cette modélisation, le lecteur peut consulter [⁵⁸] ou [¹³].

Pour les méthodes de rayons, la prise en compte de surface diffractante se traduit empiriquement par des rayons réfléchis et transmis. Les lois de Snell-Descartes donnent alors les angles d'émission pour les vecteurs d'ondes de ces rayons. Comme pour les équations dans le volume, l'idée est, ici, de retrouver ces deux types de rayons et les lois correspondantes à partir du développement asymptotique à hautes fréquences et du formalisme de rayons. Pour cela, le développement des solutions au voisinage d'une surface permet de relier les différentes quantités.

Dans la suite, la première partie réalise la traduction des conditions aux limites pour les problèmes hautes fréquences. Les conditions sur l'amplitude et sur la phase et ses dérivées en sont déduites dans les deuxième et troisième parties. Enfin, les quantités caractérisant les fronts d'ondes sont obtenues dans la quatrième partie.

D.2.1 Conditions "physiques"

Comme en méthode d'éléments finis de frontière, les champs réfléchis et transmis doivent être solutions de nouveaux problèmes dont les conditions aux limites tiennent compte de la contribution du champ incident. Ces nouveaux champs peuvent être traités comme le champ incident et, après propagation, serviront de champs incidents pour de nouveaux problèmes. Ainsi, il est intuitif de construire un rayon réfléchi et un rayon réfracté pour chacun des rayons incidents rencontrant un dioptre.

Les conditions aux limites sur un dioptre pour une perturbation peuvent s'écrire, en utilisant, par exemple, la géométrie (D.5) :

- pour la **condition cinématique**, en s'inspirant de [⁵³],

$$v_n^{\pm} = (-\mathbf{i}\omega + \overline{v^{\pm}} \cdot \nabla)(g/|\nabla\alpha|)^{\pm} - (g/|\nabla\alpha|)^{\pm} n^{\pm} \cdot (n^{\pm} \cdot \nabla \overline{v^{\pm}})$$
(D.1)

avec n^{\pm} la normale sortante dans le fluide, v_n la composante de la vitesse vibratoire suivant la normale au dioptre, \overline{v} la vitesse moyenne du fluide et $g/|\nabla \alpha|$ le déplacement du dioptre,

- et pour la condition mécanique

$$\left\{ \begin{array}{c} p^+ \\ p^- \end{array} \right\} = (\mathbf{i}\omega) \left[\begin{array}{c} Z^{++} & Z^{+-} \\ Z^{-+} & Z^{--} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} (g/|\nabla\alpha|)^+ \\ (g/|\nabla\alpha|)^- \end{array} \right\}$$
(D.2)

avec les indices + et - désignant les quantités de part et d'autre du dioptre.

La condition mécanique est une condition générale qui peut s'appliquer à une interface entre deux fluides, à la surface d'un solide en supposant que la transmission est nulle ou à une plaque mince. Le comportement de cette dernière aurait été modélisé par quatre impédances bien que les phénomènes au sein d'un solide soit plus complexes.

Une fois combinées et adimensionnées, elles conduisent à :

$$(\mathbf{i}/\epsilon)\delta^2 v_n^{\pm} = (-\delta(\mathbf{i}/\epsilon + \mathbf{n}^{\pm} \cdot (\mathbf{n}^{\pm} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}^{\pm}})) + \overline{\mathbf{v}^{\pm}} \cdot \nabla \delta)(Z^{\mp\mp}p^{\pm} - Z^{\pm\mp}p^{\mp}) \dots$$

$$+ \delta \overline{\mathbf{v}^{\pm}} \cdot (\nabla Z^{\mp\mp}p^{\pm} - \nabla Z^{\pm\mp}p^{\mp} + Z^{\mp\mp}\nabla p^{\pm} - Z^{\pm\mp}\nabla p^{\mp})$$
 (D.3)



 \pm

FIG. D.5: Aspect géométrique pour les conditions aux limites : le côté + en haut, le côté - en bas; en bleu, la différence de position avec la position médiane et en rouge, la normale à la position médiane

avec $\delta = Z^{++}Z^{--} - Z^{+-}Z^{-+}$.

Ainsi, en fonction des différents champs, formellement, il s'établit :

$$(\mathbf{i}/\epsilon)\delta^{2}\left\{\begin{array}{c}(\boldsymbol{v}^{i}+\boldsymbol{v}^{r})\cdot\boldsymbol{n}^{+}\\\boldsymbol{v}^{t}\cdot\boldsymbol{n}^{-}\end{array}\right\} = \left(\left[\begin{array}{c}\mathcal{A}^{++}&\mathcal{A}^{+-}\\\mathcal{A}^{-+}&\mathcal{A}^{--}\end{array}\right] + \delta\left[\begin{array}{c}Z^{--}\boldsymbol{v}_{+}&-Z^{+-}\boldsymbol{v}_{+}\\-Z^{-+}\boldsymbol{v}_{-}&Z^{++}\boldsymbol{v}_{-}\end{array}\right]\cdot\nabla\right)\left\{\begin{array}{c}p^{i}+p^{r}\\p^{t}\end{array}\right\}$$
(D.4)

avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{++} = -(\mathbf{i}/\epsilon + \mathbf{n}^+ \cdot (\mathbf{n}^+ \cdot \nabla v_+))\delta Z^{--} + v_+ \cdot \nabla(\delta Z^{--}) \\ \mathcal{A}^{+-} = (\mathbf{i}/\epsilon + \mathbf{n}^+ \cdot (\mathbf{n}^+ \cdot \nabla v_+))\delta Z^{+-} - v_+ \cdot \nabla(\delta Z^{+-}) \\ \mathcal{A}^{-+} = (\mathbf{i}/\epsilon + \mathbf{n}^- \cdot (\mathbf{n}^- \cdot \nabla v_-))\delta Z^{-+} - v_- \cdot \nabla(\delta Z^{-+}) \\ \mathcal{A}^{--} = -(\mathbf{i}/\epsilon + \mathbf{n}^- \cdot (\mathbf{n}^- \cdot \nabla v_-))\delta Z^{++} + v_- \cdot \nabla(\delta Z^{++}) \end{cases}$$
(D.5)

D.2.2 Conditions sur l'amplitude de l'optique géométrique

En prenant de part et d'autre des normales opposées et en introduisant les solutions de l'optique géométrique, les deux équations de (D.4) deviennent :

$$\mathcal{B}^{i} \exp\left(\mathrm{i}\phi^{i}/\epsilon\right) + \mathcal{B}^{r} \exp\left(\mathrm{i}\phi^{r}/\epsilon\right) - \mathcal{B}^{t} \exp\left(\mathrm{i}\phi^{t}/\epsilon\right) = 0 \tag{D.6}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{i} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta}{\epsilon} \left(\frac{\delta}{\rho_{+}c_{+}}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{i} + Z^{--}c_{+} |\nabla\phi^{i}|\right) + \delta Z^{--}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla\boldsymbol{v}_{+}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla(\delta Z^{--})\right) \pi^{i} - \delta Z^{--}\boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla\pi^{i} \\ \mathcal{B}^{r} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta}{\epsilon} \left(\frac{\delta}{\rho_{+}c_{+}}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{r} + Z^{--}c_{+} |\nabla\phi^{r}|\right) + \delta Z^{--}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla\boldsymbol{v}_{+}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla(\delta Z^{--})\right) \pi^{r} - \delta Z^{--}\boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla\pi^{r} \\ \mathcal{B}^{t} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta Z^{+-}}{\epsilon} (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla\phi^{t}) - \delta Z^{+-}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla\boldsymbol{v}_{+}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla(\delta Z^{+-})\right) \pi^{t} - \delta Z^{+-}\boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla\pi^{t} \\ (D.7)$$

et

$$-\mathcal{C}^{i}\exp\left(\mathrm{i}\phi^{i}/\epsilon\right) - \mathcal{C}^{r}\exp\left(\mathrm{i}\phi^{r}/\epsilon\right) + \mathcal{C}^{t}\exp\left(\mathrm{i}\phi^{t}/\epsilon\right) = 0 \tag{D.8}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{C}^{i} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta Z^{-+}}{\epsilon}(1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{i}) - \delta Z^{-+}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_{-}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla (\delta Z^{-+})\right) \pi^{i} - \delta Z^{-+}\boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \pi^{i} \\ \mathcal{C}^{r} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta Z^{-+}}{\epsilon}(1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{r}) - \delta Z^{-+}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_{-}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla (\delta Z^{-+})\right) \pi^{r} - \delta Z^{-+}\boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \pi^{r} \\ \mathcal{C}^{t} = \left(\frac{\mathrm{i}\delta}{\epsilon}(\frac{-\delta}{\rho_{-}c_{-}}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{t} + Z^{++}c_{-}|\nabla \phi^{t}|) + \delta Z^{++}\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_{-}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla (\delta Z^{++})\right) \pi^{t} - \delta Z^{++}\boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \pi^{t} \\ (D.9)$$

Dans les expressions précédentes n est la normale sortante dans +. Chaque équation lie les champs incidents, réfléchis et transmis pour un des cotés du dioptre et, ainsi, les vitesses des champs moyens pris en compte ne sont pas les mêmes.

Remarquons que cette condition est valable en chaque point de la surface où elle est régulière sans condition sur la forme de celle-ci.

A ce stade, il faut identifier les quantités du même ordre de grandeur. Pour se raccorder aux solutions en espace libre, les ordres de grandeur des quantités liées aux champs sont connues. L'impédance, quant à elle, est supposée avoir des variations lentes. Les équations au premier ordre deviennent donc :

$$- \begin{cases} \delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} + (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla \phi^{i}) \zeta^{--} \\ (1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{i}) \zeta^{-+} \end{cases} \end{cases} \pi_{0}^{i} = \dots \\ \begin{bmatrix} \delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} + (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla \phi^{r}) \zeta^{--} & (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla \phi^{t}) \zeta^{+-} \\ (1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{r}) \zeta^{-+} & -\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} + (1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{t}) \zeta^{++} \end{bmatrix} \begin{cases} \pi_{0}^{r} \\ \pi_{0}^{t} \end{cases} \end{cases}$$
(D.10)

avec $\zeta^{ij}\overline{\rho}_j c_j = \overline{\overline{Z}}^{ij}$ en fonction du côté du dioptre considéré et $\delta' = \zeta^{++}\zeta^{--} - \zeta^{+-}\zeta^{-+}$. Il ne reste alors plus qu'à inverser le système. Le déterminant est

$$\Delta = (\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} + (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla \phi^{\boldsymbol{r}}) \zeta^{--}) (-\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} + (1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{\boldsymbol{t}}) \zeta^{++}) - (1 - \boldsymbol{v}_{+} \cdot \nabla \phi^{\boldsymbol{t}}) \zeta^{+-} (1 - \boldsymbol{v}_{-} \cdot \nabla \phi^{\boldsymbol{r}}) \zeta^{-+}$$
(D.11)

et les solutions sont

$$\pi_0^r/\pi_0^i = \frac{1}{\Delta} \left((1 - \boldsymbol{v}_- \cdot \nabla \phi^i) \zeta^{-+} (1 - \boldsymbol{v}_+ \cdot \nabla \phi^t) \zeta^{+-} \dots - (\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^i + (1 - \boldsymbol{v}_+ \cdot \nabla \phi^i) \zeta^{--}) (-\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^t + (1 - \boldsymbol{v}_- \cdot \nabla \phi^t) \zeta^{++}) \right)$$
(D.12)

et

$$\pi_0^t/\pi_0^i = \frac{\zeta^{-+}}{\Delta} ((1 - \boldsymbol{v}_- \cdot \nabla \phi^r) (\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^i + (1 - \boldsymbol{v}_+ \cdot \nabla \phi^i) \zeta^{--}) \dots - (\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^r + (1 - \boldsymbol{v}_+ \cdot \nabla \phi^r) \zeta^{--}) (1 - \boldsymbol{v}_- \cdot \nabla \phi^i))$$
(D.13)

Si les vitesses sont nulles, les équations dégénèrent en

$$\Delta = (\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} + \zeta^{--})(-\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} + \zeta^{++}) - \zeta^{-+} \zeta^{+-}$$
(D.14)

$$\pi_0^r / \pi_0^i = -\frac{(\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^i + \zeta^{--})(-\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^t + \zeta^{++}) - \zeta^{-+} \zeta^{+-}}{(\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^r + \zeta^{--})(-\delta' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^t + \zeta^{++}) - \zeta^{-+} \zeta^{+-}}$$
(D.15)

$$\pi_0^t / \pi_0^i = \frac{\delta' \zeta^{-+}}{\Delta} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\nu}^i - \boldsymbol{\nu}^r)$$
(D.16)

De plus, s'il n'y a pas de couplage mécanique entre les deux parois, $\pi_0^t = 0$ et $\pi_0^r/\pi_0^i = -(1 + \zeta^{++} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^i)/(1 + \zeta^{++} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}^r)$ ce qui correspond à la relation classique de réflexion. Enfin, $\pi_0^r = \pi_0^i$ si la face + est rigide et $\pi_0^r = -\pi_0^i$ si elle est molle.

D.2.3 Conditions sur la phase et ses dérivées

Les équations (D.6) et (D.8) ne peuvent être vérifiées que si les phases sont égales sur le dioptre. Si la surface S est représentée par g(x) = 0, avec $dx = dx_{\perp}n + dx_{\parallel}$ un déplacement sur la surface, les quantités doivent vérifier

$$2|\nabla g|dx_{\perp} + d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot \nabla \nabla g d\boldsymbol{x}_{\parallel} + 2dx_{\perp}\boldsymbol{n} \cdot \nabla \nabla g d\boldsymbol{x}_{\parallel} + dx_{\perp}^{2}\boldsymbol{n} \cdot \nabla \nabla g \boldsymbol{n} + o(dx_{\perp}^{2} + d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{x}_{\parallel}) = 0$$
(D.17)

et, en première approximation, si dx est suffisamment petit, l'équation précédente donne :

$$dx_{\perp} = \frac{-d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot \nabla \nabla g d\boldsymbol{x}_{\parallel}}{2|\nabla g|} + o(d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{x}_{\parallel})$$
(D.18)

Pour un déplacement dans l'espace, en décomposant entre un déplacement suivant la normale et un déplacement suivant la surface, les variations sont données par

$$d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{x}' + d\boldsymbol{x}''\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{x}_{\parallel} + (d\boldsymbol{x}'' - \frac{d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot \nabla \nabla g d\boldsymbol{x}_{\parallel}}{2|\nabla g|} + o(d\boldsymbol{x}_{\parallel} \cdot d\boldsymbol{x}_{\parallel}))\boldsymbol{n}$$
(D.19)

avec

$$dx'' = dx \cdot n + \frac{dx_{\parallel} \cdot \nabla \nabla g dx_{\parallel}}{2|\nabla g|}$$
(D.20)

soit, en décrivant l'ensemble des quantités à l'aide de dx,

$$dx_{\parallel} = dx - (dx \cdot n)n$$
 et $dx'' = (dx \cdot n) + dx \overline{\overline{Q}} \frac{\nabla \nabla g}{2|\nabla g|} \overline{\overline{Q}} dx$ avec $\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{I}} - n \otimes n$ (D.21)

Or le développement de la phase après interaction donne

$$\begin{cases} \phi_{-}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}) &= \phi_{-}(\boldsymbol{x}) + \nabla \phi_{-} \cdot \boldsymbol{dx} + (1/2) \boldsymbol{dx} \nabla \nabla \phi_{-} \boldsymbol{dx} + o(\boldsymbol{dx}^{2}) \\ &= \phi_{i}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}') + d\boldsymbol{x}'' \nabla \phi_{-}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}') \cdot \boldsymbol{n} + (d\boldsymbol{x}''^{2}/2) \boldsymbol{n} \nabla \nabla \phi_{-}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}') \boldsymbol{n} + o(\boldsymbol{dx}^{2}) \\ &= \phi_{i}(\boldsymbol{x}) + \nabla \phi_{i} \cdot \boldsymbol{dx}' + d\boldsymbol{x}'' \nabla \phi_{-} \cdot \boldsymbol{n} + (1/2) (\boldsymbol{dx}' \nabla \nabla \phi_{i} \boldsymbol{dx}') \\ &\dots + d\boldsymbol{x}'' \boldsymbol{dx}' \nabla \nabla \phi_{-} \boldsymbol{n} + (d\boldsymbol{x}''^{2}/2) \boldsymbol{n} \nabla \nabla \phi_{-} \boldsymbol{n} + o(\boldsymbol{dx}^{2}) \end{cases}$$
(D.22)

donc, en comparant les deux premiers étages du développement, il faut vérifier, avec $\phi_{-}(x) = \phi_{i}(x)$,

$$\overline{\overline{Q}}\nabla\phi_{-} = \overline{\overline{Q}}\nabla\phi_{i} \text{ et } \overline{\overline{Q}}\nabla\nabla\phi_{-}\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{Q}}\left(\nabla\nabla\phi_{i} - ((\nabla\phi_{i} - \nabla\phi_{-})\cdot\boldsymbol{n})\frac{\nabla\nabla g}{|\nabla g|}\right)\overline{\overline{Q}}$$
(D.23)

Pour fermer ces équations, il faut tenir compte des conditions liées à l'équation iconale

$$\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \phi_{-} + c |\nabla \phi_{-}| = 1 \text{ et } \nabla \overline{\boldsymbol{u}} \nabla \phi_{-} + |\nabla \phi_{-}| \nabla c + \nabla \nabla \phi_{-}(\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}_{-}) = 0$$
(D.24)

D.2.4 Fronts d'ondes réfléchis et transmis

A partir des relations de (D.23), pour retrouver les quantités caractérisant les fronts d'onde illustrées sur (D.6), il faut utiliser l'équation iconale. Pour les vecteurs d'ondes, comme la composante dans la plan tangent à la surface est connue, il ne manque que la composante normale qui peut être déduite à partir d'une seule équation scalaire. Pour les hessiennes, le problème est plus compliqué et il faut décomposer un déplacement infinitésimal judicieusement pour identifier les différentes composantes des matrices.

Vecteurs d'ondes

Au premier ordre, les composantes tangentielles des vecteurs d'ondes sont donc égales :

$$\nabla \phi^{i}(\boldsymbol{x}) - (\nabla \phi^{i}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \nabla \phi^{r}(\boldsymbol{x}) - (\nabla \phi^{r}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \nabla \phi^{t}(\boldsymbol{x}) - (\nabla \phi^{t}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$
(D.25)

soit :

$$|\nabla\phi^{r}| = |\nabla\phi^{i}| \frac{1 + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})}{1 + (\boldsymbol{\nu}^{r} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})} \text{ et } |\nabla\phi^{t}| = |\nabla\phi^{i}| \frac{\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})}{1 + (\boldsymbol{\nu}^{t} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})}$$
(D.26)



FIG. D.6: Géométrie au voisinage du point d'interaction pour une onde quelconque sur une surface quelconque : en bleu, le rayon incident ; en vert, le rayon transmis ; en rouge, le rayon réfléchi

avec $\beta = \alpha + \nu^i \cdot (\alpha \overline{M^+} - \overline{M^-})$ et $\alpha = c^+/c^-$.

Comme ν^r, ν^t et ν^i sont unitaires, à partir de (D.26), il se dégage :

$$\Upsilon^{t} = \frac{1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2}}{(\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}} = \frac{1 - (\boldsymbol{\nu}^{t} \cdot \boldsymbol{n})^{2}}{(1 + (\boldsymbol{\nu}^{t} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}}$$
(D.27)

et, pour l'onde réfléchie :

$$\Upsilon^{r} = \frac{1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2}}{(1 + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}} = \frac{1 - (\boldsymbol{\nu}^{r} \cdot \boldsymbol{n})^{2}}{(1 + (\boldsymbol{\nu}^{r} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}}$$
(D.28)

soit

$$(\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})^2 (1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^+} \cdot \boldsymbol{n}))^2 - (\underline{\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}}} \cdot \boldsymbol{n})^2 (1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^+} \cdot \boldsymbol{n}))^2 = \dots$$

$$(1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^+} \cdot \boldsymbol{n}))^2 - (1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^+} \cdot \boldsymbol{n}))^2$$
(D.29)

et

$$(\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})^{2} (1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} - (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{n})^{2} (\beta + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} = \dots$$

$$(\beta + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} - (1 + (\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}$$

$$(D.30)$$

qui donnent

$$((\boldsymbol{\nu}^{i}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\nu}^{r}\cdot\boldsymbol{n})+2(\overline{\boldsymbol{M}^{+}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\nu}^{i}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\nu}^{r}\cdot\boldsymbol{n}))+(\overline{\boldsymbol{M}^{+}}\cdot\boldsymbol{n})(2+(\overline{\boldsymbol{M}^{+}}\cdot\boldsymbol{n})((\boldsymbol{\nu}^{i}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\nu}^{r}\cdot\boldsymbol{n})))=0 \quad (D.31)$$

et

$$((1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2} + (\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2})(\boldsymbol{\nu}^{t} \cdot \boldsymbol{n})^{2} \dots + 2(1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\nu}^{t} \cdot \boldsymbol{n}) + (1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2}) - (\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} = 0$$
(D.32)

Tous calculs faits, le vecteur d'onde réfléchi vérifie

$$\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{(\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n})(1 + (\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}) + 2(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})}{2(\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{n}) + 1 + (\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}}$$
(D.33)

et, le vecteur transmis, avec $\nu_i \cdot n < 0$,

$$\nu^{t} \cdot \boldsymbol{n} = \dots \\ \frac{|\beta + (\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})(\nu^{i} \cdot \boldsymbol{n})|\sqrt{(\beta + (\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})(\nu^{i} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} + (1 - (\nu^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})((\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2} - 1)} - (1 - (\nu^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})(\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})}{(\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2} + \beta^{2} + 2\beta(\overline{M^{-}} \cdot \boldsymbol{n})(\nu^{i} \cdot \boldsymbol{n})}$$
(D.34)

Si $\overline{M^{\pm}} \cdot n = 0$, la réflexion spéculaire et la réfraction habituelle sont retrouvées. De plus, l'angle limite pour lequel il y a réfraction est tel que $\nu^t \cdot n = 0$ soit

$$(\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2}((\beta + (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n}))^{2} - (1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})(1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2})) = (1 - (\boldsymbol{\nu}^{i} \cdot \boldsymbol{n})^{2})^{2}(\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}$$
(D.35)

Par ailleurs, si $|\overline{M^{\pm}}| < 1$, $|\nabla \phi^r| \neq 0$ dès que $|\nabla \phi^i| \neq 0$ mais pour $|\nabla \phi^t|$, cela dépend de $\beta + (\nu^i \cdot n)(\overline{M^-} \cdot n)$.

Finalement,

$$\nabla \phi^{r} = |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} - 2 \frac{(\boldsymbol{\nu}^{i} + \overline{\boldsymbol{M}^{+}}) \cdot \boldsymbol{n}}{1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{+}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}} \boldsymbol{n} \right) = |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} - 2c^{+} \frac{\partial_{s} \boldsymbol{x}^{i} \cdot \boldsymbol{n}}{c^{+2} - (\boldsymbol{u}^{+} \cdot \boldsymbol{n})^{2}} \boldsymbol{n} \right)$$
(D.36)

et

$$\nabla \phi^{t} = |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} - \frac{\sqrt{((\boldsymbol{\nu}^{i} + \beta \overline{\boldsymbol{M}^{-}}) \cdot \boldsymbol{n})^{2} + (\beta^{2} - 1)(1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2})}}{1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}} \boldsymbol{n} \right)$$

$$= |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} - \frac{\beta^{2} - 1}{\sqrt{d^{-2} + (\beta^{2} - 1)(1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2})} - d^{-}} \boldsymbol{n} \right)$$
(D.37)

avec $d^- = (\nu^i + \beta \overline{M^-}) \cdot n$. Remarquons, de plus, que ces expressions ne dépendent pas de l'orientation de n puisque dans la deuxième, si $\nu_i \cdot n > 0$, l'expression devient :

$$\nabla \phi^{t} = |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} + \frac{\sqrt{((\boldsymbol{\nu}^{i} + \beta \overline{\boldsymbol{M}^{-}}) \cdot \boldsymbol{n})^{2} + (\beta^{2} - 1)(1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2})}{1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2}} \boldsymbol{n} \right)$$

$$= |\nabla \phi^{i}| \left(\boldsymbol{\nu}^{i} + \frac{\beta^{2} - 1}{\sqrt{d^{-2} + (\beta^{2} - 1)(1 - (\overline{\boldsymbol{M}^{-}} \cdot \boldsymbol{n})^{2})} + d^{-}} \boldsymbol{n} \right)$$
(D.38)

Enfin, le contact est bien lié au rayon puisque c'est $\partial_s x^i$ qui intervient dans le champ réfléchi.

Et pour les quantités d'ordre 2?

La matrice des quantités d'ordre 2 contient 9 coefficients mais elle est symétrique donc il n'y a plus que 6 inconnues. Or, la condition liée à l'équation iconale donne 3 équations, de même que la condition de réflexion. Soit dx un déplacement, il peut être décomposé suivant

$$dx = \overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{I}} - \frac{(\overline{u} + c\nu) \otimes n}{(\overline{u} + c\nu) \cdot n})dx + \frac{(\overline{u} + c\nu) \otimes n}{(\overline{u} + c\nu) \cdot n})dx = (\overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) + \overline{\overline{P}})dx$$
(D.39)

donc

$$dx \nabla \nabla \phi_{-} dx = dx \left((\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}})^{t} (\overline{\overline{Q}} \nabla \nabla \phi_{-} \overline{\overline{Q}}) (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) \dots + (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}})^{t} \overline{\overline{Q}} (\nabla \nabla \phi_{-} \overline{\overline{P}}) + (\overline{\overline{P}}^{t} \nabla \nabla \phi_{-}) \overline{\overline{Q}} (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) + \overline{\overline{P}}^{t} (\nabla \nabla \phi_{-} \overline{\overline{P}}) \right) dx$$
(D.40)

et $\overline{\overline{Q}}\nabla\nabla\phi_{-}\overline{\overline{Q}}$ et $\nabla\nabla\phi_{-}\overline{\overline{P}}$ sont données par les relations (D.23) et (D.24), ce qui implique

$$\nabla \nabla \phi_{-} = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}})^{t} (\nabla \nabla \phi_{i} + ((\nabla \phi_{-} - \nabla \phi_{i}) \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\nabla \nabla g}{|\nabla g|}) (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) - \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{B}}^{t} \dots + \frac{(\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}) \cdot (\nabla \overline{\boldsymbol{u}} \nabla \phi_{-} + |\nabla \phi_{-}| \nabla c)}{(\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{n}} (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})$$
(D.41)

avec $\overline{\overline{B}} = (1/(\overline{u} + c\nu) \cdot n)((\nabla \overline{u} \nabla \phi_{-} + |\nabla \phi_{-}| \nabla c) \otimes n).$

En atmosphère homogène et calme, l'expression précédente dégénère en

$$\nabla \nabla \phi_{-} = (\overline{\overline{I}} - \frac{\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\nu}_{-}}{\boldsymbol{\nu}_{-} \cdot \boldsymbol{n}}) (\nabla \nabla \phi_{i} + ((\nabla \phi_{-} - \nabla \phi_{i}) \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\nabla \nabla g}{|\nabla g|}) (\overline{\overline{I}} - \frac{\boldsymbol{\nu}_{-} \otimes \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{\nu}_{-} \cdot \boldsymbol{n}})$$
(D.42)

L'analyse précédente nécessite la prise en compte de certains critères. En premier lieu, pour pouvoir effectuer les développements jusqu'à et à partir de la surface, les champs incidents et ré-émis doivent vérifier les hypothèses liées aux champs de rayons. Ensuite, la surface doit être suffisamment régulière pour que les termes d'ordre supérieur à 2 puissent être négligés. Enfin, il faut que la combinaison des développements de la phase et de la surface n'introduise pas de termes parasites ce qui oblige à vérifier que toutes les quantités calculées respectent bien l'ordonnancement asymptotique : $dx_{\parallel}^0 = O(|dx|)$, $\delta s^0 = O(|dx|)$, $dx_{\perp} = O(|dx|^2)$, $dx_{\parallel}^1 = O(|dx|^2)$, $\delta s^1 = O(|dx|^2)$ et que les termes négligés sont bien en $O(|dx|^3)$. Autrement dit, il faut extraire des critères sur les formes des fronts d'onde et de la surface pour définir la validité de ces expressions. Ces critères doivent être pris en compte dans l'estimation globale de l'erreur.

Deux aspects importants doivent être mis en avant. D'abord, les caractéristiques des champs transmis et réfléchis sont données en partie par les conditions sur la surface et en partie par la vérification de l'équation iconale. Pour les rayons diffractés, l'équation iconale est toujours vérifiée mais les conditions à la surface ne permettent pas de définir entièrement les champs. Comme cela est évoqué dans la suite, les degrés de liberté non contraints induisent la nécessaire introduction de congruences de rayons. Ensuite, il est difficile de définir un champ moyen à la surface des objets. En effet, une modélisation basée sur les équations d'Euler prédit l'existence d'une vitesse de glissement, mais l'introduction de la viscosité induit une vitesse nulle à la paroi. Cette remarque est encore plus justifiée pour les dérivées des champs ou pour les phénomènes diffractifs.

Grâce au calcul, à partir des quantités liées au champ incident, de l'amplitude, du vecteur d'onde et de la hessienne du front d'onde pour le champ réfléchi, un champ de rayons peut être construit à partir de la surface. Concrètement, les impacts des rayons incidents sur la surface servent de points de départ pour une nouvelle propagation.

D.3 Diffraction

Pour combler les discontinuités des champs de l'optique géométrique, les solutions de l'équation de Helmholtz ont été étudiées et des champs diffractés ont été identifiés. Plusieurs méthodes permettent, à partir de l'Ansatz de l'optique géométrique, de déduire les caractéristiques des champs de rayons diffractés.

Une façon d'aborder le problème de la diffraction consiste à utiliser des problèmes génériques. Ici, les expressions des champs diffractés données par [¹²] et[⁵⁸] servent à construire des solutions en atmosphère hétérogène et en mouvement. Pour ce faire, les caractéristiques essentielles d'un champ diffracté sont mises en évidence et traduites pour les nouveaux problèmes.

L'étude des champs diffractés pour l'équation de Helmholtz dans deux cas particuliers sur des surfaces parfaitement réfléchissantes est réalisée dans la première partie. Puis, les caractéristiques pour une onde générale diffractée dans le cas hétérogène en mouvement sont déduites dans la deuxième partie. Enfin, quelques éléments sont donnés dans la dernière partie pour étudier d'autres champs diffractés.

D.3.1 Deux diffractions d'ondes simples

Pour bien comprendre ce qui caractérise une onde diffractée, deux cas particuliers sont étudiés. La diffraction d'une onde plane par un demi-plan parfaitement réfléchissant en deux dimensions est le plus simple. Pour ce cas, la solution sous forme de rayons est très peu éloignée de la solution analytique.

A partir du champ du premier exemple, le champ diffracté par une onde cylindrique sur une arête droite parfaitement réfléchissante est aussi un problème essentiellement en deux dimensions. Par rapport au problème précédent, celui-ci fait intervenir en plus, même si elle est transverse à la droite diffractante, la courbure de l'onde incidente et remplace le plan par un coin. Ces changements permettent d'aboutir à une description complète de l'onde diffractée.

Onde plane et demi-plan parfaitement réfléchissant

La solution d'optique géométrique intégrant la condition aux limites sur un demi-plan s'écrit avec les développements du (D.2) :

$$u_{GO} = u_i \exp\left(i\phi_i\right) + u_r \exp\left(i\phi_r\right) \tag{D.43}$$

En adoptant un paramétrage lié au plan, comme sur la figure (D.7), utilisant les angles ψ_0 et ψ pour définir respectivement les directions d'éclairage et de réception et r la distance entre le bord du plan et le point de réception, cette solution s'écrit

$$u_{GO} = u_0(\chi(\pi + \psi_0 - \psi) \exp\left[-ikr\cos\left(\psi - \psi_0\right)\right] \pm \chi(\pi - \psi_0 - \psi) \exp\left[-ikr\cos\left(\psi + \psi_0\right)\right])$$
(D.44)

avec $\chi|_{x>0} = 1$ et $\chi|_{x<0} = 0$. Le signe séparant les deux termes dépend de la condition limite sur le plan. En suivant le raisonnement de [¹²], la solution exacte de ce problème peut se ré-écrire

 $u = u_0(\exp\left[-ikr\cos\left(\psi - \psi_0\right)\right]F(\sqrt{2kr}\cos\left((\psi - \psi_0)/2\right))\dots + \exp\left[-ikr\cos\left(\psi + \psi_0\right)\right]F(\sqrt{2kr}\cos\left((\psi + \psi_0)/2\right)))$ (D.45)

avec $F(x) = (-i/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\xi} \exp{(is^2)} ds$, F étant une intégrale de Fresnel.

Ainsi, en cherchant une analogie entre la solution d'optique géométrique et la solution exacte et en développant les intégrales, le champ peut être approché par

$$u = u_0 \left(\chi(\pi + \psi_0 - \psi) \exp\left[-ikr\cos\left(\psi - \psi_0\right)\right] \pm \chi(\pi - \psi_0 - \psi) \exp\left[-ikr\cos\left(\psi + \psi_0\right)\right] \dots \\ \dots - \frac{\exp\left(i(kr + \pi/4)\right)}{\sqrt{2kr}} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{2\pi} \left(\frac{-i}{2kr}\right)^n \left[\frac{1}{\cos^{2n+1}((\psi - \psi_0)/2)} \mp \frac{1}{\cos^{2n+1}((\psi + \psi_0)/2)}\right] \right)$$
(D.46)

 $\begin{array}{l} \operatorname{car} F(x) \simeq \chi(x) - \mathrm{i} \frac{\exp\left(\mathrm{i} x^{2}\right)}{2\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(\mathrm{i} x^{2})^{n+1/2}}. \\ \text{Le champ diffracté au premier ordre est donc} \end{array}$

$$u_d = Du_0 \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} \text{ avec } D = \frac{-\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos\left((\psi - \psi_0)/2\right)} \mp \frac{1}{\cos\left((\psi + \psi_0)/2\right)} \right]$$
(D.47)

et, comme l'onde incidente est plane, D peut être considéré comme un coefficient de diffraction.

En fait, en remarquant que $\sqrt{2kr}\cos\left((\psi-\psi_0)/2\right) = \sqrt{\phi_e-\phi_i}$ et $\sqrt{2kr}\cos\left((\psi+\psi_0)/2\right) = \sqrt{\phi_e-\phi_r}$ et en prenant les racines positives dans la région éclairée et les racines négatives dans la zone d'ombre, tous les champs précédents peuvent s'écrire en fonction des phases incidente, réfléchie et diffractée. Cette remarque motive une interprétation en terme de champs de pénombre et oriente la recherche de champs uniformes pour des diffractions plus générales.

Onde cylindrique et arête droite parfaitement réfléchissante

L'application de la méthode utilisant l'intégrale de convolution de Sommerfeld pour un contour particulier dans la plan complexe permet d'obtenir un champ diffracté de la forme

$$u = u_{GO} + u_e \simeq u_{GO} + \exp\left(ikr\right) \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{i}{kr}\right)^{n+1/2} D_n V(\psi, \psi_0) \tag{D.48}$$

avec r, ψ et ψ_0 les coordonnées définies au (D.3.1),

$$V(\psi,\psi_0) = (1/\sqrt{2\pi})[H_{\pm}(-\pi+\psi,\psi_0,\beta) - H_{\pm}(\pi+\psi,\psi_0,\beta)]$$
(D.49)

et

$$H_{\pm}(p,q,\beta) = (\pi/2\beta) [\cot((\pi/2\beta)(p-q)) \pm \cot((\pi/2\beta)(p+q))]$$
(D.50)

où β est l'angle compris entre les deux faces du dièdre et les D_n sont les opérateurs différentiels permettant de déduire récursivement les coefficients des développements asymptotiques vérifiant l'équation de Helmholtz. Dans les expressions, les signes dépendent de la condition imposée sur la surface : une condition de Dirichlet imposant une pression totale nulle sur la surface conduit à une expression utilisant le signe - et une condition de Neumann imposant un gradient de pression nul à une expression utilisant le signe +.

Ainsi, au premier ordre, le champ diffracté est

$$u_d = Du_0 \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} \text{ avec } D = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{k}}V$$
(D.51)

et

$$V = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n) - \cos((\psi - \psi_0)/n)} \mp \frac{\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n) - \cos((\psi + \psi_0)/n)} \right)$$
(D.52)

avec $n = \beta/\pi$.

Il apparaît qu'aucune courbure n'intervient au premier ordre et que le coefficient de diffraction correspond au cas de référence du dièdre droit "tangent" éclairé par une onde plane. Par ailleurs, l'obtention d'un développement uniforme nécessite de construire un champ réfléchi virtuel correspondant au prolongement de la face au delà du coin et de remplacer les fonctions caractéristiques de l'optique géométrique par les intégrales de Fresnel.





FIG. D.7: Géométrie dans le cas de la diffraction d'une onde plane par une arête 2D : en bleu, le rayon incident ; en rouge, le rayon diffracté ; en vert, le rayon réfléchi

FIG. D.8: Géométrie dans le cas de la diffraction d'une onde quelconque par une arête 3D quelconque : en bleu, le rayon incident ; en rouge les rayons diffractés

Grâce aux exemples précédents, deux caractéristiques ont été identifiées : d'une part, les rôles respectifs de la ligne diffractante et du champ incident sur l'onde diffractée et d'autre part, l'expression du coefficient de diffraction en fonction de la fréquence et de l'angle du coin.

D.3.2 Diffraction d'une onde quelconque par un dièdre quelconque parfaitement réfléchissant

En trois dimensions, comme sur la figure (D.8), par analogie avec le cas en deux dimensions, l'approximation au premier ordre du champ diffracté peut être décrite comme un champ de rayons. Le postulat de la GTD indique que l'arête éclairée se comporte comme une source linéique directionnelle et que, pour chaque rayon incident, les rayons du champ diffracté se répartissent sur un cône de Keller. Ainsi, d'une part, l'arête correspond à une caustique du front d'onde diffracté et, d'autre part, la composante transverse de ce front d'onde correspond à la réflexion du front d'onde incident. L'amplitude peut donc s'écrire

$$u_d = Du_0 \frac{\exp\left(\mathrm{i}\phi_d\right)}{\sqrt{J}} \text{ avec } D = \frac{\exp\left(\mathrm{i}\pi/4\right)}{\sqrt{k}} V \tag{D.53}$$

avec V correspondant à la diffraction en deux dimensions, ϕ_d la phase et J le jacobien le long des rayons diffractés.

Obtention des conditions

En adoptant la même démarche que dans le cas des réflexions et transmissions, soit x appartenant à l'arête et dx un déplacement quelconque, les développements limités vont indiquer, en séparant les contributions le long de l'arête de celle dans le volume, les valeurs des dérivées d'ordre 1 et 2 de la phase. Dans un premier temps, la condition d'appartenance à l'arête se traduit par

$$d\boldsymbol{x} \cdot \nabla f + \frac{1}{2} d\boldsymbol{x}^{t} \nabla \nabla f d\boldsymbol{x} + o(|\boldsymbol{dx}|^{2}) = 0 \text{ et } \boldsymbol{dx} \cdot \nabla g + \frac{1}{2} d\boldsymbol{x}^{t} \nabla \nabla g d\boldsymbol{x} + o(|\boldsymbol{dx}|^{2}) = 0$$
(D.54)

si f et g sont les fonctions qui définissent implicitement les surfaces. En décomposant $dx = dx_{\parallel}\tau + dx_{\perp}$ avec τ le vecteur normal aux normales des deux surfaces, la composante perpendiculaire doit vérifier en première approximation

$$\begin{cases} \nabla f \cdot d\boldsymbol{x}_{\perp} = -(1/2)dx_{\parallel}^{2}\boldsymbol{\tau}^{t}\nabla\nabla f\boldsymbol{\tau} \\ \nabla g \cdot d\boldsymbol{x}_{\perp} = -(1/2)dx_{\parallel}^{2}\boldsymbol{\tau}^{t}\nabla\nabla g\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{x}_{\perp} = 0 \end{cases}$$
(D.55)

soit

$$d\boldsymbol{x}_{\perp} = \frac{-dx_{\parallel}^2}{2\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla f \wedge \nabla g)} ((\boldsymbol{\tau}^t \nabla \nabla f \boldsymbol{\tau}) \nabla g - (\boldsymbol{\tau}^t \nabla \nabla g \boldsymbol{\tau}) \nabla f) \wedge \boldsymbol{\tau} = -\frac{dx_{\parallel}^2}{2} \boldsymbol{b}$$
(D.56)

Ainsi un déplacement quelconque peut être décomposé en

$$dx = \overline{\overline{Q}}dx - (1/2)(dx\overline{\overline{Q}}dx)b + dx'' = dx' + dx'' \text{ avec } \overline{\overline{Q}} = \tau \otimes \tau$$
(D.57)

Dans un deuxième temps, le développement de la phase donne

$$\nabla \phi_d (\boldsymbol{dx} - \boldsymbol{dx''}) + (1/2) \boldsymbol{dx} \nabla \nabla \phi_d \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{dx'} \nabla \nabla \phi_d \boldsymbol{dx''} + (1/2) \boldsymbol{dx''} \nabla \nabla \phi_d \boldsymbol{dx''} \dots$$

$$\simeq \nabla \phi_i \boldsymbol{dx'} + (1/2) \boldsymbol{dx'} \nabla \nabla \phi_i \boldsymbol{dx'}$$
(D.58)

soit, en séparant les niveaux du développement, les quantités doivent vérifiées

$$\nabla \phi_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{\tau} \text{ et } \boldsymbol{\tau} \nabla \nabla \phi_d \boldsymbol{\tau} - (\nabla \phi_d \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\tau} \nabla \nabla \phi_i \boldsymbol{\tau} - (\nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{b})$$
(D.59)

et

$$\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \phi_d + c |\nabla \phi_d| = 1 \text{ et } \nabla \overline{\boldsymbol{u}} \nabla \phi_d + |\nabla \phi_d| \nabla c + \nabla \nabla \phi_d (\overline{\boldsymbol{u}} + c \boldsymbol{\nu_d}) = 0$$
(D.60)

Il apparaît clairement que les deux jeux de conditions ne fournissent pas assez d'équations pour définir de façon unique $\nabla \phi_d$.

Déduction des caractéristiques

Au premier ordre, en posant $\nu_d = \alpha \tau + \beta Y$ avec $Y \cdot \tau = 0$ et $Y^2 = 1$, α et β vérifient

$$\alpha^{2} + \beta^{2} = 1 \text{ et } (\alpha \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\tau} + \beta \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y} + c)(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi_{i}) = \alpha$$
(D.61)

soit

$$\alpha = \frac{1}{(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2 + \gamma^2} (\gamma c \pm |\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y}| \sqrt{(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2 + \gamma^2 - c^2})$$
(D.62)

et

$$\beta = \frac{1}{(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2 + \gamma^2} (-c(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y}) \pm |\gamma| \sqrt{(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2 + \gamma^2 - c^2})$$
(D.63)

avec $\gamma = (1/(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi_i)) - \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}.$

$$\text{Or, } \nabla \phi_d = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi_i)(\boldsymbol{\tau} + (\beta/\alpha) \boldsymbol{Y}) \text{, donc, en prenant } (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi_i)\beta > 0 \text{ quand } \overline{\boldsymbol{u}} = 0,$$

$$\nabla \phi_d = \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \phi_i \right) \dots \\ \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{(\gamma \sqrt{\gamma^2 - c^2 + (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2} - sign(\gamma)c(\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y}))(\gamma c - |\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y}| \sqrt{\gamma^2 - c^2 + (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2})}{(\gamma^2 + (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2)(c^2 - (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{Y})^2)} \boldsymbol{Y} \right)$$
(D.64)

En atmosphère homogène et calme, cette expression dégénère en

$$\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{\tau} + \sqrt{1 - (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{i}})^2}\boldsymbol{Y}$$
(D.65)

qui est la relation intuitive connue.

Au deuxième ordre, comme l'arête est une caustique, la matrice est singulière : les variations suivant $\tau \wedge Y$ sont infinies. Cette hypothèse peut se traduire par $(\tau \wedge Y)\nabla\nabla\phi_d(\tau \wedge Y) = |\nabla\phi_d|/R$ et $\tau\nabla\nabla\phi_d(\tau \wedge Y) = 0$ avec $R \simeq 0$. Il faut alors décomposer le déplacement en

$$d\boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{\overline{u}} + c\boldsymbol{\nu_d}) + ((d\boldsymbol{x} - \alpha(\boldsymbol{\overline{u}} + c\boldsymbol{\nu_d})) \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} + ((d\boldsymbol{x} - \alpha(\boldsymbol{\overline{u}} + c\boldsymbol{\nu_d})) \cdot (\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}) \quad (D.66)$$

avec $\alpha = \frac{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{Y}}{(\overline{\mathbf{u}} + c\mathbf{\nu}_d) \cdot \mathbf{Y}}$ donc $\nabla \nabla \phi_d$ se décompose en 9 termes

$$\frac{\nabla \nabla \phi_d^1}{|\nabla \phi_d|} = \frac{-\boldsymbol{\theta} \cdot (\nabla \overline{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\nu_d} + \nabla c)}{|(\overline{\boldsymbol{u}} + c \boldsymbol{\nu_d})| (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})^2} \boldsymbol{Y} \otimes \boldsymbol{Y}$$
(D.67)

$$\frac{\nabla \nabla \phi_d^2}{|\nabla \phi_d|} = \frac{-(\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \overline{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\nu}_d + \nabla c))}{|(\overline{\boldsymbol{u}} + c \boldsymbol{\nu}_d)|(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})^2} (\boldsymbol{Y} \otimes ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y}) \boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{Y})) = (\nabla \nabla \phi_d^3)^t$$
(D.68)

$$\frac{\nabla \nabla \phi_d^4}{|\nabla \phi_d|} = \frac{-((\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}) \cdot (\nabla \boldsymbol{\overline{u}} \boldsymbol{\nu_d} + \nabla c))}{|(\boldsymbol{\overline{u}} + c \boldsymbol{\nu_d})|(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})^2} (\boldsymbol{Y} \otimes ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}) - (\boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}))\boldsymbol{Y})) = (\nabla \nabla \phi_d^5)^t$$
(D.69)

$$\frac{\nabla \nabla \phi_d^6}{|\nabla \phi_d|} = \frac{\tau \nabla \nabla \phi_i \tau + (\nabla \phi_d - \nabla \phi_i) \cdot \boldsymbol{b}}{|\nabla \phi_d| (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})^2} ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y}) \tau - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{Y}) \otimes ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y}) \tau - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{Y})$$
(D.70)

$$\frac{\nabla \nabla \phi_d^7}{|\nabla \phi_d|} = \frac{1}{R(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})^2} ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}) - (\boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}))\boldsymbol{Y}) \otimes ((\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}) - (\boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}))\boldsymbol{Y})$$
(D.71)

$$\nabla \nabla \phi_d^8 = \nabla \nabla \phi_d^9 = 0 \tag{D.72}$$

avec $\boldsymbol{\theta} = (\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}_d)/|\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}_d|$ la direction de propagation de l'énergie.

En atmosphère homogène et calme, les expressions précédentes dégénèrent en

$$\nabla \nabla \phi_d^1 = \nabla \nabla \phi_d^2 = \nabla \nabla \phi_d^3 = \nabla \nabla \phi_d^4 = \nabla \nabla \phi_d^5 = \nabla \nabla \phi_d^8 = \nabla \nabla \phi_d^9 = 0$$
(D.73)

et les rayons de courbure principaux sont

$$\rho_1 = \frac{c\tau \nabla \nabla \phi_i \tau + (\boldsymbol{\nu}_d - \boldsymbol{\nu}_i) \cdot \boldsymbol{b}}{\sqrt{1 - (\boldsymbol{\nu}_i \cdot \tau)^2}} \text{ et } \rho_2 = 1/R$$
(D.74)

pour, respectivement, les directions de courbure

$$\boldsymbol{v_1} = (\sqrt{1 - (\boldsymbol{\nu_i} \cdot \boldsymbol{\tau})^2})\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\nu_i} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{Y} \text{ et } \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{Y}$$
(D.75)

ce qui correspond aux expressions communément utilisées.

En combinant, l'amplitude donnée par (D.53) et les caractéristiques de l'onde données par (D.64) et les équations (D.67 - D.72), le champ est entièrement défini.

D.3.3 Un peu de théorie sur les champs au voisinage des dièdres

De manière générale, le champ diffracté par un dièdre en présence d'une source ponctuelle harmonique peut s'écrire

$$u(k, \boldsymbol{x}) = \frac{S}{2i\pi} \int_{C_l} \mathcal{G}(\zeta) \Sigma_h d\zeta \text{ et } \Sigma_h = \sum_{n,m=1}^2 \frac{\nu}{2} \cot\left(\frac{\nu}{2} [\zeta + (-1)^n \phi + (-1)^m \phi_s]\right)$$
(D.76)

avec

$$\mathcal{G}(\zeta) = \frac{\exp\left(ik\mathcal{R}(\zeta)\right)}{\mathcal{R}(\zeta)} \text{ et } \mathcal{R}(\zeta) = (r^2 + r_s^2 - 2rr_s\cos\zeta + z^2)^{1/2} \tag{D.77}$$

où r, ϕ et z sont les coordonnées cylindriques suivant l'axe du dièdre ayant comme origine, pour les ordonnées, la position de la source sur l'axe et, pour les angles, la face du dièdre de sorte que l'angle correspondant à l'autre face soit positif. De plus, r_s , ϕ_s et $z_s = 0$ sont les coordonnées de la source. C_l est un contour d'intégration correctement choisi dans \mathbb{C} et ν est l'indice du dièdre, c'est-à-dire $\nu = \pi/\beta$ avec β l'angle du dièdre du côté de la source.

Le champ lié à l'analogie avec sources équivalentes s'écrit

$$u_{G}(k, \boldsymbol{x}) = S \sum_{l} \Im(2\beta l - \phi_{s} - \phi) + S \sum_{l}' \Im(2\beta l' + \phi_{s} - \phi)$$
(D.78)

avec l et l' des entiers tels que les arguments $2\beta l - \phi_s - \phi$ et $2\beta l' + \phi_s - \phi$ soient compris entre $-\pi$ et π .

En séparant le champ du aux sources images du champ total, le champ diffracté peut s'écrire

$$u_D(k, \mathbf{x}) = S \frac{\sin \nu \pi}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\pi - is) [F_\nu(s, \phi + \phi_s) + F_\nu(s, \phi - \phi_s)] ds$$
(D.79)

avec

$$F_{\nu}(s,\phi) = \frac{(\cos\nu\pi - \cos\nu\phi) - (\cosh\nu s - 1)\cos\nu\phi}{(\cosh\nu s - 1)^2 + 2(\cosh\nu s - 1)(1 - \cos\nu\phi\cos\nu\pi) + (\cos\nu\pi - \cos\nu\phi)^2}$$
(D.80)

* * *

A partir de la méthode utilisée sur les formes de diffraction précédentes, une majorité des ruptures de normales à la surface peuvent être traitées. Cependant, les diffractions multiples et, plus généralement, les diffractions de second ordre sont plus difficiles à obtenir. La complexité de l'algorithme à mettre en place pour traiter la GTD et la non pertinence des résultats qu'elle donne dans certaines zones réduisent son utilisation. Elle demeure quand même dans la majorité des cas, un moyen simple d'augmenter la précision des solutions.

Des interactions avec la surface plus complexes telles que la propagation de rayons rampants pourraient être traitées en s'inspirant aussi de méthodes développées pour l'équation d'Helmholtz. En particulier, en revenant aux équations d'Euler linéarisées et en effectuant des changements de variable et de repère liés à la surface, de nouveaux développements asymptotiques permettent d'obtenir des équations iconales et des équations de conservation similaires à celles obtenues dans [⁴⁷]. La prise en compte d'un écoulement moyen complique fortement la résolution mais, dans certain cas, des solutions à base de fonction d'Airy peuvent être exhibées. La résolution des nouvelles équations iconales à l'aide de rayons rampants se fait de la même façon que pour les rayons se propageant dans le volume si ce n'est que deux variables suffisent à décrire le comportement puisqu'ils restent nécessairement sur la surface. La construction des nouveaux rayons permet d'éclairer, par exemple, les zones d'ombres créées par le masquage du au fuselage.

Les champs créés étant d'autant plus faibles que la fréquence est élevée, à partir d'une certaine fréquence, ils n'ont un effet percevable que dans les zones où leur contribution est la seule présente. En électromagnétisme, compte tenu des types de problèmes, même les champs faibles peuvent jouer un rôle non négligeable. Il est d'ailleurs parfois intéressant d'augmenter de façon artificielle les phénomènes diffractifs pour ne pas offrir d'image précise de la forme de l'objet. En aéroacoustique, l'effet recherché est d'une certaine façon inverse. Les sources de bruit étant données à proximité de l'avion, c'est le masquage maximal qui est recherché et les phénomènes diffractifs le réduisent dans les zones d'ombre. Toute autre considération n'étant pas prise en compte, l'augmentation de la fréquence a donc un effet bénéfique sur l'exposition.



La prise en compte de l'écoulement dans les phénomènes d'interaction entre les ondes et les surfaces ne semble pas poser de problèmes particuliers. Dès l'instant que les conditions sur la surface sont correctement modélisées, le déroulement de la méthode ne présente pas de difficultés. Ainsi, les champs réfléchis, transmis et diffractés par une arête ont pu être évalués. De plus, l'introduction d'une partie complexe sur la phase ne nécessite pas de travaux supplémentaires.

Pour la décomposition sur des faisceaux, la nécessaire adaptation de la base à la propagation après l'interaction, demande de recomposer le champ à la surface et de le décomposer ensuite sur une nouvelle base adaptée. L'utilisation d'une base unique adaptée à l'ensemble de la propagation nécessite de connaître le trajet de tous les rayons, à partir de la surface source jusqu'à la surface destination. Ce traitement devient rapidement lourd pour la majorité des configurations.

D'un point de vue général, l'étude de la diffraction fine n'est pas encore facteur d'innovation. La réduction de l'erreur qu'elle permettrait, ramené à l'effort supplémentaire qu'elle nécessiterait, est trop faible par rapport à la mise en place des autres concepts évoqués dans cette étude. Les phénomènes décrits ici apportent suffisamment de précision pour traiter les géométries actuelles.

Annexe E

Relations diverses entre système de coordonnées et opérateurs de différentiation

Système de coordonnées proches d'une surface **E.1**

Si $\partial_s x$ est connu alors, comme $\nabla s \partial_s x = \overline{\overline{I}}$,

$$\nabla \boldsymbol{s} = (1/\det(\partial_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{x}))[\ \partial_{s_2}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_3}\boldsymbol{x} \quad \partial_{s_3}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_1}\boldsymbol{x} \quad \partial_{s_1}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_2}\boldsymbol{x}]$$
(E.1)

Ainsi,

$$\boldsymbol{y} \cdot \nabla = (1/\det(\partial_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{x}))((\boldsymbol{y} \cdot (\partial_{s_2}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_3}\boldsymbol{x}))\partial_{s_1} + (\boldsymbol{y} \cdot (\partial_{s_3}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_1}\boldsymbol{x}))\partial_{s_2} + (\boldsymbol{y} \cdot (\partial_{s_1}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_2}\boldsymbol{x}))\partial_{s_3}) \quad (E.2)$$

$$\nabla \boldsymbol{y} = (1/\det(\partial_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{x}))((\partial_{s_2}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_3}\boldsymbol{x}) \otimes \partial_{s_1}\boldsymbol{y} + (\partial_{s_3}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_1}\boldsymbol{x}) \otimes \partial_{s_2}\boldsymbol{y} + (\partial_{s_1}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_2}\boldsymbol{x}) \otimes \partial_{s_3}\boldsymbol{y}) \quad (E.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{y} = (1/\det(\partial_{s_2}\boldsymbol{x}))((\partial_{s_2}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_3}\boldsymbol{x}) \cdot \partial_{s_1}\boldsymbol{y} + (\partial_{s_3}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_1}\boldsymbol{x}) \cdot \partial_{s_2}\boldsymbol{y} + (\partial_{s_1}\boldsymbol{x} \wedge \partial_{s_2}\boldsymbol{x}) \cdot \partial_{s_3}\boldsymbol{y}) \quad (E.4)$$

Si, de plus, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(s_1, s_2) + s_3 \boldsymbol{n}(s_1, s_2)$ avec \boldsymbol{r} un point de la surface et \boldsymbol{n} la normale sortant en ce point alors $\partial_{s_1} x = \partial_{s_1} r + s_3 \partial_{s_1} n$, $\partial_{s_2} x = \partial_{s_2} r + s_3 \partial_{s_2} n$ et $\partial_{s_3} x = n$. Quelques relations immédiates peuvent être écrites :

- Ivent être ecrues : $-n = \frac{\partial_{s_1} r \wedge \partial_{s_2} r}{|\partial_{s_1} r \wedge \partial_{s_2} r|} \text{ par definition de } n$ $-n = \frac{\partial_{s_1} n \wedge \partial_{s_2} n}{|\partial_{s_1} n \wedge \partial_{s_2} n|} \text{ car } n \text{ est unitaire}$ $\text{ et donc } n = \frac{\partial_{s_1} x \wedge \partial_{s_2} x}{|\partial_{s_1} x \wedge \partial_{s_2} x|} \text{ car, avec les deux relations précédentes, les deux vecteurs dérivés de la}$

En posant, $h_1 \varepsilon_1 = \partial_{s_1} x$, $h_2 \varepsilon_2 = \partial_{s_2} x$ et γ l'angle entre les deux vecteurs dérivés de la position, on peut écrire :

$$\begin{cases} \cos \gamma = \varepsilon_{1} \cdot \varepsilon_{2} \\ n \wedge \varepsilon_{1} = (1/\sin \gamma)(\varepsilon_{1} \wedge \varepsilon_{2}) \wedge \varepsilon_{1} = (1/\sin \gamma)(\varepsilon_{2} - \cos \gamma \varepsilon_{1}) \\ \varepsilon_{2} \wedge n = (1/\sin \gamma)(\varepsilon_{1} - \cos \gamma \varepsilon_{2}) \end{cases}$$
(E.5)

Les équations s'écrivent alors

$$\nabla \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon}_2) & \frac{1}{h_2 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \boldsymbol{n} \end{bmatrix}$$
(E.6)

234

$$\boldsymbol{y} \cdot \nabla = \frac{1}{h_1 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon_1} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_2})) \partial_{s_1} + \frac{1}{h_2 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon_2} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_1})) \partial_{s_2} + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{n}) \partial_{s_3}$$
(E.7)

mais aussi

$$\nabla \boldsymbol{y} = \frac{1}{h_1 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon_1} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_2}) \otimes \partial_{s_1} \boldsymbol{y} + \frac{1}{h_2 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon_2} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_1}) \otimes \partial_{s_2} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n} \otimes \partial_{s_3} \boldsymbol{y}$$
(E.8)

et

$$\nabla \cdot \boldsymbol{y} = \frac{1}{h_1 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon_1} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_2}) \cdot \partial_{s_1} \boldsymbol{y} + \frac{1}{h_2 \sin^2 \gamma} (\boldsymbol{\varepsilon_2} - \cos \gamma \boldsymbol{\varepsilon_1}) \cdot \partial_{s_2} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{n} \cdot \partial_{s_3} \boldsymbol{y}$$
(E.9)

On peut écrire aussi, en utilisant les relations d'orthogonalité, pour $(i, j) \in \{1, 2\}^2$

$$\begin{array}{l} \partial_{s_i,s_j} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -\partial_{s_i} \boldsymbol{r} \cdot \partial_{s_j} \boldsymbol{n} & \partial_{s_3} \boldsymbol{r} = 0 \\ \partial_{s_i,s_j} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = -\partial_{s_i} \boldsymbol{x} \cdot \partial_{s_j} \boldsymbol{n} & \partial_{s_3}^2 \boldsymbol{x} = 0 \\ \partial_{s_i,s_j} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -\partial_{s_i} \boldsymbol{n} \cdot \partial_{s_j} \boldsymbol{n} & \partial_{s_3} \boldsymbol{n} = 0 \end{array}$$

$$(E.10)$$

et $\partial_{s_3} \boldsymbol{\varepsilon}_{i} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Enfin,

$$\partial_{s_j,s_i} \boldsymbol{x} = h_i \partial_{s_j} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} + (\partial_{s_j} h_i) \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} \cdot \partial_{s_j,s_i} \boldsymbol{x} = (\partial_{s_j} h_i) \mid \partial_{s_j,s_i} \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} \cdot \partial_{s_j,s_i} \boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} = h_i \partial_{s_j} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}} \quad (E.11)$$

E.2 Base paraxiale

Le changement de base paraxiale liée à un rayon consiste à décomposer les vecteurs de l'espace en trois composantes en fonction de la position le long du rayon. La première étant la composante le long du rayon, les deux autres sont des composantes le long de vecteurs tangents au front d'onde. Tous ces vecteurs sont propagés le long du rayon. Pour une coordonnée fixée sur le rayon, ce changement de base est "admissible" dès que les trois vecteurs unitaires forment un trièdre car alors tout vecteur peut être décomposé de façon unique sur la base locale.

Le choix de la nouvelle base se fait de façon à ne faire qu'un minimum d'opérations au cours de la propagation. La conservation intrinsèque d'un nombre maximum de relations est donc recherchée. Or, si pour une position sur le rayon, la base est formée du vecteur unitaire le long du rayon et de deux vecteurs orthogonaux entre eux et orthogonaux au front d'onde, les relations peuvent être écrites

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{u} + X}{|\overline{u} + X|}, \ \varepsilon_i \cdot \nu = 0, \ |\varepsilon_i| = 1 \text{ et } \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = 0$$
 (E.12)

Si, de plus, l'évolution des vecteurs transverses est définie par

$$\partial_s \boldsymbol{\varepsilon}_i = -(\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \partial_s \nabla \phi) \boldsymbol{\nu} \tag{E.13}$$

alors les relations suivantes sont effectivement vérifiées

$$\partial_s \boldsymbol{\varepsilon_i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_i} = 0, \ \partial_s (\boldsymbol{\varepsilon_i} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0 \text{ et } \partial_s (\boldsymbol{\varepsilon_2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_3}) = 0$$
 (E.14)

et les relations précédentes restent vérifiées tout au long de la propagation. Ainsi, seul le calcul d'un des deux vecteurs ε_2 ou ε_3 est nécessaire. Le deuxième vecteur et les vecteurs du changement de base inverse sont déduits par

$$\varepsilon_{j} = \frac{\nu \wedge \varepsilon_{i}}{|\nu \wedge \varepsilon_{i}|} \text{ et } \varepsilon^{i} = \frac{\varepsilon_{j} \wedge \varepsilon_{k}}{\varepsilon_{i} \cdot (\varepsilon_{j} \wedge \varepsilon_{k})}$$
(E.15)

Si des coordonnées locales sont définies à partir de la base de vecteurs de sorte que $\partial_{q_i} x = \varepsilon_i$, les variations de toute quantité peuvent être décrites dans ces coordonnées locales par $\partial_{q_i} F = \varepsilon_i \cdot \nabla F$. Un vecteur position quelconque s'écrit alors :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(s) + q_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2(s) + q_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3(s) \tag{E.16}$$

E.3 Relation entre éléments géodésiques et matrice hessienne de la phase

Compte tenu de l'équation iconale, comme pour le vecteur d'onde dont seul le vecteur unitaire a besoin d'être calculé, le calcul de la hessienne complète peut se faire grâce à la propagation de quelques quantités caractéristiques. Ainsi, la connaissance des éléments géodésiques tels que les rayons de courbure et le vecteur de courbure principal suffit à la reconstruire entièrement.

En décomposant un déplacement dx en

$$dx = dx' + dx'' = (\overline{\overline{I}} - \nu \otimes \nu)(\overline{\overline{I}} - \frac{(\overline{u} + c\nu) \otimes \nu}{\overline{u} \cdot \nu + c})dx + \frac{(\overline{u} + c\nu) \otimes \nu}{\overline{u} \cdot \nu + c}dx$$
(E.17)

la hessienne de la phase se décompose en

$$\nabla \nabla \phi = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}^t)\overline{\overline{Q}} \nabla \nabla \phi \overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) + (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}^t)\overline{\overline{Q}} \nabla \nabla \phi \overline{\overline{P}} + \overline{\overline{P}}^t \nabla \nabla \phi \overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) + \overline{\overline{P}}^t \nabla \nabla \phi \overline{\overline{P}}$$
(E.18)

avec

$$\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{I}} - \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \text{ et } \overline{\overline{P}} = \frac{(\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}) \otimes \boldsymbol{\nu}}{\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nu} + c} = (\overline{\boldsymbol{u}} + c\boldsymbol{\nu}) \otimes \nabla\phi$$
(E.19)

Or, $\nabla \nabla \phi = \nabla |\nabla \phi| \otimes \boldsymbol{\nu} + |\nabla \phi| \nabla \boldsymbol{\nu}$ et, donc,

$$\nabla |\nabla \phi| = \nabla \nabla \phi \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu} \nabla \nabla \phi)^t = (\nabla |\nabla \phi| \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + |\nabla \phi| \nabla \boldsymbol{\nu}^t \boldsymbol{\nu}$$
(E.20)

donc

$$\frac{\nabla\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}^t)(\nabla\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \otimes (\boldsymbol{\nu}\nabla\boldsymbol{\nu}))(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) - (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}^t)\overline{\overline{QB}} - \overline{\overline{B}}^t\overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) - \overline{\overline{P}}^t\overline{\overline{B}}$$
(E.21)

De plus, $\overline{\overline{B}} = -(\nabla \nabla \phi / |\nabla \phi|)\overline{\overline{P}} = (\nabla \overline{u} \nu + \nabla c) \otimes \nabla \phi$, donc

$$\frac{\nabla\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}^t)\overline{\overline{X}}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{P}}) - \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{B}}^t + ((\overline{u} + c\nu) \cdot (\nabla\overline{u}\nu + \nabla c))(\nabla\phi \otimes \nabla\phi)$$
(E.22)

Enfin, les valeurs propres non nulles et les vecteurs propres correspondant de $\overline{\overline{X}}$ sont les quantités géodésiques communément utilisées.

Annexe F

Propagation and discretization

F.1 Algorithm

Using rays to light an environment is a widely used method. In addition to the physical principles, the simplicity and the quickness of the formalism enable it to be used from video games to acoustics research by building virtual environments. But, behind these two terms, there are a lot of ways to achieve a ray tracing computation.

On one side, to perform image synthesis, algorithm using Monte-Carlo methods to solve global illumination problems as in $[^{46}]$ or using beam tracing as in $[^{37}]$ are now commonly used. On an other side, beam tracing methods are very useful to compute interactive architectural acoustics as in $[^{30}]$. And these are just two examples among many other ones. In computational electromagnetics, a part from physical and mathematical studies, many works deal with the software design problem of such methods. The fact that the main ideas developed in $[^{67}]$ are close to those developed here although the answers are totally different, lead one to imagine the diversity of the solutions.

This quick overview of our particular algorithm, first, explains the beam point of view in describing the beams and the parts of the algorithm. Then, propagation problems such as location in space, accurate intersection and beam optimization are studied in detail.

F.1.1 A beam like algorithm

Because of computational goals, geometric models or even historical considerations, there are many different software designs to achieve ray-tracing computations. In the software developed, the main idea is to group rays into beams. If only rays are propagated, incident fields are only known at some particular locations whereas if beams are used, fields are known everywhere on lighted surfaces.

The use of beams drives the construction of the whole algorithm. To well understand what this is all about, in the following sections, beams and their discretization are described as well as the main parts of the algorithm and their effective translation into a source code.

Beams

A beam is mainly a group of rays, but to behave like a real beam, that is to say, to light surfaces, rays must be linked together and the space between them must be described. Thus, a beam contains, of course, information at different points but also, information to construct fields around them.

At ray points, the computation of trajectories deals with positions and directions of propagation. These two quantities are appropriate to compute phase but to compute amplitude more information is needed. Theoretical developments have shown that there are different ways to do so. Otherwise, taking surfaces curvature into account raise geometrical accuracy in an important way, but it implies the use of wavefront curvature too. At least three vectors and two scalars must be known at rays points.

Beams are objects in three dimensions but according to their ray composition and description, they can be interpreted as sets of the positions of moving surfaces. Such a surface merges with wavefront when the phase is everywhere the same on it. A beam discretization involves the choice and the discretization of an initial surface. Along the propagation, only the local parameters such as positions, normals and curvatures change. The links assembling rays into beams remain the same. Moreover, as the reference to the wavefront points out, it can be efficient to use the wavefront normals and curvatures instead of the common normals and curvatures of surface.



Figure F.1: Elements and curved wavefront

Because of global software design constraints, surfaces are discretized with meshes. With a view to simplifying, beams are discretized in the same way. In fact, the only difference between material surfaces and beams is that normals and curvatures are not the classical ones in the case of the beams. For the meshes, the elements are the basic components. Positions, normals and curvatures are described thanks to topologies with a local numbering linked to the elements to which they belong. More-

over surfaces are estimated above elements thanks to *a priori* interpolation. Phase and amplitude are computed at mesh nodes but with the use of a fourth topology. Figure (F.1) shows the elements geometry.



The three parts of the algorithm

Figure F.2: Falcon lighted by a plane way: (left) falcon and beam meshes, (right) lighten beam without optimization

During the computation, some different parts can be identified corresponding to the creation, the launch and the interaction with material surfaces of the beams. The first one transforms source type into beam type. For example, a punctual source is described by a small sphere, a plane wave is described by a "big
enough" half sphere, etc. The surface discretization is driven by the relative size of the problem. Figure (F.2) shows how the half of a sphere represents a plane way and lights a Falcon.



Figure F.3: *Material surfaces, beams and rays: (left) surface mesh in black, beam meshes in red and rays in blue, (right) a beam element propagation*

The second one moves beams through space to lighted material surfaces. Figure (F.3) shows how beam elements are moved in space from material surface to material surface. If rays are straight, this step seems to be easy but this is not just about moving positions. During this step, beam meshes are optimized in order to have enough information on lighted surfaces. To do this, the first rays are launched and the rays reaching an *a priori* limit without bumping into a material surface are eliminated. Then, according to various criteria, more rays are interpo-

lated on the source surface and launched. These two steps are performed as many times as the total number of rays lying on material surfaces is lower than an *a priori* minimum.

The third step of the computation consists in collecting material surface information at the strike points and in constructing reflected, transmitted and diffracted beams. During the propagation, when a ray strikes a material surface, the element number and the local coordinates of the strike point are kept. Thus, it is easy to compute for all remaining rays, the following fields. This step has to filter beams too. Indeed, due to discretization, some rays reaching material surfaces lead to unphysical new rays and criteria of validity must be verified.

Because no one knows how many new beams will be created during the whole computation, a beam array is created. At the beginning, all the source beams are put into this array and, at each step, a beam is launched. After a beam launching, new created beams are placed in the queue. This works only if there are a few interactions or if one incident beam leads to one new beam, otherwise the number of beams increases dramatically. To be able to find the whole path of the rays even after reflection or diffraction, beams are linked to each other.

F.1.2 Some details about beam propagation

The propagation of the beams is an important difficult point of the algorithm. As a matter of fact, rays must travel from known surfaces to arbitrarily *a priori* unknown ones. This causes three major problems. Because there is no mesh in the space between surfaces, the first problem deals with the location of ray heads in space. As soon as rays might bump into a surface, the points of contact must be evaluated precisely and the second problem is to find the common point to a line and a surface. Knowing the first lighting points, the third problem consists in launching as few rays as possible to describe correctly the incident field.

Space location

Because computational positions are not determined *a priori* with a volume discretization, rays neighborhood must be described at each propagation step. To do it in an efficient way, an alternative structure arranging space must be found and fit the present particular numerical environment.



Figure F.4: Octree example for a 2D geometry

The location in space is performed thanks to an octree structure. The space between material surfaces is divided into simple areas so that every position is rapidly located in one or more voxel. The simplest way to divide space is to fix an outer box surrounding the whole scene (the order 0 voxel) and to construct voxel of greater order by splitting it in eight equal subvoxel. After voxel of order 1, voxel of order 2 and so on are constructed in the same way. An *a priori* criteria is fixed and the process stops when the size of the voxel of the current order is small enough. Thus, the reference of a point in the octree structure is a set of three binary addresses corresponding to the three coordinates in the space. Each binary number indicates from the

biggest voxel to the smallest one in which smaller voxel (left or right) the point is. The binary feature of the addresses can be fully used by the algorithm and efficiency can be obtained by using binary operations. Figure (F.4) shows a complete octree structure with 5 order around a 2D geometry.

Before any computation, an octree structure is constructed around the material surface meshes. This step tries to rank the mesh elements in voxel in order to find quickly, for each position in space, the vicinity. A set of two array indexes allows to find the elements present in each voxel in an efficient way, that is to say without expensive amount of memory or time. During any computation, rays propagate in space from voxel to voxel. At the first step, for each point of the source surface, the surrounding smaller voxel is identified. A fast reading of the octree arrays points out if there are elements in the vicinity. If not, the largest voxel including the point and no element is rapidly known. The minimal criteria used for the construction of the octree is chosen so that there are almost two elements in the smaller voxels insuring that this test is fast. As soon as position vicinity is known, and precisely, the boundaries of the smaller voxel without elements or the present elements in the current voxel identified, rays can propagate until they reach either a boundary or an element. As they enter new voxels, computation is repeated.

Some particular points must be taken care of. First of all, when a ray stands at an interface between voxels, it leaves one voxel and it enters in an other one. Without any other information than position, one cannot say which one must be considered for the next step. Using normal information is a way to deal with this question. But, a more efficient way is to overlap voxels that is to say define voxel boundaries so that voxels cross each other. Then, when rays leave out the biggest voxel, a choice must be made: have they any chance to re-enter the voxel or not? The solution consists in considering that as far as they do not cross a virtual boundary fixing the infinite, due to medium properties, they can enter again. Thus, even if the space part between the biggest voxel and this boundary is not described by the octree structure, it must be taken into account.

Dealing with intersections

As soon as a ray leaves an interface between voxels, it may bump into some mesh elements or another interface between voxels. Thanks to octree structure, neighboring elements and interfaces between voxels are known. But, the exact evaluation of the ray-surface intersection is needed. In uniform media without

any flow, with ray position and direction, the position of the intersection between a ray and the current voxel boundary is easy to find and, if there are elements, one has just to verify that the trajectory does not cross any of the present elements. Moreover, if a ray leaves the biggest voxel, there is no chance that it can re-enter.

With an arbitrary medium, because path are not straight, intersections must be tested at each propagation step and, if complex schema such as Runge-Kutta's are used, trajectories are not even straight for a single propagation step. That is why there is no other solution than to try and correct the trajectories. An *a priori* integration length depending on medium local properties is chosen and if the ray crosses an element's or an interface's plane, the initial length is adjusted to move as close to this plane as possible and the propagation step is performed again. This can lead to an intersection and the final propagation length is almost null. But this can lead to nothing and in order to be efficient, propagation length must be resized to the initial value.



Figure F.5: Four examples of missed intersections

While intersection tests and estimations are very simple if only plane surfaces are considered, it becomes almost impossible if curved elements are taken into account. As a matter of fact, the common point to a plane and a straight line is found by solving a linear equation. Then only three inequalities involving the plane coordinates are needed to determine if this point belongs to a particular plane element. Moreover, if there are two intersections with two different elements, the coordinate along the ray help to find which one hides the other. But the intersection with the "real" shape has to be computed either by finding the ray-plane element intersection and moving this position along the ray onto the "real" shape or by solving for every neighboring element a polynomial or an even more complicated equation. The first case does not give a ray-curved element intersection without a ray-plane element intersection whereas the second needs the definition of the curved element border.

Beam optimization

Optimizing the beam consist in eliminating some beam mesh elements and in splitting others. Both actions need to identify the elements involved and to change the beam mesh accordingly. Due to ray path, it is obvious that a lightened surface will not be described enough after the first throw and additional rays will be needed. Thus, during the first move, beam elements requiring more rays must be identified. The reasons why rays must be added are linked with either the wavefront shape or the medium properties or the material surface shape. For a punctual source, after a long-range propagation, even with many rays, local medium or material shape alterations are difficult to detect.

At the end of the move, elements can be put in groups according to their properties. There are those not one of whose rays meet a material surface. Whether they need to be divided or not, they are marked as "to be divided" or as "to be eliminated" before the next move. There are those only one or just two of whose 242

rays meet material surfaces and, thus, need "to be divided" to find an accurate shadow/light boundary. And there are those all of whose rays meet material surfaces. Because nothing is known about the surface between the rays, finding a division criteria for them is not easy. If the three rays meet the same element or adjacent elements, the lighted material surface is known completely and the criteria so deduced. But, otherwise, it is possible that there is a big hole in the middle of the beam element and to describe it, if necessary, an arbitrary splitting must be performed.



Figure F.6: Beam mesh from a point source in a straight duct: without optimization (top) and near the opened end after optimization (bottom)

While the beam filtering based on element criteria is easy to do because all the connectivities are based on the elements, the beam splitting is more difficult. To ensure sufficient beam discretization, for each "edge" of the mesh, a number of bars is deduced from various criteria and elements are divided according to the numbers of bars of their edges. There are then two things to do: place new rays in the middle and on the edges of the elements and construct new connectivities dealing with the former one, that is to say that the new part and the old part of the mesh must form a complete mesh as if it is the initial one. It is even better if the new rays are placed so that the new elements are well-shaped, that is to say that they are not stretched and that the maximal number of neighbors for each ray is rea-

sonable. The last thing to do is to put the beginning of the new rays either on the plane elements or on the curved shape of the material or virtual surface overlaid. Figure (F.6) shows how a beam (top) is optimized to obtain a good discretization at the end of it (bottom).

F.2 From discrete representation to continuous beams and material surfaces

Because the software must deal with complicated environments, interpolations play an important role. Usually, ray tracing methods require that particular attention is paid to surface modeling and this is more and more important as lighted surfaces are intricate. Due to the mesh surface representation choice, modeling surface must be handled with even more care. This leads to the development of a new interpolation method based on potential rebuild. In effect, the potential functions are chosen so that they look like elementary waveform. This idea is used for beams as well as for material surfaces. In the same way, amplitude fields are computed using a simple interpolation on particular quantities which look like "flows".

F.2.1 Geometrical modeling and ray tracing

Extended geometrical modeling

Usually, computational physics deals with simple geometrical representation. For both volume element methods and boundary element methods, the cost for using curved surfaces is often too high to justify it against raising the number of mesh vertex. But, with the evolution of technics, it becomes more and more

competitive. With a ray based algorithm, the problem is totally different. Due to successive reflected fields and geometrical interpolations, the geometrical modeling is very important. It plays a role where rays hit material surfaces but, by using a wavefront analogy, it can also play a role where new rays are created.

To create a ray based algorithm, one must first understand what the surface parameters are and how they modify the surface "feeling". **Position as well as normal and curvature quantities** are the common surface descriptive parameters and, as for the curved lines, they are fully described. But, their use in computational environment is not so widely held and it strongly depends on particular surface description. There are many different ways for modeling geometry and one can consult the SIGGRAPH courses ([⁷³] or [⁷²], for example) to have an overview of what can be done. A more specific ray based viewpoint is developed in [⁶⁶] where many different ways for modeling surfaces are described as well as existing methods used to compute ray/surface intersection.

The ray tracing method exposed here uses geometrical modeling to describe material surfaces and beams. Because ray formulation deals with position, direction of propagation and beams geometrical spreading, geometrical modeling must take into account the same type of features. Each surface modeling shows best parts and drawbacks, the one used here has been built due to many different constraints and it leads to an effective algorithm.

Dealing with meshes

The particular software environment demands the use of a boundary representation with facets. The surfaces of 3-D objects are divided into discrete flat triangles and, once the surfaces have been triangulated, the 3-D object is actually described as a list of elements of the triangulation. Positions, normals and curvatures are indexed from elements and with local numbering.

The main drawback with the classical mesh representation is illustrated by the disco ball. While, on the one hand, the light reflection on a smooth sphere is not so interesting in a club, on the other hand, the mesh representation must be enhanced to render smoothness. To do such a thing, one must understand what makes surfaces smooth. Position and normal discontinuities are the basic obvious features of a surface. In fact, whereas a small local shift on the position has no important effect on the global shape of the wavefront, a local normal discontinuity can produce effects that are to big at large distance in many directions. Thus smoothing meshes must deal with building **continuous normals and positions** on beams and regular material surfaces.

The classical idea for solving such problems consists in defining surfaces between nodes with the functions of local coordinates. These functions can be fitted to match geometrical properties at different points on element or to correspond to a particular local element shape. The two methods lead to interface problems between local representations. Only complicated local functions avoid normal discontinuities and then estimating ray/surface intersections and elements functions parameters becomes inefficient.

The solution set out corrects in a certain way the discontinuity problem by using a particular type of local functions on mesh elements. As a matter of fact, the main idea consists in associating a potential with each mesh element. This potential is suggested by the phase on beams. The chosen beam representation uses ray positions but wavefront normals and curvatures as mesh normals and curvatures. Thus, on a general mesh element, normals and curvatures are the first and second order derivatives of the potential. On the one hand, for the beam meshes, the local potential corresponds to a local estimate of the phase and the normals and curvatures to the wavefront normals and curvatures. On the other hand, for the material surface meshes, because the local potential is constant on each element, they correspond to the surface



Figure F.7: Example of rays/surface interaction: mesh elements and normals in black, curved shape and normals interpolated in red, first approximation rays and beam elements in blue and "real" rays and beam element in magenta

normals and curvatures.

F.2.2 Fields interpolation

Phase interpolation

To interpolate correctly elementary Helmholtz solutions, a generic form of the potential is taken so

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}^t \overline{\overline{A}} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} + c}$$
(F.1)

with $\overline{\overline{A}}$ a array in $\mathbb{C}^{3\times3}$, B a vector in \mathbb{C}^3 and c in \mathbb{C} . This function type is interesting because $\phi \nabla \phi$ variations are linear according to the position. Indeed, (F.1) derives in

$$2\phi(\boldsymbol{x})\nabla\phi(\boldsymbol{x}) = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}^t)\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{B} \text{ and } 2(\nabla\phi(\boldsymbol{x})\otimes\nabla\phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\nabla\nabla\phi(\boldsymbol{x})) = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}^t$$
(F.2)

Without loss of generality, $\overline{\overline{A}}$ is taken among symmetric matrices. Thus, determining phase parameters on each element is equivalent to find 10 values in 3-D space.

As the previous equations can be written

$$\phi(\boldsymbol{x})^2 - \phi(\boldsymbol{x})\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x} + c \text{ and } \overline{\overline{A}}\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{x})\nabla\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B},$$
 (F.3)

if $\phi(x)$ and $\nabla \phi(x)$ are known in three different points x_1, x_2 and x_3 , the parameters are given by

$$\boldsymbol{B} = \overline{\overline{x}}^{-1} [\phi_i^2 - c - \phi_i \nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{x}_i] \text{ where } \overline{\overline{x}}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{x}_1 \cdot (\boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \quad (F.4)$$

and

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \\ A_3^t \end{bmatrix} \text{ where } A_j = \overline{\overline{x}}^{-1} [\phi_i \partial_j \phi_i - B_j]$$
(F.5)

As ϕ and ν_i are computed along the rays at each mesh element corner and $|\nabla \phi_i|$ is given by the eikonale equation, as soon as c is chosen and the element is not stretched so that $x_1 \cdot (x_2 \wedge x_3) \neq 0$, there is only one possible set of parameters and a local phase function can be built on every mesh element.

Evaluating phase and wave vector is then easy on mesh elements but, at any other point, one needs to first find a beam mesh element from which a ray can be launched to pass through this point. There is usually more than one solution to this problem. But, if the point is close enough to the mesh and if the wavefront is not too complicated, one can distinguish one unique accurate solution. In effect, on the one hand, a beginning of a new ray always belongs to a determined mesh element. On the other hand, the given points, where phase needs to be interpolated beside beams, always belong to a lighted surface and thus there usually exists one beam mesh element close enough to define only one solution. The power of this interpolation method relies on the fact that, even if two different functions of two adjacent beam mesh elements do usually not build a continuous global function, it makes it "behave like it" because wave vectors and phase are continuous between elements on the mesh.

Amplitude interpolation

As for phase, an interpolation method is found according to the ideas that elementary Helmholtz solutions should be exactly described and that interpolation must remain valid along rays. In general, an interpolation is defined by two different things: the interpolated quantity and the type of interpolation. Here, because the conservation equation is about $F(\mathbf{x}) = \pi^2 D |\nabla \phi| / (\bar{\rho}c^3)$ with D the factor described at (C.2.1), the interpolation of this flow remains true along the rays that is to say $F(\mathbf{x}(0)) = u(0)F(\mathbf{x_1}(0)) + v(0)F(\mathbf{x_2}(0)) + w(0)F(\mathbf{x_3}(0)) = u(0)F(\mathbf{x_1}(s)) + v(0)F(\mathbf{x_2}(s)) + w(0)F(\mathbf{x_3}(s)) \neq F(\mathbf{x}(s))$ if s is the coordinate along the ray path. Moreover, the elementary solutions of the Helmholtz equation correspond to $F(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) = C$ where C neither depends on s nor \mathbf{x}_0 . Hence, a linear interpolation of this flow can be made between the three rays of an element everywhere along the rays.

In effect, if the propagation is curved, D must be computed along the rays so the flow on the initial beam is estimated thanks to the initial value of D and π is computed after the propagation thanks to the final value of D. If the propagation is straight, D is not computed along the rays. To compute π , only the wavefront curvatures are estimated and without any other *a priori* fixed quantity, π can not be guessed from F. No matter what the type of propagation is, the simplest way to estimate D from the wavefront curvatures is the product of the curvature radii. But, if the wave is plane or cylindrical, D can not be null and then replacing zero by one for the null values seems to be a good choice.

One can argue that if, at some points on rays, the curvatures are not null anymore, this solution can lead to inappropriate value of π . But, in the case of a straight propagation, this can not occur and in the curved propagation case, as D is computed along rays, the problem does not exist. It remains that the linear flow interpolation could be irrelevant on an element where such estimated D is not continuous as it is the case if the interpolation between the three element nodes with spherical wavefront shape leads to a cylindrical wavefront shape. In fact, because a cylindrical wave cannot become a spherical wave during a straight propagation and because the flow is the physical quantity, the interpolation is physically good in this case too.

The last problem consists in choosing the root of the flow when π is computed from F. On the initial beam, the sign of π is known and if π is continuous and never null along the ray, the sign does not change. Problems occur when either D = 0 or $D = \infty$ but the method falls apart and particular processing must be done at such points.

F.2.3 Surface interpolation

To construct a smooth surface from the mesh representation, like for the phase, a local potential function is evaluated on each mesh element. If f is such a potential function, x belongs to the material surface as soon as f(x) = 0 and then normal is given by $\nabla f / |\nabla f|$. Indeed, if x and x + dx are two points close enough on the surface, one can write

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{dx} + \frac{1}{2} \boldsymbol{dx}^t \nabla \nabla f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} + o(\boldsymbol{dx}^2)$$
(F.6)

and as $f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = 0$, a first approximation gives $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}_{\parallel} = 0$ which is the normal definition and a second approximation gives

$$dx_{\perp} = -\frac{1}{2|\nabla f|} dx_{\parallel}^{t} \nabla \nabla f dx_{\parallel} \text{ with } dx = dx_{\parallel} + dx_{\perp} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$
(F.7)

which is related to the curvature definition.

A phase like interpolation

The phase interpolation and the wavefront shape lead one to consider the potential function of the form $f^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \overline{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + c$. But, contrarily to phase, for material surfaces, only normals are known and ϕ_0 must be found so that $\phi(\mathbf{x}) = \phi_0$ describes a continuous surface between $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ and $\mathbf{x_3}$ and, at these points, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_0$. Without loss of generality $\phi_0 = 1$ and solutions are

$$\boldsymbol{B} = \overline{\overline{x}}^{-1} [1 - c - \mu_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{x}_i] \text{ and } \boldsymbol{A}_j = \overline{\overline{x}}^{-1} [(n_i)_j \mu_i - B_j]$$
(F.8)

where μ_i is such that $\nabla \phi(x_i) = \mu_i n_i$ and n_i is the normal at the point x_i . Now, this would be perfect if the local functions together have described a regular global function, but, as nothing is done for that, it is usually not true.



Figure F.8: Example of built surface and potential value on the corresponding mesh element

This type of parametric functions defines **quadrics or quadratic surfaces** and there are 16 different normalized forms of them. With the one sheet ones, there is no problem to define a surface between the

three positions but if $\overline{\overline{A}}$ and \overline{B} correspond to a two sheets shape, all the three points must be on the same sheet. A general fast way to find the shape of a quadratic surface consists in first homogenizing the equation $F(t, \mathbf{x}) = t^2 f(\mathbf{x}/t) = 0$, then finding the nature of the cone in \mathbb{R}^4 and finally studying the shape of the surface defined by $F(0, \mathbf{x}) = 0$. Applied to the current problem this method leads to study

$$F(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{t} \overline{A} \boldsymbol{x} + 2t \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} + c' t^{2} = 0$$
(F.9)

The nature of the cone in \mathbb{R}^4 is given by the signature of $\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} c' & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & \overline{\overline{A}} \end{bmatrix}$ or

$$(c'-\mu)\mathbf{A'}_{1} \cdot (\mathbf{A'}_{2} \wedge \mathbf{A'}_{3}) - B_{1}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A'}_{2} \wedge \mathbf{A'}_{3}) + B_{2}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A'}_{1} \wedge \mathbf{A'}_{3}) - B_{3}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A'}_{1} \wedge \mathbf{A'}_{2}) = 0$$
(F.10)
where $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}} - \mu \overline{\overline{I}}$.

Error estimation

Now a local smooth shape is constructed on each element but, on the global estimated curved surface, position and normal continuities between two adjacent elements are not sure in general for the curved estimated surface. In effect, because positions and gradients are continuous on the mesh between two adjacent local functions, the idea is to consider that the flat triangular mesh is almost the surface and that position, normal and curvature of the common point between the material surface and a ray can be evaluated on the corresponding flat element. Indeed, if a ray crosses a beam mesh element, the exact illuminated point is before or after along the ray thus

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^t \nabla \nabla f(\boldsymbol{x}_0) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2)$$
(F.11)

and

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + (s - s_0)(\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0)) + \dots$$

$$\frac{(s - s_0)^2}{2} (\partial_s \boldsymbol{x}_0(\nabla \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) + \nabla \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, \nabla \phi_0)) + \partial_s \nabla \phi_0(\partial_{\nabla \phi} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, \nabla \phi_0))) + o((s - s_0)^2)$$
(F.12)

where \overline{u} is the mean field velocity and X is the vector defined earlier at (C.1.3).

Hence

$$\begin{aligned} &f_0 + (s - s_0)(\overline{\boldsymbol{u}}_0 + \boldsymbol{X}_0) \cdot \nabla f_0 + \dots \\ &\frac{(s - s_0)^2}{2} \left((\partial_s \boldsymbol{x}_0 (\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_0 + \nabla \boldsymbol{X}_0) + \partial_s \nabla \phi_0 (\partial_{\nabla \phi} \boldsymbol{X}_0) \right) \cdot \nabla f_0 + (\overline{\boldsymbol{u}}_0 + \boldsymbol{X}_0) \nabla \nabla f_0 (\overline{\boldsymbol{u}}_0 + \boldsymbol{X}_0) \right) \dots \quad (F.13) \\ &+ o((s - s_0)^2) = 0 \end{aligned}$$

and so, if the crossed element corresponds to the local first crossed curved surface then the error made by taking the point on the flat element is

$$s - s_0 = -\frac{f_0}{(\overline{u}_0 + X_0) \cdot \nabla f_0}$$

$$x - x_0 = (s - s_0)(\overline{u}_0 + X_0)$$

$$\nabla f - \nabla f_0 = (x - x_0) \nabla \nabla f_0$$
(F.14)

Of course, $s - s_0$ and $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ must be small enough otherwise more terms have to be taken into account. The check of two criteria seems to warrant a small error. First, while meshing the material surfaces, $\max(f_0/|\nabla f_0|)$ needs to be kept small enough. Second, during the computation where intersection is not sharp, that is if the ray direction is almost tangent to the surface or $(\overline{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{X}) \cdot \nabla f_0 \simeq 0$, more attention must be paid. On top of the fact that the error of the on-mesh surface interpolation increases at tangency points, the intersection with the real surface shape can be far from the intersection with the flat mesh element. In this case, probably, the curved surface to take into account does not even correspond to that element. Moreover, as the reflected field shows a caustic at these points, the incident field must be carefully analyzed.



Figure F.10: *The ray hit the left element while it should hit the right curved surface*

Figure F.9: Difference between two estimated curved surfaces

The previous equations enable one to estimate the error but not to reduce it by moving the point to the "real" estimated intersection and by taking the corresponding estimated normal. In fact, this is not such a good idea because then normals are no longer continuous between mesh elements. Moreover, the real material surface is not really known and the estimated position is simply a new approximation hardly better than the flat approximation.

Annexe G

Champs moyens pour les applications numériques

Dans les paragraphes suivants, plusieurs champs moyens de vitesse sont définis et forment une bibliothèque de phénomènes pouvant être pris en compte. Pour définir complètement le champ nécessaire à un calcul par méthode de rayons, il faut aussi calculer une vitesse du son en chaque point. Celle-ci doit être évaluée grâce aux équations d'Euler linéarisées en utilisant, par exemple, pour un gaz parfait, $\gamma \overline{p} = \overline{\rho}c^2$. Cependant, par rapport aux variations de la vitesse du flux moyen, celles de la vitesse du son ont souvent peu d'influence sur la propagation des rayons. Les champs et les quantités dérivées sont donnés de manière analytiques. D'un point de vue numérique, ce n'est peu être pas l'approche le plus efficace. En effet, de tels développements théoriques sont des sources importantes d'erreur. Une dérivation "numérique" éviterait ces lourdeurs. Cependant, une analyse précise des expressions obtenues permet de comprendre les phénomènes deviant les rayons et l'utilisation de celles-ci dans l'algorithme ne semble pas induire de coût supplémentaire. Avec un champ non analytique issu par exemple d'une résolution des équations d'Euler stationnaires, le problème ne se poserait pas puisque la dérivation devrait se faire en fonction de la technique de discrétisation conduisant aux valeurs du champ stationnaire.

G.1 Champ théorique pour une couche limite

A terme, pour calculer la propagation dans une couche limite, l'idéal sera d'utiliser une approximation numérique de la solution de Blasius ou une solution issue d'un calcul volumique. Cependant, dans un premier temps, le champ de vitesse peut être estimé, en chaque point de l'espace, grâce à la représentation de Pohlhausen. A l'ordre 4, elle s'écrit

$$\boldsymbol{v}(\widetilde{d}) = (2\widetilde{d} - 2\widetilde{d}^3 + \widetilde{d}^4)\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{R}}$$
(G.1)

et, à l'ordre 6,

$$\boldsymbol{v}(\widetilde{d}) = (2\widetilde{d} - 5\widetilde{d}^4 + 6\widetilde{d}^5 - 2\widetilde{d}^6)\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{R}}$$
(G.2)

avec v_R la vitesse à l'infini et \tilde{d} la distance réduite entre le point de calcul et la paroi. En $\tilde{d} = 1$, la vitesse est égale à la vitesse à l'infini.

Ces expressions peuvent être utilisées pour toutes les géométries. Dans le cas d'une plaque plane, la distance \tilde{d} se calcule par

$$\widetilde{d} = \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n}}{\delta}$$
(G.3)

où y est un point du plan, n la normale au plan et δ la hauteur de la couche limite. Dans le cas d'un cylindre, le calcul donne

$$\widetilde{d} = \frac{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - ((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}| - a|}{\delta}$$
(G.4)

où y est un point de l'axe du cylindre, a le rayon du cylindre et τ est un vecteur unitaire suivant l'axe du cylindre.

Pour le calcul de la propagation des rayons, il faut calculer les dérivées première et seconde du champ théorique. Dans le cas de la couche limite, les calculs donnent

$$\nabla \boldsymbol{v}(\tilde{d}) \cdot \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{Y})(2 - 6\tilde{d}^2 + 4\tilde{d}^3)\nabla \tilde{d}$$
(G.5)

et

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}(\tilde{d}) \cdot \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{Y})(12\tilde{d}(-1+\tilde{d})\nabla \tilde{d} \otimes \nabla \tilde{d} + (2-6\tilde{d}^2 + 4\tilde{d}^3)\nabla \nabla \tilde{d})$$
(G.6)

avec, pour une plaque plane, $\nabla \tilde{d} = n/\delta$ et $\nabla \nabla \tilde{d} = 0$ et, pour un cylindre,

$$\nabla \widetilde{d} = \frac{n}{\delta} \text{ et } \nabla \nabla \widetilde{d} = \frac{\overline{I} - \tau \otimes \tau - n \otimes n}{\delta |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}|} \text{ avec } \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}|}$$
(G.7)

G.2 Modèles de jets

La solution est recherchée sous la forme d'une solution de similitude avec $\eta = r/\delta(l)$ et $v = v_\tau \tau + v_r e_r$

$$v_{\tau} = v_m(l)f(\eta), v_r = v_m(l)g(\eta) \text{ et } -\eta v_r v_{\tau} = v_m(l)^2 h(l)$$
 (G.8)

avec δ la demi-largeur du jet et v_m la vitesse moyenne axiale.

Classiquement, pour un champ à divergence nulle, la vitesse radiale est

$$v_r = -\frac{1}{r} \int_0^r \partial_l v_\tau r dr \tag{G.9}$$

et, après quelques calculs, la demi-largeur et la vitesse moyenne axiale du jet s'écrivent

$$\delta(l) = a(l - l_0) \text{ et } v_m(l) = bv_j \frac{D}{l - l_0}$$
(G.10)

où v_j est la vitesse nominale du jet (vitesse de sortie de la buse), D le diamètre de la buse et a et b deux paramètres donnés par l'expérience.

En poursuivant les calculs, f est donnée par

$$f(\eta) = \frac{1}{((ac/8)\eta^2 + 1)^2}$$
(G.11)

avec $c = (32/3)ab^2$ et, en pratique, $a \simeq 0, 08, b \simeq 5, 9$ et $l_0 \simeq 4D$.

La vitesse est donc

$$\boldsymbol{v} = \frac{bv_j D(l-l_0)^3}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^2} \boldsymbol{\tau} - \frac{bv_j Dr((4/3)(br)^2 - (l-l_0)^2)}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^2} \boldsymbol{e_r}$$
(G.12)

avec $l > l_0$.

Le gradient peut alors être calculé

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{v_r}{r} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + (\partial_r v_r \boldsymbol{e}_r + \partial_r v_\tau \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{e}_r + (\partial_l v_r \boldsymbol{e}_r + \partial_l v_\tau \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{\tau}$$
(G.13)

avec

$$\partial_r v_r = \frac{bv_j D}{2} \frac{(4/3)^2 (br)^4 + (l-l_0)^4 - 8(br)^2 (l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^3}$$
(G.14)

$$\partial_l v_r = b v_j Dr(l-l_0) \frac{4(br)^2 - (l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^3}$$
(G.15)

$$\partial_l v_\tau = b v_j D (l - l_0)^2 \frac{4(br)^2 - (l - l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l - l_0)^2)^3}$$
(G.16)

$$\partial_r v_\tau = \frac{-(16/3)rb^3 v_j D(l-l_0)^3}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^3} \tag{G.17}$$

et la hessienne aussi

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{X} = \dots$$

$$(\partial_r^2 v_r (\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{X}) + \partial_r^2 v_\tau (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{X})) \boldsymbol{e_r} \otimes \boldsymbol{e_r} + (\partial_l^2 v_r (\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{X}) + \partial_l^2 v_\tau (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{X})) \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \dots$$

$$(\partial_{rl} v_r (\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{X}) + \partial_{rl} v_\tau (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{X})) (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_r}) + (\frac{\partial_r v_\tau}{r} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{X}) + (\frac{\partial_r v_r}{r} - \frac{v_r}{r^2}) (\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{X})) \boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{e_\theta} + \dots$$

$$(\frac{\partial_l v_r}{r} (\boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_\theta}) + (\frac{\partial_r v_r}{r} - \frac{v_r}{r^2}) (\boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{e_r} + \boldsymbol{e_r} \otimes \boldsymbol{e_\theta})) (\boldsymbol{e_\theta} \cdot \boldsymbol{X})$$
(G.18)

avec

$$\partial_l^2 v_\tau = 2bv_j D(l-l_0) \frac{(l-l_0)^4 - (32/3)(br)^2(l-l_0)^2 + (16/3)(br)^4}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^4}$$
(G.19)

$$\partial_{rl}v_{\tau} = -(48/3)v_j Db^3 r(l-l_0)^2 \frac{(4/3)(br)^2 - (l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^4}$$
(G.20)

$$\partial_r^2 v_\tau = (16/3) v_j D b^3 (l - l_0)^3 \frac{(20/3)(br)^2 - (l - l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l - l_0)^2)^4}$$
(G.21)

$$\partial_l^2 v_r = 3v_j Dbr \frac{(16/9)(br)^4 + (l-l_0)^4 - 8(br)^2(l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^4}$$
(G.22)

$$\partial_{rl}v_r = -v_j Db(l-l_0) \frac{16(br)^4 + (l-l_0)^4 - (56/3)(br)^2(l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^4}$$
(G.23)

$$\partial_r^2 v_r = -(4/3)v_j Db^3 r \frac{(16/9)(br)^4 + 9(l-l_0)^4 - (56/3)(br)^2(l-l_0)^2}{((4/3)(br)^2 + (l-l_0)^2)^4}$$
(G.24)

En deux dimensions, l'intégration des équations conduit à des expressions différentes

$$v_m(x) = bv_j \sqrt{\frac{D}{x - x_0}} \text{ et } f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2((\sqrt{ac}/2)\eta)} \text{ où } \eta = \frac{y}{a(x - x_0)}$$
 (G.25)

avec $c = (3/8)^2 a b^4$ et, en pratique, $a \simeq 0, 1$ et $b \simeq 2, 5$. La vitesse a alors pour expression

$$\boldsymbol{v} = \frac{bv_j \sqrt{\frac{D}{x-x_0}}}{\cosh^2((\sqrt{c/a}/2)y/(x-x_0))} \boldsymbol{e_x} + v_y \boldsymbol{e_y}$$
(G.26)

Si les variations suivant x ne sont pas prises en compte, le **profile de Bickley** du [⁴] est retrouvé

$$v = \frac{v_0}{\cosh^2((1+\sqrt{2})(y/b))} e_x$$
 (G.27)

soit

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{-2v_0((1+\sqrt{2})/b)\sinh((1+\sqrt{2})(y/b))}{\cosh^3((1+\sqrt{2})(y/b))} \boldsymbol{e_x} \otimes \boldsymbol{e_y}$$
(G.28)

et

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{X} = \frac{2v_0((1+\sqrt{2})/b)^2(2\cosh^2((1+\sqrt{2})(y/b))-3)}{\cosh^4((1+\sqrt{2})(y/b))} (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_x}) \boldsymbol{e_y} \otimes \boldsymbol{e_y}$$
(G.29)

G.3 Modèles de tourbillon

G.3.1 Formules générales intégro-différentielles

Dans une base cylindrique, à partir d'une fonction de la forme $f(r, \theta, l) = f_r e_r + f_{\theta} e_{\theta} + f_{\tau} \tau$, le gradient sous forme matricielle est écrit :

$$\nabla f = (\partial_r f_r \boldsymbol{e_r} - \frac{f_\theta}{r} \boldsymbol{e_\theta} + \partial_l f_r \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{e_r} + (\partial_r f_\theta \boldsymbol{e_r} + \frac{f_r}{r} \boldsymbol{e_\theta} + \partial_l f_\theta \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{e_\theta} + (\partial_r f_\tau + \partial_l f_\tau \boldsymbol{\tau}) \otimes \boldsymbol{\tau} \quad (G.30)$$

et la hessienne

$$\nabla \nabla \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{X} = \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) \partial_r^2 f_r + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) \partial_r^2 f_\theta + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \partial_r^2 f_\tau \right] \boldsymbol{e_r} \otimes \boldsymbol{e_r} \dots \\ \dots + \left[-(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) (\frac{\partial_r f_\theta}{r} - \frac{f_\theta}{r^2}) + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) (\frac{\partial_r f_r}{r} - \frac{f_r}{r^2}) \right] (\boldsymbol{e_r} \otimes \boldsymbol{e_\theta} + \boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{e_r}) \dots \\ \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) \partial_{r,l} f_r + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) \partial_{r,l} f_\theta + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \partial_{r,l} f_\tau \right] (\boldsymbol{e_r} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_r}) \dots \\ \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) (\frac{\partial_r f_r}{r} - \frac{f_r}{r^2}) + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) (\frac{\partial_r f_\theta}{r} - \frac{f_\theta}{r^2}) + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial_r f_\tau}{r} \right] \boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{e_\theta} \dots \\ \dots + \left[-(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) \frac{\partial_l f_\theta}{r} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) \frac{\partial_l f_r}{r} \right] (\boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_\theta}) \dots \\ \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) \partial_l^2 f_r + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) \frac{\partial_l f_r}{r} \right] (\boldsymbol{e_\theta} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_\theta}) \dots \\ \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_r}) \partial_l^2 f_r + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_\theta}) \partial_l^2 f_\theta + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \partial_l^2 f_\tau \right] \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right]$$

Un tourbillon peut être défini par sa distribution de vorticité $\Omega = \nabla \wedge v$, la vitesse se déduit alors grâce à la loi de Boit & Savart :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^3} d\boldsymbol{y} \tag{G.32}$$

et

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\Omega(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\perp}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2} d\boldsymbol{y}$$
 (G.33)

 \mathcal{V} et \mathcal{S} sont les supports de Ω , c'est-à-dire de manière générale \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .

La circulation peut être définie dans \mathbb{R}^2 par

$$\Gamma = \iint_{S} \Omega dS = \oint_{\gamma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dl}$$
(G.34)

Pour un tourbillon quelconque, l'intégrale se fait dans tout \mathbb{R}^2 . Cependant, dans certain cas, lorsque la circulation totale est nulle, la circulation maximale est obtenue en restreignant l'intégration sur un disque adéquat.

G.3.2 En deux dimensions

Sans s'intéresser aux équations gouvernant la dynamique des fluides, deux tourbillons peuvent être envisagés :

- d'abord, le tourbillon ponctuel pour lequel

$$\Omega(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \delta(r) \text{ et } \boldsymbol{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$
(G.35)

- puis le tourbillon avec un cœur en rotation solide pour lequel

$$\Omega(r) = \begin{cases} \Omega_0 \text{ si } r < r_0 \\ \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \boldsymbol{v}(r) = \begin{cases} \frac{\Omega_0 r}{2} \text{ si } r < r_0 \\ \frac{1}{2\pi r} \text{ sinon} \end{cases} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{G.36}$$

Pour rendre réguliéres les fonctions, une répartition gaussienne peut être prise pour la vorticité :

$$\Omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \text{ soit } \boldsymbol{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$
(G.37)

Or, les équations de Navier-Stokes avec $\nabla \cdot v = 0$ en deux dimensions induisent une équation donnant la vorticité de la forme :

$$\partial_t \mathbf{\Omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} = \nu \Delta \mathbf{\Omega} \tag{G.38}$$

et une solution autosimilaire de cette équation est

$$\Omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi 4\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \operatorname{soit} \boldsymbol{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$
(G.39)

Cette dernière solution correspond donc à la forme du (G.37), c'est la famille des tourbillons d'Oseen.

Pour que la vitesse maximale soit atteinte en r_0 , la vitesse est plutôt décrite grâce à :

$$v_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{r_0^2}\right)) \text{ avec } 1 - e^{-\alpha} = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} \text{ soit } \alpha \simeq 1,256431$$
(G.40)

La circulation est alors définie par $\Gamma = \pi \Omega_0 r_0^2$ et le nombre de Mach maximal est $M = \Omega_0 r_0 / (2c_0) = \Gamma / (2\pi r_0 c_0).$

Pour un gaz parfait, $\gamma \overline{p} = \overline{\rho}c^2$ donc, s'il n'y a pas de variation d'entropie, $\nabla c^2 = (\gamma - 1)\nabla \overline{p}/\overline{\rho}$ et, ainsi,

$$\nabla c^{2} = -\frac{(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}}{\gamma - 1} = \frac{\boldsymbol{v}^{2}}{r(\gamma - 1)}\boldsymbol{e_{r}}$$
(G.41)

car l'amplitude de la vitesse est orientée suivant e_{θ} et ne dépend que de r. Pour les tourbillons précédents, la vitesse du son vaut :

- dans le cas du tourbillon ponctuel, $c(r)^2 = c_R^2 \Gamma^2/(8\pi^2(\gamma-1)r^2)$,
- dans le cas du tourbillon avec un cœur en rotation solide,

$$c(r)^{2} = \begin{cases} c_{R}^{2} - \frac{\Gamma^{2}}{8\pi^{2}(\gamma-1)r^{2}} \text{ si } r > r_{0} \\ c_{R}^{2} + \frac{\Gamma^{2}}{8\pi^{2}(\gamma-1)r_{0}^{4}} (r^{2} - 2r_{0}^{2}) \text{ sinon} \end{cases}$$
(G.42)

 dans le cas du tourbillon de Oseen, les calculs sont plus diffciles et, pour des petites valeurs du nombre de Mach, la prise en compte des variations de célérité n'est pas nécessaire.

G.3.3 En trois dimensions

Dans le cadre général, il est difficile d'obtenir une solution. Cependant, si la dynamique dans une direction est suffisamment particulière, des solutions construites à partir des solutions en deux dimensions peuvent être exhibées. Par ailleurs, comme dans le cas en deux dimensions, des modélisations physiques peuvent être construites empiriquement sans tenir compte de la vérification des équations de Navier-Stokes.

Parmi les nombreux modèles de tourbillons, le premier présenté ici est appelé pseudo-tourbillon de Rankine. Il est relativement simple et est issu d'une approche de l'aérodynamique par squelette. Sa simplicité entraîne une singularité au voisinage de l'axe qui doit être traitée séparément. La modification qui conduit au deuxième modèle permet, grâce à l'introduction d'un facteur de diffusion, de corriger ce défaut. Les deux modèles suivants sont issus d'analyses et d'approximations des équations de Navier-Stokes

Pseudo-tourbillon de Rankine

Comme en deux dimensions, le tourbillon de Rankine se construit à partir d'une distribution uniforme de la vorticité à l'intérieur du cœur du tourbillon de rayon r_0 , cette vorticité ètant dirigée suivant un axe constant. Soit un tourbillon défini par un axe τ et une origine x_0 , pour un point x dans l'espace, le champ de vitesse est écrit, dans un repère cylindrique d'axe τ ,

$$v_{\theta} = \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_l^{\infty} \int_0^{r_0} \frac{r - r' \cos \theta'}{(r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2 + {l'}^2)^{3/2}} r' d\theta' dr' dz'$$
(G.43)

ainsi la vitesse peut être modélisée par

$$\boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{4\pi r} (1 + \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}) \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}|} \text{ des que } l > 0$$
(G.44)

avec $\Gamma > 0$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x_0} - l\mathbf{\tau}|$ la distance à l'axe et $l = (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{\tau}$ la position sur l'axe à partir de l'origine.

Pour deux tourbillons marginaux, on peut avoir $v = v_+ + v_-$ avec $+\Gamma$ pour v_+ la vitesse correspondant au tourbillon bâbord (y > 0) et $-\Gamma$ pour v_- la vitesse correspondant au tourbillon tribord (y < 0), la seule différence dans les expressions étant l'origine.

L'expression précédente se dérive, dans le repère en coordonnées cylindriques, en

$$\nabla \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Gamma}{4\pi r^2} (1 + \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}) \\ \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} & -\frac{\Gamma}{4\pi r^2} (1 + \frac{l(l^2 + 2r^2)}{\sqrt{l^2 + r^2}}) & 0 \end{bmatrix}$$
(G.45)

soit

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{4\pi r^2} \left((1 + \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + (-\frac{r^3}{\sqrt{l^2 + r^2}} \boldsymbol{\tau} + (1 + \frac{l(l^2 + 2r^2)}{\sqrt{l^2 + r^2}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right)$$
(G.46)

Pour les dérivées d'ordre 2, cela donne

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} = \dots$$

$$\frac{-\Gamma}{4\pi r^{3}} \left((\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \left((2 + \frac{l(2l^{2} + 3r^{2})}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{3}}}) (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) - \frac{r^{3}}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{3}}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right) \dots$$

$$\dots + (\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}) \left(\frac{r^{3}(l^{2} - 2r^{2})}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{5}}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\tau}) + \dots$$

$$\dots (2 + \frac{l^{3}(l^{2} + 4r^{2})}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{5}}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - (2 + \frac{l(2l^{2} + 3r^{2})}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{3}}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} - \frac{3r^{4}l}{\sqrt{l^{2} + r^{2}^{5}}} \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right) \right)$$
(G.47)

En introduisant $\alpha = r/l$, les équations précédentes deviennent

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi l\alpha} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{G.48}$$

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{4\pi l^2 \alpha^2} \left((1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + (-\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2 + 1}^3} \boldsymbol{\tau} + (1 + \frac{1 + 2\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}^3}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right)$$
(G.49)

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} = \dots$$

$$\frac{-\Gamma}{4\pi l^{3} \alpha^{3}} \left((\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \left((2 + \frac{2+3\alpha^{2}}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{3}}) (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) - \frac{\alpha^{3}}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{3}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right) \dots$$

$$\dots + (\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}) \left(\alpha^{3} \frac{1-2\alpha^{2}}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{5}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \dots \right)$$

$$\dots + (2 + \frac{1+4\alpha^{2}}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{5}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - (2 + \frac{\alpha(2+3\alpha^{2})}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{3}}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} - \frac{3\alpha^{4}}{\sqrt{\alpha^{2}+1}^{5}} \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right) \right)$$
(G.50)

Donc, au voisinage de l'axe, il y a une singularité d'ordre 1 sur la vitesse, d'ordre 2 sur le gradient et d'ordre 3 sur la hessienne. En fait, pour modéliser correctement le corps du tourbillon, il faut prendre un champ linéaire à l'intérieur de celui-ci. Cependant, quelque soit le rayon du cylindre pris pour le corps du tourbillon, sur ce cylindre, une singularité sur le gradient de vitesse apparaîtra. Le tourbillon de Lamb-Oseen corrige ce défaut.

Pseudo-tourbillon de Oseen

Par rapport au tourbillon de Rankine, ce tourbillon introduit une contribution liée à la dissipation au voisinage de l'axe. Cette contribution est physiquement justifiée puisqu'alors la viscosité joue un rôle important. Cependant, il ne considère qu'un tourbillon en deux dimensions généré par un cœur ponctuel au temps initial qui se dissipe au cours du temps. Pour l'adapter à la situation présente, l'axe du tourbillon est considéré ici comme un axe temporel et ainsi, pour chaque plan le long de cet axe, le modèle deux dimensions est appliqué en fonction de l'éloignement par rapport à la source $l = v_0 t$. Soit un tourbillon défini par un axe τ et une origine x_0 , pour un point x dans l'espace, le champ de vitesse peut se modéliser par

$$\boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-\alpha}) \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}|} \text{ des que } l > 0 \text{ avec } l = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \cdot \boldsymbol{\tau} \text{ , } r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} - l\boldsymbol{\tau}| \text{ et } \alpha = \frac{r^2 v_0}{4\nu l}$$
(G.51)

Le gradient du champ de vitesse a pour expression

$$\nabla \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (1 - e^{-\alpha}) \\ -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \alpha e^{-\alpha} & -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (1 - (1 + 2\alpha)e^{-\alpha}) & 0 \end{bmatrix}$$
(G.52)

soit

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{2\pi r^2} \left((1 - e^{-\alpha}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + (\alpha \frac{r}{l} e^{-\alpha} \boldsymbol{\tau} + (1 - (1 + 2\alpha) e^{-\alpha}) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right)$$
(G.53)

pour les dérivées d'ordre 2, cela donne

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} = \dots$$

$$\frac{\Gamma}{\pi r^{3}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \left[(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y})(1 - e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left(\alpha \frac{r}{l} e^{-\alpha} \boldsymbol{\tau} + \{1 - (1 + 2\alpha)e^{-\alpha}\}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \right) \right] - \dots$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi r^{3}} \left[\{ (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y})(1 - e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + r(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y})(\partial_{r}\alpha e^{-\alpha} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \partial_{l}\alpha e^{-\alpha} \boldsymbol{\tau}) \} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y})(1 - e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots$$

$$\dots - (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \{ \alpha \frac{r}{l} e^{-\alpha} \boldsymbol{\tau} + (1 - (1 + 2\alpha)e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \} + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y}) \{ \left[\alpha \frac{r}{l}(1 + r \frac{\partial_{r}\alpha}{\alpha} - r \partial_{r}\alpha)e^{-\alpha}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots$$

$$\dots + \alpha \frac{r}{l} (-\frac{r}{l} + \frac{r\partial_{l}\alpha}{\alpha} - r \partial_{l}\alpha)\boldsymbol{\tau} \right] \otimes \boldsymbol{\tau} + r e^{-\alpha} \left[(-1 + 2\alpha)\partial_{r}\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + ((1 + 2\alpha)\partial_{l}\alpha - 2\partial_{l}\alpha)\boldsymbol{\tau} \right] \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots$$

$$\dots + (1 - (1 + 2\alpha)e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \} \right]$$

$$(G.54)$$

soit

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} = \dots$$

$$\frac{-\Gamma}{2\pi r^{3}} \left((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[2(-1 + (1 + \alpha)e^{-\alpha})(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) - \alpha \frac{r}{l}e^{-\alpha}(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right] \dots$$

$$\dots + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[\alpha \frac{r}{l}(1 - 2\alpha)e^{-\alpha}(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\tau}) + 2(-1 + (1 + \alpha + 2\alpha^{2})e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots$$

$$\dots + 2(1 - (1 + \alpha)e^{-\alpha})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \alpha \frac{r^{2}}{l^{2}}(-2 + \alpha)e^{-\alpha}\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right] \right)$$
(G.55)

Les quantités précédentes n'indiquent pas clairement les phénomènes lorsque $\varepsilon = r/l - > 0$, il faut donc les écrire en fonction de cette quantité et faire des développements asymptotiques. Ainsi, avec $a = (l/r_0)(R_e/8\pi)$ soit $\alpha = a\varepsilon^2$, cela donne

- pour la vitesse,

$$\boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{2\pi l} \frac{1 - e^{-a\varepsilon^2}}{\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}|} \simeq \frac{-\Gamma}{2\pi l} a\varepsilon \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\tau}|}$$
(G.56)

donc $\boldsymbol{v} \longrightarrow 0$,

- pour le gradient de la vitesse,

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{-\Gamma}{2\pi l^2} \left(\frac{1 - e^{-a\varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + (a\varepsilon e^{-a\varepsilon^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{1 - (1 + 2a\varepsilon^2)e^{-a\varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

$$\simeq \frac{-\Gamma}{2\pi l^2} \left(a \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + (a\varepsilon\boldsymbol{\tau} - a \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right)$$
(G.57)

donc $\nabla \boldsymbol{v} \longrightarrow (-\Gamma/2\pi)(R_e/8\pi r_0 l)(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}),$ pour la bassienne de la vitesse

- pour la hessienne de la vitesse,

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} = \frac{-\Gamma}{2\pi l^{3}} \left((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[2 \frac{-1 + (1 + a\varepsilon^{2})e^{-a\varepsilon^{2}}}{\varepsilon^{3}} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) - ae^{-a\varepsilon^{2}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right] \dots \\ \dots + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[a(1 - 2a\varepsilon^{2})e^{-a\varepsilon^{2}} (\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\tau}) + 2 \frac{-1 + (1 + a\varepsilon^{2} + 2a^{2}\varepsilon^{4})e^{-a\varepsilon^{2}}}{\varepsilon^{3}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots \\ \dots + 2 \frac{1 - (1 + a\varepsilon^{2})e^{-a\varepsilon^{2}}}{\varepsilon^{3}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + a\varepsilon(-2 + a\varepsilon^{2})e^{-a\varepsilon^{2}} \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right] \right)$$
(G.58)

soit

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{Y}_{i} \simeq \frac{-\Gamma}{2\pi l^{3}} \left((\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[-a^{2} \varepsilon (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) - a(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right] \dots \dots + (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{Y}) \left[a(\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\tau}) + 3a^{2} \varepsilon \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots \\ \dots + a^{2} \varepsilon \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} - 2a \varepsilon \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \right] \right)$$

$$(G.59)$$

donc $\nabla \nabla v_i \cdot Y_i \longrightarrow (-\Gamma/2\pi)(R_e/8\pi r_0 l^2)((e_{\theta} \cdot Y)(e_r \otimes \tau + \tau \otimes e_r) - (e_r \cdot Y)(e_{\theta} \otimes \tau + \tau \otimes e_{\theta})).$ Le modèle dégénère donc correctement au voisinage de l'axe. A ce champ de vitesse, il faut ajouter un champ de vitesse uniforme lié à son avancée suivant l'axe de l'avion.

Les tourbillons de Newman et Burgers

Les deux modèles suivants cherchent à améliorer le champ de vitesse en lui donnant une réelle tridimensionnalité. A partir des équations de Navier-Stokes, le tourbillon de Burgers correspond à un tourbillon étiré dont l'étirement suivant son axe est constant et uniforme et compense la diffusion de la vorticité ν/r_0^2 . Le tourbillon de Newman est obtenu en linéarisant les équations et en supposant que le nombre de Reynolds est grand et la vitesse peu différente de la vitesse à l'infini qui est suivant l'axe. Le champ de vitesse du tourbillon de Burgers est décrit par :

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\nu r}{2r_0}\boldsymbol{e_r} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2}\right) \right\} \boldsymbol{e_\theta} + \frac{\nu l}{r_0}\boldsymbol{\tau}$$
(G.60)

son gradient

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left[-\frac{\nu}{2r_0} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2}\right) \right\} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right] \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\nu}{r_0} \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} \dots \\ \dots + \left[\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left\{ -1 + \left(1 + \frac{r^2}{2r_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2}\right) \right\} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - \frac{\nu}{2r_0} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right] \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$$
(G.61)

et sa hessienne

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{X} = \frac{\Gamma}{\pi r^3} (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}) \dots$$

$$\dots \left[\left\{ 1 - \left(1 + \frac{r^2}{2r_0^2} + \frac{r^4}{4r_0^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2} \right) \right\} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r^2}{4r_0^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2} \right) \right\} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \right] \dots$$

$$\dots + \frac{\Gamma}{\pi r^3} (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r^2}{4r_0^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2} \right) \right\} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}})$$
(G.62)

Pour le tourbillon de Newman, l'expression du champ est :

$$\boldsymbol{v} = -\frac{Ar}{2l^2} \exp\left(-\frac{v_{\infty}r^2}{4\nu l}\right) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{1 - \exp\left(-\frac{v_{\infty}r^2}{4\nu l}\right)\right\} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \left\{v_{\infty} - \frac{A}{l} \exp\left(-\frac{v_{\infty}r^2}{4\nu l}\right)\right\} \boldsymbol{\tau} \quad (G.63)$$

où A est un étirement à estimer. Le gradient de vitesse est alors écrit

$$\nabla \boldsymbol{v} = \exp\left(-\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \left(\left[\frac{2A}{rl}\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \frac{A}{l^{2}}\left(1 - \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right)\boldsymbol{\tau} \right] \otimes \boldsymbol{\tau} \dots + \left[-\frac{A}{2l^{2}}\left(1 - 2\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} - \frac{\Gamma}{2\pi r^{2}}\left\{\exp\left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) - 1\right\}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{Ar}{l^{3}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right)\boldsymbol{\tau} \right] \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \dots \quad (G.64)$$
$$\dots - \left[\frac{\Gamma}{2\pi r^{2}}\left\{\exp\left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) - 1 - 2\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right\}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} + \frac{A}{2l^{2}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\Gamma}{2\pi r^{2}}\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\frac{r}{l}\boldsymbol{\tau} \right] \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

et la hessienne

$$\nabla \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{X} = \exp\left(-\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \left(\left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{r}}) \frac{A}{rl^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \left(3 - 4\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{2A}{lr^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \left(1 - 2\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \dots \right. \right. \\ \left. \dots + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{r^{3}} \left\{ \exp\left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) - 1 - \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} - 2\left[\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right]^{2} \right\} \right] \boldsymbol{e_{r}} \otimes \boldsymbol{e_{r}} \dots \\ \left. \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{r}}) \frac{A}{rl^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{r^{3}} \left\{ \exp\left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) - 1 - 2\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \right\} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{2A}{lr^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \right] \boldsymbol{e_{\theta}} \otimes \boldsymbol{e_{\theta}} \dots \\ \left. \dots + \left[-(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{r}}) \frac{A}{rl^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{r^{3}} \left\{ \exp\left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right)^{2} \right) + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2}{rl^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \right. \\ \left. \dots - (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{r}) \frac{2A}{l^{3}} \left(1 - 2\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right)^{2} \right) \right] \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{r}}) \frac{A}{l^{3}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \dots \\ \left. \dots - (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{lr^{2}} \left(1 - \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) - (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{4A}{rl^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \right] (\boldsymbol{e_{r}} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_{r}}) \dots \\ \left. \dots + \left[(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{r}}) \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r^{2}} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l} + (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{e_{\theta}}) \frac{A}{l^{3}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}r^{2}}{4\nu l}\right) \right] (\boldsymbol{e_{\theta}} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e_{\theta}}) \right]$$

$$(G.65)$$

Paramètres caractérisant un tourbillon

La circulation d'un troubillon est caractérisée

- soit par $\Gamma_0 = 2\pi v_0 r_0$ et alors le nombre de Reynolds pour le tourbillon est $R_e = \Gamma_0 \nu$,
- soit par $\Gamma_0 = C_l v_0 b/(2sA_r)$ où C_l est le coefficient de portance, b l'envergure de l'aile, A_r l'allongement et s un facteur lié à la charge de l'aile.

Le premier correspond à un tourbillon défini par une vitesse à une certaine distance du centre et le deuxième à un tourbillon marginal. La seconde expression est déduite de la définition de la circulation Γ_0 puisque l'effet des tourbillons doit correspondre à la portance et ainsi

$$\frac{\rho C_l}{2A_r} b^2 v_0^2 = \rho v_0 b_0 \Gamma_0 \tag{G.66}$$

avec b_0 l'espacement entre les deux tourbillons qui, compte tenu de la forme de l'aile et de son chargement, peut être pris égal à $b_0 = bs$ avec en pratique $s = \pi/4$. Pour le tourbillon d'Oseen, la décroissance exponentielle dépend ainsi de $\alpha = (r/r_0)(r/l)(R_e/8\pi)$. En remplaçant l'axe droit du tourbillon par une trajectoire plus proche de la forme réelle des tourbillons, une meilleure modélisation est possible. Par ailleurs, dans le modèle de Newmann, l'étirement peut être pris égal à $A = D/(2\pi\rho\nu)$ avec D la trainée de l'aile. Annexe H

An overview of the ray-launching method

Introduction

For an aircraft designer, reducing annoying noise requests to work on three aspects: estimate the total noise level of an aircraft, understand how noise is produced and propagated and imagine new designs reducing the noise level. For the first part, simple models are able to give barely good solutions. For the second part, new algorithms sol-ving fluid dynamics and acoustics behaviour in the same time can be used on sufficiently small computational domains. Until recently, no computational technique exists to take into account a whole arbitrary aircraft shape and the flow effects at frequencies above 1 kHz.

The idea is to use a ray method to estimate the noise level radiating from an aircraft. The ray formalism follows the paths along which the energy is mainly propagated. In the manner of the light propagation, interfaces can be taken into account. Moreover, this propagating technique does not depend on the frequency although waves can be totally defined and interferences can be computed. Thus, such an approach can be a powerful designing tool.

Among the methods dealing with scattering problems, the finite element ones are very expensive as the whole computational domain needs to be meshed, the boundary element ones can not take into account inhomogeneous media and the use of the ones based on the parabolic equation is very restricted. Even if the geometrical acoustic approach has its own drawbacks, this formalism stands the only one that can deal with all the effects.

Since the works of Blokhintzev⁹ then Ugincius⁷⁷, the ray propagation of sound is well understood but the whole formalism linking rays and high frequency approximation is due to Candel¹⁶. Without mean field, the Geometrical Theory of Diffraction described by Keller⁴² introduces diffracted ray fields in order to estimate scattering effects due to the edges on the geometry. Otherwise many works have been made to rise the accuracy of ray methods especially by dealing with caustics and the Gaussian beam approach is commonly used for propagation in elastic

media¹⁹ . Recently, new algorithms have been tried to industrialize the use of $rays^{67}$.

In the following, after a quick overview of the method in the first section, various examples are given. At first, two free propagation cases are analyzed. Then, material surfaces are introduced and the behaviour in a boundary layer is studied. The validity of the technique without mean field is estimated thanks to the comparison with a boundary element computation. At last, the particular detail of the duct propagation is described.

H.1 A "ray shooting" method

The study of the Navier-Stokes' equations indicates that the propagation is mainly described by the Euler's part while the viscosity part creates the perturbation. The propagation length from the aircraft to the ground is not long enough to need to take into account the decreasing due to viscosity absorption. The Euler's equations are then precise enough to estimate the mean field effects. Moreover, the perturbation field amplitude and its variations are sufficiently small to neglect the non-linear phenomena.

In the following section, the governing propagator based on the linearized Euler's equations is at first quickly reviewed. Then the eikonal and conservation equations are deduced from the high frequency approximation. The third paragraph explains how the ray formalism is used to solve the new equations. Before describing the algorithm built in order to be able to compute every case, a quick sum up of the limits of the method is made.

Governing propagator

From classical Euler's equations dealing with density ρ , velocity v and entropy s, if variations can be cast in a small perturbation (r, ξ, σ) around a mean field $(\overline{\rho}, \overline{v}, \overline{s})$, one usually obtains the linearized Euler's equations

$$\partial_t r + \nabla (\overline{r \boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{H.1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla \pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho}^2} r = 0 \quad (\text{H.2})$$

$$\partial_t \sigma + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{s}} = 0 \tag{H.3}$$

where \overline{p} and $\pi = c^2 r + (\partial_s \overline{p})\sigma$ are respectively the mean and the perturbation pressure; c being the speed of sound.

To compare the different contributions in (H.1), (H.2) and (H.3), the quantities are made non dimensional with the following reference scales: $\overline{\rho}_{\infty}$ as the density scale, c_{∞} as the velocity scale and $\overline{\rho}_{\infty}c_{\infty}^2$ as the pressure scale. Without any scattering object, the propagation behaviour of a disturbance is mostly driven by the mean field and, in order to understand how its inhomogeneities affect the classical wave propagation, the length scale L is chosen so that mean field variations are close to 1.

If the perturbation is due to a monochromatic time dependent source of frequency f, linearized Euler's equations (H.1), (H.2) and (H.3) can be replaced by

$$-i\frac{r}{\epsilon} + \overline{v} \cdot \nabla r + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \overline{\rho} + r \nabla \cdot \overline{v} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (H.4)$$

$$-\mathbf{i}\frac{\boldsymbol{\xi}}{\epsilon} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla\pi}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla\overline{p}}{\overline{\rho}^2}r = 0 \quad (H.5)$$

$$-i\frac{\sigma}{\epsilon} + \overline{v} \cdot \nabla\sigma + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\overline{s} = 0 \qquad (H.6)$$

with $\epsilon = c_{\infty}/(2\pi f L)$.

As for the Helmholtz equation, problems occur when $\epsilon \to 0$. This is due to the fact that the length scale is high compared to the wavelength. In fact, since the length scale is linked to the relative variations of the mean field, for ϵ being small means that the mean field variations are much slower than the perturbation variations.

High frequency approximation

To solve problems with small ϵ , let us introduce the simple wave shaped function of geometrical optics

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}(\epsilon, \boldsymbol{x}) \exp\left(\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{x})/\epsilon\right)$$
 (H.7)

with

$$oldsymbol{W}_0(\epsilon,oldsymbol{x}) = oldsymbol{W}_0^0(oldsymbol{x}) + \epsilonoldsymbol{W}_0^r(oldsymbol{x},\epsilon)$$
 (H.8)

The phase ϕ represents the spatial variations due to the harmonic nature of the source. W_0 is the part of the perturbation field mostly linked to the source shape and the mean field effects. W_0^0 is its first order approximation and W_0^r is the remainder which is assumed to be small.

A classical asymptotic analysis gives two new systems of equations

$$\begin{bmatrix} 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & \overline{\rho} \nabla \phi \cdot & 0\\ \frac{c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi & 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi & \frac{\alpha c^2}{\overline{\rho}} \nabla \phi\\ 0 & 0 & 1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi \end{bmatrix} \begin{cases} \rho_0^0\\ \boldsymbol{\xi}_0^0\\ \sigma_0^0 \end{cases} = 0$$
(H.9)

and

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla r_0^0 + \boldsymbol{\xi_0^0} \cdot \nabla \overline{\rho} + r_0^0 \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi_0^0} \\ (\boldsymbol{\xi_0^0} \cdot \nabla) \overline{\boldsymbol{v}} + (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi_0^0} + \frac{\nabla \pi_0^0}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{\rho}^2} r_0^0 \\ \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \sigma_0^0 + \boldsymbol{\xi_0^0} \cdot \nabla \overline{s} \end{array} \right\} = 0$$
(H.10)

Three different waves satisfy the first system. Among them, only one carries pressure perturbations and, for this wave, the eikonal equation is

$$(-1 + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)^2 = c^2 \nabla \phi^2 \tag{H.11}$$

and the quantities must verify

$$\sigma_0^0 = 0 \text{ and } \boldsymbol{\xi_0^0} = \frac{\pi_0^0}{\overline{\rho}c(1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi)} \nabla \phi \qquad (\text{H.12})$$

To be a solution of the second system, π_0^0 must satisfy a conservation equation

$$\nabla \cdot \left(\frac{\pi_0^{0^2}}{\overline{\rho}c^2(1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi)}(\overline{\boldsymbol{v}} + \frac{c^2\nabla\phi}{1-\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\phi})\right) = 0 \tag{H.13}$$

It is obvious that, at this level of approximation, ϕ and π_0^0 do not depend on ϵ . In fact, the lower ϵ is the better the solutions seem to be but in practice, on the one hand, for certain sources and certain mean fields, high frequency solutions can be exact at any frequency and on the other hand, even if ϵ is almost null, high frequency solutions give very bad approximation at particular positions.

Lagrangian point of view

The eikonal equation (H.11) could produce multivalued solutions and classical solvers are irrelevant. One way to finally solve them consists in taking a Lagrangian description and using ray tracing. The key idea is to follow the path along which

energy propagates. The conservation equation (H.13) points out the direction at any position and rays are constructed by integrating

$$\partial_s \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{v}} + \frac{c^2 \nabla \phi}{1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi}$$
 (H.14)

The eikonale equation (H.11) remains verified along the ray path thanks to

$$\partial_s \nabla \phi + \nabla \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \phi + (1 - \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \phi) \frac{\nabla c}{c} = 0 \quad (\text{H.15})$$

Using the ray equation (H.14), it is easy to construct the solution of the conservation equation (H.13). If α and θ are two parameters describing with *s* a position in the vicinity of a ray path, π_0^0 is computed by

$$\pi_0^0 = \pi_0^0(0) \sqrt{\frac{\overline{\rho}c^3 |\nabla \psi| \mathcal{D}(0)}{\overline{\rho(0)}(c(0))^3 |\nabla \psi(0)| \mathcal{D}}}$$
(H.16)

with $\mathcal{D} = \partial_s \boldsymbol{x} \cdot (\partial_{\theta} \boldsymbol{x} \wedge \partial_{\alpha} \boldsymbol{x})$. The new quantities are solutions of the system

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_{s}\partial_{-}\boldsymbol{x} \\ \partial_{s}\partial_{-}\nabla\phi \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{C}} & \overline{\overline{D}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \partial_{-}\boldsymbol{x} \\ \partial_{-}\nabla\phi \end{array} \right\}$$
(H.17)

where $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}$ and $\overline{\overline{D}}$ depend on $\nabla \phi$, the mean field and its variations. It is interesting to remark that, in the previous equations, ϕ , π_0^0 , ξ_0^0 and σ_0^0 could be real or complex.

Profit and loss

This way of dealing with sound propagation allows studying refraction effects of mean fields with short computations. The cost only depends on the length of integration and is frequency independent. In comparison with other ray tracing methods, by calculating phase, the point of view chosen here enables the estimation of waves' interferences. It can give solutions similar to those obtains with finite element or volume methods without the problems related to dense meshing.

Former developments hide few drawbacks. First of all, taking into account material surfaces requires special developments and, doing so, several problems would appear and limit the validity domain. Furthermore, solutions of (H.16) are not defined when \mathcal{D} is null. In a simply way, it happens when two adjacent rays cross and, in a vicinity of these points, high frequencies solutions are not anymore sufficiently accurate.

A quick study of the previous equations shows that the validity of the method depends almost only on the wavefront curvature, that is to say the second derivatives of the phase. First of all, even if using the new parameters α and θ allows computing \mathcal{D} everywhere, the important quantity is

$$\nabla \nabla \phi = [\partial_{-} \boldsymbol{x}]^{-1} [\partial_{-} \nabla \phi]$$
(H.18)

and, when $\mathcal{D} = 0$, then $\nabla \nabla \phi$ is singular and the wavefront curvature is infinite. Moreover, if the asymptotic analysis is pursued and the next stage of the remainder W_0^r is evaluated, it appears that this one grows with $|\nabla \nabla \phi|$.

The following computations are performed by using a real phase but if a complex one is used instead, some singularities can be removed. Indeed, one can prove that if, at the beginning of a ray path, the imaginary part of $\nabla \nabla \phi$ is strictly positive, there is no singularity along the whole ray path. The only problem remaining is the evaluation of \sqrt{D} and an appropriate calculus enables the estimation of π_0^0 everywhere. The studying of the real part of the phase indicates that for a real phase π_0^0 must be multiplied by -i after a singularity.

A new formalism using beam elements can be constructed with a complex phase. If each ray represents a beam element and if the imaginary part of ϕ and $\nabla \phi$ are null on the ray, the positive imaginary part of $\nabla \nabla \phi$ corresponds to an exponential decreasing in the vicinity of the ray and a beam element shows a Gaussian shape in every plane perpendicular to $\nabla \phi$. Thus the perturbation field can be decomposed in a sum of these beam elements. This formalism tries to take into account a part of the scattering effects of the mean field inhomogeneities and removes all the discontinuities of the classical ray fields. The following computations do not use this formalism and the next step of the development is to do so.

Algorithm

The key idea of the algorithm consists in moving a mesh in a free space. Rays form the nodes of the mesh, normals are directed by the phase gradient and elements of the mesh are used to interpolate fields between rays. Moreover, to compute correctly π_0^0 and because of (H.17), quantities of second order must be computed along the ray path, that is why curvature radii of the wavefront are also link to the mesh in the same way that nodes and normals are.

The first step of a computation creates the mesh and computes all the needed quantities at each node. These quantities are the initial conditions of all the previous equations. The mesh and the quantities depend on the nature of the source. For example, if the source is a point source, the mesh is a sphere and the quantities are given by the distance of the nodes from the source.

The second step propagates nodes and involves the integration of the 18 equations given by (H.14), (H.15) and (H.17). A simple Runge-Kutta 4 scheme is used. The integration step is feat to produce a minimum lost of precision. As the algorithm would have to deal with material surfaces, a simple way to stop rays consists in defining and meshing transparent surfaces above which fields would be known. This formalism creates new problems and must deal with finding the intersection between meshed surfaces and rays.

The third step adds rays in space region where there is a lack. This occurs because, at the beginning, positions and directions of rays are only function of the source and a good knowledge of the field on the final surface is function of the propagation and the lighted surface itself. These two parameters are not known at the first launch so, in general, new rays must be shoot to rise precision.

The algorithm performs an adaptive sub-grid of the first mesh and interpolates quantities thanks to the elements formalism. The interpolation tries to estimate exactly the propagation of a spherical field generated by a point source. Thus, with

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}^t \overline{\overline{A}} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x} + c}$$
(H.19)

where $\overline{\overline{A}}$, **B** and c are unknown quantities, $\phi \nabla \phi$ is linear according to the position and between three rays, on a flat element,

 $\phi \nabla \phi = u \phi_1 \nabla \phi_1 + v \phi_2 \nabla \phi_2 + w \phi_3 \nabla \phi_3$ with (u, v, w)the barycentric coordinates. ϕ and $\nabla \phi$ are deduced thanks to vector calculus and π_0^0 is interpolated in a same way.

To stop the process, a maximal number of rays is arbitrarily chosen and, at the end, π_0^0 is computed using integrated quantities. In order to help future operations such as calculating radiations pattern or projecting fields on a finite element mesh, fields π_0^0 and ϕ are stored separately with the "beam" mesh. In effects, the maximal number of rays is 20000 and it could be overstepped due to sub-grid imperatives.

H.2 Free propagation in a mean flow

This section deals with the free propagation in a spherical domain centered around (0; 0; 0) and with a radius 1000. Because the same geometry is used to compute several cases, length and frequencies are dimensionless. Computations need a coarse mesh of the domain boundary. The interpolation error is verified with the first case which represents a point source in a uniform flow and the second case validates the curved propagation of rays in a rotating flow. This last case is the beginning of a more complete study of the interaction between the acoustic waves due to the engines and the wake vortices.

Point source in a uniform mean flow

The point source is located in (0; 0; 0) with $\pi = 1$ and the mean field is uniform with a speed $\overline{v} = (0.5; 0; 0)$. For this case, an analytical solution is known and theoretical ray solution is exact. ϕ is given by

$$\phi = \frac{k}{\beta^2} (-M(x - x_0) + \dots + \dots + \sqrt{(x - x_0)^2 + \beta^2((y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)})$$
(H.20)

and π by

$$\pi = \frac{\beta^2}{(-M(x-x_0) + \dots}$$

... $\sqrt{(x-x_0)^2 + \beta^2((y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)}$
(H.21)

where (x_0, y_0, z_0) are the source coordinates,

 $\beta = \sqrt{1 - M^2}$, M the Mach number and k the angular wavenumber.

The source is transformed in a sphere of radius 0.2 and, because the mean field is uniform, rays are straight and computation along rays is exact. During the first step, 1550 rays are launched and the optimization of the beam leads to 40000 rays at the end after 3 interpolations. Because the pressure field is well known, only errors are shown.



Figure H.1: *Errors on* π (*A*) *and* ϕ (*B*) *with ray method compared to analytical solution*

In the figures (H.1), levels of relative errors are sufficiently small around 10^{-3} for π and 10^{-6} for ϕ . We can, nevertheless, add two remarks. On the one hand, error on π is much bigger than error on ϕ . The way that π is interpolated is not very efficient. This feeling is confirmed by the fact that, π error is maximum at the interpolated points meanwhile this is not the case for ϕ . On the other hand, ϕ error shows that using a little sphere as source with an interpolation on the flat mesh element is efficient. Even if those errors are small enough in this case, they must be kept in mind for the following analyses.

Interaction between a plane wave and a 2D vortex

The validity of the computing method is evaluated thanks to a simple 2D interaction between a plane wave and a vortex. As in Brillant *et al.*¹⁵ or in Dallois & Blanc-Benon²⁶, the vortex field corresponds to an Oseen model so that the tangential velocity reads

$$v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp{(-1.256\frac{r^2}{r_0^2})})e_{\theta}$$
 (H.22)

where r is the distance away from the centre of the vortex, e_{θ} is the classical tangential vector, Γ is the strength of the vortex and r_0 is the core radius. As it can be seen on the figure (H.2), the incident plane wave comes from the left and the vortex centre is at (0;0;0). In fact, computation is performed with a 3D geometry and because the mean and the incident fields are constant along one of the directions, the knowledge of the computed field on the spherical boundary is equivalent to the knowledge of this field in a 2D disk around the vortex centre.

The validity domain of the method can be estimated thanks to the maximum of $|d_r v|/|v|$ and depends on $c_{\infty}/(fr_0)$. The first two cases are computed with the frequency f = 40, the strength $\Gamma = 1, 4$ and a core radius between 20 and 50 while the last case uses the frequency 40, the strength 37, 5 and the core radius 200. The high frequency approximation is not fully justified because

 $c_{\infty}/(fr_0) \in [0,04;0,5]$ and the figures show good results partly because the incident field is a plane wave and the wavefront curvature is null.

The figure (H.2) shows that the method computes correctly the deviation angle due to the vortex. Indeed, an analytical estimation gives $\theta_{max} = \Gamma/(\pi r_0 c_{\infty})$ and this value is the deviation angle of the magenta ray passing almost through the vortex center.



Figure H.2: 10 rays crossing an Oseen vortex of core radius 30



Figure H.3: Relative phase profile behind vortices of core radius 20 (magenta and blue), 30 (yellow and red) and 50 (cyan and green) along a straight vertical line at 220 and 550 (f = 40)

An other analytical estimation indicates that, behind the vortex, the phase profile, defined as the phase difference according to the field without the vortex interaction, shows a shift which can be evaluated by

$$\Delta[\phi] = \frac{2\pi f\Gamma}{c^2} \tag{H.23}$$

In the figure (H.3), the phase behind the vortex is normalized with this value and it is clear that the six graphs confirm the good approximation of the method.

In order to fully understand the behaviour of the wave, one usually estimates the relative pressure amplitude of the scattered wave $(\pi_{tot} - \pi_{inc})/|\pi_{inc}|$. In the figure (H.4), the behaviour can be separate in two parts. The scattering effect which depends on the frequency creates the oscillations around the center while the refracting effect does not depend on



Figure H.4: Modulus of the scattered wave with a 200 core radius and a strength of 37, 5 (f = 40)

the frequency and introduces a difference between the upper side and the lower side. Near x = 0, rays bumping into the spherical domain are almost tangent to this one. Because of the use of a mesh, the ray impacts can not be located correctly on this part of the geometry. To avoid important errors, the corresponding rays are removed and thus the ray fields are unknown in a vicinity of x = 0.

H.3 Taking material surface into account

The main interest of the method consists in dealing with geometry and mean field without high computational cost. In the following section, the classical boundary conditions are adapted to the ray approach. Then, two cases show how our technique is powerful in comparison with finite element methods on the one hand and boundary element methods on the other hand. The boundary layer case is a first step for the analysis of the mean field effects around an aircraft body. In the second example, the estimation of the scattering in a uniform flow indicates that rays can be also used instead of boundary element to reduce drastically the computational cost for cases without mean field inhomogeneities. If material surfaces are "lighted" with acoustical rays, the behaviour on the surfaces have to be described carefully. Every one knows that rays are partially reflected, partially transmitted by an interface and, if this interface is not smooth, scattering effects must be taken into account.

From the Myers' boundary conditions on a smooth interface, by introducing the wave shaped function of geometrical optics, reflected fields can be defined. If the specific acoustic impedance is slowly varying according to the frequency, an asymptotic analysis indicates that, on the interface, the reflected phase is equal to the incident phase and thus

$$\nabla \phi_i - (\nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n} = \nabla \phi_r - (\nabla \phi_r \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}$$
 (H.24)

where ϕ_i stands for the incident field, ϕ_r stands for the reflected field and n is the interface normal. A similar relation can be written between the restrictions of the reflected and incident Hessian matrices on the interface.

From the knowledge of the quantities along the interface, one can construct $\nabla \phi_r$ and $\nabla \nabla \phi_r$ by using the eikonal equation. Thus, thanks to an other equation on π_r , all the quantities defining the reflected field are known and depend on the mean field, on the shape of the interface and obviously on the incident field. If the interface creates a transmitted field, it can be estimated in the same way.

The scattering effects can be added in two different ways. The first but the more difficult one consists in creating a new ray field. Indeed, the Geometrical Theory of Diffraction indicates how the scattered field can be approximate to look like a ray field. By using the same method as for the reflected and the transmitted field, mean field can be taken into account. But finding the lighted edges of an interface and creating the diffracted ray field automatically is not easy.

If the mean field is uniform, as soon as phase and amplitude are known on the material surfaces, the Physical Optics can compute the pressure field all over the space by using the Kirchhoff-Helmholtz integral. In fact, if on each beam element, the wave can be considered as plane, the Ludwig's method replace the classical surface integral by a circulation integral thanks to the Gauss' theorem.

A point source above a boundary layer

As in Atalla and Glegg³, it can be interesting to understand how a boundary layer changes the propagation of the rays and the pressure field near an interface. A point source is placed at (0;0;0) near the flat rigid surface z = -1. The domain of propagation is bounded in $[-1;2] \times [-1;1] \times [-1;1]$ by a transparent interface and fields are only known where rays strike it.

A Polhausen boundary layer velocity profile is used with a Mach number M = 0, 5 and a thickness $\delta = 0, 125$. The computation is performed at the frequency 1700 thus the wavelength is 0, 2 and the validity of the solution is not sure since the wavelength is bigger than to the boundary layer thickness. But, these results contribute to the understanding of the behaviour not only of the propagation in a boundary layer but of ray fields in general also.



Figure H.5: Total pressure field due to a point source above a boundary layer (f = 1700)

The figure (H.5) shows the interference of two waves which looks like as the mean field were uniform. In fact, for x > 0, the incident rays strike the surface and the interference is due to the sum of the incident and reflected field. But, near x = -1,

the rays are refracted before they reach the flat rigid surface and the interference is then due to the sum of the incident and refracted fields.



Figure H.6: Modulus of the difference between solutions with and without boundary layer (f = 1700)

As it can be seen on the figure (H.6), the boundary layer changes the pressure field downstream and upstream. Downstream, because, with the boundary layer, the mean velocity is null on the flat rigid surface, the pressure field is less convected and the phase increases and the amplitude decreases faster than with a uniform flow.

Upstream, in addition of the convected effect, one can see a caustic and a shadow zone. The shadow zone is near the flat rigid surface in the boundary layer thus not only the simple ray field does not describe it precisely but also it is to small to be distinguished from the inaccuracy near the surface. From the shadow limit on the flat rigid surface to the upper boundary of the computational domain, a discontinuity exists between the "incident and reflected" side and the "incident and refracted" side. In fact, due to the caustic, $\pi/4$ is subtracted to the phase of the refracted field. Even if the high frequency approximation is not valid in a vicinity of the caustic and discontinuity surfaces, one can imagine how a bit of scattering would give the "real" pressure.

Comparing ray and boundary element solutions

If the mean field is uniform, the ray method solution can be compared to a boundary element method solution. In such a case, it is obvious that the ray method will not give solutions as good as the boundary element method but an "industrial" use requires cheap "usable" solutions. The following case tries to show that the ray method is efficient in this way.



Figure H.7: Geometry used to estimate the efficiency of the ray method, the yellow and cyan points represent possible positions of the point source

The geometry in the figure (H.7) represents the back part of a business jet. A point source is located at the engine place. The frequency 3 kHz is chosen so that neither of the methods is at a disadvantage. The geometry is sufficiently complex to test every aspects of the ray method. As the mean field is uniform, the validity parameter is calculated with the length of the geometry and is almost equal to 0,02. But, there are some wedges, convex and concave parts and the curvature is not smooth thus the validity is difficult to estimate.

Because the mean field is uniform and in order to take into account a part of the scattering effects, the pressure field is computed thanks to the physical optics. The shape of the geometry produces multi-reflections but, because it is sufficiently "opened", ray solutions should be good enough. The figures below present $20 \log(|p|/\tilde{p})$ with \tilde{p} so that $20 \log(|p|/\tilde{p}) = -80 \text{ dB}$ for the incident field at 10 m around the point source.



Figure H.8: Scattered pressure radiation at 10 m around the source: BEM (blue), Kirchhoff-Helmholtz integral of the incident field (red) and multi-reflection ray solution (black)

The figure (H.8) presents the scattered pressure measured by a point moving on a circle at 10 m from the point source and in a plane parallel to the symmetry plane of the aircraft. Whereas the Kirchhoff-Helmholtz integral (red) can not estimate the interferences between the different reflected fields, the multi-reflection ray solution (black) is very close to the boundary element method solution.

With a computational cost of 25 min and 900 Mb of RAM for 20 000 rays on a Power4 1, 5 GHz processor, the ray method predicts correctly the main features of the scattered field such as the masking effect above and the reflecting effect under the horizontal part of the geometry. The boundary element method requires 1, 5 hour on 8 Power4 1, 5 GHz processor, 17 Gb of disk space and 815 Mb to compute a solution not noticially better.

The figure (H.9) demonstrates that thanks to the multi-reflection, the ray solution (black) is much better than the Kirchoff-Helmholtz solution (red) and is almost equal to the boundary element method solution (blue). In fact, between -4000 m and -500 m, the aircraft is running on the tarmac and drawing near to the listener thus only the incident field is important. From -500 m, the aircraft is flying above the listener but aside. Thus the field reflected by the fuselage must be taken into account. As an



Figure H.9: Total pressure field radiation received by a sideline microphone during a takeoff computed thanks to the methods of the figure (H.8)

important part of this field is at first reflected by the horizontal part of the geometry, that is why the multi-reflection ray solution is much better than the Kirchhoff-Helmholtz solution.

H.4 In-duct propagation

In-duct propagation is an interesting problem because the understanding of the behaviour is both difficult and needed by the aircraft designers to reduce engine noise. Many studies try to deduce numerical solutions for arbitrary shape duct from the analytical case of the rigid cylinder of circular cross section. Because ray formalism solve general problems, its application to duct propagation is straightforward as soon as the source is correctly described. Translating mode fields into ray fields allows obtaining realistic solutions. The technique is validated in a cylindrical duct of circular cross section and then the effect of a mean field and a wall impedance are estimated in an arbitrary S-duct geometry.

Ray description of modes

Since Chapman²¹, the ray structure of the field inside a cylindrical duct of circular cross section is almost completely described. Indeed a source in a cylindrical duct gives rise to a field which can be analyzed as the sum of propagating and evanescent modes. In fact, the function describing a mode can be separated in two parts depending on the position along the cylindrical duct axis for the first one and on the position in the cross-section for the second one. For a given position in the cross-section, the propagating modes behave like plane waves along the cylindrical duct axis.

In a cylindrical duct of circular cross section, the cross-section part of the modes is described thanks to Bessel functions of integer order. If the duct wall at radius r = a is assumed hard, a propagating mode can be written

$$p = e^{-i(\omega t - m\theta - k_x x)} J_m(k_r r)$$
(H.25)

where (r, θ, x) is a system of cylindrical coordinates aligned with the duct axis, m is an integer, ωt is the time harmonic part, J_m is the Bessel function of order m, $k_r = \eta_{qm}/a$ and $k_x^2 = k^2 - k_r^2$ with $J'_m(\eta_{qm}) = 0$.

Thanks to the Debye's approximation, the ray structure of a mode appears by writing

$$p = \frac{1}{2}(p^+ + p^-) \tag{H.26}$$

with

$$p^{\pm} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi m} \frac{r_{qm}}{\sqrt{r^2 - r_{qm}^2}}} e^{i\Psi^{\pm}} \tag{H.27}$$

and

$$\Psi^{\pm} = -\omega t + m\phi + k_x x \pm \{m(\tan(\gamma) - \gamma) - \frac{\pi}{4}\}$$
(H.28)

where $\tan(\gamma) = \sqrt{(r/r_{qm})^2 - 1}$ and $r_{qm} = am/\eta_{qm}$. From this expression, an interesting analysis leads to the description of the ray behaviour in the duct and at the end of it. Two fields of straight rays are successively reflecting on the hard wall of the duct and passing through a caustic. If m = 0, the caustic is reduced to the cylinder axis and rays stay on diameters of the cross-section but if m > 0, the caustic is a cylinder of radius r_{qm} and rays turn around it forming a helical structure.

The problem with the ray based description of Chapman²¹ is that rays do not "really" propagate. In fact, to construct a real ray field, the behaviour

of one ray between at least two reflections must be analyzed carefully and thus it appears that η_{qm} must be replaced by $\pi(1/4+q)/(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ with α such that

$$\tan \alpha - \alpha = \frac{\pi}{m}(\frac{1}{4} + q) \tag{H.29}$$

In fact, for q > 1, the modulus error between the new value and η_{qm} is quite small.

At the end of the duct, a new ray field can approximate the scattering effects as for every other edge but the same difficulties appear. For a first study, the "flanged duct" approximation neglects the part of the scattered field propagating backward into the duct. In fact, the pressure field is computed at a position far from the end of the duct with the Kirchhoff-Helmholtz integral of the ray fields known on the cross-section ending the duct.

"Real propagation" in a cylindrical duct with circular cross section

Thanks to the ray description of the modes, the propagation in a cylinder with a circular cross-section can be done mode by mode with the "ray shooting" method. The source is either a cross-section or a cylinder on which the two ray fields standing for the mode are constructed. A classical propagation allows obtaining the ray fields from the source to the end of the duct.

In order to verify the validity of the modal ray fields, propagations of different modes are performed in a cylindrical duct with circular cross section of radius 250 mm. The length of the duct is 8 m and at one of the two ends, a cross-section is meshed so that ray fields can be known at this end. The source surface is placed at the other end of the duct and rays propagate along the whole duct. A coarse mesh and a dense mesh of the duct are used in order to estimate the effect of the meshing.

The figure (H.7) shows how the propagation of the beam lights the duct wall. A small gap exists between two different impacts of the beam on the duct wall but the pressure field is continuous from



Figure H.10: Total pressure field on the duct wall for the mode (2, 1) and ka = 4, 62

an impact to the next one. Thus the source is correctly constructed and the propagation is correctly performed since the whole duct is lighted and the pressure field on the duct wall corresponds to $\exp(i(m\theta + k_x x))$.



Figure H.11: *Pressure field radiation at* 10 *m from the end of the duct computed for the mode* (1, 2) *and* ka =18,5 *with the coarse (blue) and the dense (red) mesh and calculated with the analytical approximation (black)*

The error due to the use of the ray fields is estimated thanks to the figure (H.11). The radius of the duct and the frequency correspond to ka = 18, 5. The radiation is computed at points located at 10 m from the duct end. 0° corresponds to a position on the duct axis and 90° to a position in the plane of the ending cross-section. The main directivity lobe is correctly predicted with the two meshes. Up to 35° , the ray fields seem to be good but the second zero on the right is moved to the right, the level of the third lobe on the right is not sufficiently high and the last zero is ignored. Nevertheless this way of propagating modes gives encouraging results and the fact that the coarse and dense meshes compute solutions almost equal leads to think that the error is due to the Debye's approximation.

In a S-duct

The ray-mode sources are used to initialize the propagation in the industrial S-duct geometry shown by the figure (H.12) The radiation in front of the up-



Figure H.12: S-duct geometry

per end of the S-duct is computed at ka = 23 with 40000 rays. Without flow, the mode (0,3) needs 15 reflections and 6 minutes with a Power4 1,5 GHz processor to propagate from the beginning to the end of the S-duct while a boundary element method would need around 8 h. If flow effects are estimated, for the same mode and frequency, the computation needs 25 reflections and 8 h 50 min while a finite element method would require dealing with at least 10^6 elements. Moreover this cost can be reduced by launching fewer rays.

The figure (H.13) shows $20 \log(|p|/\tilde{p})$ with the same normalization as previously defined. The pressure p is estimated at 10 m from the centre of the ending cross section in the symmetry plane of the geometry. Positive values correspond to the upper part and negative values to the lower part which is looking toward the aircraft body.

With a mean field flow (blue), the levels are higher



Figure H.13: Pressure radiation at 10 m from the end of the S-duct for the mode (2,3) and ka = 23 without flow and with rigid wall (black), with flow (blue) and with a wall impedance (red)

but not evenly. In fact, between -90° and -30° , the pressure modulus is nearly doubled while above it is multiplied by almost 100. For the lower part, the wall impedance (red) divides the pressure modulus by 100 at least. Even if these results are coarse, they allow preliminary analyses and the S-duct can be put back in the whole geometry to take into account more complex scattering effects.

Conclusions

Thanks to ray tracing, several design options can be estimated in a really short time. Moreover, because sound no longer propagates in straight lines, mask effects due to engine jet or wake vortices are taken into account. More accuracy could be obtained by studying interactions between geometrical and mean flow scattering effects by introducing diffracted ray fields or using beam element formalism. The method is thus an designing tool that can be adjusted to the level of accuracy required depending on the conception stage.

Bibliographie

- Toufic Abboud. Potentiels retardés. Cours du D.E.A d'Analyse numérique de l'Université Paris VI, 2002.
- [2] M.A. Alonso and G.W. Forbes. Stable aggregates of flexible elements give a stronger link between rays and waves. *Optics express*, 10(16) :728–739, august 2002.
- [3] N. Atalla and S. Glegg. A geometrical acoustics approach for calculating the effects of flow on acoustics scattering. *Journal of Sound and Vibration*, 171:681–694, 1994.
- [4] Christophe Bailly and Daniel Juvé. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA journal*, 38(1):22–29, 2000.
- [5] Guillaume Bal, Tomasz Komorowski, and Lenya Ryzhik. Self-averaging of wigner transforms in random media. *Comm. Math. Phys*, 242 :81–135, 2003.
- [6] Jean-David Benamou. An introduction to eulerian geometrical optics (1992-2002). Technical Report 4628, INRIA, 2002.
- [7] Jean-David Benamou, François Castella, Thodoros Katsaounis, and Benoît Perthame. High frequency limit of Helmholtz equations. Technical Report 3785, INRIA, 1999.
- [8] Rémy Berthet. *Intéraction son-écoulement*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Lyon, Avril 2001.
- [9] D. l. Blokhintzev. Acoustics of a non homogeneous moving medium. Technical report, N.A.S.A., 1946.
- [10] Christophe Bogey and Christophe Bailly. Computation of a high reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. *Computer & Fluids*, 35(10):1344–1358, 2006.
- [11] A. Bonnet and J. Luneau. Aérodynamique : Théories de la dynamique des fluides. Editions Cépaduès, 1989.
- [12] V.A. Borovikov and B.Ye. Kinber. *Geometrical Theory of Diffraction*. The institution of electrical engineers, 1994.
- [13] Daniel Bouche and Frédéric Molinet. Méthodes asymptotiques en électromagnétisme. Springer-Verlag, 1994.
- [14] E. J. Brambley and N. Peake. Sound transmission in strongly-curved slowly-varying cylindrical and annular lined ducts with flow. 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics conference). AIAA, May 2006.

- [15] Guillaume Brillant, Francesca Chillà, and Jean-François Pinton. Transmission of sound through a single vortex. *European Physical Journal B/ Fluids*, 37 :229–239, 2004.
- [16] Sébastien Candel. Etudes théoriques et expérimentales de la propagation acoustique en milieu inhomogène et en mouvement. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI, 1977.
- [17] Sébastien Candel. Recent advances in Aeroacoustics, chapter A review of numerical methods in acoustic wave propagation, pages 339–410. Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [18] Sébastien Candel. Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977.
- [19] Vlastislav Cerveny, Ludek Klimes, and Ivan Psencik. Seismic ray method : Recent developments. Technical report, Seismic waves in complex 3-D structures, 2004.
- [20] Olivier Cessenat and Bruno Despres. Using plane waves as base functions for solving time harmonic equations with the ultra weak variationnal formulation. *Journal of Computational Acoustics*, 11, 2003.
- [21] C. J. Chapman. Sound radiation from a cylindrical duct I, II. Journal of Fluid Mechanics, 281, 313 :293–311, 367–380, 1994, 1996.
- [22] C. J. Chapman. Caustics in cylindrical ducts. Proc. R. Soc. Lond. A, 455 :2529-2548, 1999.
- [23] C. Cheverry, O. Guès, and G. Métivier. Large amplitude high frequency waves for quasilinear hyperbolic systems. octobre 2003.
- [24] John Coats. *High fraquency asymptotics of Antenna/Structure interactions*. PhD thesis, Wolfson College of Oxford, 2002.
- [25] François Coulouvrat. Equations of weakly nonlinear acoustics in a stongly heterogeneous, high speed moving fluid paraxial approximation in generalized coordinates. Lecture notes, march 2005.
- [26] Laurent Dallois and Philippe Blanc-Benon. Wide angle parabolic equations in moving media : Sound diffraction by a core vortex. In *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2001.
- [27] J. L. Davis. Wave propagation in solids and fluids. Springer-Verlag, 1988.
- [28] Eric Dumas. *Un peu d'optique diffractive non linéaire á phases courbes*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2000.
- [29] Uwe R. Fisher and Matt Visser. Riemannian geometry of irrotational vortex acoustics. *Physical review letters*, 88 :110–201, 2002.
- [30] Thomas Funkhouser, Nicolas Tsingos, and al. A beam tracing method for interactive architectural acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115:739, 2004.
- [31] Yannick Gabillet, Hartmut Schroeder, Gilles A. Daigle, and André L'Espérance. Application of the gaussian beam approach to sound propagation in the atmosphere : theory and experiments. J. Acoust. Soc. Am., 93(6) :3105–3116, 1993.
- [32] Isabelle Gallagher. *Etude mathématique d'équations des ondes et de la mécanique des fluides*. Habilitation á diriger des recherches, Université Paris-Sud, 2002.
- [33] Oleg A. Godin and Alexander G. Voronovich. Fermat's principle for non-dispersive waves in nonstationary media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, pages 1631–1647, 2004.
- [34] Ronan Guenanff. *Couplage instationnaire Navier-Stokes/Euler pour la génération et la rayonnement des sources de bruit aérodynamique*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2004.
- [35] Stefan Hagdahl. Tracking wave fronts with lagrangian markers. Technical report, Numerisk analys och datalogi, KTH, 2001.
- [36] Ernst Hairer, Christian Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration. Structure preserving algorithms for ordinary differential equations.* Springer-Verlag, 2002.
- [37] Jean-Marc Hasenfratz. *Lancer de faisceaux en synthèse d'images*. Thèse de doctorat, Université de Limoges, 1998.
- [38] Nicolas Héron. *Modélisation statistique du bruit de jets en vue d'applications á la propulsion aéronautique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2002.
- [39] Lars Valter Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III*. Springer-Verlag, 1985.
- [40] A. Kamel and L. B. Felsen. On the ray equivalent of a group of modes. J. Acoust. Soc. Am., 71:1445– 1452, 1982.
- [41] G. M. Keith and N. Peake. High-wavenumber acoustic radiation from a thin-walled scarfed cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 2001.
- [42] Joseph B. Keller. Geometrical theory of diffraction. J. Opt. Soc. Am., 52 :116–130, 1962.
- [43] Joseph B. Keller and Bernard D. Seckler. Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. J. Acoust. Soc. Am., 31(2):206–216, 1959.
- [44] Joseph B. Keller and Bernard D. Seckler. Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 31(2):192–205, 1959.
- [45] Ludek Klimes. Transformation for dynamic ray tracing in anisotropic media. Wave Motion, 20:261– 272, 1994.
- [46] Eric Lafortune. *Mathematical models and Monte Carlo algorithms for physically based rendering*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, février 1996.
- [47] Damien Laval. Application de méthodes asymptotiques á la simulation de la diffraction électromagnétique par un corps régulier. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2006.
- [48] Guillaume Legendre. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : Analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun.* Thèse de doctorat, Université Paris VI, Septembre 2003.
- [49] Stéphane Lidoine, Hervé Batard, Sophie Troyes, Alexia Delnevo, and Michel Roger. Acoustic radiation modelling of aeroengine intake comparison between analytical and numerical methods. In 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2001.
- [50] Sébastien Manneville. Interaction son-vorticité et retournement temporel, des outils pour la caractérisation acoustique d'écoulements tourbillonnaires. Thèse de doctorat, Université de Paris 7 - Denis Diderot, Juin 2000.
- [51] Régis Marchiano. *Singularités d'amplitude et de phase en acoustique non linéaire. Application au bang sonique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, Décembre 2003.
- [52] Frédéric Molinet, Iran Andronov, and Daniel Bouche. *Asymptotic and hybrid methods in electromagnetics*. IEE Electromagnetic waves series. IEE, 2005.

- [53] M.K. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, 71(3):429–434, 1980.
- [54] Guy Métivier and Steven Schochet. Limite incompressible des équations d'euler non isentropiques. Séminaire équations aux dérivées partielles. Ecole polytechnique, 2001.
- [55] V. Pagneux and S. Felix. Sound attenuation in lined bends. J. Acoust. Soc. Am., 2004.
- [56] V. Pagneux and S. Felix. Ray-wave correspondence in bent waveguides. *Wave Motion*, 41:339–355, 2005.
- [57] P. H. Pathak and R. J. Burkholder. Modal, ray and beam techniques for analyzing the em scattering by open-ended waveguide cavities. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 37(5):635–647, 1989.
- [58] Allan D. Pierce. *Acoustics, an introduction to its physical principles and applications.* Acoustical Society of America, 1994.
- [59] Michael B. Porter and Homer P. Bucker. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(4) :1349–1359, 1987.
- [60] Jeffrey Rauch. Lectures on geometric optics. Department of Mathematics, University of Michigan, 1995-2004.
- [61] Stéphane Redonnet. Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2001.
- [62] S. W. Rienstra and A. Hirschberg. An introduction to acoustics, mars 2004.
- [63] Sjoerd W. Rienstra. A classification of duct modes based on surface waves. Number 2180. AIAA, 2001.
- [64] Sjoerd W. Rienstra. Sound propagation in slowly varying lined flow ducts of arbitrary cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, 495 :157–173, 2003.
- [65] Sjoerd W. Rienstra and Peake Nigel. Modal scattering at an impedance transition in a lined flow duct. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. AIAA, 2005.
- [66] Sandy Sefi. Ray tracing tools for high frequency electromagnetics simulations. Master's thesis, Royal institute of technology Universitet Stockholm, 2003.
- [67] Sandy Sefi. *Computational electromagnetics : Sofware development and high frequency modelling of surface currents on perfect conductors.* PhD thesis, Royal institute of technology Universitet Stockholm, 2005.
- [68] C. Seror, P. Sagaut, C. Bailly, and D. Juvé. On the radiated noise computed by large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 13(2):476–487, 2001.
- [69] Denis Serre. Systèmes de lois de conservation. Diderot Editeur, Arts et sciences, 1996.
- [70] J.A. Sethian. Level set methods and fast marching methods. Cambridge university press, 1999.
- [71] Ruslan A. Sharipov. Normal shift in general lagrangian dynamics. Technical report, arXiv.org, décembre 2001.
- [72] SIGGRAPH. Implicit surfaces for geometric modeling and computer graphics, 1996.

- [73] SIGGRAPH. A primer on shapes : curves and surfaces, 2001.
- [74] Ian Solliec. *Optique géométrique eulerienne et calcul d'énergie électromagnétique en présence de caustiques de type pli*. Thèse de doctorat, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, Mars 2003.
- [75] Christof Sparber, Peter A. Markowich, and Norbert J. Mauser. Wigner functions versus WKBmethods in multivalued geometrical optics. J. Asympt. Anal., 33(2):153–187, 2003.
- [76] Denis Tschumperle. *Etude numérique de l'interaction tourbillons-onde acoustique*. Thèse de doctorat, Université du Havre, Janvier 2000.
- [77] Peter Ugincius. Intensity equations in ray acoustics I, II. J. Acoust. Soc. Am., 45(1):193–209, 1969.
- [78] Peter Ugincius. Ray acoustics and Fermat's principle in a moving inhomogeneous medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(5(2)):1759–1763, 1972.
- [79] Gregory Vilenski and Sjoerd W. Rienstra. Acoustic modes in ducted shear flow. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. AIAA, 2005.
- [80] K. Zacek. Decomposition of the wavefield into optimized gaussian packets. *Stud. geophys. geod.*, 50:367–380, 2006.

Méthodes de rayons en aéroacoustique

L'estimation du bruit rayonné par les avions pendant les phases de décollage et d'atterrissage nécessite de pouvoir traiter simultanément des distances de propagation supérieures au kilomètre et des ondes de longueur caractéristique inférieure au centimètre. De plus, l'ensemble de l'environnement autour de l'avion, c'est-à-dire la géométrie et l'écoulement, doit être pris en compte. La méthode mise en place au cours de cette thèse vise à s'affranchir de ces contraintes, pour des coûts de calcul réduits.

Les méthodes de rayons en aéroacoustique présentent un double avantage. Tout d'abord, la construction du chemin parcouru par le son apporte une aide intuitive à la conception en identifiant les principaux mécanismes ayant une influence sur le bruit perçu. La justification analytique du calcul des trajectoires lagrangiennes à partir des équations de la mécanique des fluides grâce aux développements asymptotiques fournit ensuite une estimation de l'erreur en fonction de la géométrie, de l'écoulement et de la source. En particulier, des phénomènes diffractifs et diffusifs sont ajoutés pour les zones où l'optique géométrique n'est pas suffisante, comme au voisinage des caustiques ou dans l'ombre des surfaces matérielles.

Par rapport aux études précédentes, les améliorations apportées dans ce travail se répartissent suivant trois axes. D'un point de vue théorique, l'étude complète réalisée généralise des descriptions jusqu'ici essentiellement liées à la propagation rectiligne en incluant l'effet de l'écoulement et des variations de la vitesse du son. D'un point de vue numérique, la propagation effective par faisceaux grâce à un schéma d'intégration et une interpolation *ad hoc* traite indifféremment n'importe quelle configuration, y compris les cas de propagation guidée. Enfin, l'utilisation des champs obtenus par notre méthode de propagation dans des calculs de rayonnement utilisant classiquement des potentiels exacts permet d'allier précision et rapidité.